ओपन लॉजिक परियोजना

संपूर्ण हिंदी संस्करण

जमी हुई स्रोत प्रति: 9620cc7

मूल लेखक: Open Logic Project
हिंदी रूपांतरण: AI typesetting & translation

मुक्त तर्क पाठ, मुक्त तर्क परियोजना द्वारा रचित, क्रिएटिव कॉमन्स नामोल्लेख 4.0 अंतरराष्ट्रीय अनुज्ञप्ति के अधीन उपलब्ध है।

ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट के बारे में

Open Logic Text, औपचारिक अधितर्कशास्त्र और औपचारिक विधियों की मुक्त-स्रोत सहयोगात्मक पाठ्यपुस्तक है, जो मध्यवर्ती स्तर (अर्थात् औपचारिक तर्कशास्त्र के आरंभिक पाठ्यक्रम के बाद) से आरंभ होती है। यद्यपि इसका लक्ष्य गैर-गणितीय पाठक (विशेषतः दर्शन और कंप्यूटर विज्ञान के विद्यार्थी) हैं, यह कठोर है।

अभी सम्मिलित कुछ विषयों का विवेचन संभवतः पूरा नहीं है और अनेक खंडों में अब भी पर्याप्त संशोधन चाहिए। भविष्य में अधिक विषयों को समेटने के लिए पाठ का विस्तार करने की योजना है। हम इसमें शब्दावली, आगे पढ़ने की सूची, ऐतिहासिक टिप्पणियाँ, चित्र, बेहतर व्याख्याएँ, दर्शन, कंप्यूटर विज्ञान और गणित के लिए परिणामों की प्रासंगिकता समझाने वाले खंड तथा अधिक समस्याएँ और उदाहरण जैसी विशेषताएँ जोड़ने की भी योजना रखते हैं। यदि आपको कोई त्रुटि मिले या कोई सुझाव हो, तो परियोजना दल को बताएँ।

परियोजना मुक्त स्रोत की भावना से चलती है। पाठ केवल निःशुल्क उपलब्ध ही नहीं है; हम लाटेक स्रोत को क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन लाइसेंस के अंतर्गत देते हैं, जो उपयुक्त श्रेय देने की शर्त पर किसी को भी हमारा कार्य डाउनलोड करने, प्रयोग करने, बदलने, पुनर्व्यवस्थित करने, रूपांतरित करने और पुनर्वितरित करने का अधिकार देता है। अधिक जानकारी के लिए ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट की वेबसाइट openlogicproject.org देखें।

अनुक्रम

ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट के बारे में 1

I सहज समुच्चय सिद्धांत 24

1 समुच्चय 26
1.1 अवयव-निर्धारित समानता . . . 26
1.2 उपसमुच्चय और घात समुच्चय . . . 27
1.3 कुछ महत्त्वपूर्ण समुच्चय . . . 28
1.4 सम्मिलन और सर्वनिष्ठ . . . 29
1.5 युग्म, क्रमित अवयव-समूह और कार्तीय गुणनफल . . . 31
1.6 रसेल का विरोधाभास . . . 32
प्रश्न . . . 33

2 संबंध 35
2.1 समुच्चयों के रूप में संबंध . . . 35
2.2 दार्शनिक विचार . . . 36
2.3 संबंधों के विशेष गुणधर्म . . . 37
2.4 तुल्यता संबंध . . . 38
2.5 क्रम . . . 39
2.6 आलेख . . . 40
2.7 वृक्ष . . . 41
2.8 संबंधों पर संक्रियाएँ . . . 43
प्रश्न . . . 43

3 फलन 44
3.1 फलनों की मूल बातें . . . 44
3.2 फलनों के प्रकार . . . 45
3.3 संबंधों के रूप में फलन . . . 47
3.4 फलनों के प्रतिलोम . . . 48
3.5 फलनों का संयोजन . . . 50
3.6 आंशिक फलन . . . 50
प्रश्न . . . 51

4 समुच्चयों का आकार 52
4.1 परिचय . . . 52
4.2 गणन और गणनीय समुच्चय . . . 52

4.3 कैंटर की आड़ी-तिरछी विधि 55
4.4 युग्मन फलन और कूट 56
4.5 एक वैकल्पिक युग्मन फलन 57
4.6 अगणनीय समुच्चय 58
4.7 न्यूनीकरण 61
4.8 समसंख्यता 62
4.9 भिन्न आकार के समुच्चय और कैंटर का प्रमेय 63
4.10 आकार की धारणा और श्रोडर–बर्नस्टीन 64
4.11 गणन और गणनीय समुच्चय 65
4.12 अगणनीय समुच्चय 66
4.13 न्यूनीकरण 68
प्रश्न 68

5 अंकगणितीकरण **72**
5.1 $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Z}$ तक 72
5.2 $\mathbb{Z}$ से $\mathbb{Q}$ तक 73
5.3 वास्तविक संख्या-रेखा 74
5.4 $\mathbb{Q}$ से $\mathbb{R}$ तक 75
5.5 कुछ दार्शनिक विचार 77
5.6 क्रमित वलय और क्षेत्र 78
5.7 परिशिष्ट: कौशी अनुक्रमों के रूप में वास्तविक संख्याएँ 81
प्रश्न 83

6 अनंत समुच्चय **85**
6.1 हिल्बर्ट का होटल 85
6.2 डेडेकिंड बीजगणित 86
6.3 अंकगणितीय आगमन 87
6.4 डेडेकिंड का “प्रमाण” 88
6.5 परिशिष्ट: श्रोडर–बर्नस्टीन का प्रमाण 89

II प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र **91**

7 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान **93**
7.1 परिचय 93
7.2 प्रतिज्ञप्ति सूत्र 94
7.3 प्रारंभिक तथ्य 95
7.4 निर्माण अनुक्रम 96
7.5 सत्य-मूल्यांकन और संतुष्टि 98
7.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ 99
प्रश्न 100

8 व्युत्पत्ति-तंत्र **101**
8.1 परिचय 101
8.2 अनुक्रम-कलन 102
8.3 स्वाभाविक निगमन 103
8.4 सत्य-वृक्ष 104

8.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ 105

9 अनुक्रम-कलन **106**
9.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 106
9.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 107
9.3 संरचनात्मक नियम 107
9.4 व्युत्पत्तियाँ 108
9.5 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण 110
9.6 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 113
9.7 व्युत्पन्नता और संगतता 114
9.8 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 115
9.9 सुदृढ़ता 117
प्रश्न 120

10 स्वाभाविक निगमन **122**
10.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 122
10.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 122
10.3 व्युत्पत्तियाँ 124
10.4 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण 125
10.5 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 128
10.6 व्युत्पन्नता और संगतता 129
10.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 130
10.8 सुदृढ़ता 132
प्रश्न 134

11 सत्य-वृक्ष **136**
11.1 नियम और सत्य-वृक्ष 136
11.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 137
11.3 सत्य-वृक्ष 138
11.4 सत्य-वृक्ष के उदाहरण 139
11.5 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 142
11.6 व्युत्पन्नता और संगतता 144
11.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 145
11.8 सुदृढ़ता 147
प्रश्न 149

12 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ **151**
12.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 151
12.2 प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के अभिगृहीत और नियम 152
12.3 व्युत्पत्तियाँ के उदाहरण 153
12.4 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 154
12.5 निगमन प्रमेय 155
12.6 व्युत्पन्नता और संगतता 156
12.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 157
12.8 सुदृढ़ता 158
प्रश्न 158

13 पूर्णता प्रमेय **160**
13.1 परिचय 160
13.2 प्रमाण की रूपरेखा 161
13.3 वाक्यों के पूर्ण संगत समुच्चय 161
13.4 लिंडेनबाउम उपपत्ति 163
13.5 प्रतिरूप का निर्माण 163
13.6 पूर्णता प्रमेय 164
13.7 संहतता प्रमेय 165
13.8 संहतता प्रमेय का प्रत्यक्ष प्रमाण 165
प्रश्न 166

III प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र **167**

14 प्रथम-क्रम तर्क का परिचय **169**
14.1 प्रथम-क्रम तर्क 169
14.2 वाक्यविन्यास 170
14.3 सूत्रों 170
14.4 संतुष्टि 171
14.5 वाक्यों 172
14.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ 173
14.7 प्रतिस्थापन 174
14.8 प्रतिरूप और सिद्धान्त 174
14.9 सुदृढ़ता और पूर्णता 175

15 प्रथम-क्रम तर्क का वाक्यविन्यास **176**
15.1 परिचय 176
15.2 प्रथम-क्रम भाषाएँ 176
15.3 पद तथा सूत्रों का निर्माण 177
15.4 अद्वितीय पठनीयता 180
15.5 किसी सूत्र का प्रधान संक्रियक 182
15.6 उपसूत्रों की धारणा 183
15.7 निर्माण-अनुक्रम 184
15.8 मुक्त चरों और वाक्यों की धारणा 187
15.9 प्रतिस्थापन 187
प्रश्न 189

16 प्रथम-क्रम तर्क का अर्थविज्ञान **190**
16.1 परिचय 190
16.2 प्रथम-क्रम भाषाओं के लिए संरचनाएँ 190
16.3 प्रथम-क्रम भाषाओं के लिए आच्छादित संरचनाएँ 192
16.4 संरचना में सूत्र की संतुष्टि 192
16.5 चर-नियतन 196
16.6 विस्तारात्मकता 199
16.7 अर्थगत धारणाएँ 200
प्रश्न 202

17 सिद्धांत और उनके प्रतिरूप **204**
17.1 परिचय 204
17.2 संरचनाएँ: उनके गुणधर्म व्यक्त करना 205
17.3 प्रथम-क्रम सिद्धांतों के उदाहरण 206
17.4 संरचना में संबंध व्यक्त करना 208
17.5 समुच्चयों का सिद्धांत 208
17.6 संरचनाएँ: उनका आकार व्यक्त करना 210
प्रश्न 211

18 व्युत्पत्ति-तंत्र **213**
18.1 परिचय 213
18.2 अनुक्रम-कलन 214
18.3 स्वाभाविक निगमन 215
18.4 सत्य-वृक्ष 216
18.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ 217

19 अनुक्रम-कलन **218**
19.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 218
19.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 219
19.3 परिमाणक-नियम 220
19.4 संरचनात्मक नियम 221
19.5 व्युत्पत्तियाँ 221
19.6 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण 223
19.7 परिमाणकों वाली व्युत्पत्तियाँ 226
19.8 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 227
19.9 व्युत्पन्नता और संगतता 228
19.10 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 229
19.11 व्युत्पन्नता और परिमाणक 230
19.12 सुदृढ़ता 231
19.13 व्युत्पत्तियाँ: तादात्म्य सहित 235
19.14 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता 236
प्रश्न 236

20 स्वाभाविक निगमन **238**
20.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 238
20.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 238
20.3 परिमाणक-नियम 240
20.4 व्युत्पत्तियाँ 241
20.5 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण 242
20.6 परिमाणकों वाली व्युत्पत्तियाँ 245
20.7 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 248
20.8 व्युत्पन्नता और संगतता 249
20.9 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 250
20.10 व्युत्पन्नता और परिमाणक 252
20.11 सुदृढ़ता 252
20.12 व्युत्पत्तियाँ: तादात्म्य सहित 256
20.13 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता 257

प्रश्न 257

21 सत्य-वृक्ष **260**
21.1 नियम और सत्य-वृक्ष 260
21.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम 261
21.3 परिमाणक-नियम 262
21.4 सत्य-वृक्ष 263
21.5 सत्य-वृक्ष के उदाहरण 264
21.6 परिमाणकों सहित सत्य-वृक्ष 267
21.7 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 270
21.8 व्युत्पन्नता और संगतता 272
21.9 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 274
21.10 व्युत्पन्नता और परिमाणक 276
21.11 सुदृढ़ता 277
21.12 तादात्म्य सहित सत्य-वृक्ष 279
21.13 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता 280
प्रश्न 280

22 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ **283**
22.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ 283
22.2 प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के अभिगृहीत और नियम 284
22.3 परिमाणकों के अभिगृहीत और नियम 285
22.4 व्युत्पत्तियाँ के उदाहरण 285
22.5 परिमाणकों सहित व्युत्पत्तियाँ 287
22.6 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 287
22.7 निगमन प्रमेय 288
22.8 परिमाणकों सहित निगमन प्रमेय 290
22.9 व्युत्पन्नता और संगतता 290
22.10 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक 291
22.11 व्युत्पन्नता और परिमाणक 292
22.12 सुदृढ़ता 292
22.13 व्युत्पत्तियाँ : तादात्म्य सहित 293
प्रश्न 294

23 पूर्णता प्रमेय **295**
23.1 परिचय 295
23.2 प्रमाण की रूपरेखा 296
23.3 वाक्यों के पूर्ण संगत समुच्चय 297
23.4 हेंकिन विस्तार 298
23.5 लिंडेनबाउम उपपत्ति 300
23.6 प्रतिरूप का निर्माण 301
23.7 तादात्म्य 303
23.8 पूर्णता प्रमेय 305
23.9 संहतता प्रमेय 305
23.10 संहतता प्रमेय का प्रत्यक्ष प्रमाण 307
23.11 लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय 308
प्रश्न 308

24 प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के परे 310
24.1 अवलोकन . . . 310
24.2 बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र . . . 311
24.3 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र . . . 311
24.4 उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र . . . 314
24.5 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र . . . 316
24.6 विधात्मक तर्कशास्त्र . . . 319
24.7 अन्य तर्कशास्त्र . . . 320

IV निदर्श सिद्धांत 321

25 प्रतिरूप सिद्धांत की आधारभूत बातें 323
25.1 न्यूनीकृत रूप और विस्तार . . . 323
25.2 उपसंरचनाएँ . . . 323
25.3 अतिप्रवाह . . . 324
25.4 समरूपी संरचनाएँ . . . 324
25.5 किसी संरचना का सिद्धांत . . . 326
25.6 आंशिक समरूपताएँ . . . 326
25.7 सघन रैखिक क्रम . . . 328
प्रश्न . . . 329

26 अंकगणित के प्रतिरूप 330
26.1 परिचय . . . 330
26.2 अंकगणित के मानक प्रतिरूप . . . 331
26.3 अमानक प्रतिरूप . . . 332
26.4 Q के प्रतिरूप . . . 333
26.5 PA के प्रतिरूप . . . 335
26.6 अंकगणित के संगणनीय प्रतिरूप . . . 338
प्रश्न . . . 339

27 अंतर्वेशन प्रमेय 341
27.1 परिचय . . . 341
27.2 वाक्यों का पृथक्करण . . . 341
27.3 क्रेग का अंतर्वेशन प्रमेय . . . 342
27.4 परिभाषणीयता प्रमेय . . . 344

28 लिंडस्ट्रॉम (Lindström) का प्रमेय 346
28.1 परिचय . . . 346
28.2 अमूर्त तर्क . . . 346
28.3 संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण . . . 347
28.4 लिंडस्ट्रॉम (Lindström) का प्रमेय . . . 349

V गणनीयता 351

29 पुनरावर्ती फलन 353
29.1 परिचय . . . 353

29.2 आदिम पुनरावर्तन 354
29.3 संयोजन 355
29.4 आदिम पुनरावर्ती फलन 356
29.5 आदिम पुनरावर्तन की संकेत-पद्धतियाँ 359
29.6 आदिम पुनरावर्ती फलन संगणनीय हैं 359
29.7 आदिम पुनरावर्ती फलनों के उदाहरण 360
29.8 आदिम पुनरावर्ती संबंध 362
29.9 परिबद्ध न्यूनीकरण 364
29.10 अभाज्य संख्याएँ 365
29.11 अनुक्रम 366
29.12 वृक्ष 368
29.13 अन्य पुनरावर्तन 369
29.14 गैर-आदिम पुनरावर्ती फलन 370
29.15 आंशिक पुनरावर्ती फलन 371
29.16 प्रसामान्य-रूप प्रमेय 372
29.17 विराम समस्या 373
29.18 सामान्य पुनरावर्ती फलन 374
प्रश्न 374

30 संगणनीयता सिद्धांत **376**
30.1 परिचय 376
30.2 संगणनाओं का कूटांकन 377
30.3 प्रसामान्य रूप प्रमेय 377
30.4 s-m-n प्रमेय 379
30.5 सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन 379
30.6 कोई सार्वत्रिक संगणनीय फलन नहीं 379
30.7 विराम समस्या 380
30.8 रसेल के विरोधाभास से तुलना 381
30.9 संगणनीय समुच्चय 382
30.10 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय 382
30.11 C. E. समुच्चयों की परिभाषाएँ 383
30.12 असंगणनीय समुच्चय अस्तित्व में हैं 385
30.13 C.E. समुच्चयों का संघ और प्रतिच्छेद 385
30.14 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय पूरक के अंतर्गत संवृत नहीं हैं 386
30.15 अपचयनीयता 387
30.16 अपचयनीयता के गुण 388
30.17 पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय 388
30.18 अपचयनीयता का एक उदाहरण 389
30.19 पूर्णता अनिर्णेय है 390
30.20 राइस का प्रमेय 391
30.21 नियत-बिंदु प्रमेय 392
30.22 नियत-बिंदु प्रमेय का अनुप्रयोग 395
30.23 स्व-संदर्भ से फलनों की परिभाषा 396
प्रश्न 396

VI ट्यूरिंग मशीनें 397

31 ट्यूरिंग मशीन संगणनाएँ 398
31.1 परिचय . . . 398
31.2 ट्यूरिंग मशीनों का निरूपण . . . 399
31.3 ट्यूरिंग मशीनें . . . 402
31.4 विन्यास और संगणनाएँ . . . 403
31.5 संख्याओं का एकाधारी निरूपण . . . 404
31.6 विराम-अवस्थाएँ . . . 406
31.7 अनुशासित मशीनें . . . 407
31.8 ट्यूरिंग मशीनों का संयोजन . . . 408
31.9 ट्यूरिंग मशीनों के रूपांतर . . . 410
31.10 चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा . . . 411
प्रश्न . . . 412

32 अनिर्णेयता 414
32.1 परिचय . . . 414
32.2 ट्यूरिंग मशीनों का परिगणन . . . 415
32.3 सार्वत्रिक ट्यूरिंग मशीनें . . . 417
32.4 विराम समस्या . . . 418
32.5 निर्णय समस्या . . . 420
32.6 ट्यूरिंग मशीनों का निरूपण . . . 420
32.7 निरूपण का सत्यापन . . . 423
32.8 निर्णय समस्या असमाधेय है . . . 426
32.9 ट्राख्टेनब्रॉट का प्रमेय . . . 427
प्रश्न . . . 429

VII अपूर्णता 431

33 अपूर्णता का परिचय 433
33.1 ऐतिहासिक पृष्ठभूमि . . . 433
33.2 परिभाषाएँ . . . 435
33.3 अपूर्णता परिणामों का अवलोकन . . . 439
33.4 अनिर्णेयता और अपूर्णता . . . 440
प्रश्न . . . 441

34 वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण 442
34.1 परिचय . . . 442
34.2 चिह्नों का कूटलेखन . . . 443
34.3 पदों का कूटलेखन . . . 444
34.4 सूत्रों का कूटलेखन . . . 446
34.5 प्रतिस्थापन . . . 447
34.6 LK में व्युत्पत्तियाँ . . . 447
34.7 स्वाभाविक निगमन में व्युत्पत्तियाँ . . . 450
34.8 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ . . . 454
प्रश्न . . . 457

35 Q में निरूपणीयता 459
35.1 परिचय . . . 459
35.2 Q में निरूपणीय फलन संगणनीय हैं . . . 460
35.3 बीटा फलन उपपत्ति . . . 462
35.4 आदिम पुनरावर्तन का अनुकरण . . . 464
35.5 मूल फलन Q में निरूपणीय हैं . . . 465
35.6 संयोजन Q में निरूपणीय है . . . 467
35.7 नियमित न्यूनीकरण Q में निरूपणीय है . . . 469
35.8 संगणनीय फलन Q में निरूपणीय हैं . . . 471
35.9 संबंधों का निरूपण . . . 472
35.10 अनिर्णेयता . . . 472
35.11 Σ_1 पूर्णता . . . 473
प्रश्न . . . 476

36 सिद्धांत और संगणनीयता 477
36.1 परिचय . . . 477
36.2 Q, संगणनीयतः परिगणनीय-पूर्ण है . . . 477
36.3 Q के ω-संगत विस्तार अनिर्णेय हैं . . . 478
36.4 Q के संगत विस्तार अनिर्णेय हैं . . . 478
36.5 अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत . . . 479
36.6 अभिगृहीतीकरणीय पूर्ण सिद्धांत निर्णेय हैं . . . 480
36.7 Q का कोई पूर्ण, संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार नहीं है . . . 480
36.8 Q में सिद्ध और खंडनीय वाक्य संगणनीयतः अवियोज्य हैं . . . 480
36.9 Q के साथ संगत सिद्धांत अनिर्णेय हैं . . . 481
36.10 जिन सिद्धांतों में Q व्याख्येय है वे अनिर्णेय हैं . . . 482

37 अपूर्णता और सिद्धता 483
37.1 परिचय . . . 483
37.2 नियत-बिंदु उपपत्ति . . . 484
37.3 प्रथम अपूर्णता-प्रमेय . . . 485
37.4 रॉसर का प्रमेय . . . 487
37.5 ग्योडेल (Gödel) के मूल शोधपत्र से तुलना . . . 488
37.6 PA के लिए व्युत्पन्नता प्रतिबंध . . . 488
37.7 द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय . . . 489
37.8 लोब (Löb) का प्रमेय . . . 491
37.9 सत्यता की अपरिभाष्यता . . . 493
प्रश्न . . . 494

VIII द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र 495

38 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान 497
38.1 परिचय . . . 497
38.2 पद और सूत्रों . . . 498
38.3 संतुष्टि . . . 498
38.4 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ . . . 500
38.5 अभिव्यंजक शक्ति . . . 501

38.6 अनंत और गणनीय प्रांतों का वर्णन 502
प्रश्न 503

39 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का अधिसिद्धांत **504**
39.1 परिचय 504
39.2 द्वितीय-कोटि अंकगणित 504
39.3 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र अभिगृहीतीकरणीय नहीं है 506
39.4 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र संहत नहीं है 506
39.5 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय विफल होता है 507
प्रश्न 507

40 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र और समुच्चय सिद्धांत **508**
40.1 परिचय 508
40.2 समुच्चयों की तुलना 508
40.3 समुच्चयों के आकार 509
40.4 सातत्य की शक्ति 510

IX लैम्ब्डा कलन **512**

41 परिचय **514**
41.1 रूपरेखा 514
41.2 लैम्ब्डा कलन का वाक्यविन्यास 515
41.3 लैम्ब्डा पदों का अपचयन 516
41.4 चर्च–रॉसर गुण 517
41.5 करीकरण 517
41.6 लैम्ब्डा-परिभाष्य अंकगणितीय फलन 518
41.7 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संगणनीय हैं 518
41.8 संगणनीय फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं 519
41.9 मूल आदिम पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं 519
41.10 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संयोजन के अधीन संवृत हैं 519
41.11 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत हैं 520
41.12 अचल-बिंदु संयोजक 522
41.13 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन न्यूनीकरण के अधीन संवृत हैं 523

42 वाक्यविन्यास **524**
42.1 पद 524
42.2 अद्वितीय पठनीयता 524
42.3 संक्षिप्त वाक्यविन्यास 525
42.4 मुक्त चर 526
42.5 प्रतिस्थापन 527
42.6 α-परिवर्तन 529
42.7 डे ब्रुइन सूचकांक 532
42.8 α-तुल्यता वर्गों के रूप में पद 533
42.9 β-अपचयन 534
42.10 η-परिवर्तन 535
प्रश्न 536

43 चर्च–रॉसर गुण **538**
43.1 परिभाषा और गुण 538
43.2 समांतर β-अपचयन 539
43.3 β-अपचयन 541
43.4 समांतर $\beta\eta$-अपचयन 542
43.5 $\beta\eta$-अपचयन 543
प्रश्न 543

44 लैम्ब्डा-परिभाष्यता **544**
44.1 परिचय 544
44.2 लैम्ब्डा-परिभाष्य अंकगणितीय फलन 545
44.3 युग्म और पूर्ववर्ती 547
44.4 सत्य-मान और संबंध 547
44.5 आदिम पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं 548
44.6 अचल-बिंदु 550
44.7 न्यूनीकरण 553
44.8 आंशिक पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं 553
44.9 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन पुनरावर्ती हैं 554
प्रश्न 554

X बहुमूल्य तर्कशास्त्र **556**

45 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान **558**
45.1 परिचय 558
45.2 भाषाएँ और संयोजक 558
45.3 सूत्रों 559
45.4 आव्यूह 559
45.5 सत्य-मूल्यांकनों और संतुष्टि 560
45.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ 561
45.7 **C** के उपतर्कशास्त्रों के रूप में बहुमूल्य तर्कशास्त्र 561
प्रश्न 562

46 त्रिमूल्य तर्कशास्त्र **563**
46.1 परिचय 563
46.2 लुकासिएविच तर्कशास्त्र 563
46.3 क्लिनी तर्कशास्त्र 565
46.4 गोडेल तर्कशास्त्र 567
46.5 केवल $\mathbb{T}$ को निर्दिष्ट न करना 568
प्रश्न 570

47 अनंत-मूल्य तर्कशास्त्र **573**
47.1 परिचय 573
47.2 लुकासिएविच तर्कशास्त्र 573
47.3 गोडेल तर्कशास्त्र 574
प्रश्न 576

48 सीक्वेंट कलन 577
48.1 परिचय 577
48.2 नियम और व्युत्पत्तियाँ 578
48.3 संरचनात्मक नियम 578
48.4 चयनित तर्कशास्त्रों के प्रतिज्ञप्तिक नियम 579

XI सामान्य मोडल तर्कशास्त्र 583

49 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान 585
49.1 परिचय 585
49.2 मूल मोडल तर्कशास्त्र की भाषा 586
49.3 युगपत प्रतिस्थापन 587
49.4 संबंधात्मक प्रतिरूप 588
49.5 किसी जगत पर सत्यता 589
49.6 किसी प्रतिरूप में सत्यता 590
49.7 मान्यता 590
49.8 सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत 591
49.9 स्कीमाएँ और मान्यता 593
49.10 परिणाम 594
प्रश्न 594

50 फ्रेम-परिभाष्यता 597
50.1 परिचय 597
50.2 अभिगम्यता संबंधों के गुण 597
50.3 फ्रेम 599
50.4 फ्रेम-परिभाष्यता 600
50.5 प्रथम-कोटि परिभाष्यता 601
50.6 तुल्यता संबंध और S5 602
50.7 द्वितीय-कोटि परिभाष्यता 604
प्रश्न 605

51 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ 607
51.1 परिचय 607
51.2 सामान्य मोडल तर्कशास्त्र 608
51.3 व्युत्पत्तियाँ और मोडल तंत्र 609
51.4 K में प्रमाण 610
51.5 व्युत्पन्न नियम 612
51.6 K में कुछ और प्रमाण 614
51.7 द्वैत सूत्रों 615
51.8 मोडल तंत्रों में प्रमाण 615
51.9 यथार्थता 616
51.10 तंत्रों की भिन्नता दिखाना 617
51.11 सूत्रोंों के समुच्चय से व्युत्पन्नता 618
51.12 व्युत्पन्नता के गुण 618
51.13 संगति 619
प्रश्न 619

52 पूर्णता और विहित प्रतिरूप 621
52.1 परिचय 621
52.2 पूर्ण Σ-संगत समुच्चय 622
52.3 लिंडेनबाउम का लेम्मा 623
52.4 मोडलताएँ और पूर्ण संगत समुच्चय 624
52.5 विहित प्रतिरूप 626
52.6 सत्यता लेम्मा 626
52.7 **K** के लिए निर्धारण और पूर्णता 627
52.8 फ़्रेम-पूर्णता 628
प्रश्न 630

53 निस्यंदन और निर्णेयता 631
53.1 परिचय 631
53.2 प्रारंभिक बातें 632
53.3 निस्यंदन 633
53.4 निस्यंदनों के उदाहरण 635
53.5 निस्यंदन परिमित होते हैं 636
53.6 **K** और **S5** में परिमित प्रतिरूप गुण 636
53.7 **S5** निर्णेय है 637
53.8 निस्यंदन और अभिगम्यता के गुण 637
53.9 यूक्लिडीय प्रतिरूपों के निस्यंदन 639
प्रश्न 640

54 मोडल सत्य-वृक्ष 641
54.1 परिचय 641
54.2 K के नियम 642
54.3 **K** के लिए सत्य-वृक्ष 643
54.4 **K** के लिए यथार्थता 644
54.5 अन्य अभिगम्यता संबंधों के नियम 646
54.6 अतिरिक्त नियमों के लिए यथार्थता 648
54.7 **S5** के लिए सरल सत्य-वृक्ष 649
54.8 **K** के लिए पूर्णता 650
54.9 सत्य-वृक्ष से प्रतिप्रतिरूप 652
प्रश्न 653

55 मोडल सीक्वेंट कलन 655
55.1 परिचय 655
55.2 **K** के नियम 655
55.3 **K** के लिए सीक्वेंट व्युत्पत्तियाँ 656
55.4 अन्य अभिगम्यता संबंधों के नियम 657
प्रश्न 658

XII अनुप्रयुक्त मोडल तर्कशास्त्र 659

56 कालिक तर्कशास्त्र 661
56.1 परिचय 661

56.2 कालिक तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान 661
56.3 कालिक फ्रेमों के गुण 663
56.4 कालिक तर्कशास्त्र के अतिरिक्त संकारक 664
56.5 संभावित इतिहास 664

57 ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र **666**
57.1 परिचय 666
57.2 ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की भाषा 667
57.3 संबंधात्मक प्रतिरूप 668
57.4 किसी जगत पर सत्यता 668
57.5 अभिगम्यता संबंध और ज्ञानात्मक सिद्धांत 670
57.6 द्विसिमुलेशन 670
57.7 सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्र 671
57.8 सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान 673

XIII अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र **675**

58 परिचय **676**
58.1 रचनात्मक तर्क-विचार 676
58.2 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की वाक्यरचना 677
58.3 ब्राउवर–हाइटिंग–कोल्मोगोरोव व्याख्या 678
58.4 प्राकृतिक निगमन 680
58.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ 682
प्रश्न 683

59 अर्थविज्ञान **684**
59.1 परिचय 684
59.2 संबंधपरक निदर्श 685
59.3 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ 686
59.4 सांस्थितिक अर्थविज्ञान 686
प्रश्न 687

60 यथार्थता और पूर्णता **688**
60.1 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ की यथार्थता 688
60.2 प्राकृतिक निगमन की यथार्थता 689
60.3 लिंडेनबाउम का लेम्मा 690
60.4 विहित प्रतिरूप 691
60.5 सत्यता लेम्मा 692
60.6 पूर्णता प्रमेय 693
60.7 निर्णेयता 693
प्रश्न 693

61 अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष **695**
61.1 परिचय 695
61.2 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के नियम 696
61.3 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के लिए सत्य-वृक्ष 697
61.4 अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष की यथार्थता 697

प्रश्न 700

XIV प्रतितथ्यात्मक सशर्त 701

62 परिचय 702
62.1 भौतिक सशर्त 702
62.2 भौतिक सशर्त के विरोधाभास 703
62.3 कठोर सशर्त 704
62.4 प्रतितथ्यात्मक सशर्त 705
प्रश्न 706

63 न्यूनतम परिवर्तन अर्थविज्ञान 707
63.1 परिचय 707
63.2 गोलक प्रतिरूप 708
63.3 प्रतितथ्यात्मक की सत्यता और असत्यता 709
63.4 पूर्ववर्ती का प्रबलीकरण 711
63.5 संक्रमणशीलता 711
63.6 प्रतिधनात्मकता 712
प्रश्न 712

XV समुच्चय सिद्धांत 714

64 पुनरावर्ती अवधारणा 715
64.1 विस्तारिता 715
64.2 रसेल का विरोधाभास (फिर से) 715
64.3 विधेयात्मक और अविधेयात्मक 716
64.4 संचयी-पुनरावर्ती दृष्टिकोण 717
64.5 मूलतत्त्व हों या नहीं? 718
64.6 परिशिष्ट: फ़्रेगे का मूल नियम V 719

65 Z की ओर कदम 721
65.1 कथा का अधिक विस्तृत रूप 721
65.2 पृथक्करण 721
65.3 सम्मिलन 723
65.4 युग्म 723
65.5 घात समुच्चय 724
65.6 अनंतता 724
65.7 Z^{-}: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव 726
65.8 अपनी प्राकृतिक संख्याओं का चयन 726
65.9 परिशिष्ट: संवृति, समुच्चय-निर्माण और सर्वनिष्ठ 727
प्रश्न 728

66 क्रमसूचक 729
66.1 परिचय 729
66.2 क्रमसूचक का सामान्य विचार 729
66.3 सुव्यवस्थाएँ 730

66.4 क्रम-समाकृतिकताएँ 730
66.5 वॉन नोयमान की रचना 732
66.6 क्रमसूचकों के मूल गुण 733
66.7 प्रतिस्थापन 735
66.8 ZF^{-}: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव 736
66.9 क्रम-प्रकार के रूप में क्रमसूचक 736
66.10 उत्तरवर्ती और सीमा क्रमसूचक 737
प्रश्न 738

67 चरण और रैंक **739**
67.1 चरणों को V_α के रूप में परिभाषित करना 739
67.2 परिमितेतर पुनरावर्तन प्रमेय 739
67.3 चरणों के मूल गुण 741
67.4 आधारिता 742
67.5 Z और ZF: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव 743
67.6 रैंक 744
प्रश्न 745

68 प्रतिस्थापन **746**
68.1 परिचय 746
68.2 प्रतिस्थापन की शक्ति 746
68.3 बाह्य विचार 747
68.4 आकार-परिसीमन 748
68.5 प्रतिस्थापन और “निरपेक्ष अनंतता” 749
68.6 प्रतिस्थापन और परावर्तन 750
68.7 परिशिष्ट: प्रतिस्थापन से संबंधित परिणाम 751
68.8 परिशिष्ट: परिमित अभिगृहीतीकरणीयता 753
प्रश्न 754

69 क्रमसूचक अंकगणित **755**
69.1 परिचय 755
69.2 क्रमसूचक योग 755
69.3 क्रमसूचक योग का उपयोग 758
69.4 क्रमसूचक गुणन 759
69.5 क्रमसूचक घातांक 760
प्रश्न 761

70 कार्डिनल **762**
70.1 कैंटर का सिद्धांत 762
70.2 क्रमसूचकों के रूप में कार्डिनल 762
70.3 ZFC: एक मील का पत्थर 764
70.4 परिमित, गणनीय, अगणनीय 764
70.5 परिशिष्ट: ह्यूम का सिद्धांत 766

71 कार्डिनल अंकगणित **768**
71.1 मूल संक्रियाओं की परिभाषा 768
71.2 योग और गुणन का सरलीकरण 769

71.3 कुछ सरलीकरण 771
71.4 सातत्य परिकल्पना 772
71.5 $\aleph$-नियत बिंदु 773
प्रश्न 775

72 चयन **776**
72.1 परिचय 776
72.2 टार्स्की–स्कॉट युक्ति 776
72.3 तुलनीयता और हार्टोग्स का लेम्मा 777
72.4 सुव्यवस्था समस्या 778
72.5 गणनीय चयन 779
72.6 चयन के बारे में आंतरिक विचार 781
72.7 बानाख–टार्स्की विरोधाभास 781
72.8 परिशिष्ट: विताली का विरोधाभास 783
प्रश्न 786

XVI विधियाँ **787**

73 प्रमाण **789**
73.1 परिचय 789
73.2 प्रमाण आरंभ करना 790
73.3 परिभाषाओं का उपयोग 790
73.4 अनुमान प्रतिरूप 791
73.5 एक उदाहरण 795
73.6 एक और उदाहरण 798
73.7 विरोधाभास द्वारा प्रमाण 799
73.8 प्रमाण पढ़ना 801
73.9 मैं यह नहीं कर सकता! 802
73.10 अन्य संसाधन 803
प्रश्न 804

74 आगमन **805**
74.1 परिचय 805
74.2 $\mathbb{N}$ पर आगमन 805
74.3 प्रबल आगमन 807
74.4 आगमनात्मक परिभाषाएँ 808
74.5 संरचनात्मक आगमन 809
74.6 संबंध और फलन 811
प्रश्न 813

XVII इतिहास **814**

75 जीवनियाँ **815**
75.1 गेऑर्ग कांटोर 815
75.2 अलॉन्ज़ो चर्च 815

75.3 गेरहार्ड गेंट्सेन 816
75.4 कुर्ट ग्योडेल 816
75.5 एमी नोएथर 817
75.6 रोज़ा पीटर 818
75.7 जूलिया रॉबिन्सन 819
75.8 बर्ट्रैंड रसेल 820
75.9 अल्फ्रेड टार्स्की 821
75.10 एलन ट्यूरिंग 821
75.11 अर्न्स्ट ज़र्मेलो 822

76 समुच्चय सिद्धांत का इतिहास और मिथक **823**
76.1 अनंतसूक्ष्म राशियाँ और अवकलन 823
76.2 सीमाओं की कठोर परिभाषा 824
76.3 विकृतियाँ 825
76.4 इतिहास से अधिक मिथक? 827
76.5 रेखा और समतल पर कांटोर 827
76.6 परिशिष्ट: हिल्बर्ट के अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र 828

XVIII संदर्भ **831**

77 यूनानी वर्णमाला **833**

78 फ़्राक्टूर वर्णमाला **834**

XIX प्रमाण सिद्धांत **836**

79 अनुक्रम कलन **838**
79.1 परिचय 838
79.2 नियम और प्रमाण 841
79.3 प्रमाणों के उदाहरण 843
79.4 नियमों की व्याख्या 846
79.5 नियमित प्रमाण और प्रतिस्थापन 848
79.6 ग्राह्य और व्युत्पाद्य नियम 851
79.7 नियमों की प्रतिलोम्यता 853
79.8 G1c और G3c के बीच रूपांतरण 857
प्रश्न 858

80 कट-विलोपन **859**
80.1 परिचय 859
80.2 सबसे ऊपर के कट हटाना 860
80.3 सबसे बड़े कट हटाना 866
80.4 मध्य-अनुक्रम प्रमेय और हेरब्रांड प्रमेय 870
80.5 माएहारा प्रमेय और क्रेग अंतर्वेशन प्रमेय 872
प्रश्न 880

81 प्राकृतिक निगमन 881
81.1 परिचय 881
81.2 नियम और प्रमाण 882
81.3 अनुक्रमों सहित प्राकृतिक निगमन: N2c और N2i 886
81.4 नियमित प्रमाण और प्रतिस्थापन 888
81.5 प्रमाण की कलमबंदी 890
81.6 G2i से N2i में अनुवाद 891
81.7 N2 से G2 में अनुवाद 893
प्रश्न 895

82 प्रसामान्यीकरण 896
82.1 परिचय 896
82.2 खंड और कट 896
82.3 क्रम-विनिमय रूपांतरण 898
82.4 अपचयन रूपांतरण 900
82.5 प्रसामान्यीकरण प्रमेय 903
82.6 प्रसामान्य N2i-प्रमाण और G2i के बीच अनुवाद 904
प्रश्न 907

83 प्रकारों के रूप में प्रतिज्ञप्तियाँ 908
83.1 परिचय 908
83.2 प्रमाण पद 910
83.3 व्युत्पत्तियाँ को प्रमाण पदों में बदलना 912
83.4 प्रमाण पदों से व्युत्पत्तियाँ पुनः प्राप्त करना 912
83.5 प्रकार 913
83.6 अपचयन 914
83.7 प्रकार-संरक्षण 917
83.8 प्रसामान्यीकरण 918

84 प्रमाण की खोज 922
84.1 परिचय 922
84.2 G3c के लिए खोज कलन-विधि 923
84.3 पूर्णता 925
84.4 सार्थक वृक्ष 927

85 प्रमाण सिद्धांत के अतिरिक्त स्रोत-पाठ 930
85.1 कट-विलोपन के प्रमाण का अतिरिक्त अंश 930
85.2 अनुक्रम प्राकृतिक निगमन 931
85.3 अनुक्रम कलन की अतिरिक्त नियम-सारणियाँ 932

XX पूरक और वैकल्पिक स्रोत-पाठ 937

86 समुच्चयों, फलनों और आगमन पर पूरक पाठ 939
86.1 समुच्चयों के बारे में प्रमाण 939
86.2 समरूपता 940
86.3 परिचय 940

87 प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र: निर्दोषता और पूर्णता के वैकल्पिक पाठ 943
87.1 प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की निर्दोषता 943
87.2 प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की पूर्णता 943

88 प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र के पूरक पाठ 945
88.1 परिचय 945
88.2 व्युत्पन्नता के गुण 946
88.3 वाक्यों के अधिकतम संगत समुच्चय 949

89 अंकगणित के गैर-मानक निदर्श: वैकल्पिक प्रस्तुति 952
89.1 अंकगणित के गैर-मानक निदर्श 952

90 निरूपणीयता: फलनों का वर्ग C 955
90.1 फलनों का समुच्चय C 955
90.2 C के फलन Q में निरूपणीय हैं 955

91 द्वितीय-क्रम भाषा: पूरक परिचय 958
91.1 द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र की भाषा 958

92 लैम्ब्डा कलन के पूरक पाठ 959
92.1 परिवर्तन और अपचयन 959
92.2 सूचियाँ 959

93 बहुमूल्य तर्कशास्त्र: प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 960
93.1 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ 960

94 सामान्य मोडल तर्कशास्त्र: पूरक पाठ 962
94.1 सामान्य मोडल तर्कशास्त्र 962

95 अंतःप्रज्ञावादी अर्थविज्ञान: प्रतिज्ञप्तियाँ 963
95.1 प्रतिज्ञप्तियाँ 963

96 वैकल्पिक अध्यापन-क्रम और संपादकीय टिप्पणियाँ 964
96.1 समुच्चय, संबंध और फलन: प्रारंभिक क्रम 964
96.2 संबंधों का अध्याय-क्रम 964
96.3 समुच्चयों का आकार: प्रारंभिक क्रम 964
96.4 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान का संयुक्त क्रम 965

चित्र-श्रेय 965

संदर्भ-ग्रन्थ 966

यह फ़ाइल ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट में सम्मिलित सारी सामग्री लोड करती है। यदि इस तरह की संपादकीय टिप्पणियाँ दिखाई दें, तो वे बताती हैं कि इस सामग्री को कैसे प्रस्तुत किया जाएगा, इसका विचार किए बिना फ़ाइल संकलित की गई थी। यदि आप इसे पढ़ सकते हैं, तो संभवतः इस पीडीएफ़ से पढ़ाना या पढ़ना *उचित नहीं* है।

ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट ऐसी अनेक व्यवस्थाएँ देता है जिनसे अध्यापन या स्वाध्याय के लिए अधिक उपयुक्त पाठ बनाया जा सकता है। उदाहरणतः पाठ डिफ़ॉल्ट रूप से सभी तार्किक संकारकों को आदिम मानेगा और प्रमाणों में सभी संकारकों की सभी स्थितियाँ पूरा करेगा। किंतु इनमें से कुछ स्थितियों को अभ्यास के रूप में छोड़ना कहीं बेहतर है। ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट पर काम भी जारी है। सहयोग और सुधार को प्रोत्साहन देने के लिए सामग्री तब भी सम्मिलित की जाती है जब वह केवल मसौदा हो, उसमें अभ्यास न हों, इत्यादि। किसी पाठ्यक्रम के लिए बनी पीडीएफ़ इन खंडों को बाहर रखेगी।

अध्यापन और अध्ययन के लिए अधिक उपयुक्त पीडीएफ़ पाने हेतु ओएलपी वेबसाइट पर उपलब्ध नमूना पाठ्यक्रम देखें। अपना पाठ बनाने के लिए आप नमूना ड्राइवर फ़ाइल से आरंभ कर सकते हैं, या अधिक सुसज्जित और उन्नत उदाहरणों के लिए व्युत्पन्न पाठ्यपुस्तकों के स्रोत देख सकते हैं।

खण्ड I

सहज समुच्चय सिद्धांत

इस भाग की सामग्री मूलभूत सहज समुच्चय सिद्धांत का परिचय है। टिम बटन की *Open Set Theory* सम्मिलित होने से इसमें संख्या प्रणालियों का निर्माण और अनंतता की चर्चा भी आती है, जो ओएलपी के तार्किक भागों के लिए आवश्यक नहीं हैं।

अध्याय 1

समुच्चय

1.1 अवयव-निर्धारित समानता

समुच्चय वस्तुओं का ऐसा संग्रह है जिसे एक ही वस्तु माना जाता है। समुच्चय बनाने वाली वस्तुओं को उसके *अवयव* या *सदस्य* कहते हैं। यदि x किसी समुच्चय A का अवयव है, तो हम $x \in A$ लिखते हैं; यदि नहीं, तो $x \notin A$ लिखते हैं। जिस समुच्चय का कोई अवयव नहीं है, उसे *रिक्त समुच्चय* कहते हैं और "$\emptyset$" से निरूपित करते हैं।

समुच्चय को हम *कैसे निर्दिष्ट* करते हैं, उसके अवयव किस *क्रम* में रखते हैं, अथवा उसके अवयव को *कितनी बार* गिनते हैं—इनमें से कोई बात महत्त्वपूर्ण नहीं है। केवल यह महत्त्वपूर्ण है कि उसके अवयव कौन-से हैं। इस विचार को हम निम्न सिद्धांत में सटीक रूप देते हैं।

परिभाषा 1.1 (विस्तारिता). यदि A और B समुच्चय हैं, तो $A = B$ तभी और केवल तभी जब A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव हो, और इसके विपरीत।

विस्तारिता कुछ संकेतनों का औचित्य सिद्ध करती है। सामान्यतः, जब हमारे पास a_1, ..., a_n वस्तुएँ हों, तब $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *वह* समुच्चय है जिसके अवयव $a_1, \ldots, a_n$ हैं। हम "*वह*" शब्द पर बल देते हैं, क्योंकि विस्तारिता बताती है कि ऐसा केवल *एक* समुच्चय हो सकता है। वास्तव में, विस्तारिता निम्न समानता का भी औचित्य सिद्ध करती है:

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}.$$

इससे यही बात पुष्ट होती है कि समुच्चयों पर विचार करते समय हमें उनके अवयव के क्रम या किसी अवयव को कितनी बार लिखा गया है, इसकी परवाह नहीं होती।

उदाहरण 1.2. जब भी आपके पास कुछ वस्तुएँ हों, आप उन्हें एक समुच्चय में एकत्र कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, रिचर्ड के भाई-बहनों का समुच्चय एक व्यक्ति को समाहित करता है; हम इसे $S = \{\text{रुथ}\}$ लिख सकते हैं। 4 से छोटे धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ है, किंतु इसे $\{3, 2, 1\}$ या यहाँ तक कि $\{1, 2, 1, 2, 3\}$ भी लिखा जा सकता है। विस्तारिता के अनुसार ये सभी एक ही समुच्चय हैं। $\{1, 2, 3\}$ का प्रत्येक अवयव, $\{3, 2, 1\}$ का भी अवयव है (और $\{1, 2, 1, 2, 3\}$ का भी), तथा इसके विपरीत।

अक्सर हम किसी समुच्चय को उसके अवयव के किसी साझा गुणधर्म द्वारा निर्दिष्ट करेंगे। इसके लिए हम निम्न संक्षिप्त संकेतन का उपयोग करेंगे: $\{x : \varphi(x)\}$, जहाँ $\varphi(x)$ उस गुणधर्म को दर्शाता है जो x में होना चाहिए ताकि उसे समुच्चय के अवयव में गिना जाए।

उदाहरण 1.3. अपने उदाहरण में हम S को इस प्रकार भी निर्दिष्ट कर सकते थे:

$$S = \{x : x \text{ रिचर्ड का भाई या बहन है}\}.$$

उदाहरण 1.4. किसी संख्या को *परिपूर्ण* तभी और केवल तभी कहते हैं जब वह अपने उचित भाजकों के योग के बराबर हो (अर्थात् ऐसी संख्याएँ जो उसे पूरा-पूरा विभाजित करती हैं, पर स्वयं उस संख्या के समान नहीं हैं)। उदाहरणतः, 6 परिपूर्ण है क्योंकि उसके उचित भाजक 1, 2 और 3 हैं तथा $6 = 1 + 2 + 3$। वास्तव में, 10 से छोटा एकमात्र धनात्मक पूर्णांक जो परिपूर्ण है, 6 है। अतः विस्तारिता का उपयोग करके हम कह सकते हैं:

$$\{6\} = \{x : x \text{ परिपूर्ण है और } 0 \leq x \leq 10\}$$

दाईं ओर के संकेतन को हम "उन x का समुच्चय जिनके लिए x परिपूर्ण है और $0 \leq x \leq 10$" पढ़ते हैं। यहाँ की समानता इस बात की पुष्टि करती है कि समुच्चयों पर विचार करते समय हमें इस बात की परवाह नहीं होती कि वे कैसे निर्दिष्ट किए गए हैं। अधिक सामान्यतः, विस्तारिता सुनिश्चित करती है कि ऐसे x का, जिनके लिए $\varphi(x)$ सत्य है, सदैव केवल एक ही समुच्चय होता है। इसलिए विस्तारिता $\{x : \varphi(x)\}$ को उन x का *वह* समुच्चय कहने का औचित्य सिद्ध करती है जिनके लिए $\varphi(x)$ सत्य है।

विस्तारिता हमें यह दिखाने की विधि देती है कि दो समुच्चय समान हैं: $A = B$ दिखाने के लिए यह दिखाइए कि जब भी $x \in A$ हो, तब $x \in B$ भी हो, और जब भी $y \in B$ हो, तब $y \in A$ भी हो।

1.2 उपसमुच्चय और घात समुच्चय

हमें प्रायः समुच्चयों की तुलना करनी होगी। ऐसी एक स्वाभाविक तुलना इस प्रकार की जा सकती है: *एक समुच्चय की प्रत्येक वस्तु दूसरे समुच्चय में भी है*। यह स्थिति इतनी महत्त्वपूर्ण है कि इसके लिए हम एक नया संकेतन प्रस्तुत करेंगे।

परिभाषा 1.5 (उपसमुच्चय). यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव है, तो हम कहते हैं कि A, B का *उपसमुच्चय* है और $A \subseteq B$ लिखते हैं। यदि A, B का उपसमुच्चय नहीं है, तो हम $A \nsubseteq B$ लिखते हैं। यदि $A \subseteq B$ किंतु $A \neq B$, तो हम $A \subsetneq B$ लिखते हैं और कहते हैं कि A, B का *उचित उपसमुच्चय* है।

उदाहरण 1.6. प्रत्येक समुच्चय अपना ही उपसमुच्चय है और $\emptyset$ हर समुच्चय का उपसमुच्चय है। सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय का उपसमुच्चय है। साथ ही, $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$। किंतु $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c\}$ का उपसमुच्चय नहीं है।

उदाहरण 1.7. संख्या 2 पूर्णांकों के समुच्चय का अवयव है, जबकि सम संख्याओं का समुच्चय पूर्णांकों के समुच्चय का उपसमुच्चय है। फिर भी कोई समुच्चय किसी दूसरे समुच्चय का अवयव और उपसमुच्चय *दोनों* हो सकता है; उदाहरणतः, $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$ और $\{0\} \subseteq \{0, \{0\}\}$ भी।

विस्तारिता समुच्चयों की समानता का एक निकष देती है: $A = B$ तभी और केवल तभी जब A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव हो, और इसके विपरीत। "उपसमुच्चय" की परिभाषा $A \subseteq B$ को इस निकष के ठीक पहले अर्धांश के रूप में परिभाषित करती है: A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव है। निस्संदेह, यही परिभाषा A और B को परस्पर बदलने पर भी लागू होती है: अर्थात् $B \subseteq A$ तभी और केवल तभी जब B का प्रत्येक अवयव, A का भी अवयव हो। और यह विस्तारिता का ठीक वही "इसके विपरीत" वाला अंश है। दूसरे शब्दों में, विस्तारिता से निष्पन्न होता है कि दो समुच्चय तभी और केवल तभी समान हैं जब वे एक-दूसरे के उपसमुच्चय हों।

प्रतिज्ञप्ति 1.8. *$A = B$ तभी और केवल तभी जब $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ दोनों हों।*

अब कुछ और उपयोगी संकेतनों को प्रस्तुत करने का भी अच्छा अवसर है। जब हमने यह परिभाषित किया कि A, B का उपसमुच्चय कब है, तब कहा कि "A का प्रत्येक अवयव ..." और "$\ldots$" के स्थान पर "B का भी अवयव है" रखा। किंतु अभिव्यक्ति का यह *रूप* इतना सामान्य है कि इसके लिए एक औपचारिक संकेतन प्रस्तुत करना उपयोगी होगा।

परिभाषा 1.9. $(\forall x \in A)\varphi$, $\forall x(x \in A \to \varphi)$ का संक्षिप्त रूप है। इसी प्रकार, $(\exists x \in A)\varphi$, $\exists x(x \in A \wedge \varphi)$ का संक्षिप्त रूप है।

इस संकेतन का उपयोग करके हम कह सकते हैं कि $A \subseteq B$ तभी और केवल तभी जब $(\forall x \in A) x \in B$।

अब हम एक विशेष प्रकार के समुच्चय पर विचार करेंगे: किसी दिए हुए समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय।

परिभाषा 1.10 (घात समुच्चय). समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों से बने समुच्चय को A का *घात समुच्चय* कहते हैं और इसे $\wp(A)$ लिखते हैं।

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

उदाहरण 1.11. $\{a, b, c\}$ के सभी संभव उपसमुच्चय कौन-से हैं? वे हैं: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$। इन सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय $\wp(\{a, b, c\})$ है:

$$\wp(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

1.3 कुछ महत्त्वपूर्ण समुच्चय

उदाहरण 1.12. हम मुख्यतः ऐसे समुच्चयों पर विचार करेंगे जिनके अवयव गणितीय वस्तुएँ हैं। ऐसे चार समुच्चय इतने महत्त्वपूर्ण हैं कि उनके विशिष्ट नाम हैं:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय

$\mathbb{Q} = \{{}^{m}/_{n} : m, n \in \mathbb{Z}$ और $n \neq 0\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

वास्तविक संख्याओं का समुच्चय (सातत्य)

ये सभी *अनंत* समुच्चय हैं, अर्थात् इनमें से प्रत्येक में अनंत संख्या में अवयव हैं।

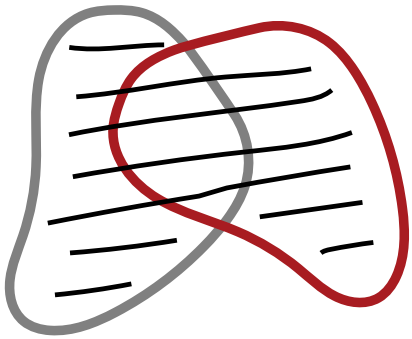
इन समुच्चयों में क्रमशः आगे बढ़ते हुए हम अपने संख्या-संग्रह में *और* संख्याएँ जोड़ते जाते हैं। वास्तव में यह स्पष्ट होना चाहिए कि $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: आखिरकार, प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्णांक है; प्रत्येक पूर्णांक परिमेय है; और प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तविक है। इसी प्रकार यह स्पष्ट होना चाहिए कि $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, क्योंकि -1 पूर्णांक तो है किंतु प्राकृत संख्या नहीं, और $1/2$ परिमेय तो है किंतु पूर्णांक नहीं। यह कम स्पष्ट है कि $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, अर्थात् कुछ वास्तविक संख्याएँ परिमेय नहीं हैं।

हम कभी-कभी धन पूर्णांकों के समुच्चय $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ और केवल पहली दो प्राकृत संख्याओं वाले समुच्चय $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ का भी उपयोग करेंगे।

उदाहरण 1.13 (वर्ण-शृंखलाएँ). एक अन्य रोचक उदाहरण समुच्चय A^* है। यह वर्णमाला A पर *परिमित वर्ण-शृंखलाओं* का समुच्चय है: A के अवयवों का कोई भी परिमित अनुक्रम, A पर एक वर्ण-शृंखला है। हम *रिक्त वर्ण-शृंखला* Λ को A पर बनी वर्ण-शृंखलाओं में भी सम्मिलित करते हैं, और ऐसा प्रत्येक वर्णमाला A के लिए करते हैं। उदाहरणतः,

$$\mathbb{B}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, \ldots\}.$$

यदि $x = x_1 \ldots x_n \in A^*$, n "प्रतीकों" से बनी A पर एक वर्ण-शृंखला है, तो हम कहते हैं कि उस वर्ण-शृंखला की *लंबाई* n है और $\mathrm{len}(x) = n$ लिखते हैं।



चित्र 1.1: दो समुच्चयों का सम्मिलन $A \cup B$ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A या B में हैं।

उदाहरण 1.14 (अनंत अनुक्रम). किसी भी समुच्चय A के लिए हम समुच्चय A^ω पर भी विचार कर सकते हैं, जो A के अवयवों के अनंत अनुक्रमों का समुच्चय है। अनंत अनुक्रम $a_1a_2a_3a_4\ldots$ वस्तुओं की एकदिश अनंत सूची से बना होता है, जिसकी प्रत्येक वस्तु A का अवयव होती है।

1.4 सम्मिलन और सर्वनिष्ठ

खंड 1.1 में हमने साझा गुणधर्म द्वारा समुच्चयों की परिभाषाएँ प्रस्तुत की थीं, अर्थात् $\{x : \varphi(x)\}$ रूप की परिभाषाएँ। यहाँ हम किसी गुणधर्म φ का उपयोग करते हैं, और यह गुणधर्म पहले से परिभाषित समुच्चयों का उल्लेख कर सकता है। उदाहरण के लिए, यदि A और B समुच्चय हैं, तो समुच्चय $\{x : x \in A \vee x \in B\}$ में वे सभी वस्तुएँ हैं जो A या B के अवयव हैं; अर्थात् यह A और B के अवयवों को एक साथ सम्मिलित करने वाला समुच्चय है। इसे आकृति 1.1 की तरह देखा जा सकता है, जहाँ रंगीन क्षेत्र दोनों समुच्चयों A और B के अवयवों को एक साथ दर्शाता है।

समुच्चयों को इस प्रकार सम्मिलित करने की संक्रिया अत्यंत उपयोगी और सामान्य है, इसलिए हम इसे एक औपचारिक नाम और संकेत देते हैं।

परिभाषा 1.15 (सम्मिलन). दो समुच्चयों A और B का *सम्मिलन*, जिसे $A \cup B$ लिखते हैं, उन सभी वस्तुओं का समुच्चय है जो A, B, अथवा दोनों के अवयव हैं।

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

उदाहरण 1.16. क्योंकि किसी अवयव की पुनरावृत्ति से कोई अंतर नहीं पड़ता, जिन दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है, उनके सम्मिलन में वह अवयव केवल एक बार आता है; उदाहरणतः, $\{a, b, c\} \cup \{a, 0, 1\} = \{a, b, c, 0, 1\}$।

किसी समुच्चय और उसके किसी उपसमुच्चय का सम्मिलन बड़ा समुच्चय ही होता है: $\{a, b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$।

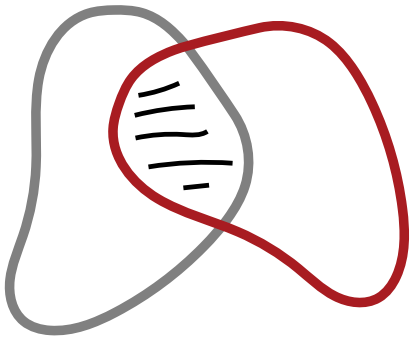
किसी समुच्चय का रिक्त समुच्चय के साथ सम्मिलन उसी समुच्चय के समान होता है: $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$।

हम सम्मिलन की एक "द्वैत" संक्रिया पर भी विचार कर सकते हैं। यह संक्रिया उन सभी अवयवों का समुच्चय बनाती है जो A के अवयव हैं और साथ ही B के भी अवयव हैं। इस संक्रिया को *सर्वनिष्ठ* कहते हैं और इसे आकृति 1.2 की तरह दर्शाया जा सकता है।

परिभाषा 1.17 (सर्वनिष्ठ). दो समुच्चयों A और B का *सर्वनिष्ठ*, जिसे $A \cap B$ लिखते हैं, उन सभी वस्तुओं का समुच्चय है जो A और B दोनों के अवयव हैं।

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

यदि दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ रिक्त हो, तो उन्हें *असंयुक्त* कहते हैं। इसका अर्थ है कि उनका कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।



चित्र 1.2: दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $A \cap B$ उन अवयवों का समुच्चय है जो दोनों में उभयनिष्ठ हैं।

उदाहरण 1.18. यदि दो समुच्चयों का कोई अवयव उभयनिष्ठ न हो, तो उनका सर्वनिष्ठ रिक्त होता है: $\{a, b, c\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$।

यदि दो समुच्चयों के कुछ अवयव उभयनिष्ठ हों, तो उनका सर्वनिष्ठ उन सभी का समुच्चय होता है: $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\}$।

किसी समुच्चय का उसके किसी उपसमुच्चय के साथ सर्वनिष्ठ छोटा समुच्चय ही होता है: $\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$।

किसी भी समुच्चय का रिक्त समुच्चय के साथ सर्वनिष्ठ रिक्त होता है: $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$।

हम दो से अधिक समुच्चयों का सम्मिलन या सर्वनिष्ठ भी बना सकते हैं। सामान्य स्थिति को सँभालने का एक सुगठित तरीका यह है: मान लीजिए कि जिन सभी समुच्चयों का सम्मिलन (या सर्वनिष्ठ) बनाना है, उन्हें एक ही समुच्चय में एकत्र कर लिया गया है। तब मूल समुच्चयों के सम्मिलन को उन सभी वस्तुओं का समुच्चय कह सकते हैं जो इस नए समुच्चय के कम-से-कम एक अवयव में हैं, और सर्वनिष्ठ को उन सभी वस्तुओं का समुच्चय कह सकते हैं जो उसके प्रत्येक अवयव में हैं।

परिभाषा 1.19. यदि A समुच्चयों का समुच्चय है, तो $\bigcup A$, A के अवयवों के अवयवों का समुच्चय है:

$$\begin{aligned}\bigcup A &= \{x : x \text{ निम्न समुच्चय के किसी अवयव का अवयव है: } A\}, \text{ अर्थात्} \\ &= \{x : \text{कोई ऐसा } B \in A \text{ है कि } x \in B\}\end{aligned}$$

परिभाषा 1.20. यदि A समुच्चयों का समुच्चय है, तो $\bigcap A$ उन वस्तुओं का समुच्चय है जो A के सभी अवयवों में उभयनिष्ठ हैं:

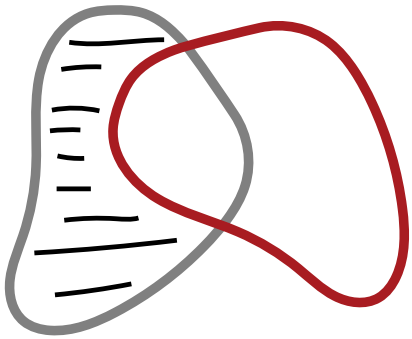
$$\begin{aligned}\bigcap A &= \{x : x \text{ निम्न समुच्चय के प्रत्येक अवयव का अवयव है: } A\}, \text{ अर्थात्} \\ &= \{x : \text{प्रत्येक } B \in A, x \in B\}\end{aligned}$$

उदाहरण 1.21. मान लीजिए $A = \{\{a, b\}, \{a, d, e\}, \{a, d\}\}$। तब $\bigcup A = \{a, b, d, e\}$ और $\bigcap A = \{a\}$।

समुच्चयों के अनुक्रम A_1, A_2, ...के लिए भी हम यही कर सकते हैं:

$$\bigcup_i A_i = \{x : x \text{ निम्न में से किसी एक समुच्चय का अवयव है: } A_i\}$$

$$\bigcap_i A_i = \{x : x \text{ निम्न प्रत्येक समुच्चय का अवयव है: } A_i\}.$$



चित्र 1.3: दो समुच्चयों का अंतर $A \setminus B$, A के उन अवयवों का समुच्चय है जो B के अवयव नहीं हैं।

जब हमारे पास समुच्चयों का कोई *सूचकांक* हो, अर्थात् ऐसा समुच्चय I कि हम प्रत्येक A_i पर विचार कर रहे हों जहाँ $i \in I$, तब हम इन संक्षिप्त संकेतों का भी उपयोग कर सकते हैं:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i : i \in I\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i : i \in I\}$$

अंततः हम A के उन सभी अवयवों के समुच्चय पर विचार कर सकते हैं जो B में नहीं हैं। इसे आकृति 1.3 की तरह दर्शाया जा सकता है।

परिभाषा 1.22 (अंतर). *समुच्चय-अंतर* $A \setminus B$, A के उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो B के भी अवयव नहीं हैं, अर्थात्,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B\}.$$

1.5 युग्म, क्रमित अवयव-समूह और कार्तीय गुणनफल

विस्तारिता से यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी समुच्चय के अवयवों का कोई क्रम नहीं होता। इसलिए यदि हमें क्रम निरूपित करना हो, तो हम *क्रमित युग्म* $\langle x, y \rangle$ का उपयोग करते हैं। अक्रमित युग्म $\{x, y\}$ में क्रम का कोई महत्त्व नहीं होता: $\{x, y\} = \{y, x\}$। क्रमित युग्म में क्रम महत्त्वपूर्ण होता है: यदि $x \neq y$, तो $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$।

समुच्चय सिद्धान्त में क्रमित युग्मों को हमें किस प्रकार समझना चाहिए? मुख्य बात यह है कि हम इस विचार को बनाए रखना चाहते हैं कि दो क्रमित युग्म तभी और केवल तभी समान हों, जब उनके प्रथम अवयव समान हों और उनके द्वितीय अवयव भी समान हों; अर्थात्:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ तभी और केवल तभी जब } a = c \text{ और } b = d.$$

समुच्चय सिद्धान्त में हम वीनर–कुरातोव्स्की परिभाषा की सहायता से क्रमित युग्मों को परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 1.23 (क्रमित युग्म). $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

क्रमित युग्म की परिभाषा निर्धारित कर लेने के बाद हम उससे और समुच्चय परिभाषित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, कभी-कभी हमें दो से अधिक वस्तुओं के क्रमित अनुक्रम भी चाहिए होते हैं, जैसे *त्रिक* $\langle x, y, z \rangle$, *चतुष्टय* $\langle x, y, z, u \rangle$, इत्यादि। हम त्रिक को ऐसा विशेष क्रमित युग्म मान सकते हैं जिसका प्रथम अवयव स्वयं एक क्रमित युग्म हो: $\langle x, y, z \rangle$ का अर्थ $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ है। चतुष्टय के लिए भी यही बात लागू होती है: $\langle x, y, z, u \rangle$ का अर्थ $\langle \langle \langle x, y \rangle, z \rangle, u \rangle$ है, और इसी प्रकार आगे भी। सामान्यतः हम *क्रमित n-अवयवी समूह* $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ की बात करते हैं।

क्रमित युग्मों अथवा अन्य क्रमित n-अवयवी समूहों के कुछ समुच्चय हमारे लिए उपयोगी होंगे।

परिभाषा 1.24 (कार्तीय गुणनफल). दिए गए समुच्चयों A और B का *कार्तीय गुणनफल* $A \times B$ इस प्रकार परिभाषित होता है:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \text{ और } y \in B\}.$$

उदाहरण 1.25. यदि $A = \{0, 1\}$ और $B = \{1, a, b\}$, तो उनका गुणनफल है

$$A \times B = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}.$$

उदाहरण 1.26. यदि A एक समुच्चय है, तो स्वयं A के साथ उसका गुणनफल $A \times A$, A^2 भी लिखा जाता है। यह ऐसे *सभी* युग्मों $\langle x, y\rangle$ का समुच्चय है जिनके लिए $x, y \in A$। सभी त्रिकों $\langle x, y, z\rangle$ का समुच्चय A^3 है, और इसी प्रकार आगे भी। हम इसकी पुनरावर्ती परिभाषा दे सकते हैं:

$$A^1 = A$$
$$A^{k+1} = A^k \times A$$

प्रतिज्ञप्ति 1.27. *यदि A में n अवयव और B में m अवयव हैं, तो $A \times B$ में $n \cdot m$ अवयव हैं।*

प्रमाण. प्रत्येक ऐसे अवयव x के लिए जो A में है, m अवयव $\langle x, y\rangle \in A \times B$ रूप के होते हैं। मान लीजिए $B_x = \{\langle x, y\rangle : y \in B\}$। जब भी $x_1 \neq x_2$ होता है, तब $\langle x_1, y\rangle \neq \langle x_2, y\rangle$ होता है; इसलिए $B_{x_1} \cap B_{x_2} = \emptyset$। किंतु यदि $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, तो $A \times B = B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n}$; अतः इसमें $n \cdot m$ अवयव होते हैं।

इसे दृष्टिगोचर बनाने के लिए $A \times B$ के अवयवों को एक जालिका में व्यवस्थित कीजिए:

$$\begin{array}{rlll} B_{x_1} = & \{\langle x_1, y_1\rangle & \langle x_1, y_2\rangle & \ldots \quad \langle x_1, y_m\rangle\} \\ B_{x_2} = & \{\langle x_2, y_1\rangle & \langle x_2, y_2\rangle & \ldots \quad \langle x_2, y_m\rangle\} \\ \vdots & & \vdots & \\ B_{x_n} = & \{\langle x_n, y_1\rangle & \langle x_n, y_2\rangle & \ldots \quad \langle x_n, y_m\rangle\} \end{array}$$

चूँकि सभी x_i परस्पर भिन्न हैं और सभी y_j भी परस्पर भिन्न हैं, इसलिए इस जालिका के कोई भी दो युग्म समान नहीं हैं और इसमें कुल $n \cdot m$ युग्म हैं। □

उदाहरण 1.28. यदि A एक समुच्चय है, तो A के अवयवों के किसी भी अनुक्रम को A पर बना एक *शब्द* कहते हैं। किसी अनुक्रम को ऐसे n-अवयवी समूह के रूप में समझा जा सकता है जिसके अवयव, A से लिए गए हों। उदाहरण के लिए, यदि $A = \{a, b, c\}$, तो अनुक्रम "bac" को त्रिक $\langle b, a, c\rangle$ माना जा सकता है। शब्द, अर्थात् प्रतीकों के अनुक्रम, कंप्यूटर विज्ञान में अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। परिपाटी के अनुसार हम A के अवयवों को लंबाई 1 के अनुक्रम और $\emptyset$ को लंबाई 0 का अनुक्रम मानते हैं। तब A पर बने *सभी* शब्दों का समुच्चय है

$$A^* = \{\emptyset\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

1.6 रसेल का विरोधाभास

विस्तारिता $\{x : \varphi(x)\}$ संकेतन की अनुमति देती है—ऐसे x के *उस* समुच्चय के लिए जिनके लिए $\varphi(x)$ सत्य है। किंतु विस्तारिता *वास्तव में* केवल निम्न विचार की अनुमति देती है। *यदि* कोई ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव ठीक वे ही वस्तुएँ हैं जो φ को संतुष्ट करती हैं, *तो* ऐसा समुच्चय केवल एक है। दूसरे शब्दों में: किसी φ को नियत कर लेने पर समुच्चय $\{x : \varphi(x)\}$ अद्वितीय है, *यदि उसका अस्तित्व हो*।

लेकिन यह सशर्त कथन महत्त्वपूर्ण है! निर्णायक बात यह है कि प्रत्येक गुणधर्म *समुच्चय-निर्माण* की अनुमति नहीं देता। अर्थात कुछ गुणधर्म समुच्चय परिभाषित *नहीं* करते। यदि सभी गुणधर्म ऐसा करते, तो सीधे विरोधाभास उत्पन्न हो जाते। इसका सबसे प्रसिद्ध उदाहरण रसेल का विरोधाभास है।

समुच्चय दूसरे समुच्चयों के अवयव हो सकते हैं—उदाहरण के लिए, समुच्चय A का घात समुच्चय स्वयं समुच्चयों से बना होता है। इसलिए यह पूछना या जाँचना सार्थक है कि कोई समुच्चय दूसरे समुच्चय का अवयव है या नहीं। क्या कोई समुच्चय स्वयं अपना अवयव हो सकता है? समुच्चय की धारणा में ऐसा कुछ नहीं जो इसे असंभव ठहराए। उदाहरण के लिए, यदि *सभी* समुच्चय वस्तुओं का एक संग्रह बनाते हैं, तो यह मानना स्वाभाविक लग सकता है कि उन्हें एक ही समुच्चय—सभी समुच्चयों के समुच्चय—में एकत्र किया जा सकता है। और वह स्वयं समुच्चय होने के कारण सभी समुच्चयों के समुच्चय का अवयव होगा।

रसेल का विरोधाभास तब उत्पन्न होता है जब हम स्वयं का अवयव न होने के गुणधर्म, अर्थात *स्वयं का अवयव न होने* पर विचार करते हैं। यदि हम मान लें कि उन सभी समुच्चयों का एक समुच्चय है जो स्वयं अपने अवयव नहीं हैं, तो क्या होगा? क्या

$$R = \{x : x \notin x\}$$

का अस्तित्व है? सिद्ध किया जा सकता है कि उसका अस्तित्व नहीं है।

प्रमेय 1.29 (रसेल का विरोधाभास). *ऐसा कोई समुच्चय $R = \{x : x \notin x\}$ नहीं है।*

प्रमाण. यदि $R = \{x : x \notin x\}$ का अस्तित्व हो, तो $R \in R$ तभी और केवल तभी जब $R \notin R$; यह एक विरोधाभास है। □

आइए इस प्रमाण को कुछ धीरे-धीरे समझें। यदि R का अस्तित्व है, तो यह पूछना सार्थक है कि $R \in R$ है या नहीं। मान लीजिए कि वास्तव में $R \in R$। अब, R को उन सभी समुच्चयों के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया था जो स्वयं अपने अवयव नहीं हैं। इसलिए यदि $R \in R$, तो R में स्वयं R का परिभाषक गुणधर्म नहीं है। किंतु केवल वे समुच्चय ही R में हैं जिनमें यह गुणधर्म है; अतः R स्वयं R का अवयव नहीं हो सकता, अर्थात $R \notin R$। लेकिन R एक ही समय में R का अवयव हो भी और न भी हो—यह संभव नहीं; इसलिए हमें विरोधाभास मिलता है।

चूँकि $R \in R$ मानने से विरोधाभास मिलता है, अतः $R \notin R$। किंतु इससे भी विरोधाभास मिलता है! यदि $R \notin R$, तो R में स्वयं R का परिभाषक गुणधर्म है; इसलिए अन्य सभी स्वयं का अवयव न होने वाले समुच्चयों की तरह R भी R का अवयव होगा। फिर से, वह एक ही समय में R का अवयव हो भी और न भी हो—यह संभव नहीं।

हम ऐसा समुच्चय सिद्धान्त कैसे बनाएँ जो रसेल के विरोधाभास में पड़ने से बचे, अर्थात जो यह *असंगत* दावा न करे कि $R = \{x : x \notin x\}$ का अस्तित्व है? इसके लिए हमें ऐसे अभिगृहीत निर्धारित करने होंगे जो अत्यंत सटीक शर्तें बताएँ कि समुच्चय कब अस्तित्व में होते हैं (और कब नहीं होते)।

इस अध्याय में दी गई समुच्चय सिद्धान्त की रूपरेखा ऐसा नहीं करती। यह *सचमुच अनौपचारिक* है। यह केवल बताती है कि समुच्चय विस्तारिता का पालन करते हैं और यदि कुछ समुच्चय दिए हों, तो उनका सम्मिलन, सर्वनिष्ठ आदि बनाया जा सकता है। इससे अधिक कठोरता से समुच्चय सिद्धान्त विकसित करना संभव है।

प्रश्न

प्रश्न 1.1. सिद्ध कीजिए कि अधिकतम एक ही रिक्त समुच्चय हो सकता है; अर्थात् दिखाइए कि यदि A और B ऐसे समुच्चय हैं जिनका कोई अवयव नहीं है, तो $A = B$।

प्रश्न 1.2. $\{a, b, c, d\}$ के सभी उपसमुच्चयों की सूची बनाइए।

प्रश्न 1.3. दिखाइए कि यदि A के n अवयव हैं, तो $\wp(A)$ के 2^n अवयव हैं।

प्रश्न 1.4. सिद्ध कीजिए कि यदि $A \subseteq B$, तो $A \cup B = B$।

प्रश्न 1.5. विधिपूर्वक सिद्ध कीजिए कि यदि $A \subseteq B$, तो $A \cap B = A$।

प्रश्न 1.6. दिखाइए कि यदि A समुच्चय है और $A \in B$, तो $A \subseteq \bigcup B$।

प्रश्न 1.7. सिद्ध कीजिए कि यदि $A \subsetneq B$, तो $B \setminus A \neq \emptyset$।

प्रश्न 1.8. परिभाषा 1.23 का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ तभी और केवल तभी, जब $a = c$ और $b = d$ दोनों हों।

प्रश्न 1.9. $\{1, 2, 3\}^3$ के सभी अवयवों की सूची दीजिए।

प्रश्न 1.10. k पर आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $k \geq 1$ के लिए, यदि A में n अवयव हैं, तो A^k में n^k अवयव हैं।

अध्याय 2

संबंध

2.1 समुच्चयों के रूप में संबंध

खंड 1.3 में हमने कुछ महत्त्वपूर्ण समुच्चयों का उल्लेख किया था: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$। इनमें से कुछ समुच्चयों के अवयवों के बीच के कई रोचक संबंध निस्संदेह आपको याद होंगे। उदाहरण के लिए, इनमें से प्रत्येक समुच्चय पर एक सर्वथा मानक *क्रम-संबंध* है। इसके अतिरिक्त *तत्सम होने* का संबंध भी है, जिसमें प्रत्येक वस्तु स्वयं से संबंधित है और किसी अन्य वस्तु से नहीं। आगे हमें और भी कई रोचक संबंध मिलेंगे, और संभावित संबंधों की संख्या तो इससे भी अधिक है। फिर भी, उनका पुनरवलोकन करने से पहले हम यह स्पष्ट करने से आरम्भ करेंगे कि संबंधों को एक विशेष प्रकार के समुच्चय के रूप में देखा जा सकता है।

इसके लिए खंड 1.5 की दो बातें याद कीजिए। पहली, किसी *क्रमित युग्म* की संकल्पना याद कीजिए: a और b दिए होने पर हम $\langle a, b\rangle$ बना सकते हैं। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि यहाँ अवयवों का क्रम *वास्तव में* मायने रखता है। अतः यदि $a \neq b$, तो $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$। (इसकी तुलना अक्रमित युग्मों, अर्थात् 2-अवयवी समुच्चयों, से कीजिए, जहाँ $\{a, b\} = \{b, a\}$।) दूसरी, *कार्तीय गुणनफल* की संकल्पना याद कीजिए: यदि A और B समुच्चय हैं, तो हम $A \times B$ बना सकते हैं, जो उन सभी युग्मों $\langle x, y\rangle$ का समुच्चय है जिनमें $x \in A$ और $y \in B$। विशेष रूप से, $A^2 = A \times A$, A से लिए गए सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है।

अब हम किसी समुच्चय पर एक विशेष संबंध पर विचार करेंगे: $<$-संबंध, जो प्राकृत संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{N}$ पर है। संख्याओं के उन सभी युग्मों $\langle n, m\rangle$ के समुच्चय पर विचार कीजिए जिनमें $n < m$, अर्थात्,

$$R = \{\langle n, m\rangle : n, m \in \mathbb{N} \text{ और } n < m\}.$$

n का m से छोटा होना और युग्म $\langle n, m\rangle$ का R का अवयव होना आपस में निकटता से जुड़े हैं; ठीक-ठीक:

$$n < m \text{ तभी और केवल तभी } \langle n, m\rangle \in R.$$

वास्तव में, किसी भी सूचना को खोए बिना हम समुच्चय R को $<$-संबंध *ही* मान सकते हैं, जो $\mathbb{N}$ पर है।

इसी प्रकार संख्याओं के बीच किसी भी संबंध के लिए हम $\mathbb{N}^2$ का एक उपसमुच्चय बना सकते हैं। इसके विपरीत, संख्या-युग्मों का कोई भी समुच्चय $S \subseteq \mathbb{N}^2$ दिया हो, तो संख्याओं के बीच उसके अनुरूप एक संबंध होता है: n का m से वह संबंध तभी और केवल तभी होता है जब $\langle n, m\rangle \in S$। इससे निम्न परिभाषा उचित ठहरती है:

परिभाषा 2.1 (द्वयी संबंध). समुच्चय A पर एक *द्वयी संबंध* A^2 का कोई उपसमुच्चय है। यदि $R \subseteq A^2$, A पर एक द्वयी संबंध है और $x, y \in A$, तो हम कभी-कभी Rxy (अथवा xRy) लिखते हैं, जिसका अर्थ $\langle x, y\rangle \in R$ है।

उदाहरण 2.2. प्राकृत संख्याओं के युग्मों के समुच्चय $\mathbb{N}^2$ को इस प्रकार एक द्विविमीय सारणी में सूचीबद्ध किया जा सकता है:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \mathbf{0},\mathbf{0}\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \dots \\ \langle 1,0\rangle & \langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \dots \\ \langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle \mathbf{2},\mathbf{2}\rangle & \langle 2,3\rangle & \dots \\ \langle 3,0\rangle & \langle 3,1\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle \mathbf{3},\mathbf{3}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

यहाँ हमने विकर्ण को मोटे अक्षरों में रखा है, क्योंकि विकर्ण पर स्थित युग्मों से बना $\mathbb{N}^2$ का उपसमुच्चय, अर्थात्,

$$\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \dots\},$$

$\mathbb{N}$ पर *तत्समक संबंध* है। (चूँकि तत्समक संबंध का प्रायः उपयोग होता है, हम $\mathrm{Id}_A = \{\langle x,x\rangle : x \in A\}$ को किसी भी समुच्चय A के लिए परिभाषित करते हैं।) विकर्ण के ऊपर स्थित सभी युग्मों का उपसमुच्चय, अर्थात्,

$$L = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \dots, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \dots, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \dots\},$$

'से छोटा है' संबंध है, अर्थात् Lnm तभी और केवल तभी जब $n < m$। विकर्ण के नीचे स्थित युग्मों का उपसमुच्चय, अर्थात्,

$$G = \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \dots\},$$

'से बड़ा है' संबंध है, अर्थात् Gnm तभी और केवल तभी जब $n > m$। L और I का सम्मिलन, जिसे हम $K = L \cup I$ कह सकते हैं, *'से छोटा या बराबर है' संबंध* है: Knm तभी और केवल तभी जब $n \leq m$। इसी प्रकार, $H = G \cup I$, *'से बड़ा या बराबर है' संबंध* है। ये संबंध L, G, K, और H विशेष प्रकार के संबंध हैं, जिन्हें *क्रम* कहा जाता है। L और G का यह गुणधर्म है कि कोई भी संख्या स्वयं से L या G संबंध नहीं रखती (अर्थात् प्रत्येक n के लिए न तो Lnn और न ही Gnn)। इस गुणधर्म वाले संबंधों को *अस्वतुल्य* कहते हैं; यदि वे क्रम भी हों, तो उन्हें *प्रबल क्रम* कहते हैं।

यद्यपि क्रम और तत्समक संबंध महत्त्वपूर्ण तथा स्वाभाविक संबंध हैं, इस बात पर बल देना चाहिए कि हमारी परिभाषा के अनुसार A^2 का *कोई भी* उपसमुच्चय A पर एक संबंध है, चाहे वह कितना भी अस्वाभाविक या कृत्रिम क्यों न लगे। विशेष रूप से, $\emptyset$ किसी भी समुच्चय पर एक संबंध है (*रिक्त संबंध*, जिसमें कोई भी अवयव-युग्म संबंधित नहीं होता), और A^2 स्वयं भी A पर एक संबंध है (जिसमें प्रत्येक युग्म संबंधित होता है); इसे *सार्वत्रिक संबंध* कहते हैं। परंतु $E = \{\langle n,m\rangle : n > 5$ या $m \times n \geq 34\}$ जैसा कोई समुच्चय भी संबंध माना जाता है।

2.2 दार्शनिक विचार

खंड 2.1 में हमने संबंधों को कुछ विशेष समुच्चयों के रूप में परिभाषित किया था। यहाँ रुककर एक छोटा-सा दार्शनिक प्रश्न पूछना चाहिए: ऐसी परिभाषा क्या *काम* कर रही है? यह कहना अत्यंत संदेहास्पद होगा कि हमने तत्त्वमीमांसात्मक तादात्म्य के कुछ तथ्यों की *खोज* कर ली है; कि उदाहरण के लिए, $\mathbb{N}$ पर क्रम-संबंध *वही निकला* समुच्चय $R = \{\langle n,m\rangle : n,m \in \mathbb{N}$ और $n < m\}$ जिसे हमने खंड 2.1 में परिभाषित किया था। ऐसा सोचने के विरुद्ध तीन कारण हैं।

पहला: परिभाषा 1.23 में हमने $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$ परिभाषित किया था। इसके बजाय परिभाषा $\|a,b\| = \{\{b\},\{a,b\}\} = \langle b,a\rangle$ पर विचार कीजिए। जब $a \neq b$, तब $\langle a,b\rangle \neq \|a,b\|$। किंतु हम समान रूप से $\|a,b\|$ को क्रमित युग्म की अपनी परिभाषा मान सकते थे, न कि $\langle a,b\rangle$ को। दोनों परिभाषाएँ समान रूप से अच्छी तरह काम करतीं। अतः अब प्राकृत संख्याओं पर क्रम-संबंध "होने" के दो समान रूप से अच्छे प्रत्याशी हैं, अर्थात्:

$$R = \{\langle n,m\rangle : n,m \in \mathbb{N} \text{ और } n < m\}$$
$$S = \{\|n,m\| : n,m \in \mathbb{N} \text{ और } n < m\}.$$

चूँकि विस्तारिता के अनुसार $R \neq S$, इसलिए स्पष्ट है कि दोनों एक साथ *उसी* क्रम-संबंध के तद्रूप नहीं हो सकते जो $\mathbb{N}$ पर है। लेकिन यह दावा करना कि तथ्यतः R, न कि S (या इसका उलटा), *ही* क्रम-संबंध है, बिल्कुल मनमाना और इसलिए कुछ लज्जाजनक होगा। (यह समुच्चय-सैद्धांतिक अपचयनवाद के विरुद्ध उस तर्क का अत्यंत सरल उदाहरण है जिसे 1965 में बेनासेराफ ने प्रसिद्ध बनाया। हम इस तर्क पर कई बार लौटेंगे।)

दूसरा: यदि हम मानें कि *प्रत्येक* संबंध को किसी समुच्चय से तद्रूप माना जाना चाहिए, तो स्वयं समुच्चय-अवयवता का संबंध $\in$ भी कोई विशेष समुच्चय होना चाहिए। वास्तव में उसे $\{\langle x, y\rangle : x \in y\}$ समुच्चय होना पड़ेगा। लेकिन क्या यह समुच्चय अस्तित्व में है? रसेल के विरोधाभास को देखते हुए, इस समुच्चय का अस्तित्व कोई मामूली दावा नहीं है। वास्तव में, समुच्चय-सिद्धांत को स्वयंसिद्ध सिद्धांत के रूप में कठोर ढंग से विकसित करना संभव है, और वह सिद्धांत वास्तव में इस समुच्चय के अस्तित्व को अस्वीकार करेगा। इसलिए कुछ संबंधों को समुच्चयों के रूप में माना जा सके, तब भी समुच्चय-अवयवता का संबंध एक विशेष मामला होगा।

तीसरा: संबंधों को समुच्चयों से "तद्रूप" मानते समय हमने कहा था कि हम Rxy को $\langle x, y\rangle \in R$ के लिए लिख सकेंगे। यह तब तक ठीक है जब अवयवता-संबंध "$\in$" को किसी *विधेय* के रूप में माना जाए। किंतु यदि हम मानें कि "$\in$" किसी खास तरह के समुच्चय का द्योतक है, तो अभिव्यक्ति "$\langle x, y\rangle \in R$" में केवल समुच्चयों के द्योतक तीन एकवाची पद रह जाएँगे: "$\langle x, y\rangle$", "$\in$", और "R"। नामों की ऐसी सूची किसी प्रतिज्ञप्ति को व्यक्त करने में इस निरर्थक शब्द-माला से अधिक समर्थ नहीं है: "कप कलमदान मेज़"। फिर वही बात है: कुछ संबंधों को समुच्चयों के रूप में माना जा सके, तब भी समुच्चय-अवयवता का संबंध एक विशेष मामला होना चाहिए। (इसमें फ़्रेगे के *संकल्पना 'घोड़ा'* विरोधाभास के एक सरल रूप और रसेल के विरुद्ध विट्गेन्श्टाइन की कभी उठाई गई प्रसिद्ध आपत्ति को एक साथ रख दिया गया है।)

तो इससे हम कहाँ पहुँचते हैं? संख्याओं पर बने संबंधों को समुच्चय कहने में कुछ भी *गलत* नहीं है। बस हमें उस अभिप्राय को समझना होगा जिसमें यह बात कही गई है। हम तत्त्वमीमांसात्मक तादात्म्य का कोई तथ्य नहीं कह रहे हैं। हम केवल यह देख रहे हैं कि कुछ संदर्भों में हम (कुछ) संबंधों को कुछ समुच्चयों के रूप में *बरत* सकते हैं (और बरतेंगे)।

2.3 संबंधों के विशेष गुणधर्म

कुछ प्रकार के संबंध इतने सामान्य पाए जाते हैं कि उन्हें विशेष नाम दिए गए हैं। उदाहरण के लिए, $\leq$ और $\subseteq$ दोनों अपने-अपने प्रांतों के अवयवों को समान ढंग से संबंधित करते हैं—इनके प्रांत क्रमशः $\mathbb{N}$ (संबंध $\leq$ के लिए) और $\wp(A)$ (संबंध $\subseteq$ के लिए) हैं। यह ठीक-ठीक समझने के लिए कि ये संबंध किस प्रकार समान हैं और किस प्रकार भिन्न, हम उन विशेष गुणधर्मों के अनुसार उनका वर्गीकरण करते हैं जो संबंधों में हो सकते हैं। इन विशेष गुणधर्मों में से कुछ (और उनके संयोजन) विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हैं: क्रम और तुल्यता संबंध।

परिभाषा 2.3 (स्वतुल्यता). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *स्वतुल्य* होता है तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $x \in A$ के लिए Rxx हो।

परिभाषा 2.4 (संक्रामकता). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *संक्रामक* होता है तभी और केवल तभी जब Rxy और Ryz होने पर Rxz भी हो।

परिभाषा 2.5 (सममिति). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *सममित* होता है तभी और केवल तभी जब Rxy होने पर Ryx भी हो।

परिभाषा 2.6 (प्रति-सममिति). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *प्रति-सममित* होता है तभी और केवल तभी जब Rxy और Ryx दोनों का सत्य होना $x = y$ को अनिवार्य करे (या दूसरे शब्दों में: यदि $x \neq y$ हो, तो या तो $\neg Rxy$ अथवा $\neg Ryx$ हो)।

सममित संबंध में Rxy और Ryx या तो सदैव साथ-साथ सत्य होते हैं, अथवा दोनों में से कोई भी सत्य नहीं होता। प्रति-सममित संबंध में Rxy और Ryx दोनों साथ-साथ केवल तभी सत्य हो सकते हैं जब $x = y$ हो। ध्यान दें कि इससे यह *आवश्यक* नहीं होता कि Rxy और Ryx, $x = y$ होने पर सत्य हों; केवल इतना है कि इसकी मनाही नहीं है। अतः कोई प्रति-सममित संबंध स्वतुल्य हो सकता है, परंतु हर प्रति-सममित संबंध स्वतुल्य नहीं होता। यह भी ध्यान दें

कि प्रति-सममित होना और केवल सममित न होना अलग-अलग शर्तें हैं। वास्तव में कोई संबंध एक ही समय में सममित और प्रति-सममित दोनों हो सकता है (जैसे तत्समक संबंध)।

परिभाषा 2.7 (संबद्धता). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *संबद्ध* होता है यदि सभी $x, y \in A$ के लिए, $x \neq y$ होने पर या तो Rxy अथवा Ryx हो।

परिभाषा 2.8 (अस्वतुल्यता). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *अस्वतुल्य* कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in A$ के लिए Rxx न हो।

परिभाषा 2.9 (असममिति). कोई संबंध $R \subseteq A^2$ *असममित* कहलाता है यदि ऐसा कोई युग्म $x, y \in A$ न हो जिसके लिए Rxy और Ryx दोनों हों।

ध्यान दें कि यदि $A \neq \emptyset$ हो, तो A पर कोई भी अस्वतुल्य संबंध स्वतुल्य नहीं होता, और A पर प्रत्येक असममित संबंध प्रति-सममित भी होता है। परंतु ऐसे $R \subseteq A^2$ होते हैं जो न स्वतुल्य होते हैं और न अस्वतुल्य, और ऐसे प्रति-सममित संबंध भी होते हैं जो असममित नहीं होते।

2.4 तुल्यता संबंध

किसी समुच्चय पर तत्समक संबंध स्वतुल्य, सममित और संक्रामक होता है। जिन संबंधों R में ये तीनों गुणधर्म होते हैं, वे बहुत सामान्य हैं।

परिभाषा 2.10 (तुल्यता संबंध). जो संबंध $R \subseteq A^2$ स्वतुल्य, सममित और संक्रामक हो, उसे *तुल्यता संबंध* कहते हैं। x और y, जो A के अवयव हैं, R-*तुल्य* कहलाते हैं यदि Rxy।

तुल्यता संबंधों से *तुल्यता वर्ग* की धारणा उत्पन्न होती है। कोई तुल्यता संबंध अपने प्रांत को अलग-अलग खंडों में विभाजित कर देता है। प्रत्येक खंड के भीतर सभी वस्तुएँ एक-दूसरे से संबंधित होती हैं; और अलग-अलग खंडों की कोई भी वस्तुएँ आपस में संबंधित नहीं होतीं। कभी-कभी इन खंडों की बात *सीधे* करना ही उपयोगी होता है। इस उद्देश्य से हम निम्न परिभाषा देते हैं:

परिभाषा 2.11. मान लें कि $R \subseteq A^2$ एक तुल्यता संबंध है। प्रत्येक $x \in A$ के लिए, x का A के भीतर *तुल्यता वर्ग* समुच्चय $[x]_R = \{y \in A : Rxy\}$ है। A का R के अधीन *विभाग समुच्चय* $A/_R = \{[x]_R : x \in A\}$ है, अर्थात इन तुल्यता वर्गों का समुच्चय।

अगला परिणाम यह सिद्ध करके तुल्यता वर्ग की परिभाषा का औचित्य स्थापित करता है कि तुल्यता वर्ग वास्तव में A के विभाजन के खंड ही हैं:

प्रतिज्ञप्ति 2.12. *यदि $R \subseteq A^2$ एक तुल्यता संबंध है, तो Rxy तभी और केवल तभी जब $[x]_R = [y]_R$।*

प्रमाण. बाएँ से दाएँ दिशा के लिए मान लें कि Rxy, और $z \in [x]_R$ हो। तब परिभाषा से Rxz। चूँकि R एक तुल्यता संबंध है, Ryz। (इसे विस्तार से देखें: चूँकि Rxy और R सममित है, इसलिए Ryx; और चूँकि Rxz और R संक्रामक है, इसलिए Ryz।) अतः $z \in [y]_R$। सामान्यीकरण करने पर, $[x]_R \subseteq [y]_R$। ठीक इसी प्रकार, $[y]_R \subseteq [x]_R$। इसलिए विस्तारिता से $[x]_R = [y]_R$।

दाएँ से बाएँ दिशा के लिए मान लें कि $[x]_R = [y]_R$। चूँकि R स्वतुल्य है, Ryy, इसलिए $y \in [y]_R$। इसलिए $y \in [x]_R$ भी है, क्योंकि हमारी धारणा है कि $[x]_R = [y]_R$। अतः Rxy। □

उदाहरण 2.13. तुल्यता संबंधों का एक अच्छा उदाहरण मापांक अंकगणित से मिलता है। किन्हीं भी a, b और $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए, $a \equiv_n b$ तभी और केवल तभी मानें जब a को n से भाग देने पर वही शेषफल मिले जो b को n से भाग देने पर मिलता है। (कुछ अधिक सांकेतिक रूप में: $a \equiv_n b$ तभी और केवल तभी जब किसी $k \in \mathbb{Z}$ के लिए $a - b = kn$।) अब $\equiv_n$ किसी भी n के लिए एक तुल्यता संबंध है। और ठीक n भिन्न तुल्यता वर्ग $\equiv_n$ से उत्पन्न होते हैं; अर्थात $\mathbb{N}/_{\equiv_n}$ में n अवयव हैं। ये हैं: n से निःशेष विभाज्य संख्याओं का समुच्चय, अर्थात $[0]_{\equiv_n}$; n से भाग देने पर शेषफल 1 देने वाली संख्याओं का समुच्चय, अर्थात $[1]_{\equiv_n}$; ...; और n से भाग देने पर शेषफल $n-1$ देने वाली संख्याओं का समुच्चय, अर्थात $[n-1]_{\equiv_n}$।

2.5 क्रम

हमारी अनेक तुलनाओं में किसी निश्चित दृष्टि से कुछ वस्तुओं को अन्य वस्तुओं से "छोटा", "बराबर", या "बड़ा" बताया जाता है। इनमें *क्रम* संबंध आते हैं। परंतु क्रम संबंध कई प्रकार के होते हैं। उदाहरण के लिए, कुछ में किन्हीं भी दो वस्तुओं का तुलनीय होना आवश्यक होता है, जबकि अन्य में नहीं। कुछ बराबरी को सम्मिलित करते हैं (जैसे $\leq$) और कुछ उसे अलग रखते हैं (जैसे $<$)। यहाँ इनका वर्गीकरण उपयोगी होगा।

परिभाषा 2.14 (पूर्वक्रम). जो संबंध स्वतुल्य और संक्रामक दोनों हो, उसे *पूर्वक्रम* कहते हैं।

परिभाषा 2.15 (आंशिक क्रम). जो पूर्वक्रम प्रति-सममित भी हो, उसे *आंशिक क्रम* कहते हैं।

परिभाषा 2.16 (रैखिक क्रम). जो आंशिक क्रम संबद्ध भी हो, उसे *संपूर्ण क्रम* या *रैखिक क्रम* कहते हैं।

उदाहरण 2.17. हर रैखिक क्रम एक आंशिक क्रम भी होता है, और हर आंशिक क्रम एक पूर्वक्रम भी होता है, परंतु इनके उलटे कथन सत्य नहीं हैं। A पर सार्वत्रिक संबंध एक पूर्वक्रम है, क्योंकि वह स्वतुल्य और संक्रामक है। किंतु यदि A में एक से अधिक अवयव हों, तो सार्वत्रिक संबंध प्रति-सममित नहीं होता और इसलिए आंशिक क्रम भी नहीं होता।

उदाहरण 2.18. *इससे अधिक लंबा नहीं है* संबंध $\preccurlyeq$ पर, जो $\mathbb{B}^*$ पर है, विचार कीजिए: $x \preccurlyeq y$ तभी और केवल तभी जब $\mathrm{len}(x) \leq \mathrm{len}(y)$। यह एक पूर्वक्रम (स्वतुल्य और संक्रामक) है, और संबद्ध भी है, परंतु आंशिक क्रम नहीं है, क्योंकि यह प्रति-सममित नहीं है। उदाहरण के लिए, $01 \preccurlyeq 10$ और $10 \preccurlyeq 01$, परंतु $01 \neq 10$।

उदाहरण 2.19. समुच्चयों के किसी समुच्चय पर संबंध $\subseteq$ एक महत्त्वपूर्ण आंशिक क्रम है। सामान्यतः यह रैखिक क्रम नहीं है, क्योंकि यदि $a \neq b$ हो और हम $\wp(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ पर विचार करें, तो दिखता है कि $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ और $\{a\} \neq \{b\}$ और $\{b\} \nsubseteq \{a\}$।

उदाहरण 2.20. *निःशेष विभाज्यता* का संबंध हमें ऐसा आंशिक क्रम देता है जो रैखिक क्रम नहीं है। पूर्णांकों n और m के लिए हम $n \mid m$ लिखकर यह बताते हैं कि n, m को निःशेष विभाजित करता है, अर्थात तभी और केवल तभी जब कोई पूर्णांक k ऐसा हो कि $m = kn$। $\mathbb{N}$ पर यह एक आंशिक क्रम है, परंतु रैखिक क्रम नहीं है: उदाहरण के लिए, $2 \nmid 3$ और $3 \nmid 2$ भी। $\mathbb{Z}$ पर संबंध के रूप में देखने पर विभाज्यता केवल पूर्वक्रम है, क्योंकि यह प्रति-सममित नहीं है: $1 \mid -1$ और $-1 \mid 1$ परंतु $1 \neq -1$।

उदाहरण 2.21. अनुक्रमों के समुच्चय A^* पर *विस्तार* संबंध यह है: $s \sqsubseteq s'$ तभी और केवल तभी जब $s = \Lambda$ (रिक्त अनुक्रम), $s = s'$, अथवा $s = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ और $s' = \langle s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots, s_m \rangle$। यदि $s \sqsubseteq s'$ हो, तो हम यह भी कहते हैं कि s, s' का *आरंभिक खंड* है। A^* पर विस्तार संबंध एक आंशिक क्रम है, परंतु रैखिक क्रम नहीं है; उदाहरणार्थ, यदि $a \neq b$, तो $ab \nsqsubseteq ba$ और $ba \nsqsubseteq ab$।

परिभाषा 2.22 (प्रबल क्रम). *प्रबल क्रम* ऐसा संबंध है जो अस्वतुल्य, असममित और संक्रामक हो।

परिभाषा 2.23 (प्रबल रैखिक क्रम). जो प्रबल क्रम संबद्ध भी हो, उसे *प्रबल संपूर्ण क्रम* या *प्रबल रैखिक क्रम* कहते हैं।

उदाहरण 2.24. $\leq$ वह रैखिक क्रम है जो प्रबल रैखिक क्रम $<$ के अनुरूप है। $\subseteq$ वह आंशिक क्रम है जो प्रबल क्रम $\subsetneq$ के अनुरूप है।

किसी भी प्रबल क्रम R में, जो A पर है, विकर्ण Id_A जोड़कर, अर्थात सभी युग्म $\langle x, x \rangle$ जोड़कर, उसे आंशिक क्रम में बदला जा सकता है। (इसे R का *स्वतुल्य संवरक* कहते हैं।) इसके विपरीत, किसी आंशिक क्रम से आरंभ करके Id_A हटाने पर प्रबल क्रम प्राप्त किया जा सकता है। अगले दो परिणाम इसे सटीक रूप देते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 2.25. *यदि R, A पर एक प्रबल क्रम है, तो $R^+ = R \cup \mathrm{Id}_A$ एक आंशिक क्रम है। इसके अतिरिक्त, यदि R एक प्रबल रैखिक क्रम है, तो R^+ एक रैखिक क्रम है।*

प्रमाण. मान लें कि R एक प्रबल क्रम है, अर्थात $R \subseteq A^2$ और R अस्वतुल्य, असममित और संक्रामक है। मान लें $R^+ = R \cup \mathrm{Id}_A$। हमें दिखाना है कि R^+ स्वतुल्य, प्रति-सममित और संक्रामक है।

R^+ स्पष्टतः स्वतुल्य है, क्योंकि $\langle x, x\rangle \in \mathrm{Id}_A \subseteq R^+$ प्रत्येक $x \in A$ के लिए।

R^+ को प्रति-सममित दिखाने के लिए, विरोधाभासार्थ मान लें कि R^+xy और R^+yx, परंतु $x \neq y$। चूँकि $\langle x, y\rangle \in R \cup \mathrm{Id}_A$, परंतु $\langle x, y\rangle \notin \mathrm{Id}_A$, इसलिए $\langle x, y\rangle \in R$ होना ही चाहिए, अर्थात Rxy। इसी प्रकार, Ryx। किंतु यह हमारी उस धारणा का खंडन करता है कि R असममित है।

संक्रामकता स्थापित करने के लिए मान लें कि R^+xy और R^+yz। यदि $\langle x, y\rangle \in R$ और $\langle y, z\rangle \in R$ दोनों हों, तो $\langle x, z\rangle \in R$, क्योंकि R संक्रामक है। अन्यथा, या तो $\langle x, y\rangle \in \mathrm{Id}_A$, अर्थात $x = y$, अथवा $\langle y, z\rangle \in \mathrm{Id}_A$, अर्थात $y = z$। पहली स्थिति में धारणा से R^+yz है और $x = y$, इसलिए R^+xz। दूसरी स्थिति में भी ठीक इसी प्रकार। दोनों स्थितियों में R^+xz; अतः R^+ भी संक्रामक है।

"इसके अतिरिक्त" वाले अंश के लिए मान लें कि R संबद्ध भी है। अतः सभी $x \neq y$ के लिए या तो Rxy अथवा Ryx, अर्थात या तो $\langle x, y\rangle \in R$ अथवा $\langle y, x\rangle \in R$। चूँकि $R \subseteq R^+$, यह बात R^+ के लिए भी सत्य रहती है, इसलिए R^+ भी संबद्ध है। □

प्रतिज्ञप्ति 2.26. *यदि R, A पर एक आंशिक क्रम है, तो $R^- = R \setminus \mathrm{Id}_A$ एक प्रबल क्रम है। इसके अतिरिक्त, यदि R एक रैखिक क्रम है, तो R^- एक प्रबल रैखिक क्रम है।*

प्रमाण. इसे अभ्यास के लिए छोड़ा जाता है। □

निम्न सरल परिणाम स्थापित करता है कि प्रबल रैखिक क्रमों में विस्तारिता-सदृश गुणधर्म होता है:

प्रतिज्ञप्ति 2.27. *यदि $<$, A पर एक प्रबल रैखिक क्रम है, तो:*

$$(\forall a, b \in A)((\forall x \in A)(x < a \leftrightarrow x < b) \to a = b).$$

प्रमाण. मान लें $(\forall x \in A)(x < a \leftrightarrow x < b)$। यदि $a < b$, तो $a < a$, जो $<$ के अस्वतुल्य होने का खंडन करता है; इसलिए $a \not< b$। ठीक इसी प्रकार, $b \not< a$। अतः $a = b$, क्योंकि $<$ संबद्ध है। □

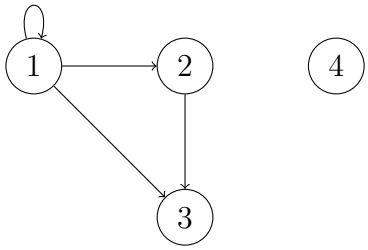
2.6 आलेख

आलेख ऐसा आरेख है जिसमें बिंदु—जिन्हें "संधि-बिंदु" या "शीर्ष" कहते हैं—कोरों से जुड़े होते हैं। आलेख विविक्त गणित और संगणक विज्ञान में सर्वत्र प्रयुक्त साधन हैं। संबंधों और संरचनाओं का निरूपण तथा दृश्यांकन करने में वे अत्यंत उपयोगी हैं: विभिन्न प्रकार के संजाल जैसी मूर्त वस्तुओं से लेकर निर्णयों के संभावित परिणाम जैसी अमूर्त संरचनाओं तक। साहित्य में आलेखों के अनेक भिन्न प्रकार मिलते हैं। उदाहरण के लिए, वे इस बात के अनुसार भिन्न होते हैं कि कोर दिष्ट हैं या नहीं, उन पर नामांक हैं या नहीं, किसी संधि-बिंदु से उसी संधि-बिंदु तक कोर हो सकता है या नहीं, उन्हीं संधि-बिंदुओं के बीच एकाधिक कोर हो सकते हैं या नहीं, आदि। *दिष्ट आलेखों* का संबंधों से विशेष नाता है।

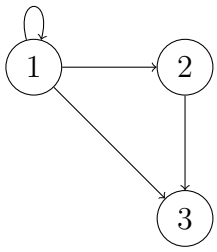
परिभाषा 2.28 (दिष्ट आलेख). *दिष्ट आलेख $G = \langle V, E\rangle$ में शीर्षों का एक समुच्चय V और कोरों का एक समुच्चय $E \subseteq V^2$ होता है।*

हमारी परिभाषा के अनुसार आलेख बस एक समुच्चय और उस समुच्चय पर एक संबंध है। निस्संदेह, आलेखों की चर्चा करते समय उनसे आलेखी रूप में निरूपित होने की अपेक्षा स्वाभाविक है: हम दो शीर्षों v_1 और v_2 को तीर से तभी और केवल तभी जोड़कर आलेख बना सकते हैं जब $\langle v_1, v_2\rangle \in E$। किसी संबंध और आलेख में एकमात्र अंतर यह है कि आलेख शीर्षों के समुच्चय को स्पष्ट रूप से बताता है; अर्थात आलेख में पृथक शीर्ष हो सकते हैं। फिर भी महत्त्वपूर्ण बात यह है कि हर संबंध R को, जो समुच्चय X पर है, दिष्ट आलेख $\langle X, R\rangle$ के रूप में देखा जा सकता है, और इसके विपरीत दिष्ट आलेख $\langle V, E\rangle$ को संबंध $E \subseteq V^2$ के रूप में देखा जा सकता है, जिसमें समुच्चय V स्पष्ट रूप से दिया गया है।

उदाहरण 2.29. आलेख $\langle V, E\rangle$, जिसमें $V = \{1, 2, 3, 4\}$ और $E = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ हैं, इस प्रकार दिखाई देता है:



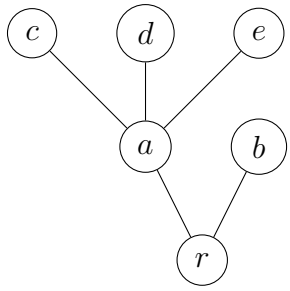
यह उस $\langle V', E\rangle$ से भिन्न आलेख है जिसमें $V' = \{1, 2, 3\}$ है और जो इस प्रकार दिखाई देता है:



2.7 वृक्ष

आंशिक क्रम का एक विशेष प्रकार, जिसकी तर्कशास्त्र के सभी भागों में महत्त्वपूर्ण भूमिका है, *वृक्ष* कहलाता है। परिमित वृक्ष तर्कशास्त्र के आरंभिक भागों में मिलते हैं: उदाहरणार्थ, सूत्रों को वाक्यविन्यास-वृक्ष में उनके विघटन के आधार पर समझा जा सकता है, जबकि अनेक व्युत्पत्ति पद्धतियों में व्युत्पत्तियाँ भी परिमित वृक्षों का रूप लेते हैं। अनंत वृक्ष प्रतिज्ञप्तिक और प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के पूर्णता प्रमेयों के प्रमाण में ही सामने आ जाते हैं, और गणितीय तर्कशास्त्र में सर्वत्र प्रयुक्त होते हैं।

वृक्ष की समुच्चय-सैद्धान्तिक संकल्पना आलेख सिद्धान्त में वृक्ष की धारणा से निकटतः संबंधित है। यहाँ एक (परिमित) वृक्ष का चित्र है:



सबसे नीचे का संधि-बिंदु r मूल है। r को छोड़कर प्रत्येक संधि-बिंदु का ठीक एक जनक संधि-बिंदु उसके ठीक नीचे होता है। किसी संधि-बिंदु x और किसी संधि-बिंदु y के बीच उस संबंध में, जिसमें कोरों का ऊपर की ओर अनुसरण करके y तक x से पहुँचा जा सकता है, हम कह सकते हैं कि x, y का *पूर्वज* है।

वृक्ष में पूर्वज-संबंध एक प्रबल आंशिक क्रम है। यही समुच्चय-सैद्धान्तिक परिभाषा की प्रेरणा देता है। उसे बताने के लिए हमें दो संकल्पनाएँ चाहिए। समुच्चय A को $\leq$ द्वारा आंशिक रूप से क्रमित किए जाने पर उसमें *न्यूनतम अवयव* ऐसा अवयव $x \in A$ है कि प्रत्येक $y \in A$ के लिए $x \leq y$ हो। किसी समुच्चय को $\leq$ द्वारा *सुक्रमित* तब कहते हैं जब उसके प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय में न्यूनतम अवयव हो।

परिभाषा 2.30 (वृक्ष). *वृक्ष* ऐसा युग्म $T = \langle A, \leq \rangle$ है कि A एक समुच्चय है और $\leq$, A पर एक आंशिक क्रम है, जिसका एक अद्वितीय न्यूनतम अवयव $r \in A$ है (जिसे *मूल* कहते हैं), तथा प्रत्येक $x \in A$ के लिए समुच्चय $\{y : y \leq x\}$, $\leq$ द्वारा सुक्रमित है।

परिभाषा 2.31 (उत्तरवर्ती). मान लीजिए कि $T = \langle A, \leq \rangle$ एक वृक्ष है। यदि $x, y \in A$, $x < y$, और ऐसा कोई $z \in A$ नहीं है कि $x < z < y$, तो हम y को x का *उत्तरवर्ती* कहते हैं।

$x \in A$ के उत्तरवर्तियों को उसकी *संतानें* भी कहते हैं। यदि y, x का उत्तरवर्ती है, तो हम x को y का *पूर्ववर्ती* या *जनक* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 2.32. *यदि $\langle A, \leq \rangle$ एक वृक्ष है, तो मूल को छोड़कर प्रत्येक $x \in A$ का अधिकतम एक पूर्ववर्ती है।*

प्रमाण. मान लीजिए कि $y_1 < x$ और $y_2 < x$ तथा $y_1 \neq y_2$। तब $\{y_1, y_2\} \subseteq \{z : z < x\}$। चूँकि $\{z : z < x\}$, $\leq$ द्वारा सुक्रमित है, इसलिए उसके उपसमुच्चय $\{y_1, y_2\}$ में एक न्यूनतम अवयव है, जो स्पष्टतः y_1 या y_2 ही होगा। अतः या तो $y_1 \leq y_2$ या $y_2 \leq y_1$। हमने माना है कि $y_1 \neq y_2$, इसलिए वास्तव में या तो $y_1 < y_2$ या $y_2 < y_1$। चूँकि हमने $y_1 < x$ और $y_2 < x$ भी माना है, इसलिए आगे या तो $y_1 < y_2 < x$ या $y_2 < y_1 < x$। अतः y_1 और y_2 दोनों x के पूर्ववर्ती नहीं हो सकते। $\square$

परिभाषा 2.33. वृक्ष $T = \langle A, \leq \rangle$ को *अनंत* कहते हैं यदि A एक अनंत समुच्चय है, और अन्यथा उसे *परिमित* कहते हैं। यदि T ऐसा है कि प्रत्येक $x \in A$ के केवल परिमित रूप से अनेक उत्तरवर्ती हैं, तो हम T को *परिमित-शाखी* कहते हैं।

परिभाषा 2.34 (शाखाएँ). दिए गए वृक्ष $T = \langle A, \leq \rangle$ के लिए, T की *शाखा*, T में एक अधिकतम शृंखला है; अर्थात ऐसा समुच्चय $B \subseteq A$ कि किन्हीं $x, y \in B$ के लिए या तो $x \leq y$ या $y \leq x$, और प्रत्येक $z \in X \setminus B$ के लिए ऐसा $u \in B$ विद्यमान हो कि न तो $z \leq u$ और न $u \leq z$। हम $[T]$ का प्रयोग T की सभी शाखाओं के समुच्चय को दर्शाने के लिए करते हैं।

उदाहरण 2.35. परिमित-शाखी वृक्ष का एक प्रसिद्ध उदाहरण 0 और 1 के परिमित अनुक्रमों का *अनंत द्विआधारी वृक्ष* है, जिसे कभी-कभी $\{0, 1\}^*$ या $\mathbb{B}^*$ लिखते हैं और विस्तार संबंध $\sqsubseteq$ द्वारा क्रमित करते हैं (उदाहरणतः $101 \sqsubseteq 101101$)। चूँकि किसी भी द्विआधारी वर्ण-शृंखला के अंत में 0 या 1 जोड़कर उसका विस्तार हमेशा किया जा सकता है, इसलिए इस वृक्ष में अनंत रूप से अनेक अवयव हैं: प्रत्येक अवयव s के ठीक दो उत्तरवर्ती, $s0$ और $s1$, हैं। इसका मूल रिक्त अनुक्रम Λ है।

उदाहरण 2.36. कुछ और सामान्य रूप में, प्राकृत संख्याओं के परिमित अनुक्रमों का समुच्चय $\mathbb{N}^*$, जिसे विस्तार संबंध $\sqsubseteq$ से क्रमित किया गया है, भी एक वृक्ष है। यह स्पष्टतः परिमित-शाखी नहीं है: प्रत्येक $s \in \mathbb{N}^*$ के अनंत रूप से अनेक उत्तरवर्ती sn हैं, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए एक। प्रत्येक $A \subseteq \mathbb{N}^*$ जो $\sqsubseteq$ के अधीन संवृत है, $\mathbb{N}^*$ का *उपवृक्ष* है। (अर्थात A ऐसा है कि यदि $s \in A$ और $s' \sqsubseteq s$, तो $s' \in A$ भी।) सभी परिमित वृक्षों को $\mathbb{N}^*$ के परिमित उपवृक्षों के रूप में निरूपित किया जा सकता है।

प्रतिज्ञप्ति 2.37 (Kőnig का उपप्रमेय). *यदि $T = \langle A, \leq \rangle$ एक परिमित-शाखी अनंत वृक्ष है, तो T की एक अनंत शाखा है।*

संगणनीयता सिद्धान्त में व्यापक रूप से प्रयुक्त Kőnig के उपप्रमेय का एक विशेष रूप, जिसे *दुर्बल Kőnig उपप्रमेय* कहते हैं, यह है: $\{0, 1\}^*$ के प्रत्येक अनंत उपवृक्ष की एक अनंत शाखा होती है।

2.8 संबंधों पर संक्रियाएँ

संबंधों को बदलना या संयोजित करना प्रायः उपयोगी होता है। प्रतिज्ञप्ति 2.25 में हमने संबंधों के *सम्मिलन* पर विचार किया था, जो युग्मों के समुच्चयों के रूप में माने गए दो संबंधों का सम्मिलन ही है। इसी प्रकार, प्रतिज्ञप्ति 2.26 में हमने संबंधों के सापेक्ष अंतर पर विचार किया था। संबंधों पर की जा सकने वाली कुछ अन्य संक्रियाएँ ये हैं।

परिभाषा 2.38. मान लीजिए कि R, S संबंध हैं और A कोई समुच्चय है।
संबंध R का *प्रतिलोम* $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in R\}$ है।
संबंधों R और S का *सापेक्ष गुणनफल* $(R \mid S) = \{\langle x, z\rangle : \exists y(Rxy \wedge Syz)\}$ है।
R का समुच्चय A पर *प्रतिबंधन* $R\restriction_A = R \cap A^2$ है।
R का समुच्चय A पर *अनुप्रयोग* $R[A] = \{y : (\exists x \in A)Rxy\}$ है।

उदाहरण 2.39. मान लीजिए कि $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$ पर उत्तरवर्ती संबंध है, अर्थात $S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : x + 1 = y\}$, ताकि Sxy तभी और केवल तभी जब $x + 1 = y$।
S^{-1}, $\mathbb{Z}$ पर पूर्ववर्ती संबंध है, अर्थात $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : x - 1 = y\}$।
$S \mid S$ है $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : x + 2 = y\}$
$S\restriction_{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ पर उत्तरवर्ती संबंध है।
$S[\{1, 2, 3\}]$, $\{2, 3, 4\}$ है।

परिभाषा 2.40 (संक्रामक संवरक). मान लीजिए कि $R \subseteq A^2$ एक द्विआधारी संबंध है।
संबंध R का *संक्रामक संवरक* $R^+ = \bigcup_{0<n\in\mathbb{N}} R^n$ है, जहाँ हम पुनरावर्ती रूप से $R^1 = R$ और $R^{n+1} = R^n \mid R$ परिभाषित करते हैं।
संबंध R का *स्वतुल्य संक्रामक संवरक* $R^* = R^+ \cup \mathrm{Id}_A$ है।

उदाहरण 2.41. उत्तरवर्ती संबंध $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ लीजिए। S^2xy तभी और केवल तभी जब $x + 2 = y$, S^3xy तभी और केवल तभी जब $x + 3 = y$, इत्यादि। अतः S^+xy तभी और केवल तभी जब समीकरण $x + n = y$ किसी $n \geq 1$ के लिए सत्य हो। दूसरे शब्दों में, S^+xy तभी और केवल तभी जब $x < y$, और S^*xy तभी और केवल तभी जब $x \leq y$।

प्रश्न

प्रश्न 2.1. संबंध $\subseteq$ के अवयवों की सूची बनाइए; यह संबंध समुच्चय $\wp(\{a, b, c\})$ पर है।

प्रश्न 2.2. ऐसे संबंधों के उदाहरण दीजिए जो (a) स्वतुल्य और सममित हों, परंतु संक्रामक न हों; (b) स्वतुल्य और प्रति-सममित हों; (c) प्रति-सममित और संक्रामक हों, परंतु स्वतुल्य न हों; तथा (d) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक हों। संख्याओं या समुच्चयों पर बने संबंधों का उपयोग न कीजिए।

प्रश्न 2.3. सिद्ध कीजिए कि $\equiv_n$ किसी भी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए एक तुल्यता संबंध है, और $\mathbb{N}/_{\equiv_n}$ में ठीक n अवयव हैं।

प्रश्न 2.4. प्रतिज्ञप्ति 2.26 का प्रमाण दीजिए।

प्रश्न 2.5. छोटा-या-बराबर संबंध $\leq$ को, जो समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ पर है, आलेख के रूप में लीजिए और उसका संगत आरेख बनाइए।

प्रश्न 2.6. सिद्ध कीजिए कि R का संक्रामक संवरक वास्तव में संक्रामक है।

अध्याय 3

फलन

3.1 फलनों की मूल बातें

फलन वह प्रतिचित्रण है जो किसी दिए गए समुच्चय के प्रत्येक अवयव को किसी दिए गए (अन्य) समुच्चय के एक निश्चित अवयव पर भेजता है। उदाहरण के लिए, 1 जोड़ने की संक्रिया एक फलन परिभाषित करती है: प्रत्येक संख्या n को एक अद्वितीय संख्या $n+1$ पर प्रतिचित्रित किया जाता है।

अधिक सामान्य रूप में, फलन युग्म, त्रिक आदि को निवेश के रूप में ले सकते हैं और किसी प्रकार का निर्गम लौटा सकते हैं। आधारभूत अंकगणित से बहुत-से फलन हमें परिचित हैं। उदाहरण के लिए, योग और गुणन फलन हैं। वे दो संख्याएँ लेते हैं और तीसरी संख्या लौटाते हैं।

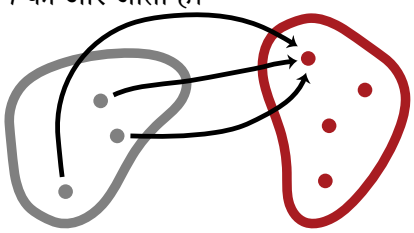
इस गणितीय, अमूर्त अर्थ में फलन एक *काली पेटी* है: महत्त्व केवल इसका है कि कौन-सा निर्गम किस निवेश के साथ युग्मित है, न कि निर्गम की गणना करने की विधि का।

परिभाषा 3.1 (फलन). *फलन* $f\colon A \to B$, A के प्रत्येक अवयव का B के किसी अवयव पर प्रतिचित्रण है।

हम A को f का *प्रांत* और B को f का *सहप्रांत* कहते हैं। समुच्चय A के अवयवों को f के निवेश या *फलन-कोणांक* कहते हैं, और B के जिस अवयव को फलन-कोणांक x के साथ f द्वारा युग्मित किया गया है, उसे f का फलन-कोणांक x पर *मान* कहते हैं, जिसे $f(x)$ लिखते हैं।

परिसर $\operatorname{ran}(f)$, f के सहप्रांत का वह उपसमुच्चय है जिसमें किसी फलन-कोणांक के लिए f के मान आते हैं; $\operatorname{ran}(f) = \{f(x) : x \in A\}$।

आकृति 3.1 का आरेख फलनों के बारे में सोचने में सहायक हो सकता है। बाईं ओर का दीर्घवृत्त फलन के *प्रांत* को निरूपित करता है; दाईं ओर का दीर्घवृत्त फलन के *सहप्रांत* को निरूपित करता है; और एक तीर प्रांत के किसी *फलन-कोणांक* से सहप्रांत के संगत *मान* की ओर जाता है।



चित्र 3.1: फलन एक समुच्चय के प्रत्येक अवयव का दूसरे समुच्चय के अवयव पर प्रतिचित्रण है। एक तीर प्रांत के किसी फलन-कोणांक से सहप्रांत के संगत मान की ओर जाता है।

उदाहरण 3.2. गुणन प्राकृत संख्याओं के युग्मों को निवेश के रूप में लेता है और उन्हें प्राकृत संख्याओं पर निर्गम के रूप में प्रतिचित्रित करता है; अतः यह $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (प्रांत) से $\mathbb{N}$ (सहप्रांत) तक जाता है। इसका परिसर भी $\mathbb{N}$ ही निकलता है, क्योंकि प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$, $n \times 1$ है।

उदाहरण 3.3. गुणन एक फलन है, क्योंकि वह प्रत्येक निवेश—प्राकृत संख्याओं के प्रत्येक युग्म—को एक ही निर्गम के साथ युग्मित करता है: $\times\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$। इसके विपरीत, किसी प्राकृत संख्या n को ऐसी वास्तविक संख्या x पर प्रतिचित्रित करना जिसके लिए $x^2 = n$ हो, फलन नहीं है, क्योंकि प्रत्येक धन पूर्णांक n के दो वर्गमूल होते हैं: $\sqrt{n}$ और $-\sqrt{n}$। केवल धनात्मक वर्गमूल लौटाकर हम इसे फलन बना सकते हैं: $\sqrt{}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$।

उदाहरण 3.4. जो संबंध किसी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को उसके अंतिम श्रेणी-अंक के साथ युग्मित करता है, वह फलन है—एक ही कक्षा में कोई विद्यार्थी दो अलग-अलग अंतिम श्रेणी-अंक नहीं पा सकता। जो संबंध किसी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को उसके माता-पिता के साथ युग्मित करता है, वह फलन नहीं है: विद्यार्थियों के माता-पिता शून्य, दो अथवा दो से अधिक हो सकते हैं।

हर संभावित फलन-कोणांक के लिए फलन का मान क्या है, यह किसी सटीक ढंग से बताकर हम फलन परिभाषित कर सकते हैं। ऐसा करने के अलग-अलग तरीके हैं: कोई सूत्र देना, मान की गणना करने की विधि बताना, अथवा प्रत्येक फलन-कोणांक के लिए मानों की सूची देना। फलनों को जैसे भी परिभाषित करें, हमें यह सुनिश्चित करना चाहिए कि हर फलन-कोणांक के लिए एक, और केवल एक, मान निर्दिष्ट हो।

उदाहरण 3.5. मान लीजिए कि $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि $f(x) = x + 1$। यह परिभाषा f को ऐसे फलन के रूप में निर्दिष्ट करती है जो प्राकृत संख्याओं को निवेश के रूप में लेता है और प्राकृत संख्याएँ निर्गम करता है। यह हमें बताती है कि प्राकृत संख्या x दिए जाने पर f उसका परवर्ती $x + 1$ निर्गम करेगा। इस स्थिति में सहप्रांत $\mathbb{N}$, f का परिसर नहीं है, क्योंकि प्राकृत संख्या 0 किसी भी प्राकृत संख्या की परवर्ती नहीं है। फलन f का परिसर सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbb{Z}^+$ है।

उदाहरण 3.6. मान लीजिए कि $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि $g(x) = x + 2 - 1$। यह हमें बताता है कि g ऐसा फलन है जो प्राकृत संख्याओं को निवेश के रूप में लेता है और प्राकृत संख्याएँ निर्गम करता है। प्राकृत संख्या n दिए जाने पर g, x के परवर्ती के परवर्ती का पूर्ववर्ती, अर्थात $x + 1$, निर्गम करेगा।

हमने अभी अलग-अलग *परिभाषाओं* वाले दो फलनों f और g पर विचार किया। फिर भी ये *एक ही फलन* हैं। आखिरकार, किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए $f(n) = n + 1 = n + 2 - 1 = g(n)$ है। दूसरे शब्दों में, f और g की हमारी परिभाषाएँ अलग-अलग समीकरणों द्वारा एक ही प्रतिचित्रण निर्दिष्ट करती हैं। अतः हम फलनों के लिए विस्तारिता के एक सिद्धांत पर निहित रूप से निर्भर हैं,

$$\text{यदि } \forall x\, f(x) = g(x), \text{ तो } f = g$$

बशर्ते कि f और g का प्रांत और सहप्रांत समान हो।

उदाहरण 3.7. हम फलनों को खंडशः भी परिभाषित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, हम $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

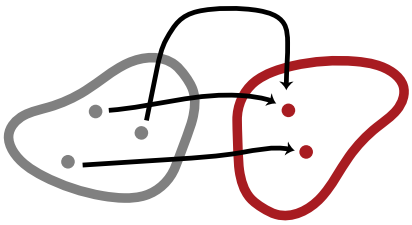
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{यदि } x \text{ सम है} \\ \frac{x+1}{2} & \text{यदि } x \text{ विषम है।} \end{cases}$$

क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या या तो सम है या विषम, इस फलन का निर्गम सदैव प्राकृत संख्या होगा। केवल यह याद रखें कि यदि आप किसी फलन को खंडशः परिभाषित करते हैं, तो प्रत्येक संभावित निवेश ठीक एक ही स्थिति में आना चाहिए। कुछ स्थितियों में इसके लिए यह सिद्ध करना आवश्यक होगा कि स्थितियाँ सर्वसमावेशी और परस्पर अपवर्जी हैं।

3.2 फलनों के प्रकार

जिन फलनों के प्रकारों से हमारा सबसे अधिक सामना होता है, उनमें से कुछ का वर्गीकरण प्रस्तुत करना उपयोगी होगा।

आरंभ में हम ऐसे फलनों पर विचार कर सकते हैं जिनमें सहप्रांत का प्रत्येक अवयव फलन का कोई मान होता है। ऐसे फलन आच्छादक कहलाते हैं और उन्हें आकृति 3.2 की तरह चित्रित किया जा सकता है।



चित्र 3.2: आच्छादक फलन में सहप्रांत का प्रत्येक अवयव कोई मान होता है।

परिभाषा 3.8 (आच्छादक फलन). फलन $f\colon A \to B$ *आच्छादक* है यदि और केवल यदि B भी f का परिसर है, अर्थात् प्रत्येक $y \in B$ के लिए कम-से-कम एक $x \in A$ ऐसा है कि $f(x) = y$; प्रतीकों में:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y.$$

ऐसे फलन को A से B तक का आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं।

यदि आप यह दिखाना चाहते हैं कि f आच्छादक प्रतिचित्रण है, तो आपको दिखाना होगा कि f के सहप्रांत की प्रत्येक वस्तु $f(x)$ का मान है, किसी निवेश x के लिए।

ध्यान दें कि प्रत्येक फलन एक आच्छादक प्रतिचित्रण *प्रेरित करता* है। वास्तव में, फलन $f\colon A \to B$ दिए जाने पर $f'\colon A \to \mathrm{ran}(f)$ को $f'(x) = f(x)$ द्वारा परिभाषित करें। चूँकि $\mathrm{ran}(f)$ को $\{f(x) \in B : x \in A\}$ के रूप में *परिभाषित* किया गया है, इसलिए यह फलन f' निश्चित रूप से आच्छादक प्रतिचित्रण है।

हर फलन प्रत्येक संभावित निवेश को एक अद्वितीय निर्गम पर प्रतिचित्रित करता है। पर ऐसे फलन भी होते हैं जो अलग-अलग निवेशों को कभी एक ही निर्गम पर प्रतिचित्रित नहीं करते। ऐसे फलन एकैकी कहलाते हैं और उन्हें आकृति 3.3 की तरह चित्रित किया जा सकता है।

चित्र 3.3: एकैकी फलन दो अलग-अलग फलन-कोणांकों को कभी एक ही मान पर प्रतिचित्रित नहीं करता।

परिभाषा 3.9 (एकैकी फलन). फलन $f\colon A \to B$ *एकैकी* है यदि और केवल यदि प्रत्येक $y \in B$ के लिए अधिक-से-अधिक एक $x \in A$ ऐसा है कि $f(x) = y$। ऐसे फलन को A से B तक का एकैकी प्रतिचित्रण कहते हैं।

यदि आप यह दिखाना चाहते हैं कि f एकैकी प्रतिचित्रण है, तो आपको दिखाना होगा कि किन्हीं अवयवों x और y के लिए, जो f के प्रांत में हों, यदि $f(x) = f(y)$, तो $x = y$।

उदाहरण 3.10. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ अचर फलन, जो $f(x) = 1$ द्वारा दिया गया है, न तो एकैकी है, न आच्छादक।

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ तत्समक फलन, जो $f(x) = x$ द्वारा दिया गया है, एकैकी और आच्छादक दोनों है।

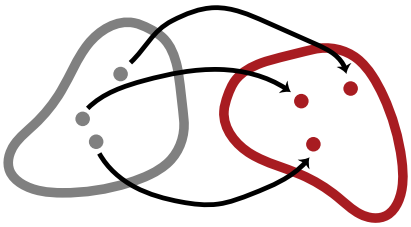
$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ परवर्ती फलन, जो $f(x) = x + 1$ द्वारा दिया गया है, एकैकी है, पर आच्छादक नहीं।

निम्न प्रकार से परिभाषित फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{यदि } x \text{ सम है} \\ \frac{x+1}{2} & \text{यदि } x \text{ विषम है।} \end{cases}$$

आच्छादक है, पर एकैकी नहीं।

प्रायः हम ऐसे फलनों पर विचार करना चाहते हैं जो एकैकी और आच्छादक दोनों हों। ऐसे फलनों को हम एकैकी आच्छादक कहते हैं। वे आकृति 3.4 में चित्रित फलन जैसे दिखते हैं। एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण ऐसे प्रतिचित्रण हैं जिन्हें कभी-कभी *एकैकी संगतियाँ* भी कहते हैं, क्योंकि वे सहप्रांत के अवयवों को प्रांत के अवयवों के साथ अद्वितीय रूप से युग्मित करते हैं।



चित्र 3.4: एकैकी आच्छादक फलन सहप्रांत के अवयवों को प्रांत के अवयवों के साथ अद्वितीय रूप से युग्मित करता है।

परिभाषा 3.11 (एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण). फलन $f\colon A \to B$ *एकैकी आच्छादक* है यदि और केवल यदि वह आच्छादक और एकैकी दोनों है। ऐसे फलन को A से B तक (या A और B के बीच) एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं।

3.3 संबंधों के रूप में फलन

जो फलन A के अवयवों को B के अवयवों पर प्रतिचित्रित करता है, वह स्पष्टतः A और B के बीच एक संबंध परिभाषित करता है; अर्थात वह संबंध जो x और y के बीच तभी होता है जब $f(x) = y$। वास्तव में, यदि उदाहरणार्थ हम गणित के आधारभूत घटकों को घटाने में रुचि रखते हों, तो फलन f को इस संबंध के साथ, अर्थात युग्मों के एक समुच्चय के साथ, *एक ही वस्तु मान* सकते हैं। इससे फिर प्रश्न उठता है: कौन-से संबंध इस ढंग से फलन परिभाषित करते हैं?

परिभाषा 3.12 (फलन का आलेख). मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ एक फलन है। फलन f का *आलेख*, निम्न प्रकार परिभाषित संबंध $R_f \subseteq A \times B$ है:

$$R_f = \{\langle x, y\rangle : f(x) = y\}.$$

विस्तारिता के कारण किसी फलन का आलेख अद्वितीय रूप से निर्धारित होता है। इसके अतिरिक्त, (समुच्चयों पर) विस्तारिता फलनों के लिए विस्तारिता के निहित सिद्धांत को तुरंत न्यायसंगत ठहराती है: यदि f और g का प्रांत और सहप्रांत समान हो, तो सभी मानों पर उनकी सहमति होने पर वे समान होते हैं।

इसी प्रकार, यदि कोई संबंध "फलनात्मक" है, तो वह किसी फलन का आलेख है।

प्रतिज्ञप्ति 3.13. *मान लीजिए कि $R \subseteq A \times B$ ऐसा है कि:*

1. *यदि Rxy और Rxz, तो $y = z$; और*
2. *प्रत्येक $x \in A$ के लिए कोई $y \in B$ ऐसा है कि $\langle x, y\rangle \in R$।*

तब R उस फलन $f\colon A \to B$ का आलेख है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि $f(x) = y$ तभी जब Rxy।

प्रमाण. मान लीजिए कि कोई y ऐसा है कि Rxy। यदि कोई अन्य $z \neq y$ ऐसा होता कि Rxz, तो R पर लगी शर्त का उल्लंघन होता। अतः यदि कोई y ऐसा है कि Rxy, तो यह y अद्वितीय है; इसलिए f सुपरिभाषित है। स्पष्टतः $R_f = R$। □

प्रत्येक फलन $f\colon A \to B$ का एक आलेख होता है, अर्थात $A \times B$ पर वह संबंध जो $f(x) = y$ द्वारा परिभाषित है। दूसरी ओर, प्रतिज्ञप्ति 3.13 में दिए गए गुणों वाला प्रत्येक संबंध $R \subseteq A \times B$, किसी फलन $f\colon A \to B$ का आलेख है। फलनों और उनके आलेखों के बीच इस निकट संबंध के कारण हम किसी फलन को बस उसका आलेख मान सकते हैं। दूसरे शब्दों में, फलनों को कुछ संबंधों के समान, अर्थात क्रमित समूहों के कुछ समुच्चयों के समान, माना जा सकता है। फिर भी ध्यान दें कि इस "एक ही वस्तु मानने" का आशय खंड 2.2 जैसा है: यह फलनों के तत्त्वमीमांसीय स्वरूप के बारे में दावा नहीं, बल्कि यह अवलोकन है कि फलनों को कुछ समुच्चयों के रूप में *मानना* सुविधाजनक है। इस सुविधा का एक कारण यह है कि अब हम फलनों पर वैसी ही संक्रियाएँ करने पर विचार कर सकते हैं जैसी हमने संबंधों पर की थीं (देखें खंड 2.8)। विशेषतः:

परिभाषा 3.14. मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ ऐसा फलन है जिसमें $C \subseteq A$।

फलन f का C पर *प्रतिबंधन* वह फलन $f\restriction_C\colon C \to B$ है जिसे $(f\restriction_C)(x) = f(x)$ द्वारा प्रत्येक $x \in C$ के लिए परिभाषित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, $f\restriction_C = \{\langle x, y\rangle \in R_f : x \in C\}$।

फलन f का C पर *अनुप्रयोग* $f[C] = \{f(x) : x \in C\}$ है। इसे C का f के अधीन *प्रतिबिंब* भी कहते हैं।

इन परिभाषाओं से यह निष्कर्ष निकलता है कि $\mathrm{ran}(f) = f[\mathrm{dom}(f)]$, किसी भी फलन f के लिए। फलनों को संबंध मानने और खंड 2.8 की परिभाषाओं को देखते हुए, ये धारणाएँ ठीक वैसी ही हैं जैसी अपेक्षित थीं। पर दो अन्य संक्रियाओं—प्रतिलोम और सापेक्ष गुणनफलों—के लिए कुछ और विस्तार आवश्यक है। वह हम खंड 3.4 और खंड 3.5 में देंगे।

3.4 फलनों के प्रतिलोम

हम फलनों को प्रतिचित्रण मानते हैं। तब फलनों के बारे में एक स्वाभाविक प्रश्न यह है कि क्या प्रतिचित्रण को "उलटा" जा सकता है। उदाहरणार्थ, उत्तराधिकारी फलन $f(x) = x + 1$ को इस अर्थ में उलटा जा सकता है कि फलन $g(y) = y - 1$, f के किए को "पूर्ववत्" कर देता है।

पर हमें सावधान रहना होगा। यद्यपि g की परिभाषा एक फलन $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ परिभाषित करती है, वह कोई *फलन* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ परिभाषित नहीं करती, क्योंकि $g(0) \notin \mathbb{N}$। इसलिए सरल स्थितियों में भी यह एकदम स्पष्ट नहीं होता कि किसी फलन को उलटा जा सकता है या नहीं; यह उसके प्रांत और सहप्रांत पर निर्भर हो सकता है।

फलन के प्रतिलोम की धारणा इस बात को अधिक सटीक बनाती है।

परिभाषा 3.15. फलन $g\colon B \to A$, फलन $f\colon A \to B$ का *प्रतिलोम* है, यदि $f(g(y)) = y$ और $g(f(x)) = x$, सभी $x \in A$ और $y \in B$ के लिए हों।

यदि f का प्रतिलोम g हो, तो हम प्रायः f^{-1} को g के स्थान पर लिखते हैं।

अब हम निर्धारित करेंगे कि किन फलनों के प्रतिलोम होते हैं। $f\colon A \to B$ के प्रतिलोम का एक स्वाभाविक उम्मीदवार $g\colon B \to A$ है, जिसे इस प्रकार "परिभाषित" किया जाए:

$$g(y) = \text{वह "एकमात्र" } x \text{ जिसके लिए } f(x) = y \text{ है।}$$

पर "परिभाषित" (और "एकमात्र") के चारों ओर लगे उद्धरण-चिह्न बताते हैं कि यह वास्तव में परिभाषा नहीं है। कम-से-कम पूर्ण व्यापकता में यह सदा काम नहीं करेगी। इस कथन से कोई फलन निर्धारित हो, इसके लिए ऐसा ठीक एक x होना चाहिए जिसके लिए $f(x) = y$—अर्थात g का निर्गत अद्वितीय रूप से निर्धारित होना चाहिए। इसके अतिरिक्त, उसे प्रत्येक $y \in B$ के लिए निर्धारित होना चाहिए। यदि x_1 और $x_2 \in A$ ऐसे हों कि $x_1 \neq x_2$, किंतु $f(x_1) = f(x_2)$, तो $g(y)$ उस $y = f(x_1) = f(x_2)$ के लिए अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं होगा। और यदि ऐसा कोई x हो ही नहीं जिसके लिए $f(x) = y$, तो $g(y)$ बिल्कुल निर्धारित नहीं होगा। दूसरे शब्दों में, g के परिभाषित होने के लिए f का एकैकी और आच्छादक दोनों होना आवश्यक है।

आइए इसे क्रमशः समझें। प्रश्न को दो भागों में बाँटेंगे। दिए गए फलन $f\colon A \to B$ के लिए ऐसा फलन $g\colon B \to A$ कब होता है कि $g(f(x)) = x$? ऐसा g, f के किए को "पूर्ववत्" करता है और उसे f का *वाम प्रतिलोम* कहते हैं। दूसरा, ऐसा फलन $h\colon B \to A$ कब होता है कि $f(h(y)) = y$? ऐसे h को f का *दक्षिण प्रतिलोम* कहते हैं—इस बार f, h के किए को "पूर्ववत्" करता है।

प्रतिज्ञप्ति 3.16. *यदि $f\colon A \to B$ एकैकी है, तो कोई फलन $g\colon B \to A$ ऐसा होता है जो f का* वाम प्रतिलोम *है और जिसके लिए $g(f(x)) = x$, सभी $x \in A$ के लिए।*

प्रमाण. मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ एकैकी है। किसी $y \in B$ पर विचार कीजिए। यदि $y \in \operatorname{ran}(f)$, तो कोई $x \in A$ ऐसा है कि $f(x) = y$। चूँकि f एकैकी है, ऐसा केवल एक $x \in A$ है। तब हम परिभाषित कर सकते हैं: $g(y) = x$, अर्थात $g(y)$ वह "एकमात्र" $x \in A$ है जिसके लिए $f(x) = y$। यदि $y \notin \operatorname{ran}(f)$, तो हम उसे किसी भी $a \in A$ पर प्रतिचित्रित कर सकते हैं। अतः कोई $a \in A$ चुनकर $g\colon B \to A$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{यदि } f(x) = y \\ a & \text{यदि } y \notin \operatorname{ran}(f)। \end{cases}$$

यह सभी $y \in B$ के लिए परिभाषित है, क्योंकि ऐसे प्रत्येक $y \in \operatorname{ran}(f)$ के लिए ठीक एक $x \in A$ है जिसके लिए $f(x) = y$। परिभाषा से, यदि $y = f(x)$, तो $g(y) = x$, अर्थात $g(f(x)) = x$। □

प्रतिज्ञप्ति 3.17. *यदि $f\colon A \to B$ आच्छादक है, तो कोई फलन $h\colon B \to A$ ऐसा होता है जो f का* दक्षिण प्रतिलोम *है और जिसके लिए $f(h(y)) = y$ सभी $y \in B$ के लिए।*

प्रमाण. मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ आच्छादक है। किसी $y \in B$ पर विचार कीजिए। चूँकि f आच्छादक है, कोई $x_y \in A$ ऐसा है कि $f(x_y) = y$। तब हम $h(y) = x_y$ परिभाषित कर सकते हैं; अर्थात प्रत्येक $y \in B$ के लिए कोई ऐसा $x \in A$ चुनते हैं कि $f(x) = y$। चूँकि f आच्छादक है, चुनने के लिए कम-से-कम एक ऐसा अवयव सदा होता है।[1] परिभाषा से, यदि $x = h(y)$, तो $f(x) = y$; अर्थात किसी भी $y \in B$ के लिए $f(h(y)) = y$। □

पिछले प्रमाण के विचारों को मिलाने पर अब हमें मिलता है कि प्रत्येक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण का एक प्रतिलोम होता है; अर्थात एक ही फलन f का वाम और दक्षिण, दोनों प्रतिलोम होता है।

प्रतिज्ञप्ति 3.18. *यदि $f\colon A \to B$ एकैकी आच्छादक है, तो ऐसा फलन $f^{-1}\colon B \to A$ होता है कि सभी $x \in A$ के लिए $f^{-1}(f(x)) = x$ और सभी $y \in B$ के लिए $f(f^{-1}(y)) = y$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिलोम प्राप्त करने की एक थोड़ी अधिक व्यापक विधि भी है। हमने खंड 3.2 में देखा कि प्रत्येक फलन f, आच्छादक प्रतिचित्रण $f'\colon A \to \operatorname{ran}(f)$ इस प्रकार प्रेरित करता है कि $f'(x) = f(x)$ सभी $x \in A$ के लिए। स्पष्टतः, यदि f एकैकी है, तो f' एकैकी आच्छादक है; अतः प्रतिज्ञप्ति 3.18 के अनुसार उसका एक अद्वितीय प्रतिलोम है। संकेतन का बहुत मामूली दुरुपयोग करते हुए हम कभी-कभी f' के प्रतिलोम को बस "f का प्रतिलोम" कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 3.19. *दिखाइए कि यदि $f\colon A \to B$ का वाम प्रतिलोम g और दक्षिण प्रतिलोम h है, तो $h = g$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 3.20. *प्रत्येक फलन f का अधिक-से-अधिक एक प्रतिलोम होता है।*

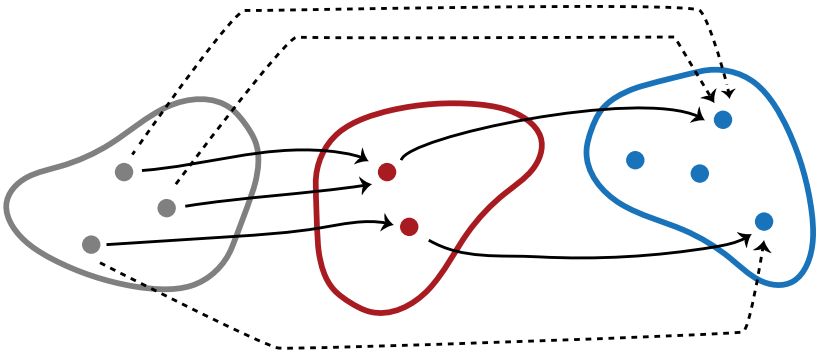
प्रमाण. मान लीजिए कि g और h, दोनों f के प्रतिलोम हैं। तब विशेषतः g, f का वाम प्रतिलोम और h, उसका दक्षिण प्रतिलोम है। प्रतिज्ञप्ति 3.19 से $g = h$। □

[1] चूँकि f आच्छादक है, प्रत्येक $y \in B$ के लिए समुच्चय $\{x : f(x) = y\}$ अरिक्त है। h की हमारी परिभाषा में इन समुच्चयों में से प्रत्येक से एक x चुनना पड़ता है। ऐसा चयन सदा संभव है, यह वास्तव में स्पष्ट नहीं है—इन चयनों को कर पाने की संभावना को बस एक अभिगृहीत मान लिया जाता है। दूसरे शब्दों में, यह प्रतिज्ञप्ति तथाकथित चयन के अभिगृहीत को मानती है; इस विषय पर हम अध्याय 72 में फिर विचार करेंगे। किंतु अनेक विशिष्ट स्थितियों में, जैसे $A = \mathbb{N}$ हो या परिमित हो, अथवा f एकैकी आच्छादक हो, तब चयन के अभिगृहीत की आवश्यकता नहीं होती। (विशेषतः जब f एकैकी आच्छादक हो, तब प्रत्येक $y \in B$ के लिए समुच्चय $\{x : f(x) = y\}$ में ठीक एक अवयव होता है, इसलिए कोई चयन करना ही नहीं पड़ता।)

3.5 फलनों का संयोजन

हमने खंड 3.4 में देखा कि एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण का प्रतिलोम f^{-1}, अर्थात f का प्रतिलोम, स्वयं एक फलन होता है। फलनों पर एक अन्य संक्रिया संयोजन है: हम दो फलनों, f और g, का संयोजन करके एक नया फलन परिभाषित कर सकते हैं; अर्थात पहले f और फिर g लगाते हैं। निस्संदेह, यह तभी संभव है जब परिसर और प्रांत मेल खाते हों; अर्थात f का परिसर g के प्रांत का उपसमुच्चय होना चाहिए। फलनों पर यह संक्रिया, खंड 2.8 में संबंधों पर दी गई सापेक्ष गुणनफल की संक्रिया की समरूप संक्रिया है।

संयोजन की धारणा समझाने में एक आरेख सहायक हो सकता है। आकृति 3.5 में हम दो फलन $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$ तथा उनका संयोजन $(g \circ f)$ दिखाते हैं। फलन $(g \circ f)\colon A \to C$, A के प्रत्येक अवयव को C के अवयव के साथ जोड़ता है। C के किस अवयव के साथ A के अवयव को जोड़ा जाता है, यह इस प्रकार निर्धारित करते हैं: कोई निवेश $x \in A$ दिया हो, तो पहले फलन f को x पर लगाते हैं, जिससे कोई निर्गत $f(x) = y \in B$ मिलता है; फिर फलन g को y पर लगाते हैं, जिससे कोई निर्गत $g(f(x)) = g(y) = z \in C$ मिलता है।



चित्र 3.5: संयोजन $g \circ f$, जिसे दो फलनों f और g से बनाया गया है।

परिभाषा 3.21 (संयोजन). मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$ फलन हैं। f का g के साथ *संयोजन* $g \circ f\colon A \to C$ है, जहाँ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$।

उदाहरण 3.22. फलनों $f(x) = x + 1$ और $g(x) = 2x$ पर विचार कीजिए। चूँकि $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, प्रत्येक निवेश x के लिए पहले उसका उत्तराधिकारी लेना और फिर परिणाम को दो से गुणा करना होगा। अतः उनका संयोजन $(g \circ f)(x) = 2(x + 1)$ द्वारा दिया जाता है।

3.6 आंशिक फलन

कभी-कभी फलन की परिभाषा को इस प्रकार शिथिल करना उपयोगी होता है कि फलन का निर्गत सभी संभावित निवेशों के लिए परिभाषित होना आवश्यक न हो। ऐसे प्रतिचित्रणों को *आंशिक फलन* कहते हैं।

परिभाषा 3.23. *आंशिक फलन* $f\colon A \nrightarrow B$ ऐसा प्रतिचित्रण है जो A के प्रत्येक अवयव को B का अधिक-से-अधिक एक अवयव देता है। यदि f, B का कोई अवयव $x \in A$ को देता है, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ *परिभाषित* है; अन्यथा वह *अपरिभाषित* है। यदि $f(x)$ परिभाषित है, तो हम $f(x) \downarrow$ लिखते हैं; अन्यथा $f(x) \uparrow$। आंशिक फलन f का *प्रांत*, A का वह उपसमुच्चय है जहाँ वह परिभाषित है; अर्थात $\mathrm{dom}(f) = \{x \in A : f(x) \downarrow\}$।

उदाहरण 3.24. प्रत्येक फलन $f\colon A \to B$ एक आंशिक फलन भी है। जो आंशिक फलन A पर हर जगह परिभाषित हैं—अर्थात जिन्हें अब तक हम बस फलन कहते आए हैं—उन्हें *पूर्ण* फलन भी कहते हैं।

उदाहरण 3.25. $f\colon \mathbb{R} \nrightarrow \mathbb{R}$ द्वारा दिया गया आंशिक फलन $f(x) = 1/x$, $x = 0$ के लिए अपरिभाषित और अन्य सभी स्थानों पर परिभाषित है।

परिभाषा 3.26 (आंशिक फलन का आलेख). मान लीजिए कि $f\colon A \nrightarrow B$ एक आंशिक फलन है। f का *आलेख*, निम्न प्रकार परिभाषित संबंध $R_f \subseteq A \times B$ है:

$$R_f = \{\langle x, y\rangle : f(x) = y\}.$$

प्रतिज्ञप्ति 3.27. *मान लीजिए कि $R \subseteq A \times B$ में यह गुण है कि जब भी Rxy और Rxy' हों, तब $y = y'$। तब R उस आंशिक फलन $f\colon A \nrightarrow B$ का आलेख है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है: यदि कोई y ऐसा है कि Rxy, तो $f(x) = y$; अन्यथा $f(x)\uparrow$। यदि R क्रमिक भी है, अर्थात प्रत्येक $x \in A$ के लिए कोई $y \in B$ ऐसा है कि Rxy, तो f पूर्ण है।*

प्रमाण. मान लीजिए कि कोई y ऐसा है कि Rxy। यदि कोई अन्य $y' \neq y$ ऐसा होता कि Rxy', तो R पर लगी शर्त का उल्लंघन होता। अतः यदि कोई y ऐसा है कि Rxy, तो वह y अद्वितीय है; इसलिए f सुपरिभाषित है। स्पष्टतः, $R_f = R$ और f पूर्ण है यदि R क्रमिक है। □

प्रश्न

प्रश्न 3.1. दिखाइए कि यदि $f\colon A \to B$ का वाम प्रतिलोम g है, तो f एकैकी है।

प्रश्न 3.2. दिखाइए कि यदि $f\colon A \to B$ का दक्षिण प्रतिलोम h है, तो f आच्छादक है।

प्रश्न 3.3. प्रतिज्ञप्ति 3.18 सिद्ध कीजिए। आपको f^{-1} परिभाषित करना है, यह दिखाना है कि वह एक फलन है, और यह दिखाना है कि वह f का प्रतिलोम है; अर्थात $f^{-1}(f(x)) = x$ और $f(f^{-1}(y)) = y$, सभी $x \in A$ और $y \in B$ के लिए।

प्रश्न 3.4. प्रतिज्ञप्ति 3.19 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 3.5. दिखाइए कि यदि $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$, दोनों एकैकी हैं, तो $g \circ f\colon A \to C$ भी एकैकी है।

प्रश्न 3.6. दिखाइए कि यदि $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$, दोनों आच्छादक हैं, तो $g \circ f\colon A \to C$ भी आच्छादक है।

प्रश्न 3.7. मान लीजिए कि $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$ हैं। दिखाइए कि $g \circ f$ का आलेख $R_f \mid R_g$ है।

प्रश्न 3.8. $f\colon A \nrightarrow B$ दिया हो, तो आंशिक फलन $g\colon B \nrightarrow A$ को इस प्रकार परिभाषित कीजिए: किसी भी $y \in B$ के लिए, यदि कोई अद्वितीय $x \in A$ ऐसा है कि $f(x) = y$, तो $g(y) = x$; अन्यथा $g(y)\uparrow$। दिखाइए कि यदि f एकैकी है, तो सभी $g(f(x)) = x$, सभी $x \in \mathrm{dom}(f)$ के लिए, और $f(g(y)) = y$, सभी $y \in \mathrm{ran}(f)$ के लिए।

अध्याय 4

समुच्चयों का आकार

यह अध्याय गणनों, गणनीयता और अगणनीयता पर चर्चा करता है। कई खंडों के दो रूप हैं: एक अधिक प्रारंभिक, जो गणनों को सूचियाँ या $\mathbb{Z}^+$ से आच्छादक फलन मानता है; और दूसरा अधिक अमूर्त, जो गणनों को $\mathbb{N}$ के साथ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रणों के रूप में परिभाषित करता है।

4.1 परिचय

जब जॉर्ज कैंटर ने 1870 के दशक में समुच्चय सिद्धांत विकसित किया, तो उनका एक उद्देश्य अनंत संग्रह—मध्ययुगीन विद्वानों की शब्दावली में वास्तविक अनंतता—की धारणा को स्वीकार्य बनाना था। इसका एक महत्त्वपूर्ण अंग विभिन्न समुच्चयों के *आकार* का उनका निरूपण था। यदि a, b और c सभी भिन्न हैं, तो सहज बोध से समुच्चय $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$ से *बड़ा* है। पर अनंत समुच्चयों का क्या? क्या वे सभी एक-दूसरे जितने बड़े हैं? पता चलता है कि ऐसा नहीं है।

यहाँ पहली महत्त्वपूर्ण अवधारणा गणन की है। हम प्रत्येक परिमित समुच्चय के सभी अवयव लिखकर उसकी सूची बना सकते हैं। कुछ अनंत समुच्चयों के भी सभी अवयव सूचीबद्ध किए जा सकते हैं, यदि सूची को स्वयं अनंत होने दें। ऐसे समुच्चय गणनीय कहलाते हैं। कैंटर का आश्चर्यजनक परिणाम—जिसे हम इस अध्याय के अंत तक पूरी तरह समझ लेंगे—यह था कि कुछ अनंत समुच्चय गणनीय नहीं होते।

4.2 गणन और गणनीय समुच्चय

यह खंड समुच्चयों के गणन पर चर्चा करता है और उन्हें $\mathbb{Z}^+$ से आने वाले आच्छादक फलनों के रूप में परिभाषित करता है। कम गणितीय पृष्ठभूमि वाले पाठकों के लिए इसमें विषय को धीरे-धीरे समझाया गया है। एक वैकल्पिक, अधिक संक्षिप्त रूप खंड 4.11 में दिया गया है, जो गणन को अलग ढंग से परिभाषित करता है: $\mathbb{N}$ (या उसके किसी आरंभिक खंड) के साथ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण के रूप में।

हम समुच्चयों के अवयव सूचीबद्ध करके उनके उदाहरण पहले ही दे चुके हैं। अब अधिक सामान्य रूप में चर्चा करें कि किसी समुच्चय का प्रत्येक अवयव कैसे और कब सूचीबद्ध किया जा सकता है, भले ही वह समुच्चय अनंत हो।

परिभाषा 4.1 (गणन, अनौपचारिक रूप में). अनौपचारिक रूप से, समुच्चय A का *गणन* ऐसी (संभवतः अनंत) सूची है जिसमें A के अवयव होते हैं और A का प्रत्येक अवयव किसी परिमित स्थान पर आता है। यदि A का कोई गणन है, तो A को *गणनीय* कहते हैं।

गणन के बारे में कुछ बातें ध्यान देने योग्य हैं:

1. हम केवल उन्हीं सूचियों को गणन मानते हैं जिनका आरंभ हो और जिनमें प्रथम को छोड़कर प्रत्येक अवयव से ठीक पहले एक ही अवयव हो। दूसरे शब्दों में, सूची के प्रथम अवयव और किसी भी अन्य अवयव के बीच केवल परिमित संख्या में अवयव होते हैं। विशेषतः इसका अर्थ है कि गणन के प्रत्येक अवयव का स्थान परिमित होता है: प्रथम अवयव का स्थान 1, दूसरे का स्थान 2, इत्यादि।

2. एक ही समुच्चय A के अलग-अलग गणन हो सकते हैं, जिनमें अवयव के आने का क्रम भिन्न हो: 4, 1, 25, 16, 9 प्रथम पाँच वर्ग संख्याओं (के समुच्चय) का उतना ही अच्छा गणन है जितना 1, 4, 9, 16, 25।

3. पुनरुक्तिपूर्ण गणन भी गणन ही होते हैं: 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... उसी समुच्चय का गणन करता है जिसका 1, 2, 3, ... करता है।

4. किसी गणन को निर्दिष्ट करते समय क्रम और पुनरुक्ति का *वास्तव में* महत्त्व होता है: हम धन पूर्णांकों का गणन 1, 2, 3, 1, ... से आरंभ कर सकते हैं, किंतु मानक ढंग से 1, 2, 3, 4, ... लिखने पर प्रतिरूप अधिक आसानी से दिखता है।

5. गणन का आरंभ होना आवश्यक है: ..., 3, 2, 1 धन पूर्णांकों का गणन नहीं है, क्योंकि उसका कोई प्रथम अवयव नहीं है। यह अनौपचारिक परिभाषा से कैसे निकलता है, इसे देखने के लिए स्वयं से पूछें, "सूची में संख्या 76 किस स्थान पर आती है?"

6. निम्नलिखित धन पूर्णांकों का गणन नहीं है: 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ... समस्या यह है कि सम संख्याएँ परिमित स्थानों के बजाय $\infty + 1$, $\infty + 2$, $\infty + 3$ स्थानों पर आती हैं।

7. रिक्त समुच्चय गणनीय है: उसका गणन रिक्त सूची करती है!

प्रतिज्ञप्ति 4.2. *यदि A का कोई गणन है, तो उसका पुनरावृत्तियों-रहित गणन भी है।*

प्रमाण. मान लें कि A का एक गणन x_1, x_2, ... है, जिसमें प्रत्येक x_i, A का अवयव है। दोहराए गए अवयव हटाकर हम गणन से पुनरावृत्तियाँ हटा सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम गणन को ऐसी नई सूची में बदल सकते हैं जिसमें x_i को तब लिखें जब वह A का ऐसा अवयव हो जो x_1, ..., x_{i-1} में न हो, और यदि x_i पहले ही x_1, ..., x_{i-1} में आ चुका हो तो उसे सूची से हटा दें। □

पिछली युक्ति दिखाती है कि गणन और गणनीय समुच्चयों को अच्छी तरह समझने और उनके विषय में कथन सिद्ध करने के लिए हमें अधिक सटीक परिभाषा चाहिए। वह परिभाषा निम्नलिखित है।

परिभाषा 4.3 (गणन, औपचारिक रूप में). समुच्चय $A \neq \emptyset$ का *गणन*, कोई भी आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है।

आइए स्वयं को विश्वास दिलाएँ कि औपचारिक परिभाषा और संभवतः अनंत सूची वाली अनौपचारिक परिभाषा समतुल्य हैं। पहले, $\mathbb{Z}^+$ से समुच्चय A में जाने वाला कोई भी आच्छादक फलन A का गणन करता है। ऐसा फलन ऊपर दी गई अनौपचारिक परिभाषा के अनुसार एक गणन निर्धारित करता है: सूची $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ...। क्योंकि f आच्छादक है, A का प्रत्येक अवयव, $f(n)$ का मान अवश्य है, जहाँ $n \in \mathbb{Z}^+$। अतः A का प्रत्येक अवयव सूची में किसी परिमित स्थान पर आता है। चूँकि फलन का एकैकी होना आवश्यक नहीं, सूची पुनरुक्तिपूर्ण हो सकती है; किंतु यह स्वीकार्य है (जैसा ऊपर बताया गया है)।

दूसरी ओर, ऐसी सूची दी हो जिसमें A के सभी अवयव आते हों, तो हम आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं: $f(n)$ को सूची का nवाँ अवयव मानें, अथवा यदि nवाँ अवयव न हो तो सूची के अंतिम अवयव को उसका मान लें। इससे आच्छादक फलन केवल तब नहीं बनता जब A रिक्त हो और इसलिए सूची भी रिक्त हो। अतः प्रत्येक अरिक्त सूची कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ निर्धारित करती है।

परिभाषा 4.4. समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि वह रिक्त है अथवा उसका कोई गणन है।

उदाहरण 4.5. धन पूर्णांकों ($\mathbb{Z}^+$) का गणन करने वाला फलन केवल $f(n) = n$ से दिया गया तत्समक फलन है। प्राकृत संख्याओं $\mathbb{N}$ का गणन करने वाला फलन $g(n) = n - 1$ है।

उदाहरण 4.6. $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ और $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ फलन, जो

$$f(n) = 2n \text{ तथा}$$
$$g(n) = 2n - 1$$

से दिए गए हैं, क्रमशः सम धन पूर्णांकों और विषम धन पूर्णांकों का गणन करते हैं। किंतु इनमें से कोई भी फलन $\mathbb{Z}^+$ का गणन नहीं है, क्योंकि दोनों में से कोई आच्छादक नहीं है।

उदाहरण 4.7. फलन $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{(n-1)}{2} \rceil$ (जहाँ $\lceil x \rceil$, *लघुतम पूर्णांक फलन* (छत फलन) को दर्शाता है, जो x को उससे छोटी न होने वाली निकटतम पूर्णांक संख्या तक पूर्णांकित करता है) पूर्णांकों के समुच्चय $\mathbb{Z}$ का गणन करता है। ध्यान दें कि f, धन और ऋण पूर्णांकों के बीच आगे-पीछे "उछलते" हुए $\mathbb{Z}$ के मान कैसे उत्पन्न करता है:

$$\begin{array}{cccccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & \dots \\ -\lceil \frac{0}{2} \rceil & \lceil \frac{1}{2} \rceil & -\lceil \frac{2}{2} \rceil & \lceil \frac{3}{2} \rceil & -\lceil \frac{4}{2} \rceil & \lceil \frac{5}{2} \rceil & -\lceil \frac{6}{2} \rceil & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \dots & \end{array}$$

आप f को निम्नलिखित प्रकार से अलग-अलग स्थितियों में परिभाषित भी मान सकते हैं:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } n = 1 \\ n/2 & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ -(n-1)/2 & \text{यदि } n \text{ विषम है और } > 1 \text{ है} \end{cases}$$

यद्यपि किसी समुच्चय का प्रत्येक अवयव सूचीबद्ध करते समय 1वें अवयव से गिनना आरंभ करना अधिक स्वाभाविक लग सकता है, गणितज्ञ वस्तुओं को गिनने के लिए प्राकृत संख्याओं $\mathbb{N}$ का उपयोग करना पसंद करते हैं। वे सूची के 0वें, 1वें, 2वें इत्यादि स्थान पर आने वाले प्रत्येक अवयव की बात करते हैं। तदनुसार, हम गणन को $\mathbb{N}$ से A में जाने वाले आच्छादक फलन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। निस्संदेह दोनों परिभाषाएँ समतुल्य हैं।

प्रतिज्ञप्ति 4.8. *कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है यदि और केवल यदि कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $g\colon \mathbb{N} \to A$ है।*

प्रमाण. कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ दिया हो, तो हम $g(n) = f(n+1)$ को सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए परिभाषित कर सकते हैं। यह देखना सरल है कि $g\colon \mathbb{N} \to A$ आच्छादक है। इसके विपरीत, कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $g\colon \mathbb{N} \to A$ दिया हो, तो $f(n) = g(n-1)$ परिभाषित कीजिए। □

इससे हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है:

उपप्रमेय 4.9. *समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि वह रिक्त है अथवा कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{N} \to A$ है।*

हमने ऊपर चर्चा की कि समुच्चय A का हर अवयव लिखने वाली किसी सूची को पुनरावृत्तियों-रहित सूची में बदला जा सकता है। गणन के लिए भी यह सत्य है, किंतु इसे कठोरता से सूत्रबद्ध और सिद्ध करना कुछ कठिन है। प्रत्येक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ को सभी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए परिभाषित होना चाहिए। यदि A में केवल परिमित संख्या में अवयव हैं, तो स्पष्टतः हमारे पास $\mathbb{Z}^+$ पर परिभाषित ऐसा फलन नहीं हो सकता—उसके अवयव अनंततः अनेक हैं—जो A का प्रत्येक अवयव मान के रूप में ले, पर कभी एक ही मान दो बार न ले। उस स्थिति में, अर्थात जब पुनरावृत्तियों-रहित सूची परिमित हो, हमें f के लिए भिन्न प्रांत चुनना होगा, जिसमें केवल परिमित संख्या में अवयव हों। पुनरावृत्ति न होने का अर्थ है कि f एकैकी होना चाहिए। चूँकि वह आच्छादक भी है, हम किसी परिमित समुच्चय $\{1, \dots, n\}$ या $\mathbb{Z}^+$ और A के बीच एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण खोज रहे हैं।

प्रतिज्ञप्ति 4.10. *यदि $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ आच्छादक है (अर्थात A का गणन है), तो कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $g\colon Z \to A$ है, जहाँ Z या तो $\mathbb{Z}^+$ है या $\{1, \ldots, n\}$ है, किसी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए।*

प्रमाण. हम फलन g को पुनरावर्ती ढंग से परिभाषित करते हैं: $g(1) = f(1)$ मानें। यदि $g(i)$ पहले ही परिभाषित हो चुका है, तो $g(i+1)$ को $f(1)$, $f(2)$, ... का ऐसा प्रथम मान लें जो पहले से $g(1)$, ..., $g(i)$ में न हो, बशर्ते ऐसा कोई मान हो। यदि A में ठीक n अवयव हैं, तो $g(1)$, ..., $g(n)$ सभी परिभाषित हैं; अतः हमने फलन $g\colon \{1, \ldots, n\} \to A$ परिभाषित कर लिया है। यदि A में अनंततः अनेक अवयव हैं, तो किसी भी i के लिए A का कोई अवयव गणन $f(1)$, $f(2)$, ..., में अवश्य होगा जो पहले से $g(1)$, ..., $g(i)$ में नहीं है। इस स्थिति में हमने फलन $g\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ परिभाषित कर लिया है।

फलन g आच्छादक है, क्योंकि A का प्रत्येक अवयव $f(1)$, $f(2)$, ... में है (f के आच्छादक होने के कारण), और इसलिए अंततः $g(i)$ का मान होगा, किसी उपयुक्त i के लिए। वह एकैकी भी है, क्योंकि यदि कोई $j < i$ ऐसा होता कि $g(j) = g(i)$, तो $g(i)$ पहले ही $g(1)$, ..., $g(i-1)$ में होता, जो g की हमारी परिभाषा के विपरीत है। □

उपप्रमेय 4.11. *समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि वह रिक्त है अथवा कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon N \to A$ है, जहाँ या तो $N = \mathbb{N}$ है या $N = \{0, \ldots, n\}$ है, किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए।*

प्रमाण. A गणनीय है यदि और केवल यदि A रिक्त है अथवा कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है। प्रतिज्ञप्ति 4.10 के अनुसार, दूसरी बात तभी सत्य है जब कोई एकैकी आच्छादक फलन $f\colon Z \to A$ हो, जहाँ $Z = \mathbb{Z}^+$ या $Z = \{1, \ldots, n\}$ हो, किसी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए। प्रतिज्ञप्ति 4.8 के प्रमाण वाली युक्ति से, वह बात भी तभी सत्य है जब कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $g\colon N \to A$ हो, जहाँ या तो $N = \mathbb{N}$ या $N = \{0, \ldots, n-1\}$ हो। □

4.3 कैंटर की आड़ी-तिरछी विधि

हम कुछ "सरल" गणनों पर पहले ही विचार कर चुके हैं। अब हम कुछ अधिक कठिन विषय पर विचार करेंगे। प्राकृत संख्याओं के युग्मों के उस समुच्चय पर विचार करें , जिसे हमने खंड 1.5 में इस प्रकार परिभाषित किया था:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle n, m\rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$$

हम इन क्रमित युग्मों को निम्न प्रकार एक *सरणी* में व्यवस्थित कर सकते हैं:

	0	**1**	**2**	**3**	...
0	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	...
1	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,3\rangle$	...
2	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	...
3	$\langle 3,0\rangle$	$\langle 3,1\rangle$	$\langle 3,2\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

स्पष्ट है कि $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ का प्रत्येक क्रमित युग्म सरणी में ठीक एक बार आएगा। विशेष रूप से, $\langle n, m\rangle$, nवीं पंक्ति और mवें स्तंभ में आएगा। पर ऐसी सरणी के अवयवों को "एकविमीय" सूची में कैसे व्यवस्थित करें? नीचे की सरणी का प्रतिरूप ऐसा करने का एक ढंग दिखाता है (यद्यपि निस्संदेह कई अन्य विकल्प भी हैं):

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
0	0	1	3	6	10	...
1	2	4	7	11	...	...
2	5	8	12	...	...	...
3	9	13	...	...	...	...
4	14	...	...	...	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\ddots$

यह प्रतिरूप *कैंटर की आड़ी-तिरछी विधि* कहलाता है। यह $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ का गणन इस प्रकार करता है:

$$\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle, \ldots$$

इससे निम्नलिखित स्थापित होता है:

प्रतिज्ञप्ति 4.12. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *गणनीय है।*

प्रमाण. फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ प्रत्येक $k \in \mathbb{N}$ को उस युग्म $\langle n, m\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ पर भेजे जिसके लिए k, कैंटर की आड़ी-तिरछी सरणी की nवीं पंक्ति और mवें स्तंभ में लिखा मान है। □

यह तकनीक बड़े सुगम ढंग से व्यापक भी होती है। उदाहरणार्थ, हम इसका उपयोग प्राकृत संख्याओं के क्रमित त्रिकों के समुच्चय का गणन करने में कर सकते हैं, अर्थात:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle n, m, k\rangle : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

हम $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ को $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ और $\mathbb{N}$ का कार्तीय गुणनफल मानते हैं, अर्थात,

$$\mathbb{N}^3 = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} = \{\langle\langle n, m\rangle, k\rangle : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

और इस प्रकार हम $\mathbb{N}^3$ का गणन ऐसी सरणी से कर सकते हैं जिसके एक अक्ष पर $\mathbb{N}$ का गणन और दूसरे अक्ष पर $\mathbb{N}^2$ का गणन अंकित हो:

	0	**1**	**2**	**3**	$\ldots$
$\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle 0,0,0\rangle$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\langle 0,0,2\rangle$	$\langle 0,0,3\rangle$	$\ldots$
$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$	$\langle 0,1,0\rangle$	$\langle 0,1,1\rangle$	$\langle 0,1,2\rangle$	$\langle 0,1,3\rangle$	$\ldots$
$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle 1,0,1\rangle$	$\langle 1,0,2\rangle$	$\langle 1,0,3\rangle$	$\ldots$
$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2}\rangle$	$\langle 0,2,0\rangle$	$\langle 0,2,1\rangle$	$\langle 0,2,2\rangle$	$\langle 0,2,3\rangle$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

इस प्रकार, कैंटर की आड़ी-तिरछी विधि जैसी विधि से हम इसी तरह $\mathbb{N}^3$ का गणन प्राप्त कर सकते हैं। और हम आगे बढ़ते हुए $\mathbb{N}^n$ के गणन प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ n कोई भी प्राकृत संख्या हो। अतः:

प्रतिज्ञप्ति 4.13. $\mathbb{N}^n$ *प्रत्येक* $n \in \mathbb{N}$ *के लिए गणनीय है।*

4.4 युग्मन फलन और कूट

कैंटर की आड़ी-तिरछी विधि से $\mathbb{N}^n$ की गणनीयता दृष्टिगत रूप से स्पष्ट हो जाती है। किंतु आइए, $\mathbb{N}^2$ को दर्शाने वाली अपनी सरणी पर ध्यान केंद्रित करें। सरणी में आड़ी-तिरछी रेखा के साथ चलते हुए और स्थानों को गिनते हुए हम जाँच सकते हैं कि $\langle 1, 2\rangle$ संख्या 7 से संबद्ध है। फिर भी, अच्छा होता यदि हम इसे और सीधे ढंग से परिकलित कर पाते। अर्थात, अच्छा होता यदि हमारे पास आड़ी-तिरछी गणना का *प्रतिलोम* $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ होता, जहाँ

$$g(\langle 0,0\rangle) = 0,\ g(\langle 0,1\rangle) = 1,\ g(\langle 1,0\rangle) = 2,\ \ldots, g(\langle 1,2\rangle) = 7,\ \ldots$$

इससे हम ठीक-ठीक परिकलित कर सकते कि हमारी गणना में $\langle n, m\rangle$ कहाँ आएगा।

वस्तुतः, दो बातों पर ध्यान देकर हम g को सीधे परिभाषित कर सकते हैं। पहली: यदि nवीं पंक्ति और mवें स्तंभ में मान v है, तो $(n+1)$वीं पंक्ति और $(m-1)$वें स्तंभ में मान $v+1$ है। दूसरी: हमारी गणना की पहली पंक्ति में 0, 1,

$3, 6$ इत्यादि से आरंभ होने वाली त्रिकोणीय संख्याएँ हैं। kवीं त्रिकोणीय संख्या $< k$ प्राकृत संख्याओं का योग है, जिसे $k(k+1)/2$ के रूप में परिकलित किया जा सकता है। इन दोनों बातों को एक साथ रखकर इस फलन पर विचार करें:

$$g(n,m) = \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + n$$

हम प्रायः केवल $g(n,m)$ लिखते हैं, न कि $g(\langle n,m\rangle)$, क्योंकि इसे पढ़ना अधिक सुगम है। यह हमें पहले $(n+m)^{\text{वीं}}$ त्रिकोणीय संख्या निर्धारित करने और फिर उसमें n जोड़ने को कहता है। इससे सरणी ठीक उसी प्रकार भरती है जैसा हम चाहते हैं। अतः, विशेष रूप से, युग्म $\langle 1,2\rangle$ को $\frac{4\times 3}{2}+1=7$ पर भेजा जाता है।

यह फलन g युग्मों के किसी समुच्चय की गणना का *प्रतिलोम* है। ऐसे फलन *युग्मन फलन* कहलाते हैं।

परिभाषा 4.14 (युग्मन फलन). कोई फलन $f\colon A\times B\to\mathbb{N}$ एक अंकगणितीय *युग्मन फलन* है, यदि f अंतःक्षेपी है। हम यह भी कहते हैं कि f, $A\times B$ को *कूटित करता है,* और $f(x,y)$, $\langle x,y\rangle$ का *कूट* है।

हम युग्मन फलनों का उपयोग, उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं के युग्मों को कूटित करने में कर सकते हैं; दूसरे शब्दों में, हम अवयवों के प्रत्येक *युग्म* को किसी *एक* संख्या द्वारा निरूपित कर सकते हैं। युग्मन फलन के प्रतिलोम का उपयोग करके हम उस संख्या को *विकूटित* कर सकते हैं, अर्थात पता लगा सकते हैं कि वह किस युग्म का निरूपण करती है।

4.5 एक वैकल्पिक युग्मन फलन

$\mathbb{N}^2$ की कुछ अन्य गणनाएँ ऐसी हैं जिनके प्रतिलोम ज्ञात करना अधिक सरल है। उनमें से एक यह है। गणना को सरणी में देखने के स्थान पर, आरंभ में रिक्त स्थानों से संबद्ध धन पूर्णांकों की सूची से आरंभ कीजिए। कल्पना कीजिए कि हम इन स्थानों को क्रमशः $\langle n,m\rangle$ युग्मों से इस प्रकार भरते हैं। पहले उन युग्मों को लें जिनके पहले स्थान पर 0 है (अर्थात $\langle 0,m\rangle$ रूप के युग्म)। पहले युग्म (अर्थात $\langle 0,0\rangle$) को पहले रिक्त स्थान में रखिए, फिर एक रिक्त स्थान छोड़िए, दूसरे युग्म (अर्थात $\langle 0,1\rangle$) को अगले रिक्त स्थान में रखिए, फिर एक स्थान छोड़िए, और इसी प्रकार आगे बढ़ते जाइए। अब हमारी गणना का (अधूरा) आरंभ ऐसा दिखता है:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	$\dots$
$\langle 0,0\rangle$		$\langle 0,1\rangle$		$\langle 0,2\rangle$		$\langle 0,3\rangle$		$\langle 0,4\rangle$		$\dots$

अब भी रिक्त बचे स्थानों में $\langle 1,m\rangle$ युग्मों के साथ यही प्रक्रिया दोहराइए और फिर प्रत्येक दूसरे रिक्त स्थान को छोड़ते जाइए:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	$\dots$
$\langle 0,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$		$\langle 0,2\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 0,3\rangle$		$\langle 0,4\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\dots$

इसी प्रकार $\langle 2,m\rangle$, $\langle 3,m\rangle$ इत्यादि युग्म भरिए। इस प्रकार हमारी पूर्ण गणना का आरंभ ऐसा होता है:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	$\dots$
$\langle 0,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 3,0\rangle$	$\langle 0,4\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\dots$

यदि हम ऊपर की सरणी के खानों को इस गणना के अनुसार क्रमांक दें, तो हमें कोई सुव्यवस्थित आड़ी-तिरछी रेखा नहीं, बल्कि यह विन्यास मिलेगा:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	...
0	1	3	5	7	9	11	...
1	2	6	10	14	18	...	...
2	4	12	20	28	...	...	...
3	8	24	40	...	...	...	...
4	16	48	...	...	...	...	...
5	32	...	...	...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

हम देख सकते हैं कि पंक्ति 0 के युग्म हमारी गणना में विषम क्रमांक वाले स्थानों पर हैं, अर्थात युग्म $\langle 0, m\rangle$ स्थान $2m+1$ पर है। दूसरी पंक्ति के युग्म $\langle 1, m\rangle$ ऐसे स्थानों पर हैं जिनके क्रमांक किसी विषम संख्या के दुगुने हैं, विशेष रूप से $2\cdot(2m+1)$। तीसरी पंक्ति के युग्म $\langle 2, m\rangle$ ऐसे स्थानों पर हैं जिनके क्रमांक किसी विषम संख्या के चार गुने हैं, अर्थात $4\cdot(2m+1)$; और इसी प्रकार आगे। प्रत्येक पंक्ति में $(2m+1)$ के गुणक 1, 2, 4, 8, ..., ठीक 2 की घातें हैं: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, ... वस्तुतः, संबंधित घातांक सदा विचाराधीन युग्म का पहला अवयव होता है। अतः युग्म $\langle n, m\rangle$ के लिए गुणक 2^n है। इससे हमें सामान्य सूत्र $2^n\cdot(2m+1)$ मिलता है। लेकिन यह युग्मों का *धन* पूर्णांकों में प्रतिचित्रण है, अर्थात $\langle 0, 0\rangle$ का स्थान 1 है। यदि हम स्थान 0 से आरंभ करना चाहें, तो हमें परिणाम में से 1 घटाना होगा। इससे हमें निम्नलिखित मिलता है:

उदाहरण 4.15. निम्नलिखित रूप से दिया गया फलन $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$h(n, m) = 2^n(2m+1) - 1$$

प्राकृत संख्याओं के युग्मों के समुच्चय $\mathbb{N}^2$ का युग्मन फलन है।

तदनुसार, $\mathbb{N}^2$ की हमारी दूसरी गणना में युग्म $\langle 0, 0\rangle$ का कूट $h(0, 0) = 2^0(2\cdot 0+1) - 1 = 0$ है; $\langle 1, 2\rangle$ का कूट $2^1\cdot(2\cdot 2+1) - 1 = 2\cdot 5 - 1 = 9$ है; और $\langle 2, 6\rangle$ का कूट $2^2\cdot(2\cdot 6+1) - 1 = 51$ है।

कभी-कभी प्राकृत संख्याओं के युग्मों $\mathbb{N}^2$ को इस शर्त के बिना कूटित करना ही पर्याप्त होता है कि कूटन आच्छादक हो। ऐसे कूटनों के प्रतिलोम केवल आंशिक फलन होते हैं।

उदाहरण 4.16. निम्नलिखित रूप से दिया गया फलन $j\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^+$,

$$j(n, m) = 2^n 3^m$$

एक एकैकी फलन $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ है।

4.6 अगणनीय समुच्चय

यह खंड खंड 4.2 की परिभाषा का उपयोग करके $\mathbb{B}^\omega$ और $\wp(\mathbb{Z}^+)$ की अगणनीयता सिद्ध करता है। इसे खंड 4.11 के रूपांतर से कुछ अधिक प्रारंभिक और कुछ अधिक विस्तृत बनाया गया है।

कुछ समुच्चय अनंत होते हैं, जैसे धन पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbb{Z}^+$। अब तक हमने अनंत समुच्चयों के जो उदाहरण देखे हैं, वे सभी गणनीय थे। लेकिन ऐसे अनंत समुच्चय भी होते हैं जिनमें यह गुण नहीं होता। ऐसे समुच्चय *अगणनीय* कहलाते हैं।

सबसे पहले, अगणनीय समुच्चयों का होना ही शायद आश्चर्यजनक लगे। किसी भी गणनीय समुच्चय A के लिए कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ होता है। यदि कोई समुच्चय अगणनीय है, तो ऐसा कोई फलन नहीं होता। अर्थात, $\mathbb{Z}^+$ के अनंत अवयव को A में भेजने वाला कोई भी फलन A के सभी अवयवों तक नहीं पहुँच सकता। इसलिए A में अनंत धन पूर्णांकों से भी "अधिक" अवयव होते हैं।

हम यह कैसे सिद्ध करें कि कोई समुच्चय अगणनीय है? हमें दिखाना होगा कि ऐसा कोई आच्छादक फलन हो ही नहीं सकता। समान रूप से, हमें दिखाना होगा कि A के अवयवों को एक दिशा में चलने वाली अनंत सूची में नहीं गिना जा सकता। इसका सबसे अच्छा ढंग यह दिखाना है कि A के अवयव की प्रत्येक सूची में कम-से-कम एक अवयव अवश्य छूटेगा; अथवा कोई भी फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ आच्छादक नहीं हो सकता। हम कैंटर की *विकर्ण विधि* से ऐसा कर सकते हैं। A के अवयव की कोई सूची, मान लीजिए x_1, x_2, ..., दी हो, तो हम A का एक और अवयव इस प्रकार बनाते हैं कि वह अपने निर्माण के कारण उस सूची में हो ही नहीं सकता।

हमारा पहला उदाहरण समुच्चय $\mathbb{B}^\omega$ है, जिसमें 0 और 1 के सभी अनंत, बिना अंतराल वाले अनुक्रम हैं।

प्रमेय 4.17. *$\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है।*

प्रमाण. विरोधाभास प्राप्त करने के लिए मान लीजिए कि $\mathbb{B}^\omega$ गणनीय है; अर्थात मान लीजिए कि सभी अवयव की कोई सूची s_1, s_2, s_3, s_4, ... है और ये $\mathbb{B}^\omega$ के अवयव हैं। इनमें से प्रत्येक s_i स्वयं 0 और 1 का एक अनंत अनुक्रम है। इस सूची के किसी अनुक्रम के jवें अवयव को, जब वह सूची में iवाँ अनुक्रम हो, $s_i(j)$ कहें। तब iवाँ अनुक्रम s_i है:

$$s_i(1), s_i(2), s_i(3), \ldots$$

हम इस सूची और इसमें प्रत्येक अनुक्रम s_i के अवयवों को एक सरणी में व्यवस्थित कर सकते हैं:

	1	2	3	4	...
1	$\mathbf{s_1(1)}$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$	...
2	$s_2(1)$	$\mathbf{s_2(2)}$	$s_2(3)$	$s_2(4)$	...
3	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$\mathbf{s_3(3)}$	$s_3(4)$	...
4	$s_4(1)$	$s_4(2)$	$s_4(3)$	$\mathbf{s_4(4)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

बगल में नीचे की ओर लिखे क्रमांक सूची के अनुक्रम s_1, s_2, ... का क्रम बताते हैं; ऊपर लिखे क्रमांक प्रत्येक अनुक्रम के अवयव को क्रमांकित करते हैं। उदाहरण के लिए, $s_1(1)$ उस संख्या का नाम है—चाहे वह 0 हो या 1—जो अनुक्रम s_1 का पहला अवयव है; और इसी प्रकार आगे।

अब हम एक ऐसा अनंत अनुक्रम $\overline{s}$ बनाएँगे जो 0 और 1 से बना है और इस सूची में हो ही नहीं सकता। $\overline{s}$ की परिभाषा सूची s_1, s_2, ... पर निर्भर करेगी। 0 और 1 के अनंत अनुक्रमों की कोई भी अनंत सूची एक ऐसा अनंत अनुक्रम $\overline{s}$ देती है जिसके सूची में न आने की गारंटी है।

$\overline{s}$ को परिभाषित करने के लिए हम उसके सभी अवयव बताते हैं; अर्थात हम $\overline{s}(n)$ बताते हैं, और ऐसा प्रत्येक $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए करते हैं। हम ऊपर की सरणी के विकर्ण पर नीचे की ओर पढ़ते हैं (इसीलिए इसका नाम "विकर्ण विधि" है), फिर प्रत्येक 1 को 0 और प्रत्येक 0 को 1 कर देते हैं। अधिक अमूर्त रूप में, हम $\overline{s}(n)$ को 0 या 1 इस आधार पर परिभाषित करते हैं कि विकर्ण का nवाँ अवयव, $s_n(n)$, क्रमशः 1 है या 0:

$$\overline{s}(n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } s_n(n) = 0 \\ 0 & \text{यदि } s_n(n) = 1. \end{cases}$$

यदि आपको स्थिति-वार परिभाषा से अधिक सूत्र पसंद हैं, तो आप $\overline{s}(n) = 1 - s_n(n)$ भी परिभाषित कर सकते हैं।

स्पष्ट है कि $\overline{s}$, 0 और 1 का एक अनंत अनुक्रम है, क्योंकि वह हमारी सरणी के विकर्ण पर आने वाले 0 और 1 के अनुक्रम का पूरक अनुक्रम भर है। अतः $\overline{s}$, $\mathbb{B}^\omega$ का अवयव है। लेकिन वह सूची s_1, s_2, ... में नहीं हो सकता। क्यों?

वह सूची का पहला अनुक्रम s_1 नहीं हो सकता, क्योंकि उसका पहला अवयव s_1 से भिन्न है। $s_1(1)$ चाहे जो भी हो, हमने $\overline{s}(1)$ को उसका उलटा परिभाषित किया है। वह सूची का दूसरा अनुक्रम भी नहीं हो सकता, क्योंकि $\overline{s}$ का दूसरा अवयव s_2 के दूसरे अवयव से भिन्न है: यदि $s_2(2)$, 0 है, तो $\overline{s}(2)$, 1 है, और उलटे भी यही होता है। इसी प्रकार आगे।

अधिक ठीक रूप में: यदि $\overline{s}$ सूची में होता, तो कोई k ऐसा होता कि $\overline{s} = s_k$। दो अनुक्रम समान होते हैं यदि और केवल यदि वे प्रत्येक स्थान पर सहमत हों; अर्थात किसी भी n के लिए $\overline{s}(n) = s_k(n)$। अतः विशेष रूप से $n = k$ लेने पर $\overline{s}(k) = s_k(k)$ होना आवश्यक होता। $s_k(k)$ या तो 0 है या 1। यदि वह 0 है, तो $\overline{s}(k)$ को 1 होना होगा—हमने $\overline{s}$ को इसी प्रकार परिभाषित किया है। लेकिन यदि $s_k(k) = 1$ हो, तो $\overline{s}$ की परिभाषा के कारण फिर $\overline{s}(k) = 0$ होगा। दोनों ही स्थितियों में $\overline{s}(k) \neq s_k(k)$।

हमने यह मानकर आरंभ किया था कि $\mathbb{B}^\omega$ के अवयव की कोई सूची s_1, s_2, ... है। इस सूची से हमने एक अनुक्रम $\overline{s}$ बनाया और सिद्ध किया कि वह सूची में नहीं हो सकता। लेकिन वह निश्चित रूप से 0 और 1 का अनुक्रम है, यदि सभी s_i, 0 और 1 के अनुक्रम हैं; अर्थात $\overline{s} \in \mathbb{B}^\omega$। इससे विशेष रूप से स्पष्ट होता है कि $\mathbb{B}^\omega$ के *सभी* अवयव की कोई सूची नहीं हो सकती, क्योंकि किसी भी ऐसी सूची से हम एक ऐसा अनुक्रम $\overline{s}$ बना सकते हैं जिसके सूची में न होने की गारंटी है। इसलिए $\mathbb{B}^\omega$ के सभी अनुक्रमों की सूची होने की धारणा विरोधाभास उत्पन्न करती है। □

यह प्रमाण-विधि "विकर्णीकरण" कहलाती है, क्योंकि यह $\overline{s}$ को परिभाषित करने में सरणी के विकर्ण का उपयोग करती है। विकर्णीकरण में सरणी का होना आवश्यक नहीं है: जब कोई सरणी या वास्तविक विकर्ण न हो, तब भी हम इसी विचार से दिखा सकते हैं कि समुच्चय गणनीय नहीं हैं।

प्रमेय 4.18. $\wp(\mathbb{Z}^+)$ *गणनीय नहीं है।*

प्रमाण. हम इसी प्रकार आगे बढ़ते हैं: दिखाते हैं कि $\mathbb{Z}^+$ के उपसमुच्चयों की प्रत्येक सूची के लिए $\mathbb{Z}^+$ का कोई ऐसा उपसमुच्चय है जो सूची में नहीं हो सकता। मान लीजिए $\mathbb{Z}^+$ के उपसमुच्चयों की निम्नलिखित सूची दी गई है:

$$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$$

अब हम समुच्चय $\overline{Z}$ इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि किसी भी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए $n \in \overline{Z}$ यदि और केवल यदि $n \notin Z_n$:

$$\overline{Z} = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \notin Z_n\}$$

स्पष्ट है कि $\overline{Z}$ धन पूर्णांकों का समुच्चय है, क्योंकि हमारी धारणा के अनुसार प्रत्येक Z_n ऐसा ही है; अतः $\overline{Z} \in \wp(\mathbb{Z}^+)$। लेकिन $\overline{Z}$ सूची में नहीं हो सकता। यह दिखाने के लिए हम स्थापित करेंगे कि प्रत्येक $k \in \mathbb{Z}^+$ के लिए $\overline{Z} \neq Z_k$।

अब कोई भी $k \in \mathbb{Z}^+$ लें। हमने $\overline{Z}$ को इस प्रकार परिभाषित किया है कि किसी भी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए $n \in \overline{Z}$ यदि और केवल यदि $n \notin Z_n$। विशेष रूप से $n = k$ लेने पर $k \in \overline{Z}$ यदि और केवल यदि $k \notin Z_k$। लेकिन इससे $\overline{Z} \neq Z_k$ सिद्ध होता है, क्योंकि k एक का अवयव है पर दूसरे का नहीं; इसलिए $\overline{Z}$ और Z_k के अवयव भिन्न हैं। चूँकि k कोई भी था, $\overline{Z}$ सूची Z_1, Z_2, ... में नहीं है। □

पिछले प्रमाण में विकर्ण का उल्लेख नहीं था, लेकिन आप निम्न चित्र द्वारा उसमें विकर्ण देख सकते हैं। कल्पना कीजिए कि समुच्चय Z_1, Z_2, ... एक सरणी में लिखे हैं, जहाँ प्रत्येक अवयव $j \in Z_i$ को jवें स्तंभ में लिखा गया है। मान लीजिए उस सूची के पहले चार समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\{2, 4, 6, \ldots\}$, $\{1, 2, 5\}$ और $\{3, 4, 5, \ldots\}$ हैं। तब सरणी का आरंभ इस प्रकार होगा:

$$\begin{array}{lcccccccc}
Z_1 = \{ & \mathbf{1}, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots\} \\
Z_2 = \{ & & \mathbf{2}, & & 4, & & 6, & \ldots\} \\
Z_3 = \{ & 1, & 2, & & & 5 & & \} \\
Z_4 = \{ & & & 3, & \mathbf{4}, & 5, & 6, & \ldots\} \\
\vdots & & & & & \ddots & &
\end{array}$$

तब विकर्ण पर नीचे की ओर चलते हुए हमें $\overline{Z}$ मिलता है: विकर्ण पर आने वाली प्रत्येक संख्या को छोड़ देते हैं और उन j को सम्मिलित करते हैं जहाँ सरणी का jवीं पंक्ति/स्तंभ वाला खाना रिक्त है। ऊपर के उदाहरण में हम 1 और 2 को छोड़ेंगे, 3 को सम्मिलित करेंगे, 4 को छोड़ेंगे, और इसी प्रकार आगे बढ़ेंगे।

4.7 न्यूनीकरण

यह खंड न्यूनीकरण द्वारा अगणनीयता सिद्ध करता है और इसके परिणाम खंड 4.6 के परिणामों से मेल खाते हैं। खंड 4.12 के परिणामों से मेल खाने वाला थोड़ा अधिक संक्षिप्त वैकल्पिक रूप खंड 4.13 में दिया गया है।

हमने विकर्णीकरण के तर्क से दिखाया कि $\wp(\mathbb{Z}^+)$ अगणनीय है। हमारे पास पहले से यह प्रमाण था कि $\mathbb{B}^\omega$, अर्थात 0 और 1 के सभी अनंत अनुक्रमों का समुच्चय, अगणनीय है। अब $\wp(\mathbb{Z}^+)$ के अगणनीय होने को सिद्ध करने का एक और ढंग देखें: दिखाइए कि *यदि* $\wp(\mathbb{Z}^+)$ *गणनीय है, तो* $\mathbb{B}^\omega$ *भी गणनीय है*। चूँकि हम जानते हैं कि $\mathbb{B}^\omega$ गणनीय नहीं है, इसलिए $\wp(\mathbb{Z}^+)$ भी गणनीय नहीं हो सकता। इसे एक समस्या का दूसरी समस्या में *न्यूनीकरण* कहते हैं—यहाँ हम $\mathbb{B}^\omega$ को गिनने की समस्या का न्यूनीकरण $\wp(\mathbb{Z}^+)$ को गिनने की समस्या में करते हैं। दूसरी समस्या का समाधान—$\wp(\mathbb{Z}^+)$ की गणना—पहली समस्या का समाधान, अर्थात $\mathbb{B}^\omega$ की गणना, दे देता।

हम किसी समुच्चय B को गिनने की समस्या का न्यूनीकरण किसी समुच्चय A को गिनने की समस्या में कैसे करें? हम A की किसी गणना को B की गणना में बदलने का ढंग देते हैं। इसका सबसे सरल उपाय कोई आच्छादक फलन $f\colon A \to B$ परिभाषित करना है। यदि $x_1, x_2, \ldots, A$ को गिनते हैं, तो $f(x_1), f(x_2), \ldots, B$ को गिनेंगे। हमारे मामले में हम कोई आच्छादक फलन $f\colon \wp(\mathbb{Z}^+) \to \mathbb{B}^\omega$ खोज रहे हैं।

न्यूनीकरण द्वारा प्रमेय 4.18 का प्रमाण. मान लीजिए कि $\wp(\mathbb{Z}^+)$ गणनीय है और इसलिए उसकी कोई गणना Z_1, Z_2, Z_3, ... है।

फलन $f\colon \wp(\mathbb{Z}^+) \to \mathbb{B}^\omega$ इस प्रकार परिभाषित करें: $f(Z)$ वह अनुक्रम s_k हो जिसके लिए $s_k(n) = 1$ यदि और केवल यदि $n \in Z$, और अन्यथा $s_k(n) = 0$। इससे निश्चय ही एक फलन परिभाषित होता है, क्योंकि जब भी $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$ हो, तब कोई भी $n \in \mathbb{Z}^+$ या तो Z का अवयव है या नहीं है। उदाहरण के लिए, धन सम संख्याओं का समुच्चय $2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, 6, \ldots\}$ अनुक्रम $010101\ldots$ पर भेजा जाता है, रिक्त समुच्चय $0000\ldots$ पर और स्वयं $\mathbb{Z}^+$, $1111\ldots$ पर भेजा जाता है।

यह फलन आच्छादक भी है: 0 और 1 का प्रत्येक अनुक्रम धन पूर्णांकों के किसी समुच्चय के संगत है, अर्थात उस समुच्चय के जिसके अवयव वे पूर्णांक हैं जो अनुक्रम में 1 आने वाले स्थानों के संगत हैं। अधिक ठीक रूप में, मान लीजिए $s \in \mathbb{B}^\omega$। समुच्चय $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$ इस प्रकार परिभाषित करें:

$$Z = \{n \in \mathbb{Z}^+ : s(n) = 1\}$$

तब $f(Z) = s$; इसे f की परिभाषा देखकर जाँचा जा सकता है।

अब सूची

$$f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3), \ldots$$

पर विचार कीजिए। चूँकि f आच्छादक है, इसलिए $\mathbb{B}^\omega$ का प्रत्येक अवयव किसी तर्क के लिए f के मान के रूप में अवश्य आता है और इस कारण सूची में भी अवश्य आता है। अतः यह सूची पूरे $\mathbb{B}^\omega$ को गिनती है।

यदि $\wp(\mathbb{Z}^+)$ गणनीय होता, तो $\mathbb{B}^\omega$ भी गणनीय होता। पर $\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है (प्रमेय 4.17)। अतः $\wp(\mathbb{Z}^+)$ अगणनीय है। □

न्यूनीकरण किस दिशा में होता है, इसे लेकर भ्रम होना आसान है। उदाहरण के लिए, कोई आच्छादक फलन $g\colon \mathbb{B}^\omega \to B$ यह *सिद्ध नहीं* करता कि B अगणनीय है। (उस फलन $g\colon \mathbb{B}^\omega \to \mathbb{B}$ पर विचार कीजिए जिसे $g(s) = s(1)$ द्वारा परिभाषित किया गया है: यह फलन 0 और 1 के किसी अनुक्रम को उसके पहले अवयव पर भेजता है। यह आच्छादक है, क्योंकि कुछ अनुक्रम 0 से और कुछ 1 से आरंभ होते हैं। लेकिन $\mathbb{B}$ परिमित है।) यह भी ध्यान रखें कि फलन f का आच्छादक होना आवश्यक है; अन्यथा तर्क पूरा नहीं होता: तब यह गारंटी नहीं होती कि $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... में B के सभी अवयव सम्मिलित हैं। उदाहरण के लिए,

$$h(n) = \underbrace{000\ldots0}_{n \text{ बार } 0}$$

एक फलन $h\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{B}^\omega$ परिभाषित करता है, लेकिन $\mathbb{Z}^+$ गणनीय है।

4.8 समसंख्यता

समुच्चयों के "आकार" की हमारी एक सहज धारणा है, जो परिमित समुच्चयों के लिए ठीक काम करती है। लेकिन अनंत समुच्चयों का क्या? यदि हम *किसी भी* आकार के दो समुच्चयों के आकारों की तुलना करने का कोई विधिवत ढंग चाहते हैं, तो पहले यह परिभाषित करना उचित है कि समुच्चय समान आकार के कब होते हैं। फ्रेगे इसे इस प्रकार कहते हैं:

> यदि कोई परिचारक यह सुनिश्चित करना चाहता है कि उसने मेज पर ठीक उतनी ही छुरियाँ रखी हैं जितनी थालियाँ, तो उसे दोनों में से किसी को भी गिनने की आवश्यकता नहीं है; वह बस प्रत्येक थाली के दाहिने एक छुरी इस प्रकार रख दे कि मेज की प्रत्येक छुरी किसी थाली के दाहिने हो। इस तरह थालियाँ और छुरियाँ एक-दूसरे के साथ अद्वितीय रूप से सहसंबद्ध होती हैं, और वह भी उसी स्थानिक संबंध के माध्यम से। (Frege, 1884, §70)

इस अनुच्छेद की अंतर्दृष्टि को निम्न विधिवत परिभाषा से स्पष्ट किया जा सकता है:

परिभाषा 4.19. A और B *समसंख्यक* हैं, जिसे $A \approx B$ लिखते हैं, यदि और केवल यदि कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ हो।

प्रतिज्ञप्ति 4.20. *समसंख्यता एक तुल्यता संबंध है।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि समसंख्यता स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है। मान लीजिए A, B और C समुच्चय हैं।

स्वतुल्यता। तत्समक फलन $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$, जहाँ $\mathrm{Id}_A(x) = x$ प्रत्येक $x \in A$ के लिए है, एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। अतः $A \approx A$।

सममिति। मान लीजिए $A \approx B$; अर्थात कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ है। चूँकि f एकैकी आच्छादक है, उसका प्रतिलोम f^{-1} विद्यमान है और वह भी एकैकी आच्छादक है। अतः $f^{-1}\colon B \to A$ एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, इसलिए $B \approx A$।

संक्रामकता। मान लीजिए कि $A \approx B$ और $B \approx C$ हैं; अर्थात एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to C$ हैं। तब संयोजन $g \circ f\colon A \to C$ एकैकी आच्छादक है, इसलिए $A \approx C$। □

प्रतिज्ञप्ति 4.21. *यदि $A \approx B$, तो A गणनीय है यदि और केवल यदि B गणनीय है।*

> यदि खंड 4.2 सम्मिलित है, तो निम्न प्रमाण परिभाषा 4.4 का उपयोग करता है; अन्यथा वह परिभाषा 4.27 का उपयोग करता है।

प्रमाण. मान लीजिए $A \approx B$ है, इसलिए कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ है, और मान लीजिए कि A गणनीय है। तब या तो $A = \emptyset$ है या कोई आच्छादक फलन $g\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है। यदि $A = \emptyset$, तो $B = \emptyset$ भी है (अन्यथा कोई अवयव $y \in B$ होता, लेकिन ऐसा कोई $x \in A$ न होता जिसके लिए $f(x) = y$)। दूसरी ओर, यदि $g\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ आच्छादक है, तो $f \circ g\colon \mathbb{Z}^+ \to B$ भी आच्छादक है। इसे देखने के लिए कोई $y \in B$ लें। चूँकि f आच्छादक है, इसलिए कोई $x \in A$ ऐसा है कि $f(x) = y$। चूँकि g आच्छादक है, इसलिए कोई $n \in \mathbb{Z}^+$ ऐसा है कि $g(n) = x$। अतः

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(x) = y$$

और इस प्रकार $f \circ g$ आच्छादक है। अतः $f \circ g$, B का एक गणन है, इसलिए B गणनीय है।

यदि B गणनीय है, तो A भी गणनीय है। यह निष्कर्ष इसी तर्क को एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f^{-1}\colon B \to A$ के साथ f के स्थान पर दोहराने से मिलता है। □

4.9 भिन्न आकार के समुच्चय और कैंटर का प्रमेय

हमने इस विचार का यथार्थ कथन दिया है कि दो समुच्चयों का आकार समान है। हम इस विचार का भी यथार्थ कथन दे सकते हैं कि एक समुच्चय दूसरे से छोटा है। "से छोटा (या समसंख्यक) है" की हमारी परिभाषा में समुच्चयों के बीच किसी एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण के स्थान पर पहले समुच्चय से दूसरे में कोई एकैकी प्रतिचित्रण चाहिए। यदि ऐसा फलन विद्यमान है, तो पहले समुच्चय का आकार दूसरे समुच्चय के आकार से कम या उसके बराबर है। सहज रूप में, एक समुच्चय से दूसरे में कोई एकैकी प्रतिचित्रण यह सुनिश्चित करता है कि फलन के परिसर में उसके प्रांत के अवयव जितने तो अवयव अवश्य हैं, क्योंकि प्रांत के कोई भी दो अवयव परिसर के एक ही अवयव पर नहीं भेजे जाते।

परिभाषा 4.22. A, B से *बड़ा नहीं है*, जिसे $A \preceq B$ लिखते हैं, यदि और केवल यदि कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ हो।

स्पष्ट है कि यह संबंध स्वतुल्य और संक्रामक है, पर सममित नहीं है (इसे अभ्यास के रूप में छोड़ा गया है)। हम ऐसी धारणा भी दे सकते हैं जो कहती है कि एक समुच्चय दूसरे से (वास्तव में) छोटा है।

परिभाषा 4.23. A, B से *छोटा है*, जिसे $A \prec B$ लिखते हैं, यदि और केवल यदि कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ हो, पर कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $g\colon A \to B$ न हो; अर्थात $A \preceq B$ और $A \not\approx B$।

स्पष्ट है कि यह संबंध अस्वतुल्य और संक्रामक है। (इसे अभ्यास के रूप में छोड़ा गया है।) इस संकेतन से हम कह सकते हैं कि कोई समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि $A \preceq \mathbb{N}$, और A अगणनीय है यदि और केवल यदि $\mathbb{N} \prec A$। इससे हम प्रमेय 4.32 को इस प्रेक्षण के रूप में फिर कह सकते हैं कि $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N})$। वास्तव में, Cantor (1892) ने सिद्ध किया कि यह अंतिम बात *पूरी तरह सामान्य* है:

प्रमेय 4.24 (कैंटर). *$A \prec \wp(A)$, किसी भी समुच्चय A के लिए।*

प्रमाण. प्रतिचित्रण $f(x) = \{x\}$ एक एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to \wp(A)$ है, क्योंकि यदि $x \neq y$, तो विस्तारिता से $\{x\} \neq \{y\}$ भी, और इसलिए $f(x) \neq f(y)$। अतः $A \preceq \wp(A)$।

> यदि खंड 4.6 उपस्थित है, तो हम धीमा प्रमाण देते हैं; अन्यथा खंड 4.12 से मेल खाने वाला अधिक तीव्र प्रमाण देते हैं।

अब हम दिखाएँगे कि कोई आच्छादक फलन $g\colon A \to \wp(A)$ हो ही नहीं सकता, एकैकी आच्छादक फलन तो दूर की बात है; अतः $A \not\approx \wp(A)$। मान लीजिए कि $g\colon A \to \wp(A)$। चूँकि g सर्वत्र परिभाषित है, प्रत्येक $x \in A$ किसी उपसमुच्चय $g(x) \subseteq A$ पर भेजा जाता है। हम दिखा सकते हैं कि g आच्छादक नहीं हो सकता। इसके लिए हम एक उपसमुच्चय $\overline{A} \subseteq A$ परिभाषित करते हैं जो परिभाषा के कारण g के परिसर में नहीं हो सकता। मान लें

$$\overline{A} = \{x \in A : x \notin g(x)\}.$$

चूँकि $g(x)$ प्रत्येक $x \in A$ के लिए परिभाषित है, इसलिए $\overline{A}$ स्पष्टतः A का सुव्याख्यायित उपसमुच्चय है। पर वह g के परिसर में नहीं हो सकता। कोई भी $x \in A$ लें; हम दिखाएँगे कि $\overline{A} \neq g(x)$। यदि $x \in g(x)$, तो वह $x \notin g(x)$ को संतुष्ट नहीं करता, इसलिए $\overline{A}$ की परिभाषा से $x \notin \overline{A}$। यदि $x \in \overline{A}$, तो उसे $\overline{A}$ का परिभाषक गुणधर्म संतुष्ट करना होगा; अर्थात $x \in A$ और $x \notin g(x)$। चूँकि x कोई भी था, इससे दिखता है कि प्रत्येक $x \in A$ के लिए $x \in g(x)$ यदि और केवल यदि $x \notin \overline{A}$, इसलिए $g(x) \neq \overline{A}$। दूसरे शब्दों में, $\overline{A}$, g के परिसर में नहीं हो सकता; यह g के आच्छादक होने की धारणा का खंडन करता है। $\square$

प्रमेय 4.24 के प्रमाण की तुलना प्रमेय 4.18 के प्रमाण से करना उपयोगी है। वहाँ हमने दिखाया था कि किसी भी सूची Z_1, Z_2, ..., जो $\mathbb{Z}^+$ के उपसमुच्चयों की हो, के लिए संख्याओं का कोई समुच्चय $\overline{Z}$ बनाया जा सकता है जिसके सूची में न होने की गारंटी है। उसके सूची में न होने की गारंटी इसलिए थी कि प्रत्येक $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए $n \in Z_n$ यदि

और केवल यदि $n \notin \overline{Z}$। इस प्रकार सदैव कोई संख्या होती है जो Z_n या $\overline{Z}$ में से एक की अवयव है, पर दूसरे की नहीं। यहाँ हम इसी विचार का अनुसरण करते हैं, अंतर केवल यह है कि अब सूचकांक n, A के अवयव, $\mathbb{Z}^+$ के बजाय हैं। समुच्चय $\overline{A}$ इस प्रकार परिभाषित है कि वह $g(x)$ से प्रत्येक $x \in A$ के लिए भिन्न है, क्योंकि $x \in g(x)$ यदि और केवल यदि $x \notin \overline{A}$। फिर से, A का सदैव कोई अवयव होता है जो $g(x)$ और $\overline{A}$ में से एक का अवयव है, पर दूसरे का नहीं। और जैसे इस कारण $\overline{Z}$ सूची $Z_1, Z_2, \ldots$ में नहीं हो सकता, वैसे ही $\overline{A}$, g के परिसर में नहीं हो सकता।

प्रमेय 4.24 के प्रमाण की तुलना प्रमेय 4.32 के प्रमाण से करना उपयोगी है। वहाँ हमने दिखाया था कि किसी भी सूची $N_0, N_1, N_2, \ldots$, जो $\mathbb{N}$ के उपसमुच्चयों की हो, के लिए हम संख्याओं का कोई समुच्चय D बना सकते हैं जिसके सूची में न होने की गारंटी है। उसके सूची में न होने की गारंटी इसलिए थी कि $n \in N_n$ यदि और केवल यदि $n \notin D$, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए। यहाँ हम इसी विचार का अनुसरण करते हैं, अंतर केवल यह है कि अब सूचकांक n, A के अवयव, $\mathbb{N}$ के बजाय हैं। समुच्चय D इस प्रकार परिभाषित है कि वह $g(x)$ से प्रत्येक $x \in A$ के लिए भिन्न है, क्योंकि $x \in g(x)$ यदि और केवल यदि $x \notin D$।

इस प्रमाण की तुलना रसेल के विरोधाभास के प्रमाण, प्रमेय 1.29, से करना भी उपयोगी है। वास्तव में कैंटर का प्रमेय ही रसेल के अपने विरोधाभास की प्रेरणा था।

4.10 आकार की धारणा और श्रोडर–बर्नस्टीन

यह एक सहज विचार है: यदि A, B से बड़ा नहीं है और B, A से बड़ा नहीं है, तो A और B समसंख्यक हैं। सच कहें तो यदि यह विचार *गलत* होता, तो इस धारणा का औचित्य सिद्ध करना लगभग असंभव होता कि समसंख्यता की हमारी परिभाषित धारणा का समुच्चयों के "आकारों" की तुलना से कोई संबंध है! सौभाग्य से यह सहज विचार सही है। श्रोडर–बर्नस्टीन प्रमेय इसका औचित्य सिद्ध करता है।

प्रमेय 4.25 (श्रोडर–बर्नस्टीन). *यदि $A \preceq B$ और $B \preceq A$, तो $A \approx B$।*

दूसरे शब्दों में, यदि A से B में कोई एकैकी प्रतिचित्रण और B से A में कोई एकैकी प्रतिचित्रण है, तो A से B में कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है।

लेकिन इस परिणाम को सिद्ध करना वास्तव में बहुत *कठिन* है। वास्तव में कैंटर ने परिणाम कहा था, पर इसे दूसरों ने सिद्ध किया।[1] अभी के लिए आपको इस पर विश्वास करना पड़ता है।

सौभाग्य से श्रोडर–बर्नस्टीन *सही* है, और इससे यह पुष्ट होता है कि हमारे परिभाषित संबंधों, अर्थात $A \approx B$ और $A \preceq B$, का "आकार" से संबंध है। इसके अतिरिक्त श्रोडर–बर्नस्टीन बहुत *उपयोगी* है। दो समसंख्यक समुच्चयों के बीच किसी एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण की कल्पना करना कठिन हो सकता है। श्रोडर–बर्नस्टीन प्रमेय तुलना को दो भागों में बाँट देता है, ताकि हमें केवल पहले समुच्चय से दूसरे में कोई एकैकी प्रतिचित्रण और फिर उलटी दिशा में कोई ऐसा फलन सोचना पड़े।

निम्न खंड 4.11, खंड 4.12, खंड 4.13, खंड 4.2, खंड 4.6 और खंड 4.7 के वैकल्पिक रूप हैं; इन्हें टिम बटन ने अपने ओपन सेट थ्योरी पाठ के लिए लिखा है। वे कुछ अधिक उन्नत हैं और गणनीयता की ऐसी भिन्न परिभाषा का उपयोग करते हैं जो समुच्चय-सिद्धांत के संदर्भ में अधिक उपयुक्त है (अर्थात्, $\mathbb{N}$ या उसके किसी आरंभिक खंड के साथ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण होना, न कि सूचीबद्ध किए जा सकना या $\mathbb{Z}^+$ से किसी आच्छादक फलन का परिसर होना)।

[1] इतिहास के विषय में अधिक जानकारी के लिए, उदाहरणार्थ, Potter (2004, pp. 165–6) देखें।

4.11 गणन और गणनीय समुच्चय

यह खंड गणन को $\mathbb{N}$ (या उसके आरंभिक खंड) के साथ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण के रूप में परिभाषित करता है, जैसा समुच्चय सिद्धान्त में किया जाता है। इसलिए यह खंड 4.2 की परिभाषाओं से थोड़ा भिन्न है और वहाँ के सभी उदाहरणों को दोहराता है। यह उस खंड से कुछ अधिक संक्षिप्त भी है।

हम किसी परिमित समुच्चय के अवयव को केवल गिनाकर उसे निर्दिष्ट कर सकते हैं। किसी समुच्चय को निम्न रूप में परिभाषित करते समय हम यही करते हैं:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

यदि अवयव a_1, ..., a_n सभी भिन्न हैं, तो इससे A और पहली n प्राकृत संख्याओं 0, ..., $n-1$ के बीच कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण मिलता है। इसके विपरीत, चूँकि प्रत्येक परिमित समुच्चय में केवल परिमित रूप से अनेक अवयव होते हैं, इसलिए प्रत्येक परिमित समुच्चय को ऐसे पत्राचार में रखा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, यदि A परिमित है, तो A और $\{0, \ldots, n-1\}$ के बीच कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, जहाँ n, A के अवयव की संख्या है।

यदि हम कुछ प्रकार के अनंत समुच्चयों को स्वीकार करते हैं, तो हम कुछ अनंत समुच्चयों को गिनने की अनुमति भी देंगे। इसे यथार्थ रूप में यह कहकर व्यक्त कर सकते हैं कि किसी अनंत समुच्चय और पूरे $\mathbb{N}$ के बीच कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण उस समुच्चय का गणन करता है।

परिभाषा 4.26 (गणन, समुच्चय-सैद्धान्तिक). किसी समुच्चय A का *गणन* ऐसा एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है जिसका परिसर A है और जिसका प्रांत या तो प्राकृत संख्याओं का कोई आरंभिक समुच्चय $\{0, 1, \ldots, n\}$ अथवा प्राकृत संख्याओं का पूरा समुच्चय $\mathbb{N}$ है।

गणन शब्द के इस प्रयोग का सहज आधार है। यह कहना कि हमने किसी समुच्चय A का गणन किया है, यह कहना है कि कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण f है जिसकी सहायता से हम समुच्चय A के अवयवों को क्रमशः गिन सकते हैं। 0वाँ अवयव $f(0)$ है, पहला $f(1)$ है, ...nवाँ $f(n)$ है, ...।[2] निम्न बात जोड़ने से इसका औचित्य और स्पष्ट हो सकता है:

परिभाषा 4.27. कोई समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि या तो $A = \emptyset$ है या A का कोई गणन है। हम कहते हैं कि A अगणनीय है यदि और केवल यदि A गणनीय नहीं है।

अतः कोई समुच्चय गणनीय है यदि और केवल यदि वह रिक्त है या उसके अवयव को किसी गणन की सहायता से क्रमशः गिना जा सकता है।

उदाहरण 4.28. प्राकृत संख्याओं का गणन करने वाला फलन केवल तत्समक फलन $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ है, जो $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n$ द्वारा दिया गया है। *धन* प्राकृत संख्याओं, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, का गणन करने वाला फलन $g(n) = n+1$ है, अर्थात उत्तरवर्ती फलन।

उदाहरण 4.29. निम्न प्रकार दिए गए फलन $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ और $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = 2n \text{ और}$$
$$g(n) = 2n + 1$$

क्रमशः सम प्राकृत संख्याओं और विषम प्राकृत संख्याओं का गणन करते हैं। लेकिन दोनों में से कोई भी आच्छादक नहीं है, इसलिए कोई भी $\mathbb{N}$ का गणन नहीं है।

[2] हाँ, हम 0 से गिनते हैं। निस्संदेह हम 1 से भी आरंभ कर सकते थे। इससे कोई बड़ा अंतर नहीं पड़ता; केवल $\mathbb{N}$ को $\mathbb{Z}^+$ से बदलना पड़ता।

उदाहरण 4.30. $\lceil x \rceil$ ऐसा *उच्चतम पूर्णांक फलन* हो जो x को ऊपर की ओर निकटतम पूर्णांक तक पूर्णांकित करता है। तब निम्न प्रकार दिया गया फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil$$

पूर्णांकों के समुच्चय $\mathbb{Z}$ का इस प्रकार गणन करता है:

$$\begin{array}{cccccccc} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & \dots \\ \left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \end{array}$$

ध्यान दें कि f धन और ऋण पूर्णांकों के बीच आगे-पीछे "कूदते" हुए $\mathbb{Z}$ के मान उत्पन्न करता है। आप f को निम्न प्रकार स्थिति-वार परिभाषित भी समझ सकते हैं:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

4.12 अगणनीय समुच्चय

यहाँ खंड 4.11 की परिभाषाओं का उपयोग करके $\mathbb{B}^\omega$ और $\wp(\mathbb{N})$ की अगणनीयता सिद्ध करता है; अर्थात $\mathbb{N}$ के साथ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण अपेक्षित है, $\mathbb{Z}^+$ से किसी आच्छादक प्रतिचित्रण के बजाय।

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{N}$ अनंत है। वह स्पष्टतः गणनीय भी है। लेकिन उल्लेखनीय तथ्य यह है कि *अगणनीय* समुच्चय भी होते हैं; अर्थात ऐसे समुच्चय जो गणनीय नहीं हैं (परिभाषा 4.27 देखें)।

यह आश्चर्यजनक लग सकता है। आखिर यह कहना कि A अगणनीय है, यह कहना है कि कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \mathbb{N} \to A$ *नहीं* है; अर्थात $\mathbb{N}$ में अवयव अनंततः अनेक हैं। उन्हें A में भेजने वाला कोई फलन संपूर्ण A पर आच्छादक नहीं होता। अतः यदि A अगणनीय है, तो A में प्राकृत संख्याओं से "अधिक" अवयव हैं।

किसी समुच्चय को अगणनीय सिद्ध करने के लिए दिखाना होता है कि कोई उपयुक्त एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण हो ही नहीं सकता। इसका सर्वोत्तम ढंग यह दिखाना है कि A के अवयव गिनने का प्रत्येक प्रयास कम-से-कम एक अवयव अवश्य छोड़ देता है; इससे दिखता है कि कोई फलन $f\colon \mathbb{N} \to A$ आच्छादक नहीं है। इसे स्थापित करने की सामान्य युक्ति कैंटर की *विकर्ण विधि* का उपयोग है। मान लीजिए A के अवयव $x_1, x_2, \dots$ के रूप में सूचीबद्ध हैं; तब हम A का एक और अवयव बनाते हैं जो अपने निर्माण के कारण उस सूची में हो ही नहीं सकता।

पर यह सब उदाहरण से सबसे अच्छी तरह समझ आता है। इसलिए हमारा पहला उदाहरण समुच्चय $\mathbb{B}^\omega$ है, जो 0 और 1 की सभी अनंत लड़ियों का समुच्चय है। ('$\mathbb{B}$' द्विआधारी का संकेत है; हम इसे केवल द्वि-अवयवी समुच्चय $\{0, 1\}$ मान सकते हैं।)

प्रमेय 4.31. $\mathbb{B}^\omega$ *अगणनीय है।*

प्रमाण. $\mathbb{B}^\omega$ के किसी उपसमुच्चय के किसी भी गणन पर विचार कीजिए। अतः हमारे पास कोई सूची $s_0, s_1, s_2, \dots$ है, जहाँ प्रत्येक s_n, 0 और 1 की अनंत लड़ी है। $s_n(m)$ इस सूची की nवीं लड़ी का mवाँ अंक हो। तब हम अपनी सूची

को ऐसी सरणी मान सकते हैं जिसमें $s_n(m)$ को nवीं पंक्ति और mवें स्तंभ में रखा गया है:

	0	1	2	3	...
0	$\mathbf{s_0(0)}$	$s_0(1)$	$s_0(2)$	$s_0(3)$	...
1	$s_1(0)$	$\mathbf{s_1(1)}$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	...
2	$s_2(0)$	$s_2(1)$	$\mathbf{s_2(2)}$	$s_2(3)$	...
3	$s_3(0)$	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$\mathbf{s_3(3)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

अब हम ऐसी अनंत लड़ी d, जो 0 और 1 से बनी है, बनाएँगे जो इस सूची में नहीं है। यह हम उसके प्रत्येक पद को निर्दिष्ट करके करेंगे; अर्थात हम $d(n)$ बताएँगे और ऐसा प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए करेंगे। सहज रूप में हम ऊपर की सरणी के विकर्ण पर नीचे की ओर पढ़ते हैं (इसीलिए इसका नाम "विकर्ण विधि" है), फिर प्रत्येक 1 को 0 और प्रत्येक 0 को 1 कर देते हैं। अधिक अमूर्त रूप में हम $d(n)$ को 0 या 1 इस अनुसार परिभाषित करते हैं कि विकर्ण का nवाँ अवयव, $s_n(n)$, क्रमशः 1 है या 0; अर्थात:

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } s_n(n) = 0 \\ 0 & \text{यदि } s_n(n) = 1 \end{cases}$$

स्पष्ट है कि $d \in \mathbb{B}^\omega$, क्योंकि वह 0 और 1 की अनंत लड़ी है। लेकिन हमने d को इस प्रकार बनाया है कि $d(n) \neq s_n(n)$ किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए। अर्थात d, s_n से उसके nवें पद पर भिन्न है। अतः $d \neq s_n$ किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए। इसलिए d सूची s_0, s_1, s_2, ... में नहीं हो सकता।

हमने दिखाया कि $\mathbb{B}^\omega$ के किसी उपसमुच्चय का कोई भी गणन दिया हो, वह $\mathbb{B}^\omega$ का कोई अवयव अवश्य छोड़ देता है। इसलिए समुच्चय $\mathbb{B}^\omega$ का कोई गणन नहीं है; अर्थात $\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है। □

यह प्रमाण-विधि "विकर्णीकरण" कहलाती है, क्योंकि वह d को परिभाषित करने के लिए सरणी के विकर्ण का उपयोग करती है। लेकिन विकर्णीकरण में सरणी का होना आवश्यक नहीं है। वास्तव में, जब कोई सरणी या वास्तविक विकर्ण न हो, तब भी इसी विचार से किसी समुच्चय को अगणनीय दिखाया जा सकता है। अगला परिणाम इसका ढंग स्पष्ट करता है।

प्रमेय 4.32. *$\wp(\mathbb{N})$ गणनीय नहीं है।*

प्रमाण. हम इसी प्रकार आगे बढ़ते हैं: दिखाते हैं कि $\mathbb{N}$ के उपसमुच्चयों की प्रत्येक सूची $\mathbb{N}$ का कोई उपसमुच्चय छोड़ देती है। मान लीजिए हमारे पास कोई सूची $N_0, N_1, N_2, \ldots$ है, जो $\mathbb{N}$ के उपसमुच्चयों की है। हम समुच्चय D इस प्रकार परिभाषित करते हैं: $n \in D$ यदि और केवल यदि $n \notin N_n$:

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin N_n\}$$

स्पष्ट है कि $D \subseteq \mathbb{N}$। लेकिन D सूची में नहीं हो सकता। निर्माण से $n \in D$ यदि और केवल यदि $n \notin N_n$; अतः $D \neq N_n$ किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए। □

पिछले प्रमाण में विकर्ण का उल्लेख नहीं था। फिर भी, उसे इस प्रकार चित्रित करने पर उसमें विकर्ण देखा जा सकता है: कल्पना कीजिए कि समुच्चय N_0, N_1, ... किसी सरणी में लिखे हैं, जहाँ N_n को nवीं पंक्ति में इस प्रकार लिखते हैं कि mवें स्तंभ में m तभी लिखते हैं जब $m \in N_n$। उदाहरण के लिए, मान लीजिए उस सूची के पहले चार समुच्चय $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{1, 3, 5, \ldots\}$, $\{0, 1, 4\}$ और $\{2, 3, 4, \ldots\}$ हैं; तब हमारी सरणी का आरंभ इस प्रकार होगा:

$$\begin{array}{lcccccccc}
N_0 = \{ & \mathbf{0}, & 1, & 2, & & & & \ldots\} \\
N_1 = \{ & & \mathbf{1}, & & 3, & & 5, & \ldots\} \\
N_2 = \{ & 0, & 1, & & & 4 & & \} \\
N_3 = \{ & & & 2, & \mathbf{3}, & 4, & & \ldots\} \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

तब D वह समुच्चय है जो विकर्ण पर नीचे की ओर जाकर यह शर्त लगाने से मिलता है कि $n \in D$ ठीक तभी, जब n विकर्ण पर *नहीं* हो। इसलिए ऊपर के मामले में हम 0 और 1 को छोड़ेंगे, 2 को सम्मिलित करेंगे, 3 को छोड़ेंगे, और इसी प्रकार आगे।

4.13 न्यूनीकरण

यह खंड न्यूनीकरण द्वारा अगणनीयता सिद्ध करता है और इसके परिणाम खंड 4.12 के परिणामों से मेल खाते हैं। खंड 4.6 के परिणामों से मेल खाने वाला थोड़ा अधिक विस्तृत वैकल्पिक रूप खंड 4.7 में दिया गया है।

हमने विकर्णीकरण के तर्क से सिद्ध किया कि $\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है। इसी प्रकार के विकर्णीकरण-तर्क से हमने दिखाया कि $\wp(\mathbb{N})$ अगणनीय है। पर $\wp(\mathbb{N})$ को अगणनीय सिद्ध करने का एक और ढंग है: दिखाइए कि *यदि* $\wp(\mathbb{N})$ *गणनीय है, तो* $\mathbb{B}^\omega$ *भी गणनीय है*। चूँकि हम जानते हैं कि $\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है, फलतः $\wp(\mathbb{N})$ भी अगणनीय है।

इसे एक समस्या का दूसरी समस्या में *न्यूनीकरण* कहते हैं। यहाँ हम $\mathbb{B}^\omega$ को गिनने की समस्या का न्यूनीकरण $\wp(\mathbb{N})$ को गिनने की समस्या में करते हैं। दूसरी समस्या का समाधान—$\wp(\mathbb{N})$ का कोई गणन—पहली समस्या का समाधान, अर्थात $\mathbb{B}^\omega$ का कोई गणन, दे देगा।

समुच्चय B को गिनने की समस्या का न्यूनीकरण समुच्चय A को गिनने की समस्या में करने के लिए हम A के किसी गणन को B के गणन में बदलने का ढंग देते हैं। इसका सबसे सरल उपाय कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ परिभाषित करना है। यदि $x_1, x_2, \ldots, A$ को गिनते हैं, तो $f(x_1), f(x_2), \ldots, B$ को गिनेंगे। हमारे मामले में हम कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{B}^\omega$ खोज रहे हैं।

न्यूनीकरण द्वारा प्रमेय 4.32 का प्रमाण. न्यूनीकरण के लिए मान लीजिए कि $\wp(\mathbb{N})$ गणनीय है और इसलिए उसका कोई गणन $N_1, N_2, N_3, \ldots$ है।

फलन $f\colon \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{B}^\omega$ इस प्रकार परिभाषित कीजिए: $f(N)$ वह लड़ी s_k हो जिसके लिए $s_k(n) = 1$ यदि और केवल यदि $n \in N$, और अन्यथा $s_k(n) = 0$।

इससे स्पष्टतः एक फलन परिभाषित होता है, क्योंकि जब भी $N \subseteq \mathbb{N}$ हो, तब कोई भी $n \in \mathbb{N}$ या तो N का अवयव है या नहीं है। उदाहरण के लिए, सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ लड़ी $1010101\ldots$ पर भेजा जाता है; $\emptyset$ को $0000\ldots$ पर और $\mathbb{N}$ को $1111\ldots$ पर भेजा जाता है।

यह फलन आच्छादक भी है: 0 और 1 से बनी प्रत्येक लड़ी प्राकृत संख्याओं के किसी समुच्चय के संगत है, अर्थात उस समुच्चय के जिसके अवयव ठीक वे प्राकृत संख्याएँ हैं जो लड़ी में 1 आने वाले स्थानों के संगत हैं। अधिक ठीक रूप में, यदि $s \in \mathbb{B}^\omega$ हो, तो $N \subseteq \mathbb{N}$ इस प्रकार परिभाषित करें:

$$N = \{n \in \mathbb{N} : s(n) = 1\}$$

तब $f(N) = s$; इसे f की परिभाषा देखकर जाँचा जा सकता है।

अब सूची

$$f(N_1), f(N_2), f(N_3), \ldots$$

पर विचार कीजिए। चूँकि f आच्छादक है, इसलिए $\mathbb{B}^\omega$ का प्रत्येक अवयव किसी निवेश पर f के मान के रूप में अवश्य आता है और इस कारण सूची में भी अवश्य आता है। अतः यह सूची पूरे $\mathbb{B}^\omega$ को गिनती है।

यदि $\wp(\mathbb{N})$ गणनीय होता, तो $\mathbb{B}^\omega$ भी गणनीय होता। पर $\mathbb{B}^\omega$ अगणनीय है (प्रमेय 4.31)। अतः $\wp(\mathbb{N})$ अगणनीय है। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 4.1. धन वर्गों $1, 4, 9, 16, \ldots$ का एक गणन परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 4.2. दिखाइए कि यदि A और B गणनीय हैं, तो $A \cup B$ भी गणनीय है। इसके लिए मान लीजिए कि आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ और $g\colon \mathbb{Z}^+ \to B$ हैं; फिर आच्छादक फलन $h\colon \mathbb{Z}^+ \to A \cup B$ परिभाषित करके सिद्ध कीजिए कि वह आच्छादक है। उन स्थितियों पर भी विचार कीजिए जहाँ A या $B = \emptyset$।

प्रश्न 4.3. दिखाइए कि यदि $B \subseteq A$ और A गणनीय है, तो B भी गणनीय है। इसके लिए मान लीजिए कि कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है। कोई आच्छादक फलन $g\colon \mathbb{Z}^+ \to B$ परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि वह आच्छादक है। यदि $B = \emptyset$ हो तो क्या होता है?

प्रश्न 4.4. n पर आगमन द्वारा दिखाइए कि यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ सभी गणनीय हैं, तो $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ भी गणनीय है। आप इस तथ्य को मान सकते हैं कि यदि दो समुच्चय A और B गणनीय हैं, तो $A \cup B$ भी गणनीय है।

प्रश्न 4.5. परिभाषा 4.4 के अनुसार, समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि $A = \emptyset$ है अथवा कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है। "गणनीय समुच्चय" को इस प्रकार भी सटीकता से परिभाषित किया जा सकता है: कोई समुच्चय गणनीय है यदि और केवल यदि कोई एकैकी फलन $g\colon A \to \mathbb{Z}^+$ है। दिखाइए कि दोनों परिभाषाएँ समतुल्य हैं; अर्थात दिखाइए कि कोई एकैकी फलन $g\colon A \to \mathbb{Z}^+$ है यदि और केवल यदि या तो $A = \emptyset$ है या कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ है।

प्रश्न 4.6. दिखाइए कि $(\mathbb{Z}^+)^n$ प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए गणनीय है।

प्रश्न 4.7. दिखाइए कि $(\mathbb{Z}^+)^*$ गणनीय है। आप प्रश्न 4.6 को मान सकते हैं।

प्रश्न 4.8. सभी गैर-ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय की एक गणना दीजिए।

प्रश्न 4.9. दिखाइए कि $\mathbb{Q}$ गणनीय है। याद कीजिए कि किसी भी परिमेय संख्या को z/m भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $z \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$।

प्रश्न 4.10. $\mathbb{B}^*$ की एक गणना परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 4.11. अपने परिचयात्मक तर्कशास्त्र पाठ्यक्रम से याद कीजिए कि प्रत्येक संभव सत्यमान सारणी एक सत्यमान फलन व्यक्त करती है। दूसरे शब्दों में, सत्यमान फलन वे सभी $\mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$ फलन हैं, जहाँ ऐसा कोई k है। सिद्ध कीजिए कि सभी सत्यमान फलनों का समुच्चय गणनीय है।

प्रश्न 4.12. दिखाइए कि किसी भी अनंत गणनीय समुच्चय के सभी परिमित उपसमुच्चयों का समुच्चय गणनीय है।

प्रश्न 4.13. $\mathbb{N}$ का कोई उपसमुच्चय *सहपरिमित* कहलाता है यदि और केवल यदि वह $\mathbb{N}$ में किसी परिमित समुच्चय का पूरक हो; अर्थात, $A \subseteq \mathbb{N}$ सहपरिमित है यदि और केवल यदि $\mathbb{N} \setminus A$ परिमित है। मान लीजिए I वह समुच्चय है जिसके अवयव ठीक $\mathbb{N}$ के परिमित और सहपरिमित उपसमुच्चय हैं। दिखाइए कि I गणनीय है।

प्रश्न 4.14. दिखाइए कि गणनीय समुच्चयों का गणनीय संघ गणनीय होता है। अर्थात, जब भी $A_1, A_2, \ldots$ समुच्चय हों और प्रत्येक A_i गणनीय हो, तब उन सभी का संघ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ भी गणनीय होता है। [ध्यान दें: यह कठिन है!]

प्रश्न 4.15. मान लीजिए $f\colon A \times B \to \mathbb{N}$ कोई भी युग्मन फलन है। दिखाइए कि f का प्रतिलोम $A \times B$ की एक गणना है।

प्रश्न 4.16. $\mathbb{N}^3$ को कूटित करने वाला कोई फलन निर्दिष्ट कीजिए।

प्रश्न 4.17. विकर्ण तर्क द्वारा दिखाइए कि $\wp(\mathbb{N})$ अगणनीय है।

प्रश्न 4.18. स्पष्ट विकर्ण तर्क द्वारा दिखाइए कि फलनों $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ का समुच्चय अगणनीय है। अर्थात, दिखाइए कि यदि f_1, f_2, ..., फलनों की सूची है और प्रत्येक $f_i\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ है, तो कोई $\overline{f}\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ ऐसा है जो इस सूची में नहीं है।

प्रश्न 4.19. दिखाइए कि यदि कोई एकैकी फलन $g\colon B \to A$ है और B अगणनीय है, तो A भी अगणनीय है। यह दिखाकर ऐसा कीजिए कि g की सहायता से A की गणना को B की गणना में कैसे बदला जा सकता है।

प्रश्न 4.20. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि धन पूर्णांकों के युग्मों के सभी *समुच्चयों का समुच्चय* अगणनीय है।

प्रश्न 4.21. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि समुच्चय X, जिसमें सभी फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ हैं, अगणनीय है (संकेत: X से $\mathbb{B}^\omega$ पर कोई आच्छादक फलन दीजिए।)

प्रश्न 4.22. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि $\mathbb{N}^\omega$, अर्थात प्राकृत संख्याओं के सभी अनंत अनुक्रमों का समुच्चय, अगणनीय है।

प्रश्न 4.23. P, धन पूर्णांकों के समुच्चय से समुच्चय $\{0\}$ में जाने वाले फलनों का समुच्चय हो, और Q, धन पूर्णांकों के समुच्चय से समुच्चय $\{0\}$ में जाने वाले *आंशिक* फलनों का समुच्चय हो। दिखाइए कि P गणनीय है और Q गणनीय नहीं है। (संकेत: $\mathbb{B}^\omega$ को गिनने की समस्या का न्यूनीकरण Q को गिनने की समस्या में कीजिए।)

प्रश्न 4.24. S, धन पूर्णांकों के समुच्चय से समुच्चय {0,1} पर जाने वाले सभी आच्छादक फलनों का समुच्चय हो; अर्थात S में सभी आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{B}$ हैं। दिखाइए कि S अगणनीय है।

प्रश्न 4.25. दिखाइए कि सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{R}$ अगणनीय है।

प्रश्न 4.26. दिखाइए कि यदि $A \approx C$ और $B \approx D$ हैं, और $A \cap B = C \cap D = \emptyset$ है, तो $A \cup B \approx C \cup D$।

प्रश्न 4.27. दिखाइए कि यदि A अनंत और गणनीय है, तो $A \approx \mathbb{N}$।

प्रश्न 4.28. दिखाइए कि कोई एकैकी प्रतिचित्रण $g\colon \wp(A) \to A$ किसी भी समुच्चय A के लिए हो ही नहीं सकता। संकेत: मान लीजिए $g\colon \wp(A) \to A$ एकैकी है। $D = \{g(B) : B \subseteq A \text{ और } g(B) \notin B\}$ पर विचार कीजिए। मान लें $x = g(D)$। इस तथ्य का उपयोग करके विरोधाभास निकालिए कि g एकैकी है।

प्रश्न 4.29. दिखाइए कि कोई समुच्चय A गणनीय है यदि और केवल यदि या तो $A = \emptyset$ है या कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \mathbb{N} \to A$ है। दिखाइए कि A गणनीय है यदि और केवल यदि कोई एकैकी प्रतिचित्रण $g\colon A \to \mathbb{N}$ है।

प्रश्न 4.30. वर्ग संख्याओं $1, 4, 9, 16, \ldots$ का कोई गणन परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 4.31. दिखाइए कि यदि A और B गणनीय हैं, तो $A \cup B$ भी गणनीय है।

प्रश्न 4.32. n पर आगमन द्वारा दिखाइए कि यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ सभी गणनीय हैं, तो $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ भी गणनीय है।

प्रश्न 4.33. स्पष्ट विकर्ण तर्क द्वारा दिखाइए कि सभी फलनों $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ का समुच्चय अगणनीय है। अर्थात दिखाइए कि यदि $f_1, f_2, \ldots$ फलनों की सूची है और प्रत्येक $f_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ है, तो कोई $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ऐसा है जो इस सूची में नहीं है।

प्रश्न 4.34. दिखाइए कि यदि कोई एकैकी फलन $g\colon B \to A$ है और B अगणनीय है, तो A भी अगणनीय है। इसके लिए दिखाइए कि g की सहायता से A के गणन को B के गणन में कैसे बदला जा सकता है।

प्रश्न 4.35. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि समुच्चय X, जिसमें सभी फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ हैं, अगणनीय है (संकेत: X से $\mathbb{B}^\omega$ पर कोई आच्छादक फलन दीजिए।)

प्रश्न 4.36. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि प्राकृत संख्याओं के युग्मों के सभी *समुच्चयों का समुच्चय*, अर्थात $\wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, अगणनीय है।

प्रश्न 4.37. न्यूनीकरण के तर्क द्वारा दिखाइए कि $\mathbb{N}^\omega$, अर्थात प्राकृत संख्याओं के सभी अनंत अनुक्रमों का समुच्चय, अगणनीय है।

प्रश्न 4.38. S, $\mathbb{N}$ से समुच्चय $\{0, 1\}$ पर जाने वाले उन सभी फलनों का समुच्चय हो जो आच्छादक प्रतिचित्रण हैं; अर्थात S में सभी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ हैं। दिखाइए कि S अगणनीय है।

प्रश्न 4.39. दिखाइए कि सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{R}$ अगणनीय है।

अध्याय 5

अंकगणितीकरण

इस अध्याय की सामग्री सरल समुच्चय-सिद्धांत में संख्या-प्रणालियों के निर्माण को प्रस्तुत करती है। इसे टिम बटन की पुस्तक "ओपन सेट थ्योरी" से लिया गया है।

5.1 $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Z}$ तक

यहाँ दो मूल अवलोकन हैं:

1. प्रत्येक पूर्णांक को $n - m$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $n, m \in \mathbb{N}$।
2. व्यंजक $n - m$ में निहित जानकारी को क्रमित युग्म $\langle n, m \rangle$ में भी समान रूप से रखा जा सकता है।

हम पहले ही जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं के क्रमित युग्म $\mathbb{N}^2$ के अवयव हैं। और हम मान रहे हैं कि $\mathbb{N}$ को समझते हैं। अतः इन दोनों अवलोकनों पर आधारित एक आरंभिक सुझाव यह है: *पूर्णांकों को प्राकृत संख्याओं के क्रमित युग्म मानें*।

वास्तव में यह सुझाव अत्यधिक सरल है। हम निश्चय ही चाहते हैं कि $0 - 2 = 4 - 6$ हो। किंतु स्पष्टतः $\langle 0, 2 \rangle \neq \langle 4, 6 \rangle$। इसलिए हम केवल यह नहीं कह सकते कि $\mathbb{N}^2$ ही पूर्णांकों का समुच्चय है।

पिछली समस्या का व्यापकीकरण करने पर हमें यह चाहिए:

$$a - b = c - d \text{ तभी और केवल तभी जब } a + d = c + b$$

(यह स्पष्ट होना चाहिए कि पूर्णांकों को इसी प्रकार *व्यवहार करना चाहिए*: दोनों पक्षों में बस b और d जोड़ दीजिए।) इस व्यवहार को सुनिश्चित करने का सरल ढंग क्रमित युग्मों के बीच तुल्यता संबंध $\sim$ इस प्रकार परिभाषित करना है:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \text{ तभी और केवल तभी जब } a + d = c + b$$

अब हमें दिखाना है कि यह एक तुल्यता संबंध है।

प्रतिज्ञप्ति 5.1. *$\sim$ एक तुल्यता संबंध है।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि $\sim$ स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

स्वतुल्यता: स्पष्टतः $\langle a, b \rangle \sim \langle a, b \rangle$, क्योंकि $a + b = b + a$।

सममिति: मान लीजिए $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$, अतः $a + d = c + b$। तब $c + b = a + d$, इसलिए $\langle c, d \rangle \sim \langle a, b \rangle$।

संक्रामकता: मान लीजिए $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \sim \langle m, n \rangle$। तब $a + d = c + b$ और $c + n = m + d$। अतः $a + d + c + n = c + b + m + d$, और इसलिए $a + n = m + b$। फलतः $\langle a, b \rangle \sim \langle m, n \rangle$। $\square$

अब इस तुल्यता संबंध से तुल्यता वर्ग बनाए जा सकते हैं:

परिभाषा 5.2. पूर्णांक, प्राकृत संख्याओं के क्रमित युग्मों के $\sim$ के अधीन तुल्यता वर्ग हैं; अर्थात $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/_\sim$।

इस प्रकार नियत की गई परिभाषा पर कई अलग-अलग *दार्शनिक* प्रतिक्रियाएँ हो सकती हैं। उन प्रतिक्रियाओं पर विचार करने से पहले कुछ तकनीकी विवरणों को आगे बढ़ाना उपयोगी होगा।

पूर्णांक क्या हैं यह बताने के बाद उन पर मूल फलन और संबंध परिभाषित करने होंगे। $[m, n]_\sim$ से $\sim$ के अधीन वह तुल्यता वर्ग सूचित करें जिसका अवयव $\langle m, n\rangle$ है।[1] अर्थात:

$$[m, n]_\sim = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^2 : \langle a, b\rangle \sim \langle m, n\rangle\}$$

अब कुछ परिभाषाएँ दें:

$$\begin{aligned}
&[a, b]_\sim + [c, d]_\sim = [a + c, b + d]_\sim \\
&[a, b]_\sim \times [c, d]_\sim = [ac + bd, ad + bc]_\sim \\
&[a, b]_\sim \leq [c, d]_\sim \text{ तभी और केवल तभी जब } a + d \leq b + c
\end{aligned}$$

(प्रचलित रीति के अनुसार सूत्रों को पढ़ना आसान बनाने के लिए मैं 'ab' को '$(a \times b)$' के स्थान पर लिख रहा हूँ।) अब यह सुनिश्चित करना होगा कि ये परिभाषाएँ वैसा ही व्यवहार करें जैसा उन्हें *करना चाहिए*। इसका अर्थ विस्तार से लिखना और जाँचना श्रमसाध्य है; विवरण खंड 5.6 में दिए गए हैं। संक्षेप में: सब कुछ ठीक काम करता है।

एक अंतिम बात शेष है। हमने पूर्णांकों का निर्माण प्राकृत संख्याओं से किया है। इसका अर्थ होगा कि प्राकृत संख्याएँ *स्वयं पूर्णांक नहीं हैं*। इसके दार्शनिक महत्त्व पर हम खंड 5.5 में लौटेंगे। किंतु तकनीकी रूप से हमें प्राकृत संख्याओं को पूर्णांक *मानकर* बरतने का कोई ढंग चाहिए। विचार सरल है: प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए बस नियत करें कि $n_\mathbb{Z} = [n, 0]_\sim$। हमें पुष्टि करनी है कि यह परिभाषा उचित व्यवहार करती है; अर्थात किन्हीं भी $m, n \in \mathbb{N}$ के लिए

$$\begin{aligned}
(m + n)_\mathbb{Z} &= m_\mathbb{Z} + n_\mathbb{Z} \\
(m \times n)_\mathbb{Z} &= m_\mathbb{Z} \times n_\mathbb{Z} \\
m \leq n &\leftrightarrow m_\mathbb{Z} \leq n_\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

यह सब पर्याप्त सीधा है। उदाहरण के लिए, इनमें दूसरी समानता दिखाने हेतु प्राकृत संख्याओं के गुणों का उपयोग करके इस प्रकार तर्क कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}
(m \times n)_\mathbb{Z} &= [m \times n, 0]_\sim \\
&= [m \times n + 0 \times 0, m \times 0 + 0 \times n]_\sim \\
&= [m, 0]_\sim \times [n, 0]_\sim \\
&= m_\mathbb{Z} \times n_\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

अन्य दोनों शर्तों की पुष्टि अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं।

5.2 $\mathbb{Z}$ से $\mathbb{Q}$ तक

अभी हमने देखा कि सरल समुच्चय-सिद्धांत का उपयोग करके प्राकृत संख्याओं से पूर्णांक कैसे बनाए जाते हैं। अब लगभग उसी प्रकार पूर्णांकों से परिमेय संख्याएँ बनाएँगे। हमारे प्रारंभिक अवलोकन हैं:

1. प्रत्येक परिमेय संख्या को $i/_j$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ i और j दोनों पूर्णांक हैं, किंतु j शून्येतर है।
2. व्यंजक $i/_j$ में निहित जानकारी को क्रमित युग्म $\langle i, j\rangle$ में भी समान रूप से रखा जा सकता है।

[1] ध्यान दें: परिभाषा 2.11 में दिए गए संकेत का उपयोग करते हुए इसी वस्तु को $[\langle m, n\rangle]_\sim$ लिखते हैं। किंतु उसे पढ़ना थोड़ा कठिन है।

स्वाभाविक उपाय परिमेय संख्याओं को $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Z}\})$ से लिए गए क्रमित युग्म *मानना* होगा। पर पहले की तरह यह अत्यधिक सरल होगा, क्योंकि हम चाहते हैं कि $3/2 = 6/4$ हो, जबकि $\langle 3, 2\rangle \neq \langle 6, 4\rangle$। अधिक सामान्य रूप में हमें यह चाहिए:

$$a/b = c/d \text{ तभी और केवल तभी जब } a \times d = b \times c$$

इसके लिए $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Z}\})$ पर एक तुल्यता संबंध इस प्रकार परिभाषित करें:

$$\langle a, b\rangle \backsim \langle c, d\rangle \text{ तभी और केवल तभी जब } a \times d = b \times c$$

हमें जाँचना है कि यह तुल्यता संबंध है। यह $\sim$ के मामले से बहुत मिलता है, इसलिए इसे अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं। तब हम यह परिभाषा दे सकते हैं:

परिभाषा 5.3. परिमेय संख्याएँ, पूर्णांकों के उन युग्मों के $\backsim$ के अधीन तुल्यता वर्ग हैं जिनका दूसरा अवयव शून्येतर है। अर्थात $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Z}\}))/\backsim$।

पूर्णांकों की तरह यहाँ भी कुछ मूल संक्रियाएँ परिभाषित करनी हैं। जहाँ $[i, j]_\backsim$ से $\backsim$ के अधीन वह तुल्यता वर्ग सूचित हो जिसका अवयव $\langle i, j\rangle$ है, वहाँ हम कहते हैं:

$$[a, b]_\backsim + [c, d]_\backsim = [ad + bc, bd]_\backsim$$
$$[a, b]_\backsim \times [c, d]_\backsim = [ac, bd]_\backsim.$$

इन परिमेयों पर $r \leq s$ परिभाषित करने के लिए इस तथ्य का उपयोग करें कि $r \leq s$ तभी और केवल तभी जब $s - r$ ऋणात्मक न हो; अर्थात $s - r$ को i/j के रूप में लिखा जा सके, जहाँ i ऋणेतर और j धनात्मक हो:

$$[a, b]_\backsim \leq [c, d]_\backsim \text{ तभी और केवल तभी जब } [c, d]_\backsim - [a, b]_\backsim = [i_\mathbb{Z}, j_\mathbb{Z}]_\backsim$$

जहाँ कोई $i \in \mathbb{N}$ और $0 \neq j \in \mathbb{N}$ हो।

फिर जाँचना होगा कि ये परिभाषाएँ वैसा ही व्यवहार करती हैं जैसा उन्हें *करना चाहिए*; यह जाँच खंड 5.6 में दी गई है। और वे सचमुच ऐसा करती हैं। अंततः पूर्णांकों को परिमेय संख्याएँ *मानकर* बरतने का कोई ढंग चाहिए; अतः प्रत्येक $i \in \mathbb{Z}$ के लिए नियत करें कि $i_\mathbb{Q} = [i, 1_\mathbb{Z}]_\backsim$। इन सबके उचित व्यवहार की जाँच भी खंड 5.6 में की गई है।

5.3 वास्तविक संख्या-रेखा

अगला चरण यह दिखाना है कि परिमेय संख्याओं से वास्तविक संख्याएँ कैसे बनाई जाती हैं। उससे पहले हमें समझना होगा कि वास्तविक संख्याओं की *विशिष्टता* क्या है।

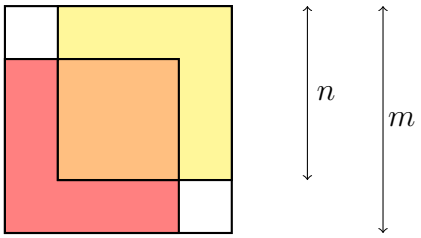
वास्तविक संख्याएँ बहुत कुछ परिमेय संख्याओं जैसा व्यवहार करती हैं। (तकनीकी रूप से दोनों *क्रमित क्षेत्रों* के उदाहरण हैं; इसकी परिभाषा के लिए परिभाषा 5.9 देखें।) यदि आपने अध्याय 4 के अभ्यास किए हैं, तो आप जानते होंगे कि वास्तविक संख्याओं की संख्या परिमेय संख्याओं की संख्या से अधिक है, अर्थात $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$। इसका पहला प्रमाण कैंटर ने दिया था। लेकिन लगभग ढाई सहस्राब्दियों से यह ज्ञात है कि अपरिमेय संख्याएँ भी होती हैं, अर्थात ऐसी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं हैं। वास्तव में:

प्रमेय 5.4. *$\sqrt{2}$ परिमेय नहीं है, अर्थात $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$।*

प्रमाण. प्रतिविरोध के लिए मान लें कि $\sqrt{2}$ परिमेय है। तब $\sqrt{2} = m/n$, जहाँ m और n कुछ प्राकृत संख्याएँ हैं। हम m और n को ऐसा चुन सकते हैं कि भिन्न को इससे अधिक सरल न किया जा सके। पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर $m^2 = 2n^2$। यहाँ से प्रमाण दो ढंग से पूरा किया जा सकता है:

पहला, ज्यामितीय ढंग से (टेनेनबाउम का अनुसरण करते हुए)।[2] इन वर्गों पर विचार करें:

[2] यह प्रमाण Conway (2006) में दिया गया है।



चूँकि $m^2 = 2n^2$, इसलिए n भुजा वाले दोनों वर्गों का अतिव्याप्त क्षेत्र उतना ही है जितना वह क्षेत्र जिसे दोनों में से कोई वर्ग नहीं ढकता; अर्थात नारंगी वर्ग का क्षेत्रफल दोनों बिना रंगे वर्गों के कुल क्षेत्रफल के बराबर है। अतः यदि नारंगी वर्ग की भुजा p और प्रत्येक बिना रंगे वर्ग की भुजा q हो, तो $p^2 = 2q^2$। किंतु अब $\sqrt{2} = p/q$, जहाँ $p < m$, $q < n$ और $p, q \in \mathbb{N}$। यह इस तथ्य का खंडन करता है कि m और n को यथासंभव छोटा चुना गया था।

दूसरा, बीजगणितीय ढंग से। चूँकि $m^2 = 2n^2$, इसलिए m सम है। (यह दिखाना आसान है कि यदि x विषम हो, तो x^2 भी विषम होता है।) अतः $m = 2r$, जहाँ $r \in \mathbb{N}$। पुनर्व्यवस्थित करने पर $2r^2 = n^2$, इसलिए n भी सम है। इस प्रकार m और n दोनों सम हैं, और फलतः भिन्न m/n को *और* सरल किया जा सकता है। यह प्रतिविरोध है! □

प्रसंगवश, यह आरेखीय प्रमाण हमें खंड 76.4 की सामग्री पर फिर से विचार करने देता है। टेनेनबाउम (1927–2006) पूरी तरह आधुनिक गणितज्ञ थे; फिर भी यह प्रमाण निस्संदेह सुंदर, पूर्णतः कठोर और ज्यामितीय अंतर्ज्ञान पर आधारित है!

बहरहाल, वास्तविक संख्याएँ परिमेय संख्याओं से "अधिक विस्तृत" हैं। एक अर्थ में परिमेय संख्या-रेखा में "रिक्त स्थान" हैं, जिन्हें वास्तविक संख्याएँ भरती हैं। वाइयरश्ट्रास ने समझा कि यह वास्तविक संख्याओं के एक ही गुणधर्म का वर्णन है, जो उन्हें परिमेय संख्याओं से अलग करता है—पूर्णता गुणधर्म: *वास्तविक संख्याओं के प्रत्येक रिक्तेतर समुच्चय का, यदि वह ऊपर से परिबद्ध हो, तो एक लघुतम ऊपरी परिबंध होता है।*

यह देखना आसान है कि परिमेय संख्याओं में पूर्णता गुणधर्म नहीं होता। उदाहरण के लिए $\sqrt{2}$ से छोटी परिमेय संख्याओं के इस समुच्चय पर विचार करें:

$$\{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \text{ अथवा } p < 0\}$$

परिमेय संख्याओं में इसका एक ऊपरी परिबंध है; उदाहरण के लिए इसके सभी अवयव 3 से छोटे हैं। किंतु इसका लघुतम ऊपरी परिबंध क्या है? हम '$\sqrt{2}$' कहना चाहते हैं; पर अभी देखा है कि $\sqrt{2}$ परिमेय *नहीं* है। और $\sqrt{2}$ से बड़ी कोई *लघुतम* परिमेय संख्या नहीं है। अतः इस समुच्चय का ऊपरी परिबंध तो है, पर लघुतम ऊपरी परिबंध नहीं। इसलिए परिमेय संख्याओं में पूर्णता गुणधर्म का अभाव है।

इसके विपरीत, अविच्छिन्न संख्या-रेखा में पूर्णता गुणधर्म "होना ही चाहिए"। हम केवल $\sqrt{2}$ को वास्तविक संख्या नहीं बनाना चाहते; हम परिमेय संख्या-रेखा के सभी "रिक्त स्थान" भरना चाहते हैं। वास्तव में हम चाहते हैं कि अविच्छिन्न रेखा में स्वयं कोई "रिक्त स्थान" न रहे। पूर्णता के माध्यम से हमें ठीक यही मिलेगा।

5.4 $\mathbb{Q}$ से $\mathbb{R}$ तक

मूलतः पूर्णता गुणधर्म दिखाता है कि वास्तविक संख्या-रेखा का प्रत्येक बिंदु α उस रेखा को ठीक दो भागों में बाँटता है: एक वह भाग जिसका लघुतम ऊपरी परिबंध α है, और दूसरा वह भाग जिसका महत्तम निचला परिबंध α है। परिमेय संख्याओं से वास्तविक संख्याओं का *निर्माण* करने के लिए डेडेकिंड ने सुझाव दिया कि वास्तविक संख्याओं को बस उन *विच्छेदों* के रूप में मानें जो परिमेय संख्याओं का विभाजन करते हैं। अर्थात हम $\sqrt{2}$ को उस *विच्छेद* से पहचानते हैं जो $< \sqrt{2}$ वाली परिमेय संख्याओं को $> \sqrt{2}$ वाली परिमेय संख्याओं से अलग करता है।

इसे अधिक व्यवस्थित करें। परिमेय संख्याओं को दो भागों में काटने पर, बने हुए विभाजन के केवल *निचले* भाग को देखकर भी उसे अद्वितीय रूप से पहचाना जा सकता है। इसलिए सटीक रूप में यह परिभाषा देते हैं:

परिभाषा 5.5 (विच्छेद). कोई *विच्छेद* α परिमेय संख्याओं का ऐसा रिक्तेतर उचित आरंभिक खंड है जिसका कोई अधिकतम अवयव नहीं होता। अर्थात α विच्छेद तभी और केवल तभी है जब:

1. *रिक्तेतर और उचित*: $\emptyset \neq \alpha \subsetneq \mathbb{Q}$

2. *आरंभिक*: सभी $p, q \in \mathbb{Q}$ के लिए, यदि $p < q \in \alpha$ तो $p \in \alpha$

3. *कोई अधिकतम नहीं*: प्रत्येक $p \in \alpha$ के लिए कोई $q \in \alpha$ ऐसा है कि $p < q$

तब $\mathbb{R}$ विच्छेदों का समुच्चय है।

अब कह सकते हैं कि $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2$ अथवा $p < 0\}$। निश्चय ही हमें जाँचना होगा कि यह सचमुच एक विच्छेद है, पर यह जाँच खंड 5.6 में छोड़ते हैं।

पहले की तरह, कुछ वस्तुएँ परिभाषित करने के बाद उन पर मूल फलन और संबंध परिभाषित करने हैं। एक सरल संबंध से आरंभ करें:

$$\alpha \leq \beta \text{ तभी और केवल तभी जब } \alpha \subseteq \beta$$

क्रम की यह परिभाषा हमें केंद्रीय परिणाम *कहने* देती है: विच्छेदों के समुच्चय में पूर्णता गुणधर्म है। पूरा खोलकर कहें तो कथन का रूप यह है। यदि S विच्छेदों का कोई रिक्तेतर समुच्चय है और उसका कोई ऊपरी परिबंध है, तो S का एक लघुतम ऊपरी परिबंध है। अधिक विस्तार से: एक विच्छेद λ है जो S का ऊपरी परिबंध है, अर्थात $(\forall \alpha \in S)\alpha \subseteq \lambda$, और λ ऐसा लघुतम विच्छेद है, अर्थात $(\forall \beta \in \mathbb{R})((\forall \alpha \in S)\alpha \subseteq \beta \to \lambda \subseteq \beta)$। अब इस परिणाम का प्रमाण प्रस्तुत है:

प्रमेय 5.6. *विच्छेदों के समुच्चय में पूर्णता गुणधर्म होता है।*

प्रमाण. मान लें कि S विच्छेदों का कोई रिक्तेतर समुच्चय है जिसका एक ऊपरी परिबंध है। मान लें कि $\lambda = \bigcup S$। पहले हमारा दावा है कि λ एक विच्छेद है:

1. चूँकि S का ऊपरी परिबंध है, इसलिए कम-से-कम एक विच्छेद S में है, अतः $\emptyset \neq \lambda$। चूँकि S विच्छेदों का समुच्चय है, इसलिए $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$। चूँकि S का ऊपरी परिबंध है, कोई $p \in \mathbb{Q}$ प्रत्येक विच्छेद $\alpha \in S$ से अनुपस्थित है। अतः $p \notin \lambda$, और इसलिए $\lambda \subsetneq \mathbb{Q}$।

2. मान लें कि $p < q \in \lambda$। तब कोई $\alpha \in S$ ऐसा है कि $q \in \alpha$। चूँकि α एक विच्छेद है, इसलिए $p \in \alpha$। अतः $p \in \lambda$।

3. मान लें कि $p \in \lambda$। तब कोई $\alpha \in S$ ऐसा है कि $p \in \alpha$। चूँकि α एक विच्छेद है, इसलिए कोई $q \in \alpha$ ऐसा है कि $p < q$। अतः $q \in \lambda$।

इससे दावा सिद्ध होता है। इसके अतिरिक्त स्पष्टतः $(\forall \alpha \in S)\alpha \subseteq \bigcup S = \lambda$, अर्थात λ, S का ऊपरी परिबंध है। अब मान लें कि $\beta \in \mathbb{R}$ भी एक ऊपरी परिबंध है, अर्थात $(\forall \alpha \in S)\alpha \subseteq \beta$। किसी भी $p \in \mathbb{Q}$ के लिए, यदि $p \in \lambda$, तो कोई $\alpha \in S$ ऐसा है कि $p \in \alpha$, इसलिए $p \in \beta$। इसे व्यापक करने पर $\lambda \subseteq \beta$। अतः λ, S का *लघुतम* ऊपरी परिबंध है। □

इस प्रकार हमारे पास ऐसी बहुत-सी वस्तुएँ हैं जो पूर्णता गुणधर्म को संतुष्ट करती हैं। इसे इस तरह भी कह सकते हैं: हमारे विच्छेदों में कोई "रिक्त स्थान" नहीं है। (इसलिए परिमेय संख्याओं के बजाय वास्तविक संख्याओं के और "विच्छेद" लेने से कोई रोचक नई वस्तु नहीं मिलेगी।)

अब वास्तविक संख्याओं पर कुछ संक्रियाएँ परिभाषित करनी हैं। पहले यह निर्धारित करके कि $p_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$, प्रत्येक $p \in \mathbb{Q}$ को वास्तविक संख्याओं में अंतःस्थापित करें। फिर परिभाषित करें:

$$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\}$$
$$\alpha \times \beta = \{p \times q : 0 \leq p \in \alpha \wedge 0 \leq q \in \beta\} \cup 0^{\mathbb{R}} \qquad \text{यदि } \alpha, \beta \geq 0_{\mathbb{R}}$$

गुणन के अन्य मामलों को सँभालने के लिए पहले रखें:

$$-\alpha = \{p - q : p < 0 \wedge q \notin \alpha\}$$

और फिर निर्धारित करें:

$$\alpha \times \beta = \begin{cases} -\alpha \times -\beta & \text{यदि } \alpha < 0_{\mathbb{R}} \text{ और } \beta < 0_{\mathbb{R}} \\ -(-\alpha \times \beta) & \text{यदि } \alpha < 0_{\mathbb{R}} \text{ और } \beta > 0_{\mathbb{R}} \\ -(\alpha \times -\beta) & \text{यदि } \alpha > 0_{\mathbb{R}} \text{ और } \beta < 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

फिर जाँचना होगा कि इनमें से प्रत्येक परिभाषा का परिणाम हमेशा एक विच्छेद होता है। अंत में एक सरल (पर लंबी) स्थापना करनी होगी कि इस प्रकार परिभाषित विच्छेद ठीक वैसा ही व्यवहार करते हैं जैसा उन्हें करना चाहिए। ये सभी जाँचें खंड 5.6 में छोड़ते हैं।

5.5 कुछ दार्शनिक विचार

तकनीकी विवरण तो इतने हुए। लेकिन उनसे मिला क्या?

एक लगभग निर्विवाद उपलब्धि सुंदर शुद्ध गणित है। इसके अतिरिक्त कुछ गहरी वैचारिक उपलब्धियाँ भी हुईं। यह समझना गंभीर अंतर्दृष्टि थी कि पूर्णता गुणधर्म वास्तविक और परिमेय संख्याओं के बीच निर्णायक अंतर व्यक्त करता है। फिर, डेडेकिंड विच्छेदों के रूप में वास्तविक संख्याओं का स्पष्ट निर्माण गणितीय विश्लेषण को ठोस आधार देता है। हम जानते हैं कि *पूर्ण क्रमित क्षेत्र* की संकल्पना सुसंगत है, क्योंकि विच्छेद ठीक ऐसा ही क्षेत्र बनाते हैं।

इतना सब होने पर भी इन उपलब्धियों के बारे में कुछ संशय सामने रखने चाहिए।

पहला, यह स्पष्ट नहीं है कि विच्छेदों के रूप में वास्तविक संख्याओं को सोचना, उनके परिचित (संभवतः अनंत) दशमलव प्रसारों के रूप में सोचने की अपेक्षा *अधिक* कठोर है। वास्तविक संख्याओं का यह दूसरा "निर्माण" कौशी अनुक्रमों के माध्यम से उनके निर्माण से कुछ मिलता-जुलता है; किंतु वास्तव में गणितज्ञ इसे मूलतः सत्रहवीं शताब्दी के आरंभ से जानते थे (खंड 5.7 देखें)। कठोरता में वास्तविक वृद्धि इस बोध से आई कि वास्तविक संख्याओं में पूर्णता गुणधर्म होता है; विशिष्ट समुच्चयों के रूप में वास्तविक संख्याओं को बनाने की क्षमता अपने-आप में शायद उतनी रोचक नहीं है।

यह बात और भी कम स्पष्ट है कि पूर्णांकों या परिमेय संख्याओं का (कहीं अधिक सरल) अंकगणितीकरण उन क्षेत्रों की कठोरता बढ़ाता है। यहाँ एक सरल बात ध्यान देने योग्य है। प्राकृत संख्याओं के क्रमित युग्मों के तुल्यता वर्गों के रूप में पूर्णांकों का *निर्माण* करने, फिर पूर्णांकों के क्रमित युग्मों के तुल्यता वर्गों के रूप में परिमेय संख्याओं का निर्माण करने, और फिर परिमेय संख्याओं के समुच्चयों के रूप में वास्तविक संख्याओं का निर्माण करने के तुरंत बाद हम इन निर्माणों को *भूल जाते हैं*। विशेषतः किसी गणितीय प्रमाण के दौरान कोई भी इन निर्माणों का *उपयोग* नहीं करना चाहेगा (उस प्रमाण को छोड़कर जो यह दिखाए कि निर्माण अपेक्षित ढंग से व्यवहार करते हैं)। किसी वास्तविक संख्या के बारे में सीधे बोलना, प्राकृत संख्याओं के समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चय के बारे में बोलने से बहुत आसान है।

सबसे अधिक संदेह इस बात पर है कि ये परिभाषाएँ हमें बताती हैं कि पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ या वास्तविक संख्याएँ *हैं* क्या—*तत्त्वमीमांसा की दृष्टि से*। अर्थात यह संदेहास्पद है कि वास्तविक संख्याएँ (मसलन) कुछ विशेष समुच्चय (समुच्चयों के समुच्चयों के समुच्चय...) ही हैं। ऐसे विचार की मुख्य बाधा यह है कि निर्माण कई अलग-अलग ढंग से किया जा सकता था। वास्तविक संख्याओं के मामले में कुछ सचमुच रोचक और भिन्न निर्माण हैं (खंड 5.7 देखें)। लेकिन अलग निर्माण पाने का एक बिल्कुल मामूली उपाय यह है: खंड 2.2 की तरह हम क्रमित युग्म को थोड़ा अलग ढंग से परिभाषित कर सकते थे; यदि क्रमित युग्म की इस वैकल्पिक संकल्पना का उपयोग किया होता, तो हमारे निर्माण उतनी ही अच्छी तरह काम करते, पर अंत में हमें अलग वस्तुएँ मिलतीं। इसलिए पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं के कई परस्पर प्रतिस्पर्धी समुच्चय-सैद्धांतिक निर्माण हैं। अब यह दावा करना मनमाना (और लज्जाजनक) होगा कि पूर्णांक (मसलन) *इन* समुच्चयों को कहते हैं, न कि *उन* समुच्चयों को। (खंड 2.2 की तरह यह उस तर्क का एक उदाहरण है जिसे Benacerraf 1965 ने प्रसिद्ध बनाया।)

एक और बात उठाना उचित है: हमारे निर्माणों में कुछ बहुत *विचित्र* है। हमने प्राकृत संख्याओं से आरंभ किया। फिर पूर्णांक बनाए, और "पूर्णांकों का 0" बनाया, अर्थात $[0,0]_\sim$। किंतु $0 \neq [0,0]_\sim$। वास्तव में, हमारे निर्माणों के अनुसार *कोई भी* प्राकृत संख्या पूर्णांक नहीं है। लेकिन यह सहज-बोध के अत्यंत प्रतिकूल लगता है। वास्तव में खंड 1.3 में हमने बिना अधिक तर्क के दावा किया था कि $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$। यदि निर्माण हमें ठीक-ठीक बताते हैं कि संख्याएँ *हैं क्या*, तो वह दावा सीधे-सीधे असत्य था।

तो कुछ दूरी से देखने पर हम कहाँ पहुँचते हैं? सरल समुच्चय-सिद्धांत में काम करते हुए और प्राकृत संख्याओं को उपलब्ध मानकर, हम पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं को कुछ समुच्चयों के रूप में *बरत* सकते हैं। इस अर्थ में हम इन वस्तुओं के सिद्धांतों को समुच्चय-सिद्धांत में *अंतःस्थापित* कर सकते हैं। किंतु इस अंतःस्थापन का दार्शनिक अर्थ बिलकुल सीधा नहीं है।

निश्चय ही यह सब अंतिम निष्कर्ष नहीं है! बात केवल इतनी है। यह दिखाने के लिए कि वास्तविक संख्याओं का अंकगणितीकरण गहरा दार्शनिक महत्त्व *रखता है*, कुछ अतिरिक्त *दार्शनिक* तर्क चाहिए।

5.6 क्रमित वलय और क्षेत्र

इस पूरे अध्याय में हमने दावा किया कि कुछ परिभाषाएँ "अपेक्षित ढंग से" व्यवहार करती हैं। इस तकनीकी परिशिष्ट में हम स्पष्ट करेंगे कि इसका क्या अर्थ है, और (रूपरेखा में दिखाएँगे कि) ये परिभाषाएँ सचमुच "ठीक" व्यवहार करती हैं।

खंड 5.1 में हमने $\mathbb{Z}$ पर योग और गुणन परिभाषित किए थे। हमें दिखाना है कि ये परिभाषित संक्रियाएँ $\mathbb{Z}$ को वही संरचना देती हैं जो हम उससे "चाहेंगे"। विशेषतः यह संरचना एक क्रमविनिमेय वलय की है।

परिभाषा 5.7. कोई *क्रमविनिमेय वलय* ऐसा समुच्चय S है जिसमें विशिष्ट अवयव 0 और 1, तथा संक्रियाएँ $+$ और $\times$ दी गई हों और जो इन आठ सूत्रों को संतुष्ट करे:

साहचर्यता	$a + (b + c) = (a + b) + c$
	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
क्रमविनिमेयता	$a + b = b + a$
	$a \times b = b \times a$
तत्समक अवयव	$a + 0 = a$
	$a \times 1 = a$
योगात्मक प्रतिलोम	$(\exists b \in S) 0 = a + b$
वितरणशीलता	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

यहाँ निहित रूप से इन सभी सूत्रों पर S तक सीमित सार्वत्रिक परिमाणक लगे हैं। यह भी ध्यान दें कि यहाँ 0 और 1 नाम वाले अवयवों का समान नाम वाली प्राकृत संख्याएँ होना आवश्यक नहीं है।

अतः यह जाँचने के लिए कि पूर्णांक क्रमविनिमेय वलय बनाते हैं, केवल इन आठ शर्तों की जाँच करनी है। किसी शर्त को स्थापित करना कठिन नहीं है, किंतु काम कुछ लंबा है। उदाहरण के लिए, योग के मामले में *साहचर्यता* इस प्रकार सिद्ध होती है:

प्रमाण. $i, j, k \in \mathbb{Z}$ नियत करें। तब $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{N}$ ऐसे हैं कि $i = [a_1, b_1]$ और $j = [a_2, b_2]$ और

$k = [a_3, b_3]$। (पठनीयता के लिए हम "$[x, y]$" लिखेंगे, न कि "$[x, y]_\sim$"; इस पूरे खंड में ऐसा ही करेंगे।) अब:

$$\begin{aligned} i + (j + k) &= [a_1, b_1] + ([a_2, b_2] + [a_3, b_3]) \\ &= [a_1, b_1] + [a_2 + a_3, b_2 + b_3] \\ &= [a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)] \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3] \\ &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2] + [a_3, b_3] \\ &= ([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) + [a_3, b_3] \\ &= (i + j) + k \end{aligned}$$

जहाँ हमने $\mathbb{N}$ पर योग के व्यवहार का निर्बाध उपयोग किया है। □

इसी प्रकार *योगात्मक प्रतिलोम* का प्रमाण यह है:

प्रमाण. $i \in \mathbb{Z}$ नियत करें, ताकि $i = [a, b]$ हो, जहाँ $a, b \in \mathbb{N}$। $j = [b, a] \in \mathbb{Z}$ रखें। प्राकृत संख्याओं के व्यवहार का उपयोग करने पर $(a + b) + 0 = 0 + (a + b)$, इसलिए परिभाषा से $\langle a + b, b + a\rangle \sim_\mathbb{Z} \langle 0, 0\rangle$, और फलतः $[a + b, b + a] = [0, 0] = 0_\mathbb{Z}$। अब $i + j = [a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [0, 0] = 0_\mathbb{Z}$। □

और *वितरणशीलता* का प्रमाण यह है:

प्रमाण. ऊपर की तरह $i = [a_1, b_1]$ और $j = [a_2, b_2]$ और $k = [a_3, b_3]$ नियत करें। अब:

$$\begin{aligned} i \times (j + k) &= [a_1, b_1] \times ([a_2, b_2] + [a_3, b_3]) \\ &= [a_1, b_1] \times [a_2 + a_3, b_2 + b_3] \\ &= [a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)] \\ &= [a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1] \\ &= [a_1a_2 + b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1] + [a_1a_3 + b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1] \\ &= ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) + ([a_1, b_1] \times [a_3, b_3]) \\ &= (i \times j) + (i \times k) \end{aligned}$$ □

शेष पाँच शर्तों के प्रमाण को अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं। उन्हें सिद्ध करने पर यह दिख जाएगा कि $\mathbb{Z}$ एक क्रमविनिमेय वलय है, अर्थात योग और गुणन (जैसा उन्हें परिभाषित किया गया है) अपेक्षित ढंग से व्यवहार करते हैं।

लेकिन हमारा काम अभी समाप्त नहीं हुआ। $\mathbb{Z}$ पर योग और गुणन के साथ हमने एक क्रम-संबंध $\leq$ भी परिभाषित किया था, और हमें जाँचना है कि वह भी अपेक्षित ढंग से व्यवहार करता है। अधिक विस्तार से, दिखाना है कि $\mathbb{Z}$ एक *क्रमित* वलय है।[3]

परिभाषा 5.8. कोई *क्रमित वलय* ऐसा क्रमविनिमेय वलय है जिस पर एक संपूर्ण क्रम-संबंध $\leq$ भी दिया गया हो और जो इन शर्तों को संतुष्ट करे:

$$a \leq b \to a + c \leq b + c$$
$$(a \leq b \wedge 0 \leq c) \to a \times c \leq b \times c$$

[3] परिभाषा 2.16 से याद करें कि संपूर्ण क्रम ऐसा संबंध है जो स्वतुल्य, संक्रामक, प्रति-सममित और संबद्ध हो। क्रम-संबंधों के संदर्भ में संबद्धता को कभी-कभी *त्रिविकल्प* कहते हैं, क्योंकि किन्हीं a और b के लिए $a \leq b \vee a = b \vee a \geq b$ होता है।

पहले की तरह यह दिखाना लंबा, किंतु नियमित काम है कि निर्मित $\mathbb{Z}$ एक क्रमित वलय है। यह काम आपके लिए छोड़ते हैं।

इससे पूर्णांकों का काम पूरा हुआ। अब परिमेय संख्याओं के बारे में बहुत मिलती-जुलती बातें दिखानी हैं। विशेषतः योग, गुणन और क्रम की हमारी दी हुई परिभाषाओं के अधीन परिमेय संख्याओं को एक क्रमित *क्षेत्र* सिद्ध करना है; ये संक्रियाएँ हैं $+$, $\times$, और $\leq$:

परिभाषा 5.9. कोई *क्रमित क्षेत्र* ऐसा क्रमित वलय है जो यह शर्त भी संतुष्ट करे:

गुणात्मक प्रतिलोम $\qquad (\forall a \in S \setminus \{0\})(\exists b \in S) a \times b = 1$

एक बार यह दिखा देने पर कि $\mathbb{Z}$ एक क्रमित वलय है, यह दिखाना आसान किंतु लंबा है कि $\mathbb{Q}$ एक क्रमित क्षेत्र है।

पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं का काम होने के बाद केवल वास्तविक संख्याएँ बचती हैं। विशेषतः दिखाना है कि $\mathbb{R}$ एक *पूर्ण* क्रमित क्षेत्र है, अर्थात पूर्णता गुणधर्म वाला क्रमित क्षेत्र। प्रमेय 5.6 ने स्थापित किया कि $\mathbb{R}$ में पूर्णता गुणधर्म है। किंतु अभी यह जाँचने का (लंबा) काम बाकी है कि $\mathbb{R}$ एक क्रमित क्षेत्र है।

उस लंबे अभ्यास में उतरने से पहले कुछ और "तत्काल" बातों की जाँच करनी होगी। उदाहरण के लिए, यह सुनिश्चित करना है कि परिभाषित $\alpha + \beta$ सचमुच एक *विच्छेद* है, किन्हीं विच्छेदों α और β के लिए। इसका प्रमाण यह है:

प्रमाण. चूँकि α और β दोनों विच्छेद हैं, इसलिए $\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\}$, $\mathbb{Q}$ का रिक्तेतर उचित उपसमुच्चय है। अब मान लें कि $x < p + q$, किन्हीं $p \in \alpha$ और $q \in \beta$ के लिए। तब $x - p < q$, इसलिए $x - p \in \beta$, और $x = p + (x - p) \in \alpha + \beta$। अतः $\alpha + \beta$, $\mathbb{Q}$ का आरंभिक खंड है। अंततः किसी भी $p + q \in \alpha + \beta$ के लिए, चूँकि α और β दोनों विच्छेद हैं, ऐसे $p_1 \in \alpha$ और $q_1 \in \beta$ हैं कि $p < p_1$ और $q < q_1$; इसलिए $p + q < p_1 + q_1 \in \alpha + \beta$; अतः $\alpha + \beta$ का कोई अधिकतम अवयव नहीं है। $\square$

ऐसे ही प्रयासों से आप जाँच सकते हैं कि $\alpha - \beta$, $\alpha \times \beta$ और $\alpha \div \beta$ विच्छेद हैं (अंतिम मामले में उस स्थिति को छोड़कर जहाँ β शून्य-विच्छेद है)। इसे भी आपके लिए छोड़ते हैं।

एक छोटा खुला सिरा अभी समेटना है। खंड 5.4 में हमने सुझाव दिया कि $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0$ अथवा $p^2 < 2\}$ लिया जा सकता है। किंतु यह दिखाना आवश्यक है कि यह समुच्चय एक *विच्छेद* है। इसका प्रमाण यह है:

प्रमाण. स्पष्टतः यह परिमेय संख्याओं का रिक्तेतर उचित आरंभिक खंड है; अतः केवल यह दिखाना पर्याप्त है कि इसका कोई अधिकतम अवयव नहीं है। विशेषतः यह दिखाना पर्याप्त है कि जहाँ p ऐसा धनात्मक परिमेय है जिसके लिए $p^2 < 2$ और $q = \frac{2p+2}{p+2}$, वहाँ $p < q$ और $q^2 < 2$ दोनों होते हैं। $p < q$ देखने के लिए बस ध्यान दें:

$$\begin{aligned} p^2 &< 2 \\ p^2 + 2p &< 2 + 2p \\ p(p+2) &< 2 + 2p \\ p &< \tfrac{2+2p}{p+2} = q \end{aligned}$$

$q^2 < 2$ देखने के लिए बस ध्यान दें:

$$\begin{aligned} p^2 &< 2 \\ 2p^2 + 4p + 2 &< p^2 + 4p + 4 \\ 4p^2 + 8p + 4 &< 2(p^2 + 4p + 4) \\ (2p+2)^2 &< 2(p+2)^2 \\ \tfrac{(2p+2)^2}{(p+2)^2} &< 2 \\ q^2 &< 2 \end{aligned}$$

$\square$

5.7 परिशिष्ट: कौशी अनुक्रमों के रूप में वास्तविक संख्याएँ

खंड 5.4 में हमने वास्तविक संख्याओं का निर्माण डेडेकिंड विच्छेदों के रूप में किया था। इस खंड में एक वैकल्पिक निर्माण समझाएँगे। यह कौशी की उस परिभाषा पर आधारित है जिसे अब हम कौशी अनुक्रम कहते हैं; लेकिन इस परिभाषा के माध्यम से वास्तविक संख्याओं का *निर्माण* उन्नीसवीं शताब्दी के अन्य लेखकों की देन है, जिनमें विशेष रूप से वाइयरश्ट्रास, हाइने, मेरे और कैंटर शामिल हैं। (एक अच्छा ऐतिहासिक विवरण O'Connor and Robertson 2005 में देखें।)

उन्नीसवीं शताब्दी तक पहुँचने से पहले साइमन स्टेविन (1548–1620) पर विचार करना उचित होगा। संक्षेप में, स्टेविन ने समझा कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को उसके दशमलव प्रसार के माध्यम से सोचा जा सकता है। इस प्रकार $\sqrt{2}$ जैसी अपरिमेय संख्या का भी एक अच्छा दशमलव प्रसार है, जिसका आरंभ है:

$$1.41421356237\ldots$$

समुच्चय-सिद्धांत में दशमलव प्रसारों का प्रतिरूप बनाना बहुत आसान है: उन्हें बस $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ फलन मानें, जहाँ $d(n)$ वह nवाँ दशमलव स्थान है जिसमें हमारी रुचि है। फिर दशमलव-बिंदु से पहले आने वाले वास्तविक संख्या के भाग (यहाँ केवल 1) को सँभालने के लिए थोड़ा परिवर्तन करना होगा। उदाहरणार्थ यह सुनिश्चित करने के लिए कि $0.999\ldots = 1$, एक और परिवर्तन (एक तुल्यता संबंध) भी चाहिए। लेकिन स्टेविन के ढंग से समुच्चय-सिद्धांत के भीतर वास्तविक संख्याओं का पूर्णतः कठोर निर्माण देना कठिन नहीं है।

स्टेविन यहाँ हमारा मुख्य विषय नहीं है। (स्टेविन के बारे में अधिक जानकारी के लिए Katz and Katz 2012 देखें।) पर इससे बहुत निकटता से जुड़ा एक विचार यह है। $\sqrt{2}$ के दशमलव प्रसार को सीधे लेने के बजाय हम इन क्रमशः अधिक सटीक प्रसारों के माध्यम से $\sqrt{2}$ के उत्तरोत्तर अधिक सटीक परिमेय सन्निकटनों के एक *अनुक्रम* पर विचार कर सकते हैं:

$$1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots$$

वास्तविक संख्याओं को "उत्तरोत्तर बेहतर सन्निकटनों" के माध्यम से समझने का विचार हमें अंतर्दृष्टियों के एक और अनुक्रम का आधार देता है (वैसा ही जैसा $\mathbb{Q}$ को $\mathbb{Z}$ से, या $\mathbb{Z}$ को $\mathbb{N}$ से बनाते समय उपयोग किया था)। मूल अंतर्दृष्टियाँ ये हैं:

1. प्रत्येक वास्तविक संख्या को (संभवतः अनंत) दशमलव प्रसार के रूप में लिखा जा सकता है।
2. किसी (संभवतः अनंत) दशमलव प्रसार में निहित जानकारी को परिमेय संख्याओं के अनुक्रम में भी समान रूप से कूटित किया जा सकता है।
3. परिमेय संख्याओं के अनुक्रम को $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Q}$ तक फलन माना जा सकता है; बस $f(n)$ को अनुक्रम की nवीं परिमेय संख्या रखें।

निश्चय ही $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Q}$ तक का *कोई भी* फलन हमें वास्तविक संख्या नहीं देगा। उदाहरण के लिए इस फलन पर विचार करें:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ 0 & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

मूल चिंता यह है कि अनुक्रम $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ किसी वास्तविक संख्या की ओर "पास आता" नहीं दिखता। इसलिए उन्हीं अनुक्रमों पर विचार करना चाहिए जो किसी वास्तविक संख्या की ओर पास आते हैं; इसके लिए अपना ध्यान उन अनुक्रमों तक सीमित करना होगा जिनकी कोई *सीमा* है।

सीमा का विचार खंड 76.2 में पहले आ चुका है। लेकिन वहाँ की ठीक *वही* परिभाषा यहाँ उपयोग नहीं कर सकते। वहाँ व्यंजक "$(\forall \varepsilon > 0)$" में वास्तविक संख्याओं पर परिमाणीकरण चुपचाप शामिल था; और हम वास्तविक संख्याओं पर फलनों की सीमाओं पर विचार कर रहे थे। अतः उस परिभाषा को उपयोग करना वास्तविक संख्याओं को पहले से उपलब्ध मान लेना होगा, जबकि हमारा लक्ष्य ठीक उनका *निर्माण* करना है। सौभाग्य से सीमा के एक निकट-संबंधी विचार से काम चल सकता है।

परिभाषा 5.10. कोई फलन $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *कौशी अनुक्रम* तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक धनात्मक $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ के लिए $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall m, n > \ell)|f(m) - f(n)| < \varepsilon$।

सीमा का सामान्य विचार पहले जैसा ही है: यदि किसी निश्चित स्तर की परिशुद्धता (जिसे ε से मापा जाता है) की आवश्यकता हो, तो देखने के लिए एक "क्षेत्र" है (कोई भी निवेश जो ℓ से बड़ा हो)। यह देखना आसान है कि हमारे अनुक्रम $1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421$...की एक सीमा है: यदि $\sqrt{2}$ को $1/10^n$ से कम त्रुटि तक सन्निकट करना हो, तो बस nवें पद के बाद का कोई भी पद देखें।

तब स्वाभाविक विचार यह होगा कि वास्तविक संख्या बस कोई कौशी अनुक्रम है। लेकिन $\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Q}$ के निर्माणों की तरह यह अत्यधिक सरल होगा: किसी एक वास्तविक संख्या को कई अलग कौशी अनुक्रम निरूपित करते हैं। इसे देखने का एक सरल ढंग यह है। कोई कौशी अनुक्रम f दिया हो, तो g को ठीक f जैसा फलन परिभाषित करें, सिवाय इसके कि $g(0) \neq f(0)$। चूँकि दोनों अनुक्रम पहली संख्या के बाद हर जगह समान हैं, अंततः हम यह कहना चाहेंगे कि परिभाषा 5.10 में प्रयुक्त अर्थ में उनकी सीमा समान है, इसलिए उन्हें उसी वास्तविक संख्या को "परिभाषित" करने वाला मानना चाहिए। अतः इन कौशी अनुक्रमों को वास्तव में एक ही वास्तविक संख्या मानना चाहिए।

फलतः फिर से कौशी अनुक्रमों पर एक तुल्यता संबंध परिभाषित करना और वास्तविक संख्याओं की पहचान तुल्यता वर्गों से करना आवश्यक है। पहले ऐसे फलन की संकल्पना चाहिए जो सीमा में 0 की ओर अभिसरित हो। किसी भी फलन $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ के लिए कहें कि h 0 *की ओर अभिसरित होता है* तभी और केवल तभी जब प्रत्येक धनात्मक $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ के लिए $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall n > \ell)|h(n)| < \varepsilon$।[4] फिर, जहाँ f और g, $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ फलन हैं, $(f - g)(n) = f(n) - g(n)$ रखें। अब परिभाषित करें:

$$f \eqcirc g \text{ तभी और केवल तभी जब } (f - g), 0 \text{ की ओर अभिसरित हो.}$$

हमें जाँचना है कि $\eqcirc$ एक तुल्यता संबंध है; और वह है। तब यदि चाहें तो वास्तविक संख्याओं को $\eqcirc$ के अधीन $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ वाले सभी कौशी अनुक्रमों के तुल्यता वर्गों के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

ऐसा करने के बाद हमेशा की तरह तुल्यता वर्ग $[f]_{\eqcirc}$ लिखेंगे, जिसका अवयव f है। किंतु पठनीयता बनाए रखने के लिए आगे अधोलिखित चिह्न छोड़कर केवल $[f]$ लिखेंगे। प्रत्येक $q \in \mathbb{Q}$ के लिए यह भी निर्धारित करते हैं कि $q_{\mathbb{R}} = [c_q]$, जहाँ c_q अचर फलन है और सभी के लिए $c_q(n) = q$, जहाँ $n \in \mathbb{N}$। फिर वास्तविक संख्याओं पर मूल संबंध और संक्रियाएँ परिभाषित करते हैं, मसलन:

$$[f] + [g] = [(f + g)]$$
$$[f] \times [g] = [(f \times g)]$$

जहाँ $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ और $(f \times g)(n) = f(n) \times g(n)$। निश्चय ही यह भी जाँचना है कि $(f + g)$, $(f - g)$ और $(f \times g)$ में से प्रत्येक कौशी अनुक्रम होता है, जब f और g कौशी अनुक्रम हों; वे होते हैं, और यह जाँच आपके लिए छोड़ते हैं।

अंततः क्रम की एक संकल्पना परिभाषित करें। कहें कि $[f]$ *धनात्मक* है तभी और केवल तभी जब $[f] \neq 0_{\mathbb{R}}$ और $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall n > \ell) 0 < f(n)$ दोनों हों। फिर कहें कि $[f] < [g]$ तभी और केवल तभी जब $[(g - f)]$ धनात्मक है। हमें जाँचना है कि यह सुपरिभाषित है (अर्थात यह तुल्यता वर्ग से चुने गए "प्रतिनिधि" फलन पर निर्भर नहीं करता)। लेकिन यह जाँच करने के बाद दिखाना बहुत आसान है कि इनसे सही बीजीय गुणधर्म मिलते हैं; अर्थात:

प्रमेय 5.11. *कौशी अनुक्रम एक क्रमित क्षेत्र बनाते हैं।*

प्रमाण. अभ्यास। □

यह सिद्ध करना कठिन है कि इस प्रकार निर्मित वास्तविक संख्याओं में पूर्णता गुणधर्म है, इसलिए इसका प्रमाण देंगे।

प्रमेय 5.12. *कौशी अनुक्रमों के प्रत्येक रिक्तेतर समुच्चय का, यदि कोई ऊपरी परिबंध हो, तो एक लघुतम ऊपरी परिबंध होता है।*

[4] इसकी तुलना $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ की परिभाषा से करें, जो खंड 76.2 में दी गई है।

प्रमाण की रूपरेखा. मान लें S कौशी अनुक्रमों का कोई रिक्तेतर समुच्चय है जिसका एक ऊपरी परिबंध है। तब कोई $p \in \mathbb{Q}$ ऐसा है कि $p_{\mathbb{R}}$, S का ऊपरी परिबंध है। कोई $r \in S$ लें; तब कोई $q \in \mathbb{Q}$ ऐसा है कि $q_{\mathbb{R}} < r$। अतः यदि S का लघुतम ऊपरी परिबंध विद्यमान है, तो वह $q_{\mathbb{R}}$ और $p_{\mathbb{R}}$ के बीच (सिरों सहित) है।

हम एक साथ नीचे और ऊपर से उसके पास पहुँचकर लघुतम ऊपरी परिबंध पर अभिसरित होंगे। विशेषतः दो फलन $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ इस उद्देश्य से परिभाषित करेंगे कि f लघुतम ऊपरी परिबंध पर ऊपर से अभिसरित हो और g नीचे से अभिसरित हो। आरंभ में परिभाषित करें:

$$f(0) = p$$
$$g(0) = q$$

फिर जहाँ $a_n = \frac{f(n)+g(n)}{2}$, वहाँ रखें:[5]

$$f(n+1) = \begin{cases} a_n & \text{यदि } (\forall h \in S)[h] \leq (a_n)_{\mathbb{R}} \\ f(n) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$
$$g(n+1) = \begin{cases} a_n & \text{यदि } (\exists h \in S)[h] \geq (a_n)_{\mathbb{R}} \\ g(n) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

f और g दोनों कौशी अनुक्रम हैं। (इसे अपेक्षाकृत आसानी से जाँचा जा सकता है, पर अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं।) ध्यान दें कि फलन $(f - g)$, 0 की ओर अभिसरित होता है, क्योंकि हर चरण में f और g के बीच का अंतर आधा हो जाता है। अतः $[f] = [g]$।

पहले दिखाएँगे कि $[f]$, S का ऊपरी परिबंध है, अर्थात $(\forall h \in S)[h] \leq [f]$। (आगे बढ़ते हुए प्रमेय 5.11 का उपयोग करेंगे।) कोई $h \in S$ लें और प्रतिविरोध के लिए मान लें कि $[f] < [h]$, ताकि $0_{\mathbb{R}} < [(h - f)]$। चूँकि f एकदिष्ट रूप से घटता कौशी अनुक्रम है, कोई $n \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि $[(c_{f(n)} - f)] < [(h - f)]$। अतः:

$$(f(n))_{\mathbb{R}} = [c_{f(n)}] < [f] + [(h - f)] = [h],$$

जो इस तथ्य का खंडन करता है कि निर्माण के अनुसार $[h] \leq (f(n))_{\mathbb{R}}$।

अब दिखाएँगे कि $[f] = [g]$, S का *लघुतम* ऊपरी परिबंध है। मान लें j कोई कौशी अनुक्रम है और $[j] < [g]$। ऊपर की तरह तर्क करने पर (g के *बढ़ते* होने का उपयोग करते हुए) कोई $n \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि $[j] < (g(n))_{\mathbb{R}}$। किंतु निर्माण के अनुसार कोई $h \in S$ ऐसा है कि $(g(n))_{\mathbb{R}} \leq [h]$, इसलिए $[j] < [h]$ और फलतः $[j]$, S का ऊपरी परिबंध नहीं है। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 5.1. दिखाइए कि $(m+n)_{\mathbb{Z}} = m_{\mathbb{Z}} + n_{\mathbb{Z}}$ और $m \leq n \leftrightarrow m_{\mathbb{Z}} \leq n_{\mathbb{Z}}$, किन्हीं भी $m, n \in \mathbb{N}$ के लिए।

प्रश्न 5.2. दिखाइए कि $\backsim$ एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 5.3. दिखाइए कि $(i+j)_{\mathbb{Q}} = i_{\mathbb{Q}} + j_{\mathbb{Q}}$, $(i \times j)_{\mathbb{Q}} = i_{\mathbb{Q}} \times j_{\mathbb{Q}}$ और $i \leq j \leftrightarrow i_{\mathbb{Q}} \leq j_{\mathbb{Q}}$, किन्हीं भी $i, j \in \mathbb{Z}$ के लिए।

प्रश्न 5.4. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z}$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

प्रश्न 5.5. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z}$ एक क्रमित वलय है।

[5] यह एक पुनरावर्ती परिभाषा है। किंतु हमने *अभी तक* यह मानने का कोई कारण नहीं दिया है कि पुनरावर्ती परिभाषाएँ मान्य हैं।

प्रश्न 5.6. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Q}$ एक क्रमित क्षेत्र है।

प्रश्न 5.7. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}$ एक क्रमित क्षेत्र है।

प्रश्न 5.8. सभी के लिए $f(n) = 0$ रखें, जहाँ n कोई भी हो। $g(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$ रखें। दिखाइए कि दोनों कौशी अनुक्रम हैं, और वास्तव में दोनों फलनों की सीमा 0 है, इसलिए $f \sim_{\mathbb{R}} g$ भी है।

प्रश्न 5.9. सिद्ध कीजिए कि कौशी अनुक्रम एक क्रमित क्षेत्र बनाते हैं।

अध्याय 6

अनंत समुच्चय

अनंत समुच्चयों पर यह अध्याय टिम बटन की *ओपन सेट थ्योरी* से लिया गया है।

6.1 हिल्बर्ट का होटल

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय स्पष्टतः अनंत है। इसलिए यदि हम प्राकृत संख्याओं को *पहले से उपलब्ध मानकर* नहीं चलना चाहते, तो हमारा पहला कदम ऐसे शब्दों में अनंत समुच्चय का लक्षण निर्धारित करना होना चाहिए जिनमें स्वयं प्राकृत संख्याओं का उल्लेख आवश्यक न हो। यहाँ एक सुंदर उपाय है, जिसे हिल्बर्ट ने 1924 के एक व्याख्यान में प्रस्तुत किया। वे हमें यह कल्पना करने को कहते हैं:

> [...] ऐसे होटल की कल्पना करें जिसमें परिमित संख्या में कमरे हों। इनमें से हर कमरे में ठीक एक अतिथि ठहरा हो। अब यदि अतिथि किसी तरह अपने कमरे बदल लें, [पर] इस प्रकार कि हर कमरे में अब भी एक से अधिक व्यक्ति न हो, तो कोई कमरा खाली नहीं होगा, और होटल-मालिक इस ढंग से नए आने वाले अतिथि के लिए कोई नई जगह नहीं बना सकता [...¶...]
>
> अब हम निर्धारित करते हैं कि होटल में $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, इस प्रकार अंकित अनंततः अनेक कमरे हों और प्रत्येक में ठीक एक अतिथि ठहरा हो। जैसे ही कोई नया अतिथि आए, मालिक को बस प्रत्येक पुराने अतिथि को उसके वर्तमान कमरे से एक अधिक संख्या वाले कमरे में भेजना है; तब कमरा 1 नए आए अतिथि के लिए खाली हो जाएगा।

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \end{array}$$

> (Hilbert 2013, 730 में प्रकाशित; अनुवाद हमारा)

निर्णायक बात यह है कि हिल्बर्ट के होटल में अनंततः अनेक कमरे हैं; और इस कथन का क्या अर्थ है, इसे परिभाषित करने के लिए हम उनके विवरण को ग्रहण कर सकते हैं। वस्तुतः डेडेकिंड का भी यही दृष्टिकोण था (यहाँ उसे, निस्संदेह, बड़े काल-विपर्यास के साथ प्रस्तुत किया गया है; डेडेकिंड की परिभाषा 1888 की है):

परिभाषा 6.1. समुच्चय A *डेडेकिंड-अनंत* है तभी और केवल तभी जब A से A के किसी उचित उपसमुच्चय में कोई एकैकी प्रतिचित्रण हो। अर्थात् कोई $o \in A$ और कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to A$ ऐसा है कि $o \notin \mathrm{ran}(f)$।

6.2 डेडेकिंड बीजगणित

हम केवल यह नहीं चाहते कि प्राकृत संख्याएँ अनंत हों; हम यह भी चाहते हैं कि उनमें कुछ (बीजीय) गुण हों: योग, गुणन आदि के अधीन उनका व्यवहार सुव्यवस्थित होना चाहिए।

डेडेकिंड का विचार *उत्तरवर्ती फलन* की धारणा को मूल मानना और फिर संख्याओं का लक्षण निम्नलिखित गुणों वाली वस्तुओं के रूप में देना था:

1. एक संख्या 0 है, जो किसी भी संख्या की उत्तरवर्ती नहीं है
   अर्थात्, $0 \notin \mathrm{ran}(s)$
   अर्थात्, $\forall x\ s(x) \neq 0$

2. भिन्न संख्याओं की उत्तरवर्ती संख्याएँ भिन्न होती हैं
   अर्थात्, s कोई एकैकी प्रतिचित्रण है
   अर्थात्, $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$

3. प्रत्येक संख्या उत्तरवर्ती फलन को 0 पर बार-बार लगाने से प्राप्त होती है।

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से पहली दो शर्तों को संभालना सरल है (ऊपर देखें)। किन्तु केवल प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से (3) को नहीं संभाला जा सकता। डेडेकिंड की निर्णायक प्रगति यह थी कि उन्होंने शर्त (3) को समुच्चय-सैद्धांतिक रूप में इस प्रकार पुनः सूत्रबद्ध किया:

3′. प्राकृत संख्याएँ वह लघुतम समुच्चय हैं जो *उत्तरवर्ती फलन के अधीन संवृत* है: अर्थात समुच्चय के किसी भी अवयव पर s लगाने से उसी समुच्चय का एक अवयव प्राप्त होता है।

किन्तु हमें इसे धीरे-धीरे खोलकर लिखना होगा।

परिभाषा 6.2. किसी भी फलन f के लिए समुच्चय X, f-*संवृत* है तभी और केवल तभी जब $(\forall x \in X) f(x) \in X$। अब किसी भी o के लिए परिभाषित करें:

$$\mathrm{clo}_f(o) = \bigcap \{X : o \in X \text{ और } X\ f\text{-संवृत है}\}$$

अतः $\mathrm{clo}_f(o)$ उन सभी f-संवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ है जिनमें o कोई अवयव है। इसलिए सहजतः $\mathrm{clo}_f(o)$ वह *लघुतम* f-संवृत समुच्चय है जिसमें o कोई अवयव है। अगला परिणाम इस सहज विचार को यथार्थ रूप देता है:

सहायक प्रमेय 6.3. *किसी भी फलन f और किसी भी $o \in A$ के लिए:*

1. $o \in \mathrm{clo}_f(o)$*; और*

2. $\mathrm{clo}_f(o)$, f*-संवृत है; और*

3. *यदि X, f-संवृत है और $o \in X$, तो $\mathrm{clo}_f(o) \subseteq X$।*

प्रमाण. ध्यान दें कि कम-से-कम एक f-संवृत समुच्चय ऐसा है जिसमें o कोई अवयव है, अर्थात $\mathrm{ran}(f) \cup \{o\}$। इसलिए ऐसे *सभी* समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $\mathrm{clo}_f(o)$ अस्तित्व में है। अब हमें (1)–(3) की जाँच करनी है।

(1) के लिए: $o \in \mathrm{clo}_f(o)$, क्योंकि यह उन समुच्चयों का सर्वनिष्ठ है जिनमें से हर एक में o कोई अवयव है।

(2) के लिए: मान लें $x \in \mathrm{clo}_f(o)$। अतः यदि $o \in X$ और X, f-संवृत है, तो $x \in X$; और अब $f(x) \in X$, क्योंकि X, f-संवृत है। इसलिए $f(x) \in \mathrm{clo}_f(o)$।

(3) के लिए: सामान्यतः, यदि $X \in C$ तो $\bigcap C \subseteq X$। □

इसका उपयोग करके हम कह सकते हैं:

परिभाषा 6.4. एक *डेडेकिंड बीजगणित* ऐसा समुच्चय A है जिसके साथ कोई फलन $f\colon A \to A$ और कोई $o \in A$ इस प्रकार दिए हों कि:

1. $o \notin \mathrm{ran}(f)$
2. f कोई एकैकी प्रतिचित्रण है
3. $A = \mathrm{clo}_f(o)$

चूँकि $A = \mathrm{clo}_f(o)$, हमारा पिछला परिणाम बताता है कि A वह लघुतम f-संवृत समुच्चय है जिसमें o कोई अवयव है। स्पष्ट है कि डेडेकिंड बीजगणित डेडेकिंड-अनंत होता है; परिभाषा की शर्तें (1) और (2) देखें। किन्तु अधिक रोचक तथ्य यह है कि किसी भी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय को डेडेकिंड बीजगणित में बदला जा सकता है।

प्रमेय 6.5. *यदि कोई डेडेकिंड-अनंत समुच्चय है, तो कोई डेडेकिंड बीजगणित है।*

प्रमाण. मान लें कि D डेडेकिंड-अनंत है। अतः कोई एकैकी प्रतिचित्रण $g\colon D \to D$ और कोई अवयव $o \in D \setminus \mathrm{ran}(g)$ है। अब $A = \mathrm{clo}_g(o)$ रखें; सहायक प्रमेय 6.3 के अनुसार A अस्तित्व में है और $o \in A$। $f = g\restriction_A$ रखें। हम दिखाएँगे कि A, f, o मिलकर डेडेकिंड बीजगणित बनाते हैं।

(1) के लिए: $o \notin \mathrm{ran}(g)$ और $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{ran}(g)$, इसलिए $o \notin \mathrm{ran}(f)$।

(2) के लिए: g, D पर एकैकी प्रतिचित्रण है; इसलिए $f \subseteq g$ भी एकैकी प्रतिचित्रण होना चाहिए।

(3) के लिए: सहायक प्रमेय 6.3 के अनुसार A, g-संवृत है; अतः A, f-संवृत भी है। इसलिए सहायक प्रमेय 6.3 से $\mathrm{clo}_f(o) \subseteq A$। चूँकि $\mathrm{clo}_f(o)$ भी f-संवृत है और $f = g\restriction_A$, इसलिए $\mathrm{clo}_f(o)$, g-संवृत है। अतः सहायक प्रमेय 6.3 से $A \subseteq \mathrm{clo}_f(o)$। □

6.3 डेडेकिंड बीजगणित और अंकगणितीय आगमन

अब निर्णायक बात यह है कि कोई डेडेकिंड बीजगणित—वस्तुतः *कोई भी* डेडेकिंड बीजगणित—प्राकृत संख्याओं के स्थानापन्न का काम करेगा। इसका कारण निम्नलिखित सरल परिणाम है:

प्रमेय 6.6 (अंकगणितीय आगमन). *मान लें कि N, s, o मिलकर डेडेकिंड बीजगणित बनाते हैं। तब किसी भी समुच्चय X के लिए:*

$$\textit{यदि } o \in X \textit{ और } (\forall n \in N \cap X) s(n) \in X, \textit{ तो } N \subseteq X\textit{।}$$

प्रमाण. डेडेकिंड बीजगणित की परिभाषा से $N = \mathrm{clo}_s(o)$। अब यदि $o \in X$ और $(\forall n \in N)(n \in X \to s(n) \in X)$ दोनों हों, तो $N = \mathrm{clo}_s(o) \subseteq X$। □

चूँकि आगमन प्राकृत संख्याओं का लाक्षणिक गुण है, बात यह है। कोई भी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय दिए जाने पर हम डेडेकिंड बीजगणित बना सकते हैं और उस बीजगणित को प्राकृत संख्याओं के स्थानापन्न के रूप में उपयोग कर सकते हैं।

निस्संदेह, प्रमेय 6.6 आगमन को *समुच्चय-सैद्धांतिक* शब्दों में सूत्रबद्ध करता है। किन्तु हम इस सिद्धांत को सरलता से अधिक परिचित रूप में रख सकते हैं:

उपप्रमेय 6.7. *मान लें कि N, s, o मिलकर डेडेकिंड बीजगणित बनाते हैं। तब किसी भी सूत्र $\varphi(x)$ के लिए, जिसमें प्राचल हो सकते हैं:*

$$\textit{यदि } \varphi(o) \textit{ और } (\forall n \in N)(\varphi(n) \to \varphi(s(n))), \textit{ तो } (\forall n \in N)\varphi(n)$$

प्रमाण. $X = \{n \in N : \varphi(n)\}$ रखें और अब प्रमेय 6.6 का उपयोग करें। □

इस परिणाम में हमने किसी सूत्र में "प्राचल होने" की बात की। मोटे तौर पर इसका अर्थ यह है कि किन्हीं भी वस्तुओं $c_1, \ldots, c_k$ के लिए हम $\varphi(x, c_1, \ldots, c_k)$ के साथ काम कर सकते हैं। अधिक यथार्थतः, हम "प्राचलों" का उल्लेख किए बिना परिणाम इस प्रकार कह सकते हैं। किसी भी सूत्र $\varphi(x, v_1, \ldots, v_k)$ के लिए, जिसके सभी मुक्त चर प्रदर्शित हैं, हमारे पास है:

$$\begin{aligned}\forall v_1 \ldots \forall v_k((&\varphi(o, v_1, \ldots, v_k) \wedge \\ &(\forall x \in N)(\varphi(x, v_1, \ldots, v_k) \to \varphi(s(x), v_1, \ldots, v_k))) \to \\ &(\forall x \in N)\varphi(x, v_1, \ldots, v_k))\end{aligned}$$

स्पष्ट है कि "प्राचल होने" की भाषा पाठ को बहुत सुगम बना सकती है। (भाग XV में हम इस उपाय का बार-बार उपयोग करेंगे।)

डेडेकिंड बीजगणितों पर लौटें: कोई भी डेडेकिंड बीजगणित दिए जाने पर हम योग, गुणन और घातांक के सामान्य अंकगणितीय फलन भी परिभाषित कर सकते हैं। किन्तु यह साधारण बात नहीं है और इसमें *पुनरावर्ती परिभाषा* की तकनीक लगती है। इस तकनीक को हम बहुत बाद में, कहीं अधिक सामान्य संदर्भ में प्रस्तुत और उचित सिद्ध करेंगे। (उत्सुक पाठक अध्याय 69 के बाद यहाँ लौटना चाह सकते हैं, या Potter 2004, pp. 95–8 जैसे किसी वैकल्पिक विवेचन को पढ़ सकते हैं।) किन्तु जहाँ N, s, o मिलकर डेडेकिंड बीजगणित बनाते हैं, वहाँ अंततः हम निम्नलिखित निर्धारित कर सकेंगे:

$$\begin{aligned} a + o &= a & a \times o &= o & a^o &= s(o) \\ a + s(b) &= s(a + b) & a \times s(b) &= (a \times b) + a & a^{s(b)} &= a^b \times a \end{aligned}$$

और दिखा सकेंगे कि इनका व्यवहार अपेक्षा के अनुरूप है।

6.4 अनंत समुच्चय के अस्तित्व के लिए डेडेकिंड का "प्रमाण"

इस अध्याय में हमने डेडेकिंड बीजगणितों के माध्यम से प्राकृत संख्याओं का समुच्चय-सैद्धांतिक विवेचन प्रस्तुत किया है। खंड 5.5 में हमने (अन्य बातों के साथ) विश्लेषण के अंकगणितीकरण के दार्शनिक महत्त्व पर विचार किया था। अब हमें यहाँ प्राप्त उपलब्धि के महत्त्व पर विचार करना चाहिए।

पूरे अध्याय 5 में हमने प्राकृत संख्याओं को उपलब्ध मानकर उनका उपयोग पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं के स्पष्ट निर्माण में किया। इस अध्याय में हमने प्राकृत संख्याओं का कोई स्पष्ट निर्माण नहीं दिया। हमने केवल यह दिखाया है कि *डेडेकिंड-अनंत कोई भी समुच्चय दिए जाने पर* हम एक ऐसा समुच्चय परिभाषित कर सकते हैं जो ठीक उसी तरह व्यवहार करेगा जैसा हम $\mathbb{N}$ से चाहते हैं।

इसलिए स्पष्टतः हम किसी तत्त्वमीमांसात्मक प्रश्न का उत्तर देने का दावा नहीं कर सकते, जैसे कि *प्राकृत संख्याएँ कौन-सी वस्तुएँ हैं*। पर यह अच्छी बात है। आखिरकार, खंड 5.5 में हमने इस बात पर बल दिया था कि डेडेकिंड विच्छेदों के समुच्चय के रूप में $\mathbb{R}$ की परिभाषा को सुविधाजनक निर्धारण के बजाय *खोज* समझना गलत होगा। निर्णायक बात यह है कि डेडेकिंड विच्छेद वास्तविक संख्याओं के प्रमुख गणितीय गुणों को साकार करते हैं। यहाँ भी ठीक ऐसा ही है: *कोई भी* डेडेकिंड बीजगणित प्राकृत संख्याओं के प्रमुख गणितीय गुणों को साकार करता है। (वास्तव में डेडेकिंड ने सभी डेडेकिंड बीजगणितों को *समाकृतिक* सिद्ध करके इस बात को पूरी शक्ति से स्थापित किया (1888, प्रमेय 132–3)। इसलिए इसमें आश्चर्य नहीं कि आज के कई "संरचनावादी" डेडेकिंड को अपना अग्रदूत मानते हैं।)

इसके अतिरिक्त, हमने दिखाया है कि प्राकृत संख्याओं के सिद्धांत को सरल समुच्चय-सिद्धांत में कैसे अंतःस्थापित किया जा सकता है। वह समुच्चय-सिद्धांत अब भी कुछ अनौपचारिक है, पर वह (प्रकटतः) प्राकृत संख्याओं को पहले से उपलब्ध नहीं मानता। अतः शायद हम डेडेकिंड की अपनी महत्त्वाकांक्षी परियोजना को साकार करने की दिशा में बढ़ रहे हैं। उन्होंने इसे इस प्रकार समझाया था:

> विज्ञान में प्रमाणित की जा सकने वाली किसी भी बात को प्रमाण के बिना नहीं मानना चाहिए। यद्यपि यह माँग उचित प्रतीत होती है, फिर भी मैं नहीं मान सकता कि सबसे सरल विज्ञान की नींव रखने की नवीनतम

> विधियाँ भी इसे पूरा करती हैं; अर्थात् तर्कशास्त्र का वह भाग जो संख्या-सिद्धांत से संबंध रखता है। जब मैं अंकगणित (बीजगणित, विश्लेषण) को केवल तर्कशास्त्र का एक भाग कहता हूँ, तो मेरा आशय यह है कि संख्या की संकल्पना को मैं स्थान और समय की धारणाओं या अंतःप्रज्ञाओं से पूर्णतः स्वतंत्र मानता हूँ—बल्कि उसे चिंतन के शुद्ध नियमों का प्रत्यक्ष परिणाम मानता हूँ। (Dedekind, 1888, प्रस्तावना)

डेडेकिंड का साहसिक विचार यह है। हमने अभी देखा कि केवल सरल समुच्चय-सिद्धांत के सहारे प्राकृत संख्याएँ कैसे बनाई जा सकती हैं। अध्याय 5 में हमने देखा कि प्राकृत संख्याएँ और कुछ समुच्चय-सिद्धांत दिए जाने पर वास्तविक संख्याएँ कैसे बनाई जा सकती हैं। अतः संभव है कि "अंकगणित (बीजगणित, विश्लेषण)", "तर्कशास्त्र का मात्र एक भाग" निकले ("तर्कशास्त्र" शब्द के डेडेकिंड के विस्तृत अर्थ में)।

विचार तो यही है। पर एक क्षण रुकिए। हमारा डेडेकिंड बीजगणित (प्राकृत संख्याओं का हमारा स्थानापन्न) तभी बनता है जब कोई डेडेकिंड-अनंत समुच्चय अस्तित्व में हो। (प्रमेय 6.5 को फिर से देखें।) यदि किसी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय का अस्तित्व "तर्कशास्त्र" या "चिंतन के शुद्ध नियमों" से स्थापित नहीं किया जा सकता, तो परियोजना यहीं रुक जाती है।

तो क्या किसी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय का अस्तित्व "चिंतन के शुद्ध नियमों" से स्थापित *किया जा सकता है*? डेडेकिंड ने यह प्रयास किया था:

> मेरे विचारों का अपना जगत, अर्थात् उन सभी वस्तुओं की समष्टि S जो मेरे चिंतन का विषय हो सकती हैं, अनंत है। क्योंकि यदि s, S के किसी अवयव को सूचित करता है, तो यह विचार s' कि s मेरे चिंतन का विषय हो सकता है, स्वयं S का अवयव है। यदि हम इसे प्रतिबिंब $\varphi(s)$, अर्थात् अवयव s का प्रतिबिंब मानें, तो ... S [डेडेकिंड-]अनंत है; यही सिद्ध करना था। (Dedekind, 1888, §66)

मुख्यतः अत्यंत कठोर गणितीय प्रमाणों से बनी पुस्तक के बीच ऐसी बात मिलना सचमुच आश्चर्यजनक है। यहाँ दो टिप्पणियाँ करना उचित होगा।

पहली: इस "प्रमाण" में लगभग कुछ भी ऐसा नहीं है जिसे आज हम "गणितीय" स्वरूप का मानेंगे। इसमें मनोवैज्ञानिक वस्तुओं (विचारों) की चर्चा होती है, और वह भी केवल *संभव* विचारों की।

दूसरी: कम-से-कम डेडेकिंड बीजगणितों को हमने जिस रूप में प्रस्तुत किया है, उसमें इस "प्रमाण" की एक सीधी तकनीकी कमी है। यदि डेडेकिंड का तर्क सफल है, तो वह केवल इतना स्थापित करता है कि अनंत संख्या में वस्तुएँ हैं (विशेषतः, अनंत संख्या में विचार)। किंतु डेडेकिंड को यह मानने का कारण भी देना होगा कि S एक अकेला *समुच्चय* है जिसके अवयव अनंत संख्या में हैं, न कि S का आशय बहुवचन में केवल *कुछ वस्तुओं* से है।

डेडेकिंड ने यहाँ कोई अंतराल नहीं देखा; इससे संकेत मिल सकता है कि उनका "समष्टि" शब्द का प्रयोग *हमारे* "समुच्चय" शब्द के प्रयोग से ठीक-ठीक मेल नहीं खाता।[1] लेकिन इसमें बहुत आश्चर्य नहीं होगा। पिछले दो अध्यायों में हमने जो परियोजना अपनाई है—प्राकृत संख्याओं का एक "निर्माण", और उनसे पूर्णांकों, वास्तविक संख्याओं तथा परिमेय संख्याओं का "निर्माण"—वह पूरी तरह सरल ढंग से की गई है। जब जिस समुच्चय की जरूरत पड़ी, हमने उसे मान लिया; हमने इस बारे में बहुत कम सामान्य सिद्धांत दिए कि ठीक कौन-से समुच्चय अस्तित्व में हैं और कब। पर हम जानते हैं कि हमें *कुछ* सामान्य सिद्धांत चाहिए, अन्यथा हम रसेल के विरोधाभास में पड़ जाएँगे।

अब अपने भोलेपन से आगे बढ़ने का समय आ गया है।

6.5 परिशिष्ट: श्रोडर–बर्नस्टीन का प्रमाण

सरल समुच्चय-सिद्धांत से विदा लेने से पहले हमें एक अंतिम सरल (पर परिष्कृत!) प्रमाण पर विचार करना है। यह श्रोडर–बर्नस्टीन (प्रमेय 4.25) का प्रमाण है: यदि $A \preceq B$ और $B \preceq A$, तो $A \approx B$; अर्थात् एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to A$ दिए जाने पर कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $h\colon A \to B$ होता है।

इस अध्याय में हमने डेडेकिंड की *संवृतियों* की धारणा अपनाई। वास्तव में डेडेकिंड ने इसी धारणा के सहारे श्रोडर–बर्नस्टीन का एक सुंदर प्रमाण दिया था, जिसे हम यहाँ प्रस्तुत करेंगे। यदि आप कुछ भिन्न किंतु मूलतः समान विवेचन चाहते हैं, तो यह प्रमाण Potter (2004, पृ. 157–8) का निकटता से अनुसरण करता है। थोड़ी-सी ऑनलाइन खोज

[1] दरअसल, ऐसा सोचने के हमारे पास दूसरे कारण भी हैं; Potter (2004, पृ. 23) देखें।

भी आपको विश्वास दिला देगी कि यह ऐसा प्रमेय है—कुछ-कुछ $\sqrt{2}$ की अपरिमेयता जैसा—जिसके *अनेक* रोचक और भिन्न प्रमाण हैं।

परिभाषा 6.2 जैसी संकेतन-पद्धति का उपयोग करते हुए, रखें

$$\mathrm{Clo}_f(B) = \bigcap\{X : B \subseteq X \text{ और } X,\ f\text{-संवृत है}\}$$

प्रत्येक समुच्चय B और फलन f के लिए। इस प्रकार परिभाषित $\mathrm{Clo}_f(B)$ लघुतम f-संवृत समुच्चय है जो B को समाविष्ट करता है, इस अर्थ में कि:

सहायक प्रमेय 6.8. *किसी भी फलन f और किसी भी B के लिए:*

1. $B \subseteq \mathrm{Clo}_f(B)$*; और*
2. $\mathrm{Clo}_f(B)$*, f-संवृत है; और*
3. *यदि X, f-संवृत है और $B \subseteq X$, तो $\mathrm{Clo}_f(B) \subseteq X$।*

प्रमाण. ठीक सहायक प्रमेय 6.3 के प्रमाण की तरह। □

श्रोडर–बर्नस्टीन तक पहुँचने के लिए हमें एक अंतिम तथ्य चाहिए:

प्रतिज्ञप्ति 6.9. *यदि $A \subseteq B \subseteq C$ और $A \approx C$, तो $A \approx B \approx C$।*

प्रमाण. कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon C \to A$ दिए जाने पर $F = \mathrm{Clo}_f(C \setminus B)$ रखें और फलन g, जिसका प्रांत C है, इस प्रकार परिभाषित करें:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{यदि } x \in F \\ x & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हम दिखाएँगे कि $g, C \to B$ से कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है; इससे यह निष्कर्ष निकलेगा कि $g \circ f^{-1}\colon A \to B$ कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है और प्रमाण पूरा हो जाएगा।

पहले हमारा दावा है कि यदि $x \in F$ किंतु $y \notin F$, तो $g(x) \neq g(y)$। प्रति-विरोध के लिए इसका उलटा मान लें, जिससे $y = g(y) = g(x) = f(x)$। चूँकि $x \in F$ और सहायक प्रमेय 6.8 के अनुसार F, f-संवृत है, इसलिए $y = f(x) \in F$; यह विरोधाभास है।

अब मान लें $g(x) = g(y)$। अतः ऊपर के अनुसार $x \in F$ तभी और केवल तभी जब $y \in F$। यदि $x, y \in F$, तो $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$, अतः $x = y$, क्योंकि f कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। यदि $x, y \notin F$, तो $x = g(x) = g(y) = y$। अतः g कोई एकैकी प्रतिचित्रण है।

केवल यह दिखाना शेष है कि $\mathrm{ran}(g) = B$। अतः कोई $x \in B \subseteq C$ लें। यदि $x \notin F$, तो $g(x) = x$। यदि $x \in F$, तो $x = f(y)$ किसी ऐसे $y \in F$ के लिए; अन्यथा $F \setminus \{x\}$, f-संवृत होता और $C \setminus B$ को समाविष्ट करता, जो सहायक प्रमेय 6.8 के अनुसार असंभव है। अब $g(y) = f(y) = x$। □

अंततः मुख्य परिणाम का प्रमाण प्रस्तुत है। याद रखें कि किसी फलन h और समुच्चय D के लिए हम $h[D] = \{h(x) : x \in D\}$ परिभाषित करते हैं।

श्रोडर–बर्नस्टीन का प्रमाण. मान लें $f\colon A \to B$ और $g\colon B \to A$, एकैकी प्रतिचित्रण हैं। चूँकि $f[A] \subseteq B$, इसलिए $g[f[A]] \subseteq g[B] \subseteq A$। साथ ही $g \circ f\colon A \to g[f[A]]$, एकैकी प्रतिचित्रण है, क्योंकि g और f दोनों ऐसे हैं; और वास्तव में $g \circ f$ कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, केवल उस ढंग से जिसके अनुसार हमने इसका सहप्रांत परिभाषित किया है। अतः $g[f[A]] \approx A$, और इसलिए प्रतिज्ञप्ति 6.9 से कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $h\colon A \to g[B]$ है। इसके अतिरिक्त g^{-1} कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $g[B] \to B$ है। अतः $g^{-1} \circ h\colon A \to B$ कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। □

खण्ड II

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र

इस भाग में शास्त्रीय प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की सामग्री है। पहला अध्याय अपेक्षाकृत प्रारंभिक है और केवल परिभाषाएँ तथा परिणाम सूचीबद्ध करता है; अनेक प्रमाण पूरे करने के स्थान पर अभ्यास के रूप में छोड़े गए हैं। प्रमाण प्रणालियों और पूर्णता प्रमेय की सामग्री प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र वाले भाग से, "FOL" टैग को असत्य रखकर, सम्मिलित की गई है। इससे विधेयों, पदों और परिमाणकों से संबंधित सब कुछ बाहर हो जाता है तथा संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ की चर्चा को सत्य-मूल्यांकनों $\mathfrak{v}$ की चर्चा से बदल दिया जाता है।

इस भाग में अधिक विवरण जोड़कर विस्तार करने और सत्यता-फलनीय पूर्णता जैसे अन्य विषय तथा परिणाम जोड़ने की योजना है।

अध्याय 7

वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान

यह केवल परिभाषाओं का अत्यंत संक्षिप्त सारांश है। इसे सूत्रों पर आगमन द्वारा प्रमाणों का सहज परिचय और बहुत अधिक उदाहरण देने के लिए विस्तृत किया जाना चाहिए।

7.1 परिचय

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र उन सूत्रों का अध्ययन करता है जो प्रतिज्ञप्ति चरों से प्रतिज्ञप्ति संयोजकों $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ और $\leftrightarrow$ का उपयोग करके बनाए जाते हैं। सहज रूप से, प्रतिज्ञप्ति चर p किसी ऐसे वाक्य या प्रतिज्ञप्ति का स्थान लेता है जो सत्य या असत्य हो। किसी प्रतिज्ञप्ति चर का "सत्य-मूल्य" किसी सूत्र में निर्धारित होते ही, उससे प्रतिज्ञप्ति संयोजकों द्वारा बने सभी सूत्रों का सत्य-मूल्य भी निर्धारित हो जाता है। हम कहते हैं कि प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र *सत्य-फलनीय* है, क्योंकि उसका अर्थविज्ञान सत्य-मूल्यों के फलनों द्वारा दिया जाता है। विशेषतः प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र में हम सत्यता और असत्यता के किसी अतिरिक्त निर्धारण पर विचार नहीं करते; जैसे, कोई बात केवल सांयोगिक रूप से सत्य होने के बजाय अनिवार्य रूप से सत्य है या नहीं, किसी बात का सत्य होना ज्ञात है या नहीं, अथवा कोई बात अभी सत्य है न कि पहले सत्य थी या आगे सत्य होगी। हम केवल दो सत्य-मूल्य—सत्य ($\mathbb{T}$) और असत्य ($\mathbb{F}$)—मानते हैं; इसलिए हम इस संभावना को चर्चा से बाहर रखते हैं कि कोई कथन न सत्य हो न असत्य, या केवल आधा सत्य हो। हम केवल ऐसे संयोजकों पर भी ध्यान देते हैं जिनसे बने सूत्र का सत्य-मूल्य उसके अवयवों के सत्य-मूल्यों से पूरी तरह निर्धारित होता है (न कि, मसलन, उसके अर्थ से)। विशेषतः, अंग्रेज़ी के सशर्त वाक्यों का सत्य-मूल्य इस अर्थ में सत्य-फलनीय है या नहीं, यह विवादास्पद है। शाब्दिक आपादन $\rightarrow$ सत्य-फलनीय है; अन्य तर्क-पद्धतियाँ ऐसे सशर्त वाक्यों का अध्ययन करती हैं जो सत्य-फलनीय नहीं होते।

सत्य-फलनीय प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के सिद्धांत और अधिसिद्धांत को विकसित करने के लिए हमें पहले उसकी अभिव्यक्तियों के वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान को परिभाषित करना होगा। हम सूत्रों को प्रतिज्ञप्ति चरों से संयोजकों का उपयोग करके बनाने का एक ढंग बताएँगे। वैकल्पिक परिभाषाएँ भी संभव हैं। अन्य पद्धतियाँ भिन्न प्रतीक चुनेंगी, संयोजकों के भिन्न समुच्चयों को आदिम मानेंगी, और कोष्ठकों का भिन्न प्रकार से उपयोग करेंगी (या तथाकथित पोलिश संकेतन की तरह उनका बिल्कुल उपयोग नहीं करेंगी)। फिर भी सभी दृष्टिकोणों में यह बात समान है कि निर्माण-नियम सूत्रों के समुच्चय को *आगमनात्मक रूप से* परिभाषित करते हैं। परिभाषा ठीक ढंग से दी गई हो तो निर्माण-नियमों के अनुसार प्रत्येक अभिव्यक्ति मूलतः केवल एक ही प्रकार से बन सकती है। अभिव्यक्तियों को *अद्वितीय रूप से पठनीय* बनाने वाली आगमनात्मक परिभाषा के कारण हम उसी विधि—आगमनात्मक परिभाषा—से इन अभिव्यक्तियों को अर्थ दे सकते हैं।

अभिव्यक्तियों को अर्थ देना अर्थविज्ञान का क्षेत्र है। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के अर्थविज्ञान की केंद्रीय धारणा किसी सत्य-मूल्यांकन में संतुष्टि की धारणा है। सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ प्रतिज्ञप्ति चरों को सत्य-मूल्य $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$ देता है। कोई भी सत्य-मूल्यांकन सत्य-मूल्य $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi)$ निर्धारित करता है—किसी भी सूत्र φ के लिए। कोई सूत्र, सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ में तभी और केवल तभी संतुष्ट होता है जब $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$—इसे हम $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ लिखते हैं। इस संबंध को भी तार्किक संयोजकों के

सत्य-फलनों का उपयोग करते हुए φ की संरचना पर आगमन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है; उदाहरणार्थ, $\varphi \wedge \psi$ की संतुष्टि को φ और ψ की संतुष्टि (या असंतुष्टि) के आधार पर परिभाषित किया जाता है।

वाक्यों के लिए संतुष्टि-संबंध $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ के आधार पर हम पुनरुक्ति, तार्किक परिणाम और संतुष्टता की मूल अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ परिभाषित कर सकते हैं। कोई सूत्र पुनरुक्ति है, $\vDash \varphi$, यदि प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन उसे संतुष्ट करता है; अर्थात् $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ किसी भी $\mathfrak{v}$ के लिए। सूत्रों का कोई समुच्चय किसी सूत्र को तार्किकतः निष्पन्न करता है, $\Gamma \vDash \varphi$, यदि प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन, जो Γ के सभी सूत्रों को संतुष्ट करता है, φ को भी संतुष्ट करता है। और सूत्रों का कोई समुच्चय संतुष्ट है यदि कोई सत्य-मूल्यांकन उसमें उपस्थित सभी सूत्रों को एक साथ संतुष्ट करता हो। क्योंकि सूत्रों आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं और संतुष्टि भी सूत्रों की संरचना पर आगमन द्वारा परिभाषित है, हम अपने अर्थविज्ञान के गुणधर्म सिद्ध करने तथा परिभाषित अर्थवैज्ञानिक धारणाओं के बीच संबंध स्थापित करने के लिए आगमन का उपयोग कर सकते हैं।

7.2 प्रतिज्ञप्ति सूत्र

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र में सूत्रों का निर्माण *प्रतिज्ञप्ति चरों*, प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\bot$ तथा प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\top$ और *तार्किक संयोजकों* से होता है।

1. गणनीय अनंत समुच्चय At_0, जिसमें प्रतिज्ञप्ति चरों p_0, p_1, ...हैं।
2. असत्यता के लिए प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\bot$।
3. सत्यता के लिए प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\top$।
4. तार्किक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)
5. विराम-चिह्न: (,), और अल्पविराम।

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की इस भाषा को हम $\mathcal{L}_0$ से निरूपित करते हैं।

हो सकता है कि आप ऊपर प्रयुक्त पदावली और प्रतीकों से भिन्न रूपों से परिचित हों। तर्कशास्त्र की पुस्तकों (और शिक्षकों) में "निषेध" के लिए प्रायः $\sim$, $\neg$, और ! तथा "संयोजन" के लिए $\wedge$, $\cdot$, और & प्रयुक्त होते हैं। "आपादन" या "निहितार्थ" के लिए सामान्यतः $\rightarrow$, $\Rightarrow$, और $\supset$ प्रतीक प्रयुक्त होते हैं। "द्विशर्त," "द्वि-आपादन," या "(शाब्दिक) तुल्यता" के प्रतीक $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, और $\equiv$ हैं। $\bot$ प्रतीक को अलग-अलग प्रसंगों में "असत्यता," "असत्य," "असंगति," या "तल" कहा जाता है। $\top$ प्रतीक को अलग-अलग प्रसंगों में "सत्यता," "सत्य," या "शीर्ष" कहा जाता है।

परिभाषा 7.1 (सूत्र). प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के *सूत्रों* का समुच्चय $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित है:

1. $\bot$ एक परमाणु सूत्र है।
2. $\top$ एक परमाणु सूत्र है।
3. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p_i एक परमाणु सूत्र है।
4. यदि φ सूत्र है, तो $\neg\varphi$ भी सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्रों में से हों, तो $(\varphi \wedge \psi)$ भी सूत्र है।
6. यदि φ और ψ सूत्रों में से हों, तो $(\varphi \vee \psi)$ भी सूत्र है।
7. यदि φ और ψ सूत्रों में से हों, तो $(\varphi \rightarrow \psi)$ भी सूत्र है।
8. यदि φ और ψ सूत्रों में से हों, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ भी सूत्र है।

9. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

सूत्रों की यह परिभाषा एक *आगमनात्मक परिभाषा* है। मूलतः हम सूत्रों का समुच्चय अनंत चरणों में बनाते हैं। आरंभिक चरण में हम सभी परमाणु सूत्रों को सूत्र घोषित करते हैं; यह परिभाषा के आरंभिक मामलों—अर्थात् इनके लिए दिए मामलों—के अनुरूप है: $\top$, $\bot$, p_i. अतः "परमाण्विक सूत्र" का अर्थ इस रूप का कोई भी सूत्र है।

परिभाषा के अन्य मामले नए सूत्रों के निर्माण के नियम देते हैं, जिनमें पहले से निर्मित सूत्रों का उपयोग होता है। दूसरे चरण में हम इन नियमों से सूत्रों का निर्माण परमाणु सूत्रों से कर सकते हैं। तीसरे चरण में हम परमाणु सूत्रों और दूसरे चरण में प्राप्त सूत्रों से नए सूत्र बनाते हैं, और यह क्रम आगे चलता है। सूत्र वही और केवल वही है जो अंततः ऐसे किसी चरण में बनाया जाता है।

सूत्र $(\psi * \chi)$ को लिखते समय, जो ψ, χ से दो-स्थानी संयोजक $*$ का उपयोग करके बना है, हम प्रायः सबसे बाहरी कोष्ठक-युग्म छोड़कर केवल $\psi * \chi$ लिखेंगे।

परिभाषा 7.2 (वाक्यविन्यासगत समानता). प्रतीक $\equiv$ बताता है कि दो प्रतीक-शृंखलाएँ विन्यास में समान हैं; अर्थात् $\varphi \equiv \psi$ तभी और केवल तभी, जब φ और ψ समान लंबाई की प्रतीक-शृंखलाएँ हों और प्रत्येक स्थान पर उनमें एक ही प्रतीक हो।

प्रतीक $\equiv$ के दोनों ओर संयोजन से प्राप्त शृंखलाएँ रखी जा सकती हैं। उदाहरणतः, $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ का अर्थ है: प्रतीक-शृंखला φ वही शृंखला है जो इसी क्रम में आरंभिक कोष्ठक, शृंखला ψ, प्रतीक $\vee$, शृंखला χ, और अंतिम कोष्ठक को जोड़ने से प्राप्त होती है। यदि ऐसा है, तो हम जानते हैं कि φ का पहला प्रतीक आरंभिक कोष्ठक है, φ में ψ एक उपशृंखला के रूप में (दूसरे प्रतीक से आरंभ होकर) आता है, उसके बाद $\vee$ आता है, आदि।

7.3 प्रारंभिक तथ्य

प्रमेय 7.3 (*सूत्रों पर आगमन का सिद्धांत*). *यदि कोई गुणधर्म P सभी परमाणु सूत्रों के लिए सत्य है और ऐसा है कि*

1. *वह $\neg\varphi$ के लिए सत्य हो, जब भी वह φ के लिए सत्य हो;*
2. *वह $(\varphi \wedge \psi)$ के लिए सत्य हो, जब भी वह φ और ψ के लिए सत्य हो;*
3. *वह $(\varphi \vee \psi)$ के लिए सत्य हो, जब भी वह φ और ψ के लिए सत्य हो;*
4. *वह $(\varphi \to \psi)$ के लिए सत्य हो, जब भी वह φ और ψ के लिए सत्य हो;*
5. *वह $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ के लिए सत्य हो, जब भी वह φ और ψ के लिए सत्य हो;*

तो P सभी सूत्रों के लिए सत्य है।

प्रमाण. S उन सभी सूत्रों का संग्रह हो जिनमें गुणधर्म P है। स्पष्टतः $S \subseteq \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$। S परिभाषा 7.1 की सभी शर्तें पूरी करता है: उसमें सभी परमाणु सूत्रों हैं और वह संक्रियकों के अंतर्गत संवृत है। $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ ऐसा सबसे छोटा वर्ग है, इसलिए $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0) \subseteq S$। अतः $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0) = S$, और प्रत्येक सूत्र में गुणधर्म P है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 7.4. *प्रत्येक सूत्र, जो $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में हो, संतुलित है: उसमें बाएँ और दाएँ कोष्ठकों की संख्या समान है।*

प्रतिज्ञप्ति 7.5. *सूत्र का कोई उचित आरंभिक खंड स्वयं सूत्र नहीं है।*

प्रतिज्ञप्ति 7.6 (अद्वितीय पठनीयता). *किसी भी सूत्र φ का, जो $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में हो, निम्नलिखित रूपों में ठीक एक वाक्यविन्यास-विश्लेषण होता है:*

1. $\bot$।

2. $\top$।

3. p_n, *जहाँ कोई* $p_n \in \mathrm{At}_0$ *लिया गया हो।*

4. $\neg\psi$, *जहाँ कोई सूत्र* ψ *लिया गया हो।*

5. $(\psi \wedge \chi)$, *जहाँ सूत्रों में से* ψ *और* χ *लिए गए हों।*

6. $(\psi \vee \chi)$, *जहाँ सूत्रों में से* ψ *और* χ *लिए गए हों।*

7. $(\psi \to \chi)$, *जहाँ सूत्रों में से* ψ *और* χ *लिए गए हों।*

8. $(\psi \leftrightarrow \chi)$, *जहाँ सूत्रों में से* ψ *और* χ *लिए गए हों।*

इसके अतिरिक्त यह विश्लेषण अद्वितीय *है।*

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा। उदाहरण के लिए, मानें कि φ के दो भिन्न विश्लेषण $(\psi \to \chi)$ और $(\psi' \to \chi')$ हैं। तब ψ और ψ' समान होने चाहिए (अन्यथा उनमें से एक दूसरे का उचित आरंभिक खंड होगा); अतः यदि φ के दोनों विश्लेषण भिन्न हों, तो इसका कारण यही होगा कि χ और χ' एक ही प्रतीक-शृंखला के भिन्न विश्लेषण हैं, जो आगमनात्मक परिकल्पना से असंभव है। □

परिभाषा 7.7 (एकसमान प्रतिस्थापन). यदि φ और ψ सूत्रों में से हों, और p_i कोई प्रतिज्ञप्ति चर हो, तो $\varphi[\psi/p_i]$ उस परिणाम को निरूपित करता है जो p_i की प्रत्येक उपस्थिति को ψ की एक उपस्थिति से φ में बदलने पर मिलता है; इसी प्रकार p_1, ..., p_n का प्रतिस्थापन करने के लिए सूत्रों में से क्रमशः ψ_1, ..., ψ_n लेकर युगपत परिणाम इस प्रकार निरूपित किया जाता है: $\varphi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_n/p_n]$.

7.4 निर्माण अनुक्रम

सूत्रों को आगमनात्मक परिभाषा से परिभाषित करना, और उसकी पूरक विधि के रूप में आगमन द्वारा सूत्रों के गुणधर्म सिद्ध करना, सुरुचिपूर्ण और कुशल दृष्टिकोण है। किंतु सूत्रों के निर्माण को मूल अवयवों से चरण-दर-चरण देखना भी उपयोगी हो सकता है; यहाँ हम इसके लिए *निर्माण अनुक्रम* की धारणा का उपयोग करेंगे।

परिभाषा 7.8 (सूत्रों के निर्माण अनुक्रम). परिमित अनुक्रम $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ में प्रत्येक पद भाषा $\mathcal{L}_0$ के प्रतीकों की शृंखला हो। यह φ का *निर्माण अनुक्रम* है यदि $\varphi \equiv \varphi_n$ और प्रत्येक $i \leq n$ के लिए या तो φ_i परमाणु सूत्र हो, अथवा ऐसे $j, k < i$ हों कि निम्नलिखित में से कोई एक शर्त पूरी हो:

1. $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$।

2. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$।

3. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$।

4. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$।

5. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$।

उदाहरण 7.9.

$$\langle p_0, p_1, (p_1 \wedge p_0), \neg(p_1 \wedge p_0) \rangle$$

यह $\neg(p_1 \wedge p_0)$ का एक निर्माण अनुक्रम है, और यह भी:

$$\langle p_0, p_1, p_0, (p_1 \wedge p_0), (p_0 \to p_1), \neg(p_1 \wedge p_0) \rangle.$$

दूसरे उदाहरण से स्पष्ट है कि निर्माण अनुक्रमों में "अनावश्यक अंश" हो सकते हैं: ऐसे सूत्र जो अतिरिक्त हों या निर्माण में कोई योगदान न दें।

प्रतिज्ञप्ति 7.10. *जो भी सूत्र φ, $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में हो, उसका एक निर्माण अनुक्रम है।*

प्रमाण. मानें कि φ परमाणु है। तब अनुक्रम $\langle\varphi\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है। अब मानें कि ψ और χ के निर्माण अनुक्रम क्रमशः $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n\rangle$ और $\langle\chi_0,\ldots,\chi_m\rangle$ हैं।

1. यदि $\varphi \equiv \neg\psi$ हो, तो $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n,\neg\psi_n\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है।
2. यदि $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ हो, तो $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n,\chi_0,\ldots,\chi_m,(\psi_n \wedge \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है।
3. यदि $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ हो, तो $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n,\chi_0,\ldots,\chi_m,(\psi_n \vee \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है।
4. यदि $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ हो, तो $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n,\chi_0,\ldots,\chi_m,(\psi_n \to \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है।
5. यदि $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$ हो, तो $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n,\chi_0,\ldots,\chi_m,(\psi_n \leftrightarrow \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण अनुक्रम है।

सूत्रों पर आगमन के सिद्धांत से प्रत्येक सूत्र का एक निर्माण अनुक्रम है। □

हम इसका विलोम भी सिद्ध कर सकते हैं। यह महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि इससे पता चलता है कि सूत्रों को परिभाषित करने की हमारी दोनों विधियाँ समतुल्य हैं: वे समान परिणाम देती हैं। इसका यह भी अर्थ है कि हम निर्माण अनुक्रमों की लंबाई पर साधारण आगमन का उपयोग करके सूत्रों के विषय में प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं।

सहायक प्रमेय 7.11. *मानें कि $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_n\rangle$, φ_n का निर्माण अनुक्रम है और $k \leq n$। तब $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_k\rangle$, φ_k का निर्माण अनुक्रम है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रमेय 7.12. $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ *भाषा $\mathcal{L}_0$ की उन सभी प्रतीक-शृंखलाओं का समुच्चय है जिनका कोई निर्माण अनुक्रम है।*

प्रमाण. F भाषा $\mathcal{L}_0$ की उन सभी प्रतीक-शृंखलाओं का समुच्चय हो जिनका कोई निर्माण अनुक्रम है। प्रतिज्ञप्ति 7.10 में हम देख चुके हैं कि $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0) \subseteq F$, इसलिए अब हम विलोम सिद्ध करते हैं।

मानें कि φ का निर्माण अनुक्रम $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_n\rangle$ है। हम सिद्ध करते हैं कि $\varphi \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$; इसके लिए n पर प्रबल आगमन करते हैं। हमारी आगमनात्मक परिकल्पना है कि लंबाई $m < n$ वाला निर्माण अनुक्रम रखने वाली प्रत्येक प्रतीक-शृंखला $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में है। निर्माण अनुक्रम की परिभाषा से या तो φ_n परमाणु है, अथवा ऐसे $j, k < n$ अवश्य हैं कि निम्नलिखित में से कोई एक स्थिति हो:

1. $\varphi_n \equiv \neg\varphi_j$।
2. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$।
3. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$।
4. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$।
5. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$।

अब हम स्थितियों के अनुसार तर्क करते हैं। यदि φ_n परमाणु है, तो $\varphi_n \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$। अन्यथा मानें कि $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$। सहायक प्रमेय 7.11 से $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_j\rangle$ और $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_k\rangle$ क्रमशः φ_j और φ_k के निर्माण अनुक्रम हैं। चूँकि ये φ के निर्माण अनुक्रम के उचित आरंभिक उप-अनुक्रम हैं, इन दोनों की लंबाई n से कम है। अतः आगमनात्मक परिकल्पना से φ_j और φ_k, $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में हैं; इसलिए सूत्र की परिभाषा से $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ भी उसमें है। अन्य स्थितियाँ समानांतर तर्क से सिद्ध होती हैं। □

7.5 सत्य-मूल्यांकन और संतुष्टि

परिभाषा 7.13 (सत्य-मूल्यांकन). $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ दो सत्य-मूल्यों, "सत्य" और "असत्य", का समुच्चय हो। $\mathcal{L}_0$ के लिए *सत्य-मूल्यांकन* वह फलन $\mathfrak{v}$ है जो भाषा के प्रतिज्ञप्ति चरों में से प्रत्येक को $\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$ देता है; अर्थात् $\mathfrak{v}\colon \mathrm{At}_0 \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$।

परिभाषा 7.14. दिए गए सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए मूल्य-फलन $\overline{\mathfrak{v}}\colon \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0) \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ को निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित करें:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{v}}(\bot) &= \mathbb{F};\\
\overline{\mathfrak{v}}(\top) &= \mathbb{T};\\
\overline{\mathfrak{v}}(p_n) &= \mathfrak{v}(p_n);\\
\overline{\mathfrak{v}}(\neg\varphi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F};\\ \mathbb{F} & \text{अन्यथा।}\end{cases}\\
\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \wedge \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ और } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{T};\\ \mathbb{F} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ या } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{F}.\end{cases}\\
\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \vee \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ या } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{T};\\ \mathbb{F} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ और } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{F}.\end{cases}\\
\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \to \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ या } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{T};\\ \mathbb{F} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ और } \overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{F}.\end{cases}\\
\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \overline{\mathfrak{v}}(\psi);\\ \mathbb{F} & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) \neq \overline{\mathfrak{v}}(\psi).\end{cases}
\end{aligned}$$

ये खंड निम्नलिखित सत्यता-सारणियों के अनुरूप हैं:

φ	$\neg\varphi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

प्रमेय 7.15 (स्थानीय निर्धारण). *मानें कि $\mathfrak{v}_1$ और $\mathfrak{v}_2$ सत्य-मूल्यांकन हैं और φ में आने वाले प्रतिज्ञप्ति चरों पर सहमत हैं; अर्थात् $\mathfrak{v}_1(p_n) = \mathfrak{v}_2(p_n)$, जब भी p_n किसी सूत्र φ में आए। तब $\overline{\mathfrak{v}_1}$ और $\overline{\mathfrak{v}_2}$ भी φ पर सहमत हैं; अर्थात् $\overline{\mathfrak{v}_1}(\varphi) = \overline{\mathfrak{v}_2}(\varphi)$।*

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा। □

परिभाषा 7.16 (संतुष्टि). हम *सूत्र φ की सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ द्वारा संतुष्टि* की धारणा $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ को निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित कर सकते हैं। (हम $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$ को "$\mathfrak{v} \vDash \varphi$ नहीं" के अर्थ में लिखते हैं।)

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$।
3. $\varphi \equiv p_i$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v}(p_i) = \mathbb{T}$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \nvDash \psi$।
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \vDash \psi$ और $\mathfrak{v} \vDash \chi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \vDash \psi$ या $\mathfrak{v} \vDash \chi$ (या दोनों)।
7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \nvDash \psi$ या $\mathfrak{v} \vDash \chi$ (या दोनों)।
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब या तो $\mathfrak{v} \vDash \psi$ और $\mathfrak{v} \vDash \chi$ दोनों, अथवा न $\mathfrak{v} \vDash \psi$ न $\mathfrak{v} \vDash \chi$।

यदि Γ सूत्रों का कोई समुच्चय है, तो $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$ तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ प्रत्येक $\varphi \in \Gamma$ के लिए सत्य हो।

प्रतिज्ञप्ति 7.17. $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ *तभी और केवल तभी, जब* $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$*।*

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा। □

7.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ

हम निम्नलिखित अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ परिभाषित करते हैं:

परिभाषा 7.18.

1. सूत्र φ *संतुष्टनीय* है यदि किसी ऐसे $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ हो; वह *असंतुष्टनीय* है यदि किसी भी $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ न हो;
2. सूत्र φ *पुनरुक्ति* है यदि $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ सभी सत्य-मूल्यांकनों $\mathfrak{v}$ के लिए सत्य हो;
3. सूत्र φ *आपातिक* है यदि वह संतुष्टनीय है लेकिन पुनरुक्ति नहीं है;
4. यदि Γ सूत्रों का कोई समुच्चय है, तो $\Gamma \vDash \varphi$ ("Γ से φ तार्किकतः निष्पन्न है") तभी और केवल तभी, जब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ उन सभी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए सत्य हो जिनके लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$ हो।
5. यदि Γ सूत्रों का कोई समुच्चय है, तो Γ *संतुष्टनीय* है यदि कोई सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ ऐसा हो जिसके लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$ हो; अन्यथा Γ *असंतुष्टनीय* है।

प्रतिज्ञप्ति 7.19.

1. *φ तभी और केवल तभी पुनरुक्ति है, जब $\emptyset \vDash \varphi$;*
2. *यदि $\Gamma \vDash \varphi$ और $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, तो $\Gamma \vDash \psi$;*
3. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय भी संतुष्टनीय है;*
4. *एकदिष्टता: यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Delta \vDash \varphi$ भी;*
5. *संक्रामकता: यदि $\Gamma \vDash \varphi$ और $\Delta \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vDash \psi$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 7.20. $\Gamma \vDash \varphi$ *तभी और केवल तभी, जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *असंतुष्टनीय हो।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रमेय 7.21 (अर्थवैज्ञानिक निगमन प्रमेय). $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$ *तभी और केवल तभी, जब* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ *।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रश्न

प्रश्न 7.1. प्रतिज्ञप्ति 7.4 सिद्ध करें।

प्रश्न 7.2. प्रतिज्ञप्ति 7.5 सिद्ध करें।

प्रश्न 7.3. नीचे दिए पाँच सूत्रों में से प्रत्येक के लिए निर्धारित करें कि क्या वह सूत्र किसी प्रतिस्थापन $\varphi[\psi/p_i]$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ φ क्रमशः (i) p_0; (ii) $(\neg p_0 \wedge p_1)$; और (iii) $((\neg p_0 \to p_1) \wedge p_2)$ है। प्रत्येक स्थिति में उपयुक्त प्रतिस्थापन बताएँ।

1. p_1
2. $(\neg p_0 \wedge p_0)$
3. $((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$
4. $\neg((p_0 \to p_1) \wedge p_2)$
5. $((\neg(p_0 \to p_1) \to (p_0 \vee p_1)) \wedge \neg(p_0 \wedge p_1))$

प्रश्न 7.4. $\varphi[\psi/p]$ की आगमन द्वारा गणितीय रूप से कठोर परिभाषा दें।

प्रश्न 7.5. $\mathcal{L}_0$ में एक त्रिस्थानी संयोजक $\Diamond$ जोड़ने पर विचार करें, जिसका मूल्यांकन इस प्रकार दिया गया है:

$$\overline{\mathfrak{v}}(\Diamond(\varphi, \psi, \chi)) = \begin{cases} \overline{\mathfrak{v}}(\psi) & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}; \\ \overline{\mathfrak{v}}(\chi) & \text{यदि } \overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F}. \end{cases}$$

इस संयोजक की सत्यता-सारणी लिखें।

प्रश्न 7.6. प्रतिज्ञप्ति 7.17 सिद्ध करें।

प्रश्न 7.7. नीचे दिए चारों सूत्रों में प्रत्येक के लिए बताएँ कि वह (क) संतुष्टनीय, (ख) पुनरुक्ति और (ग) आपातिक है या नहीं।

1. $(p_0 \to (\neg p_1 \to \neg p_0))$.
2. $((p_0 \wedge \neg p_1) \to (\neg p_0 \wedge p_2)) \leftrightarrow ((p_2 \to p_0) \to (p_0 \to p_1))$.
3. $(p_0 \leftrightarrow p_1) \to (p_2 \leftrightarrow \neg p_1)$.
4. $((p_0 \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge p_2)) \vee (p_2 \to (p_0 \leftrightarrow p_1)))$.

प्रश्न 7.8. प्रतिज्ञप्ति 7.19 सिद्ध करें।

प्रश्न 7.9. प्रतिज्ञप्ति 7.20 सिद्ध करें।

प्रश्न 7.10. प्रमेय 7.21 सिद्ध करें।

अध्याय 8

व्युत्पत्ति-तंत्र

यह अध्याय व्युत्पत्ति-तंत्रों की सामान्य सामग्री एकत्र करता है। किसी विशिष्ट तंत्र का उपयोग करने वाली पाठ्यपुस्तक उस तंत्र को प्रस्तुत करने वाले अध्याय के आरंभ में परिचय खंड और संबंधित सर्वेक्षण खंड जोड़ सकती है।

8.1 परिचय

तर्कशास्त्रों में सामान्यतः अर्थविज्ञान और व्युत्पत्ति-तंत्र दोनों होते हैं। अर्थविज्ञान सत्य, संतुष्टनीयता, वैधता और तार्किक निष्पत्ति जैसी धारणाओं से संबंधित है। व्युत्पत्ति-तंत्रों का उद्देश्य तार्किक निष्पत्ति और वैधता स्थापित करने की पूर्णतः वाक्यविन्यासगत विधि देना है। वे इस अर्थ में पूर्णतः वाक्यविन्यासगत हैं कि ऐसे तंत्र की व्युत्पत्ति एक परिमित वाक्य-विन्यासगत वस्तु होती है, प्रायः वाक्यों या सूत्रों का अनुक्रम (या कोई अन्य परिमित विन्यास)। अच्छे व्युत्पत्ति-तंत्रों में यह गुण होता है कि वाक्यों या सूत्रों के किसी भी दिए गए अनुक्रम अथवा विन्यास के "सही" होने को यांत्रिक रूप से जाँचा जा सकता है।

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के सबसे सरल (और ऐतिहासिक रूप से प्रथम) व्युत्पत्ति-तंत्र *अभिगृहीतीय* थे। ऐसे तंत्र में सूत्रों का कोई अनुक्रम तभी व्युत्पत्ति माना जाता है, जब उसमें हर अलग सूत्र या तो "अभिगृहीतों" के किसी नियत समुच्चय में हो, अथवा अनुक्रम में उससे पहले आए सूत्रों से नियत संख्या में से किसी "अनुमान-नियम" द्वारा निकलता हो—और यह यांत्रिक रूप से जाँचा जा सकता है कि सूत्र अभिगृहीत है या नहीं तथा वह किसी अनुमान-नियम द्वारा अन्य सूत्रों से ठीक प्रकार निकलता है या नहीं। अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्रों का वर्णन करना आसान है—और अधिसैद्धांतिक रूप से उन्हें सँभालना भी आसान है—लेकिन उनमें व्युत्पत्तियाँ पढ़ना और समझना कठिन है तथा उन्हें बनाना भी कठिन है।

अन्य व्युत्पत्ति-तंत्र इसलिए विकसित किए गए हैं कि व्युत्पत्तियाँ बनाना आसान हो या पूरी हो चुकी व्युत्पत्तियाँ अधिक आसानी से समझ में आएँ। उदाहरण हैं स्वाभाविक निगमन, सत्य-वृक्ष—जिन्हें सारणी-प्रमाण भी कहते हैं—और अनुक्रम-कलन। कुछ व्युत्पत्ति-तंत्र विशेषतः यंत्रीकरण को ध्यान में रखकर बनाए जाते हैं; जैसे, खंड-समाधान विधि को संगणक-कार्यक्रम में लागू करना आसान है (लेकिन उसकी व्युत्पत्तियाँ को समझना लगभग असंभव है)। इन अन्य व्युत्पत्ति-तंत्रों में से अधिकतर में व्युत्पत्तियाँ सूत्रों के अनुक्रमों के बजाय वृक्षों के रूप में प्रस्तुत होती हैं। इससे यह देखना आसान होता है कि व्युत्पत्ति के कौन-से भाग किन दूसरे भागों पर निर्भर हैं।

अतः किसी दिए तर्कशास्त्र—जैसे प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र—के अलग-अलग व्युत्पत्ति-तंत्र इस बात की अलग-अलग स्पष्ट व्याख्याएँ देंगे कि वाक्य का *प्रमेय* होना क्या है और किसी वाक्य का कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न होना क्या है। यह चाहे जिस तरह किया जाए (अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ, स्वाभाविक निगमन, अनुक्रम व्युत्पत्तियाँ, सत्य-वृक्ष या खंड-समाधान द्वारा खंडन), हम चाहते हैं कि ये संबंध वैधता और तार्किक निष्पत्ति की अर्थवैज्ञानिक धारणाओं से मेल खाएँ। $\vdash \varphi$ को "φ एक प्रमेय है" के लिए और "$\Gamma \vdash \varphi$" को "φ, Γ से व्युत्पन्न है" के लिए लिखें। $\vdash$ को चाहे जिस प्रकार परिभाषित करें, हम चाहते हैं कि यह $\vDash$ से मेल खाए; अर्थात्:

1. $\vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\vDash \varphi$

2. $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \varphi$

ऊपर दी गई "केवल तभी" दिशा को *सुदृढ़ता* कहते हैं। व्युत्पत्ति-तंत्र सुदृढ़ है यदि व्युत्पन्नता तार्किक निष्पत्ति (या वैधता) की गारंटी देती है। हर उपयोगी व्युत्पत्ति-तंत्र को सुदृढ़ होना चाहिए; असुदृढ़ व्युत्पत्ति-तंत्र बिल्कुल उपयोगी नहीं होते। आखिर व्युत्पत्ति का पूरा उद्देश्य वैधता या तार्किक निष्पत्ति की वाक्यविन्यासगत गारंटी देना है। हम प्रस्तुत किए गए व्युत्पत्ति-तंत्रों की सुदृढ़ता सिद्ध करेंगे।

इसकी विपरीत "यदि" दिशा भी महत्त्वपूर्ण है; इसे *पूर्णता* कहते हैं। कोई पूर्ण व्युत्पत्ति-तंत्र इतना शक्तिशाली होता है कि जब भी φ वैध हो तब φ के प्रमेय होने को, और $\Gamma \vdash \varphi$ को, जब भी $\Gamma \vDash \varphi$, दिखा सके। पूर्णता स्थापित करना अधिक कठिन है, और कुछ तर्कशास्त्रों के लिए कोई पूर्ण व्युत्पत्ति-तंत्र नहीं होता। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ऐसे तंत्र उपलब्ध हैं। कुर्ट गेडेल (Kurt Gödel) ने अपने 1929 के शोधप्रबंध में प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के व्युत्पत्ति-तंत्र की पूर्णता सबसे पहले सिद्ध की।

व्युत्पत्ति-तंत्रों से जुड़ी एक अन्य धारणा *संगतता* है। वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत कहलाता है यदि उससे कुछ भी व्युत्पन्न किया जा सकता हो; अन्यथा वह संगत है। असंगतता, असंतुष्टनीयता का वाक्यविन्यासगत प्रतिरूप है: असंतुष्टनीय समुच्चयों की तरह, वाक्यों के असंगत समुच्चय अच्छे सिद्धान्त नहीं बनते; उनमें मूलभूत दोष होता है। वाक्यों के संगत समुच्चय सत्य या उपयोगी न भी हों, फिर भी वे तार्किक उपयोगिता की न्यूनतम कसौटी पूरी करते हैं। अलग-अलग व्युत्पत्ति-तंत्रों में वाक्यों के समुच्चयों की संगतता की विशिष्ट परिभाषा अलग हो सकती है; लेकिन $\vdash$ की तरह हम चाहते हैं कि संगतता अपने अर्थवैज्ञानिक प्रतिरूप, संतुष्टनीयता, से मिले। हम चाहते हैं कि सदा Γ संगत तभी और केवल तभी हो जब वह संतुष्टनीय हो। यहाँ "केवल तभी" दिशा पूर्णता के बराबर है (संगतता संतुष्टनीयता की गारंटी देती है), और "यदि" दिशा सुदृढ़ता के बराबर है (संतुष्टनीयता संगतता की गारंटी देती है)। वास्तव में, शास्त्रीय प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में सुदृढ़ता और पूर्णता के दोनों रूप समतुल्य हैं।

8.2 अनुक्रम-कलन

जहाँ अनेक व्युत्पत्ति-तंत्र वाक्यों की विभिन्न व्यवस्थाओं पर कार्य करते हैं, वहीं अनुक्रम-कलन *अनुक्रमों* पर कार्य करता है। अनुक्रम इस रूप का व्यंजक होता है:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_m,$$

अर्थात् यह वाक्यों के दो क्रमों का युग्म है, जिन्हें अनुक्रम-चिह्न $\Rightarrow$ अलग करता है। दोनों में से कोई भी क्रम रिक्त हो सकता है। अनुक्रम-कलन में व्युत्पत्ति अनुक्रमों का एक वृक्ष है। उसके सबसे ऊपर के अनुक्रम विशेष रूप के होते हैं (उन्हें "आरंभिक अनुक्रम" अथवा "अभिगृहीत" कहते हैं), और हर अन्य अनुक्रम अपने ठीक ऊपर के अनुक्रमों से किसी अनुमान-नियम द्वारा निकलता है। अनुमान-नियम या तो अनुक्रमों के वाक्यों को बदलते हैं (बाईं या दाईं ओर उन्हें जोड़कर, हटाकर अथवा पुनर्व्यवस्थित करके), या फिर नियम के निष्कर्ष में कोई जटिल सूत्र प्रस्तुत करते हैं। उदाहरण के लिए, $\wedge$L नियम $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ से $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का अनुमान लगाने देता है; और $\rightarrow$R नियम $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ का अनुमान लगाने देता है, जहाँ Γ, Δ, φ और ψ कोई भी हों। (विशेषतः, Γ और Δ रिक्त हो सकते हैं।)

अनुक्रम-कलन पर आधारित $\vdash$ संबंध की परिभाषा इस प्रकार है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई क्रम Γ_0 ऐसा हो कि हर φ, जो Γ_0 में है, Γ में हो और कोई ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसके मूल पर अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ हो। φ अनुक्रम-कलन में प्रमेय है यदि अनुक्रम $\Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। उदाहरण के लिए, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\,\rightarrow\mathrm{R}$$

अनुक्रम-कलन में समुच्चय Γ असंगत है यदि $\Gamma_0 \Rightarrow$ की कोई व्युत्पत्ति हो (जहाँ हर $\varphi \in \Gamma_0$, Γ में हो और अनुक्रम का दायाँ पक्ष रिक्त हो)। नियम WR का उपयोग करके असंगत समुच्चय से कोई भी वाक्य व्युत्पन्न किया जा सकता है।

अनुक्रम-कलन का आविष्कार गेरहार्ड गेन्ट्सेन ने 1930 के दशक में किया। अपने व्यवस्थित और सममित विन्यास के कारण यह व्युत्पत्तियाँ का सिद्धान्त विकसित करने के लिए अत्यंत उपयोगी औपचारिक ढाँचा है। अनुक्रम-कलन में व्युत्पत्तियाँ खोजना अपेक्षाकृत आसान है, पर ये व्युत्पत्तियाँ प्रायः पढ़ने में कठिन होती हैं और प्रमाणों से इनका संबंध भी कभी-कभी स्पष्ट नहीं होता। फिर भी व्युत्पत्ति-तंत्रों के प्रति यह अत्यंत सुरुचिपूर्ण दृष्टिकोण सिद्ध हुआ है, और अनेक तर्कशास्त्रों के अपने अनुक्रम-कलन तंत्र हैं।

8.3 स्वाभाविक निगमन

स्वाभाविक निगमन ऐसा व्युत्पत्ति-तंत्र है जिसका उद्देश्य वास्तविक तर्क-प्रक्रिया का प्रतिरूप देना है (विशेषतः गणितज्ञों द्वारा अपनाई जाने वाली सुव्यवस्थित तर्क-प्रक्रिया का)। वास्तविक तर्क-प्रक्रिया कई "स्वाभाविक" ढाँचों से आगे बढ़ती है। उदाहरणतः, स्थिति-भेद से प्रमाण किसी वियोजनात्मक आधारवाक्य से निष्कर्ष स्थापित करने देता है: हम दिखाते हैं कि निष्कर्ष उसके दोनों विकल्पों में से प्रत्येक से निकलता है। अप्रत्यक्ष प्रमाण में हम यह दिखाकर निष्कर्ष स्थापित करते हैं कि उसका निषेध विरोधाभास तक ले जाता है। आपादन-प्रमाण में यह दिखाकर "यदि ...तो ..." रूप का दावा स्थापित किया जाता है कि उत्तरपद, पूर्वपद से निकलता है। स्वाभाविक निगमन इन स्वाभाविक अनुमानों में से कुछ का औपचारिक निरूपण है। हर तार्किक संयोजक और परिमाणक के साथ दो नियम जुड़े होते हैं—एक प्रवेश-नियम और एक निरसन-नियम—और प्रत्येक नियम ऐसे ही किसी स्वाभाविक अनुमान-ढाँचे के अनुरूप होता है। उदाहरणतः, $\rightarrow$Intro आपादन-प्रमाण के और $\vee$Elim स्थिति-भेद से प्रमाण के अनुरूप है। विशेष रूप से सरल नियम $\wedge$Elim है, जो $\varphi \wedge \psi$ से φ (अथवा ψ) का अनुमान लगाने देता है।

स्वाभाविक निगमन को अन्य व्युत्पत्ति-तंत्रों से अलग करने वाला एक गुण इसमें मान्यताओं का उपयोग है। स्वाभाविक निगमन में व्युत्पत्ति, सूत्रों का एक वृक्ष है। उसके मूल पर एक सूत्र होता है; सूत्रों से बने इस वृक्ष की "पत्तियाँ" ऐसे सूत्रों होते हैं जिनसे निष्कर्ष व्युत्पन्न किया जाता है। स्वाभाविक निगमन में पत्तियों पर स्थित कुछ सूत्रों की व्युत्पत्ति के भीतर भूमिका होती है, किन्तु जब व्युत्पत्ति निष्कर्ष तक पहुँचती है, तब तक उनका उपयोग पूरा हो चुका होता है। यह वास्तविक तर्क-प्रक्रिया की उस पद्धति के अनुरूप है जिसमें ऐसी परिकल्पनाएँ प्रस्तुत की जाती हैं जो केवल थोड़े समय तक प्रभावी रहती हैं। उदाहरणतः, स्थिति-भेद से प्रमाण में हम दोनों विकल्पों में से प्रत्येक को सत्य मानते हैं; आपादन-प्रमाण में पूर्वपद को सत्य मानते हैं; और अप्रत्यक्ष प्रमाण में निष्कर्ष के निषेध को सत्य मानते हैं। काल्पनिक मान्यताओं को प्रस्तुत करना और फिर किसी मध्यवर्ती चरण को स्थापित करने के बाद उन्हें हटा देना स्वाभाविक निगमन की पहचान है। स्वाभाविक निगमन की व्युत्पत्ति की पत्तियों पर स्थित सूत्रों को मान्यताएँ कहते हैं, और कुछ अनुमान-नियम उन्हें सक्रिय निर्भरता से "मुक्त" कर सकते हैं। उदाहरणतः, यदि हमारे पास कोई व्युत्पत्ति हो जो कुछ ऐसी मान्यताओं से ψ देती हो जिनमें φ शामिल है, तो $\rightarrow$Intro नियम हमें $\varphi \rightarrow \psi$ का अनुमान लगाने और φ रूप की किसी भी मान्यता को मुक्त करने देता है। (कौन-सी मान्यता किस अनुमान-चरण में मुक्त होती है, इसका लेखा रखने के लिए हम अनुमान और उसके द्वारा मुक्त की जाने वाली मान्यताओं पर एक संख्या लगाते हैं।) जो मान्यताएँ अमुक्त रहती हैं, वे व्युत्पत्ति के अंत में मिलकर निष्कर्ष की सत्यता के लिए पर्याप्त होती हैं; इसलिए कोई व्युत्पत्ति यह स्थापित करती है कि उसकी अमुक्त मान्यताओं से उसका निष्कर्ष तार्किकतः निकलता है।

स्वाभाविक निगमन पर आधारित संबंध $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी होता है जब कोई व्युत्पत्ति ऐसी हो जिसमें φ वृक्ष का अंतिम वाक्य हो और हर अमुक्त पत्ती Γ में हो। φ स्वाभाविक निगमन में प्रमेय तभी और केवल तभी है जब कोई व्युत्पत्ति ऐसी हो जिसमें φ अंतिम वाक्य हो और सभी मान्यताएँ मुक्त हों। उदाहरण के लिए, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$1\,\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\,\rightarrow\text{Intro}$$

लेबल 1 बताता है कि मान्यता $\varphi \wedge \psi$ को $\rightarrow$Intro अनुमान पर मुक्त किया जाता है।

समुच्चय Γ स्वाभाविक निगमन में तभी और केवल तभी असंगत है जब $\Gamma \vdash \bot$ हो। नियम $\bot_I$ के कारण असंगत समुच्चय से कोई भी वाक्य व्युत्पन्न किया जा सकता है।

स्वाभाविक-निगमन तंत्र गेरहार्ड गेन्ट्सेन और स्तानिस्लाव याश्कोव्स्की (Stanisław Jaśkowski) ने 1930 के दशक में विकसित किए; बाद में डाग प्रावित्स और फ्रेडरिक फिच ने उन्हें आगे बढ़ाया। इसके अनुमान प्रमाण की स्वाभाविक विधियों का प्रतिरूप हैं, इसलिए यह दार्शनिकों में लोकप्रिय है। फिच द्वारा विकसित रूपों का उपयोग प्रायः आरंभिक तर्कशास्त्र की पाठ्यपुस्तकों में होता है। तर्कशास्त्र के दर्शन में कभी-कभी यह माना गया है कि स्वाभाविक निगमन के नियम तार्किक संक्रियकों के अर्थ देते हैं ("प्रमाण-सैद्धांतिक अर्थविज्ञान")।

8.4 सत्य-वृक्ष

जहाँ अनेक व्युत्पत्ति-तंत्र वाक्यों की व्यवस्थाओं पर कार्य करते हैं, वहीं सत्य-वृक्ष चिह्नित सूत्रों पर कार्य करते हैं। चिह्नित सूत्र सत्य-मूल्य-चिह्न ($\mathbb{T}$ अथवा $\mathbb{F}$) और वाक्य का युग्म होता है:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ अथवा } \mathbb{F}\,\varphi.$$

सत्य-वृक्ष नीचे की ओर शाखित वृक्ष में व्यवस्थित चिह्नित सूत्रों से बनता है। वह कई *मान्यताओं* से शुरू होता है और ऐसे चिह्नित सूत्रों से आगे बढ़ता है जो अपने ऊपर के चिह्नित सूत्रों में से किसी एक पर अनुमान-नियम लगाने से मिलते हैं। हर नियम शाखा के सिरे पर एक या अधिक चिह्नित सूत्रों को जोड़ने देता है, अथवा दो चिह्नित सूत्रों को साथ-साथ जोड़ने देता है—इस स्थिति में शाखा दो भागों में बँटती है और जोड़े गए दो चिह्नित सूत्रों से दोनों नई शाखाओं के सिरे बनते हैं।

किसी जटिल चिह्नित सूत्र पर नियम लगाने से कुछ चिह्नित सूत्रों को जोड़ा जाता है; ये मूल सूत्र के ठीक भीतर के सूत्रों से बनते हैं। नियम जोड़ों में आते हैं—दोनों चिह्नों में से प्रत्येक के लिए एक नियम। उदाहरणतः, $\wedge\mathbb{T}$ नियम $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ पर लागू होता है और दोनों चिह्नित सूत्रों $\mathbb{T}\,\varphi$ तथा $\mathbb{T}\,\psi$ को उस किसी भी शाखा के सिरे पर जोड़ने देता है जिसमें $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ हो; और नियम $\varphi \wedge \psi\mathbb{F}$, $\mathbb{F}\,\varphi$ तथा $\mathbb{F}\,\psi$ को साथ-साथ जोड़कर शाखा को दो भागों में बाँटने देता है। सत्य-वृक्ष बंद है यदि उसकी हर शाखा में आपस में मेल खाते चिह्नित सूत्रों का युग्म $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ हो।

सत्य-वृक्ष-आधारित $\vdash$ संबंध की परिभाषा इस प्रकार है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि इन मान्यताओं का कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

उदाहरण के लिए, यह बंद सत्य-वृक्ष दिखाता है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\to\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

समुच्चय Γ, सत्य-वृक्ष-कलन में असंगत है यदि इन मान्यताओं का कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

जहाँ ऐसा कोई $\psi_i \in \Gamma$ हो।

सत्य-वृक्ष 1950 के दशक में एवर्ट बेथ और याक्को हिंटिक्का ने एक-दूसरे से स्वतंत्र रूप से प्रस्तुत किए; रेमंड स्मलियन ने उन्हें सरल और लोकप्रिय बनाया। इनका उपयोग बहुत आसान है, क्योंकि सत्य-वृक्ष बनाना अत्यंत व्यवस्थित प्रक्रिया है। सत्य-वृक्ष व्यवस्थित ढंग से बनते हैं, इसलिए संगणक पर उनका कार्यान्वयन भी सहज है। किन्तु सत्य-वृक्ष पढ़ना प्रायः कठिन होता है और प्रमाणों से उसका संबंध भी कभी-कभी आसानी से दिखाई नहीं देता। यह दृष्टिकोण व्यापक भी है, और अनेक भिन्न तर्कशास्त्रों के अपने सत्य-वृक्ष-तंत्र हैं। सत्य-वृक्ष ऐसी संरचनाएँ खोजने में भी मदद करते हैं जो दिए गए वाक्यों (अथवा उनके समुच्चयों) को संतुष्ट करती हैं: समुच्चय संतुष्टनीय हो तो उसका कोई बंद सत्य-वृक्ष नहीं होगा, अर्थात् हर सत्य-वृक्ष में कोई खुली शाखा होगी। संतुष्ट करने वाली संरचना को खुली शाखा से "पढ़कर

निकाला" जा सकता है, बशर्ते उस शाखा पर लागू हो सकने वाला हर नियम लगा दिया गया हो। अनुक्रम-कलन से भी इसका बहुत निकट संबंध है: सारतः, कोई बंद सत्य-वृक्ष, अनुक्रम-कलन की संक्षिप्त व्युत्पत्ति है जिसे उलटी दिशा में लिखा गया है।

8.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

सबसे पुराने और सरल तार्किक व्युत्पत्ति-तंत्र अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्र हैं। उनकी व्युत्पत्तियाँ केवल वाक्यों के अनुक्रम हैं। वाक्यों का कोई अनुक्रम सही व्युत्पत्ति तभी माना जाता है जब उसमें प्रत्येक वाक्य φ निम्न शर्तों में से कोई एक पूरी करे:

1. φ अभिगृहीत हो, अथवा
2. φ दिए गए समुच्चय Γ का अवयव हो, जहाँ उक्त समुच्चय वाक्यों का समुच्चय है, अथवा
3. φ किसी अनुमान-नियम से औचित्ययुक्त हो।

अभिगृहीत होने के लिए φ को कई नियत वाक्य-प्रतिरूपों में से किसी एक के रूप का होना चाहिए। अभिगृहीत-प्रतिरूपों के अनेक ऐसे समुच्चय हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए संतोषजनक (सुदृढ़ और पूर्ण) व्युत्पत्ति-तंत्र देते हैं। इनमें से कुछ अभिगृहीत-प्रतिरूपों को उनके संचालित संयोजकों के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है; जैसे, ये प्रतिरूप

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad \psi \to (\psi \vee \chi) \qquad (\psi \wedge \chi) \to \psi$$

$\to$, $\vee$ और $\wedge$ को संचालित करने वाले सामान्य अभिगृहीत हैं। कुछ अभिगृहीत-तंत्रों का लक्ष्य अभिगृहीतों की संख्या न्यूनतम रखना होता है। किन संयोजकों को आदिम माना जाता है, उसके अनुसार केवल एक अभिगृहीत से बना तंत्र भी मिल सकता है।

अनुमान-नियम ऐसा सशर्त कथन है जो किसी व्युत्पत्ति में वाक्य को औचित्ययुक्त मानने की पर्याप्त शर्त देता है। मोडस पोनेन्स ऐसा अत्यंत सामान्य नियम है: यदि φ और $\varphi \to \psi$ पहले से औचित्ययुक्त हैं, तो ψ भी औचित्ययुक्त है। इसका अर्थ है कि किसी व्युत्पत्ति में वाक्य ψ वाली पंक्ति औचित्ययुक्त है, बशर्ते φ और $\varphi \to \psi$ दोनों (किसी वाक्य φ के लिए) उस व्युत्पत्ति में ψ से पहले आए हों।

अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-आधारित $\vdash$ संबंध में $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसके अंत में वाक्य φ अंतिम सूत्र के रूप में आए; Γ उन वाक्यों का समुच्चय है जिन्हें उस व्युत्पत्ति में (2) से औचित्य मिला। φ तब प्रमेय है जब φ की व्युत्पत्ति में Γ रिक्त हो, यानी हर वाक्य उस व्युत्पत्ति में (1) अथवा (3) से औचित्ययुक्त हो। मसलन, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash \varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))$:

1. $\psi \to (\psi \vee \varphi)$
2. $(\psi \to (\psi \vee \varphi)) \to (\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi)))$
3. $\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))$

पंक्ति 1 का वाक्य, अभिगृहीत $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ का रूप है (यहाँ φ और ψ की भूमिकाएँ उलटी हैं); पंक्ति 2 का वाक्य अभिगृहीत $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ का रूप है। अतः दोनों औचित्ययुक्त हैं। पंक्ति 3 को मोडस पोनेन्स से औचित्य मिलता है: इसे θ लिखें तो पंक्ति 2 का रूप $\chi \to \theta$ है, जहाँ χ का मान $\psi \to (\psi \vee \varphi)$ अर्थात् पंक्ति 1 है।

समुच्चय Γ असंगत है यदि $\Gamma \vdash \bot$। पूर्ण अभिगृहीत-तंत्र $\bot \to \varphi$ को हर φ के लिए सिद्ध करता है; अतः असंगत Γ से $\Gamma \vdash \varphi$ हर φ के लिए।

तर्कशास्त्र के लिए अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्र सबसे पहले गॉटलोब फ़्रेगे ने अपनी 1879 की *बेग्रिफ़्सश्रिफ़्ट* में दिए; इसी कारण उस कृति को प्रायः आधुनिक तर्कशास्त्र की पहली कृति माना जाता है। अल्फ्रेड नॉर्थ व्हाइटहेड और बर्ट्रेंड रसेल की *प्रिंसिपिया मैथेमैटिका* में तथा 1920 के दशक में डेविड हिल्बर्ट और उनके विद्यार्थियों ने इन तंत्रों को परिष्कृत किया। इसलिए इन्हें अक्सर "फ़्रेगे-तंत्र" या "हिल्बर्ट-तंत्र" कहा जाता है। ये तंत्र इस अर्थ में बहुत बहुमुखी हैं कि किसी तर्कशास्त्र के लिए अभिगृहीतीय तंत्र खोजना प्रायः आसान होता है। चूँकि उनकी व्युत्पत्तियाँ की संरचना बहुत सरल होती है और उनमें केवल एक या दो अनुमान-नियम होते हैं, इसलिए उनके *विषय में* बातें सिद्ध करना भी अपेक्षाकृत आसान होता है। फिर भी व्यवहार में उनका उपयोग अत्यंत कठिन है; अर्थात् प्रमाण ढूँढ़ना और लिखना कठिन होता है।

अध्याय 9

अनुक्रम-कलन

यह अध्याय शास्त्रीय प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए गेंट्सेन का मानक अनुक्रम-कलन LK प्रस्तुत करता है। इसमें और उदाहरण तथा अभ्यास जोड़े जा सकते हैं। प्रमाण-तंत्र के रूप में अनुक्रम-कलन से संबद्ध सामग्री को शामिल या बहिष्कृत करने के लिए "prfLK" टैग का उपयोग करें।

9.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

आगे $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ को वाक्यों के परिमित क्रम मानें।

परिभाषा 9.1 (अनुक्रम). *अनुक्रम* इस रूप का व्यंजक है:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

जहाँ Γ और Δ, भाषा $\mathcal{L}$ के वाक्यों के परिमित (संभवतः रिक्त) क्रम हैं। Γ को *पूर्वपक्ष* और Δ को *उत्तरपक्ष* कहते हैं।

अनुक्रम के पीछे सहज विचार यह है: यदि पूर्वपक्ष के सभी वाक्यों सत्य हों, तो उत्तरपक्ष का कम-से-कम एक वाक्य सत्य हो। अर्थात् यदि $\Gamma = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$ और $\Delta = \langle \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$ हों, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta$ तभी और केवल तभी सत्य है जब

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) \rightarrow (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$$

सत्य हो। दो विशेष दशाएँ हैं: Γ रिक्त हो या Δ रिक्त हो। जब Γ रिक्त हो, अर्थात् $m = 0$, तब $\Rightarrow \Delta$ तभी और केवल तभी सत्य है जब $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ सत्य हो। जब Δ रिक्त हो, अर्थात् $n = 0$, तब $\Gamma \Rightarrow$ तभी और केवल तभी सत्य है जब $\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m)$ सत्य हो। अनुक्रम को वैध तभी और केवल तभी कहते हैं जब उससे संबद्ध वाक्य वैध हो।

यदि Γ, वाक्यों का क्रम है, तो Γ, φ उस परिणाम को दर्शाता है जो φ को Γ के दाएँ सिरे पर जोड़ने से मिलता है (और φ, Γ उस परिणाम को, जो φ को Γ के बाएँ सिरे पर जोड़ने से मिलता है)। यदि Δ भी वाक्यों का क्रम है, तो Γ, Δ दोनों क्रमों का संयोजन है।

परिभाषा 9.2 (प्रारंभिक अनुक्रम). *प्रारंभिक अनुक्रम* ऐसा अनुक्रम है जो इनमें से किसी एक रूप का हो:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $\Rightarrow \top$
3. $\bot \Rightarrow$

जहाँ φ भाषा का कोई भी वाक्य है।

अनुक्रम-कलन की व्युत्पत्तियाँ अनुक्रमों के विशेष वृक्ष हैं। उनके शीर्षस्थ अनुक्रम प्रारंभिक अनुक्रम होते हैं; और यदि कोई अनुक्रम एक या दो अन्य अनुक्रमों के नीचे हो, तो उसे अनुमान-नियम से ठीक प्रकार निकलना चाहिए। **LK** के नियम दो मुख्य प्रकारों में बँटते हैं: *तार्किक* और *संरचनात्मक* नियम। तार्किक नियम का नाम उस प्रधान संक्रियक पर होता है जो निचले अनुक्रम में φ और/या ψ वाले वाक्य का है। हर नियम के दो रूप हैं: एक में वह वाक्य, जिसमें संक्रियक है, बाईं ओर और दूसरे में वही वाक्य दाईं ओर निष्कर्षित होता है।

9.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\neg$ के नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\rightarrow\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}\,\rightarrow\mathrm{R}$$

9.3 संरचनात्मक नियम

हमें कुछ ऐसे नियम भी चाहिए जो अनुक्रम के बाएँ और दाएँ पक्ष के वाक्यों को पुनः व्यवस्थित करने दें। तार्किक नियम माँगते हैं कि पूर्वाधार के जिन वाक्यों पर नियम लागू होता है, वे बिल्कुल बाएँ या बिल्कुल दाएँ हों। अतः वाक्यों को उचित

स्थान पर ले जाने वाला "विनिमय" नियम चाहिए। कभी-कभी दो समान वाक्यों को एक करना और किसी भी पक्ष में वाक्य जोड़ना भी आवश्यक है।

दुर्बलीकरण

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ \mathrm{WR}$$

संकुचन

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{CL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ \mathrm{CR}$$

विनिमय

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{XL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}\ \mathrm{XR}$$

दुर्बलीकरण, संकुचन और विनिमय अनुमानों की शृंखला प्रायः दोहरी अनुमान-रेखाओं से दिखाई जाती है।

निम्नलिखित "छेदन" नियम अनिवार्य तो नहीं है, पर व्युत्पत्तियाँ का पुनः उपयोग और संयोजन बहुत आसान बनाता है।

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \mathrm{Cut}$$

9.4 व्युत्पत्तियाँ

हम प्रारंभिक अनुक्रम का रूप और अनुमान-नियम दे चुके हैं। अनुक्रम-कलन की व्युत्पत्तियाँ इन्हीं से आगमनात्मक रूप से बनती हैं: हर व्युत्पत्ति या तो अकेला प्रारंभिक अनुक्रम है, या उसका रूप है: एक अथवा दो व्युत्पत्तियाँ और उनके बाद आने वाला एक अनुमान।

परिभाषा 9.3 (LK व्युत्पत्ति). LK-*व्युत्पत्ति* अनुक्रम S के अनुक्रमों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्नलिखित शर्तें पूरी करे:

1. वृक्ष के शीर्षस्थ अनुक्रम प्रारंभिक अनुक्रम हैं।
2. वृक्ष का सबसे निचला अनुक्रम S है।
3. वृक्ष में S को छोड़कर हर अनुक्रम किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग का पूर्वाधार है, और उस प्रयोग का निष्कर्ष वृक्ष में उस अनुक्रम के ठीक नीचे है।

तब S को व्युत्पत्ति का *अंतिम अनुक्रम* कहते हैं और कहते हैं कि S, **LK** *में व्युत्पन्न* है (या **LK**-व्युत्पन्न है)।

उदाहरण 9.4. हर प्रारंभिक अनुक्रम, जैसे $\chi \Rightarrow \chi$, व्युत्पत्ति है। इस पर, मान लें, WL नियम लगाकर नई व्युत्पत्ति मिलती है:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}$$

पर यह नियम सामान्य है: इसमें φ के स्थान पर कोई भी वाक्य, जैसे θ, रख सकते हैं। यदि पूर्वाधार हमारे प्रारंभिक अनुक्रम $\chi \Rightarrow \chi$ से मेल खाए, तो Γ और Δ दोनों केवल χ हैं और निष्कर्ष $\theta, \chi \Rightarrow \chi$ होगा। अतः यह व्युत्पत्ति है:

$$\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}$$

अब XL जैसा दूसरा नियम लगा सकते हैं, जो बाईं ओर के दो वाक्यों की अदला-बदली करता है। अतः यह भी सही व्युत्पत्ति है:

$$\cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}$$

इस प्रयोग में नियम का दिया हुआ रूप था:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta,}\,\mathrm{XL}$$

यहाँ Γ और Π दोनों रिक्त थे, Δ का मान χ था, और φ तथा ψ की भूमिकाएँ क्रमशः θ और χ ने निभाई। लगभग इसी तरह हम देखते हैं कि

$$\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}$$

व्युत्पत्ति है। अब ये दोनों व्युत्पत्तियाँ $\wedge$R से जोड़ी जा सकती हैं। वह नियम था:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

हमारे मामले में व्युत्पत्तियाँ पूर्वाधारों पर समाप्त होती हैं, और उनके अंतिम अनुक्रमों का मेल उन्हीं पूर्वाधारों से होना चाहिए। अर्थात् Γ का मान χ, θ है, Δ रिक्त है, φ का मान χ और ψ का मान θ है। अतः अनुमान सही होने पर निष्कर्ष $\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta$ है।

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL} \qquad \cfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta}\,\wedge\mathrm{R}$$

पूर्वाधारों का क्रम उलट भी सकते हैं; तब φ का मान θ और ψ का मान χ होगा।

$$\cfrac{\cfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL} \qquad \cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}}{\chi, \theta \Rightarrow \theta \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

9.5 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण

उदाहरण 9.5. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ हो।

आरंभ में वांछित अंतिम अनुक्रम को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखते हैं।

$$\overline{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}$$

अब निर्धारित करना है कि किस प्रकार के अनुमान का निचला अनुक्रम इस रूप का हो सकता है। यह कोई संरचनात्मक नियम हो सकता है, पर आरंभ किसी तार्किक नियम को खोजने से करना उचित है। निचले अनुक्रम में आने वाला एकमात्र तार्किक संयोजक $\wedge$ है, इसलिए हमें $\wedge$-नियम चाहिए; और चूँकि $\wedge$ चिह्न पूर्वपक्ष में है, हमें $\wedge$L नियम देखना है।

$$\overline{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\;\wedge\mathrm{L}$$

$\wedge$L अनुमान का ऊपरी अनुक्रम क्या रहा होगा, इसके दो विकल्प हैं: ऊपरी अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ हो सकता है, या $\psi \Rightarrow \varphi$। स्पष्ट है कि $\varphi \Rightarrow \varphi$ प्रारंभिक अनुक्रम है (जो हमारे लिए अच्छा है), जबकि $\psi \Rightarrow \varphi$ सामान्यतः व्युत्पन्न नहीं है। अब ऊपरी अनुक्रम भर देते हैं:

$$\frac{\varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\;\wedge\mathrm{L}$$

अब हमारे पास सही **LK**-व्युत्पत्ति है, जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ है।

उदाहरण 9.6. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ हो।

वांछित अंतिम अनुक्रम को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरंभ कीजिए।

$$\overline{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}$$

इस अंतिम अनुक्रम को देने वाला तार्किक नियम खोजने के लिए इसमें आए तार्किक संयोजक देखते हैं: $\neg$, $\vee$, और $\to$। अभी हमारा ध्यान केवल $\vee$ और $\to$ पर है, क्योंकि अभी हमें प्रधान संक्रियकों से काम है और ये अंतिम अनुक्रम के वाक्यों में बाहर से लागू होते हैं; $\neg$ किसी दूसरे संयोजक के परास के भीतर है, इसलिए उसे बाद में सँभालेंगे। अतः अंतिम अनुमान के लिए तार्किक नियमों के विकल्प $\vee$L नियम और $\to$R नियम हैं। वास्तव में दोनों में से कोई भी चुन सकते हैं, पर $\to$R नियम चुनते हैं (यदि और कोई कारण न हो, तो इसलिए कि इससे दो शाखाओं में विभाजन कुछ देर टलता है)। निचला अनुक्रम देने वाले $\to$R अनुमानों के रूप के अनुसार यह ऐसा दिखना चाहिए:

$$\frac{\overline{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}\;\to\mathrm{R}$$

यदि पूर्वपक्ष में $\neg\varphi \vee \psi$ को बाहर की ओर ले आएँ, तो $\vee$L नियम लगा सकते हैं। नियम-रूप के अनुसार इसे निम्न प्रकार दो ऊपरी अनुक्रमों में बँटना चाहिए:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg\varphi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi} \qquad \overline{\psi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi}\;\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \psi}\;\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}\;\to\mathrm{R}$$

याद रखें कि हम ऊपर की ओर रास्ता बनाते हुए प्रारंभिक अनुक्रमों तक पहुँचने का प्रयत्न कर रहे हैं; हम लगभग पहुँच गए हैं! दाहिनी शाखा प्रारंभिक अनुक्रम से केवल एक दुर्बलीकरण और एक विनिमय दूर है; इनके बाद वह पूरी हो जाती है:

$$
\begin{array}{rl}
\psi \Rightarrow \psi & \\
\hline
\varphi, \psi \Rightarrow \psi & \text{WL} \\
\hline
\psi, \varphi \Rightarrow \psi & \text{XL} \\
\hline
\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \qquad \neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

अब बाईं शाखा देखें। यहाँ किसी वाक्य में मिलने वाला एकमात्र तार्किक संयोजक $\neg$ है, और वह पूर्वपक्ष के वाक्यों में आता है; इसलिए हमें $\neg$L नियम का एक प्रयोग चाहिए।

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\neg\text{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\text{XL} & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

जिस प्रकार दाहिनी शाखा पूरी की थी, उसी प्रकार इस बाईं शाखा को पूरा करने के लिए भी केवल एक दुर्बलीकरण और एक विनिमय चाहिए।

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}\,\text{WR}}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\,\text{XR}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\neg\text{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\text{XL} & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

उदाहरण 9.7. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ हो।

ऊपर की विधियों का प्रयोग करते हुए वांछित अंतिम अनुक्रम को सबसे नीचे लिखकर आरंभ करते हैं।

$$
\dfrac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}
$$

अंतिम अनुक्रम के वाक्यों में उपलब्ध प्रधान संक्रियक $\vee$ चिह्न और $\neg$ चिह्न हैं। यहाँ $\vee$L या $\neg$R, दोनों में से कोई नियम लगाया जा सकता है; पर हम $\neg$R से आरंभ करते हैं, क्योंकि इससे कुछ देर तक दो शाखाओं में बँटना टल जाता है:

$$
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\text{R}
$$

अब $\wedge$L और $\vee$L में से किस नियम को देखें, यह चुनना है। पहले देखें कि $\wedge$L नियम लगाने पर क्या होता है: ऊपरी अनुक्रम के लिए $\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$ और $\psi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$ में से कोई एक चुन सकते हैं। चूँकि व्युत्पत्ति, φ और ψ के संबंध में सममित है, पहला विकल्प लेते हैं:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\wedge\text{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\text{R}
$$

व्युत्पत्ति को आगे भरने पर एक समस्या सामने आती है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi}\,?}{\neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

दाहिनी शाखा के शीर्ष को और घटाया नहीं जा सकता, और संरचनात्मक अनुमानों द्वारा उसे प्रारंभिक अनुक्रम तक भी नहीं लाया जा सकता; इसलिए यह सही रास्ता नहीं है। अर्थात् ऊपर $\wedge$L नियम लगाना भूल थी। पहले वाली स्थिति पर लौटकर उसके बदले $\vee$L नियम लगाने पर मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \qquad \dfrac{}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

हर शाखा को पहले की तरह पूरा करने पर मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

(इन चरणों में $\wedge$ नियमों को $\neg$ नियमों से नीचे भी लगा सकते थे और तब भी सही व्युत्पत्ति मिलती।)

उदाहरण 9.8. अब तक हमने संकुचन नियम का प्रयोग नहीं किया, पर कभी-कभी वह आवश्यक होता है। यह उसका एक उदाहरण है। मान लें कि हमें $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ सिद्ध करना है। $\vee$R को उल्टी दिशा में लगाने पर इन दो व्युत्पत्तियाँ में से कोई एक मिलेगी:

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}
$$

निस्संदेह इनमें से कोई भी प्रारंभिक अनुक्रम पर समाप्त नहीं होती। युक्ति यह समझना है कि संकुचन नियम वाक्य की दो प्रतियों को एक में मिला देता है—और प्रमाण खोजते समय, अर्थात् नीचे से ऊपर जाते हुए, पूर्वाधार में $\varphi \vee \neg\varphi$ की एक प्रति रख सकते हैं; जैसे:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}
$$

अब $\vee$R को दूसरी बार लगा सकते हैं और साथ ही $\neg\varphi$ पा सकते हैं; इससे पूरी व्युत्पत्ति मिल जाती है।

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}\,\mathrm{XR}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}
$$

यह अनुभाग स्वाभाविक निगमन के सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

9.6 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में यह सहारा नहीं लिया जाता कि वाक्यों के लिए कौन-सी संरचनाएँ उन्हें संतुष्ट करती हैं, बल्कि कुछ अनुक्रमों की व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेय* का विषय है।

परिभाषा 9.9 (प्रमेय). वाक्य φ *प्रमेय* है यदि **LK** में अनुक्रम $\Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। तब $\vdash \varphi$ लिखते हैं; यदि φ प्रमेय नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 9.10 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ को किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* कहते हैं; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं। यह तभी और केवल तभी होता है जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और कोई क्रम Γ_0' ऐसा हो जो Γ_0 के वाक्यों से बना हो, तथा **LK** $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ को व्युत्पन्न करे। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

संकुचन, दुर्बलीकरण और विनिमय नियमों के कारण Γ_0' में वाक्यों का क्रम और संख्या महत्त्व नहीं रखते: यदि अनुक्रम $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है, तो $\Gamma_0'' \Rightarrow \varphi$ भी हर ऐसे Γ_0'' के लिए वैसा ही है जिसका निर्माण Γ_0' वाले वाक्यों से हुआ हो। उदाहरण के लिए, यदि $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$ हो, तो $\Gamma_0' = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ और $\Gamma_0'' = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$, दोनों ऐसे क्रम हैं जो Γ_0 के ही वाक्यों से बने हैं। यदि इनमें से एक क्रम वाला अनुक्रम व्युत्पन्न है, तो दूसरा भी है; जैसे:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}\,\text{CL}}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{XL}}{\chi, \chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{WL}$$

अब से, यदि Γ_0, वाक्यों का परिमित समुच्चय है, तो $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ से हमारा आशय ऐसे किसी भी अनुक्रम से होगा जिसका पूर्वपक्ष Γ_0 के वाक्यों का क्रम हो; आवश्यकता पड़ने पर संकुचन, विनिमय और दुर्बलीकरण को मौन रूप से शामिल मानेंगे।

परिभाषा 9.11 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि **LK** $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करे। यदि Γ असंगत नहीं है, अर्थात् हर परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए **LK** $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न नहीं करता, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 9.12 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. प्रारंभिक अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है और $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$। □

प्रतिज्ञप्ति 9.13 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है। चूँकि $\Gamma \subseteq \Delta$, इसलिए Γ_0, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है। अतः $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति यह भी दिखाती है कि $\Delta \vdash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 9.14 (संक्रामकता). *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$*, तो* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$*।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और कोई व्युत्पत्ति π_0 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ है। यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Delta_0 \subseteq \Delta$ के लिए कोई व्युत्पत्ति π_1 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$ है। निम्नलिखित व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi}\ \text{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 9.15. Γ *असंगत है तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \vdash \varphi$ *हर वाक्य* φ *के लिए सत्य हो।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 9.16 (संहतता).

1. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$*, तो कोई परिमित उपसमुच्चय* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *ऐसा है कि* $\Gamma_0 \vdash \varphi$*।*
2. *यदि* Γ *का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो* Γ *संगत है।*

प्रमाण.

1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। फलतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$।
2. यदि Γ असंगत है, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करता है। किंतु तब Γ_0, Γ का असंगत परिमित उपसमुच्चय है। □

9.7 व्युत्पन्नता और संगतता

अब हम व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। ये अपने-आप में रोचक हैं, पर इनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 9.17. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *असंगत है, तो* Γ *असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित समुच्चय Γ_0 और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ हैं कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ और $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करता है। **LK** में $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति को π_0 और **LK** में $\Gamma_1, \varphi \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति को π_1 मानें। तब हम निम्न अनुक्रम को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\ \text{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; अतः Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 9.18. $\Gamma \vdash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई व्युत्पत्ति π_0 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \varphi$ है। $\neg$L नियम जोड़ने पर $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति मिलती है; अर्थात् $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है।

यदि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, तो कोई व्युत्पत्ति π_1 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$ है। निम्नलिखित $\Gamma \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति है:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 9.19. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब कोई व्युत्पत्ति π ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ है। अनुक्रम $\neg\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ भी व्युत्पन्न है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\Gamma_0, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{Cut}$$

चूँकि $\neg\varphi \in \Gamma$ और $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, इससे सिद्ध होता है कि Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 9.20. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित समुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ तथा **LK**-व्युत्पत्तियाँ π_0 और π_1 हैं, जिनके अंतिम अनुक्रम क्रमशः $\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ और $\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$ हैं। तब हम निम्न अनुक्रम को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \varphi, \Gamma_0 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0 \Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\,\mathrm{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$। अतः Γ असंगत है। □

9.8 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि अनुक्रम-कलन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 9.21. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. दोनों अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ व्युत्पन्न हैं:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}$$

2. यह अनुक्रम $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ की व्युत्पत्ति है:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{R}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 9.22. *1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. हम अनुक्रम $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति देते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \vee\mathrm{L}$$

(स्मरण रहे कि दोहरी अनुमान-रेखाएँ दुर्बलीकरण, संकुचन और विनिमय के कई अनुमानों को सूचित करती हैं।)

2. दोनों अनुक्रमों $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ और $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ की व्युत्पत्तियाँ हैं:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{R}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 9.23. *1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ और $\psi \vdash \varphi \to \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. अनुक्रम $\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ व्युत्पन्न है:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \to\mathrm{L}$$

2. दोनों अनुक्रम $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi$ और $\psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ व्युत्पन्न हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WR}}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi} \to\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WL}}{\psi \Rightarrow \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

□

9.9 सुदृढ़ता

अनुक्रम-कलन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र *सुदृढ़* है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न φ सर्वसत्य है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनसे तार्किकतः निष्पन्न भी होता है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

चूँकि ये सभी प्रमाण-सैद्धांतिक गुण अनुक्रम-कलन में कुछ अनुक्रमों की व्युत्पन्नता द्वारा परिभाषित होते हैं, इसलिए ऊपर के (1)–(3) को सिद्ध करने के लिए व्युत्पन्न अनुक्रमों के अर्थवैज्ञानिक गुणों के बारे में कुछ सिद्ध करना होगा। पहले हम परिभाषित करेंगे कि किसी अनुक्रम का *वैध* होना क्या है, और फिर दिखाएँगे कि हर व्युत्पन्न अनुक्रम वैध है। तब (1)–(3) इस परिणाम के उपप्रमेयों के रूप में मिलेंगे।

परिभाषा 9.24. सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ किसी अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को *संतुष्ट करता है* तभी और केवल तभी जब या तो $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$ किसी $\varphi \in \Gamma$ के लिए हो, या $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ किसी $\varphi \in \Delta$ के लिए हो।

कोई अनुक्रम *वैध* है तभी और केवल तभी जब हर सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ उसे संतुष्ट करे।

प्रमेय 9.25 (सुदृढ़ता). *यदि* **LK**, $\Theta \Rightarrow \Xi$ *को व्युत्पन्न करता है, तो* $\Theta \Rightarrow \Xi$ *वैध है।*

प्रमाण. π को $\Theta \Rightarrow \Xi$ की व्युत्पत्ति मानें। हम अनुमानों की संख्या n पर आगमन करते हैं; यह संख्या π के अनुमानों की है।

यदि अनुमानों की संख्या 0 है, तो π में केवल एक प्रारंभिक अनुक्रम है। हर प्रारंभिक अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ स्पष्टतः वैध है, क्योंकि प्रत्येक $\mathfrak{v}$ के लिए या तो $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$, या $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ होता है।

यदि अनुमानों की संख्या 0 से अधिक है, तो सबसे निचले अनुमान के प्रकार के अनुसार प्रकरणों में भेद करते हैं। आगमन-परिकल्पना से उस अनुमान के पूर्वाधारों को वैध मान सकते हैं, क्योंकि किसी भी पूर्वाधार की व्युत्पत्ति में अनुमानों की संख्या n से कम है।

पहले केवल एक पूर्वाधार वाले संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं।

1. अंतिम अनुमान दुर्बलीकरण है। तब $\Theta \Rightarrow \Xi$ या तो $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ है (यदि अंतिम अनुमान WL है), या $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ है (यदि वह WR है), और व्युत्पत्ति निम्न में से किसी एक पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

   आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है; अर्थात् प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए या तो कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$, अथवा कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \vDash \chi$।

   यदि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, तो $\chi \in \Theta$ भी है क्योंकि $\Theta = \varphi, \Gamma$; अतः $\mathfrak{v} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Theta$ के लिए। इसी प्रकार, यदि $\mathfrak{v} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए, तो $\chi \in \Xi$; इसलिए $\mathfrak{v} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Xi$ के लिए। फलतः $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है।

2. अंतिम अनुमान $\neg$L है। तब अंतिम अनुमान का पूर्वाधार $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ और निष्कर्ष $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ है; अर्थात् व्युत्पत्ति निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\mathrm{L}$$

यहाँ $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ और $\Xi = \Delta$ है।

आगमन-परिकल्पना बताती है कि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है; अर्थात् प्रत्येक $\mathfrak{v}$ के लिए या तो (a) किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{v} \nvDash \chi$, या (b) किसी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \chi$, या (c) $\mathfrak{v} \vDash \varphi$। हमें दिखाना है कि $\Theta \Rightarrow \Xi$ भी वैध है। कोई $\mathfrak{v}$ को सत्य-मूल्यांकन मानें। यदि (a) सत्य है, तो कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$, पर $\chi \in \Theta$ भी है। यदि (b) सत्य है, तो कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \vDash \chi$, पर $\chi \in \Xi$ भी है। अंततः, यदि $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{v} \nvDash \neg\varphi$। चूँकि $\neg\varphi \in \Theta$, कोई $\chi \in \Theta$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$। फलतः $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है।

3. अंतिम अनुमान $\neg$R है: अभ्यास।

4. अंतिम अनुमान $\wedge$L है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \wedge \psi$ को पूर्वाधार के बाएँ पक्ष में φ से या ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले रूप में π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\mathrm{L}$$

यहाँ $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ और $\Xi = \Delta$ है। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। आगमन-परिकल्पना से $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है, इसलिए या तो (a) $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$, (b) $\mathfrak{v} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{v} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरण (a) में $\mathfrak{v} \nvDash \varphi \wedge \psi$; अतः कोई $\chi \in \Theta$ (अर्थात् $\varphi \wedge \psi$) ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$। प्रकरण (b) में कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$, और $\chi \in \Theta$ भी है। प्रकरण (c) में कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \vDash \chi$, और $\chi \in \Xi$ भी है क्योंकि $\Xi = \Delta$। अतः प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{v}$, $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{v}$ स्वेच्छ था, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है। जिस प्रकरण में $\varphi \wedge \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है: φ को ψ से बदल दें।

5. अंतिम अनुमान $\vee$R है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \vee \psi$ को पूर्वाधार के दाएँ पक्ष में φ से या ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले रूप में π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{R}$$

अब $\Theta = \Gamma$ और $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$ है। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है, इसलिए या तो (a) $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, (b) $\mathfrak{v} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{v} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरण (a) में $\mathfrak{v} \vDash \varphi \vee \psi$। प्रकरण (b) में कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \nvDash \chi$। प्रकरण (c) में कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \vDash \chi$। अतः प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{v}$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$ को, अर्थात् $\Theta \Rightarrow \Xi$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{v}$ स्वेच्छ था, $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है। जिस प्रकरण में $\varphi \vee \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है: φ को ψ से बदल दें।

6. अंतिम अनुमान $\rightarrow$R है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

फिर आगमन-परिकल्पना कहती है कि पूर्वाधार वैध है; हमें दिखाना है कि निष्कर्ष भी वैध है। $\mathfrak{v}$ को स्वेच्छ मानें। चूँकि $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ वैध है, इसलिए निम्न में से कम से कम एक प्रकरण सत्य है: (a) $\mathfrak{v} \not\models \varphi$, (b) $\mathfrak{v} \models \psi$, (c) $\mathfrak{v} \not\models \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (d) $\mathfrak{v} \models \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरणों (a) और (b) में $\mathfrak{v} \models \varphi \to \psi$; इसलिए कोई $\chi \in \Delta, \varphi \to \psi$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \models \chi$। प्रकरण (c) में किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{v} \not\models \chi$। प्रकरण (d) में किसी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{v} \models \chi$। प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{v}$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{v}$ स्वेच्छ था, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi$ वैध है।

अब दो पूर्वाधारों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें।

1. अंतिम अनुमान छेदन है; तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \mathrm{Cut}$$

$\mathfrak{v}$ को सत्य-मूल्यांकन मानें। आगमन-परिकल्पना से पूर्वाधार वैध हैं, इसलिए $\mathfrak{v}$ दोनों पूर्वाधारों को संतुष्ट करता है। दो प्रकरणों में भेद करें: (a) $\mathfrak{v} \not\models \varphi$ और (b) $\mathfrak{v} \models \varphi$। प्रकरण (a) में, बाएँ पूर्वाधार को संतुष्ट करने के लिए $\mathfrak{v}$ को $\Gamma \Rightarrow \Delta$ संतुष्ट करना होगा। तब वह निष्कर्ष को भी संतुष्ट करता है। प्रकरण (b) में, दाएँ पूर्वाधार को संतुष्ट करने के लिए $\mathfrak{v}$ को $\Pi \setminus \Lambda$ संतुष्ट करना होगा। यहाँ भी $\mathfrak{v}$ निष्कर्ष को संतुष्ट करता है।

2. अंतिम अनुमान $\wedge$R है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{R}$$

किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। यदि $\mathfrak{v}$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है, तो काम पूरा हुआ। अतः मानें कि वह ऐसा नहीं करता। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ आगमन-परिकल्पना से वैध है, $\mathfrak{v} \models \varphi$। इसी प्रकार, चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ वैध है, $\mathfrak{v} \models \psi$। तब $\mathfrak{v} \models \varphi \wedge \psi$।

3. अंतिम अनुमान $\vee$L है: अभ्यास।

4. अंतिम अनुमान $\to$L है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \to\mathrm{L}$$

फिर किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें और मानें कि $\mathfrak{v}$ $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ को संतुष्ट नहीं करता। हमें दिखाना है कि $\mathfrak{v} \not\models \varphi \to \psi$। यदि $\mathfrak{v}$ $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ को संतुष्ट नहीं करता, तो वह न $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है, न $\Pi \Rightarrow \Lambda$ को। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है, इसलिए $\mathfrak{v} \models \varphi$। चूँकि $\psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ वैध है, इसलिए $\mathfrak{v} \not\models \psi$। तब $\mathfrak{v} \not\models \varphi \to \psi$, और हमें यही दिखाना था। □

उपप्रमेय 9.26. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सर्वसत्य है।*

उपप्रमेय 9.27. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \models \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। प्रमेय 9.25 के अनुसार प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ या तो किसी $\psi \in \Gamma_0$ को असत्य बनाता है, या φ को सत्य बनाता है। अतः यदि $\mathfrak{v} \models \Gamma$, तो $\mathfrak{v} \models \varphi$ भी। □

उपप्रमेय 9.28. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_0 \Rightarrow$ की कोई व्युत्पत्ति है। प्रमेय 9.25 से $\Gamma_0 \Rightarrow$ वैध है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए कोई $\chi \in \Gamma_0$ ऐसा है कि $\mathfrak{v} \not\models \chi$; और चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, वही χ Γ में भी है। अतः कोई $\mathfrak{v}$ Γ को संतुष्ट नहीं करता, और Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

प्रश्न

प्रश्न 9.1. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \Rightarrow \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.

प्रश्न 9.2. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $(\varphi \vee \psi) \to \chi \Rightarrow \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \to \varphi \Rightarrow \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\Rightarrow (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\varphi \to \chi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \Rightarrow \neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi$.

10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 9.3. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\Rightarrow \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$.
8. $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

(इन सभी में CR नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 9.4. प्रतिज्ञप्ति 19.16 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 9.5. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 9.6. प्रमेय 9.25 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 10

स्वाभाविक निगमन

यह अध्याय गेंटज़ेन/प्रावित्स की शैली का स्वाभाविक निगमन तंत्र प्रस्तुत करता है।

स्वाभाविक निगमन से प्रमाण-तंत्र के रूप में संबंधित सामग्री को सम्मिलित या अपवर्जित करने के लिए "prfND" टैग का उपयोग करें।

10.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

स्वाभाविक-निगमन तंत्रों का उद्देश्य गणितीय प्रमाण में प्रयुक्त अनौपचारिक तर्क-प्रक्रिया के बहुत निकट चलना है (इसीलिए यह कुछ हद तक "स्वाभाविक" है)। स्वाभाविक-निगमन प्रमाण मान्यताओं से आरम्भ होते हैं। फिर अनुमान-नियम लागू किए जाते हैं। मान्यताओं को $\neg$Intro, $\rightarrow$Intro, और $\vee$Elim अनुमान-नियमों द्वारा "मुक्त" किया जाता है, और स्पष्टता के लिए मुक्त मान्यता का लेबल अनुमान के पास रखा जाता है।

परिभाषा 10.1 (मान्यता). किसी भी शाखा की सबसे ऊपर की स्थिति में स्थित कोई भी वाक्य *मान्यता* है।

स्वाभाविक निगमन में प्रत्येक व्युत्पत्ति वाक्यों का एक विशेष वृक्ष होती है। उसमें सबसे ऊपर के वाक्यों को मान्यताएँ कहा जाता है; और यदि वाक्य एक, दो या तीन अन्य अनुक्रमों के नीचे स्थित हो, तो उसे किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग से निकलना चाहिए। अनुमान के ऊपर स्थित वाक्यों को उसके *पूर्वाधार* और नीचे स्थित वाक्य को अनुमान का *निष्कर्ष* कहते हैं। नियम युग्मों में आते हैं—प्रत्येक संक्रियक के लिए एक प्रवेश-नियम और एक निरसन-नियम। वे निष्कर्ष में संक्रियक प्रविष्ट करते हैं या नियम के किसी पूर्वाधार से संक्रियक हटाते हैं। कुछ नियम किसी निश्चित प्रकार की मान्यता को *मुक्त* करने देते हैं। कौन-सी मान्यता किस अनुमान द्वारा मुक्त की जाती है, यह दिखाने के लिए हम मान्यता और अनुमान दोनों को लेबल भी देते हैं। इसका संकेत मान्यता को "$[\varphi]^n$." के रूप में लिखकर दिया जाता है।

सभी संक्रियकों $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, और $\perp$ के लिए नियमों पर विचार करना प्रचलित है, भले ही उनमें से कुछ परिभाषित हों।

10.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge\text{Elim}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge\text{Elim}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

$$n\ \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ \vee\text{Elim}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\text{Intro}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \rightarrow\text{Elim}$$

$\neg$ के नियम

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro}$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

$\bot$ के नियम

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \bot_I$$

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_C$$

ध्यान दें कि $\neg$Intro और $\bot_C$ बहुत समान हैं। अंतर यह है कि $\neg$Intro निषेधित वाक्य $\neg\varphi$ को व्युत्पन्न करता है, जबकि $\bot_C$ सकारात्मक वाक्य φ को व्युत्पन्न करता है।

जहाँ भी कोई नियम यह बताता है कि किसी मान्यता को मुक्त किया जा सकता है, इसे हम अनुमति मानते हैं, अनिवार्यता नहीं। उदाहरणतः, $\to$Intro नियम में हम φ रूप की मान्यताओं की कोई भी संख्या पूर्वाधार ψ की व्युत्पत्ति में मुक्त कर सकते हैं—शून्य भी।

10.3 व्युत्पत्तियाँ

हम बता चुके हैं कि मान्यता क्या है और अनुमान-नियम भी दे चुके हैं। स्वाभाविक निगमन की व्युत्पत्तियाँ इन्हीं से आगमनात्मक रूप से बनती हैं: हर व्युत्पत्ति या तो अकेली मान्यता है, या उसमें एक, दो अथवा तीन व्युत्पत्तियाँ के बाद एक सही अनुमान होता है।

परिभाषा 10.2 (व्युत्पत्ति). *व्युत्पत्ति,* वाक्य φ को मान्यताओं Γ से देने वाला वाक्यों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्नलिखित शर्तें पूरी करे:

1. वृक्ष के शीर्षस्थ वाक्यों या तो Γ में हैं या वृक्ष के किसी अनुमान द्वारा मुक्त किए जाते हैं।
2. वृक्ष का सबसे निचला वाक्य φ है।
3. वृक्ष का हर वाक्य, सबसे नीचे के φ को छोड़कर, किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग का पूर्वाधार है; उस प्रयोग का निष्कर्ष वृक्ष में उस वाक्य के ठीक नीचे स्थित है।

तब φ को व्युत्पत्ति का *निष्कर्ष* और Γ को उसकी अमुक्त मान्यताएँ कहते हैं।

यदि व्युत्पत्ति ऐसी हो जो φ को Γ से देती हो, तो कहते हैं कि φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, या प्रतीकों में: $\Gamma \vdash \varphi$। यदि ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसमें φ निष्कर्ष हो और हर मान्यता मुक्त हो, तो $\vdash \varphi$ लिखते हैं।

उदाहरण 10.3. हर मान्यता स्वयं व्युत्पत्ति है; अतः φ स्वयं व्युत्पत्ति है और ψ भी। इन पर $\wedge$Intro नियम लगाने से नई व्युत्पत्ति मिलती है:

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

ये नियम सामान्य हैं: इनमें φ और ψ को किन्हीं भी वाक्यों, जैसे χ और θ, से बदल सकते हैं। तब निष्कर्ष $\chi \wedge \theta$ होगा; अतः

$$\frac{\chi \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\ \wedge\text{Intro}$$

सही व्युत्पत्ति है। मान्यताएँ उलटकर θ को φ और χ को ψ की भूमिका भी दे सकते हैं। अतः

$$\frac{\theta \qquad \chi}{\theta \wedge \chi}\ \wedge\text{Intro}$$

भी सही व्युत्पत्ति है।

अब $\to$Intro जैसा दूसरा नियम लगा सकते हैं। यह आपादन निष्कर्षित करने और उसके पूर्वपद के समान किसी भी मान्यता को मुक्त करने देता है। अतः निम्न दोनों सही व्युत्पत्तियाँ हैं:

$$1\ \frac{\dfrac{[\chi]^1 \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\ \wedge\text{Intro}}{\chi \to (\chi \wedge \theta)}\ \to\text{Intro} \qquad 1\ \frac{\dfrac{\chi \qquad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta}\ \wedge\text{Intro}}{\theta \to (\chi \wedge \theta)}\ \to\text{Intro}$$

ये क्रमशः दिखाती हैं कि $\theta \vdash \chi \to (\chi \wedge \theta)$ और $\chi \vdash \theta \to (\chi \wedge \theta)$।

याद रखें: मान्यताओं को मुक्त करना अनुमति है, अनिवार्यता नहीं। विशेषतः, मान्यताएँ व्युत्पत्ति में मौजूद न हों, तब भी नियम लगा सकते हैं। निम्नलिखित अनुमत है, यद्यपि कोई मान्यता φ नहीं है जिसे मुक्त किया जाए:

$$^{1}\frac{\psi}{\varphi \to \psi} \to\text{Intro}$$

10.4 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण

उदाहरण 10.4. आइए व्युत्पत्ति दें जिसका निष्कर्ष वाक्य $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ है।

वांछित निष्कर्ष को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरम्भ करते हैं।

$$\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}$$

अब तय करना है कि किस प्रकार का अनुमान इस रूप का वाक्य दे सकता है। निष्कर्ष का प्रधान संक्रियक $\to$ है, इसलिए $\to$Intro नियम से निष्कर्ष तक पहुँचने का प्रयत्न करेंगे। आगे बढ़ते हुए संबद्ध मान्यताओं को लिखना और अनुमान-नियमों पर लेबल लगाना उचित है; इससे प्रमाण के अंत में आसानी से देख सकते हैं कि सभी मान्यताएँ मुक्त हुई हैं या नहीं।

$$^{1}\frac{\begin{array}{c}[\varphi \wedge \psi]^{1}\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi} \to\text{Intro}$$

अब मान्यता $\varphi \wedge \psi$ से φ तक के चरण भरने हैं। यहाँ केवल एक संयोजक $\wedge$ है, इसलिए $\wedge$ निरसन-नियम लगाना होगा। इससे यह प्रमाण मिलता है:

$$^{1}\frac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^{1}}{\varphi}\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi} \to\text{Intro}$$

अब हमारे पास $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ की सही व्युत्पत्ति है।

उदाहरण 10.5. अब व्युत्पत्ति दें जिसका निष्कर्ष $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ है।

वांछित निष्कर्ष को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरम्भ करते हैं।

$$\frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}$$

यह निष्कर्ष देने वाला तार्किक नियम खोजने के लिए निष्कर्ष के तार्किक संयोजक देखते हैं: $\neg$, $\vee$, और $\to$। अभी केवल $\to$ की पहली आवृत्ति पर ध्यान देंगे, क्योंकि वही प्रधान संक्रियक है—अंतिम अनुक्रम के वाक्य का; $\neg$, $\vee$, और $\to$ की दूसरी आवृत्ति किसी अन्य संयोजक के परास में हैं, इसलिए उन्हें बाद में सँभालेंगे। अतः $\to$Intro नियम से आरम्भ करते हैं। उसका सही प्रयोग इस रूप का होगा:

$$^{1}\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi \vee \psi]^{1}\\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{array}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)} \to\text{Intro}$$

अब आगे बढ़ने के दो मार्ग हैं। या तो नीचे से ऊपर काम जारी रखकर $\to$Intro का एक और प्रयोग खोजें, या ऊपर से नीचे काम करके $\vee$Elim नियम लगाएँ। दूसरा मार्ग लेते हैं। $\vee$Elim के सबसे बाएँ पूर्वाधार के रूप में मान्यता $\neg\varphi \vee \psi$ लेंगे। $\vee$Elim के सही प्रयोग में अन्य दोनों पूर्वाधार निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ के समान होने चाहिए, पर उनमें से प्रत्येक को बारी-बारी से एक अन्य मान्यता—अर्थात् $\neg\varphi \vee \psi$ के दो वियोज्यों में से एक—से व्युत्पन्न किया जा सकता है। इसलिए हमारी व्युत्पत्ति ऐसी होगी:

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi]^2\\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^2\\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}
$$

दाईं ओर की दोनों शाखाओं में हम व्युत्पन्न करना चाहते हैं $\varphi \to \psi$ को; इसके लिए $\to$Intro लगाना सबसे उचित है।

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^2, [\varphi]^3\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 3}\ \to\text{Intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 4}\ \to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}
$$

पूरी व्युत्पत्ति के दो अधूरे भागों में हमें व्युत्पत्तियाँ चाहिए: ψ की— बीच में $\neg\varphi$ और φ से तथा बाईं ओर φ और ψ से। पहले बीच वाली लेते हैं। $\neg\varphi$ और φ, $\neg$Elim के दो पूर्वाधार हैं:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\ \neg\text{Elim}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{}
$$

$\bot_I$का प्रयोग करके ψ को निष्कर्ष के रूप में पा सकते हैं और शाखा पूरी कर सकते हैं।

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\ \bot\text{Intro}}{\psi}\ \bot_I}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 3}\ \to\text{Intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 4}\ \to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}
$$

अब सबसे दाहिनी शाखा देखें। यहाँ यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि व्युत्पत्ति की परिभाषा मान्यताओं को *मुक्त करने की अनुमति देती है*, पर ऐसा करना *अनिवार्य नहीं* बनाती। अर्थात् यदि ψ को मान्यताओं φ और ψ में से केवल एक का उपयोग करके व्युत्पन्न कर सकें, तो यह स्वीकार्य है। और व्युत्पन्न करना ψ को ψ से सर्वथा सरल है: ψ स्वयं ऐसी व्युत्पत्ति है और किसी अनुमान की आवश्यकता नहीं। अतः मान्यता φ को सीधे हटा सकते हैं।

$$
\dfrac{\dfrac{2\ \dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad 3\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{[\psi]^2}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,\vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,\to\text{Intro}\ 1
$$

ध्यान दें कि पूर्ण व्युत्पत्ति में सबसे दाहिना $\to$Intro अनुमान वास्तव में किसी मान्यता को मुक्त नहीं करता।

उदाहरण 10.6. अब तक हमें $\bot_C$ नियम की आवश्यकता नहीं पड़ी। इसकी विशेषता यह है कि यह ऐसी मान्यता को मुक्त करने देता है जो नियम के निष्कर्ष का उप-सूत्र नहीं है। इसका $\bot_I$ नियम से निकट संबंध है। वास्तव में $\bot_I$ नियम, $\bot_C$ नियम की एक विशेष दशा है—"अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र" नाम का एक तर्कशास्त्र है जिसमें केवल $\bot_I$ अनुमत है। जब कोई और उपाय काम न करे, तब $\bot_C$ अंतिम उपाय है। उदाहरणतः, मान लें कि हमें व्युत्पन्न करना है $\varphi \vee \neg\varphi$। सामान्य रणनीति $\varphi \vee \neg\varphi$ को $\vee$Intro लगाकर व्युत्पन्न करने की होगी। पर इसके लिए बिना किसी मान्यता के व्युत्पन्न करना होगा या तो φ को या $\neg\varphi$ को, और यह सम्भव नहीं। यहाँ $\bot_C$ काम आता है!

$$
\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\ \vdots \\ \bot}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\bot_C\ 1
$$

अब व्युत्पत्ति खोज रहे हैं: $\bot$ की, $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ से। चूँकि $\bot$, $\neg$Elim का निष्कर्ष है, इसे लगाने का प्रयत्न कर सकते हैं:

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\ \vdots \\ \neg\varphi \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\ \vdots \\ \varphi}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\bot_C\ 1
$$

हमारी रणनीति में व्युत्पत्ति खोजनी है: $\neg\varphi$ की; इसके लिए $\neg$Intro का प्रयोग चाहिए:

$$
\dfrac{\dfrac{2\ \dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2 \\ \vdots \\ \bot}{\neg\varphi}\,\neg\text{Intro} \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\ \vdots \\ \varphi}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\bot_C\ 1
$$

यहाँ $\bot$ को $\neg$Elim लगाकर सरलता से पा सकते हैं—मान्यता $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ और $\varphi \vee \neg\varphi$ पर; दूसरा वाक्य हमारी नई मान्यता φ से $\vee$Intro द्वारा मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{2\ \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\neg\varphi}\,\neg\text{Intro} \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\ \vdots \\ \varphi}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\bot_C\ 1
$$

दाईं ओर वही रणनीति अपनाते हैं, केवल φ को $\bot_C$से पाते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\neg\varphi}\,{}^2\,\neg\text{Intro} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \dfrac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi}\,{}^3\,\bot_C}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,{}^1\,\bot_C$$

10.5 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

यह अनुभाग स्वाभाविक निगमन के सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में वाक्यों की संरचनाएँ में संतुष्टि का सहारा नहीं लिया जाता, बल्कि व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का—कुछ वाक्यों की अन्य वाक्यों से व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का—सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 10.7 (प्रमेय). कोई वाक्य φ *प्रमेय* है यदि स्वाभाविक निगमन में φ की ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसमें सभी मान्यताएँ मुक्त हों। यदि $\vdash \varphi$ हो तो φ प्रमेय है, और यदि नहीं तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 10.8 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* है; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, और यह तब होता है जब ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसका निष्कर्ष φ हो और जिसमें हर मान्यता या तो मुक्त हो अथवा Γ में हो। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है, तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 10.9 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \bot$। यदि Γ असंगत नहीं है, अर्थात् यदि $\Gamma \nvdash \bot$, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 10.10 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. मान्यता φ अकेली ही φ की व्युत्पत्ति है, जिसमें हर अमुक्त मान्यता (अर्थात् φ) Γ में है। □

प्रतिज्ञप्ति 10.11 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. φ की Γ से कोई भी व्युत्पत्ति, φ की Δ से व्युत्पत्ति भी है। □

प्रतिज्ञप्ति 10.12 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ_0 ऐसी है जिसका निष्कर्ष φ है और जिसकी सभी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं। यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ_1 ऐसी है जिसका निष्कर्ष ψ है और जिसकी सभी अमुक्त मान्यताएँ $\{\varphi\} \cup \Delta$ में हैं। अब इस पर विचार करें:

$$\dfrac{{}^1\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_0\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

अब सभी अमुक्त मान्यताएँ $\Gamma \cup \Delta$ में हैं; अतः इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। $\square$

जब $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ कोई परिमित समुच्चय हो, तब सरल संकेतन $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \vdash \psi$ को $\Gamma \vdash \psi$ के स्थान पर लिख सकते हैं; विशेषतः $\varphi \vdash \psi$ का अर्थ $\{\varphi\} \vdash \psi$ है।

ध्यान दें कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए हो, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 10.13. *निम्नलिखित कथन तुल्य हैं।*

1. *Γ असंगत है।*
2. *$\Gamma \vdash \varphi$ प्रत्येक वाक्य φ के लिए सत्य है।*
3. *$\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \neg\varphi$ किसी वाक्य φ के लिए सत्य हैं।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 10.14 (संहतता). 1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. *यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।*

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ ऐसी है जो φ की Γ से है। Γ_0 को δ की अमुक्त मान्यताओं का समुच्चय मानें। चूँकि कोई भी व्युत्पत्ति परिमित होती है, Γ_0 में केवल परिमित रूप से अनेक वाक्यों हो सकते हैं। अतः δ, φ की परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ से व्युत्पत्ति है।

2. यह (1) का प्रतिलोम है—विशेष दशा $\varphi \equiv \bot$ के लिए। $\square$

10.6 व्युत्पन्नता और संगतता

अब व्युत्पन्नता संबंध के कई गुण स्थापित करेंगे। वे अपने-आप में रोचक हैं, पर उनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 10.15. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. व्युत्पत्ति— φ की Γ से— δ_1 हो, और व्युत्पत्ति— $\bot$ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से— δ_2 हो। तब यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots\ \delta_2 \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,1\ \neg\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\ \delta_1 \\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

नई व्युत्पत्ति में मान्यता φ मुक्त है, इसलिए यह व्युत्पत्ति Γ से है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 10.16. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई व्युत्पत्ति δ_0 ऐसी है जो φ की अमुक्त मान्यताओं Γ से है। इससे व्युत्पत्ति मिलती है—$\bot$ की $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ से—इस प्रकार:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_0\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

अब मान लें $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, और δ_1 उस तदनुरूप व्युत्पत्ति को निरूपित करे जो $\bot$ की, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ में उपस्थित अमुक्त मान्यताओं से है। φ की केवल Γ से व्युत्पत्ति, $\bot_C$ का प्रयोग करके इस प्रकार मिलती है:

$$1\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_C$$

□

प्रतिज्ञप्ति 10.17. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब कोई व्युत्पत्ति δ ऐसी है जो φ की Γ से है। $\neg$Elim नियम के इस सरल प्रयोग पर विचार करें:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

चूँकि $\neg\varphi \in \Gamma$, सभी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं; इससे $\Gamma \vdash \bot$ सिद्ध होता है। □

प्रतिज्ञप्ति 10.18. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. व्युत्पत्तियाँ δ_1 और δ_2 हैं: पहली $\bot$ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, और दूसरी $\bot$ की $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ से। तब यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{2\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^2\\ \vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\neg\neg\varphi}\ \neg\text{Intro} \qquad 1\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

चूँकि मान्यताएँ φ और $\neg\varphi$ मुक्त हैं, यह व्युत्पत्ति है— $\bot$ की केवल Γ से। अतः Γ असंगत है। □

10.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि स्वाभाविक निगमन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 10.19. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. दोनों को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\text{Elim} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\text{Elim}$$

2. यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 10.20. *1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. निम्नलिखित व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$1\,\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim} \qquad \dfrac{\neg\psi \qquad [\psi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\bot}\,\vee\text{Elim}$$

यह $\bot$ की व्युत्पत्ति है, अमुक्त मान्यताओं $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, और $\neg\psi$ से।

2. दोनों को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 10.21. *1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ और $\psi \vdash \varphi \to \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

2. इसे निम्नलिखित दो व्युत्पत्तियाँ दिखाती हैं:

$$1\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}$$

ध्यान दें कि $\to$Intro मान्यता φ को मुक्त कर सकता है, पर ऐसा करना आवश्यक नहीं है। □

10.8 सुदृढ़ता

स्वाभाविक निगमन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र *सुदृढ़* है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में तार्किकतः निष्पन्न नहीं होतीं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न वाक्य सर्वसत्य है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनका तार्किक परिणाम भी है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

प्रमेय 10.22 (सुदृढ़ता). *यदि φ व्युत्पन्न है और इस व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ Γ हैं, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. δ को φ की व्युत्पत्ति मानें। हम δ में अनुमानों की संख्या पर आगमन करते हैं।

आगमन-आधार के लिए, अनुमानों की संख्या 0 होने पर कथन सिद्ध करते हैं। इस स्थिति में δ में केवल एक वाक्य φ, अर्थात् एक मान्यता, होती है। वह मान्यता अमुक्त है, क्योंकि मान्यताएँ केवल अनुमानों द्वारा ही मुक्त हो सकती हैं और यहाँ कोई अनुमान नहीं है। अतः ऐसी प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ जो प्रमाण की सभी अमुक्त मान्यताओं को संतुष्ट करती है, φ को भी संतुष्ट करती है।

अब आगमन-चरण लें। मानें कि δ में n अनुमान हैं। सबसे निचले अनुमान के पूर्वाधार व्युत्पन्न किए गए हैं; इसके लिए उप-व्युत्पत्तियाँ का उपयोग हुआ है, और इनमें से प्रत्येक में n से कम अनुमान हैं। हम आगमन-परिकल्पना मानते हैं: सबसे निचले अनुमान के पूर्वाधार अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होते हैं; ये उन पूर्वाधारों पर समाप्त होने वाली उप-व्युत्पत्तियाँ की मान्यताएँ हैं। हमें दिखाना है कि निष्कर्ष φ पूरे प्रमाण की अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होता है।

हम सबसे निचले अनुमान के प्रकार के अनुसार प्रकरणों में भेद करते हैं। पहले केवल एक पूर्वाधार वाले संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं।

1. मानें कि अंतिम अनुमान $\neg$Intro है। व्युत्पत्ति का रूप है

$$\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots\ \delta_1 \\ \vdots \\ n\ \dfrac{\bot}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro} \end{array}$$

   आगमन-परिकल्पना से $\bot$, अमुक्त मान्यताओं $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{v} \vDash \neg\varphi$। विरोधाभासार्थ मानें कि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, पर $\mathfrak{v} \nvDash \neg\varphi$, अर्थात् $\mathfrak{v} \vDash \varphi$। तब $\mathfrak{v} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$ होगा। यह हमारी आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है। अतः $\mathfrak{v} \vDash \neg\varphi$.

2. अंतिम अनुमान $\wedge$Elim है। इसके दो रूप हैं: φ या ψ को पूर्वाधार $\varphi \wedge \psi$ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले प्रकरण पर विचार करें। व्युत्पत्ति δ इस प्रकार है:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots\ \delta_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge\text{Elim} \end{array}$$

आगमन-परिकल्पना से $\varphi \wedge \psi$, अमुक्त मान्यताओं Γ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी संरचना $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{v} \vDash \varphi$। मानें कि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$। हमारी आगमन-परिकल्पना ($\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$) से हम जानते हैं कि $\mathfrak{v} \vDash \varphi \wedge \psi$। परिभाषा से, $\mathfrak{v} \vDash \varphi \wedge \psi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{v} \vDash \psi$। (जिस प्रकरण में ψ को $\varphi \wedge \psi$ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है।)

3. अंतिम अनुमान $\vee$Intro है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \vee \psi$ को पूर्वाधार φ या पूर्वाधार ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले प्रकरण पर विचार करें। व्युत्पत्ति का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

आगमन-परिकल्पना से φ, अमुक्त मान्यताओं Γ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{v} \vDash \varphi \vee \psi$। मानें कि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$; तब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, क्योंकि $\Gamma \vDash \varphi$ (आगमन-परिकल्पना)। अतः $\mathfrak{v} \vDash \varphi \vee \psi$ भी होना चाहिए। (जिस प्रकरण में $\varphi \vee \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है।)

4. अंतिम अनुमान $\rightarrow$Intro है। $\varphi \rightarrow \psi$ को मान्यता φ और निष्कर्ष ψ वाले उपप्रमाण से निष्कर्षित किया जाता है, अर्थात्

$$n\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^n\\ \vdots\,\delta_1\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\text{Intro}$$

आगमन-परिकल्पना से ψ, δ_1 की अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होता है, अर्थात् $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। δ की अमुक्त मान्यताएँ केवल Γ हैं, क्योंकि अंतिम अनुमान पर φ मुक्त कर दिया गया है। अतः हमें दिखाना है कि $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$। विरोधाभासार्थ मानें कि किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, पर $\mathfrak{v} \nvDash \varphi \rightarrow \psi$। तब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{v} \nvDash \psi$। किन्तु परिकल्पना से ψ, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ का तार्किक परिणाम है, अर्थात् $\mathfrak{v} \vDash \psi$, जो विरोधाभास है। अतः $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$.

5. अंतिम अनुमान $\perp_I$है। यहाँ δ का अंत इस प्रकार होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_1\\ \perp\end{array}}{\varphi}\ \perp_I$$

आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \perp$। हमें दिखाना है कि $\Gamma \vDash \varphi$। मानें कि ऐसा नहीं है; तब किसी $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$ और $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$। पर हमारे पास सदैव $\mathfrak{v} \nvDash \perp$ है, इसलिए इसका अर्थ $\Gamma \nvDash \perp$ होगा, जो आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है।

6. अंतिम अनुमान $\perp_C$है: अभ्यास।

अब अनेक पूर्वाधारों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें: $\vee$Elim, $\wedge$Intro, और $\rightarrow$Elim।

1. अंतिम अनुमान $\wedge$Intro है। $\varphi \wedge \psi$ को पूर्वाधारों φ और ψ से निष्कर्षित किया जाता है और δ का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

आगमन-परिकल्पना से φ, अमुक्त मान्यताओं Γ_1 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। इसी प्रकार ψ, अमुक्त मान्यताओं Γ_2 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_2 की मान्यताएँ हैं। δ की अमुक्त मान्यताएँ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ हैं, इसलिए हमें दिखाना है कि $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \varphi \wedge \psi$। ऐसी किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें जिसके लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। चूँकि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma_1$, इसलिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ होना चाहिए, क्योंकि $\Gamma_1 \vDash \varphi$; और चूँकि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma_2$, इसलिए $\mathfrak{v} \vDash \psi$, क्योंकि $\Gamma_2 \vDash \psi$। दोनों को मिलाकर, $\mathfrak{v} \vDash \varphi \wedge \psi$।

2. अंतिम अनुमान $\vee$Elim है: अभ्यास।

3. अंतिम अनुमान $\rightarrow$Elim है। ψ को पूर्वाधारों $\varphi \rightarrow \psi$ और φ से निष्कर्षित किया जाता है। व्युत्पत्ति δ इस प्रकार है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\,\delta_2\\ \varphi\end{array}}{\psi}\ \rightarrow\text{Elim}$$

□

आगमन-परिकल्पना से $\varphi \rightarrow \psi$, अमुक्त मान्यताओं Γ_1 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। इसी प्रकार φ, अमुक्त मान्यताओं Γ_2 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_2 की मान्यताएँ हैं। किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, तो $\mathfrak{v} \vDash \psi$। मानें कि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। चूँकि $\Gamma_1 \vDash \varphi \rightarrow \psi$, इसलिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi \rightarrow \psi$। चूँकि $\Gamma_2 \vDash \varphi$, हमारे पास $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ है। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{v} \vDash \psi$ (क्योंकि यदि $\mathfrak{v} \nvDash \psi$, तो $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ होने से $\mathfrak{v} \nvDash \varphi \rightarrow \psi$ होता, जो $\mathfrak{v} \vDash \varphi \rightarrow \psi$ के विरुद्ध है)।

4. अंतिम अनुमान $\neg$Elim है: अभ्यास।

उपप्रमेय 10.23. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सर्वसत्य है।*

उपप्रमेय 10.24. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब $\Gamma \vdash \bot$, अर्थात् $\bot$ की ऐसी कोई व्युत्पत्ति है जिसकी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं। प्रमेय 10.22 से ऐसी प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ जो Γ को संतुष्ट करती है, उसे $\bot$ को भी संतुष्ट करना होगा। चूँकि $\mathfrak{v} \nvDash \bot$ प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए सत्य है, इसलिए कोई $\mathfrak{v}$, Γ को संतुष्ट नहीं कर सकती; अर्थात् Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

प्रश्न

प्रश्न 10.1. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.

2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

प्रश्न 10.2. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $(\varphi \vee \psi) \to \chi \vdash \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\varphi \to \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 10.3. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \vdash (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi$.
8. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

(इन सभी के लिए $\perp_C$ नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 10.4. प्रतिज्ञप्ति 10.13 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 10.5. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 10.6. प्रमेय 10.22 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 11

सत्य-वृक्ष

यह अध्याय चिह्नित विश्लेषणात्मक सत्य-वृक्ष तंत्र प्रस्तुत करता है।
प्रमाण-तंत्र के रूप में सत्य-वृक्ष से संबद्ध सामग्री को शामिल या बहिष्कृत करने के लिए "prfTab" टैग का उपयोग करें।

11.1 नियम और सत्य-वृक्ष

सत्य-वृक्ष इस बात का क्रमबद्ध सर्वेक्षण है कि वाक्य किसी संरचना में किन संभावित तरीकों से सत्य या असत्य हो सकता है। यह चिह्नित सूत्रों से निर्मित होता है: वाक्यों के साथ सत्य-मूल्य का एक "चिह्न", जो या तो $\mathbb{T}$ होता है या $\mathbb{F}$। इन चिह्नित सूत्रों को एक (नीचे की ओर बढ़ने वाले) वृक्ष में व्यवस्थित किया जाता है।

परिभाषा 11.1. *चिह्नित सूत्र* सत्य-मूल्य और वाक्य से बना युग्म है, अर्थात् इन दोनों रूपों में से कोई एक:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ अथवा } \mathbb{F}\,\varphi.$$

सहज रूप से, हम $\mathbb{T}\,\varphi$ को "φ सत्य हो सकता है" और $\mathbb{F}\,\varphi$ को "φ असत्य हो सकता है" (किसी संरचना में) पढ़ सकते हैं।

वृक्ष का प्रत्येक चिह्नित सूत्र या तो *मान्यता* है (मान्यताएँ वृक्ष के बिल्कुल ऊपर लिखी जाती हैं), या वह अपने ऊपर के किसी चिह्नित सूत्र से किसी अनुमान-नियम द्वारा प्राप्त होता है। प्रधान संक्रियक का प्रत्येक संभावित रूप—अर्थात् पूर्ववर्ती सूत्र का प्रधान संक्रियक—दो नियमों से संबद्ध है: एक उस दशा के लिए जिसमें चिह्न $\mathbb{T}$ है, और दूसरा उस दशा के लिए जिसमें चिह्न $\mathbb{F}$ है। कुछ नियम वृक्ष में शाखाएँ बनाने देते हैं, और कुछ केवल शाखा में चिह्नित सूत्रों को जोड़ते हैं। कोई नियम ठीक पहले आए चिह्नित सूत्र पर ही नहीं, बल्कि मूल से लेकर नियम लगाए जाने के स्थान तक की शाखा में स्थित किसी भी चिह्नित सूत्र पर लगाया जा सकता है (और प्रायः लगाना ही पड़ता है)।

कोई शाखा तब *बंद* होती है जब उसमें $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों। वह सत्य-वृक्ष बंद है जिसकी प्रत्येक शाखा बंद है। सहज व्याख्या में हर शाखा एक संयुक्त संभावना बताती है, किन्तु $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ का एक साथ संभव होना असंभव है। दूसरे शब्दों में, किसी शाखा के बंद होने पर उसके द्वारा बताई गई संभावना निरस्त हो जाती है। विशेषतः इसका अर्थ है कि बंद सत्य-वृक्ष, $\mathbb{T}\,\varphi$ रूप की प्रत्येक मान्यता को सत्य और $\mathbb{F}\,\varphi$ रूप की प्रत्येक मान्यता को असत्य बनाने की सभी संयुक्त संभावनाएँ निरस्त कर देता है।

φ के लिए बंद सत्य-वृक्ष ऐसा बंद सत्य-वृक्ष है जिसका मूल $\mathbb{F}\,\varphi$ हो। यदि ऐसा बंद सत्य-वृक्ष अस्तित्व में है, तो φ के असत्य होने की सभी संभावनाएँ निरस्त हो चुकी हैं; अर्थात् φ प्रत्येक संरचना में सत्य होना चाहिए।

11.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\neg$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi}\,\neg\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\mathbb{T}\,\varphi}\,\neg\mathbb{F}$$

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{T}\,\psi\end{array}}\,\wedge\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\wedge\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\psi}\,\wedge\mathbb{F}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\vee\psi}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\vee\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\vee\mathbb{F}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\rightarrow\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\rightarrow\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\rightarrow\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\rightarrow\mathbb{F}$$

कट-नियम

$$\frac{}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\varphi}\,\text{Cut}$$

Cut-नियम किसी पूर्ववर्ती चिह्नित सूत्र “पर” लागू नहीं होता; बल्कि वह सत्य-वृक्ष की हर शाखा को दो भागों में विभाजित करने देता है: एक शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ होता है और दूसरी में $\mathbb{F}\,\varphi$। यह नियम आवश्यक नहीं है—चिह्नित सूत्रों के जिस किसी समुच्चय का बंद सत्य-वृक्ष है, उसका Cut के बिना भी एक बंद सत्य-वृक्ष है—किन्तु इससे सत्य-वृक्ष का परस्पर संयोजन सुविधाजनक हो जाता है।

11.3 सत्य-वृक्ष

हम बता चुके हैं कि मान्यता क्या होती है और अनुमान-नियम दे चुके हैं। इन्हीं से सत्य-वृक्ष आगमनात्मक रूप से बनते हैं: प्रत्येक सत्य-वृक्ष या तो एक अथवा अधिक मान्यताओं से बनी अकेली शाखा होता है, या फिर किसी शाखा पर अनुमान-नियमों में से एक लगाने पर किसी सत्य-वृक्ष से प्राप्त होता है।

परिभाषा 11.2 (सत्य-वृक्ष). मान्यताओं $S_1\varphi_1$, ..., $S_n\varphi_n$ (जहाँ प्रत्येक S_i या तो $\mathbb{T}$ है या $\mathbb{F}$) के लिए सत्य-वृक्ष, चिह्नित सूत्रों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्न शर्तें पूरी करता है:

1. वृक्ष के सबसे ऊपर के n चिह्नित सूत्रों $S_i\varphi_i$ हैं, एक के नीचे दूसरा।
2. वृक्ष का प्रत्येक ऐसा चिह्नित सूत्र जो मान्यताओं में से नहीं है, अपने ऊपर की शाखा के किसी चिह्नित सूत्र पर अनुमान-नियम के सही प्रयोग से प्राप्त होता है।

सत्य-वृक्ष की शाखा *बंद* है तभी और केवल तभी जब उसमें $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों; अन्यथा वह *खुली* है। ऐसा सत्य-वृक्ष जिसकी प्रत्येक शाखा बंद है, अपनी मान्यताओं के समुच्चय के लिए *बंद सत्य-वृक्ष* है। यदि कोई सत्य-वृक्ष बंद नहीं है, अर्थात् उसमें कम-से-कम एक खुली शाखा है, तो वह *खुला* है।

उदाहरण 11.3. मान्यताओं का प्रत्येक समुच्चय अपने-आप में सत्य-वृक्ष है, पर सामान्यतः वह बंद नहीं होगा। (स्पष्टतः वह तभी बंद है जब मान्यताओं में पहले से चिह्नित सूत्रों का कोई युग्म $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ हो।)

किसी सत्य-वृक्ष (खुले या बंद) में उपस्थित किसी चिह्नित सूत्र φ पर अनुमान-नियमों में से एक लगाकर हम उससे नया, बड़ा सत्य-वृक्ष प्राप्त कर सकते हैं। नियम φ की उस उपस्थिति वाली हर शाखा के अंत में एक या अधिक चिह्नित सूत्रों जोड़ देगा जिस पर हमने नियम लगाया है।

उदाहरणार्थ, मान्यता $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$ पर विचार करें। केवल इस मान्यता से बना (खुला) सत्य-वृक्ष यह है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता

मान्यता पर $\wedge\mathbb{T}$ नियम लगाकर इससे नया सत्य-वृक्ष मिलता है। यह नियम हमें सत्य-वृक्ष में दो नई पंक्तियाँ, $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{T}\,\neg\varphi$, जोड़ने देता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$

सत्य-वृक्ष लिखते समय हम लगाए गए नियम दाईं ओर दर्ज करते हैं (जैसे, $\wedge\mathbb{T}1$ का अर्थ है कि उस पंक्ति का चिह्नित सूत्र, $\wedge\mathbb{T}$ नियम को पंक्ति 1 के चिह्नित सूत्र पर लगाने से प्राप्त हुआ है)। इस नए सत्य-वृक्ष में अब अतिरिक्त चिह्नित सूत्रों हैं, किंतु नियम केवल एक पर लगाया जा सकता है ($\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर; यहाँ $\neg\mathbb{T}$ नियम)। इससे निम्न बंद सत्य-वृक्ष मिलता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,3$
	$\otimes$	

11.4 सत्य-वृक्ष के उदाहरण

उदाहरण 11.4. आइए बंद सत्य-वृक्ष खोजें, जो वाक्य $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ के लिए हो।

हम सत्य-वृक्ष के शीर्ष पर संगत मान्यता लिखकर आरंभ करते हैं।

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	मान्यता

केवल एक मान्यता है, इसलिए ऐसा चिह्नित सूत्र भी केवल एक है जिस पर नियम लगाया जा सकता है। (प्रत्येक चिह्नित सूत्र पर अधिकतम एक ही नियम लगाया जा सकता है: वह संगत चिह्न और प्रधान संक्रियक का नियम होता है, जो उस वाक्य का है।) इस प्रसंग में इसका अर्थ है कि हमें $\to\mathbb{F}$ लगाना होगा।

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$

किन चिह्नित सूत्रों पर उनके संगत नियम लगाए जा चुके हैं, इसका लेखा रखने के लिए हम वाक्य के पास जाँच-चिह्न लगाते हैं। किंतु जाँच-चिह्न *केवल* तभी लगाएँ जब नियम सभी खुली शाखाओं पर लगाया जा चुका हो। किसी चिह्नित सूत्र पर प्रत्येक खुली शाखा में संगत नियम लग जाने के बाद हमें उस पर लौटकर नियम फिर नहीं लगाना पड़ेगा। यहाँ केवल एक शाखा है, इसलिए नियम केवल एक बार लगाना है। (ध्यान दें कि जाँच-चिह्न सत्य-वृक्ष बनाने की सुविधा मात्र हैं; वे सत्य-वृक्ष के औपचारिक वाक्यविन्यास का भाग नहीं हैं।)

अब ऐसा एक नया चिह्नित सूत्र है जिस पर नियम लगाया जा सकता है: $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$, जो पंक्ति 2 पर है। $\wedge\mathbb{T}$ नियम लगाने पर मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

अब शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ (पंक्ति 4 पर) और $\mathbb{F}\,\varphi$ (पंक्ति 3 पर) दोनों हैं, इसलिए शाखा बंद है। चूँकि यही अकेली शाखा है, सत्य-वृक्ष बंद है। इस प्रकार हमें $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष मिल गया।

उदाहरण 11.5. अब $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष खोजें।

हम संगत मान्यता से आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$	मान्यता

अकेले चिह्नित सूत्र, जो इस सत्य-वृक्ष में है, का प्रधान संक्रियक $\to$ और चिह्न $\mathbb{F}$ है, इसलिए उस पर $\to\mathbb{F}$ नियम लगाने से मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$

अब हमारे पास विकल्प है: $\vee\mathbb{T}$ को पंक्ति 2 पर लगाएँ या $\to\mathbb{F}$ को पंक्ति 3 पर। क्रम वास्तव में महत्त्वपूर्ण नहीं है, बशर्ते प्रत्येक चिह्नित सूत्र पर हर शाखा में उसका संगत नियम लगाया जाए। पहले विकल्प को चुनते हैं। $\vee\mathbb{T}$ नियम सत्य-वृक्ष में शाखाएँ बनने देता है और नियम के दो निष्कर्ष दो नई शाखाओं में जोड़े गए नए चिह्नित सूत्रों होंगे। इससे मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \quad \mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$

हमने $\to\mathbb{F}$ नियम पंक्ति 3 पर अभी नहीं लगाया है; अब ऐसा करते हैं। समय बचाने के लिए उसे दोनों शाखाओं पर लगाते हैं। स्मरण रहे कि चिह्नित सूत्र के पास जाँच-चिह्न तभी लिखते हैं जब उसका संगत नियम प्रत्येक खुली शाखा में लगाया जा चुका हो। इसलिए नियम को उन सभी शाखाओं के अंत में लगाना अच्छा है जिनमें वह चिह्नित सूत्र है जिस पर नियम लागू होता है। तब अलग-अलग शाखाओं में नीचे जाकर हमें उस चिह्नित सूत्र पर लौटना नहीं पड़ेगा।

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \quad \mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi \quad \mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi \quad \mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
	$\otimes$	

दाईं शाखा अब बंद है। बाईं शाखा पर हम अभी $\neg\mathbb{T}$ नियम पंक्ति 4 पर लगा सकते हैं। इससे $\mathbb{F}\,\varphi$ मिलता है और बाईं शाखा बंद हो जाती है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \quad \mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi \quad \mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi \quad \mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
7.	$\mathbb{F}\,\varphi \quad \otimes$	$\neg\mathbb{T}\,4$
	$\otimes$	

उदाहरण 11.6. हम कितने ही सत्य-वृक्ष दे सकते हैं, जिनमें मान्यताओं के रूप में कितने ही चिह्नित सूत्रों हों। प्रायः शाखाएँ बनाने वाले एक से अधिक नियम लगाना भी आवश्यक होता है; सामान्यतः किसी सत्य-वृक्ष में कितनी भी शाखाएँ हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, निम्न के लिए सत्य-वृक्ष पर विचार करें: $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\}$। हम पहली मान्यता पर $\vee\mathbb{T}$ लगाकर आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi \quad \mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$	$\vee\mathbb{T}\,1$

अब $\wedge\mathbb{F}$ नियम पंक्ति 2 पर लगाया जा सकता है। हम इसे दोनों शाखाओं पर एक साथ लगाते हैं, इसलिए पंक्ति 2 पर जाँच-चिह्न लगा सकते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\wedge\mathbb{F}\,2$

अब $\vee\mathbb{F}$ को $\varphi \vee \psi$ वाली सभी शाखाओं पर लगा सकते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$		$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$		$\mathbb{F}\,\psi$		$\vee\mathbb{F}\,4$
	$\otimes$				

सबसे बाईं शाखा अब बंद है। अब $\vee\mathbb{F}$ को $\varphi \vee \chi$ पर लगाएँ:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	|	$\mathbb{F}\,\varphi$	|	$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$	|	$\mathbb{F}\,\psi$	|	$\vee\mathbb{F}\,4$
7.	$\otimes$	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
8.		$\mathbb{F}\,\chi$		$\mathbb{F}\,\chi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
		$\otimes$			

ध्यान दें कि स्पष्टता के लिए हमने $\vee\mathbb{F}$ के दूसरे प्रयोग का परिणाम नीचे खिसकाया है। इस प्रसंग में इसकी आवश्यकता नहीं थी, क्योंकि औचित्य एक ही होते।

दो शाखाएँ अब भी खुली हैं और $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$, जो पंक्ति 3 पर है, अभी जाँचा नहीं गया है। उस पर $\wedge\mathbb{T}$ लगाकर बंद सत्य-वृक्ष मिलता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$	$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
7.	$\otimes$	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
8.			$\mathbb{T}\,\chi$	$\mathbb{T}\,\chi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
			$\otimes$	$\otimes$	

तुलना के लिए, मान्यताओं के इसी समुच्चय का एक बंद सत्य-वृक्ष यहाँ है जिसमें नियम अलग क्रम में लगाए गए हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓		$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓		$\wedge\mathbb{F}\,2$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$\mathbb{F}\,\psi$		$\mathbb{F}\,\chi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓	$\vee\mathbb{T}\,1$
7.	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,6$
8.		$\mathbb{T}\,\chi$		$\mathbb{T}\,\chi$	$\wedge\mathbb{T}\,6$
		$\otimes$		$\otimes$	

11.5 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

यह अनुभाग सत्य-वृक्षों के लिए सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में यह सहारा नहीं लिया जाता कि वाक्यों को कौन-सी संरचनाएँ संतुष्ट करती हैं, बल्कि कुछ बंद सत्य-वृक्षों के अस्तित्व का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 11.7 (प्रमेय). वाक्य φ *प्रमेय* है यदि $\mathbb{F}\,\varphi$ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो। यदि ऐसा हो तो $\vdash \varphi$ लिखते हैं; यदि φ प्रमेय नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 11.8 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* है; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं। यह तभी और केवल तभी है जब कोई परिमित समुच्चय $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ हो और निम्न समुच्चय के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 11.9 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ हो और निम्न समुच्चय के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

यदि Γ असंगत नहीं है, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 11.10 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\{\varphi\}$, Γ का परिमित उपसमुच्चय है और निम्न सत्य-वृक्ष बंद है:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 11.11 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है। □

प्रतिज्ञप्ति 11.12 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Delta_0 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq \Delta$ ऐसा है कि

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो θ_1, ..., $\theta_m \subseteq \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है।

अब निम्न मान्यताओं वाले सत्य-वृक्ष पर विचार करें:

$$\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m.$$

φ पर Cut नियम लगाएँ। इससे दो शाखाएँ बनती हैं: एक में $\mathbb{T}\,\varphi$ और दूसरी में $\mathbb{F}\,\varphi$ है। अतः पहली शाखा में निम्न सभी उपलब्ध हैं:

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

इन मान्यताओं के लिए बंद सत्य-वृक्ष होने के कारण हम उसे इस शाखा से जोड़ सकते हैं; $\mathbb{T}\,\varphi$ से होकर जाने वाली प्रत्येक शाखा बंद हो जाती है। दूसरी शाखा में निम्न सभी उपलब्ध हैं:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

अतः दूसरी ओर को भी पूरा करके बंद सत्य-वृक्ष पाया जा सकता है। इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 11.13. *Γ असंगत है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$ प्रत्येक वाक्य φ के लिए हो।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 11.14 (संहतता). *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ और निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \dots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

यही सत्य-वृक्ष, $\Gamma_0 \vdash \varphi$ भी दिखाता है।

2. यदि Γ असंगत है, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ के लिए निम्न बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \dots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

यह बंद सत्य-वृक्ष दिखाता है कि Γ_0 असंगत है। □

11.6 व्युत्पन्नता और संगतता

अब हम व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। ये अपने-आप में रोचक हैं, पर इनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 11.15. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ और $\Gamma_1 = \{\chi_1, \dots, \chi_n\} \subseteq \Gamma$ हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \dots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$
$$\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \dots, \mathbb{T}\,\chi_m\}$$

के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं। φ पर Cut नियम लगाकर इन्हें एक बंद सत्य-वृक्ष में जोड़ा जा सकता है, जो दिखाता है कि $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ असंगत है। चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; अतः Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 11.16. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् निम्न के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \dots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

$\neg\mathbb{T}$ नियम का प्रयोग करके इसे निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष में बदला जा सकता है:

$$\{\mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \dots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

दूसरी ओर, यदि बाद वाले के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है, तो पहली मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ और उस पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने से प्राप्त हर सूत्र को हटाकर तथा मान्यता $\mathbb{F}\,\varphi$ जोड़कर हम उसे पहले वाले का बंद सत्य-वृक्ष बना सकते हैं। यदि कोई शाखा पहले इसलिए बंद थी कि उसमें $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने का निष्कर्ष, अर्थात् $\mathbb{F}\,\varphi$, था, तो नए सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद है। यदि पुराने सत्य-वृक्ष में कोई शाखा इसलिए बंद थी कि उसमें मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ के साथ $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ भी था, तो $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ पर लगाकर $\mathbb{T}\,\varphi$ प्राप्त करें। चूँकि हमने $\mathbb{F}\,\varphi$ को मान्यता के रूप में जोड़ा है, इससे शाखा बंद हो जाती है।□

प्रतिज्ञप्ति 11.17. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। मान्यता $\mathbb{F}\,\varphi$ को $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ से बदलें और मान्यताओं के बाद $\mathbb{F}\,\varphi$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने का निष्कर्ष जोड़ें। प्रत्येक वाक्य, जो सत्य-वृक्ष में पुराने सत्य-वृक्ष की पंक्ति 1 के आधार पर उचित ठहराया गया था, अब पंक्ति $n+1$ के आधार पर उचित ठहरता है। अतः यदि पुराना सत्य-वृक्ष बंद था, तो नया भी बंद है। चूँकि सभी मान्यताएँ Γ में हैं, यह दिखाता है कि Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 11.18. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. यदि ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ और χ_1, ..., $\chi_m \in \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\} \text{ और}$$
$$\{\mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_m\}$$

दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हों, तो हम एक संयुक्त बंद सत्य-वृक्ष बना सकते हैं जो दिखाता है कि Γ असंगत है। इसके लिए मान्यताओं के रूप में $\mathbb{T}\,\psi_1$, ..., $\mathbb{T}\,\psi_n$ के साथ $\mathbb{T}\,\chi_1$, ..., $\mathbb{T}\,\chi_m$ लेकर और फिर Cut नियम लगाएँ। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: एक $\mathbb{T}\,\varphi$ से और दूसरी $\mathbb{F}\,\varphi$ से आरंभ होती है।

बाईं ओर पहले सत्य-वृक्ष की मान्यताओं के नीचे का भाग जोड़ें। यहाँ नियम का प्रत्येक प्रयोग अब भी सही है, क्योंकि पहले सत्य-वृक्ष की प्रत्येक मान्यता, $\mathbb{T}\,\varphi$ सहित, उपलब्ध है। अतः $\mathbb{T}\,\varphi$ के नीचे की हर शाखा बंद हो जाती है।

दाईं ओर दूसरे सत्य-वृक्ष की मान्यताओं के नीचे का भाग जोड़ें, पर $\neg\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर लगाने से प्राप्त परिणाम हटा दें। $\neg\mathbb{T}$ का $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर प्रयोग करने का निष्कर्ष $\mathbb{F}\,\varphi$ है, जो फिर भी उपलब्ध है, क्योंकि वह संयुक्त सत्य-वृक्ष की दाईं ओर Cut नियम का निष्कर्ष है।

यदि दूसरे सत्य-वृक्ष की कोई शाखा इसलिए बंद थी कि उसमें मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ (जो अब संयुक्त सत्य-वृक्ष में मान्यता के रूप में नहीं आती) के साथ $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ भी था, तो $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ पर लगाकर $\mathbb{T}\,\varphi$ प्राप्त करें। अब संयुक्त सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद हो जाती है, क्योंकि उसमें Cut नियम का दायाँ निष्कर्ष $\mathbb{F}\,\varphi$ है। यदि दूसरे सत्य-वृक्ष की कोई शाखा किसी अन्य कारण से बंद थी, तो संयुक्त सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद है, क्योंकि $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ के अतिरिक्त सभी चिह्नित सूत्रों, जो पुराने दूसरे सत्य-वृक्ष की शाखा पर आते हैं, संयुक्त सत्य-वृक्ष की संगत शाखा पर भी आते हैं। □

11.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि सत्य-वृक्षों का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 11.19. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$।

प्रमाण. 1. $\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi\}$ दोनों के लिए निम्न बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

2. $\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi, \mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi\}$ के लिए यह बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\psi$		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\psi$	$\wedge\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 11.20. *1.* $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ *असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. हम $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\neg\psi\}$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष देते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\psi$		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\neg\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\psi$		$\neg\mathbb{T}\,3$
6.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,1$
	$\otimes$	$\otimes$	

2. $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 11.21. *1.* $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ *।*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \to \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. $\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$ $\otimes$ $\mathbb{T}\,\psi$ $\otimes$	$\to\mathbb{T}\,2$

2. $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$ $\otimes$	$\neg\mathbb{T}\,2$

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$ $\otimes$	$\to\mathbb{F}\,1$

11.8 सुदृढ़ता

सत्य-वृक्ष जैसा व्युत्पत्ति तंत्र *सुदृढ़* है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न φ सर्वसत्य है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनसे तार्किकतः निष्पन्न भी होता है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

चूँकि ये सभी प्रमाण-सैद्धांतिक गुण किसी-न-किसी प्रकार के बंद सत्य-वृक्ष द्वारा परिभाषित होते हैं, इसलिए ऊपर के (1)–(3) को सिद्ध करने के लिए बंद सत्य-वृक्ष के अर्थवैज्ञानिक गुणों के बारे में कुछ सिद्ध करना होगा। पहले हम

परिभाषित करेंगे कि किसी चिह्नित सूत्र को किसी संरचना में संतुष्ट किया जाना क्या है, और फिर दिखाएँगे कि यदि कोई सत्य-वृक्ष बंद है, तो कोई संरचना उसकी सभी मान्यताओं को संतुष्ट नहीं करती। तब (1)–(3) इस परिणाम के उपप्रमेयों के रूप में मिलेंगे।

परिभाषा 11.22. सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\,\varphi$ को *संतुष्ट करता है* तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, और वह $\mathbb{F}\,\varphi$ को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$। $\mathfrak{v}$, चिह्नित सूत्रों के समुच्चय Γ को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब वह प्रत्येक $S\,\varphi \in \Gamma$ को संतुष्ट करे। Γ *संतुष्टनीय* है यदि उसे संतुष्ट करने वाली कोई सत्य-मूल्यांकन हो; अन्यथा वह *असंतुष्टनीय* है।

प्रमेय 11.23 (सुदृढ़ता). *यदि Γ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है, तो Γ असंतुष्टनीय है।*

प्रमाण. सत्य-वृक्ष की किसी शाखा को संतुष्टनीय तभी और केवल तभी कहें जब उस पर के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय संतुष्टनीय हो; और किसी सत्य-वृक्ष को संतुष्टनीय तब कहें जब उसमें कम-से-कम एक संतुष्टनीय शाखा हो।

हम यह दिखाते हैं: अनुमान-नियमों में से किसी एक द्वारा संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष का विस्तार करने पर सदा संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष ही मिलता है। इससे प्रमेय सिद्ध होगा: हर बंद सत्य-वृक्ष, केवल Γ की मान्यताओं से बने सत्य-वृक्ष पर अनुमान-नियम लगाकर प्राप्त होता है। अतः यदि Γ संतुष्टनीय होता, तो उसके लिए बना प्रत्येक सत्य-वृक्ष संतुष्टनीय होता। किंतु बंद सत्य-वृक्ष स्पष्टतः संतुष्टनीय नहीं है: प्रत्येक शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों होते हैं, और कोई संरचना φ को संतुष्ट तथा असंतुष्ट दोनों नहीं कर सकती।

मान लें हमारे पास संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष है, अर्थात् ऐसा सत्य-वृक्ष जिसकी कम-से-कम एक शाखा संतुष्टनीय है। अनुमान-नियम लगाने पर या तो किसी शाखा में चिह्नित सूत्रों जुड़ते हैं, या शाखा दो भागों में बँटती है। यदि सत्य-वृक्ष में ऐसी संतुष्टनीय शाखा है जिसका संबद्ध नियम-प्रयोग विस्तार नहीं करता, तो वह विस्तृत सत्य-वृक्ष में भी संतुष्टनीय शाखा रहती है; अतः विस्तृत सत्य-वृक्ष संतुष्टनीय है। इसलिए केवल उस प्रसंग पर विचार करना है जिसमें नियम किसी संतुष्टनीय शाखा पर लगाया जाता है।

उस शाखा के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ मानें और जिस चिह्नित सूत्र पर नियम लगाया जाता है उसे $S\,\varphi \in \Gamma$ मानें। यदि नियम से शाखा का विभाजन नहीं होता, तो दिखाना होगा कि विस्तृत शाखा, अर्थात् नियम के निष्कर्षों सहित Γ, अब भी संतुष्टनीय है। यदि नियम से शाखा विभाजित होती है, तो दिखाना होगा कि परिणामी दो शाखाओं में से कम-से-कम एक संतुष्टनीय है।

पहले उन संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं जिनसे शाखा विभाजित नहीं होती।

1. शाखा का विस्तार $\neg\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। तब विस्तृत शाखा में चिह्नित सूत्रों $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\,\psi\}$ होते हैं। मान लें $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$। विशेषतः $\mathfrak{v} \vDash \neg\psi$। अतः $\mathfrak{v} \nvDash \psi$; अर्थात् $\mathfrak{v}$, $\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है।

2. शाखा का विस्तार $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा का विस्तार $\wedge\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है, जिससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्रों मिलते हैं: $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{T}\,\chi$। मान लें $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{v} \vDash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{v} \vDash \psi$ और $\mathfrak{v} \vDash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{v}$, $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{T}\,\chi$ दोनों को संतुष्ट करता है।

4. शाखा का विस्तार $\vee\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

5. शाखा का विस्तार $\rightarrow\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। इससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्रों मिलते हैं: $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{F}\,\chi$। मान लें $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{v} \nvDash \psi \rightarrow \chi$। तब $\mathfrak{v} \vDash \psi$ और $\mathfrak{v} \nvDash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{v}$, $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{F}\,\chi$ दोनों को संतुष्ट करता है।

अब उन संभावित अनुमानों पर विचार करें जिनसे शाखा विभाजित होती है।

1. शाखा का विस्तार $\wedge\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है, जिससे दो शाखाएँ मिलती हैं: बाईं शाखा $\mathbb{F}\,\psi$ से और दाईं शाखा $\mathbb{F}\,\chi$ से आगे बढ़ती है। मान लें $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{v} \nvDash \psi \wedge \chi$। तब या तो $\mathfrak{v} \nvDash \psi$ अथवा $\mathfrak{v} \nvDash \chi$। पहले प्रसंग में $\mathfrak{v}$, $\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है, अर्थात् $\mathfrak{v}$ बाईं शाखा के सूत्रों को संतुष्ट करता है। दूसरे प्रसंग में $\mathfrak{v}$, $\mathbb{F}\,\chi$ को संतुष्ट करता है, अर्थात् $\mathfrak{v}$ दाईं शाखा के सूत्रों को संतुष्ट करता है।

2. शाखा का विस्तार $\vee\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा का विस्तार $\to\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \to \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

4. शाखा को Cutसे विस्तृत किया जाता है। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: एक में $\mathbb{T}\,\psi$ और दूसरी में $\mathbb{F}\,\psi$ है। चूँकि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$ और या तो $\mathfrak{v} \vDash \psi$ अथवा $\mathfrak{v} \nvDash \psi$, इसलिए $\mathfrak{v}$ बाईं या दाईं शाखा में से एक को संतुष्ट करता है। □

उपप्रमेय 11.24. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सर्वसत्य है।*

उपप्रमेय 11.25. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किन्हीं $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ के लिए $\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$ का कोई बंद सत्य-वृक्ष है। प्रमेय 11.23 से प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ या तो किसी ψ_i को असत्य बनाता है, या φ को सत्य बनाता है। अतः यदि $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ भी। □

उपप्रमेय 11.26. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ ऐसे हैं और $\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। प्रमेय 11.23 से ऐसा कोई $\mathfrak{v}$ नहीं है जिसके लिए $\mathfrak{v} \vDash \psi_i$ सभी $i = 1, \ldots, n$ पर हो। अतः Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

प्रश्न

प्रश्न 11.1. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\,\varphi \wedge (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \vee \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\mathbb{T}\,\varphi \to (\psi \to \chi), \mathbb{F}\,\psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{F}\,\neg\neg\varphi$.

प्रश्न 11.2. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\,(\varphi \vee \psi) \to \chi, \mathbb{F}\,\varphi \to \chi$.
2. $\mathbb{T}\,(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\mathbb{T}\,\psi \to \varphi, \mathbb{F}\,\neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\mathbb{F}\,(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\mathbb{T}\,\varphi \to \chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \neg\psi, \mathbb{F}\,\varphi$.

10. $\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \neg\psi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \psi)$.

11. $\mathbb{F}\,(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.

12. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 11.3. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \to \psi), \mathbb{F}\,\varphi$.
2. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \wedge \psi), \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \psi$.
4. $\mathbb{F}\,\neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\psi$.
6. $\mathbb{T}\,(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \mathbb{F}\,(\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $\mathbb{T}\,(\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathbb{F}\,\varphi$.
8. $\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

प्रश्न 11.4. प्रतिज्ञप्ति 11.13 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 11.5. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 11.6. प्रमेय 11.23 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 12

अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

अभी यह सुनिश्चित करने का कोई प्रयास नहीं किया गया है कि इस अध्याय की सामग्री उन विभिन्न टैगों का पालन करे जो बताते हैं कि कौन-से संयोजक और परिमाणक आदिम हैं और कौन-से परिभाषित। सभी को आदिम माना गया है; केवल $\leftrightarrow$ को परिभाषित माना गया है। यदि FOL टैग सत्य हो, तो परिमाणकों वाला संस्करण बनता है; अन्यथा परिमाणकों के बिना।

12.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ संभवतः तर्कशास्त्र के सबसे सरल व्युत्पत्ति तंत्र हैं। व्युत्पत्ति, सूत्रों का केवल एक अनुक्रम है। व्युत्पत्ति माने जाने के लिए अनुक्रम का प्रत्येक सूत्र या तो किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त होना चाहिए, या किसी अनुमान-नियम द्वारा अनुक्रम में उससे पहले आए एक अथवा अधिक सूत्रों से प्राप्त होना चाहिए। व्युत्पत्ति व्युत्पन्न करती है अपने अंतिम सूत्र को।

परिभाषा 12.1 (व्युत्पन्नता). यदि Γ, $\mathcal{L}$ के सूत्रों का समुच्चय है, तो Γ से *व्युत्पत्ति*, सूत्रों का परिमित अनुक्रम φ_1, ..., φ_n है, जिसमें प्रत्येक $i \leq n$ के लिए निम्न में से कोई एक शर्त सत्य होती है:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; अथवा
2. φ_i एक अभिगृहीत है; अथवा
3. φ_i किसी अनुमान-नियम द्वारा किसी φ_j (और φ_k) से प्राप्त होता है, जहाँ $j < i$ (और $k < i$)।

किसे सही व्युत्पत्ति माना जाए, यह इस पर निर्भर है कि हम किन अनुमान-नियमों की अनुमति देते हैं (और निस्संदेह किन्हें अभिगृहीत मानते हैं)। अनुमान-नियम एक यदि-तो कथन है जो बताता है कि कुछ शर्तों के अधीन व्युत्पत्ति का चरण A_i सही अनुमान-चरण है।

परिभाषा 12.2 (अनुमान-नियम). *अनुमान-नियम* इस बात की पर्याप्त शर्त देता है कि Γ से व्युत्पत्ति में कौन-सा चरण सही अनुमान-चरण माना जाएगा।

उदाहरणार्थ, क्योंकि किसी एक-अवयवी अनुक्रम φ को, जब $\varphi \in \Gamma$ हो, तुच्छतः व्युत्पत्ति माना जाता है, इसलिए निम्न एक अत्यंत सरल अनुमान-नियम हो सकता है:

यदि $\varphi \in \Gamma$, तो φ सदा सही अनुमान-चरण है, किसी भी व्युत्पत्ति में, जो Γ से हो।

इसी प्रकार, यदि φ अभिगृहीतों में से एक है, तो अकेला φ ही व्युत्पत्ति है; इसलिए यह भी एक अनुमान-नियम है:

यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो φ सही अनुमान-चरण है।

अनुमान-नियम विचाराधीन चरण से पहले आए सूत्रों का सहारा ले, तो बात अधिक रोचक होती है। निम्न नियम को *पूर्वपक्ष-स्थापन* कहते हैं:

यदि $\psi \to \varphi$ और ψ, व्युत्पत्ति में ऊपर आ चुके हों, तो φ सही अनुमान-चरण है।

यदि यही एकमात्र अनुमान-नियम है, तो ऊपर दी गई व्युत्पत्ति की परिभाषा का अर्थ यह है: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ व्युत्पत्ति तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक $i \leq n$ के लिए निम्न में से कोई एक शर्त सत्य हो:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; अथवा
2. φ_i कोई अभिगृहीत है; अथवा
3. किसी $j < i$ के लिए φ_j, $\psi \to \varphi_i$ है, और किसी $k < i$ के लिए φ_k, ψ है।

अंतिम उपवाक्य कहता है कि φ_i, φ_j ($\psi \to \varphi_i$) और φ_k (ψ) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा प्राप्त होता है। यदि हम 1 से n तक जा सकें और हर बार ऐसा सूत्र φ_i पाएँ जो या तो Γ में हो, कोई अभिगृहीत हो, अथवा जिसे अनुमान-नियम सही अनुमान-चरण बताए, तो पूरा अनुक्रम सही व्युत्पत्ति माना जाता है।

परिभाषा 12.3 (व्युत्पन्नता). सूत्र φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, जिसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, यदि Γ से ऐसी व्युत्पत्ति हो जो φ पर समाप्त होती है।

परिभाषा 12.4 (प्रमेय). सूत्र φ *प्रमेय* है यदि रिक्त समुच्चय से φ की कोई व्युत्पत्ति हो। हम $\vdash \varphi$ लिखते हैं यदि φ प्रमेय है, और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

12.2 प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के अभिगृहीत और नियम

परिभाषा 12.5 (अभिगृहीत). प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के *अभिगृहीतों* का समुच्चय Ax_0 निम्न रूपों के सभी सूत्रों से बना है:

$$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \tag{12.1}$$
$$(\varphi \wedge \psi) \to \psi \tag{12.2}$$
$$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \tag{12.3}$$
$$\varphi \to (\varphi \vee \psi) \tag{12.4}$$
$$\varphi \to (\psi \vee \varphi) \tag{12.5}$$
$$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)) \tag{12.6}$$
$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{12.7}$$
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{12.8}$$
$$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi) \tag{12.9}$$
$$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \tag{12.10}$$
$$\top \tag{12.11}$$
$$\bot \to \varphi \tag{12.12}$$
$$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi \tag{12.13}$$
$$\neg\neg\varphi \to \varphi \tag{12.14}$$

परिभाषा 12.6 (पूर्वपक्ष-स्थापन). यदि ψ और $\psi \to \varphi$ पहले ही व्युत्पत्ति में आ चुके हों, तो φ एक सही अनुमान-चरण है।

पूर्वपक्ष-स्थापन नियम को संक्षेप में "mp" लिखेंगे।

12.3 व्युत्पत्तियाँ के उदाहरण

उदाहरण 12.7. मान लें हम $(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$ सिद्ध करना चाहते हैं। स्पष्टतः यह हमारे किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त नहीं है, इसलिए इसे व्युत्पन्न करने के लिए mp नियम का उपयोग करना होगा। हमारा एकमात्र नियम MP है, जो φ और $\varphi \to \psi$ दिए होने पर ψ को उचित ठहराने देता है। एक युक्ति यह होगी कि समीकरण (12.6) में φ को $\neg\theta$, ψ को α, और χ को $\theta \to \alpha$ मानें; अर्थात् यह दृष्टान्त लें:

$$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))).$$

क्यों? MP के दो प्रयोग अंतिम भाग देते हैं, और हमें वही चाहिए। यह भी सरलता से दिखता है कि $\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$, समीकरण (12.10) का दृष्टान्त है और $\alpha \to (\theta \to \alpha)$, समीकरण (12.7) का दृष्टान्त है। अतः हमारी व्युत्पत्ति है:

1.	$\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$	समीकरण (12.10)
2.	$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to$ $((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)))$	समीकरण (12.6)
3.	$(\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))$	1, 2, mp
4.	$\alpha \to (\theta \to \alpha)$	समीकरण (12.7)
5.	$(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$	3, 4, mp

उदाहरण 12.8. $\theta \to \theta$ की व्युत्पत्ति खोजने का प्रयास करें। यह किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त नहीं है, इसलिए इसे व्युत्पन्न करने के लिए mp का उपयोग करना होगा। समीकरण (12.7), $\varphi \to \psi$ रूप का अभिगृहीत है, जिस पर हम mp लगा सकते हैं। उपयोगी होने के लिए इस प्रसंग में mp द्वारा सही चरण ठहराया जाने वाला ψ, $\theta \to \theta$ ही होना चाहिए, क्योंकि हमें यही व्युत्पन्न करना है। इसका अर्थ है कि φ भी θ होना चाहिए; अर्थात् हम समीकरण (12.7) के इस दृष्टान्त पर विचार कर सकते हैं:

$$\theta \to (\theta \to \theta)$$

mp लगाने के लिए हमें तदनुरूप दूसरे पूर्वाधार, अर्थात् φ, को भी उचित ठहराना होगा। हमारे प्रसंग में वह θ होगा, और अकेले θ को हम व्युत्पन्न नहीं कर पाएँगे। इसलिए दूसरी युक्ति चाहिए।

केवल $\to$ वाला दूसरा अभिगृहीत समीकरण (12.8) है, अर्थात्

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

mp को दो बार लगाकर हम अंतिम अंतर्निहित सापेक्ष तक पहुँच सकते हैं। इसका फिर वही अर्थ है कि हमें समीकरण (12.8) का ऐसा दृष्टान्त चाहिए जिसमें $\varphi \to \chi$, हमारे लक्ष्य सूत्र $\theta \to \theta$ के समान हो। तब निस्संदेह φ और χ दोनों θ हैं। अब ψ कैसे चुनें कि $\varphi \to (\psi \to \chi)$ और $\varphi \to \psi$, अर्थात् हमारे प्रसंग में $\theta \to (\psi \to \theta)$ और $\theta \to \psi$, भी व्युत्पन्न हों? पहला तो हम ψ को जो भी मानें, समीकरण (12.7) का दृष्टान्त है। और $\theta \to \psi$ भी समीकरण (12.7) का एक और दृष्टान्त होगा यदि ψ को $(\theta \to \theta)$ माना जाए। अतः हमारी व्युत्पत्ति है:

1.	$\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)$	समीकरण (12.7)
2.	$(\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)) \to$ $((\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta))$	समीकरण (12.8)
3.	$(\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta)$	1, 2, mp
4.	$\theta \to (\theta \to \theta)$	समीकरण (12.7)
5.	$\theta \to \theta$	3, 4, mp

उदाहरण 12.9. कभी-कभी हम दिखाना चाहते हैं कि कोई व्युत्पत्ति, किसी सूत्र की, कुछ अन्य सूत्रों Γ से, मौजूद है। उदाहरणार्थ, दिखाएँ कि हम व्युत्पन्न करके $\varphi \to \chi$ को $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\}$ से प्राप्त कर सकते हैं।

1.	$\varphi \to \psi$	Hyp
2.	$\psi \to \chi$	Hyp
3.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	समीकरण (12.7)
4.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	2, 3, mp
5.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to$ $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	समीकरण (12.8)
6.	$((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	4, 5, mp
7.	$\varphi \to \chi$	1, 6, mp

"Hyp" (मान्यता) अंकित पंक्तियाँ बताती हैं कि उस पंक्ति का सूत्र, Γ का अवयव है।

प्रतिज्ञप्ति 12.10. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\Gamma \vdash \psi \to \chi$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi \to \chi$।

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ और $\Gamma \vdash \psi \to \chi$। तब कोई व्युत्पत्ति, $\varphi \to \psi$ की, Γ से है; और कोई व्युत्पत्ति, $\psi \to \chi$ की, Γ से भी है। उन्हें क्रमशः जोड़कर एक ही व्युत्पत्ति बनाएँ। अब पिछले उदाहरण की व्युत्पत्ति की पंक्तियाँ 3–7 जोड़ दें। यह व्युत्पत्ति, $\varphi \to \chi$ की—जो नई व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति है— Γ से है। ध्यान दें कि पंक्ति 4 और 7 के औचित्य तब भी वैध रहते हैं जब पंक्ति संख्या 1 के निर्देश को $\varphi \to \psi$ की व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति के निर्देश से, और पंक्ति संख्या 2 के निर्देश को $\psi \to \chi$ की व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति के निर्देश से बदल दिया जाए। □

12.4 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (सर्वसत्यता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में वाक्यों की संरचनाएँ में संतुष्टि का सहारा नहीं लिया जाता, बल्कि कुछ सूत्रों की व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 12.11 (व्युत्पन्नता). सूत्र φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, जिसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, यदि Γ से ऐसी व्युत्पत्ति हो जो φ पर समाप्त होती है।

परिभाषा 12.12 (प्रमेय). सूत्र φ *प्रमेय* है यदि रिक्त समुच्चय से φ की कोई व्युत्पत्ति हो। हम $\vdash \varphi$ लिखते हैं यदि φ प्रमेय है, और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 12.13 (संगतता). सूत्रों का समुच्चय Γ *संगत* तभी और केवल तभी है जब $\Gamma \nvdash \bot$; अन्यथा वह *असंगत* है।

प्रतिज्ञप्ति 12.14 (स्वतुल्यता). *यदि* $\varphi \in \Gamma$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi$।

प्रमाण. अकेला सूत्र φ ही φ की, Γ से, व्युत्पत्ति है। □

प्रतिज्ञप्ति 12.15 (एकदिष्टता). *यदि* $\Gamma \subseteq \Delta$ *और* $\Gamma \vdash \varphi$, *तो* $\Delta \vdash \varphi$।

प्रमाण. φ की, Γ से, प्रत्येक व्युत्पत्ति, φ की, Δ से, व्युत्पत्ति भी है। □

प्रतिज्ञप्ति 12.16 (संक्रामकता). *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, *तो* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।

प्रमाण. मान लें $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$। तब कोई व्युत्पत्ति $\psi_1, \ldots, \psi_l = \psi$, $\{\varphi\} \cup \Delta$ से, है। उस व्युत्पत्ति के कुछ चरण सही होंगे क्योंकि कोई नियम पहले की पंक्ति $\psi_i = \varphi$ का निर्देश करता है। परिकल्पना से φ की, Γ से, कोई व्युत्पत्ति है, अर्थात् व्युत्पत्ति $\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi$, जिसमें प्रत्येक φ_i कोई अभिगृहीत, Γ का अवयव, अथवा किसी अनुमान-नियम से सही चरण है। अब इस अनुक्रम पर विचार करें:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_l = \psi.$$

यह ψ की, $\Gamma \cup \Delta$ से, सही व्युत्पत्ति है, क्योंकि अब हर $B_i = \varphi$ को वही नियम उचित ठहराता है जो $\varphi_k = \varphi$ को उचित ठहराता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए हो, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 12.17. *Γ असंगत है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$, प्रत्येक φ के लिए।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 12.18 (संहतता). *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो सूत्रों का कोई परिमित अनुक्रम $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ऐसा है कि $\varphi \equiv \varphi_n$, और प्रत्येक φ_i या तो कोई तार्किक अभिगृहीत, Γ का अवयव, अथवा पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा पिछले सूत्रों से प्राप्त है। Γ_0 को उन φ_i का समुच्चय मानें जो Γ में हैं। तब वही व्युत्पत्ति, Γ_0 से भी व्युत्पत्ति है; अतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$।

2. यह विशेष प्रसंग $\varphi \equiv \bot$ के लिए (1) का प्रतिधन कथन है। □

12.5 निगमन प्रमेय

जैसा हमने देखा है, किसी अभिगृहीतीय तंत्र में व्युत्पत्तियाँ देना श्रमसाध्य है और व्युत्पत्तियाँ को खोजना कठिन हो सकता है। सूत्रों की लंबी सूचियाँ वास्तव में लिखने के बजाय, कुछ सरल परिणामों का उपयोग करके यह तर्क देना सामान्यतः आसान होता है कि ऐसी व्युत्पत्तियाँ अस्तित्व में हैं। ऐसे तीन परिणाम हम पहले ही स्थापित कर चुके हैं। प्रतिज्ञप्ति 12.14 कहता है कि हम सदा $\Gamma \vdash \varphi$ कह सकते हैं, यदि हमें $\varphi \in \Gamma$ ज्ञात हो। प्रतिज्ञप्ति 12.15 कहता है कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ भी। और प्रतिज्ञप्ति 12.16 से मिलता है कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। यह एक और सरल परिणाम है—पूर्वपक्ष-स्थापन का "अधि"-रूप:

प्रतिज्ञप्ति 12.19. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$।*

प्रमाण. हमारे पास $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ है:

1.	φ	मान्यता
2.	$\varphi \to \psi$	मान्यता
3.	ψ	1, 2, MP

प्रतिज्ञप्ति 12.16 से $\Gamma \vdash \psi$। □

इस प्रसंग में हमारा सबसे महत्त्वपूर्ण परिणाम निगमन प्रमेय है:

प्रमेय 12.20 (निगमन प्रमेय). *$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$।*

प्रमाण. "यदि" दिशा तात्कालिक है। यदि $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, तो प्रतिज्ञप्ति 12.15 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ भी। और प्रतिज्ञप्ति 12.14 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$। अतः प्रतिज्ञप्ति 12.19 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$।

"केवल तभी" दिशा के लिए हम ψ की, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन करते हैं।

आगमन-आधार में लंबाई 1 की हर व्युत्पत्ति के लिए कथन सिद्ध करते हैं। व्युत्पत्ति में, जो ψ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से व्युत्पत्ति है और जिसकी लंबाई 1 है, अकेला ψ होता है; और यदि वह सही है, तो ψ या तो $\in \Gamma \cup \{\varphi\}$ होता है या कोई अभिगृहीत है। यदि $\psi \in \Gamma$ अथवा वह कोई अभिगृहीत है, तो $\Gamma \vdash \psi$। समीकरण (12.7) से हमारे पास $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ भी है; अतः प्रतिज्ञप्ति 12.19 से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। यदि $\psi \in \{\varphi\}$, तो $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, क्योंकि अंतिम वाक्य $\varphi \to \psi$, $\varphi \to \varphi$ के समान है और इसे हम उदाहरण 12.8 में व्युत्पन्न कर चुके हैं।

आगमन-चरण में मान लें कि व्युत्पत्ति में ψ की व्युत्पत्ति $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से होती है और वह ऐसे चरण ψ पर समाप्त होती है जिसे पूर्वपक्ष-स्थापन उचित ठहराता है। (यदि उसे पूर्वपक्ष-स्थापन उचित नहीं ठहराता, तो $\psi \in \Gamma$, $\psi \equiv \varphi$, अथवा ψ कोई अभिगृहीत है; तब आगमन-आधार वाला ही तर्क लागू होता है।) तब व्युत्पत्ति के पहले के कुछ चरण $\chi \to \psi$ और χ हैं, जहाँ सूत्र χ कोई सूत्र है; अर्थात् $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \psi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$। उनकी संबंधित व्युत्पत्तियाँ छोटी हैं, इसलिए आगमन-परिकल्पना उन पर लागू होती है। अतः हमारे पास दोनों हैं:

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \psi);$$
$$\Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

पर हमारे पास यह भी है:

$$\Gamma \vdash (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)),$$

समीकरण (12.8) से; और प्रतिज्ञप्ति 12.19 के दो प्रयोग अपेक्षित $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ देते हैं। □

ध्यान दें कि समीकरण (12.7) और समीकरण (12.8) ठीक इसलिए चुने गए हैं कि निगमन प्रमेय सत्य हो।

निम्न व्युत्पन्नता से संबंधित कुछ उपयोगी तथ्य हैं, जिन्हें हम अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 12.21. *1.* $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$*;*

2. यदि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$*, तो* $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ *(प्रतिधन);*

3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ *(असत्य से कुछ भी, विस्फोट);*

4. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ *(द्विनिषेध-विलोपन);*

5. यदि $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi$*;*

12.6 व्युत्पन्नता और संगतता

अब व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। वे अपने-आप में रोचक हैं, पर उनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 12.22. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *असंगत है, तो* Γ *असंगत है।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$। प्रतिज्ञप्ति 12.14 से $\Gamma \vdash \psi$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ के लिए। परिकल्पना से $\Gamma \vdash \varphi$ भी है, इसलिए $\Gamma \vdash \psi$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ के लिए। प्रतिज्ञप्ति 12.16 से $\Gamma \vdash \bot$; अर्थात् Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 12.23. $\Gamma \vdash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$। तब प्रतिज्ञप्ति 12.15 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$। प्रतिज्ञप्ति 12.14 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$। समीकरण (12.10) से हमारे पास $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ भी है। अतः प्रतिज्ञप्ति 12.19 के दो प्रयोगों से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$।

अब मान लें $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, अर्थात् $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$। निगमन प्रमेय से $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot$। समीकरण (12.13) से $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \bot) \to \neg\neg\varphi$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 12.19 से $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$। चूँकि $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (समीकरण (12.14)), इसलिए प्रतिज्ञप्ति 12.19 के फिर प्रयोग से $\Gamma \vdash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 12.24. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. समीकरण (12.10) से $\Gamma \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$। प्रतिज्ञप्ति 12.19 के दो प्रयोगों से $\Gamma \vdash \bot$। □

प्रतिज्ञप्ति 12.25. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

12.7 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि अभिगृहीतीय निगमन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 12.26. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. समीकरण (12.1) और समीकरण (12.1) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा।

2. समीकरण (12.3) से पूर्वपक्ष-स्थापन के दो प्रयोगों द्वारा। □

प्रतिज्ञप्ति 12.27. *1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. समीकरण (12.9) से $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ और $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$ मिलते हैं। अतः निगमन प्रमेय से $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \bot$ और $\{\neg\psi\} \vdash \psi \to \bot$। समीकरण (12.6) से $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \to \bot$। निगमन प्रमेय से $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \bot$।

2. समीकरण (12.4) और समीकरण (12.5) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा। □

प्रतिज्ञप्ति 12.28. *1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ और $\psi \vdash \varphi \to \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. हम इसे व्युत्पन्न कर सकते हैं:

1.	φ	Hyp
2.	$\varphi \to \psi$	Hyp
3.	ψ	1, 2, mp

2. क्रमशः समीकरण (12.10), समीकरण (12.7), और निगमन प्रमेय से। □

12.8 सुदृढ़ता

अभिगृहीतीय निगमन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र सुदृढ़ है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों का एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. प्रत्येक व्युत्पन्न φ वैध है;
2. यदि φ कुछ अन्य Γ से व्युत्पन्न है, तो वह उनका तार्किक परिणाम भी है;
3. यदि सूत्रों का समुच्चय Γ असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण सत्य न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

प्रतिज्ञप्ति 12.29. *यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए।*

प्रमाण. हर अभिगृहीत की सत्यता-सारणी बनाकर सत्यापित कीजिए कि वह सर्वसत्य है। □

प्रमेय 12.30 (सुदृढ़ता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. हम उस व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन करते हैं जिसमें φ की व्युत्पत्ति Γ से है। यदि किसी अनुमान से उचित ठहराया गया कोई चरण नहीं है, तो सभी सूत्रों, जो व्युत्पत्ति में हैं, या तो अभिगृहीतों के दृष्टान्त हैं अथवा Γ में हैं। पिछले प्रतिज्ञान से सभी अभिगृहीत सर्वसत्य हैं; अतः यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\Gamma \vDash \varphi$। यदि $\varphi \in \Gamma$, तो तुच्छतः $\Gamma \vDash \varphi$।

यदि φ की व्युत्पत्ति के अंतिम चरण को पूर्वपक्ष-स्थापन उचित ठहराता है, तो सूत्रों ψ और $\psi \to \varphi$ उस व्युत्पत्ति में हैं; और उस व्युत्पत्ति के उन भागों पर, जो इन सूत्रों पर समाप्त होते हैं, आगमन-परिकल्पना लागू होती है (क्योंकि उनमें अनुमान से उचित ठहराया गया कम-से-कम एक चरण कम है)। अतः आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi$ और $\Gamma \vDash \psi \to \varphi$। तब प्रमेय 7.21 से $\Gamma \vDash \varphi$।

उपप्रमेय 12.31. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सर्वसत्य है।*

उपप्रमेय 12.32. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब $\Gamma \vdash \bot$, अर्थात् $\bot$ की कोई व्युत्पत्ति, Γ से, है। प्रमेय 12.30 से प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ जो Γ को संतुष्ट करती है, उसे $\bot$ को भी संतुष्ट करना होगा। चूँकि $\mathfrak{v} \nvDash \bot$, प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए, कोई $\mathfrak{v}$, Γ को संतुष्ट नहीं कर सकती; अर्थात् Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

प्रश्न

प्रश्न 12.1. अभिगृहीतों से व्युत्पत्तियाँ देकर दिखाइए कि निम्न सत्य हैं:

1. $(\varphi \land \psi) \to (\psi \land \varphi)$
2. $((\varphi \land \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
3. $\neg(\varphi \lor \psi) \to \neg\varphi$

प्रश्न 12.2. प्रतिज्ञप्ति 12.17 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 12.3. प्रतिज्ञप्ति 12.21 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 12.4. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 12.5. प्रतिज्ञप्ति 12.25 सिद्ध कीजिए।

अध्याय 13

पूर्णता प्रमेय

13.1 परिचय

पूर्णता प्रमेय तर्कशास्त्र के सबसे मूलभूत परिणामों में से एक है। इसके दो सूत्रीकरण हैं, जिनकी समतुल्यता हम सिद्ध करेंगे। पहले सूत्रीकरण में यह अर्थवैज्ञानिक निष्पत्ति और हमारी व्युत्पत्ति-प्रणाली के संबंध के बारे में एक मूलभूत बात कहता है: यदि कोई वाक्य φ, कुछ वाक्यों Γ से तार्किक रूप से निकलता है, तो ऐसी व्युत्पत्ति भी होती है जो $\Gamma \vdash \varphi$ स्थापित करती है। अतः व्युत्पत्ति-प्रणाली उन बातों को सिद्ध किए बिना, जो वास्तव में निष्पन्न नहीं होतीं, जितनी प्रबल हो सकती है उतनी प्रबल है।

दूसरे सूत्रीकरण में इसे प्रतिरूप-अस्तित्व परिणाम के रूप में कहा जा सकता है: वाक्यों का प्रत्येक संगत समुच्चय संतुष्टनीय है। संगतता एक प्रमाण-सैद्धांतिक धारणा है: इसका अर्थ है कि हमारी व्युत्पत्ति-प्रणाली कुछ विशेष प्रकार की व्युत्पत्तियाँ उत्पन्न नहीं कर सकती। किंतु केवल इस कारण कि कुछ विशेष प्रकार की व्युत्पत्तियाँ Γ से नहीं मिलतीं, कौन कह सकता है कि ऐसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ अवश्य है जिसमें $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$? पूर्णता प्रमेय पहली बार सिद्ध होने से पहले—वस्तुतः आज की हमारी व्युत्पत्ति-प्रणालियाँ बनने से भी पहले—महान जर्मन गणितज्ञ डेविड हिल्बर्ट का मत था कि गणितीय सिद्धांतों की संगतता उन वस्तुओं के अस्तित्व की गारंटी देती है जिनके बारे में वे सिद्धांत हैं। गॉटलोब फ्रेगे को लिखे एक पत्र में उन्होंने इसे इस प्रकार कहा:

> यदि मनमाने ढंग से दिए गए अभिगृहीत अपने सभी परिणामों सहित एक-दूसरे का खंडन नहीं करते, तो वे सत्य हैं और अभिगृहीतों द्वारा परिभाषित वस्तुएँ विद्यमान हैं। मेरे लिए सत्य और अस्तित्व का निकष यही है।

फ्रेगे ने इसका तीव्र विरोध किया। पूर्णता प्रमेय का दूसरा सूत्रीकरण दिखाता है कि कम-से-कम इस अर्थ में हिल्बर्ट सही थे कि यदि अभिगृहीत संगत हों, तो ऐसी *कोई* सत्य-मूल्यांकन विद्यमान होती है जो उन सबको सत्य बनाती है।

पूर्णता प्रमेय—या अधिक ठीक कहें तो उसका प्रमाण—के महत्त्व के ये ही कारण नहीं हैं। उसके कई महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं, जिनमें से कुछ पर हम अलग से चर्चा करेंगे। उदाहरणार्थ, $\Gamma \vdash \varphi$ दिखाने वाली प्रत्येक व्युत्पत्ति परिमित होती है और इसलिए Γ के केवल परिमिततः अनेक वाक्यों का उपयोग कर सकती है। अतः पूर्णता प्रमेय से मिलता है कि यदि φ, Γ का परिणाम है, तो वह Γ के किसी परिमित उपसमुच्चय का परिणाम पहले ही है। इसे *संहतता* कहते हैं। समतुल्यतः, यदि Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो स्वयं Γ भी संगत होना चाहिए।

यद्यपि संहतता प्रमेय, व्युत्पत्तियाँ के रास्ते होकर, पूर्णता प्रमेय से निकलता है, फिर भी पूर्णता प्रमेय के *प्रमाण* से उसे सीधे स्थापित करना भी संभव है। वह प्रमाण एक विशेष गुण—संगतता—वाला वाक्यों का समुच्चय लेता है और उसी से कुछ विशेष गुणों वाली संरचना बनाता है (इस प्रसंग में वह संरचना उस समुच्चय को संतुष्ट करती है)। लगभग उसी रचना से संहतता को सीधे स्थापित किया जा सकता है: संगत समुच्चयों के स्थान पर वाक्यों के "परिमिततः संतुष्टनीय" समुच्चयों से आरंभ करें।

13.2 प्रमाण की रूपरेखा

पूर्णता प्रमेय का प्रमाण कुछ जटिल है और उसे पहली बार पढ़ते समय रास्ता भटकना आसान है। इसलिए पहले प्रमाण की रूपरेखा देख लें। पहला चरण दृष्टिकोण का ऐसा परिवर्तन है जो हमें प्रमाण तक पहुँचने का मार्ग दिखाता है। यदि पूर्णता को "जब कभी $\Gamma \vDash \varphi$ हो, तब $\Gamma \vdash \varphi$ होता है" के रूप में सोचें, तो कोई युक्ति सूझना भी कठिन हो सकता है: $\Gamma \vdash \varphi$ दिखाने के लिए हमें व्युत्पत्ति खोजनी है, और यह नहीं दिखता कि $\Gamma \vDash \varphi$ वाली परिकल्पना इसमें किसी प्रकार हमारी सहायता करती है। कुछ प्रमाण-प्रणालियों के लिए व्युत्पत्ति का सीधे निर्माण संभव है, पर हम थोड़ा भिन्न मार्ग लेंगे। आवश्यक दृष्टिकोण-परिवर्तन यह है: पूर्णता को इस रूप में भी कहा जा सकता है: "यदि Γ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है।" संभव है कि हम Γ में निहित सूचना को उसकी संगतता की परिकल्पना के साथ लेकर ऐसी सत्य-मूल्यांकन बना सकें जो Γ के प्रत्येक सूत्र को संतुष्ट करे। आखिर हमें मालूम है कि हम किस प्रकार की सत्य-मूल्यांकन खोज रहे हैं: ऐसी जो ठीक वैसी हो जैसी Γ उसका वर्णन करता है!

यदि Γ में केवल प्रतिज्ञप्ति चरों हों, तो उसका प्रतिरूप बनाना सरल है। हमें बस ऐसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ चुननी है कि $\mathfrak{v} \vDash p$ सभी $p \in \Gamma$ के लिए हो। इसके लिए $\mathfrak{v}(p) = \mathbb{T}$ तभी रखें जब $p \in \Gamma$ हो।

अब मान लें कि Γ में कोई सूत्र $\neg\psi$ है, जहाँ ψ परमाण्विक है। हमें आशंका हो सकती है कि $\mathfrak{v}$ का निर्माण $\neg\psi$ को सत्य बनाने की संभावना में बाधा डालेगा। किंतु यहीं Γ की संगतता काम आती है: यदि $\neg\psi \in \Gamma$ है, तो $\psi \notin \Gamma$ होगा, अन्यथा Γ असंगत होता। और यदि $\psi \notin \Gamma$ है, तो हमारे $\mathfrak{v}$ के निर्माण के अनुसार $\mathfrak{v} \nvDash \psi$ है, इसलिए $\mathfrak{v} \vDash \neg\psi$। यहाँ तक सब ठीक है।

यदि Γ में जटिल, गैर-परमाण्विक सूत्र हों तो क्या होगा? मान लें कि उसमें $\varphi \wedge \psi$ है। इसे सत्य बनाने के लिए हमें ऐसे आगे बढ़ना चाहिए मानो φ और ψ दोनों Γ में हों। और यदि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ है, तो हमें उनमें से कम-से-कम एक को सत्य बनाना होगा, अर्थात् ऐसे आगे बढ़ना होगा मानो उनमें से कोई एक Γ में हो।

इससे निम्न विचार सूझता है: हम Γ में अतिरिक्त सूत्रों इस प्रकार जोड़ें कि (a) परिणामी समुच्चय संगत बना रहे, (b) प्रत्येक संभावित परमाण्विक वाक्य φ के लिए या तो φ परिणामी समुच्चय में हो या $\neg\varphi$ हो, और (c) जब भी $\varphi \wedge \psi$ समुच्चय में हो, तब φ और ψ दोनों भी उसमें हों; यदि $\varphi \vee \psi$ समुच्चय में हो, तो φ या ψ में से कम-से-कम एक भी उसमें हो; इत्यादि। हम यह प्रक्रिया (संभवतः अनंत काल तक) जारी रखते हैं। इस प्रकार जोड़े गए सभी सूत्रों के समुच्चय को Γ^* कहें। तब ऊपर का हमारा निर्माण हमें ऐसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ देगा जिसके बारे में हम आगमन से सिद्ध कर सकेंगे कि वह Γ^* के सभी वाक्यों को संतुष्ट करती है, और इस कारण Γ के सभी वाक्यों को भी, क्योंकि $\Gamma \subseteq \Gamma^*$। पता चलता है कि (a) और (b) की गारंटी ही पर्याप्त है। वाक्यों का ऐसा समुच्चय जिसके लिए (b) सत्य हो, *पूर्ण* कहलाता है। इसलिए हमारा कार्य संगत समुच्चय Γ को संगत और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित करना होगा।

अब देखें कि हम ठीक क्या करेंगे। पहले हम पूर्ण संगत समुच्चयों के गुणों की जाँच करेंगे। विशेषतः हम सिद्ध करेंगे कि पूर्ण संगत समुच्चय में $\varphi \wedge \psi$ तभी होता है जब उसमें φ और ψ दोनों हों, और $\varphi \vee \psi$ तभी होता है जब उनमें से कम-से-कम एक उसमें हो; इत्यादि (प्रतिज्ञप्ति 13.2)। फिर हम संगत समुच्चय Γ लेकर दिखाएँगे कि उसे संगत और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है (सहायक प्रमेय 13.3)। इसी समुच्चय Γ^* से हम अपना सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}(\Gamma^*)$ परिभाषित करेंगे। सत्य-मूल्यांकन का निर्धारण उन प्रतिज्ञप्ति चरों से होता है जो Γ^* में हैं (परिभाषा 13.4)। हम पूर्ण संगत समुच्चयों के गुणों से दिखाएँगे कि वास्तव में $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$ हो (सहायक प्रमेय 13.5), और अतः विशेषतः $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \Gamma$।

13.3 वाक्यों के पूर्ण संगत समुच्चय

परिभाषा 13.1 (पूर्ण समुच्चय). वाक्यों का समुच्चय Γ *पूर्ण* तभी और केवल तभी है जब किसी भी वाक्य φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$ हो या $\neg\varphi \in \Gamma$ हो।

वाक्यों के पूर्ण समुच्चय किसी प्रश्न को अनुत्तरित नहीं छोड़ते। किसी भी वाक्य φ के लिए Γ यह "कहता" है कि φ सत्य है या असत्य। पूर्ण समुच्चयों का महत्त्व पूर्णता प्रमेय के प्रमाण से आगे तक जाता है। उदाहरण के लिए, कोई सिद्धांत जो पूर्ण और अभिगृहीतीकरणीय हो, सदा निर्णेय होता है।

पूर्णता के प्रमाण में पूर्ण संगत समुच्चय महत्त्वपूर्ण हैं, क्योंकि हम गारंटी दे सकते हैं कि वाक्यों का प्रत्येक संगत समुच्चय Γ किसी पूर्ण संगत समुच्चय Γ^* में समाहित है। प्रत्येक पूर्ण संगत समुच्चय में, हर वाक्य φ के लिए, या तो

φ या उसका निषेध $\neg\varphi$ होता है, पर दोनों नहीं। विशेषतः यह प्रतिज्ञप्ति चरों के लिए सत्य है; अतः पूर्ण संगत समुच्चय, हम ऐसी सत्य-मूल्यांकन बना सकते हैं जिसमें प्रतिज्ञप्ति चरों को दिया गया सत्य-मूल्य इस आधार पर परिभाषित होता है कि कौन-से प्रतिज्ञप्ति चरों समुच्चय Γ^* में हैं। फिर दिखाया जा सकता है कि यह सत्य-मूल्यांकन, Γ^* के सभी वाक्यों को (और इसलिए Γ के सभी वाक्यों को भी) सत्य बनाती है। इस अंतिम तथ्य के प्रमाण के लिए यह आवश्यक है कि $\neg\varphi \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \notin \Gamma^*$ हो, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$ या $\psi \in \Gamma^*$ हो, इत्यादि।

आगे हम प्रायः $\vdash$ की स्वतुल्यता, एकदिष्टता और संक्रामकता के गुणों का निःशब्द उपयोग करेंगे (देखें खंड 9.6, 10.5, 11.5 और 12.4)।

प्रतिज्ञप्ति 13.2. *मान लें कि Γ पूर्ण और संगत है। तब:*

1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।*
2. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों।*
3. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*
4. *$\varphi \to \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \notin \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*

प्रमाण. निम्न सभी बातों के लिए मान लें कि Γ पूर्ण और संगत है।

1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।

   मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$। इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.19, 10.17, 11.17 और 12.24 के अनुसार Γ असंगत है। यह इस धारणा का खंडन करता है कि Γ संगत है। अतः $\varphi \notin \Gamma$ नहीं हो सकता, इसलिए $\varphi \in \Gamma$।

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों:

   अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 9.21, 10.19, 11.19 और 12.26 के पद (1) से $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \psi$। (1) से $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ मिलते हैं, जैसा अपेक्षित था।

   विपरीत दिशा के लिए $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ मान लें। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.21, 10.19, 11.19 और 12.26 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$। (1) से $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$।

3. पहले हम दिखाते हैं कि यदि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, तो या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$। मान लें कि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ पर $\varphi \notin \Gamma$ और $\psi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$ और $\neg\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.22, 10.20, 11.20 और 12.27 के पद (1) से Γ असंगत है, जो विरोधाभास है। अतः या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$।

   विपरीत दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.22, 10.20, 11.20 और 12.27 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$। (1) से $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, जैसा अपेक्षित था।

4. अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \to \psi \in \Gamma$, और इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ तथा $\psi \notin \Gamma$। इन धारणाओं पर $\varphi \to \psi \in \Gamma$ और $\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.23, 10.21, 11.21 और 12.28 के पद (1) से $\Gamma \vdash \psi$। किंतु तब (1) से $\psi \in \Gamma$, जो $\psi \notin \Gamma$ वाली धारणा का खंडन करता है।

   विपरीत दिशा के लिए पहले उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.23, 10.21, 11.21 और 12.28 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। पुनः (1) से $\varphi \to \psi \in \Gamma$ मिलता है, जैसा अपेक्षित था।

   अब उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.23, 10.21, 11.21 और 12.28 के पद (2) से फिर $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। (1) से $\varphi \to \psi \in \Gamma$। $\square$

13.4 लिंडेनबाउम उपपत्ति

अब हम एक ऐसी उपपत्ति सिद्ध करते हैं जो दिखाती है कि वाक्यों का कोई भी संगत समुच्चय वाक्यों के ऐसे समुच्चय में समाहित है जो केवल संगत ही नहीं, बल्कि पूर्ण भी है। प्रमाण एक बार में एक वाक्य जोड़ता है और प्रत्येक चरण पर गारंटी देता है कि समुच्चय संगत बना रहे। हम ऐसा इसलिए करते हैं कि प्रत्येक φ के लिए किसी चरण पर या तो φ या $\neg\varphi$ जोड़ दिया जाए। तब इस रचना के सभी चरणों के संघ में या तो φ या उसका निषेध $\neg\varphi$ होता है, और इसलिए वह पूर्ण है। वह संगत भी है, क्योंकि हर चरण पर हम सुनिश्चित करते हैं कि असंगति न आए।

सहायक प्रमेय 13.3 (लिंडेनबाउम उपपत्ति). *प्रत्येक संगत समुच्चय Γ को, भाषा $\mathcal{L}$ में, पूर्ण और संगत समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रमाण. मान लें कि Γ संगत है। $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ को $\mathcal{L}$ के सभी वाक्यों का एक गणन मानें। $\Gamma_0 = \Gamma$ परिभाषित करें, और

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{यदि } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ संगत है;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

रखें। $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$।

प्रत्येक Γ_n संगत है: परिभाषा से Γ_0 संगत है। यदि $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ है, तो इसका कारण यही है कि अंतिम समुच्चय संगत है। यदि वह संगत नहीं है, तो $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$। हमें सत्यापित करना है कि $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ संगत है। मान लें कि वह संगत नहीं है। तब $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ और $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ *दोनों* असंगत हैं। इसका अर्थ होगा कि प्रतिज्ञप्तियाँ 9.20, 10.18, 11.18 और 12.25 से Γ_n असंगत है, जो आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है।

प्रत्येक n और प्रत्येक $i < n$ के लिए $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$। यह बात n पर सरल आगमन से निकलती है। $n = 0$ के लिए कोई $i < 0$ नहीं है, इसलिए कथन स्वतः सत्य है। आगमन-चरण के लिए मान लें कि यह n के लिए सत्य है। हम दिखाते हैं कि यदि $i < n + 1$ तो $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$। रचना से हमारे पास $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ या $= \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ है। अतः $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$। यदि $i < n + 1$, तो आगमन-परिकल्पना से $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ (यदि $i < n$), अथवा इस तुच्छ तथ्य से कि $\Gamma_n \subseteq \Gamma_n$ (यदि $i = n$)। हमें $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ मिलता है, $\subseteq$ की संक्रामकता से।

इससे निकलता है कि Γ^* संगत है। कारण यह है: मान लें कि $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ परिमित है। प्रत्येक $\psi \in \Gamma'$ का Γ_i में होना भी सत्य है, किसी i के लिए। इन सूचकांकों में सबसे बड़ा n मानें। चूँकि $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ यदि $i \leq n$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma'$ का $\in \Gamma_n$ होना भी सत्य है; अर्थात् $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, और Γ_n संगत है। इसलिए प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ संगत है। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.16, 10.14, 11.14 और 12.18 से Γ^* संगत है।

$\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ का प्रत्येक वाक्य, Γ^* को परिभाषित करने में प्रयुक्त सूची में आता है। यदि $\varphi_n \notin \Gamma^*$ है, तो उसका कारण यह है कि $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ असंगत था। किंतु तब $\neg\varphi_n \in \Gamma^*$, इसलिए Γ^* पूर्ण है। $\square$

13.5 प्रतिरूप का निर्माण

अब हम ऐसी सत्य-मूल्यांकन परिभाषित करने को तैयार हैं जो सभी $\varphi \in \Gamma$ को सत्य बनाती है। इसके लिए पहले लिंडेनबाउम उपपत्ति लगाएँ: हमें पूर्ण संगत $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ मिलता है। Γ^* के प्रतिज्ञप्ति चरों को $\mathfrak{v}(\Gamma^*)$ निर्धारित करने दें।

परिभाषा 13.4. मान लें कि Γ^*, सूत्रों का पूर्ण संगत समुच्चय है। तब हम रखते हैं

$$\mathfrak{v}(\Gamma^*)(p) = \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } p \in \Gamma^* \\ \mathbb{F} & \text{यदि } p \notin \Gamma^* \end{cases}$$

सहायक प्रमेय 13.5 (सत्यता उपपत्ति). $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\varphi \in \Gamma^*$।

प्रमाण. हम दोनों दिशाओं को एक साथ और φ पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं।

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \nvDash \bot$ संतुष्टि की परिभाषा से। दूसरी ओर, $\bot \notin \Gamma^*$, क्योंकि Γ^* संगत है।

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \top$ संतुष्टि की परिभाषा से। दूसरी ओर, $\top \in \Gamma^*$, क्योंकि Γ^* संगत और पूर्ण है, और $\Gamma^* \vdash \top$।

3. $\varphi \equiv p$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash p$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v}(\Gamma^*)(p) = \mathbb{T}$ (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $p \in \Gamma^*$ ($\mathfrak{v}(\Gamma^*)$ के निर्माण से)।

4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ (संतुष्टि की परिभाषा से)। आगमन-परिकल्पना से, $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ तभी और केवल तभी जब $\psi \notin \Gamma^*$। चूँकि Γ^* संगत और पूर्ण है, $\psi \notin \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\neg\psi \in \Gamma^*$।

5. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब दोनों $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \psi$ और $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हों (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \in \Gamma^*$ और $\chi \in \Gamma^*$ दोनों हों (आगमन-परिकल्पना से)। प्रतिज्ञप्ति 13.2(2) से यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \wedge \chi) \in \Gamma^*$।

6. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \psi$ या $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हो (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \in \Gamma^*$ या $\chi \in \Gamma^*$ हो (आगमन-परिकल्पना से)। यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \vee \chi) \in \Gamma^*$ (प्रतिज्ञप्ति 13.2(3) से)।

7. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ या $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हो (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \notin \Gamma^*$ या $\chi \in \Gamma^*$ हो (आगमन-परिकल्पना से)। यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \to \chi) \in \Gamma^*$ (प्रतिज्ञप्ति 13.2(4) से)।

13.6 पूर्णता प्रमेय

अब अपने परिणामों को एक साथ रखें: हम पूर्णता प्रमेय पर पहुँचते हैं।

प्रमेय 13.6 (पूर्णता प्रमेय). *मान लें कि Γ, वाक्यों का समुच्चय है। यदि Γ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है।*

प्रमाण. मान लें कि Γ संगत है। सहायक प्रमेय 13.3 से कोई $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ है जो संगत और पूर्ण है। तब सहायक प्रमेय 13.5 से $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$। इससे विशेषतः निकलता है कि सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{v}(\Gamma^*) \vDash \varphi$, अतः Γ संतुष्टनीय है। □

उपप्रमेय 13.7 (पूर्णता प्रमेय, दूसरा रूप). *सभी Γ और वाक्यों φ के लिए: यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. ध्यान दें कि उपप्रमेय 13.7 और प्रमेय 13.6 में आने वाले Γ सार्वत्रिक रूप से परिमाणित हैं। भ्रम से बचने के लिए प्रमेय 13.6 को किसी दूसरे चर से फिर कहें: वाक्यों के किसी भी समुच्चय Δ के लिए, यदि Δ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है। प्रतिपक्ष से, यदि Δ संतुष्टनीय नहीं है, तो Δ असंगत है। हम इसी से उपप्रमेय सिद्ध करेंगे।

मान लें कि $\Gamma \vDash \varphi$। तब प्रतिज्ञप्ति 7.20 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंतुष्टनीय है। $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ को अपना Δ मानने पर प्रमेय 13.6 का पिछला रूप देता है कि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है। प्रतिज्ञप्तियाँ 9.18, 10.16, 11.16 और 12.23 से $\Gamma \vdash \varphi$। □

13.7 संहतता प्रमेय

पूर्णता प्रमेय का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम संहतता प्रमेय है। संहतता प्रमेय कहता है कि यदि वाक्यों के किसी समुच्चय का प्रत्येक *परिमित* उपसमुच्चय संतुष्टनीय है, तो पूरा समुच्चय संतुष्टनीय है—भले ही समुच्चय स्वयं अनंत हो। यह बात तनिक भी स्पष्ट नहीं है। कम-से-कम पहली दृष्टि में ऐसा कुछ नहीं दिखता जो वाक्यों के ऐसे अनंत समुच्चयों की संभावना को रोकता हो जो विरोधाभासी हों, पर जिनमें विरोधाभास मानो उनकी अनंत संख्या से ही उत्पन्न होता हो। संहतता प्रमेय कहता है कि ऐसी स्थिति असंभव है: ऐसा कोई असंतुष्टनीय अनंत वाक्यों-समुच्चय नहीं है जिसका प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय हो। पूर्णता प्रमेय की तरह इसका भी निष्पत्ति से जुड़ा एक रूप है: यदि वाक्यों का कोई अनंत समुच्चय किसी बात को निष्पन्न करता है, तो उसका कोई परिमित उपसमुच्चय पहले ही वह बात निष्पन्न करता है।

परिभाषा 13.8. सूत्रों का समुच्चय Γ *परिमिततः संतुष्टनीय* तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ संतुष्टनीय हो।

प्रमेय 13.9 (संहतता प्रमेय). *किन्हीं भी वाक्यों Γ और φ के लिए निम्न कथन सत्य हैं:*

1. *$\Gamma \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि $\Gamma_0 \vDash \varphi$।*
2. *Γ संतुष्टनीय तभी और केवल तभी है जब वह परिमिततः संतुष्टनीय हो।*

प्रमाण. हम (2) सिद्ध करते हैं। यदि Γ संतुष्टनीय है, तो ऐसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ है कि $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए। निस्संदेह, यह $\mathfrak{v}$ भी Γ के प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय को संतुष्ट करती है, अतः Γ परिमिततः संतुष्टनीय है।

अब मान लें कि Γ परिमिततः संतुष्टनीय है। तब प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ संतुष्टनीय है। सुदृढ़ता से (उपप्रमेय 9.28, 10.24, 11.26 और 12.32), प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संगत है। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 9.16, 10.14, 11.14 और 12.18 से Γ स्वयं संगत होना चाहिए। पूर्णता (प्रमेय 13.6) से, क्योंकि Γ संगत है, वह संतुष्टनीय है। $\square$

13.8 संहतता प्रमेय का प्रत्यक्ष प्रमाण

पूर्णता प्रमेय का सहारा लिए बिना, पूर्णता प्रमेय के प्रमाण वाले ही विचारों से हम संहतता प्रमेय को सीधे सिद्ध कर सकते हैं। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में हमने संगत समुच्चय Γ से आरंभ किया, जो वाक्यों का था; उसे संगत और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया, जो वाक्यों का था; और फिर दिखाया कि सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}(\Gamma^*)$ में, जिसे Γ^* से बनाया गया था, Γ के सभी वाक्यों सत्य हैं; अतः Γ संतुष्टनीय है।

इसी विधि से हम दिखा सकते हैं कि परिमिततः संतुष्टनीय वाक्य-समुच्चय संतुष्टनीय है। हमें सत्यता उपपत्ति तक ले जाने वाले परिणामों के अनुरूप रूपों को बस इस प्रकार सिद्ध करना है कि उनमें "संगत" के स्थान पर "परिमिततः संतुष्टनीय" हो।

प्रतिज्ञप्ति 13.10. *मान लें कि Γ पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय है। तब:*

1. *$(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों।*
2. *$(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*
3. *$(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \notin \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*

सहायक प्रमेय 13.11. *प्रत्येक परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ को पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रमेय 13.12 (संहतता). *Γ संतुष्टनीय तभी और केवल तभी है जब वह परिमिततः संतुष्टनीय है।*

प्रमाण. यदि Γ संतुष्टनीय है, तो ऐसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ है कि $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए। निस्संदेह, यह $\mathfrak{v}$ भी Γ के प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय को संतुष्ट करती है, अतः Γ परिमिततः संतुष्टनीय है।

अब मान लें कि Γ परिमिततः संतुष्टनीय है। सहायक प्रमेय 13.11 से Γ को पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है। परिभाषा 13.4 की तरह सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}(\Gamma^*)$ बनाएँ। सत्यता उपपत्ति (सहायक प्रमेय 13.5) का प्रमाण तब भी चलता है जब हम प्रतिज्ञप्ति 13.2। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 13.1. प्रतिज्ञप्ति 13.2 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 13.2. उपप्रमेय 13.7 से प्रमेय 13.6 को सिद्ध कीजिए और इस प्रकार दिखाइए कि पूर्णता प्रमेय के दोनों रूप समतुल्य हैं।

प्रश्न 13.3. किसी व्युत्पत्ति प्रणाली के पूर्ण होने के लिए उसके नियम इतने प्रबल होने चाहिए कि वे प्रत्येक असंतुष्टनीय समुच्चय को असंगत सिद्ध कर सकें। पूर्णता को सिद्ध करने के लिए व्युत्पत्ति के कौन-से नियम आवश्यक थे? क्या इनमें से कोई नियम प्रमाण में कहीं प्रयुक्त नहीं हुआ? इन प्रश्नों के उत्तर के लिए ऐसी सूची या आरेख बनाइए जो दिखाए कि पूर्णता के प्रमाण तक ले जाने वाले किन परिणामों में व्युत्पत्ति के कौन-से नियम प्रयुक्त हुए। इन प्रमाणों में नियमों के प्रत्येक निःशब्द उपयोग को भी अवश्य अंकित कीजिए। प्रमेय 13.6।

प्रश्न 13.4. प्रमेय 13.9 का (1) सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 13.5. प्रतिज्ञप्ति 13.10 सिद्ध कीजिए। $\vdash$ का उपयोग न करें।

प्रश्न 13.6. सहायक प्रमेय 13.11 सिद्ध कीजिए। (संकेत: निर्णायक चरण यह दिखाना है कि यदि Γ_n परिमिततः संतुष्टनीय है, तो $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ या $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ में से कोई एक परिमिततः संतुष्टनीय है।)

प्रश्न 13.7. सत्यता उपपत्ति सहायक प्रमेय 13.5 का वह पूरा प्रमाण लिखिए जो प्रमेय 13.12 के प्रमाण के लिए आवश्यक है।

खण्ड III

प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र

यह भाग पूर्णता तक प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र के अधिसिद्धांत को समेटता है। अभी यह प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के पृथक विवेचन पर निर्भर नहीं है; सब कुछ सिद्ध किया गया है। यदि "FOL" टैग असत्य हो, तो स्रोत फ़ाइलें परिमाणकों की सामग्री बाहर रखेंगी (और "संरचना" को "सत्य-मूल्यांकन", $\mathfrak{M}$ को $\mathfrak{v}$ आदि से बदलेंगी)। वास्तव में प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र वाले भाग की अधिकांश सामग्री केवल प्रथम-क्रम सामग्री है जिसमें "FOL" टैग बंद है।

यदि प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र वाला भाग सम्मिलित हो, तो इससे बहुत दोहराव होता है। फिर भी योजना है कि यह भाग प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की सामग्री को ध्यान में रख सके (और पहले समेटी गई सामग्री को बाहर रखे तथा प्रमाणों को प्रतिज्ञप्ति भाग के संबद्ध स्थानों के संदर्भों से संक्षिप्त करे)।

अध्याय 14

प्रथम-क्रम तर्क का परिचय

14.1 प्रथम-क्रम तर्क

औपचारिक तर्कशास्त्र से अपने पहले परिचय के कारण आप संभवतः प्रथम-क्रम तर्क से परिचित हैं।[1] आप इसे "परिमाणक तर्क" अथवा "विधेय तर्क" के नाम से जानते होंगे। सबसे पहले, प्रथम-क्रम तर्क एक औपचारिक भाषा है। इसका अर्थ है कि उसकी एक निश्चित शब्दावली है और उसके व्यंजक उस शब्दावली से बनी शृंखलाएँ हैं। किंतु प्रत्येक शृंखला अनुमत नहीं होती। अनुमत व्यंजकों की कई श्रेणियाँ हैं: पदों, सूत्रों और वाक्यों की। हमारी मुख्य रुचि प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों में है: वे हमें सामान्य भाषा के वाक्यों का औपचारिक अनुरूप देते हैं और उनके बारे में हम वे प्रश्न पूछ सकते हैं जिनमें तर्कशास्त्रियों की सामान्यतः रुचि होती है। उदाहरणार्थ:

- क्या ψ, φ से तार्किक रूप से निष्पन्न होता है?
- क्या φ तार्किक रूप से सत्य, तार्किक रूप से असत्य, अथवा आकस्मिक है?
- क्या φ और ψ समतुल्य हैं?

ये प्रश्न मुख्यतः प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों के "अर्थ" से जुड़े हैं। उदाहरणार्थ, कोई दार्शनिक इस प्रश्न का कि क्या ψ, φ से तार्किक रूप से निष्पन्न होता है, इस प्रकार विश्लेषण करेगा: क्या कोई ऐसी स्थिति है जिसमें φ सत्य किंतु ψ असत्य है (ψ, φ से निष्पन्न नहीं होता), या फिर φ को सत्य बनाने वाली प्रत्येक स्थिति ψ को भी सत्य बनाती है (ψ, φ से निष्पन्न होता है)? किंतु अभी हमें यह नहीं बताया गया कि "स्थिति" क्या है—यह *अर्थविज्ञान* का काम है। प्रथम-क्रम तर्क का अर्थविज्ञान "स्थिति" की दार्शनिक सहज धारणा का गणितीय रूप से सटीक प्रतिरूप देता है; साथ ही—और यह महत्त्वपूर्ण है—यह भी सटीक करता है कि किसी स्थिति में वाक्य φ का *सत्य होना* क्या है। जिस गणितीय रूप से सटीक प्रतिरूप का हम विकास करेंगे, उसे संरचना कहते हैं। "में सत्य" को सटीक करने वाला संबंध *संतुष्टि* संबंध कहलाता है। अतः हम "φ, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट है" (चिह्नों में: $\mathfrak{M} \vDash \varphi$) को वाक्यों के प्रत्येक सदस्य φ के लिए परिभाषित करेंगे; इसमें संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ संभावित व्याख्याएँ होंगी। इसके बाद "से निष्पन्न होता है" अथवा "तार्किक रूप से सत्य है" जैसे अन्य अर्थवैज्ञानिक पदों की भी सटीक परिभाषाएँ दी जा सकेंगी। इन परिभाषाओं से हम गणितीय सटीकता के साथ यह निर्धारित कर पाएँगे कि, उदाहरणार्थ, क्या $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x\,\varphi(x) \vDash \exists x\,\psi(x)$। उत्तर निस्संदेह "हाँ" होगा। यदि आपने सामान्य भाषा के वाक्यों को प्रथम-क्रम तर्क में प्रतीकित करना सीखा है, तो आप इसे, उदाहरणार्थ, "सभी चींटियाँ कीट हैं; कुछ चींटियाँ हैं; अतः कीट हैं" के प्रतीकीकरण के रूप में पहचानेंगे। यह स्पष्टतः वैध तर्क है, इसलिए हमारी औपचारिक भाषा में "से निष्पन्न होता है" का गणितीय प्रतिरूप भी यही उत्तर देना चाहिए।

औपचारिक तर्कशास्त्र से अपने पहले परिचय का एक और विषय आपको याद होगा: *व्युत्पत्तियाँ*। यदि आपने औपचारिक तर्कशास्त्र का आरंभिक पाठ्यक्रम लिया है, तो आपके शिक्षक ने ऐसे उदाहरण खोजने का अभ्यास कराया होगा जो व्युत्पत्तियाँ हों, संभवतः ऐसी व्युत्पत्ति भी जो दिखाती है कि ऊपर का निष्पत्ति-संबंध सत्य है। व्युत्पत्तियाँ देने की कई अलग विधियाँ हैं: आपने "प्राकृतिक निष्पत्ति" अथवा "सत्यता-वृक्ष" नामक कोई विधि अपनाई होगी, किंतु और

[1] वास्तव में हम कमोबेश यही मानकर चलते हैं! यदि आप परिचित नहीं हैं, तो *forall x* (Magnus et al., 2021) जैसी कोई अधिक आरंभिक पाठ्यपुस्तक दोहरा सकते हैं।

भी बहुत-सी हैं। व्युत्पत्ति प्रणालियों का उद्देश्य ऐसे साधन देना है जिनसे तर्कशास्त्रियों के ऊपर के प्रश्नों का उत्तर दिया जा सके। उदाहरणार्थ, कोई प्राकृतिक निष्पत्ति व्युत्पत्ति, जिसमें $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ और $\exists x\,\varphi(x)$ आधार-वाक्य तथा $\exists x\,\psi(x)$ निष्कर्ष (अंतिम पंक्ति) हैं, यह *सत्यापित* करती है कि $\exists x\,\psi(x)$, तार्किक रूप से $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ और $\exists x\,\varphi(x)$ से निष्पन्न होता है।

पर ऐसा क्यों है? प्रथम दृष्टि में व्युत्पत्ति प्रणालियों का अर्थविज्ञान से कोई संबंध नहीं दिखता: औपचारिक व्युत्पत्ति देने में केवल चिह्नों को नियमों से नियंत्रित कुछ ढंगों में व्यवस्थित किया जाता है; उसमें "स्थितियों" अथवा "में सत्य" का कोई उल्लेख नहीं होता। व्युत्पत्ति प्रणालियों और अर्थविज्ञान के बीच संबंध को अधितार्किक जाँच से स्थापित करना पड़ता है। उदाहरणार्थ, हमें ऐसा गणितीय प्रमाण चाहिए कि $\exists x\,\psi(x)$ की औपचारिक व्युत्पत्ति, आधार-वाक्यों $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ और $\exists x\,\varphi(x)$ से, तभी और केवल तभी संभव है जब $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ और $\exists x\,\varphi(x)$ मिलकर $\exists x\,\psi(x)$ को निष्पन्न करते हों। किंतु ऐसा करने से पहले वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान की परिभाषाओं को ठीक करने के लिए बहुत-सा सावधानीपूर्ण कार्य करना होगा।

14.2 वाक्यविन्यास

सबसे पहले हमें यह सटीक करना होगा कि चिह्नों की किन शृंखलाओं को प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों की श्रेणी में रखा जाए। यह हम आगे करेंगे; अभी उदाहरणों से काम चलाएँगे। प्रथम-क्रम तर्क के मूल निर्माण-घटक—उसकी शब्दावली—दो भागों में बँटते हैं। पहले भाग में वे चिह्न हैं जिनसे हम विशिष्ट बातें कहते अथवा विशिष्ट वस्तुओं को निर्दिष्ट करते हैं। वस्तुओं को निर्दिष्ट करने के लिए हम अचरों और निर्दिष्ट वस्तुओं के बारे में कुछ कहने के लिए विधेय-चिह्नों का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, किसी एक वस्तु को निर्दिष्ट करने के लिए हम a को अचर मान सकते हैं और फिर वाक्य $P(a)$ द्वारा उसके बारे में कुछ कह सकते हैं। यदि आपके मन में "a" और "P" के अर्थ हैं, तो आप $P(a)$ को सामान्य भाषा के किसी वाक्य की तरह पढ़ सकते हैं (और औपचारिक तर्क पहली बार सीखते समय आपने शायद ऐसा किया भी होगा)। जब प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों के ऐसे सरल उदाहरण मिल जाएँ, तब शब्दावली के दूसरे भाग—तार्किक चिह्नों (संयोजकों और परिमाणकों)—से अधिक जटिल वाक्य बनाए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम $(P(a) \land Q(b))$ अथवा $\exists x\,P(x)$ जैसे व्यंजक बना सकते हैं।

कठोर अधितार्किक अध्ययन के लिए आवश्यक अर्थविज्ञान की सटीक परिभाषाएँ और अपनी व्युत्पत्ति प्रणालियों के नियम देने से पहले हमें यह सटीक परिभाषित करना होगा कि प्रथम-क्रम तर्क का वाक्य किसे माना जाए। मूल विचार सरल है: कुछ सरल वाक्यों के निर्माण में केवल विधेय-चिह्नों और अचरों का उपयोग होता है, जैसे $P(a)$। फिर संयोजकों और परिमाणकों की सहायता से उनसे अधिक जटिल वाक्य बनाए जाते हैं। किंतु वे ठीक कौन-से नियम हैं जिनके अनुसार अधिक जटिल वाक्यों के निर्माण की अनुमति है? इन्हें निर्दिष्ट करना आवश्यक है, अन्यथा हमने "प्रथम-क्रम तर्क का वाक्य" पर्याप्त सटीकता से परिभाषित नहीं किया। यहाँ कुछ समस्याएँ हैं। पहली, ठीक उन्हीं शृंखलाओं को वाक्यों की श्रेणी में रखना है जिन्हें उसमें होना चाहिए। दूसरी, यह ऐसे करना है कि हम *सभी* वाक्यों के बारे में गणितीय प्रमाण दे सकें। अंततः वाक्यों पर कुछ आरंभिक संक्रियाओं की भी सटीक परिभाषाएँ देनी होंगी, जैसे "प्रत्येक x को φ में b से बदलें।" कठिनाई यह है कि प्रथम-क्रम तर्क के परिमाणकों तथा चरों के मेल से यह काम पूरी तरह स्पष्ट नहीं रहता। उदाहरणार्थ, क्या $\exists x\,P(a)$ को वाक्य माना जाए? $\exists x\,\exists x\,P(x)$ का क्या? और "x को b से $(P(x) \land \exists x\,P(x))$ में बदलें" का परिणाम क्या होना चाहिए?

14.3 सूत्रों

प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों को कठोरता से निर्दिष्ट करने और चरों के उपयोग से उठने वाली समस्याओं को सँभालने के लिए हम निम्न पद्धति अपनाएँगे। पहले व्यंजकों के एक *अलग* समुच्चय, अर्थात् सूत्रों के समुच्चय, को परिभाषित करेंगे। इसके बाद हम उनमें चरों की भूमिका पर विचार कर सकेंगे और कुछ अन्य धारणाओं—अर्थात् "मुक्त" और "बद्ध" चरों—के आधार पर परिभाषित कर सकेंगे कि वाक्य क्या है (अर्थात् ऐसा सूत्र जिसमें कोई मुक्त चर न हो)। हम ऐसा केवल इसलिए नहीं करते कि इससे "वाक्य" की परिभाषा अधिक सुगम हो जाती है, बल्कि इसलिए भी कि संतुष्टि की अर्थवैज्ञानिक धारणा को परिभाषित करने की हमारी विधि में यह निर्णायक होगा।

अब किसी सरल प्रथम-क्रम भाषा के लिए "सूत्र" परिभाषित करें। इस भाषा में केवल एक विधेय-चिह्न P, एक अचर a और तार्किक चिह्न $\neg$, $\wedge$ तथा $\exists$ हैं। हमारी पूरी परिभाषाएँ कहीं अधिक सामान्य होंगी: उनमें अनंततः अनेक विधेय-चिह्नों और अचरों की अनुमति होगी। वास्तव में हम ऐसे फलन-चिह्नों पर भी विचार करेंगे जिन्हें अचरों और चरों के साथ जोड़कर "पद" बनाए जा सकते हैं। अभी a और चर ही हमारे पद होंगे। हमें अनंततः अनेक चरों की आवश्यकता है। औपचारिक रूप से हम v_0, v_1, ..., चिह्नों को चर मानेंगे।

परिभाषा 14.1. *सूत्रों* के समुच्चय Frm को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

1. $P(a)$ और $P(v_i)$ को सूत्रों में गिना जाता है ($i \in \mathbb{N}$)।
2. यदि φ कोई सूत्र है, तो $\neg\varphi$ भी सूत्र है।
3. यदि φ और ψ को सूत्रों में गिना जाता है, तो $(\varphi \wedge \psi)$ कोई सूत्र है।
4. यदि φ कोई सूत्र और x कोई चर है, तो $\exists x\, \varphi$ कोई सूत्र है।
5. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

(1) बताती है कि $P(a)$ और $P(v_i)$ को, किसी भी $i \in \mathbb{N}$ के लिए, सूत्रों में गिना जाता है। इन्हें तथाकथित *परमाण्विक* सूत्रों के वर्ग में रखा जाता है और ये हमें आरंभ-बिंदु देते हैं। अन्य खंड पहले से बने सूत्रों से नए सूत्रों के निर्माण की विधियाँ देते हैं। उदाहरणार्थ, (2) से $\neg P(v_2)$ कोई सूत्र है, क्योंकि (1) के अनुसार $P(v_2)$ पहले ही सूत्र है। फिर (4) से $\exists v_2 \neg P(v_2)$ भी सूत्र है, और यह क्रम आगे चलता है। (5) बताती है कि *केवल* इसी ढंग से बनाई जा सकने वाली शृंखलाओं को सूत्रों की श्रेणी में रखा जाता है। विशेषतः, $\exists v_0\, P(a)$ और $\exists v_0\, \exists v_0\, P(a)$ को सूत्रों की श्रेणी में *रखा जाता है*, जबकि अनावश्यक बाहरी कोष्ठकों के कारण $(\neg P(a))$ को नहीं।

सूत्रों को इस प्रकार परिभाषित करना *आगमनात्मक परिभाषा* कहलाता है। इससे हम आगमन द्वारा प्रमाण के एक रूप, *संरचनात्मक आगमन*, का उपयोग करके सूत्रों के बारे में बातें सिद्ध कर सकते हैं। इनकी सामान्य चर्चा खंड 74.4 और खंड 74.5 में है; आगे के प्रमाणों में जाने से पहले आपको उन्हें दोहरा लेना चाहिए। मूल विचार यह है कि यदि आप कोई बात सभी सूत्रों के लिए सिद्ध करना चाहते हैं, तो पहले दिखाते हैं कि वह परमाण्विक सूत्रों के लिए सत्य है; फिर दिखाते हैं कि वह किसी सूत्र φ (और ψ) के लिए सत्य *हो*, तो $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ और $\exists x\, \varphi$ के लिए *भी* सत्य है। उदाहरणार्थ, इससे वह बात $\exists v_2 \neg P(v_2)$ के लिए सिद्ध होती है: पहले भाग से वह परमाण्विक सूत्र $P(v_2)$ के लिए सत्य है। फिर दूसरे भाग से वह $\neg P(v_2)$ के लिए और पुनः $\exists v_2 \neg P(v_2)$ के लिए सत्य है। चूँकि सूत्रों का पूरा वर्ग परमाण्विक सूत्रों से आगमनात्मक रूप से उत्पन्न होता है, यह विधि उनमें से प्रत्येक के लिए काम करती है।

14.4 संतुष्टि

सूत्रों की परिभाषा समझ लेने पर हम प्रथम-क्रम तर्क के अर्थविज्ञान पर आगे बढ़ सकते हैं। यहाँ मूल परिभाषा संरचना की है। हमारी सरल भाषा के लिए संरचना $\mathfrak{M}$ के केवल तीन घटक हैं: *प्रांत* कहलाने वाला कोई अरिक्त समुच्चय $|\mathfrak{M}|$, वह वस्तु जिसे a, $\mathfrak{M}$ में निर्दिष्ट करता है, और वे वस्तुएँ जिनके लिए P, $\mathfrak{M}$ में सत्य है। a द्वारा निर्दिष्ट वस्तु को $a^{\mathfrak{M}}$ और उन वस्तुओं के समुच्चय को, जिनके लिए P सत्य है, $P^{\mathfrak{M}}$ लिखा जाता है। संरचना $\mathfrak{M}$ में ठीक ये तीन चीजें होती हैं: $|\mathfrak{M}|$, $a^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ और $P^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|$। सामान्य स्थिति अधिक जटिल होगी, क्योंकि उसमें अनेक विधेय-चिह्नों और अचरों का उपयोग होगा, अचरों के एक से अधिक स्थान हो सकते हैं, और फलन-चिह्नों का भी उपयोग होगा।

यह उन सूत्रों के लिए संतुष्टि परिभाषित करने को पर्याप्त है जिनमें चरों की कोई उपस्थिति नहीं है। विचार ऐसी आगमनात्मक परिभाषा देने का है जो सूत्रों की हमारी परिभाषा के अनुरूप हो। हम निर्दिष्ट करते हैं कि कोई परमाण्विक सूत्र $\mathfrak{M}$ में कब संतुष्ट है; फिर, उदाहरणार्थ, $\neg\varphi$ $\mathfrak{M}$ में कब संतुष्ट है, यह इस आधार पर बताते हैं कि φ, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट है या नहीं। हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

1. $P(a)$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$।
2. $\neg\varphi$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब φ, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट नहीं है।

3. $(\varphi \wedge \psi)$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब φ, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट है और ψ, $\mathfrak{M}$ में भी संतुष्ट है।

मान लें कि $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathfrak{M}} = 1$ और $P^{\mathfrak{M}} = \{1, 2\}$। यह परिभाषा बताती है कि $P(a)$, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट है (क्योंकि $a^{\mathfrak{M}} = 1 \in \{1, 2\} = P^{\mathfrak{M}}$)। वह यह भी बताती है कि $\neg P(a)$, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट नहीं है; फलतः $\neg\neg P(a)$ संतुष्ट है और $(\neg P(a) \wedge P(a))$ संतुष्ट नहीं है; इत्यादि।

कठिनाई तब आती है जब हम परिमाणकों की परिभाषा देना चाहते हैं। हम कुछ ऐसा कहना चाहेंगे: "$\exists v_0\, P(v_0)$ तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब $P(v_0)$ संतुष्ट है।" किंतु संरचना $\mathfrak{M}$ यह नहीं बताती कि चरों के साथ क्या किया जाए। वास्तव में हम यह कहना चाहते हैं कि $P(v_0)$, v_0 *के किसी मान के लिए* संतुष्ट है। इसे सटीक करने के लिए हमें $|\mathfrak{M}|$ के अवयव में से किसी को केवल a हेतु ही नहीं, बल्कि v_0 हेतु भी चुनने की विधि चाहिए। इसके लिए हम चर *निर्धारण* लेते हैं। चर निर्धारण केवल ऐसा फलन s है जो चरों को $|\mathfrak{M}|$ के अवयव पर प्रतिचित्रित करता है (हमारे उदाहरण में 1, 2 अथवा 3 में से किसी पर)। पहले से यह मालूम नहीं कि किसी सूत्र में किन चरों की उपस्थितियाँ होंगी, इसलिए हम उन चरों को सीमित नहीं कर सकते जिन्हें s मान देता है। सरल समाधान यह अपेक्षा करना है कि s *सभी* चरों v_0, v_1, ... को मान दे। हम केवल आवश्यक मानों का उपयोग करेंगे।

अब हम सूत्रों की संतुष्टि केवल संरचना के सापेक्ष नहीं, बल्कि संरचना $\mathfrak{M}$ *और* चर निर्धारण s के सापेक्ष परिभाषित करेंगे और संक्षेप में $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ लिखेंगे। हमारी परिभाषा में चरों वाले परमाण्विक सूत्रों के लिए एक अतिरिक्त खंड होगा:

1. $\mathfrak{M}, s \vDash P(a)$ तभी और केवल तभी जब $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$।

2. $\mathfrak{M}, s \vDash P(v_i)$ तभी और केवल तभी जब $s(v_i) \in P^{\mathfrak{M}}$।

3. $\mathfrak{M}, s \vDash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ नहीं।

4. $\mathfrak{M}, s \vDash (\varphi \wedge \psi)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ दोनों।

इससे एक समस्या हल हो गई: अब हम कह सकते हैं कि $\mathfrak{M}$, $P(v_0)$ को मान $s(v_0)$ के लिए कब संतुष्ट करती है। $\exists v_0\, P(v_0)$ की परिभाषा ठीक करने के लिए एक काम और करना होगा। हम चाहते हैं कि $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_0\, P(v_0)$ तभी और केवल तभी हो जब $\mathfrak{M}, s' \vDash P(v_0)$, *किसी* ऐसे निर्धारण s' के लिए सत्य हो जो v_0 को कोई मान देता है। किंतु v_0 को दिया मान अनिवार्यतः $s(v_0)$ द्वारा निर्दिष्ट मान नहीं होना चाहिए। इसके लिए एक संकेतन लें: यदि $m \in |\mathfrak{M}|$, तो $s[m/v_0]$ वह निर्धारण है जो s जैसा है (सभी चरों v_0 को छोड़कर), किंतु v_0 को m देता है। अब हमारी परिभाषा यह हो सकती है:

5. $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_i\, \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s[m/v_i] \vDash \varphi$, किसी $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए।

क्या यह काम करता है? मान लें कि $s(v_i) = 0$, सभी $i \in \mathbb{N}$ के लिए। $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_0\, P(v_0)$ तभी और केवल तभी जब कोई $m \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}, s[m/v_0] \vDash P(v_0)$। ऐसा मान है: हम $m = 1$ अथवा $m = 2$ चुन सकते हैं। ध्यान दें कि यह तब भी सत्य है जब मान $s(v_0)$, जो v_0 को स्वयं s द्वारा दिया गया है—इस स्थिति में 0—काम नहीं करता। हमारे पास $\mathfrak{M}, s[1/v_0] \vDash P(v_0)$ है, किंतु $\mathfrak{M}, s \vDash P(v_0)$ नहीं।

यदि यह उलझा हुआ और बोझिल लगता है, तो वास्तव में ऐसा ही है। किंतु सभी सूत्रों के लिए संतुष्टि की सटीक आगमनात्मक परिभाषा देने हेतु यह अतिरिक्त जटिलता आवश्यक है; अर्थवैज्ञानिक धारणाओं को सटीक रूप से परिभाषित करने के लिए हमें इसी प्रकार की कोई विधि चाहिए। इसे करने की दूसरी विधियाँ भी हैं, पर वे सभी समान रूप से (अ)सुरुचिपूर्ण हैं।

14.5 वाक्यों

अब हमारे सामने संरचनाएँ हैं और हमारे पास सूत्रों के लिए संतुष्टि ("में सत्य") की परिभाषा की एक रूपरेखा है। किंतु उसके लिए एक अतिरिक्त वस्तु— चर निर्धारण—चाहिए, जबकि हमें वाक्यों की परिभाषा चाहिए थी। निर्धारणों से छुटकारा कैसे मिले और वाक्यों की पहचान कैसे की जाए?

औपचारिक तर्कशास्त्र से अपने पहले परिचय में चरों और परिमाणकों के संबंध की चर्चा आपको याद होगी। परिमाणक के बाद सदा चर आता है; फिर वाक्य के जिस भाग पर वह परिमाणक लागू होता है (उसका "परास"), उसमें उस चर को उस परिमाणक द्वारा "बद्ध" समझा जाता है। सूत्रों में यह आवश्यक नहीं था कि प्रत्येक चर का कोई संगत परिमाणक हो। जिन चरों के लिए संगत परिमाणक न हो, उनकी उपस्थितियाँ "मुक्त" अथवा "अबद्ध" होती हैं। हम उन सभी सूत्रों को वाक्यों की श्रेणी में रखेंगे जिनमें कोई मुक्त चर नहीं है।

किसी सूत्र φ में चर की कोई उपस्थिति कब बद्ध है, उसे कौन-सा परिमाणक बाँधता है और वह कब मुक्त है—इसका सहज विचार समझना कठिन नहीं है। संभवतः आपने इसकी जाँच की कोई विधि सीखी होगी, जिसमें शायद कोष्ठक गिनने पड़ते हों। हमें एक सटीक परिभाषा चाहिए। चूँकि सूत्रों को आगमन द्वारा परिभाषित किया गया है, इसलिए चर x की मुक्त और बद्ध उपस्थितियाँ सूत्र φ में भी आगमन द्वारा परिभाषित की जा सकती हैं। हमारी सरल भाषा में वह परिभाषा ऐसी दिख सकती है:

1. यदि φ परमाण्विक है, तो उसमें x की सभी उपस्थितियाँ मुक्त हैं (अर्थात् x की उपस्थिति $P(x)$ में मुक्त है)।
2. यदि φ का रूप $\neg\psi$ है, तो x की कोई उपस्थिति $\neg\psi$ में तभी और केवल तभी मुक्त है जब x की संगत उपस्थिति ψ में मुक्त हो (अर्थात् ψ में चरों की मुक्त उपस्थितियाँ ठीक $\neg\psi$ की संगत उपस्थितियाँ हैं)।
3. यदि φ का रूप $(\psi \wedge \chi)$ है, तो x की कोई उपस्थिति $(\psi \wedge \chi)$ में तभी और केवल तभी मुक्त है जब x की संगत उपस्थिति ψ अथवा χ में मुक्त हो।
4. यदि φ का रूप $\exists x\, \psi$ है, तो x की कोई उपस्थिति φ में मुक्त नहीं है। यदि उसका रूप $\exists y\, \psi$ है, जहाँ y, x से भिन्न चर है, तो x की कोई उपस्थिति $\exists y\, \psi$ में तभी और केवल तभी मुक्त है जब x की संगत उपस्थिति ψ में मुक्त हो।

चरों की मुक्त और बद्ध उपस्थितियों की सटीक परिभाषा मिल जाने पर हम बस यह कह सकते हैं: वाक्य ऐसा कोई भी सूत्र है जिसमें चरों की मुक्त उपस्थितियाँ न हों।

14.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ

ऊपर हमने कहा कि $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ सत्य है या नहीं, इस पर विचार करते समय सुविधा के लिए s को सभी चरों के मान देने देते हैं, किंतु उपयोग केवल उन मानों का होता है जो वह φ में आने वाले चरों को देता है। वास्तव में केवल φ के *मुक्त* चरों के मान महत्त्व रखते हैं। सावधानी के कारण हम इस तथ्य को सिद्ध भी करेंगे। चूँकि वाक्यों में कोई मुक्त चर नहीं होता, इसलिए संरचना में वे संतुष्ट हैं या नहीं, इसमें s का कोई महत्त्व नहीं। अतः जब φ कोई वाक्य हो, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ का अर्थ "$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$, सभी s के लिए" परिभाषित किया जा सकता है। यह ठीक तभी सत्य होता है जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ कम-से-कम एक s के लिए सत्य हो। सूत्रों के लिए संतुष्टि की उपयोगी परिभाषा पाने हेतु चर निर्धारण आवश्यक हैं, किंतु वाक्यों के लिए संतुष्टि चर निर्धारणों से स्वतंत्र है।

"$\mathfrak{M} \vDash \varphi$" की परिभाषा मिल जाने पर प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों के संदर्भ में हम जानते हैं कि "स्थिति" और "में सत्य" का क्या अर्थ है। वाक्यों के लिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ की परिभाषा के आधार पर हम वैधता, निष्पत्ति और संतुष्टनीयता की मूल अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ परिभाषित कर सकते हैं। कोई वाक्य तब वैध, $\vDash \varphi$, है जब प्रत्येक संरचना उसे संतुष्ट करती है। वह वाक्यों के किसी समुच्चय से निष्पन्न, $\Gamma \vDash \varphi$, तब होता है जब Γ के सभी वाक्यों को संतुष्ट करने वाली प्रत्येक संरचना, φ को भी संतुष्ट करती है। और वाक्यों का कोई समुच्चय तब संतुष्टनीय है जब कोई संरचना उसके सभी वाक्यों को एक साथ संतुष्ट करती हो।

चूँकि सूत्रों का वर्ग आगमनात्मक रूप से परिभाषित है और संतुष्टि भी सूत्रों की संरचना पर आगमन द्वारा परिभाषित है, इसलिए अर्थविज्ञान के गुण सिद्ध करने और परिभाषित अर्थवैज्ञानिक धारणाओं को परस्पर जोड़ने के लिए हम आगमन का उपयोग कर सकते हैं। इनमें से कुछ गुणों को हम संकलित और सिद्ध करेंगे: आंशिक रूप से इसलिए कि वे अपने-आप में रोचक हैं, किंतु मुख्यतः इसलिए कि अर्थविज्ञान और व्युत्पत्ति प्रणालियों के संबंध की आगे जाँच करते समय उनमें से अनेक उपयोगी होंगे। इसके लिए कुछ ऐसी वाक्यविन्यासी धारणाएँ और संक्रियाएँ भी सटीक रूप से, अर्थात् आगमन द्वारा, परिभाषित करनी होंगी जिनका अभी उल्लेख नहीं हुआ।

14.7 प्रतिस्थापन

अब हम एक उदाहरण से स्पष्ट करेंगे कि ये बातें परस्पर कैसे जुड़ती हैं और वाक्यविन्यास तथा अर्थविज्ञान का विकास आगे की अधिक उन्नत जाँचों के लिए आधार कैसे बनाता है। हमारी व्युत्पत्ति प्रणालियाँ हमें $P(a)$ को $\forall v_0\, P(v_0)$ से व्युत्पन्न करने दें। संभव है कि हम इसे अनुमिति-नियम के रूप में भी कहना चाहें। किंतु ऐसा करने के लिए इसे सबसे सामान्य रूप में कह पाना आवश्यक है: केवल P, a और v_0 के लिए नहीं, बल्कि किसी भी सूत्र φ, पद t और चर x के लिए। (याद रखें कि अचरों को पदों में गिना जाता है, किंतु हम अचरों और फलन-चिह्नों से बने अधिक जटिल पदों पर भी विचार करेंगे।) अतः हम कुछ ऐसा कह पाना चाहते हैं: "जब भी आपने $\forall x\, \varphi(x)$ को व्युत्पन्न कर लिया हो, तब $\varphi(t)$ का अनुमान करना उचित है—यह $\forall x$ को हटाकर x के स्थान पर t रखने का परिणाम है।" किंतु "x के स्थान पर t रखना" ठीक-ठीक क्या है? $\varphi(x)$ और $\varphi(t)$ के बीच क्या संबंध है? क्या यह सदा काम करता है?

इसे सटीक बनाने के लिए हम *प्रतिस्थापन* संक्रिया परिभाषित करते हैं। प्रतिस्थापन वास्तव में पेचीदा है, क्योंकि हम सभी x को φ में बस t से नहीं बदल सकते, और हर t को किसी भी x के स्थान पर प्रतिस्थापित नहीं किया जा सकता। इसे भी हम आगमनात्मक परिभाषाओं से सँभालेंगे। पर यह हो जाने पर अनुमिति-नियम को "$\varphi(t)$ का अनुमान $\forall x\, \varphi(x)$ से करो" कहकर निर्दिष्ट करना एक सटीक परिभाषा बन जाता है। इतना ही नहीं, हम दिखा सकेंगे कि यह इस अर्थ में अच्छा अनुमिति-नियम है कि $\forall x\, \varphi(x)$ से $\varphi(t)$ निष्पन्न होता है। किंतु इसे सिद्ध करने के लिए हमें फिर ऐसी बात सिद्ध करनी होगी जिसे पहली दृष्टि में देखकर आप पूछ सकते हैं, "हम यह क्यों कर रहे हैं?" $\forall x\, \varphi(x)$ से $\varphi(t)$ निष्पन्न होना इस तथ्य पर निर्भर है कि $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$ सत्य है या नहीं, यह केवल पद t के मान पर निर्भर करता है; अर्थात् यदि m, $|\mathfrak{M}|$ का वह अवयव हो जिसे t निर्दिष्ट करता है, तो $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$। यह तब भी सत्य है जब t में चरों की उपस्थितियाँ हों, किंतु परिणाम को ठीक-ठीक कहने में हमें सावधानी रखनी होगी।

14.8 प्रतिरूप और सिद्धान्त

प्रथम-क्रम तर्क का वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान परिभाषित कर लेने पर संरचनाएँ हमारे सामने होती हैं और हम उनके तथा अर्थवैज्ञानिक धारणाओं के गुणों की जाँच आरंभ कर सकते हैं। हम व्युत्पत्ति प्रणालियाँ भी परिभाषित करके उनकी जाँच कर सकते हैं। वाक्यों के किसी समुच्चय के बारे में हम पूछ सकते हैं: कौन-सी संरचनाएँ उस समुच्चय के सभी वाक्यों को सत्य बनाती हैं? वाक्यों का समुच्चय Γ दिया हो, तो उन्हें संतुष्ट करने वाली संरचना $\mathfrak{M}$ को Γ *का प्रतिरूप* कहते हैं। हम Γ से आरंभ करके उसके प्रतिरूप खोजने का प्रयत्न कर सकते हैं—वे कैसे दिखते हैं? उन्हें कितना बड़ा या छोटा होना पड़ता है? किंतु हम किसी एक संरचना से अथवा ऐसे किसी संग्रह से भी आरंभ कर सकते हैं जिसमें संरचनाएँ हों, और यह पूछ सकते हैं: उसमें किन वाक्यों को सत्य माना जाता है? क्या उन वाक्यों में कुछ ऐसे हैं जिनके द्वारा ठीक ये संरचनाएँ इस अर्थ में *लक्षणित* होती हों कि वे वाक्य इन्हीं में, और केवल इन्हीं में, सत्य हों? ऐसे प्रश्न *प्रतिरूप सिद्धान्त* के विषय हैं। वे *अभिगृहीतीय विधि* के आधार में भी हैं: ऐसे किसी संग्रह का वर्णन करना जिसमें संरचनाएँ हों, और उसका वर्णन वाक्यों के ऐसे समुच्चय से करना जो किसी सिद्धान्त के अभिगृहीत हों। यह इस अवलोकन से संभव होता है कि अभिगृहीतों से प्रथम-क्रम तर्क में जिन वाक्यों की निष्पत्ति होती है, ठीक वे सभी अभिगृहीतों के प्रतिरूपों में सत्य होते हैं।

एक अत्यंत सरल उदाहरण के रूप में पूर्वक्रमों पर विचार करें। पूर्वक्रम ऐसा संबंध R है जो किसी समुच्चय A पर स्वतुल्य और संक्रामक दोनों है। समुच्चय A पर द्वि-स्थानीय संबंध $R \subseteq A \times A$ ठीक वही सामग्री है जो एक ही द्वि-स्थानीय संबंध-चिह्न P वाली प्रथम-क्रम भाषा के लिए संरचना देने को चाहिए: हम $|\mathfrak{M}| = A$ और $P^{\mathfrak{M}} = R$ रखेंगे। चूँकि R एक पूर्वक्रम है, वह स्वतुल्य और संक्रामक है, और हम प्रथम-क्रम तर्क के वाक्यों का ऐसा समुच्चय Γ पा सकते हैं जो यही कहता है:

$$\forall v_0\, P(v_0, v_0)$$
$$\forall v_0\, \forall v_1\, \forall v_2\, ((P(v_0, v_1) \land P(v_1, v_2)) \to P(v_0, v_2))$$

वाक्यों के ये दो उदाहरण केवल "किसी भी x के लिए Rxx" (R स्वतुल्य है) और "जब भी Rxy तथा Ryz, तब Rxz भी" (R संक्रामक है) के प्रतीकीकरण हैं। हम देखते हैं कि संरचना $\mathfrak{M}$ इन दो वाक्यों से बने Γ का प्रतिरूप तभी और केवल तभी है जब R (अर्थात् $P^{\mathfrak{M}}$), A पर पूर्वक्रम हो (अर्थात् $|\mathfrak{M}|$ पर)। दूसरे शब्दों में, Γ के प्रतिरूप ठीक सभी

पूर्वक्रम हैं। सभी पूर्वक्रमों का कोई भी ऐसा गुण जिसे केवल P को विधेय-चिह्न मानने वाली प्रथम-क्रम भाषा में व्यक्त किया जा सके (जैसे ऊपर स्वतुल्यता और संक्रामकता), Γ के दो वाक्यों से निष्पन्न होता है, और इसका विलोम भी सत्य है। अतः Γ के प्रतिरूपों के बारे में हम जो कुछ सिद्ध कर सकते हैं, वह सभी पूर्वक्रमों के बारे में सिद्ध कर चुके हैं।

किसी विशिष्ट सिद्धान्त और प्रतिरूप-वर्ग (जैसे Γ और सभी पूर्वक्रम) के लिए इस बारे में रोचक प्रश्न होंगे कि संगत प्रथम-क्रम भाषा में क्या व्यक्त किया जा सकता है और क्या नहीं। संरचनाएँ कुछ ऐसे गुण रखती हैं जो सभी भाषाओं और प्रतिरूप-वर्गों के लिए रोचक हैं, विशेषतः प्रांत के आकार से संबंधित गुण। उदाहरणार्थ, यह सदा व्यक्त किया जा सकता है कि प्रांत में ठीक n अवयव हैं, किसी भी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए। अनंत रूप से अनेक वाक्यों के किसी समुच्चय से यह भी व्यक्त किया जा सकता है कि प्रांत अनंत है। किंतु यह व्यक्त नहीं किया जा सकता कि प्रांत परिमित है, अथवा यह कि प्रांत अगणनीय है। प्रथम-क्रम भाषाओं की सीमाओं संबंधी ये तथ्य संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेयों से निकलते हैं।

14.9 सुदृढ़ता और पूर्णता

हम प्रथम-क्रम तर्क के लिए व्युत्पत्ति प्रणालियाँ भी प्रस्तुत करेंगे। तर्कशास्त्रियों ने अनेक व्युत्पत्ति प्रणालियाँ विकसित की हैं, किंतु वे सभी वाक्यों के बीच वही व्युत्पन्नता संबंध परिभाषित करती हैं। हम कहते हैं कि Γ, φ को *व्युत्पन्न* करता है, अर्थात् $\Gamma \vdash \varphi$, यदि किसी सटीक रूप से परिभाषित प्रकार की व्युत्पत्ति हो। व्युत्पत्तियाँ सदा चिह्नों की परिमित व्यवस्थाएँ होती हैं—संभवतः वाक्यों की सूची, अथवा कोई अधिक जटिल संरचना। व्युत्पत्ति प्रणालियों का उद्देश्य यह निर्धारित करने का साधन देना है कि कोई वाक्य, किसी समुच्चय Γ से निष्पन्न होता है या नहीं। इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए यह सत्य होना चाहिए कि $\Gamma \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$।

यदि $\Gamma \vdash \varphi$ किंतु $\Gamma \vDash \varphi$ नहीं, तो हमारी व्युत्पत्ति प्रणाली अत्यधिक प्रबल होगी और आवश्यकता से अधिक सिद्ध करेगी। यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$—इस गुण को *सुदृढ़ता* कहते हैं, और यह किसी भी अच्छी व्युत्पत्ति प्रणाली की न्यूनतम अपेक्षा है। दूसरी ओर, यदि $\Gamma \vDash \varphi$ किंतु $\Gamma \vdash \varphi$ नहीं, तो हमारी व्युत्पत्ति प्रणाली अत्यधिक दुर्बल होगी और पर्याप्त सिद्ध नहीं करेगी। यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$—इस गुण को *पूर्णता* कहते हैं। सुदृढ़ता को सिद्ध करना सामान्यतः अपेक्षाकृत सरल है (आगमनात्मक रूप से परिभाषित व्युत्पत्तियाँ जिस संरचना के अनुसार बनती हैं, उस संरचना पर आगमन द्वारा)। पूर्णता को सिद्ध करना अधिक कठिन है।

सुदृढ़ता और पूर्णता के अनेक महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं। यदि वाक्यों का कोई समुच्चय Γ किसी विरोधाभास (जैसे $\varphi \wedge \neg\varphi$) को व्युत्पन्न करता है, तो उसे *असंगत* कहते हैं। असंगत Γ का कोई प्रतिरूप नहीं हो सकता; वह असंतुष्टनीय होता है। पूर्णता से इसका विलोम मिलता है: जो भी Γ असंगत नहीं है—अर्थात्, जैसा हम कहेंगे, *संगत* है—उसका एक प्रतिरूप होता है। वास्तव में यह पूर्णता के समतुल्य है और पूर्णता का वही रूप है जिसे हम सचमुच सिद्ध करेंगे। यह एक गहन और संभवतः आश्चर्यजनक परिणाम है: केवल यह कि आप $\varphi \wedge \neg\varphi$ को Γ से सिद्ध नहीं कर सकते, इस बात की गारंटी देता है कि ऐसी संरचना है जो Γ द्वारा किए गए वर्णन के अनुरूप है। अतः पूर्णता इस प्रश्न का उत्तर देती है: वाक्यों के किन समुच्चयों के प्रतिरूप होते हैं? उत्तर: ठीक सभी संगत समुच्चयों के।

सुदृढ़ता और पूर्णता के दो महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं। पहला संहतता प्रमेय है और दूसरा लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय। ये प्रतिरूप सिद्धान्त के महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं और अनेक रोचक परिणाम स्थापित करने में उपयोग किए जा सकते हैं। हम पहले ही दो का उल्लेख कर चुके हैं: प्रथम-क्रम तर्क यह व्यक्त नहीं कर सकता कि संरचना का प्रांत परिमित है अथवा वह अगणनीय है।

ऐतिहासिक रूप से यह सब समझने और ठीक करने में बहुत समय लगा—प्रथम-क्रम तर्क का वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान कैसे परिभाषित करें, अच्छी व्युत्पत्ति प्रणालियाँ कैसे परिभाषित करें, उन्हें सुदृढ़ और पूर्ण कैसे सिद्ध करें, और प्रथम-क्रम भाषाओं में क्या व्यक्त किया जा सकता है तथा क्या नहीं, इसे स्पष्ट कैसे करें। अब हम जानते हैं कि यह कैसे करना है, किंतु सभी विवरणों से गुजरना फिर भी उलझाने वाला और श्रमसाध्य हो सकता है। फिर भी यह महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि प्रथम-क्रम तर्क की औपचारिक भाषा के लिए यहाँ विकसित विधियाँ तर्कशास्त्र, संगणक विज्ञान और भाषाविज्ञान में व्यापक रूप से लागू होती हैं। अतः विवरणों पर मेहनत करना अंततः फलदायी होता है।

अध्याय 15

प्रथम-क्रम तर्क का वाक्यविन्यास

15.1 परिचय

प्रथम-क्रम तर्क के सिद्धांत और अधिसिद्धांत को विकसित करने के लिए हमें पहले उसकी अभिव्यक्तियों के वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान को परिभाषित करना होगा। प्रथम-क्रम तर्क की अभिव्यक्तियाँ पद और सूत्रों हैं। पद चरों, अचरों और फलन-चिह्नों से बनते हैं। इसके बाद सूत्रों, विधेय-चिह्नों और पदों से बनते हैं (इनसे सबसे छोटे, "परमाण्विक" सूत्रों बनते हैं); फिर तार्किक संयोजकों और परिमाणकों का उपयोग करके परमाण्विक सूत्रों से अधिक जटिल सूत्र बनाए जा सकते हैं। निर्माण-नियम देने के अनेक ढंग हैं; यहाँ हम केवल एक संभव ढंग देते हैं। अन्य पद्धतियाँ भिन्न प्रतीक चुनेंगी, संयोजकों के भिन्न समुच्चयों को आदिम मानेंगी और कोष्ठकों का भिन्न प्रकार से उपयोग करेंगी (या तथाकथित पोलिश संकेतन की तरह उनका बिल्कुल उपयोग नहीं करेंगी)। फिर भी सभी दृष्टिकोणों में यह बात समान है कि निर्माण-नियम पदों और सूत्रों के समुच्चय को *आगमनात्मक रूप से* परिभाषित करते हैं। परिभाषा ठीक ढंग से दी गई हो तो निर्माण-नियमों के अनुसार प्रत्येक अभिव्यक्ति मूलतः केवल एक ही प्रकार से बन सकती है। अभिव्यक्तियों को *अद्वितीय रूप से पठनीय* बनाने वाली आगमनात्मक परिभाषा के कारण हम उसी विधि—आगमनात्मक परिभाषा—से इन अभिव्यक्तियों को अर्थ दे सकते हैं।

15.2 प्रथम-क्रम भाषाएँ

प्रथम-क्रम तर्क की अभिव्यक्तियाँ उस मूल शब्दावली से निर्मित होती हैं जिसमें *चरों*, *अचरों*, *विधेय-चिह्नों* और कभी-कभी *फलन-चिह्नों* होते हैं। इनसे, तथा तार्किक संयोजकों, परिमाणकों और कोष्ठक एवं अल्पविराम जैसे विराम-चिह्नों से, *पद* और *सूत्रों* बनते हैं।

अनौपचारिक रूप से, विधेय-चिह्नों गुणधर्मों और संबंधों के नाम हैं, अचरों अलग-अलग वस्तुओं के नाम हैं और फलन-चिह्नों प्रतिचित्रणों के नाम हैं। तादात्म्य $=$ को छोड़कर ये *अतार्किक प्रतीक* हैं और मिलकर एक भाषा बनाते हैं। कोई भी प्रथम-क्रम भाषा $\mathcal{L}$ अपने अतार्किक प्रतीकों से निर्धारित होती है। सबसे सामान्य स्थिति में $\mathcal{L}$ में हर प्रकार के अनंततः अनेक प्रतीक होते हैं।

सामान्य स्थिति में प्रथम-क्रम तर्क में हम निम्न प्रतीकों का उपयोग करते हैं:

1. तार्किक प्रतीक
   a) तार्किक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त), $\forall$ (सार्वत्रिक परिमाणक), $\exists$ (अस्तित्वपरक परिमाणक)।
   b) असत्यता के लिए प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\bot$।
   c) सत्यता के लिए प्रतिज्ञप्ति नियतांक $\top$।
   d) दो-स्थानी तादात्म्य $=$।

e) चरों का एक गणनीय अनंत समुच्चय: v_0, v_1, v_2, ...

2. प्रथम-क्रम तर्क की *मानक भाषा* बनाने वाले अतार्किक प्रतीक

   a) n-स्थानी विधेय-चिह्नों का एक गणनीय अनंत समुच्चय, प्रत्येक $n > 0$ के लिए: A_0^n, A_1^n, A_2^n, ...

   b) अचरों का एक गणनीय अनंत समुच्चय: c_0, c_1, c_2, ...

   c) n-स्थानी फलन-चिह्नों का एक गणनीय अनंत समुच्चय, प्रत्येक $n > 0$ के लिए: f_0^n, f_1^n, f_2^n, ...

3. विराम-चिह्न: (,), और अल्पविराम।

हमारी अधिकांश परिभाषाएँ और परिणाम प्रथम-क्रम तर्क की पूरी मानक भाषा के लिए दिए जाएँगे। किंतु अनुप्रयोग के अनुसार हम भाषा को केवल कुछ विधेय-चिह्नों, अचरों और फलन-चिह्नों तक सीमित भी कर सकते हैं।

उदाहरण 15.1. अंकगणित की भाषा $\mathcal{L}_A$ में एक दो-स्थानी विधेय-चिह्न $<$, एक अचर 0, एक एक-स्थानी फलन-चिह्न $\prime$, और दो दो-स्थानी फलन-चिह्नों $+$ तथा $\times$ होते हैं।

उदाहरण 15.2. समुच्चय सिद्धांत की भाषा $\mathcal{L}_Z$ में केवल एक दो-स्थानी विधेय-चिह्न $\in$ होता है।

उदाहरण 15.3. क्रमों की भाषा $\mathcal{L}_\leq$ में केवल दो-स्थानी विधेय-चिह्न $\leq$ होता है।

ये भी रूढ़ियाँ ही हैं: औपचारिक रूप से ये केवल उपनाम हैं। उदाहरणतः $<$, $\in$ और $\leq$, A_0^2 के उपनाम हैं; 0, c_0 का; $\prime$, f_0^1 का; $+$, f_0^2 का; और $\times$, f_1^2 का उपनाम है।

.

हो सकता है कि आप ऊपर प्रयुक्त पदावली और प्रतीकों से भिन्न रूपों से परिचित हों। तर्कशास्त्र की पुस्तकों (और शिक्षकों) में "निषेध" के लिए प्रायः $\sim$, $\neg$, और ! तथा "संयोजन" के लिए $\wedge$, $\cdot$, और & प्रयुक्त होते हैं। "आपादन" या "निहितार्थ" के लिए सामान्यतः $\rightarrow$, $\Rightarrow$, और $\supset$ प्रतीक प्रयुक्त होते हैं। "द्विशर्त," "द्वि-आपादन," या "(शाब्दिक) तुल्यता" के प्रतीक $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, और $\equiv$ हैं। $\perp$ प्रतीक को अलग-अलग प्रसंगों में "असत्यता," "असत्य," "असंगति," या "तल" कहा जाता है। $\top$ प्रतीक को अलग-अलग प्रसंगों में "सत्यता," "सत्य," या "शीर्ष" कहा जाता है।

रूढ़ि के अनुसार अचरों (जिन्हें कभी-कभी नाम कहा जाता है) के लिए लैटिन वर्णमाला के आरंभ के छोटे अक्षर (जैसे a, b, c) और चरों के लिए अंत के छोटे अक्षर (जैसे x, y, z) प्रयुक्त होते हैं। परिमाणक चरों, जैसे x, के साथ जुड़ते हैं। सार्वत्रिक परिमाणक के संकेतन के रूपांतरों में $\forall x$, $(\forall x)$, (x), Πx, $\bigwedge_x$ और अस्तित्वपरक परिमाणक के रूपांतरों में $\exists x$, $(\exists x)$, (Ex), Σx, $\bigvee_x$ सम्मिलित हैं।

हम सभी प्रतिज्ञप्ति संक्रियकों और दोनों परिमाणकों को भाषा के आदिम प्रतीक मान सकते हैं। इसके बजाय हम आदिम प्रतीकों का छोटा भंडार चुनकर शेष संक्रियकों को परिभाषित भी मान सकते हैं। बूल संक्रियकों के "सत्य-फलनीय रूप से पूर्ण" समुच्चयों में $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, और $\{\neg, \rightarrow\}$ सम्मिलित हैं—अभिव्यंजक रूप से पूर्ण प्रथम-क्रम भाषा पाने के लिए इनमें से किसी को किसी भी एक परिमाणक के साथ जोड़ा जा सकता है।

आप दो अन्य संक्रियकों से भी परिचित हो सकते हैं: हेनरी शेफ़र के नाम पर रखा गया शेफ़र स्ट्रोक $|$, और पियर्स तीर $\downarrow$, जिसे क्वाइन का डैगर भी कहते हैं। क्रमशः "नैन्ड" और "नॉर" के अपने सामान्य पाठ के साथ ये संक्रियक अपने-आप में सत्य-फलनीय रूप से पूर्ण हैं।

15.3 पद तथा सूत्रों का निर्माण

प्रथम-क्रम भाषा $\mathcal{L}$ दिए जाने पर हम $\mathcal{L}$ की मूल शब्दावली से बनी अभिव्यक्तियाँ परिभाषित कर सकते हैं। इनमें विशेषतः *पद* और *सूत्रों* सम्मिलित हैं।

परिभाषा 15.4 (पद). *पदों* का समुच्चय $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$, भाषा $\mathcal{L}$ के लिए निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित है:

1. प्रत्येक चर एक पद है।

2. भाषा $\mathcal{L}$ का प्रत्येक अचर एक पद है।

3. यदि f कोई n-स्थानी फलन-चिह्न है और t_1, ..., t_n पद हैं, तो $f(t_1, \ldots, t_n)$ एक पद है।

4. इसके अतिरिक्त कुछ भी पद नहीं है।

जिस पद में कोई चरों न हों, उसे *बंद पद* कहते हैं।

भाषा और पदों के हमारे विनिर्देशन में अचरों प्रतीकों की एक अलग श्रेणी के रूप में आते हैं, किंतु इसके बजाय उन्हें शून्य-स्थानी फलन-चिह्नों में सम्मिलित किया जा सकता था। तब पदों की परिभाषा के दूसरे खंड की आवश्यकता न होती। केवल $f(t_1, \ldots, t_n)$ को स्वयं f समझना होता, यदि $n = 0$ हो।

परिभाषा 15.5 (सूत्र). *सूत्रों* का समुच्चय $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$, भाषा $\mathcal{L}$ के लिए निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित है:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।

2. $\top$ एक परमाण्विक सूत्र है।

3. यदि R कोई n-स्थानी विधेय-चिह्न है जो $\mathcal{L}$ में है, और t_1, ..., t_n, $\mathcal{L}$ के पद हैं, तो $R(t_1, \ldots, t_n)$ एक परमाण्विक सूत्र है।

4. यदि t_1 और t_2, $\mathcal{L}$ के पद हैं, तो $=(t_1, t_2)$ एक परमाण्विक सूत्र है।

5. यदि φ सूत्र है, तो $\neg\varphi$ भी सूत्र है।

6. यदि φ और ψ सूत्रों हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ भी सूत्र है।

7. यदि φ और ψ सूत्रों हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ भी सूत्र है।

8. यदि φ और ψ सूत्रों हैं, तो $(\varphi \to \psi)$ भी सूत्र है।

9. यदि φ और ψ सूत्रों हैं, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ भी सूत्र है।

10. यदि φ सूत्र है और x चर है, तो $\forall x\, \varphi$ भी सूत्र है।

11. यदि φ सूत्र है और x चर है, तो $\exists x\, \varphi$ भी सूत्र है।

12. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

पदों और सूत्रों के समुच्चयों की परिभाषाएँ *आगमनात्मक परिभाषाएँ* हैं। मूलतः हम सूत्रों का समुच्चय अनंत चरणों में बनाते हैं। आरंभिक चरण में हम सभी परमाण्विक सूत्रों को सूत्र घोषित करते हैं; यह परिभाषा के आरंभिक मामलों, अर्थात् इनके लिए दिए मामलों, के अनुरूप है: $\top$, $\bot$, $R(t_1, \ldots, t_n)$ और $=(t_1, t_2)$। अतः "परमाण्विक सूत्र" का अर्थ इस रूप का कोई भी सूत्र है।

परिभाषा के अन्य मामले पहले से निर्मित सूत्रों से नए सूत्रों बनाने के नियम देते हैं। दूसरे चरण में हम इन नियमों से परमाण्विक सूत्रों से सूत्रों बना सकते हैं। तीसरे चरण में हम परमाण्विक सूत्रों और दूसरे चरण में प्राप्त सूत्रों से नए सूत्र बनाते हैं, और यह क्रम आगे चलता है। सूत्र वही और केवल वही है जो अंततः ऐसे किसी चरण में बनाया जाता है।

रूढ़ि के अनुसार हम $=$ को उसके तर्कों के बीच लिखते हैं और कोष्ठक छोड़ देते हैं: $t_1 = t_2$, $=(t_1, t_2)$ का संक्षेप है। इसके अतिरिक्त, $\neg{=}(t_1, t_2)$ को $t_1 \neq t_2$ से संक्षिप्त किया जाता है। सूत्र $(\psi * \chi)$ को लिखते समय, जो ψ, χ से दो-स्थानी संयोजक $*$ द्वारा बना है, हम प्रायः सबसे बाहरी कोष्ठक-युग्म छोड़कर केवल $\psi * \chi$ लिखेंगे।

कुछ तर्कशास्त्र-ग्रंथ यह अपेक्षा करते हैं कि चर x, φ में अवश्य आए, तभी $\exists x\, \varphi$ और $\forall x\, \varphi$ को सूत्रों माना जाए। यह अपेक्षा न रखने से कोई समस्या नहीं होती और काम सरल हो जाता है।

किसी विशिष्ट अनुप्रयोग की भाषा में काम करते समय हम प्रायः दो-स्थानी विधेय-चिह्नों और फलन-चिह्नों को उनके संबंधित पदों के बीच लिखेंगे। उदाहरणतः अंकगणित की भाषा में $t_1 < t_2$ और $(t_1 + t_2)$, तथा समुच्चय सिद्धांत की भाषा में $t_1 \in t_2$। अंकगणित की भाषा में उत्तरवर्ती फलन को तो रूढ़ि से उसके तर्क के *बाद* लिखा जाता है: t'। किंतु औपचारिक रूप से ये क्रमशः $A_0^2(t_1, t_2)$, $f_0^2(t_1, t_2)$, $A_0^2(t_1, t_2)$ और $f_0^1(t)$ के रूढ़िगत संक्षेप मात्र हैं।

परिभाषा 15.6 (वाक्यविन्यासगत समानता). प्रतीक $\equiv$ बताता है कि दो प्रतीक-शृंखलाएँ विन्यास में समान हैं; अर्थात् $\varphi \equiv \psi$ तभी और केवल तभी, जब φ और ψ समान लंबाई की प्रतीक-शृंखलाएँ हों और प्रत्येक स्थान पर उनमें एक ही प्रतीक हो।

प्रतीक $\equiv$ के दोनों ओर संयोजन से प्राप्त शृंखलाएँ रखी जा सकती हैं। उदाहरणतः, $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ का अर्थ है: प्रतीक-शृंखला φ वही शृंखला है जो इसी क्रम में आरंभिक कोष्ठक, शृंखला ψ, प्रतीक $\vee$, शृंखला χ, और अंतिम कोष्ठक को जोड़ने से प्राप्त होती है। यदि ऐसा है, तो हम जानते हैं कि φ का पहला प्रतीक आरंभिक कोष्ठक है, φ में ψ एक उपशृंखला के रूप में (दूसरे प्रतीक से आरंभ होकर) आता है, उसके बाद $\vee$ आता है, आदि।

चूँकि पद और सूत्रों मूल अवयवों से आगमनात्मक परिभाषाओं द्वारा बनाए जाते हैं, उनके बारे में कथन सिद्ध करने के लिए हम निम्न आगमन-सिद्धांतों का उपयोग कर सकते हैं।

सहायक प्रमेय 15.7 (*पदों पर आगमन का सिद्धांत*). *मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई प्रथम-क्रम भाषा है। यदि किसी गुणधर्म P के लिए*

1. *वह प्रत्येक चर v के लिए लागू होता है,*
2. *वह प्रत्येक अचर a के लिए लागू होता है जो $\mathcal{L}$ में है, और*
3. *वह $f(t_1, \ldots, t_n)$ के लिए लागू होता है, जब भी वह t_1, ..., t_n के लिए लागू होता है और f कोई n-स्थानी फलन-चिह्न है जो $\mathcal{L}$ में है,*

जहाँ t_1, ..., t_n को $\mathcal{L}$ के पद माना गया है, तो P, $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$ के प्रत्येक पद के लिए लागू होता है।

सहायक प्रमेय 15.8 (*सूत्रों पर आगमन का सिद्धांत*). *मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई प्रथम-क्रम भाषा है। यदि कोई गुणधर्म P सभी परमाण्विक सूत्रों के लिए लागू होता है और वह ऐसा है कि*

1. *वह $\neg\varphi$ के लिए लागू होता है, जब भी φ के लिए लागू हो;*
2. *वह $(\varphi \wedge \psi)$ के लिए लागू होता है, जब भी φ और ψ के लिए लागू हो;*
3. *वह $(\varphi \vee \psi)$ के लिए लागू होता है, जब भी φ और ψ के लिए लागू हो;*
4. *वह $(\varphi \rightarrow \psi)$ के लिए लागू होता है, जब भी φ और ψ के लिए लागू हो;*
5. *वह $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ के लिए लागू होता है, जब भी φ और ψ के लिए लागू हो;*
6. *वह $\exists x\, \varphi$ के लिए लागू होता है, जब भी φ के लिए लागू हो;*
7. *वह $\forall x\, \varphi$ के लिए लागू होता है, जब भी φ के लिए लागू हो;*

जहाँ φ और ψ को $\mathcal{L}$ के सूत्रों माना गया है, तो P, $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ के सभी सूत्रों के लिए लागू होता है।

15.4 अद्वितीय पठनीयता

सूत्रों की हमारी परिभाषा यह सुनिश्चित करती है कि प्रत्येक सूत्र का *अद्वितीय पाठ* हो; अर्थात् सूत्रों के हमारे निर्माण-नियमों के अनुसार उसे बनाने का मूलतः केवल एक ढंग हो और उसकी "व्याख्या" करने का भी केवल एक ढंग हो। ऐसा न होता तो कुछ सूत्रों संदिग्ध होते, अर्थात् उनका एक से अधिक पाठ या अर्थ-निर्णय होता—जिससे हम स्पष्टतः बचना चाहते हैं। इससे भी अधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि इस गुण के बिना आगे दी जाने वाली हमारी अधिकांश परिभाषाएँ और प्रमाण काम नहीं करेंगे।

इसे स्पष्ट करने का शायद सर्वोत्तम ढंग यह देखना है कि यदि हमने सूत्रों के ऐसे दोषपूर्ण निर्माण-नियम दिए होते जो अद्वितीय पठनीयता सुनिश्चित न करते, तो क्या होता। उदाहरणतः हम संयोजकों के निर्माण-नियमों में कोष्ठक भूल सकते थे और यह अनुमति दे सकते थे:

> यदि φ और ψ सूत्रों हैं, तो $\varphi \to \psi$ भी सूत्र है।

किसी परमाण्विक सूत्र θ से आरंभ करके इससे हम $\theta \to \theta$ बना सकते। इससे और θ से हमें $\theta \to \theta \to \theta$ मिलता। किंतु इसे बनाने के दो ढंग हैं:

1. हम θ को φ और $\theta \to \theta$ को ψ लेते हैं।
2. हम φ को $\theta \to \theta$ और ψ को θ लेते हैं।

तदनुसार सूत्र $\theta \to \theta \to \theta$ को "पढ़ने" के भी दो ढंग हैं। यह $\psi \to \chi$ के रूप में है, जहाँ ψ, θ है और χ, $\theta \to \theta$ है; किंतु यह $\psi \to \chi$ के रूप में *भी है*, जहाँ ψ, $\theta \to \theta$ है और χ, θ है।

यदि ऐसा हो, तो हमारी परिभाषाएँ सदा काम नहीं करेंगी। उदाहरणतः किसी सूत्र का प्रधान संक्रियक परिभाषित करते समय हम कहते हैं कि $\psi \to \chi$ रूप के सूत्र में $\to$ की दर्शाई गई उपस्थिति ही प्रधान संक्रियक है। किंतु यदि सूत्र $\theta \to \theta \to \theta$ को ऊपर बताए दो भिन्न ढंगों से $\psi \to \chi$ के साथ मिलाया जा सके, तो एक स्थिति में $\to$ की पहली उपस्थिति प्रधान संक्रियक मिलती है और दूसरी स्थिति में दूसरी उपस्थिति। हमारा आशय तो यह है कि प्रधान संक्रियक, सूत्र का कोई *फलन* हो; अर्थात् प्रत्येक सूत्र में प्रधान संक्रियक की ठीक एक उपस्थिति होनी चाहिए।

सहायक प्रमेय 15.9. *किसी सूत्र φ में बाएँ और दाएँ कोष्ठकों की संख्या समान होती है।*

प्रमाण. हम इसका प्रमाण φ के निर्माण पर आगमन द्वारा देते हैं। इसके लिए दो बातें चाहिए: (क) पहले सिद्ध करना होगा कि सभी परमाण्विक सूत्रों में यह गुण है (आगमन-आधार)। (ख) फिर सिद्ध करना होगा कि दिए गए सूत्रों से नया सूत्र बनाने पर, यदि पुराने सूत्रों में यह गुण है तो नए सूत्र में भी है।

मान लें कि $l(\varphi)$ बाएँ कोष्ठकों की संख्या और $r(\varphi)$ दाएँ कोष्ठकों की संख्या है जो φ में हैं; इसी प्रकार $l(t)$ और $r(t)$ किसी पद t में क्रमशः बाएँ और दाएँ कोष्ठकों की संख्याएँ हैं।

1. $\varphi \equiv \bot$: φ में 0 बाएँ और 0 दाएँ कोष्ठक हैं।
2. $\varphi \equiv \top$: φ में 0 बाएँ और 0 दाएँ कोष्ठक हैं।
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $l(\varphi) = 1 + l(t_1) + \cdots + l(t_n) = 1 + r(t_1) + \cdots + r(t_n) = r(\varphi)$। यहाँ हम इस तथ्य का उपयोग करते हैं कि $l(t) = r(t)$ किसी भी पद t के लिए; इसे अभ्यास के लिए छोड़ा गया है।
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $l(\varphi) = l(t_1) + l(t_2) = r(t_1) + r(t_2) = r(\varphi)$।
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: आगमनात्मक परिकल्पना से $l(\psi) = r(\psi)$। अतः $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$।
6. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: आगमनात्मक परिकल्पना से $l(\psi) = r(\psi)$ और $l(\chi) = r(\chi)$। अतः $l(\varphi) = 1 + l(\psi) + l(\chi) = 1 + r(\psi) + r(\chi) = r(\varphi)$।
7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: आगमनात्मक परिकल्पना से $l(\psi) = r(\psi)$। अतः $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$।

8. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: इसी प्रकार। $\square$

परिभाषा 15.10 (उचित आरंभिक खंड). प्रतीक-शृंखला ψ किसी प्रतीक-शृंखला φ का *उचित आरंभिक खंड* है यदि ψ और किसी अरिक्त प्रतीक-शृंखला को जोड़ने पर φ प्राप्त हो।

सहायक प्रमेय 15.11. *यदि φ सूत्र है और ψ, φ का उचित आरंभिक खंड है, तो ψ सूत्र नहीं है।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 15.12. *यदि φ कोई परमाण्विक सूत्र है, तो वह निम्न शर्तों में से ठीक एक को संतुष्ट करता है।*

1. $\varphi \equiv \bot$.
2. $\varphi \equiv \top$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$, *जहाँ R कोई n-स्थानी विधेय-चिह्न है, t_1, ..., t_n पद हैं, और R, t_1, ..., t_n में से प्रत्येक अद्वितीय रूप से निर्धारित है।*
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$, *जहाँ t_1 और t_2 अद्वितीय रूप से निर्धारित पद हैं।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 15.13 (अद्वितीय पठनीयता). *प्रत्येक सूत्र निम्न शर्तों में से ठीक एक को संतुष्ट करता है।*

1. *φ परमाण्विक है।*
2. *φ, $\neg\psi$ के रूप में है।*
3. *φ, $(\psi \wedge \chi)$ के रूप में है।*
4. *φ, $(\psi \vee \chi)$ के रूप में है।*
5. *φ, $(\psi \to \chi)$ के रूप में है।*
6. *φ, $(\psi \leftrightarrow \chi)$ के रूप में है।*
7. *φ, $\forall x\, \psi$ के रूप में है।*
8. *φ, $\exists x\, \psi$ के रूप में है।*

इसके अतिरिक्त प्रत्येक स्थिति में ψ, अथवा ψ और χ, अद्वितीय रूप से निर्धारित होते हैं। इसका अर्थ है कि, उदाहरणतः, ऐसे भिन्न युग्म ψ, χ और ψ', χ' नहीं हैं जिनसे φ एक साथ इन दोनों रूपों में हो: $(\psi \to \chi)$ और $(\psi' \to \chi')$।

प्रमाण. निर्माण-नियमों के अनुसार यदि कोई सूत्र परमाण्विक नहीं है, तो उसे आरंभिक कोष्ठक (, $\neg$, या किसी परिमाणक से आरंभ होना चाहिए। दूसरी ओर, निम्न प्रतीकों में से किसी से आरंभ होने वाला प्रत्येक सूत्र परमाण्विक होना चाहिए: विधेय-चिह्न, फलन-चिह्न, अचर, $\bot$, $\top$।

अतः हमें वास्तव में केवल यह दिखाना है कि यदि φ, $(\psi * \chi)$ के रूप में और $(\psi' *' \chi')$ के रूप में भी है, तो $\psi \equiv \psi'$, $\chi \equiv \chi'$, और $* = *'$।

मान लें कि $\varphi \equiv (\psi * \chi)$ और $\varphi \equiv (\psi' *' \chi')$ दोनों हैं। तब या तो $\psi \equiv \psi'$ है या नहीं। यदि है, तो स्पष्टतः $* = *'$ और $\chi \equiv \chi'$ हैं, क्योंकि तब वे φ की ऐसी उपशृंखलाएँ हैं जो एक ही स्थान पर आरंभ होती और समान लंबाई की हैं। दूसरी स्थिति $\psi \not\equiv \psi'$ है। चूँकि ψ और ψ' दोनों φ की एक ही स्थान पर आरंभ होने वाली उपशृंखलाएँ हैं, उनमें से एक दूसरे का उचित आरंभिक खंड होना चाहिए। किंतु सहायक प्रमेय 15.11 के अनुसार यह असंभव है। $\square$

15.5 किसी सूत्र का प्रधान संक्रियक

किसी सूत्र φ के निर्माण में सबसे अंत में प्रयुक्त संक्रियक की चर्चा करना प्रायः उपयोगी होता है। इस संक्रियक को φ का *मुख्य संक्रियक* कहते हैं। सहज रूप से यह φ का "सबसे बाहरी" संक्रियक है। उदाहरणतः $\neg\varphi$ का मुख्य संक्रियक $\neg$ है, $(\varphi \vee \psi)$ का मुख्य संक्रियक $\vee$ है, इत्यादि।

परिभाषा 15.14 (प्रधान संक्रियक). किसी सूत्र φ का *प्रधान संक्रियक* निम्न प्रकार परिभाषित है:

1. φ परमाण्विक है: φ का कोई प्रधान संक्रियक नहीं है।
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: φ का प्रधान संक्रियक $\neg$ है।
3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: φ का प्रधान संक्रियक $\wedge$ है।
4. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: φ का प्रधान संक्रियक $\vee$ है।
5. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: φ का प्रधान संक्रियक $\to$ है।
6. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: φ का प्रधान संक्रियक $\leftrightarrow$ है।
7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: φ का प्रधान संक्रियक $\forall$ है।
8. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: φ का प्रधान संक्रियक $\exists$ है।

हर स्थिति में हमारा आशय सूत्र में प्रधान संक्रियक की दर्शाई गई विशिष्ट *उपस्थिति* से है। उदाहरणतः सूत्र $((\theta \to \alpha) \to (\alpha \to \theta))$, $(\psi \to \chi)$ के रूप में है, जहाँ ψ, $(\theta \to \alpha)$ है और χ, $(\alpha \to \theta)$ है; इसलिए $\to$ की दूसरी उपस्थिति प्रधान संक्रियक है।

यह उस फलन की *पुनरावर्ती* परिभाषा है जो सभी अपरमाण्विक सूत्रों को उनके प्रधान संक्रियक की उपस्थिति पर प्रतिचित्रित करता है। सूत्रों जिस ढंग से आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं, उसके कारण प्रत्येक सूत्र φ, परिभाषा 15.14 के मामलों में से किसी एक को संतुष्ट करता है। इससे प्रत्येक अपरमाण्विक सूत्र φ के लिए प्रधान संक्रियक का अस्तित्व सुनिश्चित होता है। चूँकि प्रत्येक सूत्र इन शर्तों में से केवल एक को संतुष्ट करता है, और हर स्थिति में जिन छोटे सूत्रों से φ बना है वे अद्वितीय रूप से निर्धारित हैं, इसलिए प्रधान संक्रियक की φ में उपस्थिति अद्वितीय है और हमने सचमुच एक फलन परिभाषित किया है।

किसी सूत्र के प्रधान संक्रियक का प्रतीक कौन-सा है, इसके अनुसार हम उसे सारणी 15.1 में दिए नाम से बुलाते हैं।

प्रधान संक्रियक	सूत्र का प्रकार	उदाहरण
कोई नहीं	परमाण्विक (सूत्र)	$\bot$, $\top$, $R(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1 = t_2$
$\neg$	निषेध	$\neg\varphi$
$\wedge$	संयोजन	$(\varphi \wedge \psi)$
$\vee$	वियोजन	$(\varphi \vee \psi)$
$\to$	आपादन	$(\varphi \to \psi)$
$\leftrightarrow$	द्विशर्त	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
$\forall$	सार्वत्रिक (सूत्र)	$\forall x\, \varphi$
$\exists$	अस्तित्वपरक (सूत्र)	$\exists x\, \varphi$

तालिका 15.1: सूत्रों के मुख्य संक्रियक और नाम

15.6 उपसूत्रों की धारणा

किसी दिए हुए सूत्र को "बनाने वाले" सूत्रों की चर्चा करना प्रायः उपयोगी होता है। इन्हें हम उसके *उपसूत्र* कहते हैं। हर सूत्र स्वयं अपना उपसूत्र माना जाता है; φ का ऐसा उपसूत्र जो स्वयं φ न हो, *उचित उपसूत्र* कहलाता है।

परिभाषा 15.15 (तात्कालिक उपसूत्र). यदि φ सूत्र है, तो φ के *तात्कालिक उपसूत्र* निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं:

1. परमाण्विक सूत्रों के कोई तात्कालिक उपसूत्र नहीं होते।
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: φ का एकमात्र तात्कालिक उपसूत्र ψ है।
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: φ के तात्कालिक उपसूत्र ψ और χ हैं ($*$ दो-स्थानी संयोजकों में से कोई एक है)।
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: φ का एकमात्र तात्कालिक उपसूत्र ψ है।
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: φ का एकमात्र तात्कालिक उपसूत्र ψ है।

परिभाषा 15.16 (उचित उपसूत्र). यदि φ सूत्र है, तो φ के *उचित उपसूत्र* निम्न प्रकार पुनरावर्ती रूप से परिभाषित हैं:

1. परमाण्विक सूत्रों के कोई उचित उपसूत्र नहीं होते।
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: φ के उचित उपसूत्रों में ψ और ψ के सभी उचित उपसूत्र आते हैं।
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: φ के उचित उपसूत्रों में ψ, χ, तथा ψ और χ के सभी उचित उपसूत्र आते हैं।
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: φ के उचित उपसूत्रों में ψ और ψ के सभी उचित उपसूत्र आते हैं।
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: φ के उचित उपसूत्रों में ψ और ψ के सभी उचित उपसूत्र आते हैं।

परिभाषा 15.17 (उपसूत्र). φ के उपसूत्रों में स्वयं φ और उसके सभी उचित उपसूत्र आते हैं।

तात्कालिक उपसूत्रों और उचित उपसूत्रों की परिभाषाओं में सूक्ष्म अंतर पर ध्यान दें। पहली स्थिति में हमने φ के प्रत्येक संभव रूप के लिए सूत्र φ के तात्कालिक उपसूत्र सीधे परिभाषित किए हैं। यह मामलों द्वारा दी गई स्पष्ट परिभाषा है, और ये मामले सूत्रों के समुच्चय की आगमनात्मक परिभाषा का अनुसरण करते हैं। दूसरी स्थिति में भी हमने सभी सूत्रों के समुच्चय की परिभाषा का अनुसरण किया है, किंतु हर मामले में छोटे सूत्रों ψ, χ के साथ-साथ इन सूत्रों के उचित उपसूत्र भी सम्मिलित किए हैं। इससे परिभाषा *पुनरावर्ती* बनती है। सामान्यतः किसी आगमनात्मक रूप से परिभाषित समुच्चय (हमारे मामले में सूत्रों) पर फलन की परिभाषा तब पुनरावर्ती होती है जब फलन की परिभाषा के मामले स्वयं उसी फलन का उपयोग करें। किंतु परिभाषा सुपरिभाषित होने के लिए यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि हम फलन के मान केवल उन तर्कों के लिए उपयोग करें जो परिभाषित किए जा रहे तर्क से "पहले" आते हैं—हमारे मामले में $(\psi * \chi)$ के लिए "उचित उपसूत्र" परिभाषित करते समय हम केवल "पहले के" सूत्रों ψ और χ के उचित उपसूत्रों का उपयोग करते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 15.18. *मान लें कि ψ, φ का उपसूत्र है और χ, ψ का उपसूत्र है। तब χ, φ का उपसूत्र है। दूसरे शब्दों में, उपसूत्र-संबंध संक्रामक है।*

प्रतिज्ञप्ति 15.19. *मान लें कि φ ऐसा सूत्र है जिसमें n संयोजक और परिमाणक हैं। तब φ के अधिक-से-अधिक $2n+1$ उपसूत्र हैं।*

15.7 निर्माण-अनुक्रम

सूत्रों को आगमनात्मक परिभाषा द्वारा परिभाषित करना और उसकी पूरक तकनीक, अर्थात् सूत्रों के गुणधर्म आगमन द्वारा सिद्ध करना, सुरुचिपूर्ण और दक्ष दृष्टिकोण है। फिर भी सूत्रों के निर्माण के अधिक आधारोन्मुख, चरण-दर-चरण दृष्टिकोण पर विचार करना भी उपयोगी हो सकता है। यहाँ हम *निर्माण-अनुक्रम* की धारणा से ऐसा करेंगे। यह दिखाने के लिए कि पदों और सूत्रों को उनकी आगमनात्मक परिभाषाओं का उल्लेख किए बिना इस ढंग से कैसे प्रस्तुत किया जा सकता है, हम पहले किसी भाषा $\mathcal{L}$ से लिए प्रतीकों की मनमानी शृंखला की धारणा प्रस्तुत करते हैं।

परिभाषा 15.20 (शृंखलाएँ). मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई प्रथम-क्रम भाषा है। *$\mathcal{L}$-शृंखला,* $\mathcal{L}$ के प्रतीकों का कोई परिमित अनुक्रम है। जहाँ भाषा $\mathcal{L}$ संदर्भ से स्पष्टतः नियत हो, वहाँ हम $\mathcal{L}$-शृंखला को प्रायः केवल *शृंखला* कहेंगे।

उदाहरण 15.21. किसी भी प्रथम-क्रम भाषा $\mathcal{L}$ के लिए सभी $\mathcal{L}$-सूत्रों, $\mathcal{L}$-शृंखलाएँ हैं, किंतु इसका विलोम सत्य नहीं है। उदाहरणतः

$$)(v_0 \to \exists$$

एक $\mathcal{L}$-शृंखला है, पर $\mathcal{L}$-सूत्र नहीं है।

परिभाषा 15.22 (पदों के निर्माण-अनुक्रम). $\mathcal{L}$-शृंखलाओं का कोई परिमित अनुक्रम $\langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ किसी पद t का *निर्माण-अनुक्रम* है, यदि $t \equiv t_n$ और प्रत्येक $i \leq n$ के लिए या तो t_i चर अथवा अचर है, या $\mathcal{L}$ में कोई k-स्थानी फलन-चिह्न f है और ऐसे $m_0, \ldots, m_k < i$ हैं कि $t_i \equiv f(t_{m_0}, \ldots, t_{m_k})$। जहाँ भेद करना आवश्यक हो, वहाँ पदों के निर्माण-अनुक्रमों को हम *पद-निर्माण-अनुक्रम* कहेंगे।

उदाहरण 15.23. अनुक्रम

$$\langle c_0, v_0, f_0^2(c_0, v_0), f_0^1(f_0^2(c_0, v_0)) \rangle$$

पद $f_0^1(f_0^2(c_0, v_0))$ का एक निर्माण-अनुक्रम है; इसी प्रकार यह भी है:

$$\langle v_0, c_0, f_0^2(c_0, v_0), f_0^1(f_0^2(c_0, v_0)) \rangle.$$

परिभाषा 15.24 (सूत्रों के निर्माण-अनुक्रम). $\mathcal{L}$-शृंखलाओं का कोई परिमित अनुक्रम $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$, φ का *निर्माण-अनुक्रम* है, यदि $\varphi \equiv \varphi_n$ और प्रत्येक $i \leq n$ के लिए या तो φ_i कोई परमाण्विक सूत्र है, अथवा ऐसे $j, k < i$ और कोई चर x हैं कि निम्न में से कोई एक लागू हो:

1. $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$.
2. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.
3. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.
4. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$.
5. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.
6. $\varphi_i \equiv \forall x\, \varphi_j$.
7. $\varphi_i \equiv \exists x\, \varphi_j$.

जहाँ भेद करना आवश्यक हो, वहाँ सूत्रों के निर्माण-अनुक्रमों को हम *सूत्र-निर्माण-अनुक्रम* कहेंगे।

उदाहरण 15.25.

$$\langle A^1_0(v_0), A^1_1(c_1), (A^1_1(c_1) \wedge A^1_0(v_0)), \exists v_0\, (A^1_1(c_1) \wedge A^1_0(v_0))\rangle$$

$\exists v_0\, (A^1_1(c_1) \wedge A^1_0(v_0))$ का एक निर्माण-अनुक्रम है; इसी प्रकार यह भी है:

$$\langle A^1_0(v_0), A^1_1(c_1), (A^1_1(c_1) \wedge A^1_0(v_0)), A^1_1(c_1), \\ \forall v_1\, A^1_0(v_0), \exists v_0\, (A^1_1(c_1) \wedge A^1_0(v_0))\rangle.$$

दूसरे उदाहरण से स्पष्ट है कि निर्माण-अनुक्रम में "अनुपयोगी सामग्री" आ सकती है: ऐसे सूत्रों जो अनावश्यक हों अथवा निर्माण में कोई योगदान न दें।

प्रतिज्ञप्ति 15.26. *प्रत्येक सूत्र φ, जो $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ में है, का कोई निर्माण-अनुक्रम होता है।*

प्रमाण. मान लें कि φ परमाण्विक है। तब अनुक्रम $\langle\varphi\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है। अब मान लें कि ψ और χ के निर्माण-अनुक्रम क्रमशः $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n\rangle$ और $\langle\chi_0, \ldots, \chi_m\rangle$ हैं।

1. यदि $\varphi \equiv \neg\psi$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \neg\psi_n\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
2. यदि $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \chi_0, \ldots, \chi_m, (\psi_n \wedge \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
3. यदि $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \chi_0, \ldots, \chi_m, (\psi_n \vee \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
4. यदि $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \chi_0, \ldots, \chi_m, (\psi_n \to \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
5. यदि $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \chi_0, \ldots, \chi_m, (\psi_n \leftrightarrow \chi_m)\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
6. यदि $\varphi \equiv \forall x\, \psi$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \forall x\, \psi_n\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।
7. यदि $\varphi \equiv \exists x\, \psi$, तो $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \exists x\, \psi_n\rangle$, φ का निर्माण-अनुक्रम है।

सूत्रों पर आगमन के सिद्धांत से प्रत्येक सूत्र का कोई निर्माण-अनुक्रम है। □

हम इसका विलोम भी सिद्ध कर सकते हैं। यह महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि इससे पता चलता है कि सूत्रों को परिभाषित करने के हमारे दोनों ढंग तुल्य हैं: वे एक ही परिणाम देते हैं। इसका यह अर्थ भी है कि निर्माण-अनुक्रमों की लंबाई पर साधारण आगमन का उपयोग करके हम सूत्रों के बारे में प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं।

सहायक प्रमेय 15.27. *मान लें कि $\langle\varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$, φ_n का निर्माण-अनुक्रम है और $k \leq n$। तब $\langle\varphi_0, \ldots, \varphi_k\rangle$, φ_k का निर्माण-अनुक्रम है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रमेय 15.28. $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ *उन सभी $\mathcal{L}$-शृंखलाओं φ का समुच्चय है जिनके लिए φ का कोई सूत्र-निर्माण-अनुक्रम अस्तित्व रखता है।*

प्रमाण. मान लें कि F, भाषा $\mathcal{L}$ की उन सभी प्रतीक-शृंखलाओं का समुच्चय है जिनका कोई निर्माण-अनुक्रम है। प्रतिज्ञप्ति 15.26 में हम देख चुके हैं कि $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}) \subseteq F$, अतः अब हम विलोम सिद्ध करते हैं।

मान लें कि φ का निर्माण-अनुक्रम $\langle\varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$ है। हम सिद्ध करते हैं कि $\varphi \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L})$; प्रमाण n पर प्रबल आगमन द्वारा है। हमारी आगमनात्मक परिकल्पना है कि लंबाई $m < n$ का निर्माण-अनुक्रम रखने वाली प्रत्येक प्रतीक-शृंखला $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ में है। निर्माण-अनुक्रम की परिभाषा से या तो $\varphi \equiv \varphi_n$ परमाण्विक है, या ऐसे $j, k < n$ होने चाहिए जिनके लिए निम्न में से कोई एक स्थिति लागू हो:

1. $\varphi \equiv \neg\varphi_j$.

2. $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.

3. $\varphi \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.

4. $\varphi \equiv (\varphi_j \rightarrow \varphi_k)$.

5. $\varphi \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.

6. $\varphi \equiv \forall x\, \varphi_j$.

7. $\varphi \equiv \exists x\, \varphi_j$.

अब हम मामलों के अनुसार तर्क करते हैं। यदि φ परमाण्विक है, तो $\varphi_n \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$। इसके बजाय मान लें कि $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$। सहायक प्रमेय 15.27 से $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_j \rangle$ और $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_k \rangle$ क्रमशः φ_j और φ_k के निर्माण-अनुक्रम हैं। चूँकि ये φ के निर्माण-अनुक्रम के उचित आरंभिक उपानुक्रम हैं, दोनों की लंबाई n से कम है। अतः आगमनात्मक परिकल्पना से φ_j और φ_k, $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ में हैं और सूत्र की परिभाषा से $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ भी उसी में है। अन्य मामले समानांतर तर्क से प्राप्त होते हैं। □

पदों के निर्माण-अनुक्रमों के गुण सूत्रों के निर्माण-अनुक्रमों के गुणों के समान हैं।

प्रतिज्ञप्ति 15.29. $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$ *उन सभी $\mathcal{L}$-शृंखलाओं t का समुच्चय है जिनके लिए t का कोई पद-निर्माण-अनुक्रम अस्तित्व रखता है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

निर्माण-अनुक्रमों में दो प्रकार की "अनुपयोगी सामग्री" आ सकती है: दोहराए गए अवयव, और ऐसे अवयव जो सूत्र या पद के निर्माण से असंबद्ध हों। न्यूनतम निर्माण-अनुक्रमों पर विचार करके हम दोनों को हटा सकते हैं।

परिभाषा 15.30 (न्यूनतम निर्माण-अनुक्रम). कोई निर्माण-अनुक्रम $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ किसी सूत्र φ का है। वह φ का *न्यूनतम निर्माण-अनुक्रम* है, यदि प्रत्येक अन्य निर्माण-अनुक्रम s, जो φ का हो, के लिए s की लंबाई $n+1$ से अधिक या उसके बराबर हो।

इसी प्रकार, कोई निर्माण-अनुक्रम $\langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ किसी पद t का है। वह t का *न्यूनतम निर्माण-अनुक्रम* है, यदि प्रत्येक अन्य निर्माण-अनुक्रम s, जो t का हो, के लिए s की लंबाई $n+1$ से अधिक या उसके बराबर हो।

ध्यान दें कि किसी सूत्र या पद के एक से अधिक न्यूनतम निर्माण-अनुक्रम हो सकते हैं, किंतु उनमें ठीक वही शृंखलाएँ होंगी।

प्रतिज्ञप्ति 15.31. *निम्न कथन तुल्य हैं:*

1. *ψ, φ का उप-सूत्र है।*

2. *ψ, φ के प्रत्येक निर्माण-अनुक्रम में आता है।*

3. *ψ, φ के किसी न्यूनतम निर्माण-अनुक्रम में आता है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

ऐतिहासिक टिप्पणियाँ निर्माण-अनुक्रमों को रेमंड स्मलियन ने अपनी पाठ्यपुस्तक *First-Order Logic* (Smullyan, 1968) में प्रस्तुत किया था। निर्माण-अनुक्रमों के अतिरिक्त गुणधर्मों के प्रमाण Zuckerman (1973) में मिलते हैं।

15.8 मुक्त चरों और वाक्यों की धारणा

परिभाषा 15.32 (चर की मुक्त उपस्थितियाँ). किसी सूत्र में चर की *मुक्त* उपस्थितियाँ निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं:

1. φ परमाण्विक है: φ में चर की सभी उपस्थितियाँ मुक्त हैं।
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: φ में चर की मुक्त उपस्थितियाँ ठीक वही हैं जो ψ में हैं।
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: φ में चर की मुक्त उपस्थितियाँ वे हैं जो ψ में और वे जो χ में हैं।
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: φ में चर की मुक्त उपस्थितियाँ ψ की सभी मुक्त उपस्थितियाँ हैं, सिवाय x की उपस्थितियों के।
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: φ में चर की मुक्त उपस्थितियाँ ψ की सभी मुक्त उपस्थितियाँ हैं, सिवाय x की उपस्थितियों के।

परिभाषा 15.33 (आबद्ध चर). किसी सूत्र φ में चर की कोई उपस्थिति *आबद्ध* है यदि वह मुक्त नहीं है।

परिभाषा 15.34 (परास). यदि $\forall x\, \psi$ किसी सूत्र φ में किसी उपसूत्र की उपस्थिति है, तो ψ की संगत उपस्थिति को φ में $\forall x$ की संगत उपस्थिति का *परास* कहते हैं। $\exists x$ के लिए भी इसी प्रकार।

यदि ψ परिमाणक की किसी उपस्थिति $\forall x$ अथवा $\exists x$ का सूत्र φ में परास है, तो x की ψ में मुक्त उपस्थितियाँ $\forall x\, \psi$ और $\exists x\, \psi$ में आबद्ध हैं। हम कहते हैं कि इन उपस्थितियों को उक्त परिमाणक-उपस्थिति ने *बाँधा* है।

उदाहरण 15.35. निम्न सूत्र पर विचार कीजिए:

$$\exists v_0\ \underbrace{A_0^2(v_0, v_1)}_{\psi}$$

ψ, $\exists v_0$ का परास दर्शाता है। परिमाणक v_0 की उपस्थिति को ψ में बाँधता है, किंतु v_1 की उपस्थिति को नहीं बाँधता। अतः इस स्थिति में v_1 मुक्त चर है।

अब हम देख सकते हैं कि किसी अधिक जटिल सूत्र φ में यह कैसे काम करता है:

$$\forall v_0\ \underbrace{(A_0^1(v_0) \to A_0^2(v_0, v_1))}_{\psi} \to \exists v_1\ \underbrace{(A_1^2(v_0, v_1) \vee \forall v_0\ \overbrace{\neg A_1^1(v_0)}^{\theta})}_{\chi}$$

ψ पहले $\forall v_0$ का परास है, χ, $\exists v_1$ का परास है, और θ दूसरे $\forall v_0$ का परास है। पहला $\forall v_0$, v_0 की उपस्थितियों को ψ में बाँधता है; $\exists v_1$, v_1 की उपस्थिति को χ में बाँधता है; और दूसरा $\forall v_0$, v_0 की उपस्थिति को θ में बाँधता है। v_1 की पहली उपस्थिति और v_0 की चौथी उपस्थिति φ में मुक्त हैं। v_0 की अंतिम उपस्थिति θ में मुक्त, किंतु χ और φ में आबद्ध है।

परिभाषा 15.36 (वाक्य). सूत्र φ कोई *वाक्य* तभी और केवल तभी है जब उसमें चरों की कोई मुक्त उपस्थिति न हो।

15.9 प्रतिस्थापन

परिभाषा 15.37 (किसी पद में प्रतिस्थापन). हम $s[t/x]$ को, अर्थात् t से हर x-उपस्थिति को s में *प्रतिस्थापित* करने के परिणाम को, पुनरावर्ती रूप से परिभाषित करते हैं:

1. $s \equiv c$: $s[t/x]$ केवल s है।

2. $s \equiv y$: $s[t/x]$ भी केवल s है, बशर्ते y कोई चर हो और $y \not\equiv x$।

3. $s \equiv x$: $s[t/x]$, t है।

4. $s \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$: $s[t/x]$, $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ है।

परिभाषा 15.38. कोई पद t, x के लिए φ में *मुक्त* है, यदि x की कोई भी मुक्त उपस्थिति φ में ऐसे परिमाणक के परास में न हो जो t के किसी चर को बाँधता हो।

उदाहरण 15.39.

1. v_8, v_1 के लिए $\exists v_3 A_4^2(v_3, v_1)$ में मुक्त है।

2. $f_1^2(v_1, v_2)$, v_0 के लिए $\forall v_2 A_4^2(v_0, v_2)$ में मुक्त *नहीं* है।

परिभाषा 15.40 (सूत्र में प्रतिस्थापन). यदि φ सूत्र है, x चर है, और पद t, x के लिए φ में मुक्त है, तो $\varphi[t/x]$ वह परिणाम है जो t को x की सभी मुक्त उपस्थितियों के स्थान पर φ में प्रतिस्थापित करने से मिलता है।

1. $\varphi \equiv \bot$: $\varphi[t/x]$, $\bot$ है।

2. $\varphi \equiv \top$: $\varphi[t/x]$, $\top$ है।

3. $\varphi \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$: $\varphi[t/x]$, $P(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ है।

4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\varphi[t/x]$, $t_1[t/x] = t_2[t/x]$ है।

5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\varphi[t/x]$, $\neg\psi[t/x]$ है।

6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\varphi[t/x]$, $(\psi[t/x] \wedge \chi[t/x])$ है।

7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\varphi[t/x]$, $(\psi[t/x] \vee \chi[t/x])$ है।

8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\varphi[t/x]$, $(\psi[t/x] \to \chi[t/x])$ है।

9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\varphi[t/x]$, $(\psi[t/x] \leftrightarrow \chi[t/x])$ है।

10. $\varphi \equiv \forall y\, \psi$: $\varphi[t/x]\ \forall y\, \psi[t/x]$ है, बशर्ते y, x से भिन्न कोई चर हो; अन्यथा $\varphi[t/x]$ केवल φ है।

11. $\varphi \equiv \exists y\, \psi$: $\varphi[t/x]\ \exists y\, \psi[t/x]$ है, बशर्ते y, x से भिन्न कोई चर हो; अन्यथा $\varphi[t/x]$ केवल φ है।

ध्यान दें कि प्रतिस्थापन रिक्त हो सकता है: यदि x, φ में कहीं भी नहीं आता, तो $\varphi[t/x]$ केवल φ है।

यह प्रतिबंध कि t, x के लिए φ में मुक्त हो, निम्न जैसी स्थितियाँ हटाने के लिए आवश्यक है। यदि $\varphi \equiv \exists y\, x < y$ और $t \equiv y$, तो $\varphi[t/x]$, $\exists y\, y < y$ होता। इस स्थिति में मुक्त चर y को प्रतिस्थापन के समय परिमाणक $\exists y$ "बाँध लेता" है, जो अवांछनीय है। उदाहरणतः हम चाहते हैं कि जब भी $\forall x\, \psi$ लागू हो, तब $\psi[t/x]$ भी लागू हो। किंतु $\forall x\, \exists y\, x < y$ पर विचार करें (यहाँ ψ, $\exists y\, x < y$ है)। यह ऐसा वाक्य है जो, उदाहरणतः, प्राकृतिक संख्याओं के बारे में सत्य है: हर संख्या x के लिए उससे बड़ी कोई संख्या y है। यदि हम y को x का संभव प्रतिस्थापन मान लेते, तो हमें $\psi[y/x] \equiv \exists y\, y < y$ मिलता, जो असत्य है। हम यह अपेक्षा करके इससे बचते हैं कि t का कोई भी मुक्त चर अंततः φ के किसी परिमाणक से आबद्ध न हो जाए।

भारी संकेतन से बचने के लिए हम प्रायः निम्न रूढ़ि अपनाते हैं: यदि φ कोई ऐसा सूत्र है जिसमें चर x मुक्त आ सकता है, तो यह दर्शाने के लिए हम $\varphi(x)$ भी लिखते हैं। जब स्पष्ट हो कि हमारा आशय किन φ और x से है, और t कोई पद हो (जिसे x के लिए $\varphi(x)$ में मुक्त माना गया है), तब हम $\varphi(t)$ को $\varphi[t/x]$ के संक्षेप के रूप में लिखते हैं। उदाहरणतः हम कह सकते हैं, "$\varphi(t)$ को $\forall x\, \varphi(x)$ का एक दृष्टांत कहते हैं।" इससे हमारा अर्थ है कि यदि φ कोई भी सूत्र, x कोई चर, और t ऐसा पद है जो x के लिए φ में मुक्त है, तो $\varphi[t/x]$, $\forall x\, \varphi$ का एक दृष्टांत है।

प्रश्न

प्रश्न 15.1. सहायक प्रमेय 15.7 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.2. सिद्ध कीजिए कि किसी भी पद t के लिए $l(t) = r(t)$।

प्रश्न 15.3. सहायक प्रमेय 15.11 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.4. प्रतिज्ञप्ति 15.12 सिद्ध कीजिए। (संकेत: पदों के लिए सहायक प्रमेय 15.11 का एक रूप बनाकर सिद्ध कीजिए।)

प्रश्न 15.5. प्रतिज्ञप्ति 15.18 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.6. प्रतिज्ञप्ति 15.19 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.7. सहायक प्रमेय 15.27 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.8. प्रतिज्ञप्ति 15.29 सिद्ध कीजिए। संकेत: प्रमेय 15.28 के प्रमाण में प्रयुक्त रणनीति के समान रणनीति अपनाइए।

प्रश्न 15.9. प्रतिज्ञप्ति 15.31 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 15.10. परिभाषा 15.32 की तर्ज पर चर की आबद्ध उपस्थितियों की आगमनात्मक परिभाषा दीजिए।

अध्याय 16

प्रथम-क्रम तर्क का अर्थविज्ञान

16.1 परिचय

अभिव्यक्तियों को अर्थ देना अर्थविज्ञान का विषय है। अर्थविज्ञान की केंद्रीय धारणा किसी संरचना में संतुष्टि की है। संरचना भाषा के निर्माण-अवयवों को अर्थ देती है: प्रांत वस्तुओं का एक अरिक्त समुच्चय है। परिमाणकों का निर्वचन इस प्रांत पर विचरण करने के रूप में किया जाता है, अचरों को प्रांत के अवयव दिए जाते हैं, फलन-चिह्नों को प्रांत से उसी में जाने वाले फलन दिए जाते हैं, और विधेय-चिह्नों को प्रांत पर संबंध दिए जाते हैं। मूल शब्दावली के इन नियतनों के साथ प्रांत मिलकर संरचना बनाता है। चर, सूत्रों में आ सकते हैं; अतः अर्थविज्ञान देने के लिए हमें उन्हें भी प्रांत के अवयव नियत करने होते हैं—इसे चर-नियतन कहते हैं। अंततः संतुष्टि-संबंध इन सबको एक साथ जोड़ता है। कोई सूत्र, संरचना $\mathfrak{M}$ में चर नियतन s के सापेक्ष संतुष्ट हो सकता है; इसे $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ लिखते हैं। इस संबंध की परिभाषा भी φ की संरचना पर आगमन से दी जाती है। उदाहरणतः तार्किक संयोजकों की सत्यता-सारणियों का उपयोग करके $(\varphi \wedge \psi)$ की संतुष्टि को φ और ψ की संतुष्टि (या असंतुष्टि) के आधार पर परिभाषित किया जाता है। फिर पता चलता है कि यदि सूत्र φ कोई वाक्य है, अर्थात् उसमें कोई मुक्त चर नहीं है, तो चर नियतन अप्रासंगिक है। इसलिए हम सीधे कह सकते हैं कि कोई वाक्य, किसी संरचना में संतुष्ट है (या नहीं)।

वाक्यों के लिए संतुष्टि-संबंध $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ के आधार पर हम वैधता, अर्थगत तात्पर्य और संतुष्टनीयता की मूल अर्थगत धारणाएँ परिभाषित कर सकते हैं। कोई वाक्य वैध है, $\vDash \varphi$, यदि प्रत्येक संरचना उसे संतुष्ट करती है। वाक्यों का कोई समुच्चय उससे तात्पर्य रखता है, $\Gamma \vDash \varphi$, यदि Γ के सभी वाक्यों को संतुष्ट करने वाली प्रत्येक संरचना, φ को भी संतुष्ट करती है। और वाक्यों का कोई समुच्चय संतुष्टनीय है यदि कोई संरचना उसके सभी वाक्यों को एक साथ संतुष्ट करती है। चूँकि सूत्र आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं, और संतुष्टि भी सूत्रों की संरचना पर आगमन से परिभाषित होती है, इसलिए हम अपने अर्थविज्ञान के गुण सिद्ध करने तथा परिभाषित अर्थगत धारणाओं को परस्पर संबंधित करने के लिए आगमन का उपयोग कर सकते हैं।

16.2 प्रथम-क्रम भाषाओं के लिए संरचनाएँ

प्रथम-क्रम भाषाएँ अपने-आप में *अनिर्वचित* होती हैं: अचरों, फलन-चिह्नों और विधेय-चिह्नों के साथ कोई विशिष्ट अर्थ जुड़ा नहीं होता। *संरचना* निर्दिष्ट करके उन्हें अर्थ दिया जाता है। संरचना *प्रांत* निर्दिष्ट करती है, अर्थात् वे वस्तुएँ जिन्हें अचर चुनते हैं, जिन पर फलन-चिह्न कार्य करते हैं और जिन पर परिमाणक विचरण करते हैं। इसके अतिरिक्त, वह बताती है कि कौन-से अचर कौन-सी वस्तुएँ चुनते हैं, कोई फलन-चिह्न वस्तुओं को वस्तुओं पर किस प्रकार प्रतिचित्रित करता है, और विधेय-चिह्न किन वस्तुओं पर लागू होते हैं। संरचनाएँ तर्कशास्त्र की *अर्थगत* धारणाओं—जैसे तात्पर्य, वैधता और संतुष्टनीयता—का आधार हैं। साहित्य में इन्हें अलग-अलग जगह "संरचनाएँ", "निर्वचन" या "प्रतिरूप" कहा जाता है।

परिभाषा 16.1 (संरचनाएँ). *संरचना* $\mathfrak{M}$, प्रथम-क्रम तर्क की भाषा $\mathcal{L}$ के लिए, निम्न अवयवों से बनी होती है:

1. *प्रांत:* एक अरिक्त समुच्चय, $|\mathfrak{M}|$

2. *अचरों का निर्वचन:* प्रत्येक अचर c के लिए, जो $\mathcal{L}$ में है, अवयव $c^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$

3. *विधेय-चिह्नों का निर्वचन:* प्रत्येक n-स्थानी विधेय-चिह्न R के लिए, जो $\mathcal{L}$ में है ($=$ को छोड़कर), एक n-स्थानी संबंध $R^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^n$

4. *फलन-चिह्नों का निर्वचन:* प्रत्येक n-स्थानी फलन-चिह्न f के लिए, जो $\mathcal{L}$ में है, एक n-स्थानी फलन $f^{\mathfrak{M}}\colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$

उदाहरण 16.2. अंकगणित की भाषा के लिए संरचना $\mathfrak{M}$ में एक समुच्चय, उस समुच्चय $|\mathfrak{M}|$ का एक अवयव $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ जो अचर o का निर्वचन है, एक एक-स्थानी फलन $\prime^{\mathfrak{M}}\colon |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$, दो दो-स्थानी फलन $+^{\mathfrak{M}}$ और $\times^{\mathfrak{M}}$—दोनों $|\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}|$—और एक दो-स्थानी संबंध $<^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2$ होते हैं।

ऐसी संरचना का एक सहज उदाहरण निम्न है:

1. $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$

2. $\mathsf{o}^{\mathfrak{N}} = 0$

3. $\prime^{\mathfrak{N}}(n) = n + 1$, सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए

4. $+^{\mathfrak{N}}(n, m) = n + m$, सभी $n, m \in \mathbb{N}$ के लिए

5. $\times^{\mathfrak{N}}(n, m) = n \cdot m$, सभी $n, m \in \mathbb{N}$ के लिए

6. $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m\rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

इस प्रकार परिभाषित संरचना $\mathfrak{N}$ को, $\mathcal{L}_A$ के लिए, *अंकगणित का मानक प्रतिरूप* कहते हैं, क्योंकि वह $\mathcal{L}_A$ के अतार्किक अचरों का निर्वचन ठीक अपेक्षित ढंग से करती है।

फिर भी $\mathcal{L}_A$ के लिए अनेक अन्य संरचनाएँ संभव हैं। उदाहरणतः पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbb{Z}$ प्रांत के रूप में, $\mathbb{N}$ के स्थान पर लेकर हम o, $\prime$, $+$, $\times$, $<$ के निर्वचन उसी अनुसार परिभाषित कर सकते हैं। हम $\mathcal{L}_A$ के लिए ऐसी संरचनाएँ भी परिभाषित कर सकते हैं जिनका संख्याओं से दूर-दूर तक कोई संबंध न हो।

उदाहरण 16.3. किसी संरचना $\mathfrak{M}$ को, समुच्चय सिद्धांत की भाषा $\mathcal{L}_Z$ के लिए, केवल एक समुच्चय और एक दो-स्थानी संबंध चाहिए। अतः तकनीकी रूप से, उदाहरण के लिए, व्यक्तियों के समुच्चय के साथ "x, y से अधिक आयु का है" संबंध को $\mathcal{L}_Z$ की संरचना बनाया जा सकता है; इसी प्रकार $\mathbb{N}$ के साथ $n \geq m$ को भी, जहाँ $n, m \in \mathbb{N}$।

$\mathcal{L}_Z$ की एक विशेष रोचक संरचना वह है जिसमें प्रांत के अवयव वास्तव में समुच्चय हैं और $\in$ का निर्वचन सचमुच "x, y का अवयव है" संबंध है। यह *आनुवंशिक रूप से परिमित समुच्चयों* की संरचना $\mathfrak{HF}$ है:

1. $|\mathfrak{HF}| = \emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \ldots$;

2. $\in^{\mathfrak{HF}} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in |\mathfrak{HF}|, x \in y\}$.

किसे संरचना मानना है, इस बारे में रखी गई शर्तें हमारे तर्क को प्रभावित करती हैं। उदाहरणतः, रिक्त प्रांतों को निषिद्ध करने से परिमाणित वाक्यों की संतुष्टि (या सत्यता) के सामान्य विवरण के अधीन यह सुनिश्चित होता है कि $\exists x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ वैध है—अर्थात् तार्किक सत्य है। और यह शर्त कि सभी अचरों को प्रांत की किसी वस्तु का निर्देश करना ही चाहिए, सुनिश्चित करती है कि अस्तित्वपरक सामान्यीकरण एक उचित अनुमान-रूप है: $\varphi(a)$, अतः $\exists x\,\varphi(x)$। यदि हम नामों को प्रांत के बाहर की वस्तुओं का निर्देश करने, अथवा किसी का भी निर्देश न करने, देते तो हम *मुक्त तर्क* की ओर बढ़ते। उसमें अस्तित्वपरक सामान्यीकरण के लिए एक अतिरिक्त आधारवाक्य चाहिए: $\varphi(a)$ और $\exists x\, x = a$, अतः $\exists x\,\varphi(x)$।

16.3 प्रथम-क्रम भाषाओं के लिए आच्छादित संरचनाएँ

स्मरण करें कि यदि किसी पद में कोई चर न हो तो वह *बंद* है।

परिभाषा 16.4 (बंद पदों का मान). यदि t, भाषा $\mathcal{L}$ का कोई बंद पद है और $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}$ की संरचना है, तो *मान* $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ निम्न प्रकार परिभाषित है:

1. यदि t केवल अचर c है, तो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}}$।
2. यदि t का रूप $f(t_1, \ldots, t_n)$ है, तो

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

परिभाषा 16.5 (आच्छादित संरचना). कोई संरचना *आच्छादित* है यदि प्रांत का प्रत्येक अवयव किसी बंद पद का मान है।

उदाहरण 16.6. मान लें कि $\mathcal{L}$ वह भाषा है जिसमें अचर $zero$, one, two, ..., दो-स्थानी विधेय-चिह्न $<$, और दो-स्थानी फलन-चिह्न $+$ तथा $\times$ हैं। तब संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}$ के लिए, ऐसी लें जिसका प्रांत $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2, \ldots\}$ है और नियतन $zero^{\mathfrak{M}} = 0$, $one^{\mathfrak{M}} = 1$, $two^{\mathfrak{M}} = 2$, इत्यादि हैं। दो-स्थानी संबंध-चिह्न $<$ के लिए $<^{\mathfrak{M}}$ उन सभी युग्मों $\langle c_1, c_2\rangle \in |\mathfrak{M}|^2$ का समुच्चय है जिनमें c_1, c_2 से छोटा है: उदाहरणतः $\langle 1, 3\rangle \in <^{\mathfrak{M}}$, किंतु $\langle 2, 2\rangle \notin <^{\mathfrak{M}}$। दो-स्थानी फलन-चिह्न $+$ के लिए $+^{\mathfrak{M}}$ को सामान्य ढंग से परिभाषित करें— उदाहरणतः $+^{\mathfrak{M}}(2, 3)$ का मान 5 है—और दो-स्थानी फलन-चिह्न $\times$ के लिए भी ऐसा ही करें। अतः $four$ का मान केवल 4 है, और $\times(two, +(three, zero))$ का मान (अथवा मध्यस्थ संकेतन में $two \times (three + zero)$) यह है:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\times(two, +(three, zero))) &= \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(two), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(+(three, zero))) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(two), +^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(three), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(zero))) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(two^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}(three^{\mathfrak{M}}, zero^{\mathfrak{M}})) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(2, +^{\mathfrak{M}}(3, 0)) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(2, 3) \\
&= 6
\end{aligned}$$

16.4 संरचना में सूत्र की संतुष्टि

एक ओर पदों और सूत्रों जैसी अभिव्यक्तियों तथा दूसरी ओर संरचनाएँ को जोड़ने वाली मूल धारणाएँ किसी पद के *मान* और किसी सूत्र की *संतुष्टि* की हैं। अनौपचारिक रूप से, किसी पद का मान, किसी संरचना का अवयव होता है—यदि पद केवल कोई अचर है, तो उसका मान वह वस्तु है जिसे संरचना उस अचर को नियत करती है; और यदि पद फलन-चिह्नों का उपयोग करके बनाया गया है, तो उसका मान अचरों के मानों और पद में आए फलन-चिह्नों को नियत किए गए फलनों से निकाला जाता है। कोई सूत्र, किसी संरचना में *संतुष्ट* है यदि विधेयों को दिया गया निर्वचन उस सूत्र को संरचना के प्रांत में सत्य बनाता है। संतुष्टि की यह धारणा आगमनात्मक रूप से निर्दिष्ट की जाती है: संरचना का विनिर्देशन सीधे बताता है कि परमाण्विक सूत्र कब संतुष्ट हैं; और किसी जटिल सूत्र की संतुष्टि उसके मुख्य संयोजक अथवा परिमाणक तथा इस बात के आधार पर परिभाषित की जाती है कि उसके तात्कालिक उपसूत्र संतुष्ट हैं या नहीं।

यहाँ परिमाणकों का प्रकरण कुछ कठिन है, क्योंकि किसी परिमाणित सूत्र के तात्कालिक उपसूत्र में कोई मुक्त चर होता है, और संरचनाएँ, चरों के मान निर्दिष्ट नहीं करतीं। इस कठिनाई से निपटने के लिए हम *चर-नियतन* भी प्रस्तुत करते हैं और संतुष्टि को केवल संरचना के सापेक्ष नहीं, बल्कि संरचना के साथ चर नियतन के सापेक्ष परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 16.7 (चर-नियतन). *चर-नियतन* s, किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए ऐसा फलन है जो प्रत्येक चर को $|\mathfrak{M}|$ के किसी अवयव पर प्रतिचित्रित करता है, अर्थात् $s\colon \mathrm{Var} \to |\mathfrak{M}|$।

संरचना प्रत्येक अचर को कोई मान, और चर-नियतन प्रत्येक चर को कोई मान देता है। किंतु हम उनसे बने पदों का उपयोग करके प्रांत में मौजूद प्रत्येक अवयव का नामकरण भी करना चाहते हैं। इसके लिए हम पदों के मान को आगमनात्मक रूप से परिभाषित करते हैं। अचरों और चरों के लिए मान वही है जो संरचना अथवा चर-नियतन निर्दिष्ट करता है; अधिक जटिल पदों के लिए उसे उन फलनों का उपयोग करके पुनरावर्ती रूप से निकाला जाता है जिन्हें संरचना, फलन-चिह्नों को नियत करती है।

परिभाषा 16.8 (पदों के मान). यदि t, भाषा $\mathcal{L}$ का कोई पद है, $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}$ के लिए कोई संरचना है, और s, $\mathfrak{M}$ के लिए कोई चर नियतन है, तो *मान* $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)$ निम्न प्रकार परिभाषित है:

1. $t \equiv c$: $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = c^{\mathfrak{M}}$।
2. $t \equiv x$: $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = s(x)$।
3. $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$:
$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

परिभाषा 16.9 (x-परिवर्ती). यदि s, किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए कोई चर नियतन है, तो ऐसा कोई भी चर नियतन s', $\mathfrak{M}$ के लिए, जो s से अधिक-से-अधिक इस बात में भिन्न हो कि वह x को क्या नियत करता है, वह x-*परिवर्ती* कहलाता है—नियतन s का। यदि s' कोई x-परिवर्ती है जो s का है तो हम $s' \sim_x s$ लिखते हैं।

ध्यान दें कि कोई x-परिवर्ती, नियतन s से संबद्ध होते हुए भी, x को कोई भिन्न वस्तु नियत करना *आवश्यक* नहीं है। वास्तव में, प्रत्येक नियतन स्वयं अपना x-परिवर्ती माना जाता है।

परिभाषा 16.10. यदि s, किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए कोई चर नियतन है और $m \in |\mathfrak{M}|$, तो नियतन $s[m/x]$ वह चर-नियतन है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$s[m/x](y) = \begin{cases} m & \text{यदि } y \equiv x \\ s(y) & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

दूसरे शब्दों में, $s[m/x]$ वह विशेष x-परिवर्ती है जो s का है, प्रांत के अवयव m को x का मान बनाता है, और x से भिन्न चरों को वही वस्तुएँ नियत करता है जो s करता है।

परिभाषा 16.11 (संतुष्टि). किसी सूत्र φ की किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में किसी चर नियतन s के सापेक्ष संतुष्टि, चिह्नों में: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$, निम्न प्रकार पुनरावर्ती रूप से परिभाषित है। ($\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$ से हमारा आशय "$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ नहीं" है।)

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$।
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ ठीक तब, जब $\langle \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$।
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2)$।
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$।
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$ (अथवा दोनों)।

8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$ (अथवा दोनों)।

9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब या तो $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$ दोनों, अथवा न $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ और न $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$।

10. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक अवयव $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \psi$।

11. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कम-से-कम एक अवयव $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \psi$।

अंतिम दो खंडों में चर-नियतन महत्त्वपूर्ण हैं। हम $\forall x\, \psi(x)$ की संतुष्टि को "सभी $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \psi(m)$" द्वारा परिभाषित नहीं कर सकते। हम $\exists x\, \psi(x)$ की संतुष्टि को "कम-से-कम एक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \psi(m)$" द्वारा परिभाषित नहीं कर सकते। कारण यह है कि यदि $m \in |\mathfrak{M}|$, तो वह भाषा का चिह्न नहीं है, और इसलिए $\psi(m)$ कोई सूत्र नहीं है (अर्थात् $\psi[m/x]$ अपरिभाषित है)। हम यह भी नहीं मान सकते कि हमारे पास $\mathfrak{M}$ के प्रत्येक अवयव का नाम रखने वाले अचर अथवा पद उपलब्ध हैं, क्योंकि संरचना की परिभाषा में ऐसी कोई अपेक्षा नहीं है। मानक भाषा में अचरों का समुच्चय गणनीय अनंत है; अतः यदि $|\mathfrak{M}|$ गणनीय नहीं है, तो प्रत्येक वस्तु का नाम रखने के लिए पर्याप्त अचर भी नहीं हैं।

हम चर नियतन प्रस्तुत करके इस समस्या को हल करते हैं; वे हमें चरों को प्रांत के प्रत्येक अवयव से सीधे जोड़ने देते हैं। तब, उदाहरण के लिए, यह कहने के स्थान पर कि $\exists x\, \psi(x)$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब कम-से-कम एक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए, हम कहते हैं कि वह $\mathfrak{M}$ में s के *सापेक्ष* तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब $\psi(x)$, $s[m/x]$ के सापेक्ष कम-से-कम एक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए संतुष्ट है।

उदाहरण 16.12. मान लें कि $\mathcal{L} = \{a, b, f, R\}$, जहाँ a और b अचर, f कोई दो-स्थानी फलन-चिह्न, और R कोई दो-स्थानी विधेय-चिह्न है। निम्न प्रकार परिभाषित संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें:

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $a^{\mathfrak{M}} = 1$
3. $b^{\mathfrak{M}} = 2$
4. $f^{\mathfrak{M}}(x, y) = x + y$ यदि $x + y \leq 3$, और अन्यथा $= 3$।
5. $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$

फलन $s(x) = 1$, जो प्रत्येक चर को $1 \in |\mathfrak{M}|$ नियत करता है, $\mathfrak{M}$ के लिए चर-नियतन है।

तब

$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a), \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b)).$$

चूँकि a और b अचर हैं, इसलिए $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a) = a^{\mathfrak{M}} = 1$ और $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b) = b^{\mathfrak{M}} = 2$। अतः

$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(1, 2) = 1 + 2 = 3.$$

$f(f(a, b), a)$ का मान निकालने के लिए हमें यह देखना होगा:

$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), a)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

क्योंकि $3 + 1 > 3$। चूँकि $s(x) = 1$ और $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x) = s(x)$, हमारे पास यह भी है:

$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), x)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

किसी परमाण्विक सूत्र $R(t_1, t_2)$ की संतुष्टि के लिए यह आवश्यक और पर्याप्त है कि उसके तर्कों के मानों का क्रमित युग्म $\langle \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2)\rangle$, $R^{\mathfrak{M}}$ का अवयव हो। अतः, उदाहरण के लिए, हमारे पास $\mathfrak{M}, s \vDash R(b, f(a,b))$ है, क्योंकि $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(b), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(f(a,b))\rangle = \langle 2, 3\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$; किंतु $\mathfrak{M}, s \nvDash R(x, f(a,b))$, क्योंकि $\langle 1, 3\rangle \notin R^{\mathfrak{M}}[s]$।

यह निर्धारित करने के लिए कि कोई अपरमाण्विक सूत्र φ संतुष्ट है या नहीं, आप आगमनात्मक परिभाषा का वह खंड लगाते हैं जो मुख्य संयोजक पर लागू होता है। उदाहरणतः, $R(a,a) \to (R(b,x) \vee R(x,b))$ का मुख्य संयोजक $\to$ है, और

$$\mathfrak{M}, s \vDash R(a,a) \to (R(b,x) \vee R(x,b)) \text{ तभी और केवल तभी जब}$$
$$\mathfrak{M}, s \nvDash R(a,a) \text{ अथवा } \mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b)$$

चूँकि $\mathfrak{M}, s \vDash R(a,a)$ (क्योंकि $\langle 1, 1\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$), हम अभी उत्तर निर्धारित नहीं कर सकते और पहले यह पता करना होगा कि $\mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b)$ है या नहीं:

$$\mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b) \text{ तभी और केवल तभी जब}$$
$$\mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \text{ अथवा } \mathfrak{M}, s \vDash R(x,b)$$

और ऐसा है, क्योंकि $\mathfrak{M}, s \vDash R(x,b)$ (क्योंकि $\langle 1, 2\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$)।

याद करें कि कोई x-परिवर्ती s का ऐसा चर-नियतन है जो s से अधिकतम इस बात में भिन्न होता है कि वह x को क्या नियत करता है। $|\mathfrak{M}|$ के प्रत्येक अवयव के लिए एक x-परिवर्ती s का है:

$$s_1 = s[1/x], \qquad s_2 = s[2/x],$$
$$s_3 = s[3/x], \qquad s_4 = s[4/x].$$

अतः, उदाहरण के लिए, $s_2(x) = 2$ और $s_2(y) = s(y) = 1$ उन सभी चरों y के लिए जो x से भिन्न हैं। ये सभी x-परिवर्ती s के हैं, $\mathfrak{M}$ के लिए, क्योंकि $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$। विशेषतः ध्यान दें कि $s_1 = s$ (s सदैव स्वयं अपना x-परिवर्ती है)।

किसी अस्तित्वपरक परिमाणित सूत्र $\exists x\, \varphi(x)$ की संतुष्टि निर्धारित करने के लिए हमें यह निर्धारित करना होता है कि $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$ कम-से-कम एक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए है या नहीं। अतः

$$\mathfrak{M}, s \vDash \exists x\, (R(b,x) \vee R(x,b)),$$

क्योंकि $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash R(b,x) \vee R(x,b)$ ($s[3/x]$ से भी काम बनता)। किंतु

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \exists x\, (R(b,x) \wedge R(x,b))$$

क्योंकि हम चाहे जो $m \in |\mathfrak{M}|$ चुनें, $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(b,x) \wedge R(x,b)$।

किसी सार्ववाची परिमाणित सूत्र $\forall x\, \varphi(x)$ की संतुष्टि निर्धारित करने के लिए हमें यह निर्धारित करना होता है कि $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$ सभी $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए है या नहीं। अतः

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, (R(x,a) \to R(a,x)),$$

क्योंकि $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(x,a) \to R(a,x)$ सभी $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए है। $m = 1$ के लिए हमारे पास $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash R(a,x)$ है, अतः उत्तरपक्ष सत्य है; $m = 2, 3$, और 4 के लिए हमारे पास $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(x,a)$ है, अतः पूर्वपक्ष असत्य है। किंतु

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \forall x\, (R(a,x) \to R(x,a))$$

क्योंकि $\mathfrak{M}, s[2/x] \nvDash R(a,x) \to R(x,a)$ (क्योंकि $\mathfrak{M}, s[2/x] \vDash R(a,x)$ और $\mathfrak{M}, s[2/x] \nvDash R(x,a)$)।

अधिक जटिल प्रकरण के लिए इस पर विचार करें:

$$\forall x\,(R(a,x) \to \exists y\, R(x,y)).$$

चूँकि $\mathfrak{M}, s[3/x] \nvDash R(a,x)$ और $\mathfrak{M}, s[4/x] \nvDash R(a,x)$, वे रोचक प्रकरण, जिनमें हमें सशर्त के उत्तरपक्ष की चिंता करनी है, केवल $m = 1$ और $= 2$ हैं। क्या $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash \exists y\, R(x,y)$ सत्य है? ऐसा तब है जब कम-से-कम एक $n \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}, s[1/x][n/y] \vDash R(x,y)$। वास्तव में, यदि हम $n = 1$ लें, तो $s[1/x][n/y] = s[1/y] = s$। चूँकि $s(x) = 1$, $s(y) = 1$, और $\langle 1,1\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, उत्तर हाँ है।

यह निर्धारित करने के लिए कि $\mathfrak{M}, s[2/x] \vDash \exists y\, R(x,y)$ है या नहीं, हमें चर नियतनों $s[2/x][n/y]$ को देखना होगा। यहाँ $n = 1$ के लिए यह नियतन $s_2 = s[2/x]$ है, जो $R(x,y)$ को संतुष्ट नहीं करता ($s_2(x) = 2$, $s_2(y) = 1$, और $\langle 2,1\rangle \notin R^{\mathfrak{M}}$)। किंतु $s[2/x][3/y] = s_2[3/y]$ पर विचार करें। $\mathfrak{M}, s_2[3/y] \vDash R(x,y)$, क्योंकि $\langle 2,3\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$; और अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \exists y\, R(x,y)$।

अतः सभी $n \in |\mathfrak{M}|$ के लिए या तो $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(a,x)$ (यदि $m = 3, 4$), अथवा $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \exists y\, R(x,y)$ (यदि $m = 1, 2$), और इसलिए

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\,(R(a,x) \to \exists y\, R(x,y)).$$

दूसरी ओर,

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \exists x\,(R(a,x) \land \forall y\, R(x,y)).$$

हमारे पास $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(a,x)$ केवल $m = 1$ और $m = 2$ के लिए है। किंतु m के इन दोनों मानों के लिए क्रमशः कोई $n \in |\mathfrak{M}|$, अर्थात् $n = 4$, ऐसा है कि $\mathfrak{M}, s[m/x][n/y] \nvDash R(x,y)$, और अतः $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash \forall y\, R(x,y)$ होता है—यह $m = 1$ और $m = 2$ दोनों के लिए। संक्षेप में, कोई $m \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा नहीं कि $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(a,x) \land \forall y\, R(x,y)$।

16.5 चर-नियतन

कोई चर नियतन s *प्रत्येक* चर को मान देता है—और चर अनंत रूप से अनेक हैं। निस्संदेह यह आवश्यक नहीं है। हम चर नियतनों से सभी चरों को मान देने की अपेक्षा केवल इसलिए करते हैं कि इससे काम बहुत सरल हो जाता है। किसी पद t का मान और यह कि कोई सूत्र φ, s के सापेक्ष किसी संरचना में संतुष्ट है या नहीं, केवल उन मानों पर निर्भर करते हैं जिन्हें s, t में आने वाले चरों और φ के मुक्त चरों को नियत करता है। अगली दो प्रतिज्ञप्तियों का विषय यही है। "निर्भर करता है" की धारणा को सुनिश्चित रूप देने के लिए हम दिखाते हैं कि t में आने वाले सभी चरों पर सहमत कोई भी दो चर-नियतन एक ही मान देते हैं; और यदि दो चर-नियतन φ के सभी मुक्त चरों पर सहमत हों, तो φ एक के सापेक्ष तभी और केवल तभी संतुष्ट है जब वह दूसरे के सापेक्ष संतुष्ट है।

प्रतिज्ञप्ति 16.13. *यदि पद t के चर, $x_1, \ldots, x_n$ में से हों, और $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ हो, $i = 1, \ldots, n$ के लिए, तो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$।*

प्रमाण. t की जटिलता पर आगमन से। आधार प्रकरण में t कोई अचर, अथवा $x_1, \ldots, x_n$ में से कोई चर हो सकता है। यदि $t = c$, तो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = c^{\mathfrak{M}} = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$। यदि $t = x_i$, तो प्रतिज्ञप्ति की परिकल्पना से $s_1(x_i) = s_2(x_i)$, और इसलिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = s_1(x_i) = s_2(x_i) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$।

आगमन चरण के लिए मान लें कि $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ और दावा $t_1, \ldots, t_k$ के लिए सत्य है। तब

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(f(t_1, \ldots, t_k))\\ &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k)).\end{aligned}$$

$j = 1, \ldots, k$ के लिए t_j के चर, $x_1, \ldots, x_n$ में से हैं। आगमन-परिकल्पना से $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_j) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_j)$। अतः

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(f(t_1, \ldots, t_k)) \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k)) \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_k)) \\
&= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t).
\end{aligned}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 16.14. *यदि φ के मुक्त चर, $x_1, \ldots, x_n$ में से हों, और $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ हो, $i = 1, \ldots, n$ के लिए, तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।*

प्रमाण. हम φ की जटिलता पर आगमन करते हैं। आधार प्रकरण में, जहाँ φ परमाण्विक है, φ निम्न में से हो सकता है: $\top$, $\bot$, $R(t_1, \ldots, t_k)$, किसी k-स्थानी विधेय R और पदों $t_1, \ldots, t_k$ के लिए, अथवा $t_1 = t_2$, पदों t_1 और t_2 के लिए। अंतिम दो प्रकरणों में हम द्विशर्त की केवल अग्र दिशा दिखाते हैं, क्योंकि विलोम दिशा का प्रमाण सममित है।

1. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$, दोनों।

2. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \varphi$ और $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \varphi$, दोनों।

3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_k)$: मान लें कि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$। तब

$$\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}.$$

   $i = 1, \ldots, k$ के लिए, प्रतिज्ञप्ति 16.13 से $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_i) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_i)$। अतः हमारे पास $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_i), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$ भी है, और इसलिए $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: मान लें कि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$। तब $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_2)$। अतः

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_1) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1) && \text{(प्रतिज्ञप्ति 16.13 से)} \\
&= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_2) && \text{(क्योंकि } \mathfrak{M}, s_1 \vDash t_1 = t_2\text{)} \\
&= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_2) && \text{(प्रतिज्ञप्ति 16.13 से),}
\end{aligned}$$

   अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash t_1 = t_2$।

अब मान लें कि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$, उन सभी सूत्रों ψ के लिए जो φ से कम जटिल हैं। आगमन चरण φ के मुख्य संकारक द्वारा निर्धारित प्रकरणों के अनुसार चलता है। प्रत्येक प्रकरण में हम द्विशर्त की केवल अग्र दिशा दिखाते हैं; विलोम दिशा का प्रमाण सममित है। परिमाणकों के प्रकरणों को छोड़कर प्रत्येक प्रकरण में हम उन उप-सूत्रों ψ पर आगमन-परिकल्पना लगाते हैं जो φ के हैं। ψ के मुक्त चर, φ के मुक्त चरों में से हैं। अतः यदि s_1 और s_2, φ के मुक्त चरों पर सहमत हैं, तो वे ψ के मुक्त चरों पर भी सहमत हैं, और आगमन-परिकल्पना ψ पर लागू होती है।

1. $\varphi \equiv \neg\psi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$; अतः आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$, और इसलिए $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

2. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$; अतः आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$। इसलिए $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

3. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$। आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$; अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

4. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$। आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$; अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

5. $\varphi \equiv \psi \leftrightarrow \chi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो या तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$, अथवा $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \chi$। आगमन-परिकल्पना से, या तो $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$, अथवा $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$ और $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \chi$। दोनों दशाओं में $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

6. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो कोई $m \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \vDash \psi$। $s'_1 = s_1[m/x]$ और $s'_2 = s_2[m/x]$ रखें। ψ के मुक्त चर $x_1, \ldots, x_n$, और x में से हैं। $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, क्योंकि s'_1 और s'_2, x-परिवर्ती हैं—क्रमशः s_1 और s_2 के—और परिकल्पना से $s_1(x_i) = s_2(x_i)$। $s'_1(x) = s'_2(x) = m$; यह हमारे द्वारा s'_1 और s'_2 को परिभाषित करने के ढंग से मिलता है। तब आगमन-परिकल्पना ψ और s'_1, s'_2 पर लागू होती है, अतः $\mathfrak{M}, s'_2 \vDash \psi$। इसलिए, चूँकि $s'_2 = s_2[m/x]$, कोई $m \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$, और अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: यदि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, तो प्रत्येक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \vDash \psi$। हमें दिखाना है कि प्रत्येक $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$ भी। अतः कोई स्वेच्छ $m \in |\mathfrak{M}|$ लें, और $s'_1 = s[m/x]$ तथा $s'_2 = s[m/x]$ पर विचार करें। हमारे पास $\mathfrak{M}, s'_1 \vDash \psi$ है। ψ के मुक्त चर $x_1, \ldots, x_n$, और x में से हैं। $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, क्योंकि s'_1 और s'_2, x-परिवर्ती हैं—क्रमशः s_1 और s_2 के—और परिकल्पना से $s_1(x_i) = s_2(x_i)$। $s'_1(x) = s'_2(x) = m$; यह हमारे द्वारा s'_1 और s'_2 को परिभाषित करने के ढंग से मिलता है। तब आगमन-परिकल्पना ψ और s'_1, s'_2 पर लागू होती है, और हमें $\mathfrak{M}, s'_2 \vDash \psi$ मिलता है। यह प्रत्येक $m \in |\mathfrak{M}|$ पर लागू है, अर्थात् $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$, सभी $m \in |\mathfrak{M}|$ के लिए; अतः $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$।

आगमन से हमें मिलता है कि $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$, जब भी φ के मुक्त चर $x_1, \ldots, x_n$ में से हों और $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ हो, $i = 1, \ldots, n$ के लिए। □

वाक्यों में कोई मुक्त चर नहीं होता; अतः कोई भी दो चर-नियतन किसी वाक्य के सभी (शून्य) मुक्त चरों को समान वस्तुएँ नियत करते हैं। अभी सिद्ध प्रतिज्ञप्ति का अर्थ है कि कोई वाक्य, किसी चर-नियतन के सापेक्ष किसी संरचना में संतुष्ट है या नहीं, यह नियतन से पूर्णतः स्वतंत्र है। हम इस तथ्य को दर्ज कर लेते हैं। इससे आगे आने वाली, चर-नियतन का उल्लेख किए बिना किसी संरचना में वाक्य की संतुष्टि की परिभाषा उचित ठहरती है।

उपप्रमेय 16.15. *यदि φ कोई वाक्य और s कोई चर-नियतन है, तो $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$, प्रत्येक चर-नियतन s' के लिए।*

प्रमाण. s' को कोई भी चर-नियतन लें। चूँकि φ कोई वाक्य है, उसमें कोई मुक्त चर नहीं है; अतः प्रत्येक चर-नियतन s', φ के सभी मुक्त चरों को तुच्छतः वही वस्तुएँ नियत करता है जो s करता है। इसलिए प्रतिज्ञप्ति 16.14 की शर्त पूरी है, और हमारे पास $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$। □

परिभाषा 16.16. यदि φ कोई वाक्य है, तो हम कहते हैं कि संरचना $\mathfrak{M}$, φ को *संतुष्ट करती है*, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$, सभी चर-नियतनों s के लिए।

यदि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, तो हम सरलता से यह भी कहते हैं कि *φ, $\mathfrak{M}$ में सत्य है।* संतुष्टि की धारणा अलग-अलग वाक्यों से स्वाभाविक रूप से वाक्यों के समुच्चयों तक विस्तृत होती है।

परिभाषा 16.17. यदि Γ, वाक्यों का समुच्चय है, तो इस Γ के लिए हम कहते हैं कि संरचना $\mathfrak{M}$, Γ को *संतुष्ट करती है*, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए।

प्रतिज्ञप्ति 16.18. *मान लें कि $\mathfrak{M}$ कोई संरचना, φ कोई वाक्य, और s कोई चर-नियतन है। $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 16.19. *मान लें कि $\varphi(x)$ में केवल x मुक्त आता है, और $\mathfrak{M}$ कोई संरचना है। तब:*

1. *$\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$, कम-से-कम एक चर-नियतन s के लिए।*
2. *$\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$, सभी चर-नियतनों s के लिए।*

प्रमाण. अभ्यास। □

16.6 विस्तारात्मकता

विस्तारात्मकता, जिसे कभी-कभी प्रासंगिकता भी कहते हैं, अनौपचारिक रूप से इस प्रकार कही जा सकती है: किसी सूत्र φ की, किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में किसी चर नियतन s के सापेक्ष संतुष्टि को प्रभावित करने वाले एकमात्र कारक प्रांत का आकार और वे नियतन हैं जो $\mathfrak{M}$ और s, φ में वास्तव में आने वाले भाषा के अवयवों को देते हैं।

विस्तारात्मकता का एक तात्कालिक परिणाम यह है कि जहाँ दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ किसी वाक्य φ में आने वाले भाषा के सभी अवयवों पर सहमत हों और उनका प्रांत समान हो, वहाँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ को इस बात पर भी सहमत होना चाहिए कि स्वयं φ सत्य है या नहीं।

प्रतिज्ञप्ति 16.20 (विस्तारात्मकता). *मान लें कि φ कोई सूत्र, और $\mathfrak{M}_1$ तथा $\mathfrak{M}_2$ ऐसी संरचनाएँ हैं जिनके लिए $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$; और s, $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$ पर कोई चर-नियतन है। यदि $c^{\mathfrak{M}_1} = c^{\mathfrak{M}_2}$, $R^{\mathfrak{M}_1} = R^{\mathfrak{M}_2}$, और $f^{\mathfrak{M}_1} = f^{\mathfrak{M}_2}$, प्रत्येक अचर c, संबंध-चिह्न R, और फलन-चिह्न f के लिए जो φ में आते हैं, तो $\mathfrak{M}_1, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}_2, s \vDash \varphi$।*

प्रमाण. पहले (t पर आगमन द्वारा) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पद के लिए $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}_1}(t) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}_2}(t)$। फिर अभी सिद्ध दावे का उपयोग आगमन के आधार में (जहाँ φ परमाण्विक है) करते हुए φ पर आगमन से प्रतिज्ञप्ति सिद्ध कीजिए। □

उपप्रमेय 16.21 (वाक्यों के लिए विस्तारात्मकता). *मान लें कि φ कोई वाक्य और $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, प्रतिज्ञप्ति 16.20 के अनुसार हैं। तब $\mathfrak{M}_1 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}_2 \vDash \varphi$।*

प्रमाण. उपप्रमेय 16.15 के द्वारा प्रतिज्ञप्ति 16.20 से। □

इसके अतिरिक्त, किसी पद का मान, और यह कि कोई संरचना किसी सूत्र को संतुष्ट करती है या नहीं, केवल उसके उपपदों के मानों पर निर्भर करते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 16.22. *मान लें कि $\mathfrak{M}$ कोई संरचना, t और t' पद, और s कोई चर-नियतन है। तब $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = \mathrm{Val}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t)$।*

प्रमाण. t पर आगमन से।

1. यदि t कोई अचर है, मान लें $t \equiv c$, तो $t[t'/x] = c$, और $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}} = \mathrm{Val}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(c)$।
2. यदि t, x से भिन्न चर है, मान लें $t \equiv y$, तो $t[t'/x] = y$, और $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(y) = \mathrm{Val}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(y)$, क्योंकि $s \sim_x s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$।
3. यदि $t \equiv x$, तो $t[t'/x] = t'$। किंतु $\mathrm{Val}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(x) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$, $s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$ की परिभाषा से।

4. यदि $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, तो हमारे पास:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = & \\
& = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(t_1[t'/x], \ldots, t_n[t'/x])) \\
& \quad t[t'/x] \text{ की परिभाषा से} \\
& = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1[t'/x]), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n[t'/x])) \\
& \quad \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(\ldots)) \text{ की परिभाषा से} \\
& = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t_n)) \\
& \quad \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
& = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t)\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(f(\ldots)) \text{ की परिभाषा से} \qquad \square
\end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 16.23. *मान लें कि $\mathfrak{M}$ कोई संरचना, φ कोई सूत्र, t' कोई पद, और s कोई चर-नियतन है। तब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi[t'/x]$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x] \vDash \varphi$।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्तियाँ 16.22 और 16.23 का आशय यह है। मान लें कि हमारे पास कोई पद t अथवा कोई सूत्र φ, और कोई पद t' है; और हम $t[t'/x]$ का मान जानना चाहते हैं, अथवा यह जानना चाहते हैं कि $\varphi[t'/x]$ किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में किसी चर नियतन s के सापेक्ष संतुष्ट है या नहीं। तब हम या तो पहले प्रतिस्थापन करके $\mathfrak{M}$ और s के सापेक्ष मान अथवा संतुष्टि पर विचार कर सकते हैं; या पहले $m = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ निर्धारित कर सकते हैं, जो पद t' का मान है और $\mathfrak{M}$ में s के सापेक्ष मिलता है; फिर चर नियतन को $s[m/x]$ में बदल सकते हैं, और फिर t के मान पर, $\mathfrak{M}$ में $s[m/x]$ के सापेक्ष, अथवा इस पर विचार कर सकते हैं कि $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi$ है या नहीं। प्रतिज्ञप्तियाँ 16.22 और 16.23 सुनिश्चित करती हैं कि हम जिस भी ढंग से काम करें, उत्तर समान होगा।

16.7 अर्थगत धारणाएँ

प्रथम-क्रम भाषाओं के लिए संरचना की परिभाषा मिलने पर हम वाक्यों के कुछ मूल अर्थगत गुण और उनके बीच के संबंध परिभाषित कर सकते हैं। इनमें सबसे सरल किसी वाक्य की *वैधता* की धारणा है। कोई वाक्य वैध है यदि वह प्रत्येक संरचना में संतुष्ट है। वैध वाक्य इस बात से निरपेक्ष होकर संतुष्ट होते हैं कि उनमें आए अतार्किक चिह्नों का निर्वचन किस प्रकार किया गया है। इसलिए वैध वाक्यों को *तार्किक सत्य* भी कहते हैं—वे किसी भी संरचना में सत्य, अर्थात् संतुष्ट, होते हैं; अतः उनकी सत्यता केवल उनमें आए तार्किक चिह्नों और उनकी वाक्यविन्यासगत संरचना पर निर्भर करती है, अतार्किक चिह्नों अथवा उनके निर्वचन पर नहीं।

परिभाषा 16.24 (वैधता). कोई वाक्य φ *वैध* है, $\vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए।

परिभाषा 16.25 (तात्पर्य). वाक्यों का कोई समुच्चय Γ, किसी वाक्य φ से *तात्पर्य रखता है*, $\Gamma \vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब प्रत्येक ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए, जिसके लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ भी।

परिभाषा 16.26 (संतुष्टनीयता). वाक्यों का कोई समुच्चय Γ *संतुष्टनीय* है यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए। यदि Γ संतुष्टनीय नहीं है, तो उसे *असंतुष्टनीय* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 16.27. *कोई वाक्य φ वैध है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \varphi$, वाक्यों के प्रत्येक समुच्चय Γ के लिए।*

प्रमाण. अग्र दिशा के लिए मान लें कि φ वैध है, और Γ वाक्यों का कोई समुच्चय है। ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ लें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। चूँकि φ वैध है, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$; अतः $\Gamma \vDash \varphi$।

विलोम दिशा के प्रतिपक्ष के लिए मान लें कि φ अवैध है; अतः कोई संरचना $\mathfrak{M}$ ऐसी है कि $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$। जब $\Gamma = \{\top\}$, तब $\top$ के वैध होने से $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। अतः कोई संरचना $\mathfrak{M}$ ऐसी है कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ किंतु $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$; इसलिए Γ, φ से तात्पर्य नहीं रखता। □

प्रतिज्ञप्ति 16.28. $\Gamma \vDash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *असंतुष्टनीय है।*

प्रमाण. अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\Gamma \vDash \varphi$, और इसके विपरीत मान लें कि कोई संरचना $\mathfrak{M}$ ऐसी है कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ और $\Gamma \vDash \varphi$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। साथ ही, चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$; अतः हमारे पास $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ दोनों हैं, जो विरोधाभास है। इसलिए ऐसी कोई संरचना $\mathfrak{M}$ नहीं हो सकती, और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंतुष्टनीय है।

विलोम दिशा के लिए मान लें कि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंतुष्टनीय है। अतः प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए या तो $\mathfrak{M} \nvDash \Gamma$ अथवा $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। इसलिए प्रत्येक ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए, जिसके लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$; अतः $\Gamma \vDash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 16.29. *यदि* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *और* $\Gamma \vDash \varphi$, *तो* $\Gamma' \vDash \varphi$।

प्रमाण. मान लें कि $\Gamma \subseteq \Gamma'$ और $\Gamma \vDash \varphi$। ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ लें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma'$; तब $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, और चूँकि $\Gamma \vDash \varphi$, हमें $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ मिलता है। अतः जब भी $\mathfrak{M} \vDash \Gamma'$, तब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$; इसलिए $\Gamma' \vDash \varphi$। □

प्रमेय 16.30 (अर्थगत निगमन प्रमेय). $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$।

प्रमाण. अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, और ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ लें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। यदि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$; अतः चूँकि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से ψ का तात्पर्य है, हमें $\mathfrak{M} \vDash \psi$ मिलता है। इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$, और अतः $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$।

विलोम दिशा के लिए मान लें कि $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, और ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ लें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$। तब $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, अतः $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$; और चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \psi$। अतः जब भी $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, तब $\mathfrak{M} \vDash \psi$; इसलिए $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$। □

प्रतिज्ञप्ति 16.31. *मान लें कि* $\mathfrak{M}$ *कोई संरचना,* $\varphi(x)$ *एक मुक्त चर* x *वाला कोई सूत्र, और* t *कोई बंद पद है। तब:*

1. $\varphi(t) \vDash \exists x\, \varphi(x)$
2. $\forall x\, \varphi(x) \vDash \varphi(t)$

प्रमाण.

1. मान लें कि $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$। ऐसा चर-नियतन s लें कि $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$। तब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$, क्योंकि $\varphi(t)$ कोई वाक्य है। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.19 से $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \varphi(x)$।
2. मान लें कि $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$। ऐसा चर-नियतन s लें कि $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$। प्रतिज्ञप्ति 16.19 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$, क्योंकि $\varphi(t)$ कोई वाक्य है। □

प्रश्न

प्रश्न 16.1. क्या अंकगणित का मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ आच्छादित है? स्पष्ट कीजिए।

प्रश्न 16.2. मान लें कि $\mathcal{L} = \{c, f, A\}$, जिसमें एक अचर, एक एक-स्थानी फलन-चिह्न और एक दो-स्थानी विधेय-चिह्न है; और संरचना $\mathfrak{M}$ इस प्रकार दी गई है:

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$
2. $c^{\mathfrak{M}} = 3$
3. $f^{\mathfrak{M}}(1) = 2, f^{\mathfrak{M}}(2) = 3, f^{\mathfrak{M}}(3) = 2$
4. $A^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

(a) $s(v) = 1$ रखें, सभी चर v के लिए। पता लगाइए कि क्या

$$\mathfrak{M}, s \vDash \exists x\, (A(f(z), c) \to \forall y\, (A(y, x) \lor A(f(y), x)))$$

है। क्यों अथवा क्यों नहीं, स्पष्ट कीजिए।

(b) ऐसी कोई भिन्न संरचना और चर नियतन दीजिए जिसमें यह सूत्र संतुष्ट न हो।

प्रश्न 16.3. प्रतिज्ञप्ति 16.14 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 16.4. प्रतिज्ञप्ति 16.18 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 16.5. प्रतिज्ञप्ति 16.19 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 16.6. मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई ऐसी भाषा है जिसमें फलन-चिह्न नहीं हैं। किसी संरचना $\mathfrak{M}$, अचर c और $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}[a/c]$ को ऐसी संरचना परिभाषित करें जो $\mathfrak{M}$ के ठीक समान है, सिवाय इसके कि $c^{\mathfrak{M}[a/c]} = a$। $\mathfrak{M} \models \varphi$ को वाक्यों φ के लिए इस प्रकार परिभाषित करें:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ नहीं।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M} \models \varphi$।
3. $\varphi \equiv R(d_1, \ldots, d_n)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\langle d_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, d_n^{\mathfrak{M}}\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$।
4. $\varphi \equiv d_1 = d_2$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $d_1^{\mathfrak{M}} = d_2^{\mathfrak{M}}$।
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \models \psi$ नहीं।
6. $\varphi \equiv (\psi \land \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \models \psi$ और $\mathfrak{M} \models \chi$।
7. $\varphi \equiv (\psi \lor \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \models \psi$ अथवा $\mathfrak{M} \models \chi$ (अथवा दोनों)।
8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \models \psi$ नहीं, अथवा $\mathfrak{M} \models \chi$ (अथवा दोनों)।
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब या तो $\mathfrak{M} \models \psi$ और $\mathfrak{M} \models \chi$, दोनों; अथवा न तो $\mathfrak{M} \models \psi$ और न ही $\mathfrak{M} \models \chi$।
10. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब सभी $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, बशर्ते c, ψ में न आता हो।

11. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई $a \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, बशर्ते c, ψ में न आता हो।

मान लें कि $x_1, \ldots, x_n$, φ के सभी मुक्त चर हैं; $c_1, \ldots, c_n$, ऐसे अचर-चिह्न हैं जो φ में नहीं आते; $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$; और $s(x_i) = a_i$।

यह सिद्ध कीजिए कि $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ और निम्न कथन के सत्य-मूल्य समान हैं:
$\mathfrak{M}[a_1/c_1, \ldots, a_n/c_n] \models \varphi[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n]$।
(यह प्रश्न दिखाता है कि प्रथम-क्रम तर्क का ऐसा अर्थविज्ञान देना संभव है जो चर-नियतनों के बिना काम चला सके।)

प्रश्न 16.7. मान लें कि f ऐसा फलन-चिह्न है जो $\varphi(x, y)$ में नहीं आता। दिखाइए कि कोई संरचना $\mathfrak{M}$ ऐसी है कि $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ तभी और केवल तभी जब कोई $\mathfrak{M}'$ ऐसी है कि $\mathfrak{M}' \vDash \forall x\, \varphi(x, f(x))$।
(यह प्रश्न उस परिणाम का एक विशेष प्रकरण है जिसे स्कोलेम का प्रमेय कहते हैं; $\forall x\, \varphi(x, f(x))$ को $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ का *स्कोलेम सामान्य रूप* कहते हैं।)

प्रश्न 16.8. प्रतिज्ञप्ति 16.20 का प्रमाण विस्तार से पूरा कीजिए।

प्रश्न 16.9. प्रतिज्ञप्ति 16.23 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 16.10.

1. दिखाइए कि $\Gamma \vDash \bot$ तभी और केवल तभी जब Γ असंतुष्टनीय है।
2. दिखाइए कि $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \bot$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \neg\varphi$।
3. मान लें कि c, φ अथवा Γ में नहीं आता। दिखाइए कि $\Gamma \vDash \forall x\, \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \varphi[c/x]$।

प्रश्न 16.11. प्रतिज्ञप्ति 16.31 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 17

सिद्धांत और उनके प्रतिरूप

17.1 परिचय

अभिगृहीतीय विधि का विकास विज्ञान के इतिहास की एक महत्त्वपूर्ण उपलब्धि है, और गणित के इतिहास में उसका विशेष महत्त्व है। किसी क्षेत्र के अभिगृहीतीय विकास में अनेक प्रश्नों को स्पष्ट करना पड़ता है: यह क्षेत्र किस विषय का अध्ययन करता है? इसकी सबसे मूलभूत अवधारणाएँ कौन-सी हैं? वे आपस में किस प्रकार संबंधित हैं? क्या क्षेत्र की सभी अवधारणाओं को इन मूलभूत अवधारणाओं के पदों में परिभाषित किया जा सकता है? इन अवधारणाओं को किन नियमों का पालन करना पड़ता है, और अनिवार्यतः करना चाहिए?

अभिगृहीतीय विधि और तर्कशास्त्र मानो एक-दूसरे के लिए ही बने हैं। औपचारिक तर्कशास्त्र अभिगृहीतीय सिद्धांतों को सूत्रबद्ध करने, सिद्धांत के अभिगृहीतों से ठीक-ठीक निर्दिष्ट रीति से प्रमेय सिद्ध करने, और अभिगृहीतों को संतुष्ट करने वाले सभी तंत्रों के गुणों का व्यवस्थित अध्ययन करने के साधन देता है।

परिभाषा 17.1. वाक्यों का कोई समुच्चय Γ *संवृत* है, तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \varphi$ होने पर $\varphi \in \Gamma$। वाक्यों के समुच्चय Γ का *संवरण* $\{\varphi : \Gamma \vDash \varphi\}$ है।

यदि Γ, वाक्यों के समुच्चय Δ का संवरण है, तो हम कहते हैं कि Γ, Δ *द्वारा अभिगृहीतीकृत* है।

किसी अभिगृहीतीय सिद्धांत को हम उन वाक्यों का समुच्चय मान सकते हैं जो उसके अभिगृहीत-समुच्चय Δ द्वारा अभिगृहीतीकृत है। दूसरे शब्दों में, मान लें कि हमारे पास उस अभिगृहीतीय रूप से विकसित विज्ञान की मूल अवधारणाओं के लिए अतार्किक चिह्नों वाली प्रथम-क्रम भाषा और उस विज्ञान के मूलभूत नियमों को व्यक्त करने वाला वाक्यों का समुच्चय है। तब सिद्धांत को इस भाषा के उन सभी वाक्यों द्वारा निरूपित मान सकते हैं जो अभिगृहीतों से अर्थगत रूप से निष्पन्न होते हैं। इसके उदाहरण किसी एक मूल अवधारणा और सरल अभिगृहीतों वाले आंशिक क्रमों के सिद्धांत से लेकर न्यूटनियन यांत्रिकी जैसे जटिल सिद्धांतों तक फैले हैं।

अभिगृहीतीय विधि के इस औपचारिक रूप को इतना महत्त्वपूर्ण बनाने वाले मुख्य तार्किक तथ्य निम्नलिखित हैं। मान लें कि Γ किसी सिद्धांत का अभिगृहीत-तंत्र, अर्थात् वाक्यों का समुच्चय है।

1. हम ठीक-ठीक बता सकते हैं कि कोई अभिगृहीत-तंत्र संरचनाओं के अभीष्ट वर्ग को कब निरूपित करता है; दूसरे शब्दों में, उसके प्रतिरूप कौन-सी संरचनाएँ हैं। अर्थात्, यदि कोई निश्चित वर्ग अभीष्ट है और उसकी सदस्य संरचनाएँ हैं, तो अभिगृहीत-तंत्र Γ उस वर्ग को तभी और केवल तभी ठीक निरूपित करेगा, जब उस वर्ग में आने वाली संरचनाएँ ठीक वे $\mathfrak{M}$ हों जिनके लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ हो।

2. इस दृष्टि से हम असफल हो सकते हैं, क्योंकि ऐसे $\mathfrak{M}$ हो सकते हैं जिनके लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ हो, किंतु $\mathfrak{M}$ अभीष्ट न हो; हमारे लिए अभीष्ट संरचनाएँ दूसरी हों। तब हम ऐसे अभिगृहीत जोड़ सकते हैं जो $\mathfrak{M}$ में सत्य नहीं हैं।

3. यदि हम कम-से-कम इतना सफल हों कि जो भी संरचनाएँ अभीष्ट हों, वे सभी Γ को सत्य बनाती हों, तो वे सभी संरचनाएँ वाक्य φ को भी सत्य बनाती हैं, जब भी $\Gamma \vDash \varphi$। अतः यह दिखाने के लिए कि सभी अभीष्ट संरचनाएँ किसी वाक्य को सत्य बनाती हैं, हम केवल यह दिखा सकते हैं कि वह अभिगृहीतों से निष्पन्न होता है; इसके लिए तार्किक साधनों (जैसे व्युत्पत्ति विधियों) का उपयोग किया जा सकता है।

4. कभी-कभी हमारे मन में पहले से कोई अभीष्ट संरचना नहीं होती और हम स्वयं अभिगृहीतों से आरंभ करते हैं: हम कुछ मूल अवधारणाएँ लेते हैं, जिनसे हम कुछ निश्चित नियमों का पालन कराना चाहते हैं, और उन नियमों को अभिगृहीत-तंत्र में संहिताबद्ध करते हैं। हम तुरंत यह जाँचना चाहेंगे कि अभिगृहीत परस्पर विरोधी नहीं हैं। यदि वे विरोधी हैं, तो इन नियमों को मानने वाली कोई अवधारणा हो ही नहीं सकती और हमने एक असंगत सिद्धांत बनाने का प्रयास किया है। Γ का कोई प्रतिरूप खोजकर हम जाँच सकते हैं कि ऐसा नहीं होता। यदि हमारे सिद्धांत के प्रतिरूप हैं, तो हम तार्किक विधियों से उनका अध्ययन और निर्माण दोनों कर सकते हैं।

5. अभिगृहीतों की स्वतंत्रता भी एक महत्त्वपूर्ण प्रश्न है। हो सकता है कि कोई अभिगृहीत वास्तव में अन्य अभिगृहीतों का परिणाम हो और इसलिए अनावश्यक हो। अभिगृहीत φ को, जो Γ में है, अनावश्यक सिद्ध करने के लिए हम $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vDash \varphi$ सिद्ध कर सकते हैं। यह दिखाकर कि $(\Gamma \setminus \{\varphi\}) \cup \{\neg\varphi\}$ संतुष्टनीय है, हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि अभिगृहीत अनावश्यक नहीं है। उदाहरणतः इसी प्रकार दिखाया गया कि समांतर अभिगृहीत, ज्यामिति के अन्य अभिगृहीतों से स्वतंत्र है।

6. एक और महत्त्वपूर्ण प्रश्न सिद्धांत की अवधारणाओं की परिभाषणीयता का है: भाषा का चुनाव निर्धारित करता है कि सिद्धांत के प्रतिरूप किन वस्तुओं और संबंधों से बने हैं। किंतु सिद्धांत के प्रत्येक पक्ष को उसके प्रतिरूपों में अलग से निरूपित करना आवश्यक नहीं। उदाहरणतः प्रत्येक क्रम $\leq$ एक तदनुरूप प्रबल क्रम $<$ निर्धारित करता है—इनमें से एक दिया हो तो दूसरे को परिभाषित कर सकते हैं। अतः ऐसे क्रम वाले किसी सिद्धांत के प्रतिरूप में तदनुरूप प्रबल क्रम का *अलग से* होना आवश्यक नहीं। सामान्यतः एक संबंध को अन्य संबंधों के पदों में कब परिभाषित किया जा सकता है? और किसी संबंध को अन्य संबंधों के पदों में परिभाषित करना कब असंभव है (जिससे उसे भाषा की मूल अवधारणाओं में जोड़ना पड़े)?

17.2 संरचनाएँ: उनके गुणधर्म व्यक्त करना

फलनों और संबंधों पर शर्तें व्यक्त करना, अथवा अधिक सामान्यतः यह व्यक्त करना कि किसी संरचना के फलन और संबंध उन शर्तों को संतुष्ट करते हैं, प्रायः उपयोगी और महत्त्वपूर्ण होता है। उदाहरणतः किसी भाषा में कुछ संरचनाएँ ऐसी होती हैं जिनमें विधेय-चिह्नों का वही "अर्थ" होता है जो हम उनसे चाहते हैं; हम उन्हें अन्य संरचनाओं से अलग पहचानना चाहेंगे। निस्संदेह हम यह बताने के लिए पूर्णतः स्वतंत्र हैं कि कौन-सी संरचनाएँ हमारे "अभीष्ट" हैं। जैसे, हम कह सकते हैं कि विधेय-चिह्न $\leq$ की व्याख्या कोई क्रम होनी चाहिए; अथवा हमारी रुचि केवल $\mathcal{L}$ की उन व्याख्याओं में है जिनका प्रांत समुच्चयों से बना है और जिनमें $\in$ की व्याख्या "का अवयव है" संबंध द्वारा होती है। पर क्या हम यह काम भाषा के वाक्यों से कर सकते हैं? दूसरे शब्दों में, संरचना $\mathfrak{M}$ पर कौन-सी शर्तें हम $\mathfrak{M}$ की भाषा के किसी वाक्य (या संभवतः वाक्यों के किसी समुच्चय) द्वारा व्यक्त कर सकते हैं? कुछ शर्तें ऐसी हैं जिन्हें हम व्यक्त नहीं कर सकेंगे। उदाहरणतः $\mathcal{L}_A$ का कोई ऐसा वाक्य नहीं जो किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में केवल तभी सत्य हो जब $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$। हम "प्रांत में केवल प्राकृतिक संख्याएँ हैं" व्यक्त नहीं कर सकते। किंतु कुछ संरचनाएँ शायद ऐसे "संरचनात्मक गुणधर्म" रखती हैं जिन्हें व्यक्त किया जा सकता है। उन्हें रखने वाली संरचनाएँ कौन-सी हैं, और कौन-से गुणधर्म हम वाक्यों द्वारा व्यक्त कर सकते हैं? अथवा दूसरे रूप में पूछें: कौन-सी संरचनाएँ किसी वाक्य (या वाक्यों के समुच्चय) को सत्य बनाती हैं, और इस प्रकार संरचनाओं के किन संग्रहों का वर्णन किया जा सकता है?

परिभाषा 17.2 (समुच्चय का प्रतिरूप). मान लें कि Γ, भाषा $\mathcal{L}$ के वाक्यों का समुच्चय है। हम कहते हैं कि संरचना $\mathfrak{M}$, Γ *का प्रतिरूप है* यदि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए।

उदाहरण 17.3. वाक्य $\forall x\, x \leq x$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $\leq^{\mathfrak{M}}$ कोई स्वतुल्य संबंध है। वाक्य $\forall x\, \forall y\, ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $\leq^{\mathfrak{M}}$ प्रति-सममित है। वाक्य $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $\leq^{\mathfrak{M}}$ संक्रामक है। अतः

$$\begin{aligned} \{ \quad & \forall x\, x \leq x, \\ & \forall x\, \forall y\, ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y), \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z) \quad \} \end{aligned}$$

के प्रतिरूप ठीक वे संरचनाएँ हैं जिनमें $\leq^{\mathfrak{M}}$ स्वतुल्य, प्रति-सममित और संक्रामक, अर्थात् आंशिक क्रम है। इसलिए हम इन्हें *आंशिक क्रमों के प्रथम-क्रम सिद्धांत* के अभिगृहीत मान सकते हैं।

17.3 प्रथम-क्रम सिद्धांतों के उदाहरण

उदाहरण 17.4. भाषा $\mathcal{L}_<$ में प्रबल रैखिक क्रमों का सिद्धांत निम्न समुच्चय द्वारा अभिगृहीतीकृत है:

$$\begin{aligned} \{ \quad & \forall x \neg x < x, \\ & \forall x \forall y \, ((x < y \vee y < x) \vee x = y), \\ & \forall x \forall y \forall z \, ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \quad \} \end{aligned}$$

अभीष्ट संरचनाएँ इस अभिगृहीत-तंत्र द्वारा पूर्णतः निरूपित होती हैं: प्रत्येक प्रबल रैखिक क्रम इस अभिगृहीत-तंत्र का प्रतिरूप है; और विलोमतः, यदि R किसी समुच्चय X पर रैखिक क्रम है, तो संरचना $\mathfrak{M}$, जिसके लिए $|\mathfrak{M}| = X$ और $<^{\mathfrak{M}} = R$, इस सिद्धांत का प्रतिरूप है।

उदाहरण 17.5. 1 (अचर) और $\cdot$ (द्विस्थानी फलन-चिह्न) वाली भाषा में समूहों का सिद्धांत निम्न वाक्यों द्वारा अभिगृहीतीकृत है:

$$\begin{aligned} & \forall x \, (x \cdot 1) = x \\ & \forall x \forall y \forall z \, (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z) \\ & \forall x \exists y \, (x \cdot y) = 1 \end{aligned}$$

उदाहरण 17.6. पियानो अंकगणित का सिद्धांत अंकगणित की भाषा $\mathcal{L}_A$ के निम्न वाक्यों द्वारा अभिगृहीतीकृत है:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y \, (x' = y' \to x = y) \\ & \forall x \, 0 \neq x' \\ & \forall x \, (x + 0) = x \\ & \forall x \forall y \, (x + y') = (x + y)' \\ & \forall x \, (x \times 0) = 0 \\ & \forall x \forall y \, (x \times y') = ((x \times y) + x) \\ & \forall x \forall y \, (x < y \leftrightarrow \exists z \, (z' + x) = y) \end{aligned}$$

और इस रूप के सभी वाक्य:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x \, \varphi(x)$$

चूँकि अंतिम रूप के अनंततः अनेक वाक्य हैं, यह अभिगृहीत-तंत्र अनंत है। अंतिम रूप को *आगमन-योजना* कहते हैं। (वास्तव में आगमन-योजना यहाँ बताए गए रूप से थोड़ी अधिक जटिल है।)

अंतिम अभिगृहीत $<$ की *स्पष्ट परिभाषा* है।

उदाहरण 17.7. शुद्ध समुच्चयों का सिद्धांत गणित की नींव (और उसके दर्शन) में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। कोई समुच्चय शुद्ध है यदि उसके सभी अवयव भी शुद्ध समुच्चय हों। इसलिए रिक्त समुच्चय शुद्ध माना जाता है, किंतु जिस समुच्चय का कोई ऐसा अवयव हो जो स्वयं समुच्चय न हो, वह शुद्ध नहीं होगा। अतः शुद्ध समुच्चय वे हैं जो केवल रिक्त समुच्चय से, और किसी "मूल-अवयव"—अर्थात् ऐसी वस्तु जो स्वयं समुच्चय नहीं—के बिना बनते हैं।

निम्न को शुद्ध समुच्चयों के सिद्धांत का अभिगृहीत-तंत्र माना जा सकता है:

$$\exists x \neg \exists y\, y \in x$$
$$\forall x \forall y\, (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$
$$\forall x \forall y \exists z \forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$
$$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists u\, (z \in u \wedge u \in x))$$

और इस रूप के सभी वाक्य:

$$\exists x \forall y\, (y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$$

पहला अभिगृहीत कहता है कि ऐसा समुच्चय है जिसका कोई अवयव नहीं (अर्थात् $\emptyset$ विद्यमान है); दूसरा कहता है कि समुच्चय विस्तारात्मक हैं; तीसरा कहता है कि किन्हीं समुच्चयों X और Y के लिए समुच्चय $\{X, Y\}$ विद्यमान है; और चौथा कहता है कि किसी भी समुच्चय X के लिए समुच्चय $\cup X$ विद्यमान है, जहाँ $\cup X$, X के सभी अवयवों का सम्मिलन है।

अंत में उल्लिखित वाक्यों को सामूहिक रूप से *अनौपचारिक समुच्चय-निर्माण योजना* कहते हैं। यह मूलतः कहती है कि प्रत्येक $\varphi(x)$ के लिए समुच्चय $\{x : \varphi(x)\}$ विद्यमान है—अतः पहली दृष्टि में यह सत्य, उपयोगी और शायद आवश्यक अभिगृहीत भी लगता है। इसे "अनौपचारिक" इसलिए कहते हैं क्योंकि, जैसा अंततः पता चलता है, यह इस सिद्धांत को असंतुष्टनीय बना देती है: यदि $\varphi(y)$ को $\neg y \in y$ लें, तो वाक्य

$$\exists x \forall y\, (y \in x \leftrightarrow \neg y \in y)$$

मिलता है, और यह वाक्य किसी भी संरचना में संतुष्ट नहीं होता।

उदाहरण 17.8. *भागमीमांसा* में *भाग-संबंध* मूलभूत संबंध है। समुच्चयों के सिद्धांतों की तरह भाग-संबंध के भी ऐसे सिद्धांत हैं जो इस संबंध की विभिन्न, और कभी-कभी परस्पर विरोधी, धारणाओं को अभिगृहीत करते हैं।

भागमीमांसा की भाषा में केवल एक द्विस्थानी विधेय-चिह्न P होता है, और $P(x, y)$ का "अर्थ" है कि x, y का भाग है। इस व्याख्या को ध्यान में रखते हुए इस भाषा की किसी संरचना को *भाग-संरचना* कहते हैं। निस्संदेह एक द्विस्थानी विधेय वाली हर संरचना को सचमुच यह नाम देना उचित नहीं होगा। "भाग-संबंध" को निरूपित करने के लिए $P^{\mathfrak{M}}$ को कुछ शर्तें संतुष्ट करनी चाहिए, जिन्हें हम भाग-संबंध के सिद्धांत के अभिगृहीत बना सकते हैं। उदाहरणतः भाग-संबंध वस्तुओं पर आंशिक क्रम है: प्रत्येक वस्तु स्वयं का एक भाग है, भले ही *अनुचित* भाग हो; कोई दो भिन्न वस्तुएँ एक-दूसरे का भाग नहीं हो सकतीं; और किसी वस्तु के भाग का भाग स्वयं उस वस्तु का भाग है। ध्यान दें कि इस अर्थ में "का भाग है", "का उपसमुच्चय है" से मिलता-जुलता है, पर "का अवयव है" से नहीं, क्योंकि बाद वाला न स्वतुल्य है न संक्रामक।

$$\forall x\, P(x, x)$$
$$\forall x \forall y\, ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \to x = y)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \to P(x, z))$$

इसके अतिरिक्त, किन्हीं दो वस्तुओं का भागमीमांसात्मक योग होता है (ऐसी वस्तु जिसके ये दोनों वस्तुएँ भाग हैं और जो इस दृष्टि से न्यूनतम है)।

$$\forall x \forall y \exists z \forall u\, (P(z, u) \leftrightarrow (P(x, u) \wedge P(y, u)))$$

ये तत्वमीमांसकों द्वारा विचारित भाग-संबंध के मूल सिद्धांतों में से केवल कुछ हैं। किंतु कुछ परिभाषित संबंध पहले प्रस्तुत किए बिना आगे के सिद्धांतों को सूत्रबद्ध करना या लिखना शीघ्र ही कठिन हो जाता है। उदाहरणतः भागमीमांसा में रुचि रखने वाले अधिकांश तत्वमीमांसक निम्न को भी वैध सिद्धांत मानते हैं: जब भी किसी वस्तु x का उचित भाग y हो, तब उसका कोई भाग z भी होता है जिसका y के साथ कोई भाग उभयनिष्ठ नहीं होता, और y तथा z का संलयन x होता है।

17.4 संरचना में संबंध व्यक्त करना

सूत्रों का एक मुख्य उपयोग संरचना $\mathfrak{M}$ के गुणधर्मों और संबंधों को उसकी भाषा $\mathcal{L}$—अर्थात् $\mathfrak{M}$ की भाषा—के मूल चिह्नों के पदों में व्यक्त करना है। इसका हमारा आशय यह है: $\mathfrak{M}$ का प्रांत वस्तुओं का समुच्चय है। $\mathfrak{M}$ में अचरों, फलन-चिह्नों और विधेय-चिह्नों की व्याख्या क्रमशः $|\mathfrak{M}|$ की कुछ वस्तुओं, $|\mathfrak{M}|$ पर फलनों और $|\mathfrak{M}|$ पर संबंधों द्वारा होती है। उदाहरणतः यदि A_0^2, $\mathcal{L}$ में है, तो $\mathfrak{M}$ उसे संबंध $R = A_0^{2\mathfrak{M}}$ नियत करता है। तब सूत्र $A_0^2(v_1, v_2)$ उसी संबंध को निम्न अर्थ में *व्यक्त करता है*: यदि कोई चर-नियतन s, v_1 को $a \in |\mathfrak{M}|$ और v_2 को $b \in |\mathfrak{M}|$ पर प्रतिचित्रित करता है, तो

$$Rab \quad \text{तभी और केवल तभी जब} \quad \mathfrak{M}, s \vDash A_0^2(v_1, v_2).$$

ध्यान दें कि यहाँ चर-नियतनों को सम्मिलित करना आवश्यक है: हम केवल "Rab तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash A_0^2(a, b)$" नहीं कह सकते, क्योंकि a और b हमारी भाषा के चिह्न नहीं, बल्कि $|\mathfrak{M}|$ के अवयव हैं।

हमारे साधन केवल परमाण्विक सूत्रों तक सीमित नहीं हैं; तार्किक संयोजकों और परिमाणकों से उन्हें जोड़ भी सकते हैं। इसलिए अधिक जटिल सूत्रों के द्वारा ऐसे अन्य संबंध परिभाषित किए जा सकते हैं जो $\mathfrak{M}$ में सीधे निर्मित नहीं हैं। हमारी रुचि यह जानने में है कि ऐसा कैसे किया जाता है, और विशेषतः किसी संरचना में कौन-से संबंध परिभाषित किए जा सकते हैं।

परिभाषा 17.9. मान लें कि $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{L}$ का ऐसा सूत्र है जिसमें केवल v_1,..., v_n मुक्त आते हैं, और $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}$ की कोई संरचना है। $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, संबंध $R \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ को तभी और केवल तभी *व्यक्त करता है* जब

$$Ra_1 \ldots a_n \quad \text{तभी और केवल तभी जब} \quad \mathfrak{M}, s \vDash \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

ऐसे प्रत्येक चर-नियतन s के लिए जिसके लिए $s(v_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$।

उदाहरण 17.10. अंकगणित के मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ में सूत्र $v_1 < v_2 \vee v_1 = v_2$, $\leq$ संबंध को $\mathbb{N}$ पर व्यक्त करता है। सूत्र $v_2 = v_1'$ परवर्ती संबंध को, अर्थात् उस संबंध $R \subseteq \mathbb{N}^2$ को व्यक्त करता है जिसमें Rnm तब सत्य है जब m, n का परवर्ती हो। सूत्र $v_1 = v_2'$ पूर्ववर्ती संबंध को व्यक्त करता है। सूत्रों के इस युग्म में $\exists v_3\,(v_3 \neq 0 \wedge v_2 = (v_1 + v_3))$ पहला और $\exists v_3\,(v_1 + v_3{}') = v_2$ दूसरा है; दोनों $<$ संबंध को व्यक्त करते हैं। इसका अर्थ है कि विधेय-चिह्न $<$ वास्तव में अंकगणित की भाषा में अनावश्यक है; उसे परिभाषित किया जा सकता है।

यह विचार केवल तब रोचक नहीं जब कुछ विशिष्ट संरचनाएँ सामने हों, बल्कि हर उस स्थिति में सामान्य रूप से महत्त्वपूर्ण है जहाँ हम किसी अभीष्ट प्रतिरूप या प्रतिरूपों का वर्णन करने के लिए भाषा का उपयोग करते हैं, अर्थात् जब हम सिद्धांतों पर विचार करते हैं। इन सिद्धांतों में प्रायः मूल चिह्नों के रूप में केवल कुछ विधेय-चिह्नों का उपयोग होता है, किंतु जिस क्षेत्र का वे वर्णन करते हैं उसमें अनेक अन्य संबंध भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। यदि इन अन्य संबंधों को भाषा के मूल विधेय-चिह्नों की व्याख्या करने वाले संबंधों द्वारा व्यवस्थित रूप से व्यक्त किया जा सके, तो कहते हैं कि हम उन्हें भाषा में *परिभाषित* कर सकते हैं।

17.5 समुच्चयों का सिद्धांत

लगभग समूचे गणित को समुच्चयों के सिद्धांत में विकसित किया जा सकता है। इस सिद्धांत में गणित विकसित करने के लिए कई बातें आवश्यक हैं। पहली आवश्यकता संबंध $\in$ के अभिगृहीतों का समुच्चय है। कई भिन्न अभिगृहीत-तंत्र विकसित किए गए हैं, जिनमें $\in$ के गुणधर्म कभी-कभी परस्पर विरोधी भी हैं। चयन के अभिगृहीत सहित जर्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय सिद्धांत का अभिगृहीत-तंत्र **ZFC** विशेष स्थान रखता है। यह अब तक सबसे अधिक प्रयुक्त और अध्ययन किया गया तंत्र है, क्योंकि इसके अभिगृहीत उन लगभग सभी बातों को सिद्ध करने के लिए पर्याप्त निकलते हैं जिन्हें गणितज्ञ सिद्ध कर सकने की अपेक्षा रखते हैं। पर यह स्थापित करने से पहले यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि गणितज्ञ जिन बातों को व्यक्त करना चाहते हैं, उन्हें हम *व्यक्त* भी कैसे कर सकते हैं। आरंभ में ही भाषा में कोई अचर या फलन-चिह्न नहीं है। इसलिए पहली दृष्टि में यह भी स्पष्ट नहीं कि हम विशिष्ट समुच्चयों (जैसे $\emptyset$ या $\mathbb{N}$), समुच्चयों पर संक्रियाओं

(जैसे $X \cup Y$ और $\wp(X)$), और उनसे भी आगे संबंधों तथा फलनों जैसी उन रचनाओं की चर्चा कैसे करेंगे जिनमें समुच्चयों के अतिरिक्त अन्य प्रकार की वस्तुएँ आती हैं।

पहली बात, "का अवयव है" ही हमारी रुचि का एकमात्र संबंध नहीं; "का उपसमुच्चय है" लगभग उतना ही महत्त्वपूर्ण लगता है। किंतु "का उपसमुच्चय है" को "का अवयव है" के पदों में *परिभाषित* किया जा सकता है। इसके लिए हमें समुच्चय सिद्धांत की भाषा में ऐसा सूत्र $\varphi(x, y)$ खोजना होगा जिसे समुच्चयों का युग्म $\langle X, Y\rangle$ तभी और केवल तभी संतुष्ट करे जब $X \subseteq Y$। पर X, Y का उपसमुच्चय ठीक तभी है जब X के सभी अवयव, Y के भी अवयव हों। अतः हम $\subseteq$ को इस सूत्र द्वारा परिभाषित कर सकते हैं:

$$\forall z\,(z \in x \to z \in y)$$

अब जब भी किसी सूत्र में संबंध $\subseteq$ का उपयोग करना हो, हम उसके स्थान पर उस सूत्र का उपयोग कर सकते हैं (जिसमें x और y को उपयुक्त रूप से बदलें और आवश्यक होने पर आबद्ध चर z का नाम बदलें)। उदाहरणतः समुच्चयों की विस्तारात्मकता का अर्थ है कि यदि किन्हीं समुच्चयों x और y में से प्रत्येक दूसरे में समाहित हो, तो x और y एक ही समुच्चय होने चाहिए। इसे $\forall x\,\forall y\,((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \to x = y)$ द्वारा, अथवा $\subseteq$ के स्थान पर ऊपर की परिभाषा रखने पर निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है:

$$\forall x\,\forall y\,((\forall z\,(z \in x \to z \in y) \wedge \forall z\,(z \in y \to z \in x)) \to x = y).$$

वास्तव में यह **ZFC** के अभिगृहीतों में से एक, "विस्तारात्मकता का अभिगृहीत", है।

$\emptyset$ के लिए कोई अचर नहीं, किंतु "x रिक्त है" को $\neg\exists y\, y \in x$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। तब "$\emptyset$ विद्यमान है" वाक्य $\exists x\,\neg\exists y\, y \in x$ बन जाता है। यह **ZFC** का एक और अभिगृहीत है। (ध्यान दें कि विस्तारात्मकता के अभिगृहीत से यह निष्पन्न होता है कि केवल एक ही रिक्त समुच्चय है।) समुच्चय सिद्धांत की भाषा में जब भी $\emptyset$ की चर्चा करनी हो, हम उसे "ऐसा समुच्चय है जो रिक्त है और ..." के रूप में लिखेंगे। उदाहरणतः यह व्यक्त करने के लिए कि $\emptyset$ हर समुच्चय का उपसमुच्चय है, हम लिख सकते हैं:

$$\exists x\,(\neg\exists y\, y \in x \wedge \forall z\, x \subseteq z)$$

जहाँ निस्संदेह $x \subseteq z$ को भी उसकी परिभाषा से बदलना होगा।

$X \cup Y$ और $\wp(X)$ जैसी समुच्चयों पर संक्रियाओं की चर्चा करने के लिए हमें इसी प्रकार की युक्ति लगानी होगी। समुच्चय सिद्धांत की भाषा में कोई फलन-चिह्न नहीं है, किंतु हम फलनात्मक संबंधों $X \cup Y = Z$ और $\wp(X) = Y$ को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$\forall u\,((u \in x \vee u \in y) \leftrightarrow u \in z)$$
$$\forall u\,(u \subseteq x \leftrightarrow u \in y)$$

क्योंकि $X \cup Y$ के अवयव ठीक वे समुच्चय हैं जो या तो X के अवयव या Y के अवयव हैं, और $\wp(X)$ के अवयव ठीक X के उपसमुच्चय हैं। किंतु इससे हम $x \cup y$ या $\wp(x)$ को पद मानकर उपयोग नहीं कर सकते: हम केवल उन पूरे सूत्रों का उपयोग कर सकते हैं जो संबंधों $X \cup Y = Z$ और $\wp(X) = Y$ को परिभाषित करते हैं। वास्तव में अभी हम यह नहीं जानते कि ये संबंध कभी संतुष्ट होते भी हैं, अर्थात् यह नहीं जानते कि सम्मिलन और घात समुच्चय सदैव विद्यमान हैं। उदाहरणतः वाक्य $\forall x\,\exists y\,\wp(x) = y$, **ZFC** का एक और अभिगृहीत (घात समुच्चय का अभिगृहीत) है।

अब क्रमित युग्मों या फलनों की चर्चा का क्या? यहाँ हमें समझाना होगा कि क्रमित युग्मों और फलनों को विशेष प्रकार के समुच्चय कैसे माना जा सकता है। क्रमित युग्म $\langle x, y\rangle$ को परिभाषित करने की एक विधि उसे समुच्चय $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ मानना है। किंतु पहले की तरह हम इस समुच्चय को नाम देने वाला कोई फलन-चिह्न प्रस्तुत नहीं कर सकते; केवल संबंध $\langle x, y\rangle = z$, अर्थात् $\{\{x\}, \{x, y\}\} = z$, परिभाषित कर सकते हैं:

$$\forall u\,(u \in z \leftrightarrow (\forall v\,(v \in u \leftrightarrow v = x) \vee \forall v\,(v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y))))$$

यह कहता है कि अवयव u ठीक वे समुच्चय हैं जो z के अवयव हैं और जिनका एकमात्र अवयव x है, अथवा जिनके एकमात्र अवयव x और y हैं (दूसरे शब्दों में, वे समुच्चय या तो $\{x\}$ हैं या $\{x, y\}$)। यह मिल जाने पर हम आगे की बातें भी कह सकते हैं, जैसे कि $X \times Y = Z$:

$$\forall z\,(z \in Z \leftrightarrow \exists x\,\exists y\,(x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y\rangle = z))$$

फलन $f\colon X \to Y$ को संबंध $f(x) = y$, अर्थात् युग्मों के समुच्चय $\{\langle x, y\rangle : f(x) = y\}$ के रूप में माना जा सकता है। तब हम कह सकते हैं कि कोई समुच्चय f, X से Y में फलन है यदि (क) वह संबंध $\subseteq X \times Y$ है, (ख) वह पूर्ण है, अर्थात् प्रत्येक $x \in X$ के लिए कोई $y \in Y$ है जिसके लिए $\langle x, y\rangle \in f$, और (ग) वह फलनात्मक है, अर्थात् जब भी $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f$, तब $y = y'$ (क्योंकि फलन के मान अद्वितीय होने चाहिए)। अतः "f, X से Y में फलन है" को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\begin{aligned}&\forall u\,(u \in f \to \exists x\,\exists y\,(x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y\rangle = u)) \wedge \\ &\forall x\,(x \in X \to (\exists y\,(y \in Y \wedge \mathrm{maps}(f, x, y)) \wedge \\ &\qquad\qquad (\forall y\,\forall y'\,((\mathrm{maps}(f, x, y) \wedge \mathrm{maps}(f, x, y')) \to y = y')))\end{aligned}$$

जहाँ $\mathrm{maps}(f, x, y)$, $\exists v\,(v \in f \wedge \langle x, y\rangle = v)$ का संक्षेप है (यह सूत्र "$f(x) = y$" को व्यक्त करता है)।

अब यह व्यक्त करना भी कठिन नहीं कि $f\colon X \to Y$ एकैकी है; उदाहरणतः:

$$\begin{aligned}f\colon X \to Y \wedge \forall x\,\forall x'\,((x \in X \wedge x' \in X \wedge \\ \exists y\,(\mathrm{maps}(f, x, y) \wedge \mathrm{maps}(f, x', y))) \to x = x')\end{aligned}$$

फलन $f\colon X \to Y$ तभी और केवल तभी एकैकी है जब f, $x, x' \in X$ को एक ही y पर प्रतिचित्रित करे तो $x = x'$। यदि इस सूत्र को $\mathrm{inj}(f, X, Y)$ से संक्षिप्त करें, तो हम समुच्चय सिद्धांत की भाषा में कैंटर के प्रमेय जैसा गैर-तुच्छ कथन भी कह सकते हैं: $\wp(X)$ से X में कोई एकैकी फलन नहीं है:

$$\forall X\,\forall Y\,(\wp(X) = Y \to \neg\exists f\,\mathrm{inj}(f, Y, X))$$

यह लग सकता है कि समुच्चय सिद्धांत को एक और अभिगृहीत चाहिए, जो प्रत्येक परिभाषक गुणधर्म के लिए किसी समुच्चय के अस्तित्व की गारंटी दे। यदि $\varphi(x)$ समुच्चय सिद्धांत का ऐसा सूत्र है जिसमें चर x मुक्त है, तो हम इस वाक्य पर विचार कर सकते हैं:

$$\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

यह वाक्य कहता है कि ऐसा समुच्चय y है जिसके अवयव ठीक वे सभी x हैं जो $\varphi(x)$ को संतुष्ट करते हैं। इस योजना को "अप्रतिबंधित समुच्चय-निर्माण सिद्धांत" कहते हैं। यह बहुत उपयोगी दिखता है; दुर्भाग्य से यह असंगत है। $\varphi(x) \equiv \neg x \in x$ लें; तब समुच्चय-निर्माण सिद्धांत कहता है:

$$\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

अर्थात् यह उन सभी समुच्चयों के समुच्चय का अस्तित्व कहता है जो स्वयं के अवयव नहीं हैं। ऐसा कोई समुच्चय विद्यमान नहीं हो सकता—यही रसेल का विरोधाभास है। वास्तव में **ZFC** में इस सिद्धांत का एक प्रतिबंधित और संगत रूप, पृथक्करण सिद्धांत, होता है:

$$\forall z\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)).$$

17.6 संरचनाएँ: उनका आकार व्यक्त करना

संरचनाओं के कुछ गुणधर्म ऐसे हैं जिन्हें हम भाषा के अतार्किक चिह्नों का उपयोग किए बिना भी व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरणतः ऐसे वाक्यों का निर्माण किया जा सकता है जो किसी संरचना में तभी और केवल तभी सत्य हैं जब उस संरचना के प्रांत में कम-से-कम, अधिक-से-अधिक, या ठीक किसी निश्चित संख्या n जितने अवयव हों।

प्रतिज्ञप्ति 17.11. *वाक्य*

$$\begin{aligned}\varphi_{\geq n} \equiv \exists x_1\, \exists x_2\, \ldots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n)\end{aligned}$$

किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $|\mathfrak{M}|$ में कम-से-कम n अवयव हों। फलतः $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi_{\geq n+1}$ तभी और केवल तभी जब $|\mathfrak{M}|$ में अधिक-से-अधिक n अवयव हों।

प्रतिज्ञप्ति 17.12. *वाक्य*

$$\begin{aligned}\varphi_{=n} \equiv \exists x_1\, \exists x_2\, \ldots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n \wedge \\ \forall y\, (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n))\end{aligned}$$

किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $|\mathfrak{M}|$ में ठीक n अवयव हों।

प्रतिज्ञप्ति 17.13. *कोई संरचना अनंत है, तभी और केवल तभी जब वह निम्न समुच्चय का प्रतिरूप है:*

$$\{\varphi_{\geq 1}, \varphi_{\geq 2}, \varphi_{\geq 3}, \ldots\}.$$

ऐसा कोई एक विशुद्ध तार्किक वाक्य नहीं जो $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य हो जब $|\mathfrak{M}|$ अनंत हो। किंतु अतार्किक विधेय-चिह्नों वाले ऐसे वाक्यों का निर्माण किया जा सकता है जिनके केवल अनंत प्रतिरूप हों (यद्यपि प्रत्येक अनंत संरचना उनका प्रतिरूप नहीं होती)। किसी संरचना के परिमित होने का गुणधर्म और किसी संरचना के अगणनीय होने का गुणधर्म तो वाक्यों के किसी अनंत समुच्चय से भी व्यक्त नहीं किए जा सकते। ये तथ्य संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेयों से निष्पन्न होते हैं।

प्रश्न

प्रश्न 17.1. $\mathcal{L}_A$ में निम्न संबंधों को परिभाषित करने वाले सूत्रों को खोजिए:

1. n, i और j के बीच है;
2. n, m को निःशेष विभाजित करता है (अर्थात् m, n का गुणज है);
3. n अभाज्य संख्या है (अर्थात् 1 और n के अतिरिक्त कोई संख्या n को निःशेष विभाजित नहीं करती)।

प्रश्न 17.2. मान लें कि सूत्र $\varphi(v_1, v_2)$ संबंध $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$ को किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में व्यक्त करता है। निम्न संबंधों को व्यक्त करने वाले सूत्र खोजिए:

1. संबंध R^{-1}, अर्थात् R का प्रतिलोम;

2. सापेक्ष गुणनफल $R \mid R$;

क्या आप R^+, अर्थात् R के संक्रामक संवरक, को व्यक्त करने की कोई विधि खोज सकते हैं?

प्रश्न 17.3. मान लें कि $\mathcal{L}$ वह भाषा है जिसमें केवल द्विस्थानी विधेय-चिह्न $<$ है (निस्संदेह $=$ को छोड़कर कोई अन्य अचर, फलन-चिह्न या विधेय-चिह्न नहीं)। मान लें कि $\mathfrak{N}$ वह संरचना है जिसके लिए $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$ और $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m\rangle : n < m\}$। निम्न को सिद्ध कीजिए:

1. $\{0\}$, $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है;
2. $\{1\}$, $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है;
3. $\{2\}$, $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है;
4. प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए समुच्चय $\{n\}$, $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है;
5. $|\mathfrak{N}|$ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है;
6. $|\mathfrak{N}|$ का प्रत्येक सहपरिमित उपसमुच्चय $\mathfrak{N}$ में परिभाषणीय है (जहाँ $X \subseteq \mathbb{N}$ सहपरिमित तभी और केवल तभी जब $\mathbb{N} \setminus X$ परिमित हो)।

प्रश्न 17.4. निम्न को दिखाने वाली कोई व्युत्पत्ति देकर सिद्ध कीजिए कि अप्रतिबंधित समुच्चय-निर्माण सिद्धांत असंगत है:

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x) \vdash \bot.$$

पहले $(A \to \neg A) \wedge (\neg A \to A) \vdash \bot$ दिखाना सहायक हो सकता है।

अध्याय 18

व्युत्पत्ति-तंत्र

यह अध्याय व्युत्पत्ति-तंत्रों की सामान्य सामग्री एकत्र करता है। किसी विशिष्ट तंत्र का उपयोग करने वाली पाठ्यपुस्तक उस तंत्र को प्रस्तुत करने वाले अध्याय के आरंभ में परिचय खंड और संबंधित सर्वेक्षण खंड जोड़ सकती है।

18.1 परिचय

तर्कशास्त्रों में सामान्यतः अर्थविज्ञान और व्युत्पत्ति-तंत्र दोनों होते हैं। अर्थविज्ञान सत्य, संतुष्टनीयता, वैधता और तार्किक निष्पत्ति जैसी धारणाओं से संबंधित है। व्युत्पत्ति-तंत्रों का उद्देश्य तार्किक निष्पत्ति और वैधता स्थापित करने की पूर्णतः वाक्यविन्यासगत विधि देना है। वे इस अर्थ में पूर्णतः वाक्यविन्यासगत हैं कि ऐसे तंत्र की व्युत्पत्ति एक परिमित वाक्य-विन्यासगत वस्तु होती है, प्रायः वाक्यों या सूत्रों का अनुक्रम (या कोई अन्य परिमित विन्यास)। अच्छे व्युत्पत्ति-तंत्रों में यह गुण होता है कि वाक्यों या सूत्रों के किसी भी दिए गए अनुक्रम अथवा विन्यास के "सही" होने को यांत्रिक रूप से जाँचा जा सकता है।

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के सबसे सरल (और ऐतिहासिक रूप से प्रथम) व्युत्पत्ति-तंत्र *अभिगृहीतीय* थे। ऐसे तंत्र में सूत्रों का कोई अनुक्रम तभी व्युत्पत्ति माना जाता है, जब उसमें हर अलग सूत्र या तो "अभिगृहीतों" के किसी नियत समुच्चय में हो, अथवा अनुक्रम में उससे पहले आए सूत्रों से नियत संख्या में से किसी "अनुमान-नियम" द्वारा निकलता हो—और यह यांत्रिक रूप से जाँचा जा सकता है कि सूत्र अभिगृहीत है या नहीं तथा वह किसी अनुमान-नियम द्वारा अन्य सूत्रों से ठीक प्रकार निकलता है या नहीं। अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्रों का वर्णन करना आसान है—और अधिसैद्धांतिक रूप से उन्हें सँभालना भी आसान है—लेकिन उनमें व्युत्पत्तियाँ पढ़ना और समझना कठिन है तथा उन्हें बनाना भी कठिन है।

अन्य व्युत्पत्ति-तंत्र इसलिए विकसित किए गए हैं कि व्युत्पत्तियाँ बनाना आसान हो या पूरी हो चुकी व्युत्पत्तियाँ अधिक आसानी से समझ में आएँ। उदाहरण हैं स्वाभाविक निगमन, सत्य-वृक्ष—जिन्हें सारणी-प्रमाण भी कहते हैं—और अनुक्रम-कलन। कुछ व्युत्पत्ति-तंत्र विशेषतः यंत्रीकरण को ध्यान में रखकर बनाए जाते हैं; जैसे, खंड-समाधान विधि को संगणक-कार्यक्रम में लागू करना आसान है (लेकिन उसकी व्युत्पत्तियाँ को समझना लगभग असंभव है)। इन अन्य व्युत्पत्ति-तंत्रों में से अधिकतर में व्युत्पत्तियाँ सूत्रों के अनुक्रमों के बजाय वृक्षों के रूप में प्रस्तुत होती हैं। इससे यह देखना आसान होता है कि व्युत्पत्ति के कौन-से भाग किन दूसरे भागों पर निर्भर हैं।

अतः किसी दिए तर्कशास्त्र—जैसे प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र—के अलग-अलग व्युत्पत्ति-तंत्र इस बात की अलग-अलग स्पष्ट व्याख्याएँ देंगे कि वाक्य का *प्रमेय* होना क्या है और किसी वाक्य का कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न होना क्या है। यह चाहे जिस तरह किया जाए (अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ, स्वाभाविक निगमन, अनुक्रम व्युत्पत्तियाँ, सत्य-वृक्ष या खंड-समाधान द्वारा खंडन), हम चाहते हैं कि ये संबंध वैधता और तार्किक निष्पत्ति की अर्थवैज्ञानिक धारणाओं से मेल खाएँ। $\vdash \varphi$ को "φ एक प्रमेय है" के लिए और "$\Gamma \vdash \varphi$" को "φ, Γ से व्युत्पन्न है" के लिए लिखें। $\vdash$ को चाहे जिस प्रकार परिभाषित करें, हम चाहते हैं कि यह $\vDash$ से मेल खाए; अर्थात्:

1. $\vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\vDash \varphi$

2. $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vDash \varphi$

ऊपर दी गई "केवल तभी" दिशा को *सुदृढ़ता* कहते हैं। व्युत्पत्ति-तंत्र सुदृढ़ है यदि व्युत्पन्नता तार्किक निष्पत्ति (या वैधता) की गारंटी देती है। हर उपयोगी व्युत्पत्ति-तंत्र को सुदृढ़ होना चाहिए; असुदृढ़ व्युत्पत्ति-तंत्र बिल्कुल उपयोगी नहीं होते। आखिर व्युत्पत्ति का पूरा उद्देश्य वैधता या तार्किक निष्पत्ति की वाक्यविन्यासगत गारंटी देना है। हम प्रस्तुत किए गए व्युत्पत्ति-तंत्रों की सुदृढ़ता सिद्ध करेंगे।

इसकी विपरीत "यदि" दिशा भी महत्त्वपूर्ण है; इसे *पूर्णता* कहते हैं। कोई पूर्ण व्युत्पत्ति-तंत्र इतना शक्तिशाली होता है कि जब भी φ वैध हो तब φ के प्रमेय होने को, और $\Gamma \vdash \varphi$ को, जब भी $\Gamma \vDash \varphi$, दिखा सके। पूर्णता स्थापित करना अधिक कठिन है, और कुछ तर्कशास्त्रों के लिए कोई पूर्ण व्युत्पत्ति-तंत्र नहीं होता। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ऐसे तंत्र उपलब्ध हैं। कुर्ट गेडेल (Kurt Gödel) ने अपने 1929 के शोधप्रबंध में प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के व्युत्पत्ति-तंत्र की पूर्णता सबसे पहले सिद्ध की।

व्युत्पत्ति-तंत्रों से जुड़ी एक अन्य धारणा *संगतता* है। वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत कहलाता है यदि उससे कुछ भी व्युत्पन्न किया जा सकता हो; अन्यथा वह संगत है। असंगतता, असंतुष्टनीयता का वाक्यविन्यासगत प्रतिरूप है: असंतुष्टनीय समुच्चयों की तरह, वाक्यों के असंगत समुच्चय अच्छे सिद्धान्त नहीं बनते; उनमें मूलभूत दोष होता है। वाक्यों के संगत समुच्चय सत्य या उपयोगी न भी हों, फिर भी वे तार्किक उपयोगिता की न्यूनतम कसौटी पूरी करते हैं। अलग-अलग व्युत्पत्ति-तंत्रों में वाक्यों के समुच्चयों की संगतता की विशिष्ट परिभाषा अलग हो सकती है; लेकिन $\vdash$ की तरह हम चाहते हैं कि संगतता अपने अर्थवैज्ञानिक प्रतिरूप, संतुष्टनीयता, से मिले। हम चाहते हैं कि सदा Γ संगत तभी और केवल तभी हो जब वह संतुष्टनीय हो। यहाँ "केवल तभी" दिशा पूर्णता के बराबर है (संगतता संतुष्टनीयता की गारंटी देती है), और "यदि" दिशा सुदृढ़ता के बराबर है (संतुष्टनीयता संगतता की गारंटी देती है)। वास्तव में, शास्त्रीय प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में सुदृढ़ता और पूर्णता के दोनों रूप समतुल्य हैं।

18.2 अनुक्रम-कलन

जहाँ अनेक व्युत्पत्ति-तंत्र वाक्यों की विभिन्न व्यवस्थाओं पर कार्य करते हैं, वहीं अनुक्रम-कलन *अनुक्रमों* पर कार्य करता है। अनुक्रम इस रूप का व्यंजक होता है:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_m,$$

अर्थात् यह वाक्यों के दो क्रमों का युग्म है, जिन्हें अनुक्रम-चिह्न $\Rightarrow$ अलग करता है। दोनों में से कोई भी क्रम रिक्त हो सकता है। अनुक्रम-कलन में व्युत्पत्ति अनुक्रमों का एक वृक्ष है। उसके सबसे ऊपर के अनुक्रम विशेष रूप के होते हैं (उन्हें "आरंभिक अनुक्रम" अथवा "अभिगृहीत" कहते हैं), और हर अन्य अनुक्रम अपने ठीक ऊपर के अनुक्रमों से किसी अनुमान-नियम द्वारा निकलता है। अनुमान-नियम या तो अनुक्रमों के वाक्यों को बदलते हैं (बाईं या दाईं ओर उन्हें जोड़कर, हटाकर अथवा पुनर्व्यवस्थित करके), या फिर नियम के निष्कर्ष में कोई जटिल सूत्र प्रस्तुत करते हैं। उदाहरण के लिए, $\wedge$L नियम $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ से $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का अनुमान लगाने देता है; और $\rightarrow$R नियम $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ का अनुमान लगाने देता है, जहाँ Γ, Δ, φ और ψ कोई भी हों। (विशेषतः, Γ और Δ रिक्त हो सकते हैं।)

अनुक्रम-कलन पर आधारित $\vdash$ संबंध की परिभाषा इस प्रकार है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई क्रम Γ_0 ऐसा हो कि हर φ, जो Γ_0 में है, Γ में हो और कोई ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसके मूल पर अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ हो। φ अनुक्रम-कलन में प्रमेय है यदि अनुक्रम $\Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। उदाहरण के लिए, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\,\rightarrow\mathrm{R}$$

अनुक्रम-कलन में समुच्चय Γ असंगत है यदि $\Gamma_0 \Rightarrow$ की कोई व्युत्पत्ति हो (जहाँ हर $\varphi \in \Gamma_0$, Γ में हो और अनुक्रम का दायाँ पक्ष रिक्त हो)। नियम WR का उपयोग करके असंगत समुच्चय से कोई भी वाक्य व्युत्पन्न किया जा सकता है।

अनुक्रम-कलन का आविष्कार गेरहार्ड गेन्ट्सेन ने 1930 के दशक में किया। अपने व्यवस्थित और सममित विन्यास के कारण यह व्युत्पत्तियाँ का सिद्धान्त विकसित करने के लिए अत्यंत उपयोगी औपचारिक ढाँचा है। अनुक्रम-कलन में व्युत्पत्तियाँ खोजना अपेक्षाकृत आसान है, पर ये व्युत्पत्तियाँ प्रायः पढ़ने में कठिन होती हैं और प्रमाणों से इनका संबंध भी कभी-कभी स्पष्ट नहीं होता। फिर भी व्युत्पत्ति-तंत्रों के प्रति यह अत्यंत सुरुचिपूर्ण दृष्टिकोण सिद्ध हुआ है, और अनेक तर्कशास्त्रों के अपने अनुक्रम-कलन तंत्र हैं।

18.3 स्वाभाविक निगमन

स्वाभाविक निगमन ऐसा व्युत्पत्ति-तंत्र है जिसका उद्देश्य वास्तविक तर्क-प्रक्रिया का प्रतिरूप देना है (विशेषतः गणितज्ञों द्वारा अपनाई जाने वाली सुव्यवस्थित तर्क-प्रक्रिया का)। वास्तविक तर्क-प्रक्रिया कई "स्वाभाविक" ढाँचों से आगे बढ़ती है। उदाहरणतः, स्थिति-भेद से प्रमाण किसी वियोजनात्मक आधारवाक्य से निष्कर्ष स्थापित करने देता है: हम दिखाते हैं कि निष्कर्ष उसके दोनों विकल्पों में से प्रत्येक से निकलता है। अप्रत्यक्ष प्रमाण में हम यह दिखाकर निष्कर्ष स्थापित करते हैं कि उसका निषेध विरोधाभास तक ले जाता है। आपादन-प्रमाण में यह दिखाकर "यदि ...तो ..." रूप का दावा स्थापित किया जाता है कि उत्तरपद, पूर्वपद से निकलता है। स्वाभाविक निगमन इन स्वाभाविक अनुमानों में से कुछ का औपचारिक निरूपण है। हर तार्किक संयोजक और परिमाणक के साथ दो नियम जुड़े होते हैं—एक प्रवेश-नियम और एक निरसन-नियम—और प्रत्येक नियम ऐसे ही किसी स्वाभाविक अनुमान-ढाँचे के अनुरूप होता है। उदाहरणतः, $\rightarrow$Intro आपादन-प्रमाण के और $\vee$Elim स्थिति-भेद से प्रमाण के अनुरूप है। विशेष रूप से सरल नियम $\wedge$Elim है, जो $\varphi \wedge \psi$ से φ (अथवा ψ) का अनुमान लगाने देता है।

स्वाभाविक निगमन को अन्य व्युत्पत्ति-तंत्रों से अलग करने वाला एक गुण इसमें मान्यताओं का उपयोग है। स्वाभाविक निगमन में व्युत्पत्ति, सूत्रों का एक वृक्ष है। उसके मूल पर एक सूत्र होता है; सूत्रों से बने इस वृक्ष की "पत्तियाँ" ऐसे सूत्रों होते हैं जिनसे निष्कर्ष व्युत्पन्न किया जाता है। स्वाभाविक निगमन में पत्तियों पर स्थित कुछ सूत्रों की व्युत्पत्ति के भीतर भूमिका होती है, किन्तु जब व्युत्पत्ति निष्कर्ष तक पहुँचती है, तब तक उनका उपयोग पूरा हो चुका होता है। यह वास्तविक तर्क-प्रक्रिया की उस पद्धति के अनुरूप है जिसमें ऐसी परिकल्पनाएँ प्रस्तुत की जाती हैं जो केवल थोड़े समय तक प्रभावी रहती हैं। उदाहरणतः, स्थिति-भेद से प्रमाण में हम दोनों विकल्पों में से प्रत्येक को सत्य मानते हैं; आपादन-प्रमाण में पूर्वपद को सत्य मानते हैं; और अप्रत्यक्ष प्रमाण में निष्कर्ष के निषेध को सत्य मानते हैं। काल्पनिक मान्यताओं को प्रस्तुत करना और फिर किसी मध्यवर्ती चरण को स्थापित करने के बाद उन्हें हटा देना स्वाभाविक निगमन की पहचान है। स्वाभाविक निगमन की व्युत्पत्ति की पत्तियों पर स्थित सूत्रों को मान्यताएँ कहते हैं, और कुछ अनुमान-नियम उन्हें सक्रिय निर्भरता से "मुक्त" कर सकते हैं। उदाहरणतः, यदि हमारे पास कोई व्युत्पत्ति हो जो कुछ ऐसी मान्यताओं से ψ देती हो जिनमें φ शामिल है, तो $\rightarrow$Intro नियम हमें $\varphi \rightarrow \psi$ का अनुमान लगाने और φ रूप की किसी भी मान्यता को मुक्त करने देता है। (कौन-सी मान्यता किस अनुमान-चरण में मुक्त होती है, इसका लेखा रखने के लिए हम अनुमान और उसके द्वारा मुक्त की जाने वाली मान्यताओं पर एक संख्या लगाते हैं।) जो मान्यताएँ अमुक्त रहती हैं, वे व्युत्पत्ति के अंत में मिलकर निष्कर्ष की सत्यता के लिए पर्याप्त होती हैं; इसलिए कोई व्युत्पत्ति यह स्थापित करती है कि उसकी अमुक्त मान्यताओं से उसका निष्कर्ष तार्किकतः निकलता है।

स्वाभाविक निगमन पर आधारित संबंध $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी होता है जब कोई व्युत्पत्ति ऐसी हो जिसमें φ वृक्ष का अंतिम वाक्य हो और हर अमुक्त पत्ती Γ में हो। φ स्वाभाविक निगमन में प्रमेय तभी और केवल तभी है जब कोई व्युत्पत्ति ऐसी हो जिसमें φ अंतिम वाक्य हो और सभी मान्यताएँ मुक्त हों। उदाहरण के लिए, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$1\,\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\,\rightarrow\text{Intro}$$

लेबल 1 बताता है कि मान्यता $\varphi \wedge \psi$ को $\rightarrow$Intro अनुमान पर मुक्त किया जाता है।

समुच्चय Γ स्वाभाविक निगमन में तभी और केवल तभी असंगत है जब $\Gamma \vdash \bot$ हो। नियम $\bot_I$ के कारण असंगत समुच्चय से कोई भी वाक्य व्युत्पन्न किया जा सकता है।

स्वाभाविक-निगमन तंत्र गेरहार्ड गेन्ट्सेन और स्तानिस्लाव याश्कोव्स्की (Stanisław Jaśkowski) ने 1930 के दशक में विकसित किए; बाद में डाग प्रावित्स और फ्रेडरिक फिच ने उन्हें आगे बढ़ाया। इसके अनुमान प्रमाण की स्वाभाविक विधियों का प्रतिरूप हैं, इसलिए यह दार्शनिकों में लोकप्रिय है। फिच द्वारा विकसित रूपों का उपयोग प्रायः आरंभिक तर्कशास्त्र की पाठ्यपुस्तकों में होता है। तर्कशास्त्र के दर्शन में कभी-कभी यह माना गया है कि स्वाभाविक निगमन के नियम तार्किक संक्रियकों के अर्थ देते हैं ("प्रमाण-सैद्धांतिक अर्थविज्ञान")।

18.4 सत्य-वृक्ष

जहाँ अनेक व्युत्पत्ति-तंत्र वाक्यों की व्यवस्थाओं पर कार्य करते हैं, वहीं सत्य-वृक्ष चिह्नित सूत्रों पर कार्य करते हैं। चिह्नित सूत्र सत्य-मूल्य-चिह्न ($\mathbb{T}$ अथवा $\mathbb{F}$) और वाक्य का युग्म होता है:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ अथवा } \mathbb{F}\,\varphi.$$

सत्य-वृक्ष नीचे की ओर शाखित वृक्ष में व्यवस्थित चिह्नित सूत्रों से बनता है। वह कई *मान्यताओं* से शुरू होता है और ऐसे चिह्नित सूत्रों से आगे बढ़ता है जो अपने ऊपर के चिह्नित सूत्रों में से किसी एक पर अनुमान-नियम लगाने से मिलते हैं। हर नियम शाखा के सिरे पर एक या अधिक चिह्नित सूत्रों को जोड़ने देता है, अथवा दो चिह्नित सूत्रों को साथ-साथ जोड़ने देता है—इस स्थिति में शाखा दो भागों में बँटती है और जोड़े गए दो चिह्नित सूत्रों से दोनों नई शाखाओं के सिरे बनते हैं।

किसी जटिल चिह्नित सूत्र पर नियम लगाने से कुछ चिह्नित सूत्रों को जोड़ा जाता है; ये मूल सूत्र के ठीक भीतर के सूत्रों से बनते हैं। नियम जोड़ों में आते हैं—दोनों चिह्नों में से प्रत्येक के लिए एक नियम। उदाहरणतः, $\wedge\mathbb{T}$ नियम $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ पर लागू होता है और दोनों चिह्नित सूत्रों $\mathbb{T}\,\varphi$ तथा $\mathbb{T}\,\psi$ को उस किसी भी शाखा के सिरे पर जोड़ने देता है जिसमें $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ हो; और नियम $\varphi \wedge \psi\mathbb{F}$, $\mathbb{F}\,\varphi$ तथा $\mathbb{F}\,\psi$ को साथ-साथ जोड़कर शाखा को दो भागों में बाँटने देता है। सत्य-वृक्ष बंद है यदि उसकी हर शाखा में आपस में मेल खाते चिह्नित सूत्रों का युग्म $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ हो।

सत्य-वृक्ष-आधारित $\vdash$ संबंध की परिभाषा इस प्रकार है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि इन मान्यताओं का कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

उदाहरण के लिए, यह बंद सत्य-वृक्ष दिखाता है कि $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\to\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

समुच्चय Γ, सत्य-वृक्ष-कलन में असंगत है यदि इन मान्यताओं का कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

जहाँ ऐसा कोई $\psi_i \in \Gamma$ हो।

सत्य-वृक्ष 1950 के दशक में एवर्ट बेथ और याक्को हिंटिक्का ने एक-दूसरे से स्वतंत्र रूप से प्रस्तुत किए; रेमंड स्मलियन ने उन्हें सरल और लोकप्रिय बनाया। इनका उपयोग बहुत आसान है, क्योंकि सत्य-वृक्ष बनाना अत्यंत व्यवस्थित प्रक्रिया है। सत्य-वृक्ष व्यवस्थित ढंग से बनते हैं, इसलिए संगणक पर उनका कार्यान्वयन भी सहज है। किन्तु सत्य-वृक्ष पढ़ना प्रायः कठिन होता है और प्रमाणों से उसका संबंध भी कभी-कभी आसानी से दिखाई नहीं देता। यह दृष्टिकोण व्यापक भी है, और अनेक भिन्न तर्कशास्त्रों के अपने सत्य-वृक्ष-तंत्र हैं। सत्य-वृक्ष ऐसी संरचनाएँ खोजने में भी मदद करते हैं जो दिए गए वाक्यों (अथवा उनके समुच्चयों) को संतुष्ट करती हैं: समुच्चय संतुष्टनीय हो तो उसका कोई बंद सत्य-वृक्ष नहीं होगा, अर्थात् हर सत्य-वृक्ष में कोई खुली शाखा होगी। संतुष्ट करने वाली संरचना को खुली शाखा से "पढ़कर

निकाला" जा सकता है, बशर्ते उस शाखा पर लागू हो सकने वाला हर नियम लगा दिया गया हो। अनुक्रम-कलन से भी इसका बहुत निकट संबंध है: सारतः, कोई बंद सत्य-वृक्ष, अनुक्रम-कलन की संक्षिप्त व्युत्पत्ति है जिसे उलटी दिशा में लिखा गया है।

18.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

सबसे पुराने और सरल तार्किक व्युत्पत्ति-तंत्र अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्र हैं। उनकी व्युत्पत्तियाँ केवल वाक्यों के अनुक्रम हैं। वाक्यों का कोई अनुक्रम सही व्युत्पत्ति तभी माना जाता है जब उसमें प्रत्येक वाक्य φ निम्न शर्तों में से कोई एक पूरी करे:

1. φ अभिगृहीत हो, अथवा
2. φ दिए गए समुच्चय Γ का अवयव हो, जहाँ उक्त समुच्चय वाक्यों का समुच्चय है, अथवा
3. φ किसी अनुमान-नियम से औचित्ययुक्त हो।

अभिगृहीत होने के लिए φ को कई नियत वाक्य-प्रतिरूपों में से किसी एक के रूप का होना चाहिए। अभिगृहीत-प्रतिरूपों के अनेक ऐसे समुच्चय हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए संतोषजनक (सुदृढ़ और पूर्ण) व्युत्पत्ति-तंत्र देते हैं। इनमें से कुछ अभिगृहीत-प्रतिरूपों को उनके संचालित संयोजकों के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है; जैसे, ये प्रतिरूप

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad \psi \to (\psi \vee \chi) \qquad (\psi \wedge \chi) \to \psi$$

$\to$, $\vee$ और $\wedge$ को संचालित करने वाले सामान्य अभिगृहीत हैं। कुछ अभिगृहीत-तंत्रों का लक्ष्य अभिगृहीतों की संख्या न्यूनतम रखना होता है। किन संयोजकों को आदिम माना जाता है, उसके अनुसार केवल एक अभिगृहीत से बना तंत्र भी मिल सकता है।

अनुमान-नियम ऐसा सशर्त कथन है जो किसी व्युत्पत्ति में वाक्य को औचित्ययुक्त मानने की पर्याप्त शर्त देता है। मोडस पोनेन्स ऐसा अत्यंत सामान्य नियम है: यदि φ और $\varphi \to \psi$ पहले से औचित्ययुक्त हैं, तो ψ भी औचित्ययुक्त है। इसका अर्थ है कि किसी व्युत्पत्ति में वाक्य ψ वाली पंक्ति औचित्ययुक्त है, बशर्ते φ और $\varphi \to \psi$ दोनों (किसी वाक्य φ के लिए) उस व्युत्पत्ति में ψ से पहले आए हों।

अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-आधारित $\vdash$ संबंध में $\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसके अंत में वाक्य φ अंतिम सूत्र के रूप में आए; Γ उन वाक्यों का समुच्चय है जिन्हें उस व्युत्पत्ति में (2) से औचित्य मिला। φ तब प्रमेय है जब φ की व्युत्पत्ति में Γ रिक्त हो, यानी हर वाक्य उस व्युत्पत्ति में (1) अथवा (3) से औचित्ययुक्त हो। मसलन, यह व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\vdash \varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))$:

1. $\psi \to (\psi \vee \varphi)$
2. $(\psi \to (\psi \vee \varphi)) \to (\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi)))$
3. $\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))$

पंक्ति 1 का वाक्य, अभिगृहीत $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ का रूप है (यहाँ φ और ψ की भूमिकाएँ उलटी हैं); पंक्ति 2 का वाक्य अभिगृहीत $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ का रूप है। अतः दोनों औचित्ययुक्त हैं। पंक्ति 3 को मोडस पोनेन्स से औचित्य मिलता है: इसे θ लिखें तो पंक्ति 2 का रूप $\chi \to \theta$ है, जहाँ χ का मान $\psi \to (\psi \vee \varphi)$ अर्थात् पंक्ति 1 है।

समुच्चय Γ असंगत है यदि $\Gamma \vdash \bot$। पूर्ण अभिगृहीत-तंत्र $\bot \to \varphi$ को हर φ के लिए सिद्ध करता है; अतः असंगत Γ से $\Gamma \vdash \varphi$ हर φ के लिए।

तर्कशास्त्र के लिए अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्र सबसे पहले गॉटलोब फ़्रेगे ने अपनी 1879 की *बेग्रिफ़्सश्रिफ़्ट* में दिए; इसी कारण उस कृति को प्रायः आधुनिक तर्कशास्त्र की पहली कृति माना जाता है। अल्फ्रेड नॉर्थ व्हाइटहेड और बर्ट्रेंड रसेल की *प्रिंसिपिया मैथेमैटिका* में तथा 1920 के दशक में डेविड हिल्बर्ट और उनके विद्यार्थियों ने इन तंत्रों को परिष्कृत किया। इसलिए इन्हें अक्सर "फ़्रेगे-तंत्र" या "हिल्बर्ट-तंत्र" कहा जाता है। ये तंत्र इस अर्थ में बहुत बहुमुखी हैं कि किसी तर्कशास्त्र के लिए अभिगृहीतीय तंत्र खोजना प्रायः आसान होता है। चूँकि उनकी व्युत्पत्तियाँ की संरचना बहुत सरल होती है और उनमें केवल एक या दो अनुमान-नियम होते हैं, इसलिए उनके *विषय में* बातें सिद्ध करना भी अपेक्षाकृत आसान होता है। फिर भी व्यवहार में उनका उपयोग अत्यंत कठिन है; अर्थात् प्रमाण ढूँढ़ना और लिखना कठिन होता है।

अध्याय 19

अनुक्रम-कलन

यह अध्याय शास्त्रीय प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए गेंट्सेन का मानक अनुक्रम-कलन LK प्रस्तुत करता है। इसमें और उदाहरण तथा अभ्यास जोड़े जा सकते हैं। प्रमाण-तंत्र के रूप में अनुक्रम-कलन से संबद्ध सामग्री को शामिल या बहिष्कृत करने के लिए "prfLK" टैग का उपयोग करें।

19.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

आगे $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ को वाक्यों के परिमित क्रम मानें।

परिभाषा 19.1 (अनुक्रम). *अनुक्रम* इस रूप का व्यंजक है:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

जहाँ Γ और Δ, भाषा $\mathcal{L}$ के वाक्यों के परिमित (संभवतः रिक्त) क्रम हैं। Γ को *पूर्वपक्ष* और Δ को *उत्तरपक्ष* कहते हैं।

अनुक्रम के पीछे सहज विचार यह है: यदि पूर्वपक्ष के सभी वाक्यों सत्य हों, तो उत्तरपक्ष का कम-से-कम एक वाक्य सत्य हो। अर्थात् यदि $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ और $\Delta = \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ हों, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta$ तभी और केवल तभी सत्य है जब

$$(\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_m) \to (\psi_1 \lor \cdots \lor \psi_n)$$

सत्य हो। दो विशेष दशाएँ हैं: Γ रिक्त हो या Δ रिक्त हो। जब Γ रिक्त हो, अर्थात् $m = 0$, तब $\Rightarrow \Delta$ तभी और केवल तभी सत्य है जब $\psi_1 \lor \cdots \lor \psi_n$ सत्य हो। जब Δ रिक्त हो, अर्थात् $n = 0$, तब $\Gamma \Rightarrow$ तभी और केवल तभी सत्य है जब $\neg(\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_m)$ सत्य हो। अनुक्रम को वैध तभी और केवल तभी कहते हैं जब उससे संबद्ध वाक्य वैध हो।

यदि Γ, वाक्यों का क्रम है, तो Γ, φ उस परिणाम को दर्शाता है जो φ को Γ के दाएँ सिरे पर जोड़ने से मिलता है (और φ, Γ उस परिणाम को, जो φ को Γ के बाएँ सिरे पर जोड़ने से मिलता है)। यदि Δ भी वाक्यों का क्रम है, तो Γ, Δ दोनों क्रमों का संयोजन है।

परिभाषा 19.2 (प्रारंभिक अनुक्रम). *प्रारंभिक अनुक्रम* ऐसा अनुक्रम है जो इनमें से किसी एक रूप का हो:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $\Rightarrow \top$
3. $\bot \Rightarrow$

जहाँ φ भाषा का कोई भी वाक्य है।

अनुक्रम-कलन की व्युत्पत्तियाँ अनुक्रमों के विशेष वृक्ष हैं। उनके शीर्षस्थ अनुक्रम प्रारंभिक अनुक्रम होते हैं; और यदि कोई अनुक्रम एक या दो अन्य अनुक्रमों के नीचे हो, तो उसे अनुमान-नियम से ठीक प्रकार निकलना चाहिए। **LK** के नियम दो मुख्य प्रकारों में बँटते हैं: *तार्किक* और *संरचनात्मक* नियम। तार्किक नियम का नाम उस प्रधान संक्रियक पर होता है जो निचले अनुक्रम में φ और/या ψ वाले वाक्य का है। हर नियम के दो रूप हैं: एक में वह वाक्य, जिसमें संक्रियक है, बाईं ओर और दूसरे में वही वाक्य दाईं ओर निष्कर्षित होता है।

19.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\neg$ के नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\ \neg\mathrm{R}$$

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ \wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\mathrm{L}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \vee\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{R}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \rightarrow\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\mathrm{R}$$

19.3 परिमाणक-नियम

$\forall$ के नियम

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$\forall$L में t बंद पद है (अर्थात् उसमें कोई चर नहीं है)। $\forall$R में a ऐसा अचर है जो $\forall$R नियम के निचले अनुक्रम में कहीं भी न आए। a को $\forall$R अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।[1]

$\exists$ के नियम

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

यहाँ भी t बंद पद है और a ऐसा अचर है जो $\exists$L नियम के निचले अनुक्रम में नहीं आता। a को $\exists$L अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।

$\forall$R या $\exists$L अनुमान के निचले अनुक्रम में अभिलाक्षणिक चर के न आने की शर्त को *अभिलाक्षणिक-चर शर्त* कहते हैं।

स्मरण करें: जब φ ऐसा सूत्र हो जिसमें चर x मुक्त है, तो इसे $\varphi(x)$ लिखकर दिखाते हैं। उसी संदर्भ में $\varphi(t)$, संक्षेप में $\varphi[t/x]$ है। अतः $\exists$R नियम को ऐसे भी लिख सकते हैं:

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \varphi}\,\exists\mathrm{R}$$

ध्यान दें कि t, φ में पहले से आ सकता है; जैसे φ का रूप $P(t,x)$ हो सकता है। इसलिए $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, P(t,x)$ को $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(t,t)$ से निष्कर्षित करना $\exists$R का सही प्रयोग है—पूर्वाधार में t की एक या अधिक, पर आवश्यक नहीं कि सभी, आवृत्तियों को आबद्ध चर x से "बदल" सकते हैं। परंतु $\forall$R और $\exists$L की अभिलाक्षणिक-चर शर्तें माँगती हैं कि अचर a, φ में न आए। अतः $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, P(a,x)$ को $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a,a)$ से $\forall$R द्वारा सही ढंग से निष्कर्षित नहीं कर सकते।

$\exists$R और $\forall$L में पद t पर कोई प्रतिबंध नहीं है। दूसरी ओर, $\exists$L और $\forall$R नियमों की अभिलाक्षणिक-चर शर्त माँगती है कि ऊपरी अनुक्रम में अचर a, $\varphi(a)$ के बाहर कहीं न आए। तंत्र की सुदृढ़ता—अर्थात् केवल वैध अनुक्रमों को व्युत्पन्न करना—सुनिश्चित करने के लिए यह आवश्यक है। इस शर्त के बिना निम्नलिखित अनुमत होता:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}{\exists x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}\,{*}\exists\mathrm{L}}{\exists x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}{\varphi(a) \;\Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x)}\,{*}\forall\mathrm{R}}{\exists x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{L}$$

परंतु $\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$ वैध नहीं है।

[1] ऊपर के नियम में a अचर है, फिर भी ऐतिहासिक कारणों से "अभिलाक्षणिक चर" शब्द प्रयुक्त होता है।

19.4 संरचनात्मक नियम

हमें कुछ ऐसे नियम भी चाहिए जो अनुक्रम के बाएँ और दाएँ पक्ष के वाक्यों को पुनः व्यवस्थित करने दें। तार्किक नियम माँगते हैं कि पूर्वाधार के जिन वाक्यों पर नियम लागू होता है, वे बिल्कुल बाएँ या बिल्कुल दाएँ हों। अतः वाक्यों को उचित स्थान पर ले जाने वाला "विनिमय" नियम चाहिए। कभी-कभी दो समान वाक्यों को एक करना और किसी भी पक्ष में वाक्य जोड़ना भी आवश्यक है।

दुर्बलीकरण

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

संकुचन

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{CL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{CR}$$

विनिमय

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{XL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}\,\mathrm{XR}$$

दुर्बलीकरण, संकुचन और विनिमय अनुमानों की शृंखला प्रायः दोहरी अनुमान-रेखाओं से दिखाई जाती है।

निम्नलिखित "छेदन" नियम अनिवार्य तो नहीं है, पर व्युत्पत्तियाँ का पुनः उपयोग और संयोजन बहुत आसान बनाता है।

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

19.5 व्युत्पत्तियाँ

हम प्रारंभिक अनुक्रम का रूप और अनुमान-नियम दे चुके हैं। अनुक्रम-कलन की व्युत्पत्तियाँ इन्हीं से आगमनात्मक रूप से बनती हैं: हर व्युत्पत्ति या तो अकेला प्रारंभिक अनुक्रम है, या उसका रूप है: एक अथवा दो व्युत्पत्तियाँ और उनके बाद आने वाला एक अनुमान।

परिभाषा 19.3 (LK व्युत्पत्ति). LK-*व्युत्पत्ति* अनुक्रम S के अनुक्रमों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्नलिखित शर्तें पूरी करे:

1. वृक्ष के शीर्षस्थ अनुक्रम प्रारंभिक अनुक्रम हैं।

2. वृक्ष का सबसे निचला अनुक्रम S है।
3. वृक्ष में S को छोड़कर हर अनुक्रम किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग का पूर्वाधार है, और उस प्रयोग का निष्कर्ष वृक्ष में उस अनुक्रम के ठीक नीचे है।

तब S को व्युत्पत्ति का *अंतिम अनुक्रम* कहते हैं और कहते हैं कि S, **LK** *में व्युत्पन्न* है (या **LK**-व्युत्पन्न है)।

उदाहरण 19.4. हर प्रारंभिक अनुक्रम, जैसे $\chi \Rightarrow \chi$, व्युत्पत्ति है। इस पर, मान लें, WL नियम लगाकर नई व्युत्पत्ति मिलती है:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}$$

पर यह नियम सामान्य है: इसमें φ के स्थान पर कोई भी वाक्य, जैसे θ, रख सकते हैं। यदि पूर्वाधार हमारे प्रारंभिक अनुक्रम $\chi \Rightarrow \chi$ से मेल खाए, तो Γ और Δ दोनों केवल χ हैं और निष्कर्ष $\theta, \chi \Rightarrow \chi$ होगा। अतः यह व्युत्पत्ति है:

$$\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}$$

अब XL जैसा दूसरा नियम लगा सकते हैं, जो बाईं ओर के दो वाक्यों की अदला-बदली करता है। अतः यह भी सही व्युत्पत्ति है:

$$\cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}$$

इस प्रयोग में नियम का दिया हुआ रूप था:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta,}\,\mathrm{XL}$$

यहाँ Γ और Π दोनों रिक्त थे, Δ का मान χ था, और φ तथा ψ की भूमिकाएँ क्रमशः θ और χ ने निभाई। लगभग इसी तरह हम देखते हैं कि

$$\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}$$

व्युत्पत्ति है। अब ये दोनों व्युत्पत्तियाँ $\wedge$R से जोड़ी जा सकती हैं। वह नियम था:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

हमारे मामले में व्युत्पत्तियाँ पूर्वाधारों पर समाप्त होती हैं, और उनके अंतिम अनुक्रमों का मेल उन्हीं पूर्वाधारों से होना चाहिए। अर्थात् Γ का मान χ, θ है, Δ रिक्त है, φ का मान χ और ψ का मान θ है। अतः अनुमान सही होने पर निष्कर्ष $\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta$ है।

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL} \qquad \cfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta}\,\wedge\mathrm{R}$$

पूर्वाधारों का क्रम उलट भी सकते हैं; तब φ का मान θ और ψ का मान χ होगा।

$$\cfrac{\cfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL} \qquad \cfrac{\cfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}}{\chi, \theta \Rightarrow \theta \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

19.6 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण

उदाहरण 19.5. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ हो।

आरंभ में वांछित अंतिम अनुक्रम को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखते हैं।

$$\overline{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}$$

अब निर्धारित करना है कि किस प्रकार के अनुमान का निचला अनुक्रम इस रूप का हो सकता है। यह कोई संरचनात्मक नियम हो सकता है, पर आरंभ किसी तार्किक नियम को खोजने से करना उचित है। निचले अनुक्रम में आने वाला एकमात्र तार्किक संयोजक $\wedge$ है, इसलिए हमें $\wedge$-नियम चाहिए; और चूँकि $\wedge$ चिह्न पूर्वपक्ष में है, हमें $\wedge$L नियम देखना है।

$$\overline{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\;\wedge\mathrm{L}$$

$\wedge$L अनुमान का ऊपरी अनुक्रम क्या रहा होगा, इसके दो विकल्प हैं: ऊपरी अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ हो सकता है, या $\psi \Rightarrow \varphi$। स्पष्ट है कि $\varphi \Rightarrow \varphi$ प्रारंभिक अनुक्रम है (जो हमारे लिए अच्छा है), जबकि $\psi \Rightarrow \varphi$ सामान्यतः व्युत्पन्न नहीं है। अब ऊपरी अनुक्रम भर देते हैं:

$$\frac{\varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{\varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\;\wedge\mathrm{L}$$

अब हमारे पास सही **LK**-व्युत्पत्ति है, जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ है।

उदाहरण 19.6. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ हो।

वांछित अंतिम अनुक्रम को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरंभ कीजिए।

$$\overline{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}$$

इस अंतिम अनुक्रम को देने वाला तार्किक नियम खोजने के लिए इसमें आए तार्किक संयोजक देखते हैं: $\neg$, $\vee$, और $\to$। अभी हमारा ध्यान केवल $\vee$ और $\to$ पर है, क्योंकि अभी हमें प्रधान संक्रियकों से काम है और ये अंतिम अनुक्रम के वाक्यों में बाहर से लागू होते हैं; $\neg$ किसी दूसरे संयोजक के परास के भीतर है, इसलिए उसे बाद में सँभालेंगे। अतः अंतिम अनुमान के लिए तार्किक नियमों के विकल्प $\vee$L नियम और $\to$R नियम हैं। वास्तव में दोनों में से कोई भी चुन सकते हैं, पर $\to$R नियम चुनते हैं (यदि और कोई कारण न हो, तो इसलिए कि इससे दो शाखाओं में विभाजन कुछ देर टलता है)। निचला अनुक्रम देने वाले $\to$R अनुमानों के रूप के अनुसार यह ऐसा दिखना चाहिए:

$$\frac{\overline{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}\;\to\mathrm{R}$$

यदि पूर्वपक्ष में $\neg\varphi \vee \psi$ को बाहर की ओर ले आएँ, तो $\vee$L नियम लगा सकते हैं। नियम-रूप के अनुसार इसे निम्न प्रकार दो ऊपरी अनुक्रमों में बँटना चाहिए:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg\varphi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi} \qquad \overline{\psi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \;\Rightarrow\; \psi}\;\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \psi}\;\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}\;\to\mathrm{R}$$

याद रखें कि हम ऊपर की ओर रास्ता बनाते हुए प्रारंभिक अनुक्रमों तक पहुँचने का प्रयत्न कर रहे हैं; हम लगभग पहुँच गए हैं! दाहिनी शाखा प्रारंभिक अनुक्रम से केवल एक दुर्बलीकरण और एक विनिमय दूर है; इनके बाद वह पूरी हो जाती है:

$$
\begin{array}{rl}
\psi \Rightarrow \psi & \\
\hline
\varphi, \psi \Rightarrow \psi & \text{WL} \\
\hline
\psi, \varphi \Rightarrow \psi & \text{XL} \\
\hline
\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \qquad \neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

अब बाईं शाखा देखें। यहाँ किसी वाक्य में मिलने वाला एकमात्र तार्किक संयोजक $\neg$ है, और वह पूर्वपक्ष के वाक्यों में आता है; इसलिए हमें $\neg$L नियम का एक प्रयोग चाहिए।

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\neg\text{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\text{XL} & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

जिस प्रकार दाहिनी शाखा पूरी की थी, उसी प्रकार इस बाईं शाखा को पूरा करने के लिए भी केवल एक दुर्बलीकरण और एक विनिमय चाहिए।

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}\,\text{WR}}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\,\text{XR}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\neg\text{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\text{XL} & \vee\text{L} \\
\hline
\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi & \text{XR} \\
\hline
\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi & \to\text{R}
\end{array}
$$

उदाहरण 19.7. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ हो।

ऊपर की विधियों का प्रयोग करते हुए वांछित अंतिम अनुक्रम को सबसे नीचे लिखकर आरंभ करते हैं।

$$
\dfrac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}
$$

अंतिम अनुक्रम के वाक्यों में उपलब्ध प्रधान संक्रियक $\vee$ चिह्न और $\neg$ चिह्न हैं। यहाँ $\vee$L या $\neg$R, दोनों में से कोई नियम लगाया जा सकता है; पर हम $\neg$R से आरंभ करते हैं, क्योंकि इससे कुछ देर तक दो शाखाओं में बँटना टल जाता है:

$$
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\text{R}
$$

अब $\wedge$L और $\vee$L में से किस नियम को देखें, यह चुनना है। पहले देखें कि $\wedge$L नियम लगाने पर क्या होता है: ऊपरी अनुक्रम के लिए $\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$ और $\psi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$ में से कोई एक चुन सकते हैं। चूँकि व्युत्पत्ति, φ और ψ के संबंध में सममित है, पहला विकल्प लेते हैं:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\wedge\text{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\text{R}
$$

व्युत्पत्ति को आगे भरने पर एक समस्या सामने आती है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi}\,?}{\neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

दाहिनी शाखा के शीर्ष को और घटाया नहीं जा सकता, और संरचनात्मक अनुमानों द्वारा उसे प्रारंभिक अनुक्रम तक भी नहीं लाया जा सकता; इसलिए यह सही रास्ता नहीं है। अर्थात् ऊपर $\wedge$L नियम लगाना भूल थी। पहले वाली स्थिति पर लौटकर उसके बदले $\vee$L नियम लगाने पर मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \qquad \dfrac{}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

हर शाखा को पहले की तरह पूरा करने पर मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\,\neg\mathrm{R}
$$

(इन चरणों में $\wedge$ नियमों को $\neg$ नियमों से नीचे भी लगा सकते थे और तब भी सही व्युत्पत्ति मिलती।)

उदाहरण 19.8. अब तक हमने संकुचन नियम का प्रयोग नहीं किया, पर कभी-कभी वह आवश्यक होता है। यह उसका एक उदाहरण है। मान लें कि हमें $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ सिद्ध करना है। $\vee$R को उल्टी दिशा में लगाने पर इन दो व्युत्पत्तियाँ में से कोई एक मिलेगी:

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}
$$

निस्संदेह इनमें से कोई भी प्रारंभिक अनुक्रम पर समाप्त नहीं होती। युक्ति यह समझना है कि संकुचन नियम वाक्य की दो प्रतियों को एक में मिला देता है—और प्रमाण खोजते समय, अर्थात् नीचे से ऊपर जाते हुए, पूर्वाधार में $\varphi \vee \neg\varphi$ की एक प्रति रख सकते हैं; जैसे:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}
$$

अब $\vee$R को दूसरी बार लगा सकते हैं और साथ ही $\neg\varphi$ पा सकते हैं; इससे पूरी व्युत्पत्ति मिल जाती है।

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}\,\mathrm{XR}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}
$$

19.7 परिमाणकों वाली व्युत्पत्तियाँ

उदाहरण 19.9. एक **LK**-व्युत्पत्ति दीजिए जिसका अंतिम अनुक्रम $\exists x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x)$ हो।

परिमाणकों के साथ काम करते समय यह सुनिश्चित करना होता है कि अभिलाक्षणिक-चर शर्त का उल्लंघन न हो। इसके लिए कभी-कभी कुछ अनुमानों को लगाने का क्रम बदलकर देखना पड़ता है। सामान्यतः अभिलाक्षणिक-चर शर्त के अधीन नियमों को पहले सँभालना सहायक होता है (पूरे प्रमाण में वे नीचे आएँगे)। साथ ही आगे देखकर यह अनुमान लगाना उपयोगी है कि प्रारंभिक अनुक्रम कैसा होगा। हमारे मामले में वह $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$ जैसा होना चाहिए। इसका अर्थ है कि परिमाणक-नियमों को "उल्टी दिशा" में लगाते समय वही पद—जिसे हम a कहेंगे—$\forall$ और $\exists$, दोनों नियमों के लिए चुनना होगा। हर नियम के लिए अलग पद चुनने पर $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$ जैसा अनुक्रम मिलता, जो निस्संदेह व्युत्पन्न नहीं है।

सामान्य रीति से आरंभ करते हुए लिखते हैं:

$$\dfrac{}{\exists x\, \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}$$

हम $\exists$L नियम या $\neg$R नियम, दोनों में से कोई भी लगा सकते हैं। चूँकि $\exists$L नियम अभिलाक्षणिक-चर शर्त के अधीन है, इसलिए उसे बाद के बजाय अभी सँभालना उचित है; अतः पहले वही लगाते हैं।

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}\;\exists\mathrm{L}$$

$\neg$L और $\neg$R नियमों को उल्टी दिशा में लगाने पर मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}}{\neg\varphi(a), \forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow}\;\neg\mathrm{L}}{\forall x\, \varphi(x), \neg\varphi(a) \;\Rightarrow}\;\mathrm{XL}}{\neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\varphi(x)}\;\neg\mathrm{R}}{\exists x\neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\varphi(x)}\;\exists\mathrm{L}$$

अब हमारा एकमात्र विकल्प $\forall$L नियम लगाना है। यह नियम अभिलाक्षणिक-चर प्रतिबंध के अधीन नहीं है, इसलिए यहाँ कोई बाधा नहीं है। याद रखें, हम $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$ के रूप का प्रारंभिक अनुक्रम पाना चाहते हैं; अतः नियम लगाते समय a को φ का तर्क चुनना चाहिए।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}\;\forall\mathrm{L}}{\neg\varphi(a), \forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow}\;\neg\mathrm{L}}{\forall x\, \varphi(x), \neg\varphi(a) \;\Rightarrow}\;\mathrm{XL}}{\neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}\;\neg\mathrm{R}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}\;\exists\mathrm{L}$$

विशेषतः परिमाणकों के साथ काम करते समय इस बिंदु पर दोबारा जाँचना आवश्यक है कि अभिलाक्षणिक-चर शर्त का उल्लंघन तो नहीं हुआ। हमने इस शर्त के अधीन केवल $\exists$L नियम लगाया है, और अभिलाक्षणिक चर a उसके निचले अनुक्रम (अंतिम अनुक्रम) में नहीं आता; अतः यह सही व्युत्पत्ति है।

यह अनुभाग स्वाभाविक निगमन के सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

19.8 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में यह सहारा नहीं लिया जाता कि वाक्यों के लिए कौन-सी संरचनाएँ उन्हें संतुष्ट करती हैं, बल्कि कुछ अनुक्रमों की व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेय* का विषय है।

परिभाषा 19.10 (प्रमेय). वाक्य φ *प्रमेय* है यदि **LK** में अनुक्रम $\Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। तब $\vdash \varphi$ लिखते हैं; यदि φ प्रमेय नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 19.11 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ को किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* कहते हैं; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं। यह तभी और केवल तभी होता है जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और कोई क्रम Γ_0' ऐसा हो जो Γ_0 के वाक्यों से बना हो, तथा **LK** $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ को व्युत्पन्न करे। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

संकुचन, दुर्बलीकरण और विनिमय नियमों के कारण Γ_0' में वाक्यों का क्रम और संख्या महत्त्व नहीं रखते: यदि अनुक्रम $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है, तो $\Gamma_0'' \Rightarrow \varphi$ भी हर ऐसे Γ_0'' के लिए वैसा ही है जिसका निर्माण Γ_0' वाले वाक्यों से हुआ हो। उदाहरण के लिए, यदि $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$ हो, तो $\Gamma_0' = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ और $\Gamma_0'' = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$, दोनों ऐसे क्रम हैं जो Γ_0 के ही वाक्यों से बने हैं। यदि इनमें से एक क्रम वाला अनुक्रम व्युत्पन्न है, तो दूसरा भी है; जैसे:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}\,\text{CL}}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{XL}}{\chi, \chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{WL}$$

अब से, यदि Γ_0, वाक्यों का परिमित समुच्चय है, तो $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ से हमारा आशय ऐसे किसी भी अनुक्रम से होगा जिसका पूर्वपक्ष Γ_0 के वाक्यों का क्रम हो; आवश्यकता पड़ने पर संकुचन, विनिमय और दुर्बलीकरण को मौन रूप से शामिल मानेंगे।

परिभाषा 19.12 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि **LK** $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करे। यदि Γ असंगत नहीं है, अर्थात् हर परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए **LK** $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न नहीं करता, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 19.13 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. प्रारंभिक अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है और $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$। □

प्रतिज्ञप्ति 19.14 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है। चूँकि $\Gamma \subseteq \Delta$, इसलिए Γ_0, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है। अतः $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति यह भी दिखाती है कि $\Delta \vdash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 19.15 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और कोई व्युत्पत्ति π_0 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ है। यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Delta_0 \subseteq \Delta$ के लिए कोई व्युत्पत्ति π_1 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$ है। निम्नलिखित व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi}\ \text{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 19.16. *Γ असंगत है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$ हर वाक्य φ के लिए सत्य हो।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 19.17 (संहतता). *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। फलतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$।

2. यदि Γ असंगत है, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करता है। किंतु तब Γ_0, Γ का असंगत परिमित उपसमुच्चय है। □

19.9 व्युत्पन्नता और संगतता

अब हम व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। ये अपने-आप में रोचक हैं, पर इनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 19.18. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित समुच्चय Γ_0 और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ हैं कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ और $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न करता है। **LK** में $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति को π_0 और **LK** में $\Gamma_1, \varphi \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति को π_1 मानें। तब हम निम्न अनुक्रम को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\ \text{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; अतः Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 19.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई व्युत्पत्ति π_0 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \varphi$ है। $\neg$L नियम जोड़ने पर $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति मिलती है; अर्थात् $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है।

यदि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, तो कोई व्युत्पत्ति π_1 ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$ है। निम्नलिखित $\Gamma \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति है:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 19.20. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब कोई व्युत्पत्ति π ऐसी है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ है। अनुक्रम $\neg\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ भी व्युत्पन्न है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\Gamma_0, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{Cut}$$

चूँकि $\neg\varphi \in \Gamma$ और $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, इससे सिद्ध होता है कि Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 19.21. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित समुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ तथा **LK**-व्युत्पत्तियाँ π_0 और π_1 हैं, जिनके अंतिम अनुक्रम क्रमशः $\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ और $\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$ हैं। तब हम निम्न अनुक्रम को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \varphi, \Gamma_0 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0 \Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\,\mathrm{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$। अतः Γ असंगत है। □

19.10 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि अनुक्रम-कलन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 19.22. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. दोनों अनुक्रम $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ व्युत्पन्न हैं:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}$$

2. यह अनुक्रम $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ की व्युत्पत्ति है:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 19.23. *1.* $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ *असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. हम अनुक्रम $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$ की व्युत्पत्ति देते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}$$

(स्मरण रहे कि दोहरी अनुमान-रेखाएँ दुर्बलीकरण, संकुचन और विनिमय के कई अनुमानों को सूचित करती हैं।)

2. दोनों अनुक्रमों $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ और $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ की व्युत्पत्तियाँ हैं:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 19.24. *1.* $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \to \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. अनुक्रम $\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ व्युत्पन्न है:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\to\mathrm{L}$$

2. दोनों अनुक्रम $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi$ और $\psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ व्युत्पन्न हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WR}}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WL}}{\psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}}{}$$

□

19.11 व्युत्पन्नता और परिमाणक

पूर्णता प्रमेय के लिए यह भी आवश्यक है कि अनुक्रम-कलन के नियम इस अनुभाग में स्थापित $\vdash$ से संबंधित तथ्य प्रदान करें।

प्रमेय 19.25. *यदि* c *ऐसा अचर है जो* Γ *या* $\varphi(x)$ *में नहीं आता, और* $\Gamma \vdash \varphi(c)$*, तो* $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$*।*

प्रमाण. π_0 को **LK** की ऐसी व्युत्पत्ति मानें जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi(c)$ है, जहाँ कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ है। $\forall$R अनुमान जोड़कर हमें व्युत्पत्ति मिलती है जिसका अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$ है। ऐसा इसलिए कि c, Γ या $\varphi(x)$ में नहीं आता; अतः अभिलाक्षणिक-चर शर्त पूरी होती है। □

प्रतिज्ञप्ति 19.26. *1.* $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.

2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

प्रमाण. 1. अनुक्रम $\varphi(t) \Rightarrow \exists x\, \varphi(x)$ व्युत्पन्न है:

$$\frac{\varphi(t) \;\Rightarrow\; \varphi(t)}{\varphi(t) \;\Rightarrow\; \exists x\, \varphi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

2. अनुक्रम $\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$ व्युत्पन्न है:

$$\frac{\varphi(t) \;\Rightarrow\; \varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(t)}\ \forall\mathrm{L}$$

□

19.12 सुदृढ़ता

अनुक्रम-कलन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र *सुदृढ़* है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न φ वैध है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनसे तार्किकतः निष्पन्न भी होता है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

चूँकि ये सभी प्रमाण-सैद्धांतिक गुण अनुक्रम-कलन में कुछ अनुक्रमों की व्युत्पन्नता द्वारा परिभाषित होते हैं, इसलिए ऊपर के (1)–(3) को सिद्ध करने के लिए व्युत्पन्न अनुक्रमों के अर्थवैज्ञानिक गुणों के बारे में कुछ सिद्ध करना होगा। पहले हम परिभाषित करेंगे कि किसी अनुक्रम का *वैध* होना क्या है, और फिर दिखाएँगे कि हर व्युत्पन्न अनुक्रम वैध है। तब (1)–(3) इस परिणाम के उपप्रमेयों के रूप में मिलेंगे।

परिभाषा 19.27. संरचना $\mathfrak{M}$ किसी अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को *संतुष्ट करता है* तभी और केवल तभी जब या तो $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ किसी $\varphi \in \Gamma$ के लिए हो, या $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ किसी $\varphi \in \Delta$ के लिए हो।

कोई अनुक्रम *वैध* है तभी और केवल तभी जब हर संरचना $\mathfrak{M}$ उसे संतुष्ट करे।

प्रमेय 19.28 (सुदृढ़ता). *यदि* **LK**, $\Theta \Rightarrow \Xi$ *को व्युत्पन्न करता है, तो* $\Theta \Rightarrow \Xi$ *वैध है।*

प्रमाण. π को $\Theta \Rightarrow \Xi$ की व्युत्पत्ति मानें। हम अनुमानों की संख्या n पर आगमन करते हैं; यह संख्या π के अनुमानों की है।

यदि अनुमानों की संख्या 0 है, तो π में केवल एक प्रारंभिक अनुक्रम है। हर प्रारंभिक अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \varphi$ स्पष्टतः वैध है, क्योंकि प्रत्येक $\mathfrak{M}$ के लिए या तो $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, या $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ होता है।

यदि अनुमानों की संख्या 0 से अधिक है, तो सबसे निचले अनुमान के प्रकार के अनुसार प्रकरणों में भेद करते हैं। आगमन-परिकल्पना से उस अनुमान के पूर्वाधारों को वैध मान सकते हैं, क्योंकि किसी भी पूर्वाधार की व्युत्पत्ति में अनुमानों की संख्या n से कम है।

पहले केवल एक पूर्वाधार वाले संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं।

1. अंतिम अनुमान दुर्बलीकरण है। तब $\Theta \Rightarrow \Xi$ या तो $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ है (यदि अंतिम अनुमान WL है), या $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ है (यदि वह WR है), और व्युत्पत्ति निम्न में से किसी एक पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है; अर्थात् प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए या तो कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, अथवा कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \vDash \chi$।

यदि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, तो $\chi \in \Theta$ भी है क्योंकि $\Theta = \varphi, \Gamma$; अतः $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Theta$ के लिए। इसी प्रकार, यदि $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए, तो $\chi \in \Xi$; इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Xi$ के लिए। फलतः $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है।

2. अंतिम अनुमान $\neg$L है। तब अंतिम अनुमान का पूर्वाधार $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ और निष्कर्ष $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ है; अर्थात् व्युत्पत्ति निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L}$$

यहाँ $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ और $\Xi = \Delta$ है।

आगमन-परिकल्पना बताती है कि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है; अर्थात् प्रत्येक $\mathfrak{M}$ के लिए या तो (a) किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, या (b) किसी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \chi$, या (c) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। हमें दिखाना है कि $\Theta \Rightarrow \Xi$ भी वैध है। कोई $\mathfrak{M}$ को संरचना मानें। यदि (a) सत्य है, तो कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, पर $\chi \in \Theta$ भी है। यदि (b) सत्य है, तो कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \vDash \chi$, पर $\chi \in \Xi$ भी है। अंततः, यदि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{M} \nvDash \neg\varphi$। चूँकि $\neg\varphi \in \Theta$, कोई $\chi \in \Theta$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। फलतः $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है।

3. अंतिम अनुमान $\neg$R है: अभ्यास।

4. अंतिम अनुमान $\wedge$L है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \wedge \psi$ को पूर्वाधार के बाएँ पक्ष में φ से या ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले रूप में π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

यहाँ $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ और $\Xi = \Delta$ है। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। आगमन-परिकल्पना से $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है, इसलिए या तो (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरण (a) में $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \wedge \psi$; अतः कोई $\chi \in \Theta$ (अर्थात् $\varphi \wedge \psi$) ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। प्रकरण (b) में कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, और $\chi \in \Theta$ भी है। प्रकरण (c) में कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \vDash \chi$, और $\chi \in \Xi$ भी है क्योंकि $\Xi = \Delta$। अतः प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{M}$, $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{M}$ स्वेच्छ था, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है। जिस प्रकरण में $\varphi \wedge \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है: φ को ψ से बदल दें।

5. अंतिम अनुमान $\vee$R है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \vee \psi$ को पूर्वाधार के दाएँ पक्ष में φ से या ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले रूप में π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{R}$$

अब $\Theta = \Gamma$ और $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$ है। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है, इसलिए या तो (a) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरण (a) में $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$। प्रकरण (b) में कोई $\chi \in \Gamma$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। प्रकरण (c) में कोई $\chi \in \Delta$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \vDash \chi$। अतः प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{M}$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$ को, अर्थात् $\Theta \Rightarrow \Xi$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{M}$ स्वेच्छ था, $\Theta \Rightarrow \Xi$ वैध है। जिस प्रकरण में $\varphi \vee \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है: φ को ψ से बदल दें।

6. अंतिम अनुमान $\rightarrow$R है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\mathrm{R}$$

फिर आगमन-परिकल्पना कहती है कि पूर्वाधार वैध है; हमें दिखाना है कि निष्कर्ष भी वैध है। $\mathfrak{M}$ को स्वेच्छ मानें। चूँकि $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ वैध है, इसलिए निम्न में से कम से कम एक प्रकरण सत्य है: (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \vDash \psi$, (c) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (d) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरणों (a) और (b) में $\mathfrak{M} \vDash \varphi \rightarrow \psi$; इसलिए कोई $\chi \in \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \vDash \chi$। प्रकरण (c) में किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। प्रकरण (d) में किसी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \chi$। प्रत्येक प्रकरण में $\mathfrak{M}$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{M}$ स्वेच्छ था, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ वैध है।

7. अंतिम अनुमान $\forall$L है। तब कोई सूत्र $\varphi(x)$ और कोई बंद पद t ऐसा है कि π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\mathrm{L}$$

हमें दिखाना है कि निष्कर्ष $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। चूँकि पूर्वाधार $\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है, इसलिए या तो (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi(t)$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए। प्रकरण (a) में, प्रतिज्ञप्ति 16.31 के अनुसार यदि $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$। चूँकि $\mathfrak{M} \nvDash \varphi(t)$, इसलिए $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\, \varphi(x)$। प्रकरणों (b) और (c) में $\mathfrak{M}$ भी $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{M}$ स्वेच्छ था, $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है।

8. अंतिम अनुमान $\exists$R है: अभ्यास।

9. अंतिम अनुमान $\forall$R है। तब कोई सूत्र $\varphi(x)$ और कोई अचर a ऐसा है कि π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)} \forall\mathrm{R}$$

यहाँ अभिलाक्षणिक-चर शर्त पूरी है; अर्थात् a, $\varphi(x)$, Γ या Δ में नहीं आता। आगमन-परिकल्पना से अंतिम अनुमान का पूर्वाधार वैध है। हमें दिखाना है कि निष्कर्ष भी वैध है; अर्थात् किसी भी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए (a) $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ किसी $\chi \in \Gamma$ के लिए, या (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए।

$\mathfrak{M}$ को कोई स्वेच्छ संरचना मानें। यदि (b) या (c) सत्य है, तो काम पूरा हुआ; इसलिए मानें कि कोई भी सत्य नहीं है: हर $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \chi$, और हर $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। हमें दिखाना है कि (a) सत्य है; अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.19 के अनुसार यह दिखाना पर्याप्त है कि $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ प्रत्येक चर-नियतन s के लिए सत्य है। अतः s को कोई स्वेच्छ चर-नियतन मानें। ऐसी संरचना $\mathfrak{M}'$ पर विचार करें जो $\mathfrak{M}$ जैसी ही है, सिवाय इसके कि $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$। उपप्रमेय 16.21 से, किसी भी $\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}' \vDash \chi$, क्योंकि a, Γ में नहीं आता; और किसी भी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M}' \nvDash \chi$। पर पूर्वाधार वैध है, इसलिए $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(a)$, क्योंकि $\varphi(a)$ एक वाक्य है। अब $s \sim_x s$, जहाँ $s(x) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}'}(a)$, क्योंकि हमने $\mathfrak{M}'$ को ठीक इसी प्रकार परिभाषित किया है। इसलिए प्रतिज्ञप्ति 16.23 लागू होता है और हमें $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$ मिलता है। चूँकि a, $\varphi(x)$ में नहीं आता, प्रतिज्ञप्ति 16.20 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। चूँकि s स्वेच्छ था, हमने यह प्रमाण पूरा कर लिया कि सभी चर-नियतनों के लिए $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$।

10. अंतिम अनुमान $\exists$L है: अभ्यास।

अब दो पूर्वाधारों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें।

1. अंतिम अनुमान छेदन है; तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \text{Cut}$$

$\mathfrak{M}$ को संरचना मानें। आगमन-परिकल्पना से पूर्वाधार वैध हैं, इसलिए $\mathfrak{M}$ दोनों पूर्वाधारों को संतुष्ट करता है। दो प्रकरणों में भेद करें: (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ और (b) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। प्रकरण (a) में, बाएँ पूर्वाधार को संतुष्ट करने के लिए $\mathfrak{M}$ को $\Gamma \Rightarrow \Delta$ संतुष्ट करना होगा। तब वह निष्कर्ष को भी संतुष्ट करता है। प्रकरण (b) में, दाएँ पूर्वाधार को संतुष्ट करने के लिए $\mathfrak{M}$ को $\Pi \setminus \Lambda$ संतुष्ट करना होगा। यहाँ भी $\mathfrak{M}$ निष्कर्ष को संतुष्ट करता है।

2. अंतिम अनुमान $\wedge$R है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{R}$$

किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। यदि $\mathfrak{M}$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है, तो काम पूरा हुआ। अतः मानें कि वह ऐसा नहीं करता। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ आगमन-परिकल्पना से वैध है, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। इसी प्रकार, चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ वैध है, $\mathfrak{M} \vDash \psi$। तब $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$।

3. अंतिम अनुमान $\vee$L है: अभ्यास।

4. अंतिम अनुमान $\rightarrow$L है। तब π निम्न पर समाप्त होती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \rightarrow\text{L}$$

फिर किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें और मानें कि $\mathfrak{M}$ $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ को संतुष्ट नहीं करता। हमें दिखाना है कि $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \to \psi$। यदि $\mathfrak{M}$ $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ को संतुष्ट नहीं करता, तो वह न $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को संतुष्ट करता है, न $\Pi \Rightarrow \Lambda$ को। चूँकि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ वैध है, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। चूँकि $\psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ वैध है, इसलिए $\mathfrak{M} \nvDash \psi$। तब $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \to \psi$, और हमें यही दिखाना था। □

उपप्रमेय 19.29. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ वैध है।*

उपप्रमेय 19.30. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। प्रमेय 19.28 के अनुसार प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ या तो किसी $\psi \in \Gamma_0$ को असत्य बनाता है, या φ को सत्य बनाता है। अतः यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ भी। □

उपप्रमेय 19.31. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_0 \Rightarrow$ की कोई व्युत्पत्ति है। प्रमेय 19.28 से $\Gamma_0 \Rightarrow$ वैध है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए कोई $\chi \in \Gamma_0$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nvDash \chi$; और चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, वही χ Γ में भी है। अतः कोई $\mathfrak{M}$ Γ को संतुष्ट नहीं करता, और Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

19.13 व्युत्पत्तियाँ: तादात्म्य सहित

व्युत्पत्तियाँ में तादात्म्य के लिए अतिरिक्त प्रारंभिक अनुक्रम और अनुमान-नियम चाहिए।

परिभाषा 19.32 (= के लिए प्रारंभिक अनुक्रम). यदि t कोई बंद पद है, तो $\Rightarrow t = t$ एक प्रारंभिक अनुक्रम है।

= के नियम निम्न हैं (t_1 और t_2 बंद पद हैं):

$$\frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)} = \qquad \frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)} =$$

उदाहरण 19.33. यदि s और t बंद पद हैं, तो $s = t, \varphi(s) \vdash \varphi(t)$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)}\,\mathrm{WL}}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(t)}\,=$$

इसे अभिन्नों की प्रतिस्थापनीयता के सिद्धांत अथवा लाइबनित्स के नियम के रूप में जाना जाता है।

LK सिद्ध करता है कि = सममित और संक्रामक है:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow t_1 = t_1}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_1}\,\mathrm{WL}}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1}\,= \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2}\,\mathrm{WL}}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_3}\,=}{t_1 = t_2, t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3}\,\mathrm{XL}$$

बाईं व्युत्पत्ति में सूत्र $x = t_1$ हमारा $\varphi(x)$ है। दाईं ओर हम $\varphi(x)$ को $t_1 = x$ लेते हैं।

19.14 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता

प्रतिज्ञप्ति 19.34. LK *में तादात्म्य के प्रारंभिक अनुक्रम और नियम जोड़ने पर भी वह सुदृढ़ है।*

प्रमाण. $\Rightarrow t = t$ रूप के प्रारंभिक अनुक्रम वैध हैं, क्योंकि हर संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash t = t$। (ध्यान दें कि पद t को हम बंद मानते हैं; अर्थात् उसमें कोई चर नहीं आता, इसलिए चर-नियतन अप्रासंगिक हैं।)

मानें कि किसी व्युत्पत्ति का अंतिम अनुमान $=$ है। तब पूर्वाधार $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)$ और निष्कर्ष $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)$ है। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि निष्कर्ष वैध है; अर्थात् यदि $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ और $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो या तो $\mathfrak{M} \vDash \chi$ किसी $\chi \in \Delta$ के लिए, या $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$।

आगमन-परिकल्पना से पूर्वाधार वैध है। इसका अर्थ है कि यदि $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ और $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो या तो (a) किसी $\chi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \chi$, या (b) $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$। प्रकरण (a) में काम पूरा हुआ। प्रकरण (b) पर विचार करें। s को ऐसा चर-नियतन मानें कि $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$। चूँकि $s \sim_x s$, प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$, हमारे पास $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$ है, और इसलिए $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 को फिर लागू करने पर $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$ भी मिलता है। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$। □

प्रश्न

प्रश्न 19.1. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\varphi \land (\psi \land \chi) \Rightarrow (\varphi \land \psi) \land \chi$.
2. $\varphi \lor (\psi \lor \chi) \Rightarrow (\varphi \lor \psi) \lor \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \Rightarrow \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.

प्रश्न 19.2. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $(\varphi \lor \psi) \to \chi \Rightarrow \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi) \Rightarrow (\varphi \lor \psi) \to \chi$.
3. $\Rightarrow \neg(\varphi \land \neg\varphi)$.
4. $\psi \to \varphi \Rightarrow \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\Rightarrow (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\varphi \to \chi \Rightarrow \neg(\varphi \land \neg\chi)$.
8. $\varphi \land \neg\chi \Rightarrow \neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\varphi \lor \psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi$.
10. $\neg\varphi \lor \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \land \psi)$.
11. $\Rightarrow (\neg\varphi \land \neg\psi) \to \neg(\varphi \lor \psi)$.

12. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 19.3. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\neg(\varphi \to \psi) \Rightarrow \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \to \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \Rightarrow \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \Rightarrow (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \Rightarrow \varphi$.
8. $\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

(इन सभी में CR नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 19.4. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\Rightarrow (\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall y\, \psi(y)) \to \forall z\, (\varphi(z) \wedge \psi(z))$.
2. $\Rightarrow (\exists x\, \varphi(x) \vee \exists y\, \psi(y)) \to \exists z\, (\varphi(z) \vee \psi(z))$.
3. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \Rightarrow \exists y\, \varphi(y) \to \psi$.
4. $\forall x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x)$.
5. $\Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \neg\varphi(x)$.
6. $\Rightarrow \neg\exists x\, \forall y\, ((\varphi(x,y) \to \neg\varphi(y,y)) \wedge (\neg\varphi(y,y) \to \varphi(x,y)))$.

प्रश्न 19.5. निम्नलिखित अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \neg\varphi(x)$.
2. $(\forall x\, \varphi(x) \to \psi) \Rightarrow \exists y\, (\varphi(y) \to \psi)$.
3. $\Rightarrow \exists x\, (\varphi(x) \to \forall y\, \varphi(y))$.

(इन सभी में CR नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 19.6. प्रतिज्ञप्ति 19.16 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 19.7. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 19.8. प्रमेय 19.28 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 19.9. निम्न अनुक्रमों की व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\Rightarrow \forall x\, \forall y\, ((x = y \wedge \varphi(x)) \to \varphi(y))$
2. $\exists x\, \varphi(x) \wedge \forall y\, \forall z\, ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \to y = z) \Rightarrow \exists x\, (\varphi(x) \wedge \forall y\, (\varphi(y) \to y = x))$

अध्याय 20

स्वाभाविक निगमन

यह अध्याय गेंटज़ेन/प्रावित्स की शैली का स्वाभाविक निगमन तंत्र प्रस्तुत करता है।

स्वाभाविक निगमन से प्रमाण-तंत्र के रूप में संबंधित सामग्री को सम्मिलित या अपवर्जित करने के लिए "prfND" टैग का उपयोग करें।

20.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

स्वाभाविक-निगमन तंत्रों का उद्देश्य गणितीय प्रमाण में प्रयुक्त अनौपचारिक तर्क-प्रक्रिया के बहुत निकट चलना है (इसीलिए यह कुछ हद तक "स्वाभाविक" है)। स्वाभाविक-निगमन प्रमाण मान्यताओं से आरम्भ होते हैं। फिर अनुमान-नियम लागू किए जाते हैं। मान्यताओं को $\neg$Intro, $\rightarrow$Intro, $\vee$Elim और $\exists$Elim अनुमान-नियमों द्वारा "मुक्त" किया जाता है, और स्पष्टता के लिए मुक्त मान्यता का लेबल अनुमान के पास रखा जाता है।

परिभाषा 20.1 (मान्यता). किसी भी शाखा की सबसे ऊपर की स्थिति में स्थित कोई भी वाक्य *मान्यता* है।

स्वाभाविक निगमन में प्रत्येक व्युत्पत्ति वाक्यों का एक विशेष वृक्ष होती है। उसमें सबसे ऊपर के वाक्यों को मान्यताएँ कहा जाता है; और यदि वाक्य एक, दो या तीन अन्य अनुक्रमों के नीचे स्थित हो, तो उसे किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग से निकलना चाहिए। अनुमान के ऊपर स्थित वाक्यों को उसके *पूर्वाधार* और नीचे स्थित वाक्य को अनुमान का *निष्कर्ष* कहते हैं। नियम युग्मों में आते हैं—प्रत्येक संक्रियक के लिए एक प्रवेश-नियम और एक निरसन-नियम। वे निष्कर्ष में संक्रियक प्रविष्ट करते हैं या नियम के किसी पूर्वाधार से संक्रियक हटाते हैं। कुछ नियम किसी निश्चित प्रकार की मान्यता को *मुक्त* करने देते हैं। कौन-सी मान्यता किस अनुमान द्वारा मुक्त की जाती है, यह दिखाने के लिए हम मान्यता और अनुमान दोनों को लेबल भी देते हैं। इसका संकेत मान्यता को "$[\varphi]^n$." के रूप में लिखकर दिया जाता है।

सभी संक्रियकों $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, और $\perp$ के लिए नियमों पर विचार करना प्रचलित है, भले ही उनमें से कुछ परिभाषित हों।

20.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge\text{Elim}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge\text{Elim}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

$$n\ \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ \vee\text{Elim}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\text{Intro}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \rightarrow\text{Elim}$$

$\neg$ के नियम

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro}$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

$\bot$ के नियम

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \bot_I$$

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_C$$

ध्यान दें कि $\neg$Intro और $\bot_C$ बहुत समान हैं। अंतर यह है कि $\neg$Intro निषेधित वाक्य $\neg\varphi$ को व्युत्पन्न करता है, जबकि $\bot_C$ सकारात्मक वाक्य φ को व्युत्पन्न करता है।

जहाँ भी कोई नियम यह बताता है कि किसी मान्यता को मुक्त किया जा सकता है, इसे हम अनुमति मानते हैं, अनिवार्यता नहीं। उदाहरणतः, $\to$Intro नियम में हम φ रूप की मान्यताओं की कोई भी संख्या पूर्वाधार ψ की व्युत्पत्ति में मुक्त कर सकते हैं—शून्य भी।

20.3 परिमाणक-नियम

$\forall$ के नियम

$$\frac{\varphi(a)}{\forall x\,\varphi(x)}\ \forall\text{Intro} \qquad\qquad \frac{\forall x\,\varphi(x)}{\varphi(t)}\ \forall\text{Elim}$$

$\forall$ के नियमों में t बंद पद है (ऐसा पद जिसमें कोई चर नहीं होता), और a ऐसा अचर है जो निष्कर्ष $\forall x\,\varphi(x)$ में या ऐसी किसी अमुक्त मान्यता में नहीं आता जो पूर्वाधार $\varphi(a)$ पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्ति में हो। हम a को $\forall$Intro अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।[1]

$\exists$ के नियम

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}\ \exists\text{Intro} \qquad\qquad {}_n\frac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(a)]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ \exists\text{Elim}$$

यहाँ भी t बंद पद है, और a ऐसा अचर है जो पूर्वाधार $\exists x\,\varphi(x)$ में, निष्कर्ष χ में, या (मान्यताओं $\varphi(a)$ को छोड़कर) ऐसी किसी अमुक्त मान्यता में नहीं आता जो दोनों पूर्वाधारों पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्तियाँ में हो। हम a को $\exists$Elim अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।

अभिलाक्षणिक चर न तो पूर्वाधारों में आए और न ऐसी किसी अमुक्त मान्यता में जो $\forall$Intro या $\exists$Elim अनुमान के पूर्वाधारों तक पहुँचने वाली व्युत्पत्तियाँ में हो—इस शर्त को *अभिलाक्षणिक-चर शर्त* कहते हैं।

स्मरण करें: जब φ ऐसा सूत्र हो जिसमें चर x मुक्त है, तो इसे $\varphi(x)$ लिखकर दिखाते हैं। उसी संदर्भ में $\varphi(t)$, संक्षेप में $\varphi[t/x]$ है। अतः $\exists$Intro नियम को ऐसे भी लिख सकते हैं:

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\,\varphi}\ \exists\text{Intro}$$

ध्यान दें कि t, φ में पहले से आ सकता है; जैसे φ का रूप $P(t,x)$ हो सकता है। अतः $\exists x\,P(t,x)$ को $P(t,t)$ से निष्कर्षित करना $\exists$Intro का सही प्रयोग है—पूर्वाधार में t की एक या अधिक, पर आवश्यक नहीं कि सभी, आवृत्तियों को आबद्ध चर x से "बदल" सकते हैं। परंतु $\forall$Intro और $\exists$Elim की अभिलाक्षणिक-चर शर्तें माँगती हैं कि अचर a, φ में न आए। इसलिए $\forall x\,P(a,x)$ को $P(a,a)$ से $\forall$Intro द्वारा सही ढंग से निष्कर्षित नहीं कर सकते।

$\exists$Intro और $\forall$Elim में कोई प्रतिबंध नहीं है और पद t कुछ भी हो सकता है, इसलिए किसी शर्त की चिंता नहीं करनी पड़ती। दूसरी ओर, $\exists$Elim और $\forall$Intro नियमों में अभिलाक्षणिक-चर शर्त माँगती है कि अचर a निष्कर्ष में या

[1] ऊपर के नियम में a अचर है, फिर भी ऐतिहासिक कारणों से "अभिलाक्षणिक चर" शब्द प्रयुक्त होता है।

किसी अमुक्त मान्यता में कहीं न आए। तंत्र की सुदृढ़ता सुनिश्चित करने के लिए यह शर्त आवश्यक है; अर्थात् वह केवल व्युत्पन्न करे: उन वाक्यों को, जो उन अमुक्त मान्यताओं से निकलते हैं। इस शर्त के बिना निम्नलिखित अनुमत होता:

$$\dfrac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \dfrac{[\varphi(a)]^1}{\forall x\,\varphi(x)}\,{}^*\forall\text{Intro}}{\forall x\,\varphi(x)}\,\exists\text{Elim}$$

परंतु $\exists x\,\varphi(x) \not\models \forall x\,\varphi(x)$।

चूँकि परिमाणकों के निरसन-नियम चरों के स्थान पर केवल बंद पद प्रतिस्थापित करने देते हैं, अतः प्रत्येक सूत्र, जिसे वाक्यों के किसी समुच्चय से व्युत्पन्न किया जा सकता है, स्वयं वाक्य है।

20.4 व्युत्पत्तियाँ

हम बता चुके हैं कि मान्यता क्या है और अनुमान-नियम भी दे चुके हैं। स्वाभाविक निगमन की व्युत्पत्तियाँ इन्हीं से आगमनात्मक रूप से बनती हैं: हर व्युत्पत्ति या तो अकेली मान्यता है, या उसमें एक, दो अथवा तीन व्युत्पत्तियाँ के बाद एक सही अनुमान होता है।

परिभाषा 20.2 (व्युत्पत्ति). *व्युत्पत्ति,* वाक्य φ को मान्यताओं Γ से देने वाला वाक्यों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्नलिखित शर्तें पूरी करे:

1. वृक्ष के शीर्षस्थ वाक्यों या तो Γ में हैं या वृक्ष के किसी अनुमान द्वारा मुक्त किए जाते हैं।
2. वृक्ष का सबसे निचला वाक्य φ है।
3. वृक्ष का हर वाक्य, सबसे नीचे के φ को छोड़कर, किसी अनुमान-नियम के सही प्रयोग का पूर्वाधार है; उस प्रयोग का निष्कर्ष वृक्ष में उस वाक्य के ठीक नीचे स्थित है।

तब φ को व्युत्पत्ति का *निष्कर्ष* और Γ को उसकी अमुक्त मान्यताएँ कहते हैं।

यदि व्युत्पत्ति ऐसी हो जो φ को Γ से देती हो, तो कहते हैं कि φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, या प्रतीकों में: $\Gamma \vdash \varphi$। यदि ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसमें φ निष्कर्ष हो और हर मान्यता मुक्त हो, तो $\vdash \varphi$ लिखते हैं।

उदाहरण 20.3. हर मान्यता स्वयं व्युत्पत्ति है; अतः φ स्वयं व्युत्पत्ति है और ψ भी। इन पर $\wedge$Intro नियम लगाने से नई व्युत्पत्ति मिलती है:

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

ये नियम सामान्य हैं: इनमें φ और ψ को किन्हीं भी वाक्यों, जैसे χ और θ, से बदल सकते हैं। तब निष्कर्ष $\chi \wedge \theta$ होगा; अतः

$$\dfrac{\chi \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}$$

सही व्युत्पत्ति है। मान्यताएँ उलटकर θ को φ और χ को ψ की भूमिका भी दे सकते हैं। अतः

$$\dfrac{\theta \qquad \chi}{\theta \wedge \chi}\,\wedge\text{Intro}$$

भी सही व्युत्पत्ति है।

अब $\rightarrow$Intro जैसा दूसरा नियम लगा सकते हैं। यह आपादन निष्कर्षित करने और उसके पूर्वपद के समान किसी भी मान्यता को मुक्त करने देता है। अतः निम्न दोनों सही व्युत्पत्तियाँ हैं:

$$1\,\dfrac{\dfrac{[\chi]^1 \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}}{\chi \to (\chi \wedge \theta)}\,\to\text{Intro} \qquad 1\,\dfrac{\dfrac{\chi \qquad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}}{\theta \to (\chi \wedge \theta)}\,\to\text{Intro}$$

ये क्रमशः दिखाती हैं कि $\theta \vdash \chi \to (\chi \wedge \theta)$ और $\chi \vdash \theta \to (\chi \wedge \theta)$।

याद रखें: मान्यताओं को मुक्त करना अनुमति है, अनिवार्यता नहीं। विशेषतः, मान्यताएँ व्युत्पत्ति में मौजूद न हों, तब भी नियम लगा सकते हैं। निम्नलिखित अनुमत है, यद्यपि कोई मान्यता φ नहीं है जिसे मुक्त किया जाए:

$$1\,\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}$$

20.5 व्युत्पत्तियाँ बनाने के उदाहरण

उदाहरण 20.4. आइए व्युत्पत्ति दें जिसका निष्कर्ष वाक्य $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ है।

वांछित निष्कर्ष को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरम्भ करते हैं।

$$\dfrac{}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}$$

अब तय करना है कि किस प्रकार का अनुमान इस रूप का वाक्य दे सकता है। निष्कर्ष का प्रधान संक्रियक $\to$ है, इसलिए $\to$Intro नियम से निष्कर्ष तक पहुँचने का प्रयत्न करेंगे। आगे बढ़ते हुए संबद्ध मान्यताओं को लिखना और अनुमान-नियमों पर लेबल लगाना उचित है; इससे प्रमाण के अंत में आसानी से देख सकते हैं कि सभी मान्यताएँ मुक्त हुई हैं या नहीं।

$$1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi \wedge \psi]^1\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,\to\text{Intro}$$

अब मान्यता $\varphi \wedge \psi$ से φ तक के चरण भरने हैं। यहाँ केवल एक संयोजक $\wedge$ है, इसलिए $\wedge$ निरसन-नियम लगाना होगा। इससे यह प्रमाण मिलता है:

$$1\,\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,\to\text{Intro}$$

अब हमारे पास $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ की सही व्युत्पत्ति है।

उदाहरण 20.5. अब व्युत्पत्ति दें जिसका निष्कर्ष $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ है।

वांछित निष्कर्ष को व्युत्पत्ति के सबसे नीचे लिखकर आरम्भ करते हैं।

$$\dfrac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}$$

यह निष्कर्ष देने वाला तार्किक नियम खोजने के लिए निष्कर्ष के तार्किक संयोजक देखते हैं: $\neg$, $\vee$, और $\to$। अभी केवल $\to$ की पहली आवृत्ति पर ध्यान देंगे, क्योंकि वही प्रधान संक्रियक है—अंतिम अनुक्रम के वाक्य का; $\neg$, $\vee$, और $\to$ की दूसरी आवृत्ति किसी अन्य संयोजक के परास में हैं, इसलिए उन्हें बाद में सँभालेंगे। अतः $\to$Intro नियम से आरम्भ करते हैं। उसका सही प्रयोग इस रूप का होगा:

$$
1\ \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi \vee \psi]^1\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\ \to\text{Intro}
$$

अब आगे बढ़ने के दो मार्ग हैं। या तो नीचे से ऊपर काम जारी रखकर $\to$Intro का एक और प्रयोग खोजें, या ऊपर से नीचे काम करके $\vee$Elim नियम लगाएँ। दूसरा मार्ग लेते हैं। $\vee$Elim के सबसे बाएँ पूर्वाधार के रूप में मान्यता $\neg\varphi \vee \psi$ लेंगे। $\vee$Elim के सही प्रयोग में अन्य दोनों पूर्वाधार निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ के समान होने चाहिए, पर उनमें से प्रत्येक को बारी-बारी से एक अन्य मान्यता—अर्थात् $\neg\varphi \vee \psi$ के दो वियोज्यों में से एक—से व्युत्पन्न किया जा सकता है। इसलिए हमारी व्युत्पत्ति ऐसी होगी:

$$
1\ \dfrac{2\ \dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi]^2\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^2\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\ \to\text{Intro}
$$

दाईं ओर की दोनों शाखाओं में हम व्युत्पन्न करना चाहते हैं $\varphi \to \psi$ को; इसके लिए $\to$Intro लगाना सबसे उचित है।

$$
1\ \dfrac{2\ \dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad 3\ \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^2, [\varphi]^3\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to\text{Intro} \qquad 4\ \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\ \to\text{Intro}
$$

पूरी व्युत्पत्ति के दो अधूरे भागों में हमें व्युत्पत्तियाँ चाहिए: ψ की— बीच में $\neg\varphi$ और φ से तथा बाईं ओर φ और ψ से। पहले बीच वाली लेते हैं। $\neg\varphi$ और φ, $\neg$Elim के दो पूर्वाधार हैं:

$$
\begin{array}{c}\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\ \neg\text{Elim}\\ \vdots\\ \psi\end{array}
$$

$\bot_I$का प्रयोग करके ψ को निष्कर्ष के रूप में पा सकते हैं और शाखा पूरी कर सकते हैं।

$$
1\ \dfrac{2\ \dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad 3\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\ \bot\text{Intro}}{\psi}\ \bot_I}{\varphi \to \psi}\ \to\text{Intro} \qquad 4\ \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\ \vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\ \to\text{Intro}
$$

अब सबसे दाहिनी शाखा देखें। यहाँ यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि व्युत्पत्ति की परिभाषा मान्यताओं को *मुक्त करने की अनुमति देती है*, पर ऐसा करना *अनिवार्य नहीं* बनाती। अर्थात् यदि ψ को मान्यताओं φ और ψ में से केवल एक का उपयोग करके व्युत्पन्न कर सकें, तो यह स्वीकार्य है। और व्युत्पन्न करना ψ को ψ से सर्वथा सरल है: ψ स्वयं ऐसी व्युत्पत्ति है और किसी अनुमान की आवश्यकता नहीं। अतः मान्यता φ को सीधे हटा सकते हैं।

$$
\dfrac{
2\,\dfrac{[\neg\varphi \lor \psi]^1 \qquad 3\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{[\psi]^2}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,\lor\text{Elim}
}{
1\,\dfrac{\varphi \to \psi}{(\neg\varphi \lor \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,\to\text{Intro}
}
$$

ध्यान दें कि पूर्ण व्युत्पत्ति में सबसे दाहिना $\to$Intro अनुमान वास्तव में किसी मान्यता को मुक्त नहीं करता।

उदाहरण 20.6. अब तक हमें $\bot_C$ नियम की आवश्यकता नहीं पड़ी। इसकी विशेषता यह है कि यह ऐसी मान्यता को मुक्त करने देता है जो नियम के निष्कर्ष का उप-सूत्र नहीं है। इसका $\bot_I$ नियम से निकट संबंध है। वास्तव में $\bot_I$ नियम, $\bot_C$ नियम की एक विशेष दशा है—"अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र" नाम का एक तर्कशास्त्र है जिसमें केवल $\bot_I$ अनुमत है। जब कोई और उपाय काम न करे, तब $\bot_C$ अंतिम उपाय है। उदाहरणतः, मान लें कि हमें व्युत्पन्न करना है $\varphi \lor \neg\varphi$। सामान्य रणनीति $\varphi \lor \neg\varphi$ को $\lor$Intro लगाकर व्युत्पन्न करने की होगी। पर इसके लिए बिना किसी मान्यता के व्युत्पन्न करना होगा या तो φ को या $\neg\varphi$ को, और यह सम्भव नहीं। यहाँ $\bot_C$ काम आता है!

$$
1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi \lor \neg\varphi}\,\bot_C
$$

अब व्युत्पत्ति खोज रहे हैं: $\bot$ की, $\neg(\varphi \lor \neg\varphi)$ से। चूँकि $\bot$, $\neg$Elim का निष्कर्ष है, इसे लगाने का प्रयत्न कर सकते हैं:

$$
1\,\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1\\ \vdots \\ \neg\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \lor \neg\varphi}\,\bot_C
$$

हमारी रणनीति में व्युत्पत्ति खोजनी है: $\neg\varphi$ की; इसके लिए $\neg$Intro का प्रयोग चाहिए:

$$
1\,\dfrac{\dfrac{2\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \lor \neg\varphi}\,\bot_C
$$

यहाँ $\bot$ को $\neg$Elim लगाकर सरलता से पा सकते हैं—मान्यता $\neg(\varphi \lor \neg\varphi)$ और $\varphi \lor \neg\varphi$ पर; दूसरा वाक्य हमारी नई मान्यता φ से $\lor$Intro द्वारा मिलता है:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\neg\varphi}\,{}^{2}\,\neg\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,{}^{1}\,\bot_C
$$

दाईं ओर वही रणनीति अपनाते हैं, केवल φ को $\bot_C$से पाते हैं:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\neg\varphi}\,{}^{2}\,\neg\text{Intro} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi}\,{}^{3}\,\bot_C}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,{}^{1}\,\bot_C
$$

20.6 परिमाणकों वाली व्युत्पत्तियाँ

उदाहरण 20.7. परिमाणकों के साथ काम करते समय यह सुनिश्चित करना होता है कि अभिलाक्षणिक-चर शर्त का उल्लंघन न हो। इसके लिए कभी-कभी कुछ अनुमानों को लगाने का क्रम बदलकर देखना पड़ता है। सामान्यतः अभिलाक्षणिक-चर शर्त के अधीन नियमों को पहले सँभालना सहायक होता है (पूरे प्रमाण में वे नीचे आएँगे)।

आइए देखें कि व्युत्पत्ति कैसे दी जा सकती है—इस सूत्र की: $\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$. सामान्य रीति से आरम्भ करते हुए लिखते हैं:

$$
\dfrac{}{\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)}
$$

सबसे पहले लिखते हैं कि उस अंतिम चरण को $\to$Intro नियम से उचित ठहराने के लिए क्या चाहिए।

$$
{}^{1}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\exists x\, \neg\varphi(x)]^1\\ \vdots \\ \neg\forall x\, \varphi(x)\end{array}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)}\,\to\text{Intro}
$$

चूँकि $\neg\forall x\, \varphi(x)$ पर लगाने के लिए कोई स्पष्ट नियम नहीं है, इसलिए व्युत्पत्ति को इस प्रकार व्यवस्थित करेंगे कि $\exists$Elim नियम लगा सकें। यहाँ अभिलाक्षणिक-चर शर्त पर ध्यान देकर ऐसा अचर चुनना होगा जो $\exists x\, \varphi(x)$ में या उन मान्यताओं में न आए जिन पर वह निर्भर है। (फिर भी, चूँकि कोई अचर नहीं आया है, कोई भी चुनाव ठीक रहेगा।)

$$
{}^{1}\,\dfrac{{}^{2}\,\dfrac{[\exists x\, \neg\varphi(x)]^1 \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi(a)]^2\\ \vdots \\ \neg\forall x\, \varphi(x)\end{array}}{\neg\forall x\, \varphi(x)}\,\exists\text{Elim}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)}\,\to\text{Intro}
$$

$\neg\forall x\, \varphi(x)$ को व्युत्पन्न करने के लिए $\neg$Intro नियम लगाने का प्रयत्न करेंगे। इसके लिए कोई अंतर्विरोध व्युत्पन्न करना होगा, जिसमें $\forall x\, \varphi(x)$ को अतिरिक्त मान्यता के रूप में लिया जा सकता है। निस्संदेह इस अंतर्विरोध में मान्यता $\neg\varphi(a)$ आ सकती है, जिसे $\exists$Elim अनुमान मुक्त करेगा। इसे इस प्रकार व्यवस्थित कर सकते हैं:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x\, \neg\varphi(x)]^1$}
\AxiomC{$[\neg\varphi(a)]^2, [\forall x\, \varphi(x)]^3$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg$Intro}
\UnaryInfC{$\neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{3}
\RightLabel{$\exists$Elim}
\BinaryInfC{$\neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{2}
\RightLabel{$\to$Intro}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{1}
\end{prooftree}
$$

लगता है कि हम अंतर्विरोध पाने के निकट हैं। लगाने के लिए सबसे सरल नियम $\forall$Elim है, जिस पर अभिलाक्षणिक-चर शर्त लागू नहीं होती। सार्वपरिमाणित चर x के स्थान पर कोई भी इच्छित पद रख सकते हैं; अतः अंतर्विरोध तक पहुँचने के लिए a का ही प्रयोग जारी रखना सबसे उपयुक्त है।

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x\, \neg\varphi(x)]^1$}
\AxiomC{$[\neg\varphi(a)]^2$}
\AxiomC{$[\forall x\, \varphi(x)]^3$}
\RightLabel{$\forall$Elim}
\UnaryInfC{$\varphi(a)$}
\RightLabel{$\neg$Elim}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg$Intro}
\UnaryInfC{$\neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{3}
\RightLabel{$\exists$Elim}
\BinaryInfC{$\neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{2}
\RightLabel{$\to$Intro}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{1}
\end{prooftree}
$$

विशेषतः परिमाणकों के साथ काम करते समय इस बिंदु पर दोबारा जाँचना आवश्यक है कि अभिलाक्षणिक-चर शर्त का उल्लंघन तो नहीं हुआ। हमने इस शर्त के अधीन केवल $\exists$Elim नियम लगाया है, और अभिलाक्षणिक चर a उन किसी भी मान्यताओं में नहीं आता जिन पर वह निर्भर है; अतः यह सही व्युत्पत्ति है।

उदाहरण 20.8. कभी-कभी हम सूत्र को अन्य सूत्रों से व्युत्पन्न करते हैं। ऐसी दशाओं में अमुक्त मान्यताएँ रह सकती हैं। इसलिए अंतिम लक्ष्य के साथ-साथ अपनी मान्यताओं का भी लेखा रखना आवश्यक है।

आइए देखें कि व्युत्पत्ति कैसे दी जा सकती है—इस सूत्र की: $\exists x\, \chi(x, b)$, मान्यताओं $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ और $\forall x\, (\psi(x) \to \chi(x, b))$ से। सामान्य रीति से आरम्भ करते हुए निष्कर्ष को सबसे नीचे लिखते हैं।

$$
\overline{\exists x\, \chi(x, b)}
$$

हमारे पास काम करने के लिए दो पूर्वाधार हैं। पहले का उपयोग करने के लिए—अर्थात् $\exists x\, \chi(x, b)$ की व्युत्पत्ति, $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ से खोजने के लिए—$\exists$Elim नियम लगाएँगे। उस पर अभिलाक्षणिक-चर शर्त लागू होती है, इसलिए यही नियम पहले लगाएँगे। इससे मिलता है:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$}
\AxiomC{$[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\exists x\, \chi(x, b)$}
\RightLabel{$\exists$Elim}
\BinaryInfC{$\exists x\, \chi(x, b)$}
\RightLabel{1}
\end{prooftree}
$$

जिन दो मान्यताओं के साथ हम काम कर रहे हैं, उनमें ψ उभयनिष्ठ है। इस बिंदु पर $\wedge$Elim लगाकर $\psi(a)$ को अलग निकालना उपयोगी हो सकता है।

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$}
\AxiomC{$[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1$}
\RightLabel{$\wedge$Elim}
\UnaryInfC{$\psi(a)$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\exists x\, \chi(x, b)$}
\RightLabel{$\exists$Elim}
\BinaryInfC{$\exists x\, \chi(x, b)$}
\RightLabel{1}
\end{prooftree}
$$

काम के लिए दूसरी मान्यता है $\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))$। यहाँ अभिलाक्षणिक-चर शर्त नहीं है, इसलिए $\forall$Elim लगाकर x को अचर a से उदाहरणित कर सकते हैं और $\psi(a) \to \chi(a,b)$ पा सकते हैं। अब हमारे पास $\psi(a) \to \chi(a,b)$ और $\psi(a)$, दोनों हैं। अगला चरण $\to$Elim नियम का सीधा प्रयोग होना चाहिए।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))}{\psi(a) \to \chi(a,b)}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)}\,\wedge\text{Elim}}{\chi(a,b)}\,\to\text{Elim}}{\vdots}$$

$$1\,\dfrac{\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \exists x\,\chi(x,b)}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Elim}$$

हम लक्ष्य के बहुत निकट हैं! $\exists$Intro का एक प्रयोग और लक्ष्य मिल जाता है।

$$1\,\dfrac{\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))}{\psi(a) \to \chi(a,b)}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)}\,\wedge\text{Elim}}{\chi(a,b)}\,\to\text{Elim}}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Intro}}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Elim}$$

चूँकि हर चरण पर हमने सुनिश्चित किया कि अभिलाक्षणिक-चर शर्तों का उल्लंघन न हो, इसलिए विश्वासपूर्वक कह सकते हैं कि यह सही व्युत्पत्ति है।

उदाहरण 20.9. व्युत्पत्ति दीजिए—इस सूत्र की: $\neg\forall x\,\varphi(x)$, मान्यताओं $\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ और $\neg\exists y\,\psi(y)$ से। सामान्य रीति से आरम्भ करते हुए लक्ष्य सूत्र को सबसे नीचे लिखते हैं।

$$\dfrac{}{\neg\forall x\,\varphi(x)}$$

व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति निषेध है, इसलिए $\neg$Intro लगाने का प्रयत्न करते हैं। इसके लिए यह पता लगाना होगा कि अंतर्विरोध को कैसे व्युत्पन्न करें।

$$1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\forall x\,\varphi(x)]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,\neg\text{Intro}$$

यहाँ तक सब ठीक है। $\forall$Elim लगा सकते हैं, पर यह स्पष्ट नहीं कि उससे लक्ष्य तक पहुँचने में सहायता मिलेगी। इसके बजाय अपनी एक मान्यता का उपयोग करें। $\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ को $\forall x\,\varphi(x)$ के साथ लेने पर $\to$Elim नियम लगा सकेंगे।

$$1\,\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y) \qquad [\forall x\,\varphi(x)]^1}{\exists y\,\psi(y)}\,\to\text{Elim}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,\neg\text{Intro}$$

अब काम के लिए एक अंतिम मान्यता बची है। लगता है कि उसकी सहायता से $\neg$Elim लगाकर अंतर्विरोध तक पहुँच सकेंगे।

$$
\dfrac{\dfrac{\neg\exists y\,\psi(y) \qquad \dfrac{\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y) \qquad [\forall x\,\varphi(x)]^1}{\exists y\,\psi(y)}\,{\to}\mathrm{Elim}}{\bot}\,{\neg}\mathrm{Elim}}{{}^1\,\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\neg}\mathrm{Intro}
$$

20.7 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

यह अनुभाग स्वाभाविक निगमन के सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में वाक्यों की संरचनाएँ में संतुष्टि का सहारा नहीं लिया जाता, बल्कि व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का—कुछ वाक्यों की अन्य वाक्यों से व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का—सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 20.10 (प्रमेय). कोई वाक्य φ *प्रमेय* है यदि स्वाभाविक निगमन में φ की ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसमें सभी मान्यताएँ मुक्त हों। यदि $\vdash \varphi$ हो तो φ प्रमेय है, और यदि नहीं तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 20.11 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* है; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, और यह तब होता है जब ऐसी व्युत्पत्ति हो जिसका निष्कर्ष φ हो और जिसमें हर मान्यता या तो मुक्त हो अथवा Γ में हो। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है, तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 20.12 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \bot$। यदि Γ असंगत नहीं है, अर्थात् यदि $\Gamma \nvdash \bot$, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 20.13 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. मान्यता φ अकेली ही φ की व्युत्पत्ति है, जिसमें हर अमुक्त मान्यता (अर्थात् φ) Γ में है। □

प्रतिज्ञप्ति 20.14 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. φ की Γ से कोई भी व्युत्पत्ति, φ की Δ से व्युत्पत्ति भी है। □

प्रतिज्ञप्ति 20.15 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ_0 ऐसी है जिसका निष्कर्ष φ है और जिसकी सभी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं। यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ_1 ऐसी है जिसका निष्कर्ष ψ है और जिसकी सभी अमुक्त मान्यताएँ $\{\varphi\} \cup \Delta$ में हैं। अब इस पर विचार करें:

$$
\dfrac{{}^1\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\to}\mathrm{Intro} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_0\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,{\to}\mathrm{Elim}
$$

अब सभी अमुक्त मान्यताएँ $\Gamma \cup \Delta$ में हैं; अतः इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। $\square$

जब $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ कोई परिमित समुच्चय हो, तब सरल संकेतन $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \vdash \psi$ को $\Gamma \vdash \psi$ के स्थान पर लिख सकते हैं; विशेषतः $\varphi \vdash \psi$ का अर्थ $\{\varphi\} \vdash \psi$ है।

ध्यान दें कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए हो, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 20.16. *निम्नलिखित कथन तुल्य हैं।*

1. *Γ असंगत है।*
2. *$\Gamma \vdash \varphi$ प्रत्येक वाक्य φ के लिए सत्य है।*
3. *$\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \neg\varphi$ किसी वाक्य φ के लिए सत्य हैं।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 20.17 (संहतता). 1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. *यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।*

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई व्युत्पत्ति δ ऐसी है जो φ की Γ से है। Γ_0 को δ की अमुक्त मान्यताओं का समुच्चय मानें। चूँकि कोई भी व्युत्पत्ति परिमित होती है, Γ_0 में केवल परिमित रूप से अनेक वाक्यों हो सकते हैं। अतः δ, φ की परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ से व्युत्पत्ति है।

2. यह (1) का प्रतिलोम है—विशेष दशा $\varphi \equiv \bot$ के लिए। $\square$

20.8 व्युत्पन्नता और संगतता

अब व्युत्पन्नता संबंध के कई गुण स्थापित करेंगे। वे अपने-आप में रोचक हैं, पर उनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 20.18. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. व्युत्पत्ति— φ की Γ से— δ_1 हो, और व्युत्पत्ति— $\bot$ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से— δ_2 हो। तब यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots\ \delta_2 \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,1\ \neg\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\ \delta_1 \\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

नई व्युत्पत्ति में मान्यता φ मुक्त है, इसलिए यह व्युत्पत्ति Γ से है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 20.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् कोई व्युत्पत्ति δ_0 ऐसी है जो φ की अमुक्त मान्यताओं Γ से है। इससे व्युत्पत्ति मिलती है—$\bot$ की $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ से—इस प्रकार:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_0\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

अब मान लें $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, और δ_1 उस तदनुरूप व्युत्पत्ति को निरूपित करे जो $\bot$ की, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ में उपस्थित अमुक्त मान्यताओं से है। φ की केवल Γ से व्युत्पत्ति, $\bot_C$ का प्रयोग करके इस प्रकार मिलती है:

$$1\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_C$$

□

प्रतिज्ञप्ति 20.20. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब कोई व्युत्पत्ति δ ऐसी है जो φ की Γ से है। $\neg$Elim नियम के इस सरल प्रयोग पर विचार करें:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

चूँकि $\neg\varphi \in \Gamma$, सभी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं; इससे $\Gamma \vdash \bot$ सिद्ध होता है। □

प्रतिज्ञप्ति 20.21. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. व्युत्पत्तियाँ δ_1 और δ_2 हैं: पहली $\bot$ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, और दूसरी $\bot$ की $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ से। तब यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{2\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^2\\ \vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\neg\neg\varphi}\ \neg\text{Intro} \qquad 1\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

चूँकि मान्यताएँ φ और $\neg\varphi$ मुक्त हैं, यह व्युत्पत्ति है— $\bot$ की केवल Γ से। अतः Γ असंगत है। □

20.9 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि स्वाभाविक निगमन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 20.22. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. दोनों को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\text{Elim} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\text{Elim}$$

2. यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 20.23. *1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. निम्नलिखित व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$1\,\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim} \qquad \dfrac{\neg\psi \qquad [\psi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\bot}\,\vee\text{Elim}$$

यह $\bot$ की व्युत्पत्ति है, अमुक्त मान्यताओं $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, और $\neg\psi$ से।

2. दोनों को व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 20.24. *1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ और $\psi \vdash \varphi \to \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. यह व्युत्पन्न कर सकते हैं:

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

2. इसे निम्नलिखित दो व्युत्पत्तियाँ दिखाती हैं:

$$1\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}$$

ध्यान दें कि $\to$Intro मान्यता φ को मुक्त कर सकता है, पर ऐसा करना आवश्यक नहीं है। □

20.10 व्युत्पन्नता और परिमाणक

पूर्णता प्रमेय के लिए यह भी आवश्यक है कि स्वाभाविक निगमन के नियम इस अनुभाग में स्थापित $\vdash$ से संबंधित तथ्य प्रदान करें।

प्रमेय 20.25. *यदि c ऐसा अचर है जो Γ या $\varphi(x)$ में नहीं आता, और $\Gamma \vdash \varphi(c)$, तो $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$।*

प्रमाण. δ को $\varphi(c)$ की Γ से व्युत्पत्ति मानें। $\forall$Intro अनुमान जोड़ने पर $\forall x\, \varphi(x)$ की व्युत्पत्ति मिलती है। चूँकि c, Γ या $\varphi(x)$ में नहीं आता, इसलिए अभिलाक्षणिक-चर शर्त पूरी होती है। □

प्रतिज्ञप्ति 20.26. *1. $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.*

2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

प्रमाण. 1. निम्नलिखित व्युत्पत्ति है— $\exists x\, \varphi(x)$ की $\varphi(t)$ से:

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\, \varphi(x)}\ \exists\text{Intro}$$

2. निम्नलिखित व्युत्पत्ति है— $\varphi(t)$ की $\forall x\, \varphi(x)$ से:

$$\frac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}\ \forall\text{Elim}$$

□

20.11 सुदृढ़ता

स्वाभाविक निगमन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र सुदृढ़ है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में तार्किकतः निष्पन्न नहीं होतीं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न वाक्य वैध है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनका तार्किक परिणाम भी है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

प्रमेय 20.27 (सुदृढ़ता). *यदि φ व्युत्पन्न है और इस व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ Γ हैं, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. δ को φ की व्युत्पत्ति मानें। हम δ में अनुमानों की संख्या पर आगमन करते हैं।

आगमन-आधार के लिए, अनुमानों की संख्या 0 होने पर कथन सिद्ध करते हैं। इस स्थिति में δ में केवल एक वाक्य φ, अर्थात् एक मान्यता, होती है। वह मान्यता अमुक्त है, क्योंकि मान्यताएँ केवल अनुमानों द्वारा ही मुक्त हो सकती हैं और यहाँ कोई अनुमान नहीं है। अतः ऐसी प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ जो प्रमाण की सभी अमुक्त मान्यताओं को संतुष्ट करती है, φ को भी संतुष्ट करती है।

अब आगमन-चरण लें। मानें कि δ में n अनुमान हैं। सबसे निचले अनुमान के पूर्वाधार व्युत्पन्न किए गए हैं; इसके लिए उप-व्युत्पत्तियाँ का उपयोग हुआ है, और इनमें से प्रत्येक में n से कम अनुमान हैं। हम आगमन-परिकल्पना मानते हैं:

सबसे निचले अनुमान के पूर्वाधार अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होते हैं; ये उन पूर्वाधारों पर समाप्त होने वाली उप-व्युत्पत्तियाँ की मान्यताएँ हैं। हमें दिखाना है कि निष्कर्ष φ पूरे प्रमाण की अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होता है।

हम सबसे निचले अनुमान के प्रकार के अनुसार प्रकरणों में भेद करते हैं। पहले केवल एक पूर्वाधार वाले संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं।

1. मानें कि अंतिम अनुमान $\neg$Intro है। व्युत्पत्ति का रूप है

$$n\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^n\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro}$$

   आगमन-परिकल्पना से $\bot$, अमुक्त मान्यताओं $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$। विरोधाभासार्थ मानें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, पर $\mathfrak{M} \nvDash \neg\varphi$, अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। तब $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$ होगा। यह हमारी आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है। अतः $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$.

2. अंतिम अनुमान $\wedge$Elim है। इसके दो रूप हैं: φ या ψ को पूर्वाधार $\varphi \wedge \psi$ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले प्रकरण पर विचार करें। व्युत्पत्ति δ इस प्रकार है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ \wedge\text{Elim}$$

   आगमन-परिकल्पना से $\varphi \wedge \psi$, अमुक्त मान्यताओं Γ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। मानें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। हमारी आगमन-परिकल्पना ($\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$) से हम जानते हैं कि $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$। परिभाषा से, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M} \vDash \psi$। (जिस प्रकरण में ψ को $\varphi \wedge \psi$ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है।)

3. अंतिम अनुमान $\vee$Intro है। इसके दो रूप हैं: $\varphi \vee \psi$ को पूर्वाधार φ या पूर्वाधार ψ से निष्कर्षित किया जा सकता है। पहले प्रकरण पर विचार करें। व्युत्पत्ति का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro}$$

   आगमन-परिकल्पना से φ, अमुक्त मान्यताओं Γ से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$। मानें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$; तब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, क्योंकि $\Gamma \vDash \varphi$ (आगमन-परिकल्पना)। अतः $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$ भी होना चाहिए। (जिस प्रकरण में $\varphi \vee \psi$ को ψ से निष्कर्षित किया जाता है, वह इसी प्रकार सँभलता है।)

4. अंतिम अनुमान $\rightarrow$Intro है। $\varphi \rightarrow \psi$ को मान्यता φ और निष्कर्ष ψ वाले उपप्रमाण से निष्कर्षित किया जाता है, अर्थात्

$$
{}^{n}\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots\,\delta_1 \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to\text{Intro}
$$

आगमन-परिकल्पना से ψ, δ_1 की अमुक्त मान्यताओं से तार्किकतः निष्पन्न होता है, अर्थात् $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। δ की अमुक्त मान्यताएँ केवल Γ हैं, क्योंकि अंतिम अनुमान पर φ मुक्त कर दिया गया है। अतः हमें दिखाना है कि $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$। विरोधाभासार्थ मानें कि किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, पर $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \to \psi$। तब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M} \nvDash \psi$। किन्तु परिकल्पना से ψ, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ का तार्किक परिणाम है, अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash \psi$, जो विरोधाभास है। अतः $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

5. अंतिम अनुमान $\bot_I$है। यहाँ δ का अंत इस प्रकार होता है:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_I
$$

आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \bot$। हमें दिखाना है कि $\Gamma \vDash \varphi$। मानें कि ऐसा नहीं है; तब किसी $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ और $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$। पर हमारे पास सदैव $\mathfrak{M} \nvDash \bot$ है, इसलिए इसका अर्थ $\Gamma \nvDash \bot$ होगा, जो आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है।

6. अंतिम अनुमान $\bot_C$है: अभ्यास।

7. अंतिम अनुमान $\forall$Intro है। तब δ का रूप है

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \varphi(a)\end{array}}{\forall x\, \varphi(x)}\ \forall\text{Intro}
$$

आगमन-परिकल्पना से पूर्वाधार $\varphi(a)$, अमुक्त मान्यताओं Γ का तार्किक परिणाम है। ऐसी किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। हमें दिखाना है कि $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$। चूँकि $\forall x\, \varphi(x)$ वाक्य है, इसका अर्थ है कि हमें प्रत्येक चर-नियतन s के लिए $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ दिखाना है (प्रतिज्ञप्ति 16.19)। चूँकि Γ में केवल वाक्य हैं, $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ हर $\psi \in \Gamma$ के लिए, परिभाषा 16.11 के अनुसार। $\mathfrak{M}'$ को $\mathfrak{M}$ जैसा ही मानें, सिवाय इसके कि $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$। चूँकि a, Γ में नहीं आता, उपप्रमेय 16.21 से $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma$। चूँकि $\Gamma \vDash \varphi(a)$, इसलिए $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$। चूँकि $\varphi(a)$ वाक्य है, प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(a)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$ (याद रखें कि $\varphi(a)$ केवल $\varphi(x)[a/x]$ है)। अतः $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$। चूँकि a, $\varphi(x)$ में नहीं आता, प्रतिज्ञप्ति 16.20 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। पर s एक स्वेच्छ चर-नियतन था, अतः $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$।

8. अंतिम अनुमान $\exists$Intro है: अभ्यास।

9. अंतिम अनुमान $\forall$Elim है: अभ्यास।

अब अनेक पूर्वाधारों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें: $\vee$Elim, $\wedge$Intro, $\to$Elim, और $\exists$Elim।

1. अंतिम अनुमान $\wedge$Intro है। $\varphi \wedge \psi$ को पूर्वाधारों φ और ψ से निष्कर्षित किया जाता है और δ का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

आगमन-परिकल्पना से φ, अमुक्त मान्यताओं Γ_1 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। इसी प्रकार ψ, अमुक्त मान्यताओं Γ_2 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_2 की मान्यताएँ हैं। δ की अमुक्त मान्यताएँ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ हैं, इसलिए हमें दिखाना है कि $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \varphi \wedge \psi$। ऐसी किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें जिसके लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ होना चाहिए, क्योंकि $\Gamma_1 \vDash \varphi$; और चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_2$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \psi$, क्योंकि $\Gamma_2 \vDash \psi$। दोनों को मिलाकर, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$।

2. अंतिम अनुमान $\vee$Elim है: अभ्यास।

3. अंतिम अनुमान $\rightarrow$Elim है। ψ को पूर्वाधारों $\varphi \rightarrow \psi$ और φ से निष्कर्षित किया जाता है। व्युत्पत्ति δ इस प्रकार है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\,\delta_1\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\,\delta_2\\ \varphi\end{array}}{\psi}\ \rightarrow\text{Elim}$$

आगमन-परिकल्पना से $\varphi \rightarrow \psi$, अमुक्त मान्यताओं Γ_1 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_1 की मान्यताएँ हैं। इसी प्रकार φ, अमुक्त मान्यताओं Γ_2 से तार्किकतः निष्पन्न होता है; ये δ_2 की मान्यताएँ हैं। किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। हमें दिखाना है कि यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, तो $\mathfrak{M} \vDash \psi$। मानें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। चूँकि $\Gamma_1 \vDash \varphi \rightarrow \psi$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi \rightarrow \psi$। चूँकि $\Gamma_2 \vDash \varphi$, हमारे पास $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ है। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M} \vDash \psi$ (क्योंकि यदि $\mathfrak{M} \nvDash \psi$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ होने से $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \rightarrow \psi$ होता, जो $\mathfrak{M} \vDash \varphi \rightarrow \psi$ के विरुद्ध है)।

4. अंतिम अनुमान $\neg$Elim है: अभ्यास।

5. अंतिम अनुमान $\exists$Elim है: अभ्यास। $\square$

उपप्रमेय 20.28. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ वैध है।*

उपप्रमेय 20.29. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब $\Gamma \vdash \bot$, अर्थात् $\bot$ की ऐसी कोई व्युत्पत्ति है जिसकी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं। प्रमेय 20.27 से ऐसी प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ जो Γ को संतुष्ट करती है, उसे $\bot$ को भी संतुष्ट करना होगा। चूँकि $\mathfrak{M} \nvDash \bot$ प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए सत्य है, इसलिए कोई $\mathfrak{M}$, Γ को संतुष्ट नहीं कर सकती; अर्थात् Γ संतुष्टनीय नहीं है। $\square$

20.12 व्युत्पत्तियाँ: तादात्म्य सहित

व्युत्पत्तियाँ, जिनमें तादात्म्य हो, अतिरिक्त अनुमान-नियम मांगती हैं।

$$\frac{}{t = t}\ {=}\text{Intro} \qquad \frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}\ {=}\text{Elim} \qquad \frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}\ {=}\text{Elim}$$

उपर्युक्त नियमों में t, t_1, और t_2 बंद पद हैं। $=$Intro नियम $t = t$ रूप के किसी भी तादात्म्य-कथन को बिना किसी मान्यता के सीधे व्युत्पन्न करने देता है।

उदाहरण 20.30. यदि s और t बंद पद हैं, तो $\varphi(s), s = t \vdash \varphi(t)$:

$$\frac{s = t \qquad \varphi(s)}{\varphi(t)}\ {=}\text{Elim}$$

इसे "अभिन्न वस्तुओं की प्रतिस्थापनीयता का सिद्धांत" अथवा "लाइबनित्स का नियम" भी कहते हैं।

उदाहरण 20.31. व्युत्पन्न किया जाने वाला वाक्य है

$$\forall x\, \forall y\, ((\varphi(x) \land \varphi(y)) \to x = y)$$

और जिस वाक्य से इसे व्युत्पन्न करते हैं, वह है:

$$\exists x\, \forall y\, (\varphi(y) \to y = x)$$

हम व्युत्पत्ति को पीछे की ओर निर्मित करते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, \forall y\, (\varphi(y) \to y = x) \quad [\varphi(a) \land \varphi(b)]^1 \\ \vdots \\ a = b\end{array}}{((\varphi(a) \land \varphi(b)) \to a = b)}\ {\to}\text{Intro}\ 1}{\forall y\, ((\varphi(a) \land \varphi(y)) \to a = y)}\ \forall\text{Intro}}{\forall x\, \forall y\, ((\varphi(x) \land \varphi(y)) \to x = y)}\ \forall\text{Intro}$$

अब मुख्य मान्यता का उपयोग करना होगा: वह एक अस्तित्वपरक सूत्र है, इसलिए मध्यवर्ती निष्कर्ष $a = b$ को व्युत्पन्न करने के लिए हम $\exists$Elim का उपयोग करते हैं।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\, \forall y\, (\varphi(y) \to y = x) \qquad \begin{array}{c}[\forall y\, (\varphi(y) \to y = c)]^2 \\ [\varphi(a) \land \varphi(b)]^1 \\ \vdots \\ a = b\end{array}}{a = b}\ \exists\text{Elim}\ 2}{((\varphi(a) \land \varphi(b)) \to a = b)}\ {\to}\text{Intro}\ 1}{\forall y\, ((\varphi(a) \land \varphi(y)) \to a = y)}\ \forall\text{Intro}}{\forall x\, \forall y\, ((\varphi(x) \land \varphi(y)) \to x = y)}\ \forall\text{Intro}$$

ऊपर दाईं ओर की उप-व्युत्पत्ति अपनी मान्यताओं से $a = c$ और $b = c$ दिखाकर पूरी होती है। इसके लिए दो अलग-अलग व्युत्पत्तियाँ चाहिए। $a = c$ की व्युत्पत्ति इस प्रकार है:

$$\dfrac{\dfrac{[\forall y\,(\varphi(y) \to y = c)]^2}{\varphi(a) \to a = c}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \land \varphi(b)]^1}{\varphi(a)}\,\land\text{Elim}}{a = c}\,\to\text{Elim}$$

$a = c$ और $b = c$ से हम $=$Elim द्वारा $a = b$ व्युत्पन्न करते हैं।

20.13 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता

प्रतिज्ञप्ति 20.32. *$=$ के नियमों वाला स्वाभाविक निगमन सुदृढ़ है।*

प्रमाण. $t = t$ रूप का प्रत्येक सूत्र वैध है, क्योंकि हर संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash t = t$। (ध्यान दें कि पद t को हम बंद मानते हैं; अर्थात् उसमें कोई चर नहीं है, इसलिए चर-नियतन अप्रासंगिक हैं।)

मान लें कि व्युत्पत्ति में अंतिम अनुमान $=$Elim है; अर्थात् व्युत्पत्ति का रूप निम्नलिखित है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots\,\delta_1\\ t_1 = t_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots\,\delta_2\\ \varphi(t_1)\end{array}}{\varphi(t_2)}\,=\text{Elim}$$

पूर्वाधार $t_1 = t_2$ और $\varphi(t_1)$ क्रमशः Γ_1 और Γ_2 से व्युत्पन्न होते हैं; ये मान्यताएँ अमुक्त हैं। हमें दिखाना है कि $\varphi(t_2)$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ से तार्किकतः निष्पन्न होता है। ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$ और $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ दोनों सत्य हैं। अतः $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$। s को कोई भी चर-नियतन मानें और $m = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 के अनुसार, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$; और यह तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$। □

प्रश्न

प्रश्न 20.1. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\varphi \land (\psi \land \chi) \vdash (\varphi \land \psi) \land \chi$.
2. $\varphi \lor (\psi \lor \chi) \vdash (\varphi \lor \psi) \lor \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

प्रश्न 20.2. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $(\varphi \lor \psi) \to \chi \vdash \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \lor \psi) \to \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \land \neg\varphi)$.

4. $\psi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\varphi \to \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 20.3. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \vdash (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi$.
8. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

(इन सभी के लिए $\perp_C$ नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 20.4. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\vdash (\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall y\, \psi(y)) \to \forall z\, (\varphi(z) \wedge \psi(z))$.
2. $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \vee \exists y\, \psi(y)) \to \exists z\, (\varphi(z) \vee \psi(z))$.
3. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \vdash \exists y\, \varphi(y) \to \psi$.
4. $\forall x\, \neg\varphi(x) \vdash \neg\exists x\, \varphi(x)$.
5. $\vdash \neg\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \neg\varphi(x)$.
6. $\vdash \neg\exists x\, \forall y\, ((\varphi(x,y) \to \neg\varphi(y,y)) \wedge (\neg\varphi(y,y) \to \varphi(x,y)))$.

प्रश्न 20.5. निम्नलिखित को दिखाने वाली व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $\vdash \neg\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \neg\varphi(x)$.

2. $(\forall x\, \varphi(x) \to \psi) \vdash \exists y\, (\varphi(y) \to \psi)$.

3. $\vdash \exists x\, (\varphi(x) \to \forall y\, \varphi(y))$.

(इन सभी के लिए $\bot_C$ नियम आवश्यक है।)

प्रश्न 20.6. प्रतिज्ञप्ति 20.16 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 20.7. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 20.8. प्रमेय 20.27 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 20.9. सिद्ध कीजिए कि $=$ सममित और संक्रामी दोनों है; अर्थात् $\forall x\, \forall y\, (x = y \to y = x)$ और $\forall x\, \forall y\, \forall z((x = y \land y = z) \to x = z)$ की व्युत्पत्तियाँ दीजिए।

प्रश्न 20.10. ऐसी व्युत्पत्तियाँ दीजिए कि इनमें से प्रत्येक का निष्कर्ष निम्नलिखित सूत्रों में से एक हो:

1. $\forall x\, \forall y\, ((x = y \land \varphi(x)) \to \varphi(y))$

2. $\exists x\, \varphi(x) \land \forall y\, \forall z\, ((\varphi(y) \land \varphi(z)) \to y = z) \to \exists x\, (\varphi(x) \land \forall y\, (\varphi(y) \to y = x))$

अध्याय 21

सत्य-वृक्ष

यह अध्याय चिह्नित विश्लेषणात्मक सत्य-वृक्ष तंत्र प्रस्तुत करता है।
प्रमाण-तंत्र के रूप में सत्य-वृक्ष से संबद्ध सामग्री को शामिल या बहिष्कृत करने के लिए "prfTab" टैग का उपयोग करें।

21.1 नियम और सत्य-वृक्ष

सत्य-वृक्ष इस बात का क्रमबद्ध सर्वेक्षण है कि वाक्य किसी संरचना में किन संभावित तरीकों से सत्य या असत्य हो सकता है। यह चिह्नित सूत्रों से निर्मित होता है: वाक्यों के साथ सत्य-मूल्य का एक "चिह्न", जो या तो $\mathbb{T}$ होता है या $\mathbb{F}$। इन चिह्नित सूत्रों को एक (नीचे की ओर बढ़ने वाले) वृक्ष में व्यवस्थित किया जाता है।

परिभाषा 21.1. *चिह्नित सूत्र* सत्य-मूल्य और वाक्य से बना युग्म है, अर्थात् इन दोनों रूपों में से कोई एक:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ अथवा } \mathbb{F}\,\varphi.$$

सहज रूप से, हम $\mathbb{T}\,\varphi$ को "φ सत्य हो सकता है" और $\mathbb{F}\,\varphi$ को "φ असत्य हो सकता है" (किसी संरचना में) पढ़ सकते हैं।

वृक्ष का प्रत्येक चिह्नित सूत्र या तो *मान्यता* है (मान्यताएँ वृक्ष के बिल्कुल ऊपर लिखी जाती हैं), या वह अपने ऊपर के किसी चिह्नित सूत्र से किसी अनुमान-नियम द्वारा प्राप्त होता है। प्रधान संक्रियक का प्रत्येक संभावित रूप—अर्थात् पूर्ववर्ती सूत्र का प्रधान संक्रियक—दो नियमों से संबद्ध है: एक उस दशा के लिए जिसमें चिह्न $\mathbb{T}$ है, और दूसरा उस दशा के लिए जिसमें चिह्न $\mathbb{F}$ है। कुछ नियम वृक्ष में शाखाएँ बनाने देते हैं, और कुछ केवल शाखा में चिह्नित सूत्रों को जोड़ते हैं। कोई नियम ठीक पहले आए चिह्नित सूत्र पर ही नहीं, बल्कि मूल से लेकर नियम लगाए जाने के स्थान तक की शाखा में स्थित किसी भी चिह्नित सूत्र पर लगाया जा सकता है (और प्रायः लगाना ही पड़ता है)।

कोई शाखा तब *बंद* होती है जब उसमें $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों। वह सत्य-वृक्ष बंद है जिसकी प्रत्येक शाखा बंद है। सहज व्याख्या में हर शाखा एक संयुक्त संभावना बताती है, किन्तु $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ का एक साथ संभव होना असंभव है। दूसरे शब्दों में, किसी शाखा के बंद होने पर उसके द्वारा बताई गई संभावना निरस्त हो जाती है। विशेषतः इसका अर्थ है कि बंद सत्य-वृक्ष, $\mathbb{T}\,\varphi$ रूप की प्रत्येक मान्यता को सत्य और $\mathbb{F}\,\varphi$ रूप की प्रत्येक मान्यता को असत्य बनाने की सभी संयुक्त संभावनाएँ निरस्त कर देता है।

φ के लिए बंद सत्य-वृक्ष ऐसा बंद सत्य-वृक्ष है जिसका मूल $\mathbb{F}\,\varphi$ हो। यदि ऐसा बंद सत्य-वृक्ष अस्तित्व में है, तो φ के असत्य होने की सभी संभावनाएँ निरस्त हो चुकी हैं; अर्थात् φ प्रत्येक संरचना में सत्य होना चाहिए।

21.2 प्रतिज्ञप्ति-नियम

$\neg$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi}\,\neg\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\mathbb{T}\,\varphi}\,\neg\mathbb{F}$$

$\wedge$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{T}\,\psi\end{array}}\,\wedge\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\wedge\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\psi}\,\wedge\mathbb{F}$$

$\vee$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\vee\psi}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\vee\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\vee\mathbb{F}$$

$\rightarrow$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\rightarrow\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\rightarrow\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\rightarrow\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\rightarrow\mathbb{F}$$

कट-नियम

$$\frac{}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\varphi}\,\text{Cut}$$

Cut-नियम किसी पूर्ववर्ती चिह्नित सूत्र “पर” लागू नहीं होता; बल्कि वह सत्य-वृक्ष की हर शाखा को दो भागों में विभाजित करने देता है: एक शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ होता है और दूसरी में $\mathbb{F}\,\varphi$। यह नियम आवश्यक नहीं है—चिह्नित सूत्रों के जिस किसी समुच्चय का बंद सत्य-वृक्ष है, उसका Cut के बिना भी एक बंद सत्य-वृक्ष है—किन्तु इससे सत्य-वृक्ष का परस्पर संयोजन सुविधाजनक हो जाता है।

21.3 परिमाणक-नियम

$\forall$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(t)}\;\forall\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(a)}\;\forall\mathbb{F}$$

$\forall\mathbb{T}$ में t बंद पद है (अर्थात् ऐसा पद जिसमें कोई चर नहीं है)। $\forall\mathbb{F}$ में a ऐसा अचर है जो $\forall\mathbb{F}$ नियम के ऊपर की शाखा में कहीं भी न आए। a को $\forall\mathbb{F}$ अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।[1]

$\exists$ के नियम

$$\frac{\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(a)}\;\exists\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(t)}\;\exists\mathbb{F}$$

यहाँ भी t बंद पद है, और a ऐसा अचर है जो $\exists\mathbb{T}$ नियम के ऊपर की शाखा में नहीं आता। a को $\exists\mathbb{T}$ अनुमान का *अभिलाक्षणिक चर* कहते हैं।

$\forall\mathbb{F}$ या $\exists\mathbb{T}$ अनुमान के ऊपर की शाखा में अभिलाक्षणिक चर के न आने की शर्त को *अभिलाक्षणिक-चर शर्त* कहते हैं।

स्मरण करें: जब φ ऐसा सूत्र हो जिसमें चर x मुक्त है, तो इसे $\varphi(x)$ लिखकर दिखाते हैं। उसी संदर्भ में $\varphi(t)$, संक्षेप में $\varphi[t/x]$ है। अतः $\exists\mathbb{F}$ नियम को ऐसे भी लिख सकते हैं:

$$\frac{\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi[t/x]}\;\exists\mathbb{F}$$

ध्यान दें कि t, φ में पहले से आ सकता है; जैसे φ का रूप $P(t,x)$ हो सकता है। इसलिए $\mathbb{F}\,P(t,t)$ को $\mathbb{F}\,\exists x\,P(t,x)$ से निष्कर्षित करना $\exists\mathbb{F}$ का सही प्रयोग है। किन्तु $\forall\mathbb{F}$ और $\exists\mathbb{T}$ की अभिलाक्षणिक-चर शर्तें माँगती हैं कि अचर a, φ में न आए। अतः $\mathbb{F}\,P(a,a)$ को $\mathbb{F}\,\forall x\,P(a,x)$ से $\forall\mathbb{F}$ द्वारा सही ढंग से निष्कर्षित नहीं कर सकते।

$\forall\mathbb{T}$ और $\exists\mathbb{F}$ में पद t पर कोई प्रतिबंध नहीं है। दूसरी ओर, $\exists\mathbb{T}$ और $\forall\mathbb{F}$ नियमों में अभिलाक्षणिक-चर शर्त माँगती है कि अचर a संबंधित अनुमान के ऊपर वाली किसी शाखा में कहीं भी न आए। तंत्र की सुदृढ़ता सुनिश्चित करने के लिए यह आवश्यक है। इस शर्त के बिना, $\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$ के लिए निम्नलिखित बंद सत्य-वृक्ष होता:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi(a)$	$\forall\mathbb{F}\,3$
	$\otimes$	

परंतु $\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$ वैध नहीं है।

[1] ऊपर के नियम में a अचर है, फिर भी ऐतिहासिक कारणों से "अभिलाक्षणिक चर" शब्द प्रयुक्त होता है।

21.4 सत्य-वृक्ष

हम बता चुके हैं कि मान्यता क्या होती है और अनुमान-नियम दे चुके हैं। इन्हीं से सत्य-वृक्ष आगमनात्मक रूप से बनते हैं: प्रत्येक सत्य-वृक्ष या तो एक अथवा अधिक मान्यताओं से बनी अकेली शाखा होता है, या फिर किसी शाखा पर अनुमान-नियमों में से एक लगाने पर किसी सत्य-वृक्ष से प्राप्त होता है।

परिभाषा 21.2 (सत्य-वृक्ष). मान्यताओं $S_1\varphi_1$, ..., $S_n\varphi_n$ (जहाँ प्रत्येक S_i या तो $\mathbb{T}$ है या $\mathbb{F}$) के लिए सत्य-वृक्ष, चिह्नित सूत्रों का ऐसा परिमित वृक्ष है जो निम्न शर्तें पूरी करता है:

1. वृक्ष के सबसे ऊपर के n चिह्नित सूत्रों $S_i\varphi_i$ हैं, एक के नीचे दूसरा।
2. वृक्ष का प्रत्येक ऐसा चिह्नित सूत्र जो मान्यताओं में से नहीं है, अपने ऊपर की शाखा के किसी चिह्नित सूत्र पर अनुमान-नियम के सही प्रयोग से प्राप्त होता है।

सत्य-वृक्ष की शाखा *बंद* है तभी और केवल तभी जब उसमें $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों; अन्यथा वह *खुली* है। ऐसा सत्य-वृक्ष जिसकी प्रत्येक शाखा बंद है, अपनी मान्यताओं के समुच्चय के लिए *बंद सत्य-वृक्ष* है। यदि कोई सत्य-वृक्ष बंद नहीं है, अर्थात् उसमें कम-से-कम एक खुली शाखा है, तो वह *खुला* है।

उदाहरण 21.3. मान्यताओं का प्रत्येक समुच्चय अपने-आप में सत्य-वृक्ष है, पर सामान्यतः वह बंद नहीं होगा। (स्पष्टतः वह तभी बंद है जब मान्यताओं में पहले से चिह्नित सूत्रों का कोई युग्म $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ हो।)

किसी सत्य-वृक्ष (खुले या बंद) में उपस्थित किसी चिह्नित सूत्र φ पर अनुमान-नियमों में से एक लगाकर हम उससे नया, बड़ा सत्य-वृक्ष प्राप्त कर सकते हैं। नियम φ की उस उपस्थिति वाली हर शाखा के अंत में एक या अधिक चिह्नित सूत्रों जोड़ देगा जिस पर हमने नियम लगाया है।

उदाहरणार्थ, मान्यता $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$ पर विचार करें। केवल इस मान्यता से बना (खुला) सत्य-वृक्ष यह है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता

मान्यता पर $\wedge\mathbb{T}$ नियम लगाकर इससे नया सत्य-वृक्ष मिलता है। यह नियम हमें सत्य-वृक्ष में दो नई पंक्तियाँ, $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{T}\,\neg\varphi$, जोड़ने देता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$

सत्य-वृक्ष लिखते समय हम लगाए गए नियम दाईं ओर दर्ज करते हैं (जैसे, $\wedge\mathbb{T}1$ का अर्थ है कि उस पंक्ति का चिह्नित सूत्र, $\wedge\mathbb{T}$ नियम को पंक्ति 1 के चिह्नित सूत्र पर लगाने से प्राप्त हुआ है)। इस नए सत्य-वृक्ष में अब अतिरिक्त चिह्नित सूत्रों हैं, किंतु नियम केवल एक पर लगाया जा सकता है ($\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर; यहाँ $\neg\mathbb{T}$ नियम)। इससे निम्न बंद सत्य-वृक्ष मिलता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,3$
	$\otimes$	

21.5 सत्य-वृक्ष के उदाहरण

उदाहरण 21.4. आइए बंद सत्य-वृक्ष खोजें, जो वाक्य $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ के लिए हो।

हम सत्य-वृक्ष के शीर्ष पर संगत मान्यता लिखकर आरंभ करते हैं।

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	मान्यता

केवल एक मान्यता है, इसलिए ऐसा चिह्नित सूत्र भी केवल एक है जिस पर नियम लगाया जा सकता है। (प्रत्येक चिह्नित सूत्र पर अधिकतम एक ही नियम लगाया जा सकता है: वह संगत चिह्न और प्रधान संक्रियक का नियम होता है, जो उस वाक्य का है।) इस प्रसंग में इसका अर्थ है कि हमें $\to\mathbb{F}$ लगाना होगा।

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$

किन चिह्नित सूत्रों पर उनके संगत नियम लगाए जा चुके हैं, इसका लेखा रखने के लिए हम वाक्य के पास जाँच-चिह्न लगाते हैं। किंतु जाँच-चिह्न *केवल* तभी लगाएँ जब नियम सभी खुली शाखाओं पर लगाया जा चुका हो। किसी चिह्नित सूत्र पर प्रत्येक खुली शाखा में संगत नियम लग जाने के बाद हमें उस पर लौटकर नियम फिर नहीं लगाना पड़ेगा। यहाँ केवल एक शाखा है, इसलिए नियम केवल एक बार लगाना है। (ध्यान दें कि जाँच-चिह्न सत्य-वृक्ष बनाने की सुविधा मात्र हैं; वे सत्य-वृक्ष के औपचारिक वाक्यविन्यास का भाग नहीं हैं।)

अब ऐसा एक नया चिह्नित सूत्र है जिस पर नियम लगाया जा सकता है: $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$, जो पंक्ति 2 पर है। $\wedge\mathbb{T}$ नियम लगाने पर मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

अब शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ (पंक्ति 4 पर) और $\mathbb{F}\,\varphi$ (पंक्ति 3 पर) दोनों हैं, इसलिए शाखा बंद है। चूँकि यही अकेली शाखा है, सत्य-वृक्ष बंद है। इस प्रकार हमें $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष मिल गया।

उदाहरण 21.5. अब $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष खोजें।

हम संगत मान्यता से आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$	मान्यता

अकेले चिह्नित सूत्र, जो इस सत्य-वृक्ष में है, का प्रधान संक्रियक $\to$ और चिह्न $\mathbb{F}$ है, इसलिए उस पर $\to\mathbb{F}$ नियम लगाने से मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$

अब हमारे पास विकल्प है: $\vee\mathbb{T}$ को पंक्ति 2 पर लगाएँ या $\to\mathbb{F}$ को पंक्ति 3 पर। क्रम वास्तव में महत्त्वपूर्ण नहीं है, बशर्ते प्रत्येक चिह्नित सूत्र पर हर शाखा में उसका संगत नियम लगाया जाए। पहले विकल्प को चुनते हैं। $\vee\mathbb{T}$ नियम सत्य-वृक्ष में शाखाएँ बनने देता है और नियम के दो निष्कर्ष दो नई शाखाओं में जोड़े गए नए चिह्नित सूत्रों होंगे। इससे मिलता है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$

हमने $\to\mathbb{F}$ नियम पंक्ति 3 पर अभी नहीं लगाया है; अब ऐसा करते हैं। समय बचाने के लिए उसे दोनों शाखाओं पर लगाते हैं। स्मरण रहे कि चिह्नित सूत्र के पास जाँच-चिह्न तभी लिखते हैं जब उसका संगत नियम प्रत्येक खुली शाखा में लगाया जा चुका हो। इसलिए नियम को उन सभी शाखाओं के अंत में लगाना अच्छा है जिनमें वह चिह्नित सूत्र है जिस पर नियम लागू होता है। तब अलग-अलग शाखाओं में नीचे जाकर हमें उस चिह्नित सूत्र पर लौटना नहीं पड़ेगा।

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$ | $\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
	| $\otimes$	

दाईं शाखा अब बंद है। बाईं शाखा पर हम अभी $\neg\mathbb{T}$ नियम पंक्ति 4 पर लगा सकते हैं। इससे $\mathbb{F}\,\varphi$ मिलता है और बाईं शाखा बंद हो जाती है:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$ | $\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
7.	$\mathbb{F}\,\varphi$ | $\otimes$	$\neg\mathbb{T}\,4$
	$\otimes$	

उदाहरण 21.6. हम कितने ही सत्य-वृक्ष दे सकते हैं, जिनमें मान्यताओं के रूप में कितने ही चिह्नित सूत्रों हों। प्रायः शाखाएँ बनाने वाले एक से अधिक नियम लगाना भी आवश्यक होता है; सामान्यतः किसी सत्य-वृक्ष में कितनी भी शाखाएँ हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, निम्न के लिए सत्य-वृक्ष पर विचार करें: $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\}$। हम पहली मान्यता पर $\vee\mathbb{T}$ लगाकर आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$	$\vee\mathbb{T}\,1$

अब $\wedge\mathbb{F}$ नियम पंक्ति 2 पर लगाया जा सकता है। हम इसे दोनों शाखाओं पर एक साथ लगाते हैं, इसलिए पंक्ति 2 पर जाँच-चिह्न लगा सकते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\wedge\mathbb{F}\,2$

अब $\vee\mathbb{F}$ को $\varphi \vee \psi$ वाली सभी शाखाओं पर लगा सकते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$		$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$		$\mathbb{F}\,\psi$		$\vee\mathbb{F}\,4$
	$\otimes$				

सबसे बाईं शाखा अब बंद है। अब $\vee\mathbb{F}$ को $\varphi \vee \chi$ पर लगाएँ:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	|	$\mathbb{F}\,\varphi$	|	$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$	|	$\mathbb{F}\,\psi$	|	$\vee\mathbb{F}\,4$
7.	$\otimes$	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
8.		$\mathbb{F}\,\chi$		$\mathbb{F}\,\chi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
		$\otimes$			

ध्यान दें कि स्पष्टता के लिए हमने $\vee\mathbb{F}$ के दूसरे प्रयोग का परिणाम नीचे खिसकाया है। इस प्रसंग में इसकी आवश्यकता नहीं थी, क्योंकि औचित्य एक ही होते।

दो शाखाएँ अब भी खुली हैं और $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$, जो पंक्ति 3 पर है, अभी जाँचा नहीं गया है। उस पर $\wedge\mathbb{T}$ लगाकर बंद सत्य-वृक्ष मिलता है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$	$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
7.	$\otimes$	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
8.			$\mathbb{T}\,\chi$	$\mathbb{T}\,\chi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
			$\otimes$	$\otimes$	

तुलना के लिए, मान्यताओं के इसी समुच्चय का एक बंद सत्य-वृक्ष यहाँ है जिसमें नियम अलग क्रम में लगाए गए हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓		$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓		$\wedge\mathbb{F}\,2$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$		$\mathbb{F}\,\varphi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$\mathbb{F}\,\psi$		$\mathbb{F}\,\chi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓	$\vee\mathbb{T}\,1$
7.	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,6$
8.		$\mathbb{T}\,\chi$		$\mathbb{T}\,\chi$	$\wedge\mathbb{T}\,6$
		$\otimes$		$\otimes$	

21.6 परिमाणकों सहित सत्य-वृक्ष

उदाहरण 21.7. परिमाणकों के साथ काम करते समय हमें सुनिश्चित करना होता है कि अभिलाक्षणिक-चर शर्त का उल्लंघन न हो; कभी-कभी इसके लिए कुछ अनुमानों को लगाने का क्रम बदलना पड़ता है। सामान्यतः अभिलाक्षणिक-चर शर्त वाले नियमों को पहले लगाना उपयोगी है (पूरा सत्य-वृक्ष बनने पर वे ऊपर की ओर होंगे)।

देखें कि सत्य-वृक्ष कैसे दिया जाएगा, जो वाक्य $\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$ के लिए हो। हमेशा की तरह मान्यता दर्ज करके आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$	मान्यता

चूँकि प्रधान संक्रियक $\to$ है, इसलिए $\to\mathbb{F}$ लगाते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\, \neg\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\, \varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$

अब पंक्ति 2 पर काम करना है। हम $\exists\mathbb{T}$ का प्रयोग करते हैं। इसके लिए नया अचर चाहिए; चूँकि अभी कोई अचर नहीं आया है, हम कोई भी चुन सकते हैं, मान लें a।

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$

अब $\neg\mathbb{F}$ को पंक्ति 3 पर लगाते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\neg\mathbb{F}\,3$

$\neg\mathbb{T}$ को पंक्ति 4 पर और फिर $\forall\mathbb{T}$ को पंक्ति 5 पर लगाने से बंद सत्य-वृक्ष मिलता है।

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\neg\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\varphi(a)$	$\neg\mathbb{T}\,4$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\forall\mathbb{T}\,5$
	$\otimes$	

उदाहरण 21.8. देखें कि निम्न समुच्चय के लिए सत्य-वृक्ष कैसे दिया जाएगा:

$$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b), \mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x)), \mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b)).$$

हमेशा की तरह मान्यताओं से आरंभ करते हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	मान्यता

अभिलाक्षणिक-चर शर्त वाला नियम हमें सदा पहले लगाना चाहिए; यहाँ इसका अर्थ है कि $\exists\mathbb{T}$ को पंक्ति 2 पर लगाया जाए। चूँकि मान्यताओं में अचर b है, हमें कोई दूसरा चुनना होगा; फिर से a चुनते हैं।

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$

यदि अब $\exists\mathbb{F}$ को पंक्ति 1 पर या $\forall\mathbb{T}$ को पंक्ति 3 पर लगाएँ, तो तय करना होगा कि कौन-सा पद t चुनें जिसे x के स्थान पर रखें। इन नियमों के लिए अभिलाक्षणिक-चर शर्त नहीं है, इसलिए मनचाहा पद चुन सकते हैं। कुछ प्रसंगों में अलग-अलग t लेकर नियम कई बार भी लगाना पड़ सकता है। किंतु सामान्य नियम के रूप में, सत्य-वृक्ष में पहले से आने वाले पदों में से कोई चुनना लाभकारी है—यहाँ a और b—और यहाँ अनुमान लगाया जा सकता है कि a से बंद शाखा मिलने की संभावना अधिक है।

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$	$\forall\mathbb{T}\,3$

हम पंक्ति 1 और 3 के चिह्नित सूत्रों पर जाँच-चिह्न नहीं लगाते, क्योंकि उनका फिर प्रयोग करना पड़ सकता है। अब $\wedge\mathbb{T}$ को पंक्ति 4 पर लगाएँ:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$ ✓	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$	$\forall\mathbb{T}\,3$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
8.	$\mathbb{T}\,\psi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$

अब $\to\mathbb{T}$ को पंक्ति 6 पर लगाने से सत्य-वृक्ष बंद हो जाता है:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$ ✓	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$ ✓	$\forall\mathbb{T}\,3$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
8.	$\mathbb{T}\,\psi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
9.	$\mathbb{F}\,\psi(a)$ $\otimes$ $\mathbb{T}\,\chi(a,b)$ $\otimes$	$\to\mathbb{T}\,6$

उदाहरण 21.9. हम निम्न समुच्चय के लिए सत्य-वृक्ष बनाते हैं:

$$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x),\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)\to\exists y\,\psi(y),\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y).$$

हमेशा की तरह मान्यताएँ लिखते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)\to\exists y\,\psi(y)$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y)$	मान्यता

हम $\neg\mathbb{T}$ नियम पंक्ति 3 पर लगाकर आरंभ करते हैं। "सदा अभिलाक्षणिक-चर शर्त वाले नियम पहले लगाएँ" का एक उपपरिणाम यह है कि "अभिलाक्षणिक-चर शर्त से रहित परिमाणक-नियमों को आवश्यकता होने तक स्थगित रखें।" शाखा-विभाजन उत्पन्न करने वाले नियम भी स्थगित रखें।

1.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓	मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\exists y\,\psi(y)$	$\neg\mathbb{T}\,3$

नई पंक्ति 4 के लिए $\exists\mathbb{F}$ चाहिए, जो अभिलाक्षणिक-चर शर्त से रहित परिमाणक-नियम है। इसलिए उसे स्थगित रखकर $\to\mathbb{T}$ को पंक्ति 2 पर लगाते हैं।

1.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\exists y\,\psi(y)$		$\neg\mathbb{T}\,3$
5.	$\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\mathbb{T}\,\exists y\,\psi(y)$	$\to\mathbb{T}\,2$

दोनों नए चिह्नित सूत्रों पर अभिलाक्षणिक-चर शर्त वाले नियम लगने हैं, इसलिए अगला चरण यही होना चाहिए:

1.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\exists y\,\psi(y)$		$\neg\mathbb{T}\,3$
5.	$\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\mathbb{T}\,\exists y\,\psi(y)$ ✓	$\to\mathbb{T}\,2$
6.	$\mathbb{F}\,\varphi(b)$	$\mathbb{T}\,\psi(c)$	$\forall\mathbb{F}\,5$; $\exists\mathbb{T}\,5$

शाखाएँ बंद करने के लिए पंक्ति 1 और 3 के चिह्नित सूत्रों का प्रयोग करना होगा। संगत नियमों ($\forall\mathbb{T}$ और $\exists\mathbb{F}$) पर अभिलाक्षणिक-चर शर्त नहीं है, इसलिए उपयुक्त पद स्वतंत्रतापूर्वक चुन सकते हैं। यहाँ वे क्रमशः b और c हैं।

1.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\exists y\,\psi(y)$		$\neg\mathbb{T}\,3$
5.	$\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\mathbb{T}\,\exists y\,\psi(y)$ ✓	$\to\mathbb{T}\,2$
6.	$\mathbb{F}\,\varphi(b)$	$\mathbb{T}\,\psi(c)$	$\forall\mathbb{F}\,5$; $\exists\mathbb{T}\,5$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(b)$	$\mathbb{F}\,\psi(c)$	$\forall\mathbb{T}\,1$; $\exists\mathbb{F}\,4$
	$\otimes$	$\otimes$	

21.7 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

यह अनुभाग सत्य-वृक्षों के लिए सिद्धता-संबंध और संगतता की परिभाषाएँ एकत्र करता है।

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में यह सहारा नहीं लिया जाता कि वाक्यों को कौन-सी संरचनाएँ संतुष्ट करती हैं, बल्कि कुछ बंद सत्य-वृक्षों के अस्तित्व का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 21.10 (प्रमेय). वाक्य φ *प्रमेय* है यदि $\mathbb{F}\,\varphi$ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो। यदि ऐसा हो तो $\vdash \varphi$ लिखते हैं; यदि φ प्रमेय नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 21.11 (व्युत्पन्नता). वाक्य φ किसी समुच्चय से *व्युत्पन्न* है; यदि वह वाक्यों का समुच्चय Γ हो, तो इसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं। यह तभी और केवल तभी है जब कोई परिमित समुच्चय $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ हो और निम्न समुच्चय के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है तो $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 21.12 (संगतता). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है तभी और केवल तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ हो और निम्न समुच्चय के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

यदि Γ असंगत नहीं है, तो उसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 21.13 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\{\varphi\}$, Γ का परिमित उपसमुच्चय है और निम्न सत्य-वृक्ष बंद है:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 21.14 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है। □

प्रतिज्ञप्ति 21.15 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Delta_0 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq \Delta$ ऐसा है कि

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो θ_1, ..., $\theta_m \subseteq \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है।

अब निम्न मान्यताओं वाले सत्य-वृक्ष पर विचार करें:

$$\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m.$$

φ पर Cut नियम लगाएँ। इससे दो शाखाएँ बनती हैं: एक में $\mathbb{T}\,\varphi$ और दूसरी में $\mathbb{F}\,\varphi$ है। अतः पहली शाखा में निम्न सभी उपलब्ध हैं:

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

इन मान्यताओं के लिए बंद सत्य-वृक्ष होने के कारण हम उसे इस शाखा से जोड़ सकते हैं; $\mathbb{T}\,\varphi$ से होकर जाने वाली प्रत्येक शाखा बंद हो जाती है। दूसरी शाखा में निम्न सभी उपलब्ध हैं:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

अतः दूसरी ओर को भी पूरा करके बंद सत्य-वृक्ष पाया जा सकता है। इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 21.16. *Γ असंगत है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$ प्रत्येक वाक्य φ के लिए हो।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 21.17 (संहतता). *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ और निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

यही सत्य-वृक्ष, $\Gamma_0 \vdash \varphi$ भी दिखाता है।

2. यदि Γ असंगत है, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ के लिए निम्न बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

यह बंद सत्य-वृक्ष दिखाता है कि Γ_0 असंगत है। □

21.8 व्युत्पन्नता और संगतता

अब हम व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। ये अपने-आप में रोचक हैं, पर इनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 21.18. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. ऐसे परिमित $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ और $\Gamma_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq \Gamma$ हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$
$$\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_m\}$$

के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं। φ पर Cut नियम लगाकर इन्हें एक बंद सत्य-वृक्ष में जोड़ा जा सकता है, जो दिखाता है कि $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ असंगत है। चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; अतः Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 21.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$; अर्थात् निम्न के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

$\neg\mathbb{T}$ नियम का प्रयोग करके इसे निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष में बदला जा सकता है:

$$\{\mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

दूसरी ओर, यदि बाद वाले के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है, तो पहली मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ और उस पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने से प्राप्त हर सूत्र को हटाकर तथा मान्यता $\mathbb{F}\,\varphi$ जोड़कर हम उसे पहले वाले का बंद सत्य-वृक्ष बना सकते हैं। यदि कोई शाखा पहले इसलिए बंद थी कि उसमें $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने का निष्कर्ष, अर्थात् $\mathbb{F}\,\varphi$, था, तो नए सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद है। यदि पुराने सत्य-वृक्ष में कोई शाखा इसलिए बंद थी कि उसमें मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ के साथ $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ भी था, तो $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ पर लगाकर $\mathbb{T}\,\varphi$ प्राप्त करें। चूँकि हमने $\mathbb{F}\,\varphi$ को मान्यता के रूप में जोड़ा है, इससे शाखा बंद हो जाती है।□

प्रतिज्ञप्ति 21.20. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$। तब ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। मान्यता $\mathbb{F}\,\varphi$ को $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ से बदलें और मान्यताओं के बाद $\mathbb{F}\,\varphi$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाने का निष्कर्ष जोड़ें। प्रत्येक वाक्य, जो सत्य-वृक्ष में पुराने सत्य-वृक्ष की पंक्ति 1 के आधार पर उचित ठहराया गया था, अब पंक्ति $n+1$ के आधार पर उचित ठहरता है। अतः यदि पुराना सत्य-वृक्ष बंद था, तो नया भी बंद है। चूँकि सभी मान्यताएँ Γ में हैं, यह दिखाता है कि Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 21.21. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. यदि ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ और χ_1, ..., $\chi_m \in \Gamma$ ऐसे हैं कि

$$\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\} \text{ और}$$
$$\{\mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_m\}$$

दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हों, तो हम एक संयुक्त बंद सत्य-वृक्ष बना सकते हैं जो दिखाता है कि Γ असंगत है। इसके लिए मान्यताओं के रूप में $\mathbb{T}\,\psi_1$, ..., $\mathbb{T}\,\psi_n$ के साथ $\mathbb{T}\,\chi_1$, ..., $\mathbb{T}\,\chi_m$ लेकर और फिर Cut नियम लगाएँ। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: एक $\mathbb{T}\,\varphi$ से और दूसरी $\mathbb{F}\,\varphi$ से आरंभ होती है।

बाईं ओर पहले सत्य-वृक्ष की मान्यताओं के नीचे का भाग जोड़ें। यहाँ नियम का प्रत्येक प्रयोग अब भी सही है, क्योंकि पहले सत्य-वृक्ष की प्रत्येक मान्यता, $\mathbb{T}\,\varphi$ सहित, उपलब्ध है। अतः $\mathbb{T}\,\varphi$ के नीचे की हर शाखा बंद हो जाती है।

दाईं ओर दूसरे सत्य-वृक्ष की मान्यताओं के नीचे का भाग जोड़ें, पर $\neg\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर लगाने से प्राप्त परिणाम हटा दें। $\neg\mathbb{T}$ का $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ पर प्रयोग करने का निष्कर्ष $\mathbb{F}\,\varphi$ है, जो फिर भी उपलब्ध है, क्योंकि वह संयुक्त सत्य-वृक्ष की दाईं ओर Cut नियम का निष्कर्ष है।

यदि दूसरे सत्य-वृक्ष की कोई शाखा इसलिए बंद थी कि उसमें मान्यता $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ (जो अब संयुक्त सत्य-वृक्ष में मान्यता के रूप में नहीं आती) के साथ $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ भी था, तो $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ पर लगाकर $\mathbb{T}\,\varphi$ प्राप्त करें। अब संयुक्त सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद हो जाती है, क्योंकि उसमें Cut नियम का दायाँ निष्कर्ष $\mathbb{F}\,\varphi$ है। यदि दूसरे सत्य-वृक्ष की कोई शाखा किसी अन्य कारण से बंद थी, तो संयुक्त सत्य-वृक्ष में संगत शाखा भी बंद है, क्योंकि $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ के अतिरिक्त सभी चिह्नित सूत्रों, जो पुराने दूसरे सत्य-वृक्ष की शाखा पर आते हैं, संयुक्त सत्य-वृक्ष की संगत शाखा पर भी आते हैं। □

21.9 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि सत्य-वृक्षों का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 21.22. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$।

प्रमाण. 1. $\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi\}$ दोनों के लिए निम्न बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

2. $\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi, \mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi\}$ के लिए यह बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi$		मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$		मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\psi$		मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\psi$	$\wedge\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 21.23. *1. $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. हम $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\neg\psi\}$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष देते हैं:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\neg\psi$	मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\neg\mathbb{T}\,3$
6.	$\mathbb{T}\,\varphi$ $\quad$ $\mathbb{T}\,\psi$ $\otimes$ $\quad$ $\otimes$	$\vee\mathbb{T}\,1$

2. $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

प्रतिज्ञप्ति 21.24. *1.* $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ *।*

2. दोनों $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \to \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. $\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	मान्यता
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$ $\quad$ $\mathbb{T}\,\psi$ $\otimes$ $\quad$ $\otimes$	$\to\mathbb{T}\,2$

2. $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi\}$ और $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ दोनों के लिए बंद सत्य-वृक्ष हैं:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

21.10 व्युत्पन्नता और परिमाणक

पूर्णता प्रमेय के लिए यह भी आवश्यक है कि सत्य-वृक्ष के नियम इस अनुभाग में स्थापित $\vdash$ से संबंधित तथ्य प्रदान करें।

प्रमेय 21.25. *यदि c ऐसा अचर है जो Γ या $\varphi(x)$ में नहीं आता, और $\Gamma \vdash \varphi(c)$, तो $\Gamma \vdash \forall x\,\varphi(x)$।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi(c)$; अर्थात् ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ ऐसे हैं और निम्न के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi(c), \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

हमें दिखाना है कि निम्न के लिए भी कोई बंद सत्य-वृक्ष है:

$$\{\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x), \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

बंद सत्य-वृक्ष में पहली मान्यता को $\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$ से बदलें और मान्यताओं के बाद $\mathbb{F}\,\varphi(c)$ जोड़ें।

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}\,\varphi(c) \\ \mathbb{T}\,\psi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{T}\,\psi_n \\ \bigwedge \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x) \\ \mathbb{T}\,\psi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{T}\,\psi_n \\ \mathbb{F}\,\varphi(c) \\ \bigwedge \end{array}$$

सत्य-वृक्ष अब भी बंद है, क्योंकि पहले मान्यताओं के रूप में उपलब्ध सभी वाक्यों नए सत्य-वृक्ष के शीर्ष पर अब भी उपलब्ध हैं। जोड़ी गई पंक्ति $\forall\mathbb{F}$ के सही प्रयोग का परिणाम है, क्योंकि अचर c, ψ_1, ..., ψ_n या $\forall x\,\varphi(x)$ में नहीं आता; अर्थात् नए सत्य-वृक्ष में जोड़ी गई पंक्ति के ऊपर वह कहीं नहीं आता। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 21.26. *1. $\varphi(t) \vdash \exists x\,\varphi(x)$।*

2. $\forall x\,\varphi(x) \vdash \varphi(t)$।

प्रमाण. 1. $\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x), \mathbb{T}\,\varphi(t)$ के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\varphi(t)$	मान्यता
3.	$\mathbb{F}\,\varphi(t)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

2. $\mathbb{F}\,\varphi(t), \mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$, के लिए बंद सत्य-वृक्ष है:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi(t)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi(t)$	$\forall\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

21.11 सुदृढ़ता

सत्य-वृक्ष जैसा व्युत्पत्ति तंत्र *सुदृढ़* है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. हर व्युत्पन्न φ वैध है;
2. यदि वाक्य कुछ अन्य वाक्यों से व्युत्पन्न है, तो वह उनसे तार्किकतः निष्पन्न भी होता है;
3. यदि वाक्यों का कोई समुच्चय असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

चूँकि ये सभी प्रमाण-सैद्धांतिक गुण किसी-न-किसी प्रकार के बंद सत्य-वृक्ष द्वारा परिभाषित होते हैं, इसलिए ऊपर के (1)–(3) को सिद्ध करने के लिए बंद सत्य-वृक्ष के अर्थवैज्ञानिक गुणों के बारे में कुछ सिद्ध करना होगा। पहले हम परिभाषित करेंगे कि किसी चिह्नित सूत्र को किसी संरचना में संतुष्ट किया जाना क्या है, और फिर दिखाएँगे कि यदि कोई सत्य-वृक्ष बंद है, तो कोई संरचना उसकी सभी मान्यताओं को संतुष्ट नहीं करती। तब (1)–(3) इस परिणाम के उपप्रमेयों के रूप में मिलेंगे।

परिभाषा 21.27. संरचना $\mathfrak{M}$ चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\,\varphi$ को *संतुष्ट करता है* तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, और वह $\mathbb{F}\,\varphi$ को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$। $\mathfrak{M}$, चिह्नित सूत्रों के समुच्चय Γ को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब वह प्रत्येक $S\,\varphi \in \Gamma$ को संतुष्ट करे। Γ *संतुष्टनीय* है यदि उसे संतुष्ट करने वाली कोई संरचना हो; अन्यथा वह *असंतुष्टनीय* है।

प्रमेय 21.28 (सुदृढ़ता). *यदि Γ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है, तो Γ असंतुष्टनीय है।*

प्रमाण. सत्य-वृक्ष की किसी शाखा को संतुष्टनीय तभी और केवल तभी कहें जब उस पर के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय संतुष्टनीय हो; और किसी सत्य-वृक्ष को संतुष्टनीय तब कहें जब उसमें कम-से-कम एक संतुष्टनीय शाखा हो।

हम यह दिखाते हैं: अनुमान-नियमों में से किसी एक द्वारा संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष का विस्तार करने पर सदा संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष ही मिलता है। इससे प्रमेय सिद्ध होगा: हर बंद सत्य-वृक्ष, केवल Γ की मान्यताओं से बने सत्य-वृक्ष पर अनुमान-नियम लगाकर प्राप्त होता है। अतः यदि Γ संतुष्टनीय होता, तो उसके लिए बना प्रत्येक सत्य-वृक्ष संतुष्टनीय होता। किंतु बंद सत्य-वृक्ष स्पष्टतः संतुष्टनीय नहीं है: प्रत्येक शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों होते हैं, और कोई संरचना φ को संतुष्ट तथा असंतुष्ट दोनों नहीं कर सकती।

मान लें हमारे पास संतुष्टनीय सत्य-वृक्ष है, अर्थात् ऐसा सत्य-वृक्ष जिसकी कम-से-कम एक शाखा संतुष्टनीय है। अनुमान-नियम लगाने पर या तो किसी शाखा में चिह्नित सूत्रों जुड़ते हैं, या शाखा दो भागों में बँटती है। यदि सत्य-वृक्ष में ऐसी संतुष्टनीय शाखा है जिसका संबद्ध नियम-प्रयोग विस्तार नहीं करता, तो वह विस्तृत सत्य-वृक्ष में भी संतुष्टनीय शाखा रहती है; अतः विस्तृत सत्य-वृक्ष संतुष्टनीय है। इसलिए केवल उस प्रसंग पर विचार करना है जिसमें नियम किसी संतुष्टनीय शाखा पर लगाया जाता है।

उस शाखा के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ मानें और जिस चिह्नित सूत्र पर नियम लगाया जाता है उसे $S\,\varphi \in \Gamma$ मानें। यदि नियम से शाखा का विभाजन नहीं होता, तो दिखाना होगा कि विस्तृत शाखा, अर्थात् नियम के निष्कर्षों सहित

Γ, अब भी संतुष्टनीय है। यदि नियम से शाखा विभाजित होती है, तो दिखाना होगा कि परिणामी दो शाखाओं में से कम-से-कम एक संतुष्टनीय है।

पहले उन संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं जिनसे शाखा विभाजित नहीं होती।

1. शाखा का विस्तार $\neg\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। तब विस्तृत शाखा में चिह्नित सूत्रों $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\,\psi\}$ होते हैं। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। विशेषतः $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi$। अतः $\mathfrak{M} \nvDash \psi$; अर्थात् $\mathfrak{M}$, $\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है।

2. शाखा का विस्तार $\neg\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा का विस्तार $\wedge\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है, जिससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्रों मिलते हैं: $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{T}\,\chi$। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M} \vDash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M} \vDash \psi$ और $\mathfrak{M} \vDash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}$, $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{T}\,\chi$ दोनों को संतुष्ट करता है।

4. शाखा का विस्तार $\vee\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

5. शाखा का विस्तार $\rightarrow\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। इससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्रों मिलते हैं: $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{F}\,\chi$। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M} \nvDash \psi \rightarrow \chi$। तब $\mathfrak{M} \vDash \psi$ और $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}$, $\mathbb{T}\,\psi$ और $\mathbb{F}\,\chi$ दोनों को संतुष्ट करता है।

6. शाखा का विस्तार $\forall\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\forall x\,\psi(x) \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\,\varphi(t)$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M} \vDash \forall x\,\varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.31 से $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$। अतः $\mathfrak{M}$, $\mathbb{T}\,\varphi(t)$ को संतुष्ट करती है।

7. शाखा का विस्तार $\forall\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\forall x\,\psi(x) \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है। इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\mathbb{F}\,\varphi(a)$ मिलता है, जहाँ a ऐसा अचर है जो Γ में नहीं आता। चूँकि Γ संतुष्टनीय है, कोई $\mathfrak{M}$ ऐसी है कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\,\psi(x)$। हमें दिखाना है कि $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\,\varphi(a)\}$ संतुष्टनीय है। इसके लिए उपयुक्त $\mathfrak{M}'$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

   प्रतिज्ञप्ति 16.19 से $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\,\psi(x)$ तभी और केवल तभी जब किसी s के लिए $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi(x)$। अब $\mathfrak{M}'$ को $\mathfrak{M}$ जैसा ही मानें, केवल $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$। उपप्रमेय 16.21 से प्रत्येक $\mathbb{T}\,\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}' \vDash \chi$ और प्रत्येक $\mathbb{F}\,\chi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}' \nvDash \chi$, क्योंकि a, Γ में नहीं आता।

   प्रतिज्ञप्ति 16.20 से $\mathfrak{M}', s \nvDash \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}', s \nvDash \varphi(a)$। चूँकि $\varphi(a)$ वाक्य है, प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}' \nvDash \varphi(a)$; अर्थात् $\mathfrak{M}'$, $\mathbb{F}\,\varphi(a)$ को संतुष्ट करती है।

8. शाखा का विस्तार $\exists\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\exists x\,\psi(x) \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

9. शाखा का विस्तार $\exists\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\exists x\,\psi(x) \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

अब उन संभावित अनुमानों पर विचार करें जिनसे शाखा विभाजित होती है।

1. शाखा का विस्तार $\wedge\mathbb{F}$ को $\mathbb{F}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है, जिससे दो शाखाएँ मिलती हैं: बाईं शाखा $\mathbb{F}\,\psi$ से और दाईं शाखा $\mathbb{F}\,\chi$ से आगे बढ़ती है। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M} \nvDash \psi \wedge \chi$। तब या तो $\mathfrak{M} \nvDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। पहले प्रसंग में $\mathfrak{M}$, $\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है, अर्थात् $\mathfrak{M}$ बाईं शाखा के सूत्रों को संतुष्ट करता है। दूसरे प्रसंग में $\mathfrak{M}$, $\mathbb{F}\,\chi$ को संतुष्ट करता है, अर्थात् $\mathfrak{M}$ दाईं शाखा के सूत्रों को संतुष्ट करता है।

2. शाखा का विस्तार $\vee\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा का विस्तार $\rightarrow\mathbb{T}$ को $\mathbb{T}\,\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$ पर लगाकर किया जाता है: अभ्यास।

4. शाखा को Cutसे विस्तृत किया जाता है। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: एक में $\mathbb{T}\,\psi$ और दूसरी में $\mathbb{F}\,\psi$ है। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ और या तो $\mathfrak{M} \vDash \psi$ अथवा $\mathfrak{M} \nvDash \psi$, इसलिए $\mathfrak{M}$ बाईं या दाईं शाखा में से एक को संतुष्ट करता है। $\square$

उपप्रमेय 21.29. *यदि* $\vdash \varphi$, *तो* φ *वैध है।*

उपप्रमेय 21.30. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$, *तो* $\Gamma \vDash \varphi$*।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किन्हीं ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ के लिए $\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$ का कोई बंद सत्य-वृक्ष है। प्रमेय 21.28 से प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ या तो किसी ψ_i को असत्य बनाता है, या φ को सत्य बनाता है। अतः यदि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ भी। □

उपप्रमेय 21.31. *यदि* Γ *संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ ऐसे हैं और $\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$ के लिए कोई बंद सत्य-वृक्ष है। प्रमेय 21.28 से ऐसा कोई $\mathfrak{M}$ नहीं है जिसके लिए $\mathfrak{M} \vDash \psi_i$ सभी $i = 1$, ..., n पर हो। अतः Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

21.12 तादात्म्य सहित सत्य-वृक्ष

तादात्म्य वाले सत्य-वृक्ष के लिए अतिरिक्त अनुमान-नियम चाहिए। $=$ के नियम ये हैं (यहाँ t, t_1 और t_2 बंद पद हैं):

$$\frac{}{\mathbb{T}\,t = t}\,= \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,t_1 = t_2\\ \mathbb{T}\,\varphi(t_1)\end{array}}{\mathbb{T}\,\varphi(t_2)}\,{=}\mathbb{T} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,t_1 = t_2\\ \mathbb{F}\,\varphi(t_1)\end{array}}{\mathbb{F}\,\varphi(t_2)}\,{=}\mathbb{F}$$

ध्यान दें कि अन्य सभी नियमों के विपरीत, $=\mathbb{T}$ और $=\mathbb{F}$ के लिए शाखा पर दो चिह्नित सूत्रों पहले से उपस्थित होने चाहिए, अर्थात् $\mathbb{T}\,t_1 = t_2$ और $S\,\varphi(t_1)$ दोनों।

उदाहरण 21.32. यदि s और t बंद पद हैं, तो $s = t, \varphi(s) \vdash \varphi(t)$:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi(t)$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,s = t$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi(s)$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(t)$	$=\mathbb{T}\,2, 3$
	$\otimes$	

इसे समान वस्तुओं की प्रतिस्थापनीयता का सिद्धांत, अथवा लाइबनित्स का नियम, कहा जाता है।

सत्य-वृक्ष सिद्ध करते हैं कि $=$ सममित है, अर्थात् $s_1 = s_2 \vdash s_2 = s_1$:

1.	$\mathbb{F}\,s_2 = s_1$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\,s_1 = s_2$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,s_1 = s_1$	$=$
4.	$\mathbb{T}\,s_2 = s_1$	$=\mathbb{T}\,2, 3$
	$\otimes$	

यहाँ पंक्ति 2 पहला अपेक्षित सूत्र $\mathbb{T}\,s_1 = s_2$ है, जिसकी आवश्यकता $=\mathbb{T}$ को है। पंक्ति 3 दूसरा है, जो $\mathbb{T}\,\varphi(s_2)$ के रूप का है—$\varphi(x)$ को $x = s_1$ समझें; तब $\varphi(s_1)$, $s_1 = s_1$ और $\varphi(s_2)$, $s_2 = s_1$ है।

वे यह भी सिद्ध करते हैं कि $=$ संक्रामक है, अर्थात् $s_1 = s_2, s_2 = s_3 \vdash s_1 = s_3$:

1.	$\mathbb{F}\, s_1 = s_3$	मान्यता
2.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_2$	मान्यता
3.	$\mathbb{T}\, s_2 = s_3$	मान्यता
4.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_3$	$=\mathbb{T}\, 3, 2$
	$\otimes$	

इस सत्य-वृक्ष में $=\mathbb{T}$ का पहला अपेक्षित सूत्र पंक्ति 3, $\mathbb{T}\, s_2 = s_3$ है (s_2, t_1 की भूमिका और s_3, t_2 की भूमिका निभाता है)। दूसरा अपेक्षित सूत्र, जो $\mathbb{T}\, \varphi(s_2)$ के रूप का है, पंक्ति 2 है। यहाँ $\varphi(x)$ को $s_1 = x$ समझें; तब $\varphi(s_2)$, $t_1 = t_2$ (अर्थात् पंक्ति 2) और $\varphi(s_3)$, निष्कर्ष का सूत्र $s_1 = s_3$ बनता है।

21.13 तादात्म्य सहित सुदृढ़ता

प्रतिज्ञप्ति 21.33. *तादात्म्य के नियमों वाले सत्य-वृक्ष सुदृढ़ हैं: कोई बंद सत्य-वृक्ष संतुष्टनीय नहीं है।*

प्रमाण. पहले की तरह हमें केवल यह दिखाना है कि यदि किसी सत्य-वृक्ष की कोई शाखा संतुष्टनीय है, तो उस पर $=$ के किसी नियम को लगाने से प्राप्त शाखा भी संतुष्टनीय है। शाखा के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ मानें और संरचना को $\mathfrak{M}$ मानें जो Γ को संतुष्ट करती है।

मान लें कि शाखा को $=$ का प्रयोग करके, अर्थात् चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\, t = t$ जोड़कर, विस्तृत किया जाता है। स्पष्टतः $\mathfrak{M} \vDash t = t$, इसलिए $\mathfrak{M}, \Gamma \cup \{\mathbb{T}\, t = t\}$ को भी संतुष्ट करती है।

यदि शाखा को $=\mathbb{T}$ से विस्तृत किया जाता है, तो हम चिह्नित सूत्र $S\, \varphi(t_2)$ जोड़ते हैं, किंतु Γ में $\mathbb{T}\, t_1 = t_2$ और $\mathbb{T}\, \varphi(t_1)$ दोनों हैं। अतः $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ और $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$। ऐसा चर-निर्धारण s लें जिसमें $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$। चूँकि $s \sim_x s$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$, इसलिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$ और फलतः $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 को फिर लगाने पर $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$ भी मिलता है। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$। $=\mathbb{F}$ का प्रसंग इसी प्रकार सिद्ध होता है। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 21.1. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\, \varphi \wedge (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\, (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\mathbb{T}\, \varphi \vee (\psi \vee \chi), \mathbb{F}\, (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\mathbb{T}\, \varphi \to (\psi \to \chi), \mathbb{F}\, \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\mathbb{T}\, \varphi, \mathbb{F}\, \neg\neg\varphi$.

प्रश्न 21.2. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\, (\varphi \vee \psi) \to \chi, \mathbb{F}\, \varphi \to \chi$.
2. $\mathbb{T}\, (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi), \mathbb{F}\, (\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\mathbb{F}\, \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\mathbb{T}\, \psi \to \varphi, \mathbb{F}\, \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\mathbb{F}\, (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.

6. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\mathbb{T}\,\varphi \to \chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \neg\psi, \mathbb{F}\,\varphi$.
10. $\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \neg\psi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\mathbb{F}\,(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

प्रश्न 21.3. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \to \psi), \mathbb{F}\,\varphi$.
2. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \wedge \psi), \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \psi$.
4. $\mathbb{F}\,\neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\psi$.
6. $\mathbb{T}\,(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \mathbb{F}\,(\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $\mathbb{T}\,(\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathbb{F}\,\varphi$.
8. $\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

प्रश्न 21.4. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{F}\,(\forall x\,\varphi(x) \wedge \forall y\,\psi(y)) \to \forall z\,(\varphi(z) \wedge \psi(z))$.
2. $\mathbb{F}\,(\exists x\,\varphi(x) \vee \exists y\,\psi(y)) \to \exists z\,(\varphi(z) \vee \psi(z))$.
3. $\mathbb{T}\,\forall x\,(\varphi(x) \to \psi), \mathbb{F}\,\exists y\,\varphi(y) \to \psi$.
4. $\mathbb{T}\,\forall x\,\neg\varphi(x), \mathbb{F}\,\neg\exists x\,\varphi(x)$.
5. $\mathbb{F}\,\neg\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\neg\varphi(x)$.
6. $\mathbb{F}\,\neg\exists x\,\forall y\,((\varphi(x,y) \to \neg\varphi(y,y)) \wedge (\neg\varphi(y,y) \to \varphi(x,y)))$.

प्रश्न 21.5. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x) \to \exists x\,\neg\varphi(x)$.
2. $\mathbb{T}\,(\forall x\,\varphi(x) \to \psi), \mathbb{F}\,\exists y\,(\varphi(y) \to \psi)$.
3. $\mathbb{F}\,\exists x\,(\varphi(x) \to \forall y\,\varphi(y))$.

प्रश्न 21.6. प्रतिज्ञप्ति 21.16 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 21.7. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 21.8. प्रमेय 21.28 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 21.9. निम्न के लिए बंद सत्य-वृक्ष दीजिए:

1. $\mathbb{F}\, \forall x\, \forall y\, ((x = y \wedge \varphi(x)) \to \varphi(y))$
2. $\mathbb{F}\, \exists x\, (\varphi(x) \wedge \forall y\, (\varphi(y) \to y = x))$,
   $\mathbb{T}\, \exists x\, \varphi(x) \wedge \forall y\, \forall z\, ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \to y = z)$

अध्याय 22

अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

अभी यह सुनिश्चित करने का कोई प्रयास नहीं किया गया है कि इस अध्याय की सामग्री उन विभिन्न टैगों का पालन करे जो बताते हैं कि कौन-से संयोजक और परिमाणक आदिम हैं और कौन-से परिभाषित। सभी को आदिम माना गया है; केवल $\leftrightarrow$ को परिभाषित माना गया है। यदि FOL टैग सत्य हो, तो परिमाणकों वाला संस्करण बनता है; अन्यथा परिमाणकों के बिना।

22.1 नियम और व्युत्पत्तियाँ

अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ संभवतः तर्कशास्त्र के सबसे सरल व्युत्पत्ति तंत्र हैं। व्युत्पत्ति, सूत्रों का केवल एक अनुक्रम है। व्युत्पत्ति माने जाने के लिए अनुक्रम का प्रत्येक सूत्र या तो किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त होना चाहिए, या किसी अनुमान-नियम द्वारा अनुक्रम में उससे पहले आए एक अथवा अधिक सूत्रों से प्राप्त होना चाहिए। व्युत्पत्ति व्युत्पन्न करती है अपने अंतिम सूत्र को।

परिभाषा 22.1 (व्युत्पन्नता). यदि Γ, $\mathcal{L}$ के सूत्रों का समुच्चय है, तो Γ से *व्युत्पत्ति*, सूत्रों का परिमित अनुक्रम φ_1, ..., φ_n है, जिसमें प्रत्येक $i \leq n$ के लिए निम्न में से कोई एक शर्त सत्य होती है:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; अथवा
2. φ_i एक अभिगृहीत है; अथवा
3. φ_i किसी अनुमान-नियम द्वारा किसी φ_j (और φ_k) से प्राप्त होता है, जहाँ $j < i$ (और $k < i$)।

किसे सही व्युत्पत्ति माना जाए, यह इस पर निर्भर है कि हम किन अनुमान-नियमों की अनुमति देते हैं (और निस्संदेह किन्हें अभिगृहीत मानते हैं)। अनुमान-नियम एक यदि-तो कथन है जो बताता है कि कुछ शर्तों के अधीन व्युत्पत्ति का चरण A_i सही अनुमान-चरण है।

परिभाषा 22.2 (अनुमान-नियम). *अनुमान-नियम* इस बात की पर्याप्त शर्त देता है कि Γ से व्युत्पत्ति में कौन-सा चरण सही अनुमान-चरण माना जाएगा।

उदाहरणार्थ, क्योंकि किसी एक-अवयवी अनुक्रम φ को, जब $\varphi \in \Gamma$ हो, तुच्छतः व्युत्पत्ति माना जाता है, इसलिए निम्न एक अत्यंत सरल अनुमान-नियम हो सकता है:

यदि $\varphi \in \Gamma$, तो φ सदा सही अनुमान-चरण है, किसी भी व्युत्पत्ति में, जो Γ से हो।

इसी प्रकार, यदि φ अभिगृहीतों में से एक है, तो अकेला φ ही व्युत्पत्ति है; इसलिए यह भी एक अनुमान-नियम है:

यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो φ सही अनुमान-चरण है।

अनुमान-नियम विचाराधीन चरण से पहले आए सूत्रों का सहारा ले, तो बात अधिक रोचक होती है। निम्न नियम को *पूर्वपक्ष-स्थापन* कहते हैं:

यदि $\psi \to \varphi$ और ψ, व्युत्पत्ति में ऊपर आ चुके हों, तो φ सही अनुमान-चरण है।

यदि यही एकमात्र अनुमान-नियम है, तो ऊपर दी गई व्युत्पत्ति की परिभाषा का अर्थ यह है: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ व्युत्पत्ति तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक $i \leq n$ के लिए निम्न में से कोई एक शर्त सत्य हो:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; अथवा
2. φ_i कोई अभिगृहीत है; अथवा
3. किसी $j < i$ के लिए φ_j, $\psi \to \varphi_i$ है, और किसी $k < i$ के लिए φ_k, ψ है।

अंतिम उपवाक्य कहता है कि φ_i, φ_j ($\psi \to \varphi_i$) और φ_k (ψ) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा प्राप्त होता है। यदि हम 1 से n तक जा सकें और हर बार ऐसा सूत्र φ_i पाएँ जो या तो Γ में हो, कोई अभिगृहीत हो, अथवा जिसे अनुमान-नियम सही अनुमान-चरण बताए, तो पूरा अनुक्रम सही व्युत्पत्ति माना जाता है।

परिभाषा 22.3 (व्युत्पन्नता). सूत्र φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, जिसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, यदि Γ से ऐसी व्युत्पत्ति हो जो φ पर समाप्त होती है।

परिभाषा 22.4 (प्रमेय). सूत्र φ *प्रमेय* है यदि रिक्त समुच्चय से φ की कोई व्युत्पत्ति हो। हम $\vdash \varphi$ लिखते हैं यदि φ प्रमेय है, और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

22.2 प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के अभिगृहीत और नियम

परिभाषा 22.5 (अभिगृहीत). प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों के *अभिगृहीतों* का समुच्चय Ax_0 निम्न रूपों के सभी सूत्रों से बना है:

$$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \tag{22.1}$$
$$(\varphi \wedge \psi) \to \psi \tag{22.2}$$
$$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \tag{22.3}$$
$$\varphi \to (\varphi \vee \psi) \tag{22.4}$$
$$\varphi \to (\psi \vee \varphi) \tag{22.5}$$
$$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)) \tag{22.6}$$
$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{22.7}$$
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{22.8}$$
$$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi) \tag{22.9}$$
$$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \tag{22.10}$$
$$\top \tag{22.11}$$
$$\bot \to \varphi \tag{22.12}$$
$$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi \tag{22.13}$$
$$\neg\neg\varphi \to \varphi \tag{22.14}$$

परिभाषा 22.6 (पूर्वपक्ष-स्थापन). यदि ψ और $\psi \to \varphi$ पहले ही व्युत्पत्ति में आ चुके हों, तो φ एक सही अनुमान-चरण है।

पूर्वपक्ष-स्थापन नियम को संक्षेप में "mp" लिखेंगे।

22.3 परिमाणकों के अभिगृहीत और नियम

परिभाषा 22.7 (परिमाणकों के अभिगृहीत). परिमाणकों को नियंत्रित करने वाले *अभिगृहीत* निम्न के सभी प्रतिस्थापन-दृष्टान्त हैं:

$$\forall x\, \psi \to \psi(t), \tag{22.15}$$
$$\psi(t) \to \exists x\, \psi. \tag{22.16}$$

किसी भी बंद पद t के लिए।

परिभाषा 22.8 (परिमाणकों के नियम).

यदि $\psi \to \varphi(a)$ पहले ही व्युत्पत्ति में आ चुका हो और a, Γ अथवा ψ में न आता हो, तो $\psi \to \forall x\, \varphi(x)$ एक सही अनुमान-चरण है।

यदि $\varphi(a) \to \psi$ पहले ही व्युत्पत्ति में आ चुका हो और a, Γ अथवा ψ में न आता हो, तो $\exists x\, \varphi(x) \to \psi$ एक सही अनुमान-चरण है।

इन दोनों में से किसी भी नियम को संक्षेप में "qr" लिखेंगे।

22.4 व्युत्पत्तियाँ के उदाहरण

उदाहरण 22.9. मान लें हम $(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$ सिद्ध करना चाहते हैं। स्पष्टतः यह हमारे किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त नहीं है, इसलिए इसे व्युत्पन्न करने के लिए mp नियम का उपयोग करना होगा। हमारा एकमात्र नियम MP है, जो φ और $\varphi \to \psi$ दिए होने पर ψ को उचित ठहराने देता है। एक युक्ति यह होगी कि समीकरण (22.6) में φ को $\neg\theta$, ψ को α, और χ को $\theta \to \alpha$ मानें; अर्थात् यह दृष्टान्त लें:

$$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))).$$

क्यों? MP के दो प्रयोग अंतिम भाग देते हैं, और हमें वही चाहिए। यह भी सरलता से दिखता है कि $\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$, समीकरण (22.10) का दृष्टान्त है और $\alpha \to (\theta \to \alpha)$, समीकरण (22.7) का दृष्टान्त है। अतः हमारी व्युत्पत्ति है:

1.	$\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$	समीकरण (22.10)
2.	$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to$ $((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)))$	समीकरण (22.6)
3.	$(\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))$	1, 2, mp
4.	$\alpha \to (\theta \to \alpha)$	समीकरण (22.7)
5.	$(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$	3, 4, mp

उदाहरण 22.10. $\theta \to \theta$ की व्युत्पत्ति खोजने का प्रयास करें। यह किसी अभिगृहीत का दृष्टान्त नहीं है, इसलिए इसे व्युत्पन्न करने के लिए mp का उपयोग करना होगा। समीकरण (22.7), $\varphi \to \psi$ रूप का अभिगृहीत है, जिस पर हम mp लगा सकते हैं। उपयोगी होने के लिए इस प्रसंग में mp द्वारा सही चरण ठहराया जाने वाला ψ, $\theta \to \theta$ ही होना

चाहिए, क्योंकि हमें यही व्युत्पन्न करना है। इसका अर्थ है कि φ भी θ होना चाहिए; अर्थात् हम समीकरण (22.7) के इस दृष्टान्त पर विचार कर सकते हैं:

$$\theta \to (\theta \to \theta)$$

mp लगाने के लिए हमें तदनुरूप दूसरे पूर्वाधार, अर्थात् φ, को भी उचित ठहराना होगा। हमारे प्रसंग में वह θ होगा, और अकेले θ को हम व्युत्पन्न नहीं कर पाएँगे। इसलिए दूसरी युक्ति चाहिए।

केवल $\to$ वाला दूसरा अभिगृहीत समीकरण (22.8) है, अर्थात्

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

mp को दो बार लगाकर हम अंतिम अंतर्निहित सापेक्ष तक पहुँच सकते हैं। इसका फिर वही अर्थ है कि हमें समीकरण (22.8) का ऐसा दृष्टान्त चाहिए जिसमें $\varphi \to \chi$, हमारे लक्ष्य सूत्र $\theta \to \theta$ के समान हो। तब निस्संदेह φ और χ दोनों θ हैं। अब ψ कैसे चुनें कि $\varphi \to (\psi \to \chi)$ और $\varphi \to \psi$, अर्थात् हमारे प्रसंग में $\theta \to (\psi \to \theta)$ और $\theta \to \psi$, भी व्युत्पन्न हों? पहला तो हम ψ को जो भी मानें, समीकरण (22.7) का दृष्टान्त है। और $\theta \to \psi$ भी समीकरण (22.7) का एक और दृष्टान्त होगा यदि ψ को $(\theta \to \theta)$ माना जाए। अतः हमारी व्युत्पत्ति है:

1.	$\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)$	समीकरण (22.7)
2.	$(\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)) \to$ $((\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta))$	समीकरण (22.8)
3.	$(\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta)$	1, 2, mp
4.	$\theta \to (\theta \to \theta)$	समीकरण (22.7)
5.	$\theta \to \theta$	3, 4, mp

उदाहरण 22.11. कभी-कभी हम दिखाना चाहते हैं कि कोई व्युत्पत्ति, किसी सूत्र की, कुछ अन्य सूत्रों Γ से, मौजूद है। उदाहरणार्थ, दिखाएँ कि हम व्युत्पन्न करके $\varphi \to \chi$ को $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\}$ से प्राप्त कर सकते हैं।

1.	$\varphi \to \psi$	Hyp
2.	$\psi \to \chi$	Hyp
3.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	समीकरण (22.7)
4.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	2, 3, mp
5.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to$ $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	समीकरण (22.8)
6.	$((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	4, 5, mp
7.	$\varphi \to \chi$	1, 6, mp

"Hyp" (मान्यता) अंकित पंक्तियाँ बताती हैं कि उस पंक्ति का सूत्र, Γ का अवयव है।

प्रतिज्ञप्ति 22.12. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\Gamma \vdash \psi \to \chi$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi \to \chi$।

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ और $\Gamma \vdash \psi \to \chi$। तब कोई व्युत्पत्ति, $\varphi \to \psi$ की, Γ से है; और कोई व्युत्पत्ति, $\psi \to \chi$ की, Γ से भी है। उन्हें क्रमशः जोड़कर एक ही व्युत्पत्ति बनाएँ। अब पिछले उदाहरण की व्युत्पत्ति की पंक्तियाँ 3–7 जोड़ दें। यह व्युत्पत्ति, $\varphi \to \chi$ की—जो नई व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति है— Γ से है। ध्यान दें कि पंक्ति 4 और 7 के औचित्य तब भी वैध रहते हैं जब पंक्ति संख्या 1 के निर्देश को $\varphi \to \psi$ की व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति के निर्देश से, और पंक्ति संख्या 2 के निर्देश को $\psi \to \chi$ की व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति के निर्देश से बदल दिया जाए। □

22.5 परिमाणकों सहित व्युत्पत्तियाँ

उदाहरण 22.13. $(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, (\varphi(x) \land \psi(x))$ की व्युत्पत्ति दें।
पहले ध्यान दें कि

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, \varphi(x)$$

समीकरण (22.1) का दृष्टान्त है, और

$$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(a)$$

समीकरण (22.15) का दृष्टान्त है। अतः प्रतिज्ञप्ति 22.12 से हम जानते हैं कि

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \varphi(a)$$

व्युत्पन्न है। इसी प्रकार, क्योंकि

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall y\, \psi(y) \qquad \text{और}$$
$$\forall y\, \psi(y) \to \psi(a)$$

क्रमशः समीकरण (22.2) और समीकरण (22.15) के दृष्टान्त हैं, इसलिए

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \psi(a)$$

प्रतिज्ञप्ति 22.12 से व्युत्पन्न है। समीकरण (22.3) के उपयुक्त दृष्टान्त और mp के दो प्रयोगों से मिलता है कि

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to (\varphi(a) \land \psi(a))$$

व्युत्पन्न है। अब qr लगाकर मिलता है

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, (\varphi(x) \land \psi(x)).$$

22.6 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

जिस प्रकार हमने कई महत्त्वपूर्ण अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ (वैधता, तार्किक निष्पत्ति, संतुष्टनीयता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। इनकी परिभाषा में वाक्यों की संरचनाएँ में संतुष्टि का सहारा नहीं लिया जाता, बल्कि कुछ सूत्रों की व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता का सहारा लिया जाता है। इन धारणाओं का एक-दूसरे से मेल खाना एक महत्त्वपूर्ण खोज थी। यह मेल *सुदृढ़ता* और *पूर्णता प्रमेयों* का विषय है।

परिभाषा 22.14 (व्युत्पन्नता). सूत्र φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, जिसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, यदि Γ से ऐसी व्युत्पत्ति हो जो φ पर समाप्त होती है।

परिभाषा 22.15 (प्रमेय). सूत्र φ *प्रमेय* है यदि रिक्त समुच्चय से φ की कोई व्युत्पत्ति हो। हम $\vdash \varphi$ लिखते हैं यदि φ प्रमेय है, और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

परिभाषा 22.16 (संगतता). सूत्रों का समुच्चय Γ *संगत* तभी और केवल तभी है जब $\Gamma \nvdash \bot$; अन्यथा वह *असंगत* है।

प्रतिज्ञप्ति 22.17 (स्वतुल्यता). *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. अकेला सूत्र φ ही φ की, Γ से, व्युत्पत्ति है। □

प्रतिज्ञप्ति 22.18 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. φ की, Γ से, प्रत्येक व्युत्पत्ति, φ की, Δ से, व्युत्पत्ति भी है। □

प्रतिज्ञप्ति 22.19 (संक्रामकता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. मान लें $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$। तब कोई व्युत्पत्ति ψ_1, ..., $\psi_l = \psi$, $\{\varphi\} \cup \Delta$ से, है। उस व्युत्पत्ति के कुछ चरण सही होंगे क्योंकि कोई नियम पहले की पंक्ति $\psi_i = \varphi$ का निर्देश करता है। परिकल्पना से φ की, Γ से, कोई व्युत्पत्ति है, अर्थात् व्युत्पत्ति φ_1, ..., $\varphi_k = \varphi$, जिसमें प्रत्येक φ_i कोई अभिगृहीत, Γ का अवयव, अथवा किसी अनुमान-नियम से सही चरण है। अब इस अनुक्रम पर विचार करें:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_l = \psi.$$

यह ψ की, $\Gamma \cup \Delta$ से, सही व्युत्पत्ति है, क्योंकि अब हर $B_i = \varphi$ को वही नियम उचित ठहराता है जो $\varphi_k = \varphi$ को उचित ठहराता है। □

ध्यान दें कि विशेषतः इसका अर्थ है: यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी मिलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi_i$ प्रत्येक i के लिए हो, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 22.20. *Γ असंगत है तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$, प्रत्येक φ के लिए।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 22.21 (संहतता).

1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*
2. *यदि Γ का हर परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।*

प्रमाण.

1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो सूत्रों का कोई परिमित अनुक्रम φ_1, ..., φ_n ऐसा है कि $\varphi \equiv \varphi_n$, और प्रत्येक φ_i या तो कोई तार्किक अभिगृहीत, Γ का अवयव, अथवा पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा पिछले सूत्रों से प्राप्त है। Γ_0 को उन φ_i का समुच्चय मानें जो Γ में हैं। तब वही व्युत्पत्ति, Γ_0 से भी व्युत्पत्ति है; अतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$।
2. यह विशेष प्रसंग $\varphi \equiv \bot$ के लिए (1) का प्रतिधन कथन है। □

22.7 निगमन प्रमेय

जैसा हमने देखा है, किसी अभिगृहीतीय तंत्र में व्युत्पत्तियाँ देना श्रमसाध्य है और व्युत्पत्तियाँ को खोजना कठिन हो सकता है। सूत्रों की लंबी सूचियाँ वास्तव में लिखने के बजाय, कुछ सरल परिणामों का उपयोग करके यह तर्क देना सामान्यतः आसान होता है कि ऐसी व्युत्पत्तियाँ अस्तित्व में हैं। ऐसे तीन परिणाम हम पहले ही स्थापित कर चुके हैं। प्रतिज्ञप्ति 22.17 कहता है कि हम सदा $\Gamma \vdash \varphi$ कह सकते हैं, यदि हमें $\varphi \in \Gamma$ ज्ञात हो। प्रतिज्ञप्ति 22.18 कहता है कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ भी। और प्रतिज्ञप्ति 22.19 से मिलता है कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। यह एक और सरल परिणाम है—पूर्वपक्ष-स्थापन का "अधि"-रूप:

प्रतिज्ञप्ति 22.22. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$।*

प्रमाण. हमारे पास $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ है:

1.	φ	मान्यता
2.	$\varphi \to \psi$	मान्यता
3.	ψ	1, 2, MP

प्रतिज्ञप्ति 22.19 से $\Gamma \vdash \psi$। $\square$

इस प्रसंग में हमारा सबसे महत्त्वपूर्ण परिणाम निगमन प्रमेय है:

प्रमेय 22.23 (निगमन प्रमेय). $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$।

प्रमाण. "यदि" दिशा तात्कालिक है। यदि $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, तो प्रतिज्ञप्ति 22.18 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ भी। और प्रतिज्ञप्ति 22.17 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$। अतः प्रतिज्ञप्ति 22.22 से $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$।

"केवल तभी" दिशा के लिए हम ψ की, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन करते हैं।

आगमन-आधार में लंबाई 1 की हर व्युत्पत्ति के लिए कथन सिद्ध करते हैं। व्युत्पत्ति में, जो ψ की $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से व्युत्पत्ति है और जिसकी लंबाई 1 है, अकेला ψ होता है; और यदि वह सही है, तो ψ या तो $\in \Gamma \cup \{\varphi\}$ होता है या कोई अभिगृहीत है। यदि $\psi \in \Gamma$ अथवा वह कोई अभिगृहीत है, तो $\Gamma \vdash \psi$। समीकरण (22.7) से हमारे पास $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ भी है; अतः प्रतिज्ञप्ति 22.22 से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। यदि $\psi \in \{\varphi\}$, तो $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, क्योंकि अंतिम वाक्य $\varphi \to \psi$, $\varphi \to \varphi$ के समान है और इसे हम उदाहरण 22.10 में व्युत्पन्न कर चुके हैं।

आगमन-चरण में मान लें कि व्युत्पत्ति में ψ की व्युत्पत्ति $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से होती है और वह ऐसे चरण ψ पर समाप्त होती है जिसे पूर्वपक्ष-स्थापन उचित ठहराता है। (यदि उसे पूर्वपक्ष-स्थापन उचित नहीं ठहराता, तो $\psi \in \Gamma$, $\psi \equiv \varphi$, अथवा ψ कोई अभिगृहीत है; तब आगमन-आधार वाला ही तर्क लागू होता है।) तब व्युत्पत्ति के पहले के कुछ चरण $\chi \to \psi$ और χ हैं, जहाँ सूत्र χ कोई सूत्र है; अर्थात् $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \psi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$। उनकी संबंधित व्युत्पत्तियाँ छोटी हैं, इसलिए आगमन-परिकल्पना उन पर लागू होती है। अतः हमारे पास दोनों हैं:

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \psi);$$
$$\Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

पर हमारे पास यह भी है:

$$\Gamma \vdash (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)),$$

समीकरण (22.8) से; और प्रतिज्ञप्ति 22.22 के दो प्रयोग अपेक्षित $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ देते हैं। $\square$

ध्यान दें कि समीकरण (22.7) और समीकरण (22.8) ठीक इसलिए चुने गए हैं कि निगमन प्रमेय सत्य हो।

निम्न व्युत्पन्नता से संबंधित कुछ उपयोगी तथ्य हैं, जिन्हें हम अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 22.24. *1.* $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$*;*

2. यदि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$*, तो* $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ *(प्रतिधन);*

3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ *(असत्य से कुछ भी, विस्फोट);*

4. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ *(द्विनिषेध-विलोपन);*

5. यदि $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi$*;*

22.8 परिमाणकों सहित निगमन प्रमेय

प्रमेय 22.25 (निगमन प्रमेय). *यदि* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$।

प्रमाण. हम फिर ψ की, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन करते हैं।

आगमन-आधार का प्रमाण प्रमेय 22.23 के प्रमाण वाले आधार के समान है।

आगमन-चरण में फिर मान लें कि ψ की, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ से, व्युत्पत्ति ऐसे चरण ψ पर समाप्त होती है जिसे कोई अनुमान-नियम उचित ठहराता है। यदि अनुमान-नियम पूर्वपक्ष-स्थापन है, तो प्रमेय 22.23 के प्रमाण की तरह आगे बढ़ते हैं। यदि अनुमान-नियम qrहै, तो हम जानते हैं कि $\psi \equiv \chi \to \forall x\, \theta(x)$ और $\chi \to \theta(a)$ रूप का सूत्र, व्युत्पत्ति में पहले आता है, जहाँ a, χ, φ, या Γ में नहीं आता। अतः हमारे पास है:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \theta(a),$$

और आगमन-परिकल्पना लागू होती है; अर्थात् हमारे पास है

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \theta(a)).$$

इससे

$$\vdash (\varphi \to (\chi \to \theta(a))) \to ((\varphi \wedge \chi) \to \theta(a))$$

और पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा मिलता है

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi) \to \theta(a).$$

क्योंकि अभिलाक्षणिक-चर शर्त अब भी लागू है, इसलिए इस व्युत्पत्ति में qrसे उचित ठहराया गया चरण जोड़कर मिलता है

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi) \to \forall x\, \theta(x).$$

हमारे पास यह भी है

$$\vdash ((\varphi \wedge \chi) \to \forall x\, \theta(x)) \to (\varphi \to (\chi \to \forall x\, \theta(x)),$$

अतः पूर्वपक्ष-स्थापन से

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \forall x\, \theta(x)),$$

अर्थात् $\Gamma \vdash \psi$।

जिस प्रसंग में ψ को qrनियम उचित ठहराता है, पर वह $\exists x\, \theta(x) \to \chi$ रूप का है, उसे अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

22.9 व्युत्पन्नता और संगतता

अब व्युत्पन्नता संबंध के अनेक गुण स्थापित करेंगे। वे अपने-आप में रोचक हैं, पर उनमें से प्रत्येक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में भूमिका निभाएगा।

प्रतिज्ञप्ति 22.26. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, तो $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$। प्रतिज्ञप्ति 22.17 से $\Gamma \vdash \psi$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ के लिए। परिकल्पना से $\Gamma \vdash \varphi$ भी है, इसलिए $\Gamma \vdash \psi$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ के लिए। प्रतिज्ञप्ति 22.19 से $\Gamma \vdash \bot$; अर्थात् Γ असंगत है। □

प्रतिज्ञप्ति 22.27. *$\Gamma \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत हो।*

प्रमाण. पहले मान लें $\Gamma \vdash \varphi$। तब प्रतिज्ञप्ति 22.18 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$। प्रतिज्ञप्ति 22.17 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$। समीकरण (22.10) से हमारे पास $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ भी है। अतः प्रतिज्ञप्ति 22.22 के दो प्रयोगों से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$।

अब मान लें $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है, अर्थात् $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$। निगमन प्रमेय से $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot$। समीकरण (22.13) से $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \bot) \to \neg\neg\varphi$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 22.22 से $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$। चूँकि $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (समीकरण (22.14)), इसलिए प्रतिज्ञप्ति 22.22 के फिर प्रयोग से $\Gamma \vdash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 22.28. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\neg\varphi \in \Gamma$, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. समीकरण (22.10) से $\Gamma \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$। प्रतिज्ञप्ति 22.22 के दो प्रयोगों से $\Gamma \vdash \bot$। □

प्रतिज्ञप्ति 22.29. *यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, तो Γ असंगत है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

22.10 व्युत्पन्नता और प्रतिज्ञप्ति-संयोजक

हम स्थापित करते हैं कि अभिगृहीतीय निगमन का व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ इतना प्रबल है कि प्रतिज्ञप्ति-संयोजकों से जुड़े कुछ आधारभूत तथ्य सिद्ध कर सके, जैसे $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (पूर्वपक्ष-स्थापन)। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण के लिए ये तथ्य आवश्यक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 22.30. *1. दोनों $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ और $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ सत्य हैं।*

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

प्रमाण. 1. समीकरण (22.1) और समीकरण (22.1) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा।

2. समीकरण (22.3) से पूर्वपक्ष-स्थापन के दो प्रयोगों द्वारा। □

प्रतिज्ञप्ति 22.31. *1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ असंगत है।*

2. दोनों $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ और $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ सत्य हैं।

प्रमाण. 1. समीकरण (22.9) से $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ और $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$ मिलते हैं। अतः निगमन प्रमेय से $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \bot$ और $\{\neg\psi\} \vdash \psi \to \bot$। समीकरण (22.6) से $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \to \bot$। निगमन प्रमेय से $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \bot$।

2. समीकरण (22.4) और समीकरण (22.5) से पूर्वपक्ष-स्थापन द्वारा। □

प्रतिज्ञप्ति 22.32. *1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.*

2. *दोनों* $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *और* $\psi \vdash \varphi \to \psi$ *सत्य हैं।*

प्रमाण. 1. हम इसे व्युत्पन्न कर सकते हैं:

1.	φ	Hyp
2.	$\varphi \to \psi$	Hyp
3.	ψ	1, 2, mp

2. क्रमशः समीकरण (22.10), समीकरण (22.7), और निगमन प्रमेय से। □

22.11 व्युत्पन्नता और परिमाणक

पूर्णता प्रमेय के लिए यह भी आवश्यक है कि अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ इस अनुभाग में स्थापित $\vdash$ से संबंधित तथ्य प्रदान करें।

प्रमेय 22.33. *यदि* c *ऐसा अचर है जो* Γ *या* $\varphi(x)$ *में नहीं आता, और* $\Gamma \vdash \varphi(c)$*, तो* $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$*।*

प्रमाण. निगमन प्रमेय से $\Gamma \vdash \top \to \varphi(c)$। चूँकि c, Γ या $\top$ में नहीं आता, इसलिए $\Gamma \vdash \top \to \forall x\, \varphi(x)$ मिलता है। निगमन प्रमेय से फिर $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$। □

प्रतिज्ञप्ति 22.34. *1.* $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$*.*

2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$*.*

प्रमाण. 1. समीकरण (22.16) और निगमन प्रमेय से।

2. समीकरण (22.15) और निगमन प्रमेय से। □

22.12 सुदृढ़ता

अभिगृहीतीय निगमन जैसा व्युत्पत्ति तंत्र सुदृढ़ है यदि वह ऐसी बातें व्युत्पन्न नहीं कर सकता जो वास्तव में सत्य नहीं हैं। इस प्रकार सुदृढ़ता, व्युत्पत्ति तंत्रों का एक प्रकार का सुनिश्चित सुरक्षा-गुण है। जिस प्रमाण-सैद्धांतिक गुण पर विचार हो, उसके अनुसार हम उदाहरणार्थ यह जानना चाहेंगे कि

1. प्रत्येक व्युत्पन्न φ वैध है;
2. यदि φ कुछ अन्य Γ से व्युत्पन्न है, तो वह उनका तार्किक परिणाम भी है;
3. यदि सूत्रों का समुच्चय Γ असंगत है, तो वह असंतुष्टनीय है।

ये व्युत्पत्ति तंत्र के महत्त्वपूर्ण गुण हैं। यदि इनमें से कोई गुण सत्य न हो, तो व्युत्पत्ति तंत्र दोषपूर्ण होगा—वह आवश्यकता से अधिक बातें व्युत्पन्न करेगा। इसलिए व्युत्पत्ति तंत्र की सुदृढ़ता स्थापित करना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

प्रतिज्ञप्ति 22.35. *यदि* φ *कोई अभिगृहीत है, तो* $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$*, प्रत्येक संरचना* $\mathfrak{M}$ *और नियतन* s *के लिए।*

प्रमाण. हमें सत्यापित करना है कि सभी अभिगृहीत वैध हैं। उदाहरण के लिए समीकरण (22.15) का प्रसंग लें: मान लें t, x के लिए φ में मुक्त है और $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, \varphi$। तब संतुष्टि की परिभाषा से प्रत्येक $s' \sim_x s$ के लिए $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$ भी; विशेषतः तब जब $s'(x) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi[t/x]$। इससे $\mathfrak{M}, s \vDash (\forall x\, \varphi \to \varphi[t/x])$ सिद्ध होता है। □

प्रमेय 22.36 (सुदृढ़ता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. हम उस व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन करते हैं जिसमें φ की व्युत्पत्ति Γ से है। यदि किसी अनुमान से उचित ठहराया गया कोई चरण नहीं है, तो सभी सूत्रों, जो व्युत्पत्ति में हैं, या तो अभिगृहीतों के दृष्टान्त हैं अथवा Γ में हैं। पिछले प्रतिज्ञान से सभी अभिगृहीत वैध हैं; अतः यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\Gamma \vDash \varphi$। यदि $\varphi \in \Gamma$, तो तुच्छतः $\Gamma \vDash \varphi$।

यदि φ की व्युत्पत्ति के अंतिम चरण को पूर्वपक्ष-स्थापन उचित ठहराता है, तो सूत्रों ψ और $\psi \to \varphi$ उस व्युत्पत्ति में हैं; और उस व्युत्पत्ति के उन भागों पर, जो इन सूत्रों पर समाप्त होते हैं, आगमन-परिकल्पना लागू होती है (क्योंकि उनमें अनुमान से उचित ठहराया गया कम-से-कम एक चरण कम है)। अतः आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi$ और $\Gamma \vDash \psi \to \varphi$। तब प्रमेय 16.30 से $\Gamma \vDash \varphi$।

अब मान लें कि अंतिम चरण को qrउचित ठहराता है। तब वह चरण $\chi \to \forall x\, B(x)$ रूप का है और उससे पहले $\chi \to \psi(c)$ चरण है, जहाँ c, Γ, χ, या $\forall x\, B(x)$ में नहीं आता। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \chi \to \psi(c)$। प्रमेय 16.30 से $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \psi(c)$।

ऐसी किसी संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें कि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\chi\}$। हमें $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \psi(x)$ दिखाना है। चूँकि $\forall x\, \psi(x)$ वाक्य है, इसका अर्थ है कि प्रत्येक चर-नियतन s के लिए $\mathfrak{M}, s \vDash \psi(x)$ दिखाना होगा (प्रतिज्ञप्ति 16.19)। चूँकि $\Gamma \cup \{\chi\}$ केवल वाक्यों से बना है, इसलिए परिभाषा 16.11 से $\mathfrak{M}, s \vDash \theta$, हर $\theta \in \Gamma$ के लिए। संरचना $\mathfrak{M}'$ को $\mathfrak{M}$ जैसा ही मानें, सिवाय इसके कि $c^{\mathfrak{M}'} = s(x)$। चूँकि c, Γ या χ में नहीं आता, उपप्रमेय 16.21 से $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma \cup \{\chi\}$। चूँकि $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \psi(c)$, इसलिए $\mathfrak{M}' \vDash B(c)$। चूँकि $\psi(c)$ वाक्य है, प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(c)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(c)$ (याद रखें कि $\psi(c)$ केवल $\psi(x)[c/x]$ है)। इसलिए $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(x)$। चूँकि c, $\psi(x)$ में नहीं आता, प्रतिज्ञप्ति 16.20 से $\mathfrak{M}, s \vDash \psi(x)$। पर s एक स्वेच्छ चर-नियतन था, अतः $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \psi(x)$। फलतः $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \forall x\, \psi(x)$। प्रमेय 16.30 से $\Gamma \vDash \chi \to \forall x\, \psi(x)$।

जिस प्रसंग में φ को qr उचित ठहराता है, पर वह $\exists x\, \psi(x) \to \chi$ रूप का है, उसे अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

उपप्रमेय 22.37. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ वैध है।*

उपप्रमेय 22.38. *यदि Γ संतुष्टनीय है, तो वह संगत है।*

प्रमाण. हम प्रतिधन कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब $\Gamma \vdash \bot$, अर्थात् $\bot$ की कोई व्युत्पत्ति, Γ से, है। प्रमेय 22.36 से प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ जो Γ को संतुष्ट करती है, उसे $\bot$ को भी संतुष्ट करना होगा। चूँकि $\mathfrak{M} \nvDash \bot$, प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए, कोई $\mathfrak{M}$, Γ को संतुष्ट नहीं कर सकती; अर्थात् Γ संतुष्टनीय नहीं है। □

22.13 व्युत्पत्तियाँ : तादात्म्य सहित

$=$ को व्युत्पत्तियाँ में सम्मिलित करने के लिए हम केवल नए अभिगृहीत-प्रारूप जोड़ते हैं। व्युत्पत्ति और $\vdash$ की परिभाषा वही रहती है; अब नए अभिगृहीतों की भी अनुमति रहती है।

परिभाषा 22.39 (तादात्म्य के अभिगृहीत).

$$t = t, \tag{22.17}$$

$$t_1 = t_2 \to (\psi(t_1) \to \psi(t_2)), \tag{22.18}$$

किन्हीं बंद पदों t, t_1, t_2 के लिए।

प्रतिज्ञप्ति 22.40. *अभिगृहीत समीकरण (22.17) और समीकरण (22.18) वैध हैं।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 22.41. $\Gamma \vdash t = t$, *किसी भी पद* t *और समुच्चय* Γ *के लिए।*

प्रतिज्ञप्ति 22.42. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi(t_1)$ *और* $\Gamma \vdash t_1 = t_2$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi(t_2)$ *।*

प्रमाण. सूत्र

$$(t_1 = t_2 \to (\varphi(t_1) \to \varphi(t_2)))$$

समीकरण (22.18) का एक दृष्टान्त है। निष्कर्ष mp के दो प्रयोगों से मिलता है। □

प्रश्न

प्रश्न 22.1. अभिगृहीतों से व्युत्पत्तियाँ देकर दिखाइए कि निम्न सत्य हैं:

1. $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$
2. $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
3. $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$

प्रश्न 22.2. प्रतिज्ञप्ति 22.20 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 22.3. प्रतिज्ञप्ति 22.24 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 22.4. प्रमेय 22.25 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 22.5. सिद्ध कीजिए कि $\Gamma \vdash \neg\varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत हो।

प्रश्न 22.6. प्रतिज्ञप्ति 22.29 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 22.7. प्रमेय 22.36 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 22.8. प्रतिज्ञप्ति 22.40 सिद्ध कीजिए।

अध्याय 23

पूर्णता प्रमेय

23.1 परिचय

पूर्णता प्रमेय तर्कशास्त्र के सबसे मूलभूत परिणामों में से एक है। इसके दो सूत्रीकरण हैं, जिनकी समतुल्यता हम सिद्ध करेंगे। पहले सूत्रीकरण में यह अर्थवैज्ञानिक निष्पत्ति और हमारी व्युत्पत्ति-प्रणाली के संबंध के बारे में एक मूलभूत बात कहता है: यदि कोई वाक्य φ, कुछ वाक्यों Γ से तार्किक रूप से निकलता है, तो ऐसी व्युत्पत्ति भी होती है जो $\Gamma \vdash \varphi$ स्थापित करती है। अतः व्युत्पत्ति-प्रणाली उन बातों को सिद्ध किए बिना, जो वास्तव में निष्पन्न नहीं होतीं, जितनी प्रबल हो सकती है उतनी प्रबल है।

दूसरे सूत्रीकरण में इसे प्रतिरूप-अस्तित्व परिणाम के रूप में कहा जा सकता है: वाक्यों का प्रत्येक संगत समुच्चय संतुष्टनीय है। संगतता एक प्रमाण-सैद्धांतिक धारणा है: इसका अर्थ है कि हमारी व्युत्पत्ति-प्रणाली कुछ विशेष प्रकार की व्युत्पत्तियाँ उत्पन्न नहीं कर सकती। किंतु केवल इस कारण कि कुछ विशेष प्रकार की व्युत्पत्तियाँ Γ से नहीं मिलतीं, कौन कह सकता है कि ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$? पूर्णता प्रमेय पहली बार सिद्ध होने से पहले—वस्तुतः आज की हमारी व्युत्पत्ति-प्रणालियाँ बनने से भी पहले—महान जर्मन गणितज्ञ डेविड हिल्बर्ट का मत था कि गणितीय सिद्धांतों की संगतता उन वस्तुओं के अस्तित्व की गारंटी देती है जिनके बारे में वे सिद्धांत हैं। गॉटलोब फ्रेगे को लिखे एक पत्र में उन्होंने इसे इस प्रकार कहा:

> यदि मनमाने ढंग से दिए गए अभिगृहीत अपने सभी परिणामों सहित एक-दूसरे का खंडन नहीं करते, तो वे सत्य हैं और अभिगृहीतों द्वारा परिभाषित वस्तुएँ विद्यमान हैं। मेरे लिए सत्य और अस्तित्व का निकष यही है।

फ्रेगे ने इसका तीव्र विरोध किया। पूर्णता प्रमेय का दूसरा सूत्रीकरण दिखाता है कि कम-से-कम इस अर्थ में हिल्बर्ट सही थे कि यदि अभिगृहीत संगत हों, तो ऐसी *कोई* संरचना विद्यमान होती है जो उन सबको सत्य बनाती है।

पूर्णता प्रमेय—या अधिक ठीक कहें तो उसका प्रमाण—के महत्त्व के ये ही कारण नहीं हैं। उसके कई महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं, जिनमें से कुछ पर हम अलग से चर्चा करेंगे। उदाहरणार्थ, $\Gamma \vdash \varphi$ दिखाने वाली प्रत्येक व्युत्पत्ति परिमित होती है और इसलिए Γ के केवल परिमिततः अनेक वाक्यों का उपयोग कर सकती है। अतः पूर्णता प्रमेय से मिलता है कि यदि φ, Γ का परिणाम है, तो वह Γ के किसी परिमित उपसमुच्चय का परिणाम पहले ही है। इसे *संहतता* कहते हैं। समतुल्यतः, यदि Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो स्वयं Γ भी संगत होना चाहिए।

यद्यपि संहतता प्रमेय, व्युत्पत्तियाँ के रास्ते होकर, पूर्णता प्रमेय से निकलता है, फिर भी पूर्णता प्रमेय के *प्रमाण* से उसे सीधे स्थापित करना भी संभव है। वह प्रमाण एक विशेष गुण—संगतता—वाला वाक्यों का समुच्चय लेता है और उसी से कुछ विशेष गुणों वाली संरचना बनाता है (इस प्रसंग में वह संरचना उस समुच्चय को संतुष्ट करती है)। लगभग उसी रचना से संहतता को सीधे स्थापित किया जा सकता है: संगत समुच्चयों के स्थान पर वाक्यों के "परिमिततः संतुष्टनीय" समुच्चयों से आरंभ करें। यह रचना अन्य परिणाम भी देती है; उदाहरणार्थ, वाक्यों के प्रत्येक संतुष्टनीय समुच्चय का कोई परिमित अथवा गणनीय अनंत प्रतिरूप होता है। (इस परिणाम को लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय कहते हैं।) सामान्यतः संरचनाएँ को वाक्यों के समुच्चयों से रचने की विधि तर्कशास्त्र में और कभी-कभी दर्शन में भी प्रचलित है।

23.2 प्रमाण की रूपरेखा

पूर्णता प्रमेय का प्रमाण कुछ जटिल है और उसे पहली बार पढ़ते समय रास्ता भटकना आसान है। इसलिए पहले प्रमाण की रूपरेखा देख लें। पहला चरण दृष्टिकोण का ऐसा परिवर्तन है जो हमें प्रमाण तक पहुँचने का मार्ग दिखाता है। यदि पूर्णता को "जब कभी $\Gamma \vDash \varphi$ हो, तब $\Gamma \vdash \varphi$ होता है" के रूप में सोचें, तो कोई युक्ति सूझना भी कठिन हो सकता है: $\Gamma \vdash \varphi$ दिखाने के लिए हमें व्युत्पत्ति खोजनी है, और यह नहीं दिखता कि $\Gamma \vDash \varphi$ वाली परिकल्पना इसमें किसी प्रकार हमारी सहायता करती है। कुछ प्रमाण-प्रणालियों के लिए व्युत्पत्ति का सीधे निर्माण संभव है, पर हम थोड़ा भिन्न मार्ग लेंगे। आवश्यक दृष्टिकोण-परिवर्तन यह है: पूर्णता को इस रूप में भी कहा जा सकता है: "यदि Γ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है।" संभव है कि हम Γ में निहित सूचना को उसकी संगतता की परिकल्पना के साथ लेकर ऐसी संरचना बना सकें जो Γ के प्रत्येक वाक्य को संतुष्ट करे। आखिर हमें मालूम है कि हम किस प्रकार की संरचना खोज रहे हैं: ऐसी जो ठीक वैसी हो जैसी Γ उसका वर्णन करता है!

यदि Γ में केवल परमाण्विक वाक्यों हों, तो उसका प्रतिरूप बनाना सरल है। मान लें कि सभी परमाण्विक वाक्यों का रूप $P(a_1, \ldots, a_n)$ है, जहाँ a_i सभी अचरों हैं। हमें बस प्रांत $|\mathfrak{M}|$ और P के लिए ऐसा अर्थ-निर्धारण चुनना है कि $\mathfrak{M} \vDash P(a_1, \ldots, a_n)$ हो। यह अधिक कठिन नहीं है: $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$ रखें, $c_i^{\mathfrak{M}} = i$ रखें, और प्रत्येक $P(a_1, \ldots, a_n) \in \Gamma$ के लिए टपल $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ को $P^{\mathfrak{M}}$ में रखें, जहाँ k_i अचर चिह्न a_i का सूचकांक है (अर्थात् $a_i \equiv c_{k_i}$)।

अब मान लें कि Γ में कोई सूत्र $\neg\psi$ है, जहाँ ψ परमाण्विक है। हमें आशंका हो सकती है कि $\mathfrak{M}$ का निर्माण $\neg\psi$ को सत्य बनाने की संभावना में बाधा डालेगा। किंतु यहीं Γ की संगतता काम आती है: यदि $\neg\psi \in \Gamma$ है, तो $\psi \notin \Gamma$ होगा, अन्यथा Γ असंगत होता। और यदि $\psi \notin \Gamma$ है, तो हमारे $\mathfrak{M}$ के निर्माण के अनुसार $\mathfrak{M} \nvDash \psi$ है, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi$। यहाँ तक सब ठीक है।

यदि Γ में जटिल, गैर-परमाण्विक सूत्र हों तो क्या होगा? मान लें कि उसमें $\varphi \wedge \psi$ है। इसे सत्य बनाने के लिए हमें ऐसे आगे बढ़ना चाहिए मानो φ और ψ दोनों Γ में हों। और यदि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ है, तो हमें उनमें से कम-से-कम एक को सत्य बनाना होगा, अर्थात् ऐसे आगे बढ़ना होगा मानो उनमें से कोई एक Γ में हो।

इससे निम्न विचार सूझता है: हम Γ में अतिरिक्त सूत्रों इस प्रकार जोड़ें कि (a) परिणामी समुच्चय संगत बना रहे, (b) प्रत्येक संभावित परमाण्विक वाक्य φ के लिए या तो φ परिणामी समुच्चय में हो या $\neg\varphi$ हो, और (c) जब भी $\varphi \wedge \psi$ समुच्चय में हो, तब φ और ψ दोनों भी उसमें हों; यदि $\varphi \vee \psi$ समुच्चय में हो, तो φ या ψ में से कम-से-कम एक भी उसमें हो; इत्यादि। हम यह प्रक्रिया (संभवतः अनंत काल तक) जारी रखते हैं। इस प्रकार जोड़े गए सभी सूत्रों के समुच्चय को Γ^* कहें। तब ऊपर का हमारा निर्माण हमें ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ देगा जिसके बारे में हम आगमन से सिद्ध कर सकेंगे कि वह Γ^* के सभी वाक्यों को संतुष्ट करती है, और इस कारण Γ के सभी वाक्यों को भी, क्योंकि $\Gamma \subseteq \Gamma^*$। पता चलता है कि (a) और (b) की गारंटी ही पर्याप्त है। वाक्यों का ऐसा समुच्चय जिसके लिए (b) सत्य हो, *पूर्ण* कहलाता है। इसलिए हमारा कार्य संगत समुच्चय Γ को संगत और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित करना होगा।

इस योजना में एक अड़चन है: यदि $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$ है, तो हम चाहेंगे कि कोई अचर c चुनकर इस प्रक्रिया में $\varphi(c)$ जोड़ सकें। पर हम कैसे जानें कि ऐसा करना सदा संभव है? संभव है कि हमारी भाषा में केवल कुछ अचरों हों और उनमें से प्रत्येक के लिए $\neg\varphi(c) \in \Gamma$ हो। हम $\varphi(c)$ भी नहीं जोड़ सकते, क्योंकि उससे समुच्चय असंगत हो जाएगा और हमें मालूम नहीं होगा कि $\mathfrak{M}$ को $\varphi(c)$ सत्य बनाना है या $\neg\varphi(c)$। यह भी संभव है कि Γ में केवल ऐसी भाषा के वाक्य हों जिसमें एक भी अचर चिह्न न हो (उदाहरणतः समुच्चय-सिद्धांत की भाषा)।

इस समस्या का समाधान यह है कि आरंभ में ही अनंततः अनेक अचर और ऐसे वाक्य जोड़ दिए जाएँ जो उन्हें उचित ढंग से परिमाणकों से जोड़ते हों। (निस्संदेह, हमें सत्यापित करना होगा कि इससे असंगति उत्पन्न नहीं हो सकती।)

हमारा मूल निर्माण उस समय सुचारु है जब परमाण्विक वाक्यों में केवल अचरों हों। पर भाषा में फलन-चिह्नों भी हो सकते हैं। उस दशा में इन फलन-चिह्नों को $\mathbb{N}$ पर उचित फलन देना, ताकि सब कुछ काम करे, कठिन हो सकता है। इसलिए एक और युक्ति अपनाएँ: i से c_i की व्याख्या करने के बदले, स्वयं अचरों के समुच्चय को प्रांत मान लें। तब $\mathfrak{M}$ प्रत्येक अचर को उसी को निर्दिष्ट कर सकती है: $c_i^{\mathfrak{M}} = c_i$। किंतु यहीं क्यों रुकें: $|\mathfrak{M}|$ को भाषा के सभी *पदों* का समुच्चय मान लें! ऐसा करने पर फलन-चिह्नों को फलन (जो पदों को निविष्टि के रूप में लेकर पदों को मान के रूप में देते हैं) निर्दिष्ट करने का एक प्रत्यक्ष उपाय है: फलन-चिह्न f_i^n को वह फलन दें जो n पदों t_1, ..., t_n को निविष्टि के रूप में लेकर $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ पद को मान के रूप में देता है।

पहेली का अंतिम टुकड़ा यह है कि $=$ का क्या किया जाए। विधेय-चिह्न $=$ की व्याख्या नियत है: $\mathfrak{M} \vDash t = t'$ तभी जब $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t')$ हो। अब यदि हम व्यवस्था ऐसी करें कि पद t का मान स्वयं t हो, तो यह संरचना

$t = t'$ रूप के *किसी भी* वाक्य को तब तक सत्य नहीं बनाएगी जब तक t और t' बिल्कुल वही पद न हों। यह निस्संदेह एक समस्या है, क्योंकि फलन-चिह्नों वाली भाषा के लगभग प्रत्येक रोचक सिद्धांत में $t = t'$ रूप के ऐसे वाक्य प्रमेय होंगे जिनमें t और t' एक ही पद नहीं हैं (उदाहरणतः अंकगणित के सिद्धांतों में: $(\mathsf{o} + \mathsf{o}) = \mathsf{o}$)। इस समस्या के समाधान के लिए हम $\mathfrak{M}$ का प्रांत बदलते हैं: $|\mathfrak{M}|$ की वस्तुओं के रूप में पदों का उपयोग करने के बजाय हम पदों के समुच्चयों का उपयोग करते हैं, और प्रत्येक समुच्चय में वे सभी पद होते हैं जिन्हें Γ के वाक्य बराबर होने को बाध्य करते हैं। अतः, उदाहरण के लिए, यदि Γ अंकगणित का सिद्धांत है, तो इनमें से एक समुच्चय में ये सब होंगे: o, $(\mathsf{o} + \mathsf{o})$, $(\mathsf{o} \times \mathsf{o})$, इत्यादि। इसी समुच्चय को हम o के लिए निर्दिष्ट करेंगे, और पता चलेगा कि यही समुच्चय इसके सभी पदों का भी मान है, जैसे $(\mathsf{o} + \mathsf{o})$ का। इसलिए वाक्य $(\mathsf{o} + \mathsf{o}) = \mathsf{o}$ इस संशोधित संरचना में सत्य होगा।

अब देखें कि हम ठीक क्या करेंगे। पहले हम पूर्ण संगत समुच्चयों के गुणों की जाँच करेंगे। विशेषतः हम सिद्ध करेंगे कि पूर्ण संगत समुच्चय में $\varphi \land \psi$ तभी होता है जब उसमें φ और ψ दोनों हों, और $\varphi \lor \psi$ तभी होता है जब उनमें से कम-से-कम एक उसमें हो; इत्यादि (प्रतिज्ञप्ति 23.2)। इसके बाद हम वाक्यों के "संतृप्त" समुच्चयों को परिभाषित करेंगे और उनके गुणों की जाँच करेंगे। संतृप्त समुच्चय वह है जिसमें ऐसे सशर्त वाक्य होते हैं जो प्रत्येक परिमाणित वाक्य को उसके निदर्शों से जोड़ते हैं (परिभाषा 23.5)। हम दिखाएँगे कि किसी भी संगत समुच्चय Γ को सदा किसी संतृप्त समुच्चय Γ' तक विस्तारित किया जा सकता है (सहायक प्रमेय 23.6)। यदि कोई समुच्चय संगत, संतृप्त और पूर्ण है, तो उसमें यह गुण भी होता है कि वह $\exists x\, \varphi(x)$ को तभी समाहित करता है जब वह $\varphi(t)$ को किसी बंद पद t के लिए समाहित करे और $\forall x\, \varphi(x)$ को तभी समाहित करता है जब वह $\varphi(t)$ को प्रत्येक बंद पद t के लिए समाहित करे (प्रतिज्ञप्ति 23.7)। फिर हम संतृप्त संगत समुच्चय Γ' लेकर दिखाएँगे कि उसे संतृप्त, संगत और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है (सहायक प्रमेय 23.8)। इसी समुच्चय Γ^* से हम अपना पद-प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ परिभाषित करेंगे। पद-प्रतिरूप का प्रांत बंद पदों का समुच्चय है और उसके विधेय-चिह्नों की व्याख्या उन परमाण्विक वाक्यों से होता है जो Γ^* में हैं (परिभाषा 23.9)। हम संतृप्त, पूर्ण संगत समुच्चयों के गुणों से दिखाएँगे कि वास्तव में $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$ हो (सहायक प्रमेय 23.12), और अतः विशेषतः $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \Gamma$। अंत में, हम विचार करेंगे कि यदि Γ में $=$ भी हो तो पद-प्रतिरूप कैसे परिभाषित किया जाए (परिभाषा 23.16), और दिखाएँगे कि वह Γ^* को संतुष्ट करता है (सहायक प्रमेय 23.19)।

23.3 वाक्यों के पूर्ण संगत समुच्चय

परिभाषा 23.1 (पूर्ण समुच्चय). वाक्यों का समुच्चय Γ *पूर्ण* तभी और केवल तभी है जब किसी भी वाक्य φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$ हो या $\neg\varphi \in \Gamma$ हो।

वाक्यों के पूर्ण समुच्चय किसी प्रश्न को अनुत्तरित नहीं छोड़ते। किसी भी वाक्य φ के लिए Γ यह "कहता" है कि φ सत्य है या असत्य। पूर्ण समुच्चयों का महत्त्व पूर्णता प्रमेय के प्रमाण से आगे तक जाता है। उदाहरण के लिए, कोई सिद्धांत जो पूर्ण और अभिगृहीतीकरणीय हो, सदा निर्णेय होता है।

पूर्णता के प्रमाण में पूर्ण संगत समुच्चय महत्त्वपूर्ण हैं, क्योंकि हम गारंटी दे सकते हैं कि वाक्यों का प्रत्येक संगत समुच्चय Γ किसी पूर्ण संगत समुच्चय Γ^* में समाहित है। प्रत्येक पूर्ण संगत समुच्चय में, हर वाक्य φ के लिए, या तो φ या उसका निषेध $\neg\varphi$ होता है, पर दोनों नहीं। विशेषतः यह परमाण्विक वाक्यों के लिए सत्य है; अतः पूर्ण संगत समुच्चय से, ऐसी भाषा में जिसे अचरों द्वारा उपयुक्त रूप से विस्तारित किया गया हो, हम ऐसी संरचना बना सकते हैं जिसमें विधेय-चिह्नों की व्याख्या इस आधार पर परिभाषित होता है कि कौन-से परमाण्विक वाक्यों समुच्चय Γ^* में हैं। फिर दिखाया जा सकता है कि यह संरचना, Γ^* के सभी वाक्यों को (और इसलिए Γ के सभी वाक्यों को भी) सत्य बनाती है। इस अंतिम तथ्य के प्रमाण के लिए यह आवश्यक है कि $\neg\varphi \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \notin \Gamma^*$ हो, $(\varphi \lor \psi) \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$ या $\psi \in \Gamma^*$ हो, इत्यादि।

आगे हम प्रायः $\vdash$ की स्वतुल्यता, एकदिष्टता और संक्रामकता के गुणों का निःशब्द उपयोग करेंगे (देखें खंड 19.8, 20.7, 21.7 और 22.6)।

प्रतिज्ञप्ति 23.2. *मान लें कि Γ पूर्ण और संगत है। तब:*

1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।*

2. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों।*

3. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*

4. *$\varphi \to \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \notin \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*

प्रमाण. निम्न सभी बातों के लिए मान लें कि Γ पूर्ण और संगत है।

1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।

   मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$। इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.20, 20.20, 21.20 और 22.28 के अनुसार Γ असंगत है। यह इस धारणा का खंडन करता है कि Γ संगत है। अतः $\varphi \notin \Gamma$ नहीं हो सकता, इसलिए $\varphi \in \Gamma$।

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों:

   अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 19.22, 20.22, 21.22 और 22.30 के पद (1) से $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \psi$। (1) से $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ मिलते हैं, जैसा अपेक्षित था।

   विपरीत दिशा के लिए $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ मान लें। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.22, 20.22, 21.22 और 22.30 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$। (1) से $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$।

3. पहले हम दिखाते हैं कि यदि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, तो या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$। मान लें कि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ पर $\varphi \notin \Gamma$ और $\psi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$ और $\neg\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.23, 20.23, 21.23 और 22.31 के पद (1) से Γ असंगत है, जो विरोधाभास है। अतः या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$।

   विपरीत दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.23, 20.23, 21.23 और 22.31 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$। (1) से $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, जैसा अपेक्षित था।

4. अग्र दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \to \psi \in \Gamma$, और इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ तथा $\psi \notin \Gamma$। इन धारणाओं पर $\varphi \to \psi \in \Gamma$ और $\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.24, 20.24, 21.24 और 22.32 के पद (1) से $\Gamma \vdash \psi$। किंतु तब (1) से $\psi \in \Gamma$, जो $\psi \notin \Gamma$ वाली धारणा का खंडन करता है।

   विपरीत दिशा के लिए पहले उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\varphi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.24, 20.24, 21.24 और 22.32 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। पुनः (1) से $\varphi \to \psi \in \Gamma$ मिलता है, जैसा अपेक्षित था।

   अब उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\psi \in \Gamma$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.24, 20.24, 21.24 और 22.32 के पद (2) से फिर $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। (1) से $\varphi \to \psi \in \Gamma$। □

23.4 हेंकिन विस्तार

पूर्णता प्रमेय को सिद्ध करने की एक कठिनाई यह है कि पूर्ण संगत समुच्चय Γ से बनाई गई हमारी संरचना को Γ के सभी परिमाणित सूत्रों सत्य बनाने चाहिए। इसकी गारंटी के लिए हम लियोन हेंकिन की एक युक्ति का उपयोग करते हैं। मूलतः इस युक्ति में भाषा को अनंततः अनेक अचरों से विस्तारित करना और प्रत्येक सूत्र $\varphi(x)$, जिसमें एक मुक्त चर हो, के लिए निम्न रूप का सूत्र जोड़ना है: $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$, जहाँ c नए अचरों में से एक है। जब हम Γ को संतुष्ट करने वाली संरचना बनाएँगे, तो इससे यह गारंटी होगी कि प्रत्येक सत्य अस्तित्ववाची वाक्य का कोई साक्षी नए अचरों में मौजूद हो।

प्रतिज्ञप्ति 23.3. *यदि Γ, $\mathcal{L}$ में संगत है और $\mathcal{L}'$ को $\mathcal{L}$ में गणनीय अनंत समुच्चय के नए अचरों d_0, d_1, ...जोड़कर प्राप्त किया गया है, तो Γ, $\mathcal{L}'$ में संगत है।*

परिभाषा 23.4 (संतृप्त समुच्चय). सूत्रों का समुच्चय Γ, भाषा $\mathcal{L}$ में, *संतृप्त* तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक सूत्र $\varphi(x) \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L})$, जिसमें एक मुक्त चर x हो, के लिए कोई अचर $c \in \mathcal{L}$ ऐसा हो कि $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c) \in \Gamma$।

अगली प्रमेय के प्रमाण में निम्न परिभाषा का उपयोग होगा।

परिभाषा 23.5. $\mathcal{L}'$ को प्रतिज्ञप्ति 23.3 जैसा मानें। एक गणन $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$, ...नियत करें, जिसमें वे सभी सूत्रों $\varphi_i(x_i)$ हों जो $\mathcal{L}'$ के हैं और जिनमें एक चर (x_i) मुक्त आता है। हम वाक्यों θ_n को n पर आगमन द्वारा परिभाषित करते हैं।

c_0 को उन d_i में पहला अचर मानें जिन्हें हमने $\mathcal{L}$ में जोड़ा था और जो $\varphi_0(x_0)$ में नहीं आता। यह मानते हुए कि θ_0, ..., θ_{n-1} पहले ही परिभाषित हो चुके हैं, c_n को नए अचरों d_i में पहला ऐसा अचर मानें जो न तो θ_0, ..., θ_{n-1} में और न $\varphi_n(x_n)$ में आता है।

अब θ_n को निम्न सूत्र मानें: $\exists x_n\, \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(c_n)$।

सहायक प्रमेय 23.6. *प्रत्येक संगत समुच्चय Γ को किसी संतृप्त संगत समुच्चय Γ' तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रमाण. वाक्यों का संगत समुच्चय Γ, भाषा $\mathcal{L}$ में दिया हो, तो गणनीय अनंत समुच्चय के नए अचरों जोड़कर भाषा को $\mathcal{L}'$ में विस्तारित करें। प्रतिज्ञप्ति 23.3 से Γ इस समृद्धतर भाषा में भी संगत है। आगे, θ_i को परिभाषा 23.5 जैसा मानें। रखें

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$$

अर्थात् $\Gamma_{n+1} = \Gamma \cup \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$, और $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$ रखें। स्पष्टतः Γ' संतृप्त है।

यदि Γ' असंगत होता, तो किसी n के लिए Γ_n असंगत होता (अभ्यास: समझाइए क्यों)। अतः Γ' की संगतता दिखाने के लिए n पर आगमन से यह दिखाना पर्याप्त है कि प्रत्येक समुच्चय Γ_n संगत है।

आगमन का आधार केवल यह कथन है कि $\Gamma_0 = \Gamma$ संगत है, जो प्रमेय की परिकल्पना है। आगमन-चरण के लिए मान लें कि Γ_n संगत है, पर $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ असंगत है। याद करें कि θ_n यह है: $\exists x_n\, \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(c_n)$, जहाँ $\varphi_n(x_n)$, $\mathcal{L}'$ का ऐसा सूत्र है जिसमें केवल चर x_n मुक्त है। जिस प्रकार हमने c_n चुना है (देखें परिभाषा 23.5), उससे c_n न तो $\varphi_n(x_n)$ में आता है, न ही Γ_n में।

यदि $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ असंगत है, तो $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n$, और इसलिए निम्न दोनों सत्य हैं:

$$\Gamma_n \vdash \exists x_n\, \varphi_n(x_n) \qquad \Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$$

चूँकि c_n, Γ_n या $\varphi_n(x_n)$ में नहीं आता, प्रमेय 19.25, 20.25, 21.25 और 22.33 लागू होता है। $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$ से हमें $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n)$ मिलता है। अतः हमारे पास निम्न दोनों हैं: $\Gamma_n \vdash \exists x_n\, \varphi_n(x_n)$ और $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n)$, इसलिए Γ_n स्वयं असंगत है। (ध्यान दें कि $\forall x_n \neg\varphi_n(x_n) \vdash \neg\exists x_n\, \varphi_n(x_n)$।) विरोधाभास: Γ_n को संगत माना गया था। अतः $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ संगत है। □

अब हम दिखाएँगे कि संतृप्त *पूर्ण* संगत समुच्चयों में यह गुण होता है कि वे किसी सार्ववाची वाक्य को तभी और केवल तभी समाहित करते हैं जब वे उसके सभी निदर्शों को समाहित करें और वे किसी अस्तित्ववाची वाक्य को तभी और केवल तभी समाहित करते हैं जब वे कम-से-कम एक निदर्श को समाहित करें। इसका उपयोग हम यह दिखाने के लिए करेंगे कि पूर्ण, संगत, संतृप्त समुच्चय से बनाई गई संरचना उसके सभी परिमाणित वाक्यों को सत्य बनाती है।

प्रतिज्ञप्ति 23.7. *मान लें कि Γ पूर्ण, संगत और संतृप्त है।*

1. *$\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi(t) \in \Gamma$ कम-से-कम एक बंद पद t के लिए हो।*

2. *$\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi(t) \in \Gamma$ सभी बंद पदों t के लिए हो।*

प्रमाण. 1. पहले मान लें कि $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$। क्योंकि Γ संतृप्त है, $(\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)) \in \Gamma$ किसी अचर c के लिए। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.24, 20.24, 21.24 और 22.32 के पद (1) और प्रतिज्ञप्ति 23.2(1) से $\varphi(c) \in \Gamma$।

दूसरी दिशा में संतृप्ति आवश्यक नहीं है: मान लें कि $\varphi(t) \in \Gamma$। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 19.26, 20.26, 21.26 और 22.34 के पद (1) से $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 23.2(1) से $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$।

2. मान लें कि $\varphi(t) \in \Gamma$ सभी बंद पदों t के लिए। विरोधाभास के लिए मान लें कि $\forall x\, \varphi(x) \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण है, $\neg\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$। संतृप्ति से, $(\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\varphi(c)) \in \Gamma$ किसी अचर c के लिए। परिकल्पना से, क्योंकि c बंद पद है, $\varphi(c) \in \Gamma$। किंतु इससे Γ असंगत हो जाता। (अभ्यास: वह व्युत्पत्ति दीजिए जो दिखाती है कि

$$\neg\forall x\, \varphi(x), \exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\varphi(c), \varphi(c)$$

असंगत है।)

विपरीत दिशा के लिए संतृप्ति की आवश्यकता नहीं है: मान लें कि $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 19.26, 20.26, 21.26 और 22.34 के पद (2) से $\Gamma \vdash \varphi(t)$। प्रतिज्ञप्ति 23.2 से हमें $\varphi(t) \in \Gamma$ मिलता है। □

23.5 लिंडेनबाउम उपपत्ति

अब हम एक ऐसी उपपत्ति सिद्ध करते हैं जो दिखाती है कि वाक्यों का कोई भी संगत समुच्चय वाक्यों के ऐसे समुच्चय में समाहित है जो केवल संगत ही नहीं, बल्कि पूर्ण भी है। प्रमाण एक बार में एक वाक्य जोड़ता है और प्रत्येक चरण पर गारंटी देता है कि समुच्चय संगत बना रहे। हम ऐसा इसलिए करते हैं कि प्रत्येक φ के लिए किसी चरण पर या तो φ या $\neg\varphi$ जोड़ दिया जाए। तब इस रचना के सभी चरणों के संघ में या तो φ या उसका निषेध $\neg\varphi$ होता है, और इसलिए वह पूर्ण है। वह संगत भी है, क्योंकि हर चरण पर हम सुनिश्चित करते हैं कि असंगति न आए।

सहायक प्रमेय 23.8 (लिंडेनबाउम उपपत्ति). *प्रत्येक संगत समुच्चय Γ को, भाषा $\mathcal{L}$ में, पूर्ण और संगत समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रमाण. मान लें कि Γ संगत है। $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ को $\mathcal{L}$ के सभी वाक्यों का एक गणन मानें। $\Gamma_0 = \Gamma$ परिभाषित करें, और

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{यदि } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ संगत है;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

रखें। $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$।

प्रत्येक Γ_n संगत है: परिभाषा से Γ_0 संगत है। यदि $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ है, तो इसका कारण यही है कि अंतिम समुच्चय संगत है। यदि वह संगत नहीं है, तो $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$। हमें सत्यापित करना है कि $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ संगत है। मान लें कि वह संगत नहीं है। तब $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ और $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ *दोनों* असंगत हैं। इसका अर्थ होगा कि प्रतिज्ञप्तियाँ 19.21, 20.21, 21.21 और 22.29 से Γ_n असंगत है, जो आगमन-परिकल्पना के विरुद्ध है।

प्रत्येक n और प्रत्येक $i < n$ के लिए $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$। यह बात n पर सरल आगमन से निकलती है। $n = 0$ के लिए कोई $i < 0$ नहीं है, इसलिए कथन स्वतः सत्य है। आगमन-चरण के लिए मान लें कि यह n के लिए सत्य है। हम दिखाते हैं कि यदि $i < n + 1$ तो $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$। रचना से हमारे पास $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ या $= \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ है। अतः $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$। यदि $i < n + 1$, तो आगमन-परिकल्पना से $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ (यदि $i < n$), अथवा इस तुच्छ तथ्य से कि $\Gamma_n \subseteq \Gamma_n$ (यदि $i = n$)। हमें $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ मिलता है, $\subseteq$ की संक्रामकता से।

इससे निकलता है कि Γ^* संगत है। कारण यह है: मान लें कि $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ परिमित है। प्रत्येक $\psi \in \Gamma'$ का Γ_i में होना भी सत्य है, किसी i के लिए। इन सूचकांकों में सबसे बड़ा n मानें। चूँकि $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ यदि $i \leq n$, प्रत्येक $\psi \in \Gamma'$ का $\in \Gamma_n$ होना भी सत्य है; अर्थात् $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, और Γ_n संगत है। इसलिए प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ संगत है। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.17, 20.17, 21.17 और 22.21 से Γ^* संगत है।

$\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ का प्रत्येक वाक्य, Γ^* को परिभाषित करने में प्रयुक्त सूची में आता है। यदि $\varphi_n \notin \Gamma^*$ है, तो उसका कारण यह है कि $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ असंगत था। किंतु तब $\neg\varphi_n \in \Gamma^*$, इसलिए Γ^* पूर्ण है। □

23.6 प्रतिरूप का निर्माण

अभी हमें $=$ की चिंता नहीं है; अर्थात् हम केवल यह दिखाना चाहते हैं कि वाक्यों का ऐसा संगत समुच्चय Γ जिसमें $=$ न हो, संतुष्टनीय है। पहले हम Γ को किसी संगत, पूर्ण और संतृप्त समुच्चय Γ^* तक विस्तारित करते हैं। इस स्थिति में प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ की परिभाषा सरल है: हम $\mathcal{L}'$ के बंद पदों के समुच्चय को प्रांत मानते हैं। प्रत्येक अचर को स्वयं उसी को निर्दिष्ट करते हैं, और अधिक सामान्यतः यह सुनिश्चित करते हैं कि प्रत्येक बंद पद t के लिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$। विधेय-चिह्नों को विस्तार इस प्रकार दिए जाते हैं कि कोई परमाण्विक वाक्य, $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ में तभी और केवल तभी सत्य हो जब वह Γ^* में हो। इससे Γ^* के सभी परमाण्विक वाक्यों स्पष्टतः $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ में सत्य होंगे। शेष तब सत्य होते हैं जब आरंभिक Γ^* संगत, पूर्ण और संतृप्त हो।

परिभाषा 23.9 (पद-प्रतिरूप). मान लें कि Γ^* कोई पूर्ण, संगत और संतृप्त समुच्चय है, भाषा $\mathcal{L}$ में वाक्यों का। *पद-प्रतिरूप* $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$, Γ^* का, निम्न प्रकार परिभाषित संरचना है:

1. प्रांत $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$, $\mathcal{L}$ के सभी बंद पदों का समुच्चय है।
2. अचर c की व्याख्या स्वयं c है: $c^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} = c$।
3. फलन-चिह्न f को वह फलन निर्दिष्ट किया जाता है जो बंद पदों t_1, ..., t_n को तर्कों के रूप में लेकर बंद पद $f(t_1, \ldots, t_n)$ को मान के रूप में देता है:
$$f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$
4. यदि R कोई n-स्थानीय विधेय-चिह्न है, तो
$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} \text{ तभी और केवल तभी } R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*.$$

अब हम जाँचेंगे कि वास्तव में $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$ है।

सहायक प्रमेय 23.10. *मान लें कि $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ वही पद-प्रतिरूप है जो परिभाषा 23.9 में परिभाषित है। तब $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$।*

प्रमाण. प्रमाण t पर आगमन से है। आधार स्थिति, जहाँ t कोई अचर है, पद-प्रतिरूप की परिभाषा से सीधे मिलती है। आगमन-चरण के लिए मान लें कि $t_1, \ldots, t_n$ ऐसे बंद पद हैं कि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_i) = t_i$, और f कोई n-स्थानीय फलन-चिह्न है। तब

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_n)) \\
&= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \ldots, t_n) \\
&= f(t_1, \ldots, t_n),
\end{aligned}$$

और इसलिए आगमन से यह प्रत्येक बंद पद t के लिए सत्य है। □

कोई संरचना $\mathfrak{M}$ किसी अस्तित्ववाची परिमाणित वाक्य $\exists x\, \varphi(x)$ को तब भी सत्य बना सकती है जब ऐसा कोई निदर्श $\varphi(t)$ न हो जिसे वह सत्य बनाती हो। कोई संरचना $\mathfrak{M}$ सभी निदर्शों $\varphi(t)$ को, किसी सार्ववाची परिमाणित वाक्य $\forall x\, \varphi(x)$ के, सत्य बना सकती है, पर स्वयं $\forall x\, \varphi(x)$ को सत्य न बनाए। कारण यह है कि सामान्यतः $|\mathfrak{M}|$ का प्रत्येक अवयव किसी बंद पद का मान नहीं होता ($\mathfrak{M}$ संभवतः आच्छादित न हो)। इसी कारण संतुष्टि-संबंध को चर-निर्धारणाओं द्वारा परिभाषित किया जाता है। किंतु हमारे पद-प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ के लिए यह आवश्यक नहीं होगा—क्योंकि वह आच्छादित है। यही अगले परिणाम का विषय है।

प्रतिज्ञप्ति 23.11. *मान लें कि $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$, परिभाषा 23.9 का पद-प्रतिरूप है।*

1. *$\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \exists x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$ कम-से-कम एक बंद पद t के लिए हो।*

2. *$\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \forall x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$ सभी बंद पदों t के लिए हो।*

प्रमाण. 1. प्रतिज्ञप्ति 16.19 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \exists x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब कम-से-कम एक चर-निर्धारणा s के लिए $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$। चूँकि $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ में $\mathcal{L}$ के बंद पद होते हैं, यह तभी और केवल तभी सत्य है जब कोई कम-से-कम एक बंद पद t ऐसा हो कि $s(x) = t$ और $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$, जहाँ $s(x) = t$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$, क्योंकि $\varphi(t)$ एक वाक्य है।

2. प्रतिज्ञप्ति 16.19 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \forall x\, \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक चर-निर्धारणा s के लिए $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$। याद करें कि $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ में $\mathcal{L}$ के बंद पद होते हैं, अतः प्रत्येक बंद पद t के लिए $s(x) = t$ ऐसी चर-निर्धारणा है, और किसी भी चर-निर्धारणा के लिए $s(x)$ कोई बंद पद t है। प्रतिज्ञप्ति 16.23 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$, जहाँ $s(x) = t$। प्रतिज्ञप्ति 16.18 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$, क्योंकि $\varphi(t)$ एक वाक्य है। □

सहायक प्रमेय 23.12 (सत्यता उपपत्ति). *मान लें कि φ में $=$ नहीं है। तब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$।*

प्रमाण. हम दोनों दिशाओं को एक साथ और φ पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं।

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \bot$ संतुष्टि की परिभाषा से। दूसरी ओर, $\bot \notin \Gamma^*$, क्योंकि Γ^* संगत है।

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \top$ संतुष्टि की परिभाषा से। दूसरी ओर, $\top \in \Gamma^*$, क्योंकि Γ^* संगत और पूर्ण है, और $\Gamma^* \vdash \top$।

3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash R(t_1, \dots, t_n)$ तभी और केवल तभी जब $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}$ (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*$ ($\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ के निर्माण से)।

4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ (संतुष्टि की परिभाषा से)। आगमन-परिकल्पना से, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ तभी और केवल तभी जब $\psi \notin \Gamma^*$। चूँकि Γ^* संगत और पूर्ण है, $\psi \notin \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\neg\psi \in \Gamma^*$।

5. $\varphi \equiv \psi \land \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब दोनों $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi$ और $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हों (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \in \Gamma^*$ और $\chi \in \Gamma^*$ दोनों हों (आगमन-परिकल्पना से)। प्रतिज्ञप्ति 23.2(2) से यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \land \chi) \in \Gamma^*$।

6. $\varphi \equiv \psi \lor \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi$ या $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हो (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \in \Gamma^*$ या $\chi \in \Gamma^*$ हो (आगमन-परिकल्पना से)। यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \lor \chi) \in \Gamma^*$ (प्रतिज्ञप्ति 23.2(3) से)।

7. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ या $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ हो (संतुष्टि की परिभाषा से), और यह तभी और केवल तभी जब $\psi \notin \Gamma^*$ या $\chi \in \Gamma^*$ हो (आगमन-परिकल्पना से)। यह तभी और केवल तभी जब $(\psi \to \chi) \in \Gamma^*$ (प्रतिज्ञप्ति 23.2(4) से)।

8. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi(t)$ सभी पदों t के लिए हो (प्रतिज्ञप्ति 23.11)। आगमन-परिकल्पना से यह तभी और केवल तभी जब $\psi(t) \in \Gamma^*$ सभी पदों t के लिए हो; और प्रतिज्ञप्ति 23.7 से यह आगे तभी और केवल तभी जब $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$।

9. $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi(t)$ कम-से-कम एक पद t के लिए हो (प्रतिज्ञप्ति 23.11)। आगमन-परिकल्पना से यह तभी और केवल तभी जब $\psi(t) \in \Gamma^*$ कम-से-कम एक पद t के लिए हो। प्रतिज्ञप्ति 23.7 से यह आगे तभी और केवल तभी जब $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma^*$। □

23.7 तादात्म्य

पिछले अनुभाग में दिया पद-प्रतिरूप का निर्माण उन समुच्चयों Γ के लिए प्रथम-क्रम तर्क की पूर्णता स्थापित करने को पर्याप्त है जिनमें $=$ नहीं है। पद-प्रतिरूप प्रत्येक ऐसे $\varphi \in \Gamma^*$ को संतुष्ट करता है जिसमें $=$ नहीं है (और इसलिए सभी $\varphi \in \Gamma$ को भी)। किंतु यदि $=$ उपस्थित हो तो यह काम नहीं करता। कारण यह है कि तब Γ^* में कोई वाक्य $t = t'$ हो सकता है, जबकि पद-प्रतिरूप में किसी पद का मान स्वयं वही पद होता है। अतः यदि t और t' भिन्न पद हैं, तो पद-प्रतिरूप में उनके मान—क्रमशः t और t'—भिन्न हैं, इसलिए $t = t'$ असत्य है। फिर भी हम इसे "गुणनखंडन" नामक रचना से ठीक कर सकते हैं।

परिभाषा 23.13. Γ^* को $\mathcal{L}$ में वाक्यों का संगत और पूर्ण समुच्चय मानें। हम संबंध $\approx$ को $\mathcal{L}$ के बंद पदों के समुच्चय पर इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$t \approx t' \quad \text{तभी और केवल तभी} \quad t = t' \in \Gamma^*$$

प्रतिज्ञप्ति 23.14. *संबंध $\approx$ में निम्न गुण हैं:*

1. *$\approx$ स्वतुल्य है।*
2. *$\approx$ सममित है।*
3. *$\approx$ संक्रामक है।*
4. *यदि $t \approx t'$, f कोई फलन-चिह्न है, और t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n बंद पद हैं, तो*

$$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \approx f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

5. *यदि $t \approx t'$, R कोई विधेय-चिह्न है, और t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n बंद पद हैं, तो*

$$R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^* \text{ तभी और केवल तभी } R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^*.$$

प्रमाण. चूँकि Γ^* संगत और पूर्ण है, $t = t' \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma^* \vdash t = t'$। अतः निम्न कथनों को दिखाना पर्याप्त है:

1. $\Gamma^* \vdash t = t$, सभी बंद पदों t के लिए।
2. यदि $\Gamma^* \vdash t = t'$, तो $\Gamma^* \vdash t' = t$।
3. यदि $\Gamma^* \vdash t = t'$ और $\Gamma^* \vdash t' = t''$, तो $\Gamma^* \vdash t = t''$।
4. यदि $\Gamma^* \vdash t = t'$, तो

$$\Gamma^* \vdash f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, , \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n)$$

   प्रत्येक n-स्थानीय फलन-चिह्न f और बंद पदों t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n के लिए।

5. यदि $\Gamma^* \vdash t = t'$ और $\Gamma^* \vdash R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n)$, तो $\Gamma^* \vdash R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n)$ प्रत्येक n-स्थानीय विधेय-चिह्न R और बंद पदों t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n के लिए। $\square$

परिभाषा 23.15. मान लें कि Γ^*, भाषा $\mathcal{L}$ में संगत और पूर्ण समुच्चय है, t बंद पद है, और $\approx$ पिछली परिभाषा जैसा है। तब:

$$[t]_\approx = \{t' : t' \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L}), t \approx t'\}$$

और $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx = \{[t]_\approx : t \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L})\}$।

परिभाषा 23.16. मान लें कि $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$, Γ^* के लिए परिभाषा 23.9 वाला पद-प्रतिरूप है। तब $\mathfrak{M}/_\approx$ निम्न संरचना है:

1. $|\mathfrak{M}/_\approx| = \mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx$।
2. $c^{\mathfrak{M}/\approx} = [c]_\approx$
3. $f^{\mathfrak{M}/\approx}([t_1]_\approx, \dots, [t_n]_\approx) = [f(t_1, \dots, t_n)]_\approx$
4. $\langle [t_1]_\approx, \dots, [t_n]_\approx \rangle \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \dots, t_n)$, अर्थात् तभी और केवल तभी जब $R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*$।

ध्यान दें कि हमने $f^{\mathfrak{M}/\approx}$ और $R^{\mathfrak{M}/\approx}$ को $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx$ के अवयवों के लिए, उन्हें $[t]_\approx$ कहकर, अर्थात् *प्रतिनिधियों* $t \in [t]_\approx$ के माध्यम से परिभाषित किया है। हमें सुनिश्चित करना होगा कि ये परिभाषाएँ इन प्रतिनिधियों के चुनाव पर निर्भर न हों; अर्थात् ऐसे किसी दूसरे चुनाव t' के लिए, जो वही तुल्यता-वर्ग निर्धारित करता है ($[t]_\approx = [t']_\approx$), परिभाषाएँ वही परिणाम दें। उदाहरणार्थ, यदि R एक-स्थानीय विधेय-चिह्न है, तो परिभाषा का अंतिम खंड कहता है कि $[t]_\approx \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash R(t)$। यदि किसी दूसरे पद t' के लिए, जहाँ $t \approx t'$, $\mathfrak{M} \nvDash R(t)$, तो परिभाषा माँगेगी कि $[t']_\approx \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$। यदि $t \approx t'$, तो $[t]_\approx = [t']_\approx$, पर हमारे पास $[t]_\approx \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ और $[t]_\approx \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$ दोनों नहीं हो सकते। किंतु प्रतिज्ञप्ति 23.14 गारंटी देता है कि ऐसा नहीं हो सकता।

प्रतिज्ञप्ति 23.17. *$\mathfrak{M}/_\approx$ सुनिर्धारित है; अर्थात् यदि $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$ बंद पद हैं, और $t_i \approx t'_i$ तो*

1. *$[f(t_1, \dots, t_n)]_\approx = [f(t'_1, \dots, t'_n)]_\approx$, अर्थात्*

$$f(t_1, \dots, t_n) \approx f(t'_1, \dots, t'_n)$$

और

2. *$\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \dots, t_n)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash R(t'_1, \dots, t'_n)$, अर्थात्*

$$R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^* \text{ तभी और केवल तभी } R(t'_1, \dots, t'_n) \in \Gamma^*.$$

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 23.14 से n पर आगमन द्वारा निकलता है। □

पद-प्रतिरूप की तरह ही, सत्यता उपपत्ति सिद्ध करने से पहले हमें निम्न उपपत्ति चाहिए।

सहायक प्रमेय 23.18. *मान लें कि $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$; तब $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}/\approx}(t) = [t]_\approx$।*

प्रमाण. प्रमाण सहायक प्रमेय 23.10 के प्रमाण के समान है। □

सहायक प्रमेय 23.19. *$\mathfrak{M}/_\approx \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$, सभी वाक्यों φ के लिए।*

प्रमाण. φ पर आगमन से, ठीक सहायक प्रमेय 23.12 के प्रमाण की तरह। केवल उस स्थिति पर अतिरिक्त ध्यान चाहिए जिसमें $\varphi \equiv t = t'$।

$\mathfrak{M}/_\approx \vDash t = t'$ तभी और केवल तभी $[t]_\approx = [t']_\approx$ ($\mathfrak{M}/_\approx$ की परिभाषा से)
तभी और केवल तभी $t \approx t'$ ($[t]_\approx$ की परिभाषा से)
तभी और केवल तभी $t = t' \in \Gamma^*$ ($\approx$ की परिभाषा से)। □

ध्यान दें कि $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ सदा गणनीय और अनंत है, किंतु $\mathfrak{M}/_\approx$ परिमित हो सकता है, क्योंकि संभव है कि केवल परिमिततः अनेक वर्ग $[t]_\approx$ हों। यही अपेक्षित है, क्योंकि Γ में ऐसे वाक्यों हो सकते हैं जो अपने को सत्य बनाने वाली प्रत्येक संरचना को परिमित होने को बाध्य करें। उदाहरणार्थ, $\forall x\, \forall y\, x = y$ एक संगत वाक्य है, पर इसे संतुष्ट करने वाली संरचनाएँ केवल वे हैं जिनके प्रांत में ठीक एक अवयव है।

23.8 पूर्णता प्रमेय

अब अपने परिणामों को एक साथ रखें: हम पूर्णता प्रमेय पर पहुँचते हैं।

प्रमेय 23.20 (पूर्णता प्रमेय). *मान लें कि Γ, वाक्यों का समुच्चय है। यदि Γ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है।*

प्रमाण. मान लें कि Γ संगत है। सहायक प्रमेय 23.6 से कोई संतृप्त संगत समुच्चय $\Gamma' \supseteq \Gamma$ है। सहायक प्रमेय 23.8 से कोई $\Gamma^* \supseteq \Gamma'$ है जो संगत और पूर्ण है। चूँकि $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$, प्रत्येक सूत्र $\varphi(x)$ के लिए Γ^* में इस रूप का वाक्य है: $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$। इसलिए Γ^* संतृप्त है। यदि Γ में $=$ नहीं है, तो सहायक प्रमेय 23.12 से $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$। इससे विशेषतः निकलता है कि सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$, अतः Γ संतुष्टनीय है। यदि Γ में $=$ है, तो सहायक प्रमेय 23.19 से सभी वाक्यों φ के लिए $\mathfrak{M}/_\approx \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$। विशेषतः, $\mathfrak{M}/_\approx \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए, अतः Γ संतुष्टनीय है। □

उपप्रमेय 23.21 (पूर्णता प्रमेय, दूसरा रूप). *सभी Γ और वाक्यों φ के लिए: यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. ध्यान दें कि उपप्रमेय 23.21 और प्रमेय 23.20 में आने वाले Γ सार्वत्रिक रूप से परिमाणित हैं। भ्रम से बचने के लिए प्रमेय 23.20 को किसी दूसरे चर से फिर कहें: वाक्यों के किसी भी समुच्चय Δ के लिए, यदि Δ संगत है, तो वह संतुष्टनीय है। प्रतिपक्ष से, यदि Δ संतुष्टनीय नहीं है, तो Δ असंगत है। हम इसी से उपप्रमेय सिद्ध करेंगे।

मान लें कि $\Gamma \vDash \varphi$। तब प्रतिज्ञप्ति 16.28 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंतुष्टनीय है। $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ को अपना Δ मानने पर प्रमेय 23.20 का पिछला रूप देता है कि $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ असंगत है। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.19, 20.19, 21.19 और 22.27 से $\Gamma \vdash \varphi$। □

23.9 संहतता प्रमेय

पूर्णता प्रमेय का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम संहतता प्रमेय है। संहतता प्रमेय कहता है कि यदि वाक्यों के किसी समुच्चय का प्रत्येक *परिमित* उपसमुच्चय संतुष्टनीय है, तो पूरा समुच्चय संतुष्टनीय है—भले ही समुच्चय स्वयं अनंत हो। यह बात तनिक भी स्पष्ट नहीं है। कम-से-कम पहली दृष्टि में ऐसा कुछ नहीं दिखता जो वाक्यों के ऐसे अनंत समुच्चयों की संभावना को रोकता हो जो विरोधाभासी हों, पर जिनमें विरोधाभास मानो उनकी अनंत संख्या से ही उत्पन्न होता हो। संहतता प्रमेय कहता है कि ऐसी स्थिति असंभव है: ऐसा कोई असंतुष्टनीय अनंत वाक्यों-समुच्चय नहीं है जिसका प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय हो। पूर्णता प्रमेय की तरह इसका भी निष्पत्ति से जुड़ा एक रूप है: यदि वाक्यों का कोई अनंत समुच्चय किसी बात को निष्पन्न करता है, तो उसका कोई परिमित उपसमुच्चय पहले ही वह बात निष्पन्न करता है।

परिभाषा 23.22. सूत्रों का समुच्चय Γ *परिमिततः संतुष्टनीय* तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ संतुष्टनीय हो।

प्रमेय 23.23 (संहतता प्रमेय). *किन्हीं भी वाक्यों Γ और φ के लिए निम्न कथन सत्य हैं:*

1. *$\Gamma \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि $\Gamma_0 \vDash \varphi$।*
2. *Γ संतुष्टनीय तभी और केवल तभी है जब वह परिमिततः संतुष्टनीय हो।*

प्रमाण. हम (2) सिद्ध करते हैं। यदि Γ संतुष्टनीय है, तो ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ है कि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए। निस्संदेह, यह $\mathfrak{M}$ भी Γ के प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय को संतुष्ट करती है, अतः Γ परिमिततः संतुष्टनीय है।

अब मान लें कि Γ परिमिततः संतुष्टनीय है। तब प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ संतुष्टनीय है। सुदृढ़ता से (उपप्रमेय 19.31, 20.29, 21.31 और 22.38), प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संगत है। तब प्रतिज्ञप्तियाँ 19.17, 20.17, 21.17 और 22.21 से Γ स्वयं संगत होना चाहिए। पूर्णता (प्रमेय 23.20) से, क्योंकि Γ संगत है, वह संतुष्टनीय है। $\square$

उदाहरण 23.24. प्रत्येक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ में, जो किसी सिद्धांत Γ का है, प्रत्येक पद t निस्संदेह $|\mathfrak{M}|$ के किसी अवयव को निर्दिष्ट करता है। क्या हम यह गारंटी दे सकते हैं कि $|\mathfrak{M}|$ के प्रत्येक अवयव को भी कोई-न-कोई पद निर्दिष्ट करता है? दूसरे शब्दों में, क्या ऐसे सिद्धांत Γ हैं जिनके सभी प्रतिरूप आच्छादित हों? संहतता प्रमेय दिखाता है कि यदि Γ के अनंत प्रतिरूप हों, तो ऐसा नहीं है। इसे इस प्रकार देखें: कोई अनंत प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ लें जो Γ का हो, और c को ऐसा अचर मानें जो Γ की भाषा में न हो। Δ को उन सभी वाक्यों $c \neq t$ का समुच्चय मानें जिनमें t, भाषा $\mathcal{L}$ का कोई पद है, और यह Γ की भाषा है; अर्थात्

$$\Delta = \{c \neq t : t \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L})\}.$$

$\Gamma \cup \Delta$ के किसी परिमित उपसमुच्चय को $\Gamma' \cup \Delta'$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $\Gamma' \subseteq \Gamma$ और $\Delta' \subseteq \Delta$। चूँकि Δ' परिमित है, उसमें केवल परिमिततः अनेक पद हो सकते हैं। $a \in |\mathfrak{M}|$ को $|\mathfrak{M}|$ का ऐसा अवयव मानें जिसे उनमें से कोई निर्दिष्ट नहीं करता, और $\mathfrak{M}'$ को ऐसी संरचना मानें जो $\mathfrak{M}$ जैसी ही है, पर जिसमें $c^{\mathfrak{M}'} = a$ भी है। चूँकि $a \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ उन सभी t के लिए जो Δ' में आते हैं, $\mathfrak{M}' \vDash \Delta'$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$, और c, Γ में नहीं आता, इसलिए $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma'$ भी। कुल मिलाकर, $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma' \cup \Delta'$ प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma' \cup \Delta'$ के लिए, जो $\Gamma \cup \Delta$ का है। अतः $\Gamma \cup \Delta$ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय है। संहतता से $\Gamma \cup \Delta$ स्वयं संतुष्टनीय है। इसलिए ऐसे प्रतिरूप $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \Delta$ हैं। ऐसी प्रत्येक $\mathfrak{M}$, Γ का प्रतिरूप है, पर आच्छादित नहीं है, क्योंकि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(c) \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ सभी पदों t के लिए जो $\mathcal{L}$ के हैं।

उदाहरण 23.25. ऐसी भाषा $\mathcal{L}$ पर विचार करें जिसमें विधेय-चिह्न $<$, अचरों 0, 1, और फलन-चिह्नों $+$, $\times$, तथा $-$ हों। Γ को उन सभी वाक्यों का समुच्चय मानें जो इस भाषा की संरचना $\mathfrak{Q}$ में सत्य हैं, जिसका प्रांत $\mathbb{Q}$ है और जिसकी व्याख्याएँ स्वाभाविक हैं। Γ, $\mathcal{L}$ के उन सभी वाक्यों का समुच्चय है जो परिमेय संख्याओं के बारे में सत्य हैं। निस्संदेह, $\mathbb{Q}$ में (और $\mathbb{R}$ में भी) ऐसी कोई संख्या r नहीं है जो 0 से बड़ी, पर $1/k$ से छोटी हो, सभी $k \in \mathbb{Z}^+$ के लिए। यदि ऐसी संख्या होती, तो वह *अतिसूक्ष्म* होती: शून्येतर, पर अनंततः छोटी। संहतता प्रमेय से दिखाया जा सकता है कि Γ के ऐसे प्रतिरूप हैं जिनमें अतिसूक्ष्म संख्याएँ हैं। हमारी भाषा में भाग का कोई फलन-चिह्न नहीं है (शून्य से भाग अपरिभाषित है, और फलन-चिह्नों की व्याख्या संपूर्ण फलनों से होनी चाहिए)। फिर भी हम $r < 1/k$ व्यक्त कर सकते हैं, क्योंकि यह तभी और केवल तभी है जब $r \cdot k < 1$। अब c को नया अचर मानें और Δ रखें:

$$\{0 < c\} \cup \{c \times \overline{k} < 1 : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

(जहाँ $\overline{k} = (1 + (1 + \cdots + (1 + 1) \ldots))$, जिसमें k बार 1 है)। किसी परिमित उपसमुच्चय Δ_0 के लिए, जो Δ का है, कोई K ऐसा है कि सभी वाक्यों $c \times \overline{k} < 1$ जो Δ_0 में हैं, उनके लिए $k < K$। यदि हम $\mathfrak{Q}$ को $\mathfrak{Q}'$ तक इस प्रकार विस्तारित करें कि $c^{\mathfrak{Q}'} = 1/K$, तो $\mathfrak{Q}' \vDash \Gamma_0 \cup \Delta_0$ किसी भी परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए, और इसलिए $\Gamma \cup \Delta$ परिमिततः संतुष्टनीय है (अभ्यास: इसे विस्तार से सिद्ध कीजिए)। संहतता से $\Gamma \cup \Delta$ संतुष्टनीय है। किसी भी प्रतिरूप $\mathfrak{S}$ में, जो $\Gamma \cup \Delta$ का है, एक अतिसूक्ष्म संख्या है, अर्थात् $c^{\mathfrak{S}}$।

उदाहरण 23.26. हम जानते हैं कि तादात्म्य वाला प्रथम-क्रम तर्क व्यक्त कर सकता है कि प्रांत का आकार किसी न्यूनतम आकार का होना चाहिए: वाक्य $\varphi_{\geq n}$ (जो कहता है "कम-से-कम n भिन्न वस्तुएँ हैं") केवल उन्हीं संरचनाओं में सत्य है जहाँ $|\mathfrak{M}|$ में कम-से-कम n वस्तुएँ हों। अतः यदि हम

$$\Delta = \{\varphi_{\geq n} : n \geq 1\}$$

लें, तो Δ का प्रत्येक प्रतिरूप अनंत होना चाहिए। इस प्रकार हम किसी सिद्धांत में Δ जोड़कर गारंटी दे सकते हैं कि उसके केवल अनंत प्रतिरूप हों: $\Gamma \cup \Delta$ के प्रतिरूप ठीक Γ के अनंत प्रतिरूप हैं।

अतः प्रथम-क्रम तर्क अनंतता व्यक्त कर सकता है। किंतु संहतता प्रमेय दिखाता है कि वह परिमितता व्यक्त नहीं कर सकता। मान लें कि वाक्यों के किसी समुच्चय Λ को संतुष्ट करने वाली संरचनाएँ ठीक सभी परिमित संरचनाएँ हों। तब $\Delta \cup \Lambda$ परिमिततः संतुष्टनीय है। क्यों? मान लें कि $\Delta' \cup \Lambda' \subseteq \Delta \cup \Lambda$ परिमित है, जहाँ $\Delta' \subseteq \Delta$ और $\Lambda' \subseteq \Lambda$। n को वह सबसे बड़ी संख्या मानें जिसके लिए $\varphi_{\geq n} \in \Delta'$। चूँकि सभी परिमित संरचनाएँ Λ को संतुष्ट करती हैं, इसलिए कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ ऐसा है जिसमें परिमिततः अनेक किंतु $\geq n$ अवयव हैं। पर तब $\mathfrak{M} \vDash \Delta' \cup \Lambda'$। संहतता से $\Delta \cup \Lambda$ का कोई अनंत प्रतिरूप है, जो इस धारणा का खंडन करता है कि Λ को संतुष्ट करने वाली संरचनाएँ केवल परिमित हों।

23.10 संहतता प्रमेय का प्रत्यक्ष प्रमाण

पूर्णता प्रमेय का सहारा लिए बिना, पूर्णता प्रमेय के प्रमाण वाले ही विचारों से हम संहतता प्रमेय को सीधे सिद्ध कर सकते हैं। पूर्णता प्रमेय के प्रमाण में हमने संगत समुच्चय Γ से आरंभ किया, जो वाक्यों का था; उसे संगत, संतृप्त और पूर्ण समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया, जो वाक्यों का था; और फिर दिखाया कि पद-प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ में, जिसे Γ^* से बनाया गया था, Γ के सभी वाक्यों सत्य हैं; अतः Γ संतुष्टनीय है।

इसी विधि से हम दिखा सकते हैं कि परिमिततः संतुष्टनीय वाक्य-समुच्चय संतुष्टनीय है। हमें सत्यता उपपत्ति तक ले जाने वाले परिणामों के अनुरूप रूपों को बस इस प्रकार सिद्ध करना है कि उनमें "संगत" के स्थान पर "परिमिततः संतुष्टनीय" हो।

प्रतिज्ञप्ति 23.27. *मान लें कि Γ पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय है। तब:*

1. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब* $\varphi \in \Gamma$ *और* $\psi \in \Gamma$ *दोनों हों।*
2. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब या तो* $\varphi \in \Gamma$ *या* $\psi \in \Gamma$ *हो।*
3. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब या तो* $\varphi \notin \Gamma$ *या* $\psi \in \Gamma$ *हो।*

सहायक प्रमेय 23.28. *प्रत्येक परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ को किसी संतृप्त परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ' तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रतिज्ञप्ति 23.29. *मान लें कि Γ पूर्ण, परिमिततः संतुष्टनीय और संतृप्त है।*

1. $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब* $\varphi(t) \in \Gamma$ *कम-से-कम एक बंद पद t के लिए हो।*
2. $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब* $\varphi(t) \in \Gamma$ *सभी बंद पदों t के लिए हो।*

सहायक प्रमेय 23.30. *प्रत्येक परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ को पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है।*

प्रमेय 23.31 (संहतता). *Γ संतुष्टनीय तभी और केवल तभी है जब वह परिमिततः संतुष्टनीय है।*

प्रमाण. यदि Γ संतुष्टनीय है, तो ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ है कि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए। निस्संदेह, यह $\mathfrak{M}$ भी Γ के प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय को संतुष्ट करती है, अतः Γ परिमिततः संतुष्टनीय है।

अब मान लें कि Γ परिमिततः संतुष्टनीय है। सहायक प्रमेय 23.28 से कोई परिमिततः संतुष्टनीय, संतृप्त समुच्चय $\Gamma' \supseteq \Gamma$ है। सहायक प्रमेय 23.30 से Γ' को पूर्ण और परिमिततः संतुष्टनीय समुच्चय Γ^* तक विस्तारित किया जा सकता है, और Γ^* अब भी संतृप्त है। परिभाषा 23.9 की तरह पद-प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ बनाएँ। ध्यान दें कि प्रतिज्ञप्ति 23.11 ने इस तथ्य पर भरोसा नहीं किया था कि Γ^* संगत है (या पूर्ण अथवा संतृप्त, इस विषय में), बल्कि केवल इस तथ्य पर कि $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ आच्छादित है। सत्यता उपपत्ति (सहायक प्रमेय 23.12) का प्रमाण तब भी चलता है जब हम प्रतिज्ञप्ति 23.2 और प्रतिज्ञप्ति 23.7 के संदर्भों के स्थान पर क्रमशः प्रतिज्ञप्ति 23.27 और प्रतिज्ञप्ति 23.29 के संदर्भ रखें □

23.11 लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय

लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय कहता है कि यदि किसी सिद्धांत का कोई अनंत प्रतिरूप है, तो उसका ऐसा प्रतिरूप भी है जो अधिक-से-अधिक गणनीय अनंत है। इस तथ्य का एक तात्कालिक परिणाम यह है कि प्रथम-क्रम तर्क यह व्यक्त नहीं कर सकता कि किसी संरचना का आकार अगणनीय है: वाक्य अथवा वाक्यों का कोई भी समुच्चय, जिसे सभी अगणनीय संरचनाएँ संतुष्ट करती हैं, किसी गणनीय संरचना द्वारा भी संतुष्ट होता है।

प्रमेय 23.32. *यदि Γ संगत है, तो उसका कोई गणनीय प्रतिरूप है; अर्थात् वह ऐसी संरचना में संतुष्टनीय है जिसका प्रांत या तो परिमित है या गणनीय अनंत।*

प्रमाण. यदि Γ संगत है, तो पूर्णता प्रमेय के प्रमाण से प्राप्त संरचना $\mathfrak{M}$ का प्रांत $|\mathfrak{M}|$, भाषा $\mathcal{L}$ के पदों के समुच्चय से बड़ा नहीं है। अतः $\mathfrak{M}$ अधिक-से-अधिक गणनीय अनंत है। □

प्रमेय 23.33. *यदि Γ, तादात्म्य-रहित प्रथम-क्रम तर्क की भाषा में वाक्यों का संगत समुच्चय है, तो उसका कोई गणनीय अनंत प्रतिरूप है; अर्थात् वह ऐसी संरचना में संतुष्टनीय है जिसका प्रांत अनंत और गणनीय है।*

प्रमाण. यदि Γ संगत है और उसमें ऐसा कोई वाक्य नहीं है जिसमें तादात्म्य आता हो, तो पूर्णता प्रमेय के प्रमाण से प्राप्त संरचना $\mathfrak{M}$ का प्रांत $|\mathfrak{M}|$, भाषा $\mathcal{L}'$ के पदों के समुच्चय के सर्वथा समान है। अतः $\mathfrak{M}$ गणनीय अनंत है, क्योंकि $\mathrm{Trm}(\mathcal{L}')$ ऐसा है। □

उदाहरण 23.34 (स्कोलेम का विरोधाभास). ज़र्मेलो–फ़्रेंकेल समुच्चय-सिद्धांत **ZFC** अत्यंत शक्तिशाली है। इसमें लगभग सभी गणितीय कथन व्यक्त किए जा सकते हैं, जिनमें समुच्चयों के आकारों से जुड़े तथ्य भी हैं। उदाहरण के लिए, **ZFC** सिद्ध कर सकता है कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{R}$ अगणनीय है; वह कांटोर का प्रमेय सिद्ध कर सकता है कि किसी भी समुच्चय का घात-समुच्चय स्वयं उस समुच्चय से बड़ा है; इत्यादि। यदि **ZFC** संगत है, तो उसके सभी प्रतिरूप अनंत हैं, और इसके अतिरिक्त उन सभी में ऐसे अवयव हैं जिनके बारे में सिद्धांत कहता है कि वे अगणनीय हैं, जैसे वह अवयव जो **ZFC** के इस प्रमेय को सत्य बनाता है कि प्राकृतिक संख्याओं का घात-समुच्चय विद्यमान है। लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय से **ZFC** के गणनीय प्रतिरूप भी हैं—ऐसे प्रतिरूप जिनमें "अगणनीय" समुच्चय हैं, किंतु जो स्वयं गणनीय हैं।

प्रश्न

प्रश्न 23.1. प्रतिज्ञप्ति 23.2 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 23.2. प्रतिज्ञप्ति 23.14 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 23.3. सहायक प्रमेय 23.18 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 23.4. उपप्रमेय 23.21 से प्रमेय 23.20 को सिद्ध कीजिए और इस प्रकार दिखाइए कि पूर्णता प्रमेय के दोनों रूप समतुल्य हैं।

प्रश्न 23.5. किसी व्युत्पत्ति प्रणाली के पूर्ण होने के लिए उसके नियम इतने प्रबल होने चाहिए कि वे प्रत्येक असंतुष्टनीय समुच्चय को असंगत सिद्ध कर सकें। पूर्णता को सिद्ध करने के लिए व्युत्पत्ति के कौन-से नियम आवश्यक थे? क्या इनमें से कोई नियम प्रमाण में कहीं प्रयुक्त नहीं हुआ? इन प्रश्नों के उत्तर के लिए ऐसी सूची या आरेख बनाइए जो दिखाए कि पूर्णता के प्रमाण तक ले जाने वाले किन परिणामों में व्युत्पत्ति के कौन-से नियम प्रयुक्त हुए। इन प्रमाणों में नियमों के प्रत्येक निःशब्द उपयोग को भी अवश्य अंकित कीजिए। प्रमेय 23.20।

प्रश्न 23.6. प्रमेय 23.23 का (1) सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 23.7. अंकगणित के मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ में ऐसा कोई अवयव $k \in |\mathfrak{N}|$ नहीं है जो प्रत्येक सूत्र $\overline{n} < x$ को संतुष्ट करता हो (जहाँ $\overline{n}$ वह $0'^{\cdots\prime}$ है जिसमें n बार $\prime$ आता है)। संहतता प्रमेय का उपयोग करके दिखाइए कि अंकगणित की भाषा के वे वाक्यों जो मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ में सत्य हैं, ऐसी संरचना $\mathfrak{N}'$ में भी सत्य हैं जिसमें ऐसा अवयव है जो प्रत्येक सूत्र $\overline{n} < x$ को *वास्तव में* संतुष्ट करता है।

प्रश्न 23.8. प्रतिज्ञप्ति 23.27 सिद्ध कीजिए। $\vdash$ का उपयोग न करें।

प्रश्न 23.9. सहायक प्रमेय 23.28 सिद्ध कीजिए। (संकेत: निर्णायक चरण यह दिखाना है कि यदि Γ_n परिमिततः संतुष्टनीय है, तो $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ भी परिमिततः संतुष्टनीय है, और इसमें व्युत्पत्तियाँ अथवा संगतता का कोई सहारा न लिया जाए।)

प्रश्न 23.10. प्रतिज्ञप्ति 23.29 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 23.11. सहायक प्रमेय 23.30 सिद्ध कीजिए। (संकेत: निर्णायक चरण यह दिखाना है कि यदि Γ_n परिमिततः संतुष्टनीय है, तो $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ या $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ में से कोई एक परिमिततः संतुष्टनीय है।)

प्रश्न 23.12. सत्यता उपपत्ति सहायक प्रमेय 23.12 का वह पूरा प्रमाण लिखिए जो प्रमेय 23.31 के प्रमाण के लिए आवश्यक है।

अध्याय 24

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के परे

जेरेमी एविगैड की तर्कशास्त्र-विषयक टिप्पणियों से रूपांतरित यह अध्याय अन्य उपलब्ध तार्किक तंत्रों की अत्यंत संक्षिप्त झलक देता है। इसका उद्देश्य ऐसे पाठ्यक्रम में आगे के अध्ययन के लिए विषय सुझाना है जिसमें ये विषय सम्मिलित नहीं हैं। आशा है कि यहाँ उल्लिखित प्रत्येक विषय को अंततः ओपन लॉजिक प्रोजेक्ट में अपने पृथक भाग के स्तर पर विस्तार से लिया जाएगा।

24.1 अवलोकन

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र ही रुचिकर तार्किक तंत्र नहीं है: उसके अनेक विस्तार और रूपांतर हैं। किसी तर्कशास्त्र में सामान्यतः एक भाषा का औपचारिक विनिर्देशन, प्रायः—पर सदा नहीं—एक निगमन-तंत्र, और प्रायः—पर सदा नहीं—एक अभीष्ट अर्थविज्ञान होता है। किंतु इस पद का तकनीकी प्रयोग एक स्पष्ट प्रश्न उठाता है: जो तर्कशास्त्र प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र नहीं हैं, उनका सहज या दार्शनिक अर्थ में प्रयुक्त "तर्क" शब्द से क्या संबंध है? नीचे वर्णित सभी तंत्र किसी-न-किसी प्रकार के विचार-विन्यास का प्रतिरूपण करने के लिए बनाए गए हैं; क्या हम बता सकते हैं कि उन्हें तार्किक क्या बनाता है?

इसका कोई सरल उत्तर नहीं मिलता। "तर्क" शब्द अलग-अलग ढंग से और अलग-अलग संदर्भों में प्रयुक्त होता है; और "सत्य" की धारणा की तरह इस धारणा का भी अनेक दार्शनिक दृष्टियों से विश्लेषण हुआ है। उदाहरण के लिए, तार्किक विचार-विन्यास का लक्ष्य यह निर्धारित करना माना जा सकता है कि कौन-से कथन अनिवार्यतः सत्य हैं, प्रागनुभविक रूप से सत्य हैं, अतार्किक पदों की व्याख्या से स्वतंत्र सत्य हैं, अपने रूप के कारण सत्य हैं, अथवा भाषिक रूढ़ि के कारण सत्य हैं; इनमें से प्रत्येक संकल्पना को काफी स्पष्ट करना पड़ता है। यदि हम ध्यान केवल गणित में प्रयुक्त तर्कशास्त्र तक सीमित रखें, तब भी उसके विस्तार पर बहुत कम सहमति है। उदाहरणतः *Principia Mathematica* में रसेल और व्हाइटहेड ने फ्रेगे द्वारा आरंभ की गई *तर्कवादी* परंपरा में तर्क के आधार पर गणित विकसित करने का प्रयास किया। उनका तार्किक तंत्र नीचे वर्णित उच्चतर-प्रकार तर्कशास्त्र से मिलता-जुलता था। अंततः उन्हें ऐसे अभिगृहीत लाने पड़े जो अधिकांश मानकों पर शुद्धतः तार्किक नहीं लगते (विशेषतः अनंतता का अभिगृहीत और अपचयनीयता का अभिगृहीत); फिर भी कोई यह मान सकता है कि उच्चतर-कोटि विचार-विन्यास के कुछ रूपों को तार्किक स्वीकार करना चाहिए। इसके विपरीत क्वाइन—जिनका सत्तामीमांसा-सिद्धांत "प्रतिज्ञप्तियों" को विचार के वैध विषय नहीं मानता—तर्क देते हैं कि द्वितीय-कोटि और उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र वास्तव में भेड़ की खाल में समुच्चय-सिद्धांत हैं; अर्थात् विधेयों पर परिमाणीकरण वाले तंत्र शुद्धतः तार्किक नहीं हैं।

फिलहाल ऐसे दार्शनिक प्रश्नों को किसी और दिन के लिए छोड़ना और नीचे के तंत्रों को तार्किक अथवा अन्य प्रकार के विचार-विन्यासों के औपचारिक आदर्शीकरण मानना ही उचित है।

24.2 बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में चर और परिमाणक एक ही प्रांत पर विचरते हैं। परंतु प्रायः अनेक (परस्पर असंयुक्त) प्रांतों को रखना उपयोगी होता है: जैसे, संख्याओं का एक प्रांत, ज्यामितीय वस्तुओं का एक प्रांत, संख्याओं से संख्याओं में जाने वाले फलनों का एक प्रांत, आबेली समूहों का एक प्रांत, इत्यादि।

बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र ऐसा ढाँचा देता है। हम "वर्गों" की एक सूची से आरंभ करते हैं—किसी वस्तु का "वर्ग" बताता है कि उसे किस "प्रांत" में होना है। फिर प्रत्येक वर्ग के लिए चरों और परिमाणकों का एक-एक भंडार, तथा (सामान्यतः) प्रत्येक वर्ग के लिए एक तादात्म्य होता है। फलनों और संबंधों को भी उन वस्तुओं के वर्गों के अनुसार "प्रकारित" किया जाता है जिन्हें वे कोणांक के रूप में ले सकते हैं। शेष नियम प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के सामान्य नियम ही रहते हैं, और परिमाणक-नियमों का एक-एक रूप प्रत्येक वर्ग के लिए दोहराया जाता है।

उदाहरणतः अंतरराष्ट्रीय संबंधों के अध्ययन के लिए हम वस्तुओं के दो वर्गों— फ्रांसीसी नागरिकों और जर्मन नागरिकों—वाली भाषा चुन सकते हैं। पहले वर्ग की वस्तुओं के लिए एक एकपदी संबंध "मदिरा पीता है", दूसरे वर्ग की वस्तुओं के लिए एक अन्य एकपदी संबंध "वुर्स्ट खाता है", और दो कोणांक लेने वाला द्विपदी संबंध "बहुराष्ट्रीय विवाहित युगल बनाते हैं" हो सकता है; इसमें पहला कोणांक पहले वर्ग का और दूसरा कोणांक दूसरे वर्ग का होगा। यदि a, b, c चर फ्रांसीसी नागरिकों पर और x, y, z चर जर्मन नागरिकों पर विचरते हैं, तो

$$\forall a\, \forall x[(MarriedTo(a,x) \rightarrow (DrinksWine(a) \vee \neg EatsWurst(x))]]$$

कहता है कि यदि कोई फ्रांसीसी व्यक्ति किसी जर्मन से विवाहित है, तो या तो वह फ्रांसीसी मदिरा पीता है अथवा वह जर्मन वुर्स्ट नहीं खाता।

बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र को स्वाभाविक रीति से प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में अंतःस्थापित किया जा सकता है। इसके लिए बहु-वर्गीय प्रांतों की सभी वस्तुओं को एक प्रथम-कोटि प्रांत में मिला देते हैं, वर्गों का हिसाब रखने के लिए एकपदी विधेय-चिह्नों का प्रयोग करते हैं और परिमाणकों को सापेक्ष बनाते हैं। उदाहरणतः ऊपर के उदाहरण के अनुरूप प्रथम-कोटि भाषा में बताए गए अन्य संबंधों के साथ एकपदी विधेय-चिह्नों "$German$" और "$French$" होंगे, और वर्ग-संबंधी प्रतिबंध हटा दिए जाएँगे। वर्गित परिमाणक $\forall x\, \varphi$, जहाँ x जर्मन वर्ग का चर है, का अनुवाद होगा

$$\forall x\, (German(x) \rightarrow \varphi).$$

हमें ऐसे अभिगृहीत जोड़ने होंगे जो सुनिश्चित करें कि वर्ग अलग-अलग हैं—जैसे, $\forall x\, \neg(German(x) \wedge French(x))$—और ऐसे अभिगृहीत भी जो प्रत्याभूत करें कि "मदिरा पीता है" केवल उन वस्तुओं के लिए सत्य है जो विधेय $French(x)$ को संतुष्ट करती हैं, इत्यादि। इन रूढ़ियों और अभिगृहीतों के साथ यह दिखाना कठिन नहीं है कि बहु-वर्गीय वाक्यों का अनुवाद प्रथम-कोटि वाक्यों में होता है और बहु-वर्गीय व्युत्पत्तियाँ अनूदित होकर प्रथम-कोटि व्युत्पत्तियाँ बनती हैं। बहु-वर्गीय संरचनाएँ और संगत प्रथम-कोटि संरचनाएँ भी परस्पर "अनूदित" होती हैं; अतः बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र के लिए भी हमारे पास पूर्णता प्रमेय है।

24.3 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की भाषा केवल व्यष्टियों के किसी प्रांत पर ही नहीं, बल्कि उस प्रांत पर संबंधों के ऊपर भी परिमाणीकरण करने देती है। कोई प्रथम-कोटि भाषा $\mathcal{L}$ दी हो, तो प्रत्येक k के लिए चरों का एक भंडार जोड़ते हैं; इन चरों को R लिखते हैं और वे k-पदी संबंधों पर विचरते हैं। उन चरों पर परिमाणीकरण की अनुमति दी जाती है। यदि R किसी k-पदी संबंध का चर और t_1, ..., t_k सामान्य (प्रथम-कोटि) पद हैं, तो $R(t_1, \ldots, t_k)$ एक परमाण्विक सूत्र है। अन्यथा सूत्रों का समुच्चय प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की तरह ही, द्वितीय-कोटि परिमाणीकरण के अतिरिक्त उपवाक्यों सहित, परिभाषित होता है। ध्यान दें कि हमारे पास केवल प्रथम-कोटि पदों के लिए तादात्म्य है: यदि R और S संबंध-चरों के ऐसे उदाहरण हैं जिनकी समान पदिता k है, तो $R = S$ को निम्न का संक्षेप परिभाषित कर सकते हैं:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k\, (R(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow S(x_1, \ldots, x_k)).$$

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के नियम परिमाणक-नियमों को नए द्वितीय-कोटि चरों तक विस्तृत करते हैं। किंतु यहाँ सावधानी से बताना पड़ता है कि ये चर $\mathcal{L}$ के विधेय-चिह्नों, और अधिक सामान्य रूप से $\mathcal{L}$ के सूत्रों, के साथ कैसे अंतःक्रिया करते हैं। कम-से-कम संबंध-चर पद माने जाते हैं, अतः हमारे पास इस रूप के अनुमान होते हैं:

$$\varphi(R) \vdash \exists R\, \varphi(R)$$

पर यदि $\mathcal{L}$ अंकगणित की भाषा है जिसमें अचर संबंध-चिह्न $<$ है, तो हम निम्न अनुमान को भी वैध अपेक्षित करेंगे:

$$x < y \vdash \exists R\, R(x, y)$$

अथवा किसी दिए सूत्र φ के लिए,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \vdash \exists R\, R(x_1, \ldots, x_k)$$

अधिक सामान्यतः हम निम्न रूप के अनुमानों की अनुमति देना चाह सकते हैं:

$$\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R] \vdash \exists R\, \varphi$$

जहाँ $\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R]$, $Rt_1, \ldots, t_k$ रूप के प्रत्येक परमाण्विक सूत्र को φ में $\psi(t_1, \ldots, t_k)$ से बदलने पर मिला परिणाम निरूपित करता है। यह अंतिम नियम एक *परिग्रहण-योजना* रखने के समतुल्य है, अर्थात् इस रूप का अभिगृहीत:

$$\exists R\, \forall x_1, \ldots, x_k\, (\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_k)),$$

द्वितीय-कोटि भाषा के प्रत्येक ऐसे सूत्र φ के लिए एक, जिसमें R मुक्त चर नहीं है। (अभ्यास: दिखाइए कि यदि R को φ में आने दिया जाए, तो यह योजना असंगत है!)

तर्कशास्त्री जब "द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के अभिगृहीत" कहते हैं, तो उनका आशय सामान्यतः परिग्रहण-योजना सहित द्वितीय-कोटि परिमाणक-नियमों द्वारा प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के न्यूनतम विस्तार से होता है। किंतु इन अभिगृहीतों और नियमों के दुर्बलतर उपतंत्रों का अध्ययन भी प्रायः रोचक होता है। उदाहरणतः ध्यान दें कि अपनी पूर्ण व्यापकता में परिग्रहण की अभिगृहीत-योजना *अविधेयात्मक* है: वह ऐसे संबंध $R(x_1, \ldots, x_k)$ के अस्तित्व का कथन करने देती है जो द्वितीय-कोटि परिमाणकों वाले किसी सूत्र से "परिभाषित" है; और ये परिमाणक ऐसे सभी संबंधों के समुच्चय पर विचरते हैं— ऐसा समुच्चय जिसमें स्वयं R भी है! बीसवीं शताब्दी के आरंभ के आसपास रसेल के विरोधाभास पर एक सामान्य प्रतिक्रिया ऐसी परिभाषाओं को दोषी मानना और गणित की नींव विकसित करते समय उनसे बचना था। यदि सूत्र φ में द्वितीय-कोटि परिमाणकों का प्रयोग निषिद्ध कर दें, तो परिग्रहण का *विधेयात्मक* रूप मिलता है, जो कुछ दुर्बल है।

अर्थगत दृष्टि से द्वितीय-कोटि संरचना को भाषा की एक प्रथम-कोटि संरचना और उस प्रांत पर संबंधों के ऐसे समुच्चय से बना मान सकते हैं जिस पर द्वितीय-कोटि परिमाणक विचरते हैं (अधिक सटीकतः प्रत्येक k के लिए पदिता k वाले संबंधों का एक समुच्चय होता है)। निस्संदेह, यदि व्युत्पत्ति-तंत्र में परिग्रहण सम्मिलित है, तो एक अतिरिक्त आवश्यकता है कि "द्वितीय-कोटि भाग" में परिग्रहण-अभिगृहीतों को संतुष्ट करने के लिए पर्याप्त संबंध हों—अन्यथा व्युत्पत्ति-तंत्र सुदृढ़ नहीं है! पर्याप्त संबंध सुनिश्चित करने की एक सरल रीति यह है कि द्वितीय-कोटि भाग में प्रथम-कोटि भाग पर *सभी* संबंध ले लें। ऐसी संरचना को *पूर्ण* कहा जाता है और एक अर्थ में वही भाषा की वास्तविक "अभीष्ट संरचना" है। यदि हमारे विचार में आने वाली संरचनाएँ केवल पूर्ण हों, तो *पूर्ण* द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान मिलता है। उस स्थिति में किसी संरचना का विनिर्देशन केवल प्रथम-कोटि भाग के विनिर्देशन में सिमट जाता है, क्योंकि द्वितीय-कोटि भाग की विषयवस्तु उससे अंतर्निहित रूप से मिलती है।

सारतः द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की बात में कुछ संदिग्धता है। व्युत्पत्ति-तंत्र की दृष्टि से हमारा आशय इनमें से कोई हो सकता है:

1. कुछ परिग्रहण-अभिगृहीतों सहित एक "न्यूनतम" द्वितीय-कोटि व्युत्पत्ति-तंत्र।

2. पूर्ण परिग्रहण वाला "मानक" द्वितीय-कोटि व्युत्पत्ति-तंत्र।

अर्थविज्ञान की दृष्टि से इनमें से किसी में रुचि हो सकती है:

1. "दुर्बल" अर्थविज्ञान, जिसमें संरचना एक प्रथम-कोटि भाग और परिग्रहण-अभिगृहीतों को संतुष्ट करने जितने बड़े द्वितीय-कोटि भाग से बनती है।

2. "मानक" द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान, जिसमें विचाराधीन संरचनाएँ केवल पूर्ण होती हैं।

जब तर्कशास्त्री अपने अभीष्ट व्युत्पत्ति-तंत्र या अर्थविज्ञान को स्पष्ट नहीं करते, तो सामान्यतः प्रत्येक सूची की दूसरी मद का निर्देश करते हैं। इस अर्थविज्ञान का लाभ यह है कि, जैसा हम देखेंगे, इससे अनेक स्वाभाविक गणितीय संरचनाओं के श्रेणीपरक वर्णन मिलते हैं; साथ ही व्युत्पत्ति-तंत्र काफी प्रबल और इस अर्थविज्ञान के लिए सुदृढ़ है। दोष यह है कि व्युत्पत्ति-तंत्र अर्थविज्ञान के लिए *पूर्ण नहीं* है; वस्तुतः प्रभावी ढंग से दिया गया *कोई भी* व्युत्पत्ति-तंत्र पूर्ण द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान के लिए पूर्ण नहीं है। दूसरी ओर हम देखेंगे कि व्युत्पत्ति-तंत्र दुर्बलतर अर्थविज्ञान के लिए *पूर्ण है*; इससे निष्पन्न होता है कि यदि कोई वाक्य प्रमाण्य नहीं है, तो *कोई* संरचना—जो अनिवार्यतः पूर्ण न हो—ऐसी अवश्य है जिसमें वह असत्य है।

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की भाषा बहुत अभिव्यंजक है। एकपदी संबंधों की पहचान प्रांत के उपसमुच्चयों से की जा सकती है और इस कारण इन समुच्चयों पर परिमाणीकरण भी किया जा सकता है; जैसे, प्राकृतिक संख्याओं के लिए आगमन को एक ही अभिगृहीत में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\forall R\,((R(\mathsf{o}) \wedge \forall x\,(R(x) \to R(x'))) \to \forall x\,R(x)).$$

यदि अंकगणित की भाषा में $\mathsf{o}, \prime, +, \times$ और $<$ चिह्न लें, तो उनके व्यवहार के वर्णन के लिए निम्न अभिगृहीत जोड़ सकते हैं:

1. $\forall x\,\neg x' = \mathsf{o}$

2. $\forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \to x = y)$

3. $\forall x\,(x + \mathsf{o}) = x$

4. $\forall x\,\forall y\,(x + y') = (x + y)'$

5. $\forall x\,(x \times \mathsf{o}) = \mathsf{o}$

6. $\forall x\,\forall y\,(x \times y') = ((x \times y) + x)$

7. $\forall x\,\forall y\,(x < y \leftrightarrow \exists z\,y = (x + z'))$

यह दिखाना कठिन नहीं है कि यदि हम पूर्ण द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान का प्रयोग कर रहे हैं, तो ये अभिगृहीत ऊपर के आगमन-अभिगृहीत के साथ अंकगणित के मानक प्रतिरूप संरचना $\mathfrak{N}$ का श्रेणीपरक वर्णन देते हैं। ऐसी कोई संरचना $\mathfrak{M}$ दी हो जिसमें ये अभिगृहीत सत्य हैं, तो फलन f को $\mathbb{N}$ से $\mathfrak{M}$ के प्रांत में, $\mathbb{N}$ पर सामान्य पुनरावर्तन द्वारा, ऐसे परिभाषित करें कि $f(0) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ और $f(x+1) = \prime^{\mathfrak{M}}(f(x))$। $\mathbb{N}$ पर सामान्य आगमन और $\mathfrak{M}$ में अभिगृहीत (1) तथा (2) सत्य होने के तथ्य से देखते हैं कि f एकैकी है। f को आच्छादक देखने के लिए P को $|\mathfrak{M}|$ के उन अवयवों का समुच्चय लें जो f के परिसर में हैं। क्योंकि $\mathfrak{M}$ पूर्ण है, P द्वितीय-कोटि प्रांत में है। f की रचना से जानते हैं कि $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$, P में है और P, $\prime^{\mathfrak{M}}$ के अधीन संवृत है। $\mathfrak{M}$ में (विशेषतः P के लिए) आगमन-अभिगृहीत सत्य होने का तथ्य प्रत्याभूत करता है कि P, $\mathfrak{M}$ के पूरे प्रथम-कोटि प्रांत के बराबर है। इससे सिद्ध होता है कि f एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। यह दिखाना भी अधिक कठिन नहीं कि f एक समाकृतिक प्रतिचित्रण है; इसके लिए $\mathbb{N}$ पर सामान्य आगमन का बार-बार प्रयोग करें।

समुच्चय-सैद्धांतिक पदों में कोई फलन केवल एक विशेष प्रकार का संबंध है; जैसे, एकपदी फलन f की पहचान ऐसे द्विपदी संबंध R से की जा सकती है जो $\forall x\,\exists! y\,R(x,y)$ को संतुष्ट करता है। फलतः फलनों पर भी परिमाणीकरण कर सकते हैं। पूर्ण अर्थविज्ञान का प्रयोग करके ऐसा वर्ग परिभाषित कर सकते हैं जिसकी सदस्य संरचनाएँ अनंत हों: ये वे संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ हैं जिनके लिए $\mathfrak{M}$ के प्रांत से उसके ही किसी उचित उपसमुच्चय में एक एकैकी फलन है:

$$\exists f\,(\forall x\,\forall y\,(f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists y\,\forall x\,f(x) \neq y).$$

तब इस वाक्य का निषेध उस वर्ग को परिभाषित करता है जिसकी सदस्य संरचनाएँ परिमित हैं।

इसके अतिरिक्त किसी रैखिक क्रम की परिभाषा में निम्न जोड़कर सुक्रमों का वर्ग परिभाषित किया जा सकता है:

$$\forall P\,(\exists x\,P(x) \to \exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(y < x \to \neg P(y)))).$$

यह कथन करता है कि "समुच्चय" की पहचान "एकपदी संबंध" से करने पर प्रत्येक अरिक्त समुच्चय का एक न्यूनतम अवयव है। एक अन्य उदाहरण में, आरेखों के लिए संयोजकता की धारणा यह कहकर व्यक्त की जा सकती है कि शीर्षों का असंयुक्त भागों में कोई अतुच्छ विभाजन नहीं है:

$$\neg\exists A\,(\exists x\,A(x) \wedge \exists y\,\neg A(y) \wedge \forall w\,\forall z\,((A(w) \wedge \neg A(z)) \to \neg R(w,z))).$$

एक और उदाहरण में, अभ्यास के रूप में ऐसा वर्ग परिभाषित करने का प्रयास कीजिए जिसकी सदस्य संरचनाएँ परिमित हों और जिनके प्रांत का आकार सम हो। इससे भी अधिक प्रभावशाली बात यह है कि वास्तविक संख्याओं का श्रेणीपरक वर्णन परिमेय संख्याओं को समाहित करने वाले पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में दिया जा सकता है।

संक्षेप में, द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से बहुत अधिक अभिव्यंजक है। यह अच्छी खबर है; अब बुरी खबर। हम पहले ही कह चुके हैं कि पूर्ण द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान के लिए पूर्ण कोई प्रभावी व्युत्पत्ति-तंत्र नहीं है। अच्छा हो या बुरा, प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के अनेक गुणधर्म यहाँ नहीं हैं, जिनमें संहतता और लोवेनहाइम (Löwenheim)–स्कोलेम प्रमेय सम्मिलित हैं।

दूसरी ओर यदि पूर्ण द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान छोड़कर दुर्बलतर अर्थविज्ञान अपनाना स्वीकार्य हो, तो न्यूनतम द्वितीय-कोटि व्युत्पत्ति-तंत्र इस अर्थविज्ञान के लिए पूर्ण है। दूसरे शब्दों में, यदि $\vdash$ को "न्यूनतम तंत्र में सिद्ध करता है" और $\vDash$ को "दुर्बलतर अर्थविज्ञान में तार्किक रूप से निष्पन्न करता है" पढ़ें, तो दिखा सकते हैं कि $\Gamma \vDash \varphi$ होने पर सदा $\Gamma \vdash \varphi$। यदि व्युत्पत्ति-तंत्र में कुछ निश्चित परिग्रहण-अभिगृहीत सम्मिलित करने हों, तो अर्थविज्ञान को उन द्वितीय-कोटि संरचनाओं तक सीमित करना होगा जो इन अभिगृहीतों को संतुष्ट करती हैं: जैसे, यदि Δ परिग्रहण-अभिगृहीतों (संभवतः उन सभी) का समुच्चय है, तो $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$ से $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$ मिलता है। विशेषतः यदि विचाराधीन परिग्रहण-अभिगृहीतों के प्रयोग से φ प्रमाण्य नहीं है, तो $\neg\varphi$ का कोई ऐसा प्रतिरूप है जिसमें ये परिग्रहण-अभिगृहीत फिर भी सत्य हैं।

यह देखने की सबसे सरल रीति कि पूर्णता प्रमेय दुर्बलतर अर्थविज्ञान के लिए सत्य है, द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र को निम्न प्रकार बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र मानना है। एक वर्ग की व्याख्या सामान्य "प्रथम-कोटि" प्रांत के रूप में होती है, और फिर प्रत्येक k के लिए हमारे पास "पदिता k वाले संबंधों" का एक प्रांत होता है। भाषा में अंतर्निर्मित संबंध-चिह्न "$true_k(R, x_1, \ldots, x_k)$" लेते हैं, जिसका आशय यह कहना है कि R, x_1, ..., x_k के लिए सत्य है; यहाँ R, "k-पदी संबंध" वर्ग का चर और x_1, ..., x_k प्रथम-कोटि वर्ग की वस्तुएँ हैं।

इस अभिज्ञान के साथ दुर्बल द्वितीय-कोटि अर्थविज्ञान मूलतः बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र का सामान्य अर्थविज्ञान है; और हम पहले ही देख चुके हैं कि बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र को प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में अंतःस्थापित किया जा सकता है। दोनों दिशाओं के अनुवादों को मान लें, तो द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की दुर्बलतर संकल्पना वास्तव में प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का छद्मवेशी रूप है, जिसमें प्रांत के भीतर उपयुक्त अभिगृहीतों द्वारा नियंत्रित "वस्तुएँ" और "संबंध" दोनों हैं।

24.4 उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की ओर जाने पर हम औपचारिक भाषा के भीतर प्रथम-कोटि प्रांत की वस्तुओं के समुच्चयों के विषय में बात कर सके। यहीं क्यों रुकें? उदाहरणतः तृतीय-कोटि तर्कशास्त्र से हम वस्तुओं के समुच्चयों के समुच्चयों, अथवा शायद ऐसे समुच्चयों से भी व्यवहार कर सकेंगे जिनमें वस्तुएँ और वस्तुओं के समुच्चय दोनों हों। चतुर्थ-कोटि तर्कशास्त्र हमें उस प्रकार की वस्तुओं के समुच्चयों की बात करने देगा। जैसा आपने अनुमान लगाया होगा, इस विचार को मनचाही बार दोहराया जा सकता है।

व्यवहार में उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र को संबंधों के बजाय प्रायः फलनों के पदों में सूत्रबद्ध किया जाता है। (स्वाभाविक अभिज्ञानों को मान लें तो यह भेद सारहीन है।) कुछ मूल "वर्ग" A, B, C, ...दिए हों (जिन्हें अब हम "प्रकार" कहेंगे), तो निम्न अनुबंध द्वारा नए प्रकार बना सकते हैं:

यदि σ और τ परिमित प्रकार हैं, तो $\sigma \to \tau$ भी परिमित प्रकार है।

प्रकारों को ऐसी वाक्यविन्यासिक "पर्चियाँ" समझिए जो हमारे प्रांत में वांछित वस्तुओं का वर्गीकरण करती हैं; $\sigma \to \tau$ उन वस्तुओं का वर्णन करता है जो प्रकार σ की वस्तुओं को प्रकार τ की वस्तुओं में ले जाने वाले फलन हैं। उदाहरणतः हम "सत्य" और "असत्य" सत्यता-मानों का प्रकार Ω, और प्राकृतिक संख्याओं का प्रकार $\mathbb{N}$ रखना चाह सकते हैं। तब $\mathbb{N} \to \Omega$ प्रकार की वस्तुओं को एकपदी संबंध, अथवा $\mathbb{N}$ के उपसमुच्चय मान सकते हैं; $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ प्रकार की वस्तुएँ प्राकृतिक संख्याओं से प्राकृतिक संख्याओं में जाने वाले फलन हैं; और $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ प्रकार की वस्तुएँ "फलनक" हैं, अर्थात् ऐसे उच्चतर-प्रकार फलन जो फलनों को संख्याओं में ले जाते हैं।

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की तरह उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र को एक प्रकार का बहु-वर्गीय तर्कशास्त्र माना जा सकता है, जिसमें विचाराधीन वस्तु के प्रत्येक प्रकार के लिए एक वर्ग होता है। किंतु सामान्यतः उच्चतर-प्रकार तर्कशास्त्र के वाक्यविन्यास को आधार से ही परिभाषित करना अधिक स्पष्ट है। उदाहरणतः परिमित प्रकारों का समुच्चय निम्न प्रकार आगमनिक रूप से परिभाषित कर सकते हैं:

1. $\mathbb{N}$ एक परिमित प्रकार है।
2. यदि σ और τ परिमित प्रकार हैं, तो $\sigma \to \tau$ भी परिमित प्रकार है।
3. यदि σ और τ परिमित प्रकार हैं, तो $\sigma \times \tau$ भी परिमित प्रकार है।

सहज अर्थ में $\mathbb{N}$ प्राकृतिक संख्याओं का प्रकार, $\sigma \to \tau$ प्रकार σ से प्रकार τ में जाने वाले फलनों का प्रकार, और $\sigma \times \tau$ वस्तु-युग्मों का प्रकार निरूपित करता है जिनमें एक वस्तु σ से और एक τ से है। तब पदों का समुच्चय निम्न प्रकार आगमनिक रूप से परिभाषित कर सकते हैं:

1. प्रत्येक प्रकार σ के लिए चरों x, y, z, ...का भंडार है; ये चर प्रकार σ के हैं।
2. 0, प्रकार $\mathbb{N}$ का पद है।
3. S (परवर्ती) प्रकार $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ का पद है।
4. यदि s प्रकार σ का पद और t प्रकार $\mathbb{N} \to (\sigma \to \sigma)$ का पद है, तो R_{st} प्रकार $\mathbb{N} \to \sigma$ का पद है।
5. यदि s प्रकार $\tau \to \sigma$ का और t प्रकार τ का पद है, तो $s(t)$ प्रकार σ का पद है।
6. यदि s प्रकार σ का पद और x प्रकार τ का चर है, तो $\lambda x.\, s$ प्रकार $\tau \to \sigma$ का पद है।
7. यदि s प्रकार σ और t प्रकार τ का पद है, तो $\langle s, t\rangle$ प्रकार $\sigma \times \tau$ का पद है।
8. यदि s प्रकार $\sigma \times \tau$ का पद है, तो $p_1(s)$ प्रकार σ का और $p_2(s)$ प्रकार τ का पद है।

सहज अर्थ में R_{st} निम्न पुनरावर्ती ढंग से परिभाषित फलन निरूपित करता है:

$$R_{st}(0) = s$$
$$R_{st}(x+1) = t(x, R_{st}(x)),$$

$\langle s, t\rangle$ उस युग्म को निरूपित करता है जिसका पहला घटक s और दूसरा घटक t है; तथा $p_1(s)$ और $p_2(s)$, s के क्रमशः पहले और दूसरे अवयव ("प्रक्षेप") निरूपित करते हैं। अंततः $\lambda x.\, s$ उस फलन f को निरूपित करता है जिसकी परिभाषा है

$$f(x) = s$$

प्रत्येक x के लिए जो प्रकार σ का हो; इसलिए मद (6) हमें परिग्रहण का एक रूप देती है, जिससे हम पदों द्वारा फलन परिभाषित कर सकते हैं। सूत्रों का निर्माण एक ही प्रकार के पदों के बीच तादात्म्य-कथनों $s = t$, सामान्य प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों और उच्चतर-प्रकार परिमाणीकरण से होता है। तब तंत्र के अभिगृहीत ऊपर परिभाषित पदों को नियंत्रित करने वाले मूल समीकरण, तथा परिमाणकों और तादात्म्य वाले तर्कशास्त्र के सामान्य नियम लिए जा सकते हैं।

यदि परिमित-प्रकार तंत्र में सत्यता-मानों का प्रकार Ω जोड़ें, तो उसके प्रयोग को नियंत्रित करने वाले अभिगृहीत भी जोड़ने होंगे। वस्तुतः थोड़ी चतुराई से जटिल सूत्रों को पूरी तरह हटाकर उनकी जगह प्रकार Ω के पद रखे जा सकते हैं! फिर प्रमाण-तंत्र को उसी के अनुसार बदला जा सकता है। परिणाम मूलतः 1930 के दशक में अलोंज़ो चर्च द्वारा प्रस्तुत *प्रकारों का सरल सिद्धांत* है।

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की तरह उच्चतर-प्रकार अर्थविज्ञान के भी अलग-अलग रूप हैं जिनका हम प्रयोग करना चाह सकते हैं। पूर्ण रूप में प्रकार $\sigma \to \tau$ के चर, प्रकार σ की वस्तुओं से प्रकार τ की वस्तुओं में जाने वाले *सभी* फलनों के समुच्चय पर विचरते हैं। अपेक्षानुसार यह अर्थविज्ञान इतना प्रबल है कि कोई पूर्ण, प्रभावी व्युत्पत्ति-तंत्र स्वीकार नहीं करता। किंतु दुर्बलतर अर्थविज्ञान लिया जा सकता है, जिसमें संरचना में अवयवों के समुच्चय T_τ प्रत्येक प्रकार τ के लिए होते हैं, और अनुप्रयोग, प्रक्षेप आदि की उपयुक्त संक्रियाएँ भी होती हैं। विवरण ठीक से पूरा करने पर ऊपर वर्णित प्रकार के व्युत्पत्ति-तंत्रों के लिए पूर्णता प्रमेय प्राप्त किए जा सकते हैं।

उच्चतर-प्रकार तर्कशास्त्र आकर्षक है क्योंकि वह ऐसा ढाँचा देता है जिसमें गणित के बड़े भाग को स्वाभाविक ढंग से अंतःस्थापित कर सकते हैं: $\mathbb{N}$ से आरंभ करके वास्तविक संख्याएँ, संतत फलन आदि परिभाषित किए जा सकते हैं। वह अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के संदर्भ में विशेष रूप से आकर्षक भी है, क्योंकि प्रकारों की स्पष्ट "रचनात्मक" व्याख्याएँ हैं। वस्तुतः उच्चतर-प्रकार अर्थविज्ञान के ऐसे रचनात्मक रूप (चिरसम्मत के बजाय अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र पर आधारित) विकसित किए जा सकते हैं जो इन रचनात्मक व्याख्याओं को बहुत अच्छी तरह स्पष्ट करते हैं और अनेक दृष्टियों से अपने चिरसम्मत समकक्षों से अधिक रोचक हैं।

24.5 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र

द्वितीय-कोटि और उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र के विपरीत अंतःप्रज्ञावादी प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र चिरसम्मत रूप का एक प्रतिबंध है, जिसका उद्देश्य अधिक "रचनात्मक" प्रकार के विचार-विन्यास का प्रतिरूपण करना है। निम्न उदाहरण उसकी कुछ मूल प्रेरणाएँ स्पष्ट कर सकते हैं।

मान लीजिए कि एक दिन कोई आपके पास आकर घोषणा करता है कि उसने एक प्राकृतिक संख्या x निर्धारित की है जिसका गुण यह है: यदि x अभाज्य है तो रीमान परिकल्पना सत्य है, और यदि x संयुक्त है तो रीमान परिकल्पना असत्य है। बहुत अच्छी खबर! रीमान परिकल्पना सत्य है या नहीं, यह गणित के बड़े अनसुलझे प्रश्नों में से एक है; और यहाँ उस व्यक्ति ने समस्या को मानो परिकलन की समस्या में, अर्थात् किसी निश्चित संख्या के अभाज्य होने या न होने के निर्धारण में, घटा दिया है।

x का वह जादुई मान क्या है? वह इसे इस प्रकार बताता है: x वह प्राकृतिक संख्या है जो रीमान परिकल्पना सत्य होने पर 7, और अन्यथा 9 के बराबर है।

क्रोधित होकर आप अपना पैसा वापस माँगते हैं। चिरसम्मत दृष्टि से ऊपर का वर्णन वास्तव में x का एक अद्वितीय मान निर्धारित करता है; किंतु आप वास्तव में x का ऐसा मान चाहते हैं जो *स्पष्टतः* दिया गया हो।

एक दूसरा, शायद कम कृत्रिम उदाहरण लें। हम जानते हैं कि किसी अपरिमेय संख्या को परिमेय घात तक उठाकर परिमेय परिणाम पाया जा सकता है; जैसे, $\sqrt{2}^2 = 2$। यह कम स्पष्ट है कि किसी अपरिमेय संख्या को *अपरिमेय* घात तक उठाकर परिमेय परिणाम पाया जा सकता है या नहीं। निम्न प्रमेय इसका सकारात्मक उत्तर देता है:

प्रमेय 24.1. *ऐसी अपरिमेय संख्याएँ a और b हैं जिनके लिए a^b परिमेय है।*

प्रमाण. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ पर विचार कीजिए। यदि यह परिमेय है, तो काम पूरा है: हम $a = b = \sqrt{2}$ ले सकते हैं। अन्यथा यह अपरिमेय है। तब

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

जो निश्चय ही परिमेय है। अतः इस स्थिति में a को $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ और b को $\sqrt{2}$ लें। □

क्या यह वैध प्रमाण है? अधिकांश गणितज्ञ मानते हैं कि है। फिर भी इसमें कुछ असंतोषजनक है: हमने एक निश्चित गुण वाले वास्तविक संख्याओं के युग्म का अस्तित्व सिद्ध किया, पर यह नहीं बता सके कि वह *कौन-सा* युग्म है। उसी

परिणाम को इस प्रकार भी सिद्ध किया जा सकता है कि युग्म a, b प्रमाण में *दिया* हो: $a = \sqrt{3}$ और $b = \log_3 4$ लें। तब

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{1/2 \cdot \log_3 4} = (3^{\log_3 4})^{1/2} = 4^{1/2} = 2,$$

क्योंकि $3^{\log_3 x} = x$।

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र ऐसे विचार-विन्यास का प्रतिरूपण करने के लिए बना है जिसमें पहले प्रमाण जैसी चाल मान्य नहीं है। किसी x का, जो $\varphi(x)$ को संतुष्ट करता हो, अस्तित्व सिद्ध करने का अर्थ है कि आपको कोई निश्चित x और उसके φ को संतुष्ट करने का प्रमाण देना होगा, जैसा दूसरे प्रमाण में है। φ या ψ सत्य है, यह सिद्ध करने के लिए इनमें से किसी एक को सिद्ध कर सकना आवश्यक है।

औपचारिक रूप से, प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के किसी व्युत्पत्ति-तंत्र को एक निश्चित ढंग से प्रतिबंधित करने पर अंतः-प्रज्ञावादी प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र मिलता है। इसी प्रकार द्वितीय-कोटि और उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र के भी अंतःप्रज्ञावादी रूप हैं। गणितीय दृष्टि से ये केवल औपचारिक निगमन-तंत्र हैं, पर जैसा कहा गया, इनका उद्देश्य एक प्रकार के गणितीय विचार-विन्यास का प्रतिरूपण करना है। इसे वह विचार-विन्यास माना जा सकता है जिसे गणित का कोई निश्चित दार्शनिक मत (जैसे ब्राउअर का अंतःप्रज्ञावाद) उचित ठहराता है; इसे अधिक "मूर्त" और संतोषजनक गणितीय विचार-विन्यास (बिशप के रचनावाद की दिशा में) माना जा सकता है; और इस पर विवाद किया जा सकता है कि औपचारिक वर्णन अनौपचारिक प्रेरणा को ग्रहण करता है या नहीं। पर हमारे दार्शनिक मत कुछ भी हों, हम अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का अध्ययन औपचारिक रूप से प्रस्तुत तर्कशास्त्र के रूप में कर सकते हैं; और कारण जो भी हों, अनेक गणितीय तर्कशास्त्री ऐसा करना रोचक पाते हैं।

अंतःप्रज्ञावादी संयोजकों की एक अनौपचारिक रचनात्मक व्याख्या है, जिसे सामान्यतः BHK व्याख्या कहा जाता है (ब्राउअर, हेटिंग और कोल्मोगोरोव के नाम पर)। वह इस प्रकार है: $\varphi \wedge \psi$ का प्रमाण, φ के प्रमाण के साथ युग्मित ψ के प्रमाण से बनता है; $\varphi \vee \psi$ का प्रमाण या तो φ का प्रमाण है या ψ का, और हमें स्पष्ट सूचना होती है कि इनमें से कौन-सी स्थिति है; $\varphi \to \psi$ का प्रमाण ऐसी प्रक्रिया है जो φ के प्रमाण को ψ के प्रमाण में बदलती है; $\forall x\, \varphi(x)$ का प्रमाण ऐसी प्रक्रिया है जो $\varphi(x)$ का प्रमाण x के प्रत्येक मान के लिए लौटाती है; और $\exists x\, \varphi(x)$ का प्रमाण x के किसी मान और उस मान द्वारा φ को संतुष्ट करने के प्रमाण से बनता है। इस व्याख्या को "करी–हावर्ड समरूपता" अथवा "सूत्रों-को-प्रकार मानने का प्रतिमान" कहलाने वाले संगणनात्मक पदों में भी कह सकते हैं: किसी सूत्र को एक निश्चित प्रकार के आँकड़ा-प्रकार का विनिर्देशन और प्रमाणों को उन आँकड़ा-प्रकारों की संगणनात्मक वस्तुएँ मानिए, जिनसे हम देख सकते हैं कि संगत सूत्र सत्य है।

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र को प्रायः मध्यनिषेध नियम "घटाकर" बचा हुआ चिरसम्मत तर्कशास्त्र माना जाता है। निम्न प्रमेय इस कथन को अधिक सटीक बनाता है।

प्रमेय 24.2. *अंतःप्रज्ञावादी दृष्टि से निम्न अभिगृहीत-प्रतिरूप समतुल्य हैं:*

1. $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$.
2. $\varphi \vee \neg\varphi$
3. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

अन्य दोनों में से किसी एक द्वारा एक प्रतिरूप की निष्पत्तियाँ प्राप्त करना अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का अच्छा अभ्यास है।

ब्राउअर के अंतःप्रज्ञावाद के औपचारीकरण के रूप में प्रस्तुत अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्ति-तर्कशास्त्र के प्रथम निगमन-तंत्र कोल्मोगोरोव, ग्लिवेंको और हेटिंग ने स्वतंत्र रूप से दिए। अंतःप्रज्ञावादी प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र (और अंतःप्रज्ञावादी गणित के कुछ भागों) का प्रथम औपचारीकरण हेटिंग ने किया। यद्यपि चिरसम्मत रूप से वैध अनेक प्रतिरूप अंतःप्रज्ञावादी रूप से वैध नहीं हैं, अनेक वैध हैं।

द्विनिषेध अनुवाद चिरसम्मत और अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के बीच एक महत्त्वपूर्ण संबंध बताता है। इसे निम्न प्रकार आगमनिक रूप से परिभाषित किया जाता है (φ^N को चिरसम्मत सूत्र φ का "अंतःप्रज्ञावादी" अनुवाद समझिए):

$$\begin{aligned}
\varphi^N &\equiv \neg\neg\varphi \quad \text{परमाण्विक सूत्रों } \varphi \text{ के लिए} \\
(\varphi \wedge \psi)^N &\equiv (\varphi^N \wedge \psi^N) \\
(\varphi \vee \psi)^N &\equiv \neg\neg(\varphi^N \vee \psi^N) \\
(\varphi \to \psi)^N &\equiv (\varphi^N \to \psi^N) \\
(\forall x\, \varphi)^N &\equiv \forall x\, \varphi^N \\
(\exists x\, \varphi)^N &\equiv \neg\neg\exists x\, \varphi^N
\end{aligned}$$

कोल्मोगोरोव और ग्लिवेंको ने प्रतिज्ञप्ति-तर्कशास्त्र के लिए इस अनुवाद के रूप दिए; विधेय-तर्कशास्त्र के लिए गोडेल (Gödel) और जेंट्सेन ने इसे स्वतंत्र रूप से दिया। हमारे पास निम्न प्रमेय है:

प्रमेय 24.3. *1. $\varphi \leftrightarrow \varphi^N$ चिरसम्मत रूप से प्रमाण्य है।*

2. यदि φ चिरसम्मत रूप से प्रमाण्य है, तो φ^N अंतःप्रज्ञावादी रूप से प्रमाण्य है।

अब निम्न संवाद की कल्पना कीजिए। चिरसम्मत गणितज्ञ: "मैंने φ सिद्ध कर दिया!" अंतःप्रज्ञावादी गणितज्ञ: "तुम्हारा प्रमाण वैध नहीं है। वास्तव में तुमने φ^N सिद्ध किया है।" चिरसम्मत गणितज्ञ: "मुझे मंज़ूर है!" चिरसम्मत गणितज्ञ की दृष्टि में अंतःप्रज्ञावादी केवल बाल की खाल निकाल रहा है, क्योंकि दोनों समतुल्य हैं। किंतु अंतःप्रज्ञावादी आग्रह करता है कि उनमें अंतर है।

ध्यान दें कि ऊपर का अनुवाद केवल शुद्ध तर्कशास्त्र से संबंधित है; वह इस प्रश्न का उत्तर नहीं देता कि चिरसम्मत और अंतःप्रज्ञावादी गणित के लिए उपयुक्त *अतार्किक* अभिगृहीत कौन-से हैं, अथवा उनके बीच क्या संबंध है। किंतु ऊपर के प्रमेय का निम्न छोटा-सा विस्तार कुछ उपयोगी सूचना देता है:

प्रमेय 24.4. *यदि Γ, φ को चिरसम्मत रूप से सिद्ध करता है, तो Γ^N, φ^N को अंतःप्रज्ञावादी रूप से सिद्ध करता है।*

दूसरे शब्दों में, यदि कुछ परिकल्पनाओं से φ चिरसम्मत रूप से प्रमाण्य है, तो उनके द्विनिषेध अनुवादों से φ^N प्रमाण्य है।

यह दिखाने के लिए कि कोई वाक्य अथवा प्रतिज्ञप्तिक सूत्र अंतःप्रज्ञावादी रूप से वैध है, केवल एक प्रमाण देना होता है। किंतु यह कैसे दिखाएँ कि वह वैध नहीं है? इसके लिए हमें ऐसा अर्थविज्ञान चाहिए जो सुदृढ़ और अधिमानतः पूर्ण हो। क्रिप्के द्वारा दिया अर्थविज्ञान इस काम के लिए उपयुक्त है।

हम चिरसम्मत तर्कशास्त्र वाला वही खेल खेल सकते हैं: अर्थविज्ञान परिभाषित करें और सुदृढ़ता तथा पूर्णता सिद्ध करें। फिर भी निम्न भेद ध्यान देने योग्य है। चिरसम्मत तर्कशास्त्र में अर्थविज्ञान एक अर्थ में "स्पष्ट" था और संयोजकों के अर्थ में अंतर्निहित था। क्रिप्के अर्थविज्ञान के लिए कुछ सहज प्रेरणा दी जा सकती है, पर उसमें वैसी ही अनिवार्यता की अनुभूति नहीं होती। इसके अतिरिक्त चिरसम्मत संरचना की धारणा एक स्वाभाविक गणितीय धारणा है; इसलिए हम संरचना की धारणा को चिरसम्मत प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के अध्ययन का साधन मान सकते हैं, अथवा यह मान सकते हैं कि चिरसम्मत प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से गणितीय संरचनाएँ समझ में आती हैं। इसके विपरीत क्रिप्के संरचनाएँ केवल तार्किक रचनाएँ मानी जा सकती हैं; उनमें स्वतंत्र गणितीय रुचि दिखाई नहीं देती।

किसी प्रतिज्ञप्तिक भाषा के लिए क्रिप्के संरचना $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ में एक समुच्चय W, आंशिक क्रम R जो W पर है और जिसका न्यूनतम अवयव है, तथा W के अवयव और प्रतिज्ञप्तिक चरों के बीच एक "क्रम-संरक्षी" नियतन होता है। सहज धारणा यह है कि W के अवयव "जगतों" अथवा "ज्ञान-अवस्थाओं" को निरूपित करते हैं; अवयव $v \geq u$, u की एक "संभावित भावी अवस्था" को निरूपित करता है; और u को नियत प्रतिज्ञप्तिक चर वे प्रतिज्ञप्तियाँ हैं जिन्हें अवस्था u में सत्य ज्ञात किया जाता है। तब बलन-संबंध $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ इस संबंध को भाषा के मनचाहे सूत्रों तक विस्तृत करता है; $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ को "φ अवस्था w में सत्य है" पढ़ें। यह संबंध निम्न प्रकार आगमनिक रूप से परिभाषित है:

1. $\mathfrak{M}, w \Vdash p_i$ तभी और केवल तभी जब p_i, w को नियत प्रतिज्ञप्तिक चरों में से एक हो।

2. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$।

3. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \wedge \psi)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$।

4. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \vee \psi)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$।

5. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \to \psi)$ तभी और केवल तभी जब $w' \geq w$ और $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$ होने पर सदा $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ हो।

प्रतिउदाहरण देने वाली क्रिप्के संरचना बनाकर यह दिखाने का प्रयास एक अच्छा अभ्यास है कि $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ अंतःप्रज्ञावादी रूप से वैध नहीं है।

24.6 विधात्मक तर्कशास्त्र

किसी सशर्त वाक्य का निम्न उदाहरण देखिए:

> यदि जेरेमी उस कमरे में अकेला है, तो वह नशे में है, निर्वस्त्र है और कुर्सियों पर नाच रहा है।

यह ऐसा सशर्त कथन है जो शाब्दिक रूप से सत्य होते हुए भी भ्रामक हो सकता है, क्योंकि यह केवल इतना कहने के बजाय—कि या तो पूर्वांग असत्य है या उत्तरांग सत्य—पूर्वांग और निष्कर्ष के बीच किसी अधिक प्रबल संबंध का संकेत देता है। अर्थात् शब्द-विन्यास बताता है कि दावा केवल इस विशेष जगत में सत्य नहीं है (जहाँ वह तुच्छ रूप से सत्य हो सकता है, क्योंकि जेरेमी कमरे में अकेला नहीं है), बल्कि यदि पूर्वांग सत्य *होता*, तो निष्कर्ष भी सत्य *होता*। दूसरे शब्दों में, कथन का अर्थ लिया जा सकता है कि दावा केवल इस जगत में नहीं बल्कि हर "संभावित" जगत में सत्य है; अथवा कि वह इस विशेष जगत में मात्र सत्य होने के विपरीत *अनिवार्यतः* सत्य है।

इसी प्रकार की अनिवार्यता को अर्थ देने के लिए विधात्मक तर्कशास्त्र बनाया गया। सामान्य प्रतिज्ञप्ति-तर्कशास्त्र में एक पेटिका संकारक जोड़कर विधात्मक प्रतिज्ञप्ति-तर्कशास्त्र मिलता है; अर्थात् यदि φ सूत्र है, तो $\Box\varphi$ भी है। सहज अर्थ में $\Box\varphi$ कहता है कि φ *अनिवार्यतः* सत्य है, अर्थात् हर संभावित जगत में सत्य है। सामान्यतः $\Diamond\varphi$ को $\neg\Box\neg\varphi$ का संक्षेप माना जाता है और इसे इस कथन के रूप में पढ़ सकते हैं कि φ *संभवतः* सत्य है। निस्संदेह, विधात्मकता को विधेय-तर्कशास्त्र में भी जोड़ा जा सकता है।

क्रिप्के संरचनाएँ विधात्मक तर्कशास्त्र को अर्थविज्ञान दे सकती हैं; वस्तुतः क्रिप्के ने पहले इसी तर्कशास्त्र को ध्यान में रखकर यह अर्थविज्ञान बनाया था। आंशिक क्रमों तक सीमित रहने के बजाय हमारे पास अधिक सामान्यतः "संभावित जगतों" का समुच्चय P और जगतों के बीच एक द्विपदी "अभिगम्यता" संबंध $R(x, y)$ होता है। सहज अर्थ में $R(p, q)$ कहता है कि जगत q, जगत p के साथ संगत है; यानी यदि हम जगत p "में" हैं, तो हमें इस संभावना पर विचार करना होगा कि जगत q जैसा हो सकता था।

विधात्मक तर्कशास्त्र को कभी-कभी "अंतर्वस्त्वात्मक" तर्कशास्त्र कहा जाता है, जो "विस्तारात्मक" तर्कशास्त्र के विपरीत है। चिरसम्मत तर्कशास्त्र जैसे विस्तारात्मक तर्कशास्त्र का अभीष्ट अर्थविज्ञान केवल एक, "वास्तविक" जगत का निर्देश करता है; जबकि "अंतर्वस्त्वात्मक" तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान अधिक विस्तृत सत्तामीमांसा पर निर्भर करता है। अनिवार्यता की संरचना बनाने के अतिरिक्त, अनुप्रयोग के अनुसार $\Box$ और $\Diamond$ की पुनर्व्याख्या करके विधात्मकता से अन्य भाषिक रचनाओं की संरचना भी बनाई जा सकती है। उदाहरणतः:

1. प्रमाण्यता-तर्कशास्त्र में $\Box\varphi$ को "φ प्रमाण्य है" और $\Diamond\varphi$ को "φ संगत है" पढ़ा जाता है।

2. ज्ञानमीमांसात्मक तर्कशास्त्र में $\Box\varphi$ को "मैं φ जानता हूँ" अथवा "मैं φ मानता हूँ" पढ़ सकते हैं।

3. कालिक तर्कशास्त्र में $\Box\varphi$ को "φ सदा सत्य है" और $\Diamond\varphi$ को "φ कभी-कभी सत्य है" पढ़ सकते हैं।

हम तर्कशास्त्र में विधात्मकता से संबंधित नियम और अभिगृहीत जोड़ना चाहेंगे। उदाहरणतः तंत्र **S4** में प्रतिज्ञप्ति-तर्कशास्त्र के सामान्य अभिगृहीतों और नियमों के साथ निम्न अभिगृहीत होते हैं:

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$
$$\Box\varphi \to \varphi$$
$$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

और यह नियम भी: "φ से $\Box\varphi$ निष्कर्षित करो।" **S5** निम्न अभिगृहीत जोड़ता है:

$$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$$

इन अभिगृहीतों के रूपांतर अलग-अलग अनुप्रयोगों के अनुकूल हो सकते हैं; जैसे, सामान्यतः S5 को तार्किक अनिवार्यता की धारणा का अभिलक्षण माना जाता है। एक अच्छी बात यह है कि यदि क्रिप्के संरचनाएँ ऐसी चुनी जाएँ कि उनका अभिगम्यता संबंध स्वाभाविक रीतियों से प्रतिबंधित हो, तो प्रायः ऐसा अर्थविज्ञान मिल जाता है जिसके लिए व्युत्पत्ति-तंत्र सुदृढ़ और पूर्ण हो। उदाहरणतः **S4** के अनुरूप सभी क्रिप्के संरचनाएँ ऐसी हैं कि उनका अभिगम्यता संबंध स्वतुल्य और संक्रामक है। **S5** के अनुरूप सभी क्रिप्के संरचनाएँ ऐसी हैं कि उनका अभिगम्यता संबंध *सार्वत्रिक* है, अर्थात् प्रत्येक जगत हर अन्य जगत से अभिगम्य है; अतः $\Box\varphi$ तभी और केवल तभी सत्य है जब φ प्रत्येक जगत में सत्य हो।

24.7 अन्य तर्कशास्त्र

अब तक आप समझ गए होंगे कि कोई नया तर्कशास्त्र बनाना कठिन नहीं है। आप भी अपना वाक्यविन्यास बना सकते हैं, एक निगमन-तंत्र गढ़ सकते हैं और उसके अनुरूप अर्थविज्ञान रच सकते हैं। यदि आप चाहते हैं कि व्युत्पत्ति-तंत्र उस अर्थविज्ञान के लिए पूर्ण हो, तो आपको कुछ चतुराई दिखानी पड़ सकती है; और व्यापक जगत को यह मानने के लिए मनाने में भी कुछ श्रम लग सकता है कि आपका तर्कशास्त्र सचमुच रोचक है। बदले में, आप उसके गणितीय और संगणनात्मक गुणधर्मों की खोज में घंटों का निर्मल आनंद ले सकते हैं।

हाल के दशकों में औपचारिक तर्कशास्त्रों की मानो बाढ़ आ गई है। अस्पष्ट गुणधर्मों के विषय में विचार-विन्यास का प्रतिरूपण करने के लिए धुँधला तर्कशास्त्र बनाया गया है। अनिश्चितता के विषय में विचार-विन्यास के लिए प्रायिकता-तर्कशास्त्र बनाया गया है। प्रत्याहरणीय विचार-विन्यास—अर्थात् ऐसे "उचित" अनुमानों, जिन्हें नई सूचना मिलने पर बाद में उलटा जा सकता है—के प्रतिरूपण के लिए पूर्वकल्पना-आधारित तर्कशास्त्र और अ-एकदिशी तर्कशास्त्र बनाए गए हैं। ज्ञान के विषय में विचार-विन्यास के लिए ज्ञानमीमांसात्मक तर्कशास्त्र; कार्य-कारण संबंधों के लिए कारणात्मक तर्कशास्त्र; और नैतिक कर्तव्यों के विषय में विचार-विन्यास के लिए "कर्तव्यात्मक" तर्कशास्त्र तक हैं। इन तंत्रों को प्रस्तुत करने की मुख्य प्रेरणा दार्शनिक, गणितीय अथवा संगणनात्मक है या नहीं, उसके अनुसार आपको ऐसे प्राणियों का अध्ययन गणितीय तर्कशास्त्र, दार्शनिक तर्कशास्त्र, कृत्रिम बुद्धिमत्ता, संज्ञान-विज्ञान या किसी अन्य शीर्षक के अंतर्गत मिल सकता है।

सूची बढ़ती ही जाती है और संभावनाएँ अंतहीन लगती हैं। समस्त मानवीय बुद्धि को परिकलन में घटा देने का लाइबनित्स का स्वप्न हम शायद कभी पूरा न कर पाएँ—पर यह हमें प्रयास करने से नहीं रोक सकता।

खण्ड IV

निदर्श सिद्धांत

निदर्श सिद्धांत की सामग्री अपूर्ण और प्रयोगात्मक है। अभी यह केवल निदर्श सिद्धांत पर आल्दो अंतोनेल्ली की टिप्पणियों का रूपांतरण है, जिसमें प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र वाले भाग में समेटे विषय (सिद्धांत, पूर्णता, संहतता) नहीं हैं। पाठ्यपुस्तक के लिए उपयोगी होने हेतु इसमें और अधिक परिचय, प्रेरणा, व्याख्या तथा अभ्यास चाहिए। एंडी अराना विशेषतः इस भाग पर काम करने की योजना बना रहे हैं (issue #65)।

अध्याय 25

प्रतिरूप सिद्धांत की आधारभूत बातें

25.1 न्यूनीकृत रूप और विस्तार

जिन भाषाओं के कुछ प्रतीक समान हों, उन भाषाओं की तथा उनकी संरचनाएँ की तुलना करना प्रायः उपयोगी या आवश्यक होता है। सबसे सामान्य स्थिति तब होती है जब भाषा $\mathcal{L}$ के सभी प्रतीक भाषा $\mathcal{L}'$ में भी हों, अर्थात् $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$। तब अतिरिक्त प्रतीकों की व्याख्याएँ जोड़कर और समान प्रतीकों की व्याख्याएँ अपरिवर्तित रखकर किसी $\mathcal{L}$-संरचना $\mathfrak{M}$ को हमेशा किसी $\mathcal{L}'$-संरचना में विस्तारित किया जा सकता है। दूसरी ओर, किसी $\mathcal{L}'$-संरचना $\mathfrak{M}'$ से उन प्रतीकों की व्याख्याएँ केवल "भुलाकर", जो $\mathcal{L}$ में नहीं आते, हम एक $\mathcal{L}$-संरचना प्राप्त कर सकते हैं।

परिभाषा 25.1. मान लें कि $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ है, $\mathfrak{M}$ एक $\mathcal{L}$-संरचना है और $\mathfrak{M}'$ एक $\mathcal{L}'$-संरचना है। $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ का $\mathcal{L}$ तक *न्यूनीकृत रूप* है, और $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}$ का $\mathcal{L}'$ तक *विस्तार* है, तभी और केवल तभी जब

1. $|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}'|$
2. प्रत्येक अचर $c \in \mathcal{L}$ के लिए, $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}'}$.
3. प्रत्येक फलन-चिह्न $f \in \mathcal{L}$ के लिए, $f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{M}'}$.
4. प्रत्येक विधेय-चिह्न $P \in \mathcal{L}$ के लिए, $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}'}$.

प्रतिज्ञप्ति 25.2. *यदि कोई $\mathcal{L}$-संरचना $\mathfrak{M}$ किसी $\mathcal{L}'$-संरचना $\mathfrak{M}'$ का न्यूनीकृत रूप है, तो प्रत्येक $\mathcal{L}$-वाक्य φ के लिए,*

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \text{ तभी और केवल तभी जब } \mathfrak{M}' \vDash \varphi.$$

प्रमाण. अभ्यास। □

परिभाषा 25.3. मान लें कि हमारे पास कोई $\mathcal{L}$-संरचना $\mathfrak{M}$ है, और $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{P\}$, $\mathcal{L}$ में कोई एक n-स्थानीय विधेय-चिह्न P जोड़कर प्राप्त विस्तार है। यदि $R \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ कोई n-स्थानीय संबंध है, तो हम $(\mathfrak{M}, R)$ उस विस्तार $\mathfrak{M}'$ के लिए लिखते हैं जो $\mathfrak{M}$ से मिलता है और जिसमें $P^{\mathfrak{M}'} = R$।

25.2 उपसंरचनाएँ

किसी संरचना $\mathfrak{M}$ का प्रांत किसी अन्य $\mathfrak{M}'$ के प्रांत का उपसमुच्चय हो सकता है। किंतु स्पष्टतः $\mathfrak{M}$ को $\mathfrak{M}'$ का "भाग" तभी मानना चाहिए जब केवल $|\mathfrak{M}| \subseteq |\mathfrak{M}'|$ ही न हो, बल्कि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ भाषा के प्रतीकों की व्याख्या करने के ढंग में कम-से-कम साझा भाग $|\mathfrak{M}|$ पर "सहमत" भी हों।

परिभाषा 25.4. संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ एक ही भाषा $\mathcal{L}$ की दी गई हों। हम $\mathfrak{M}$ को $\mathfrak{M}'$ की *उपसंरचना*, और $\mathfrak{M}'$ को $\mathfrak{M}$ का *विस्तार* कहते हैं, तथा $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$ लिखते हैं, तभी और केवल तभी जब

1. $|\mathfrak{M}| \subseteq |\mathfrak{M}'|$,
2. प्रत्येक नियतांक $c \in \mathcal{L}$ के लिए, $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}'}$;
3. प्रत्येक n-स्थानीय फलन-चिह्न $f \in \mathcal{L}$ के लिए, $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ सभी a_1, ..., $a_n \in |\mathfrak{M}|$ के लिए।
4. प्रत्येक n-स्थानीय विधेय-चिह्न $R \in \mathcal{L}$ के लिए, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$ तभी और केवल तभी जब $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}'}$; यह सभी a_1, ..., $a_n \in |\mathfrak{M}|$ के लिए है।

टिप्पणी 1. यदि भाषा में कोई नियतांक या फलन-चिह्न न हो, तो कोई भी $N \subseteq |\mathfrak{M}|$ ऐसी उपसंरचना $\mathfrak{N}$ निर्धारित करता है जो $\mathfrak{M}$ की है और जिसका प्रांत $|\mathfrak{N}| = N$ है; इसे $R^{\mathfrak{N}} = R^{\mathfrak{M}} \cap N^n$ रखकर निर्धारित करते हैं।

25.3 अतिप्रवाह

प्रमेय 25.5. *यदि वाक्यों के किसी समुच्चय Γ के मनमाने रूप से बड़े परिमित प्रतिरूप हैं, तो उसका एक अनंत प्रतिरूप भी है।*

प्रमाण. Γ की भाषा में गणनीय रूप से अनेक नए नियतांक c_0, c_1, ...जोड़कर उसे विस्तारित करें और समुच्चय $\Gamma \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}$ पर विचार करें। यह कहना कि Γ के मनमाने रूप से बड़े परिमित प्रतिरूप हैं, इसका अर्थ है कि प्रत्येक $m > 0$ के लिए कोई $n \geq m$ ऐसा है कि Γ के किसी प्रतिरूप के प्रांत में n अवयव हैं। इससे $\Gamma \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}$ परिमिततः संतुष्टनीय है। संहतता के अनुसार, $\Gamma \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}$ का कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ है जिसका प्रांत अनंत होना ही चाहिए, क्योंकि वह सभी असमानताओं $c_i \neq c_j$ को संतुष्ट करता है। □

प्रतिज्ञप्ति 25.6. *किसी भी प्रथम-कोटि भाषा का कोई ऐसा वाक्य φ नहीं है जो किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य हो जब उस संरचना का प्रांत $|\mathfrak{M}|$ अनंत हो।*

प्रमाण. यदि ऐसा कोई φ होता, तो उसका निषेध $\neg\varphi$ सभी और केवल परिमित संरचनाएँ में सत्य होता। अतः उसके मनमाने रूप से बड़े परिमित प्रतिरूप होते, किंतु कोई अनंत प्रतिरूप न होता; यह प्रमेय 25.5 के विरुद्ध है। □

25.4 समरूपी संरचनाएँ

प्रथम-कोटि संरचनाएँ दो प्रकार से एक जैसी हो सकती हैं। एक प्रकार से वे तब एक जैसी होती हैं जब उन्हीं वाक्यों को सत्य करती हैं। ऐसी संरचनाएँ को हम *प्राथमिकतः तुल्य* कहते हैं। किंतु संरचनाएँ बहुत भिन्न होकर भी उन्हीं वाक्यों को सत्य कर सकती हैं—उदाहरणतः एक गणनीय हो सकती है और दूसरी नहीं। इसका कारण यह है कि किसी संरचना के अनेक लक्षण प्रथम-कोटि भाषाओं में व्यक्त नहीं किए जा सकते: या तो भाषा पर्याप्त समृद्ध नहीं होती, या ल्योवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय जैसी प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की मूलभूत सीमाएँ आड़े आती हैं। अतः संरचनाएँ एक दूसरे जैसी होने का एक और, अधिक कठोर अर्थ यह है कि वे मूलतः एक ही हों: उन्हें बनाने वाली वस्तुएँ तो अलग हों, पर उनके संरचनात्मक लक्षण नहीं। इस बात को सटीक बनाने का एक साधन *समरूपता* की संकल्पना है।

परिभाषा 25.7. दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ एक ही भाषा $\mathcal{L}$ की दी गई हों। हम कहते हैं कि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ *प्राथमिकतः तुल्य* हैं, और इसे $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ लिखते हैं, तभी और केवल तभी जब प्रत्येक वाक्य φ, जो $\mathcal{L}$ का है, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}' \vDash \varphi$।

परिभाषा 25.8. दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ एक ही भाषा $\mathcal{L}$ की दी गई हों। हम कहते हैं कि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{M}'$ *समरूपी* हैं, और इसे $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$ लिखते हैं, तभी और केवल तभी जब कोई फलन $h\colon |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}'|$ ऐसा हो कि:

1. h एकैकी है: यदि $h(x) = h(y)$, तो $x = y$;
2. h आच्छादक है: प्रत्येक $y \in |\mathfrak{M}'|$ के लिए कोई $x \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $h(x) = y$;
3. प्रत्येक अचर c के लिए: $h(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{M}'}$;
4. प्रत्येक n-स्थानीय विधेय-चिह्न P के लिए:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \quad \text{तभी और केवल तभी जब} \quad \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{M}'};$$

5. प्रत्येक n-स्थानीय फलन-चिह्न f के लिए:

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{M}'}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

प्रमेय 25.9. *यदि $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$, तो $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$।*

प्रमाण. मान लें कि h, $\mathfrak{M}$ से $\mathfrak{M}'$ पर कोई समरूपता है। किसी भी नियतन s के लिए $h \circ s$, h और s का संयोजन है, अर्थात् $\mathfrak{M}'$ में वह नियतन जिसके लिए $(h \circ s)(x) = h(s(x))$। t और φ पर आगमन द्वारा निम्न अधिक प्रबल दावे सिद्ध किए जा सकते हैं:

a. $h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)) = \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t)$.

b. $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}', h \circ s \vDash \varphi$।

पहला दावा t की जटिलता पर आगमन द्वारा सिद्ध होता है।

1. यदि $t \equiv c$, तो $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}}$ और $\mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(c) = c^{\mathfrak{M}'}$। अतः $h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)) = h(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{M}'}$ (परिभाषा 25.8 के (3) से) $= \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t)$.
2. यदि $t \equiv x$, तो $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x) = s(x)$ और $\mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(x) = h(s(x))$। अतः $h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x)) = h(s(x)) = \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(x)$।
3. यदि $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, तो

$$\begin{aligned} \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)) \quad \text{और} \\ \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t) &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t_n)). \end{aligned}$$

आगमन-परिकल्पना है कि प्रत्येक i के लिए $h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_i)) = \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t_i)$। इसलिए,

$$\begin{aligned} h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)) &= h(f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)) \\ &= f^{\mathfrak{M}'}(h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1)), \ldots, h(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n))) && (25.1) \\ &= f^{\mathfrak{M}'}(\mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t_n)) && (25.2) \\ &= \mathrm{Val}_{h \circ s}^{\mathfrak{M}'}(t) \end{aligned}$$

यहाँ समीकरण (25.1), परिभाषा 25.8 के (5) से और समीकरण (25.2) आगमन-परिकल्पना से मिलता है।

भाग (b) को अभ्यास के लिए छोड़ा गया है।

यदि φ कोई वाक्य है, तो नियतन s और $h \circ s$ अप्रासंगिक हैं, और $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}' \vDash \varphi$।□

परिभाषा 25.10. किसी संरचना $\mathfrak{M}$ की *स्वसमरूपता*, $\mathfrak{M}$ से स्वयं उसी पर कोई समरूपता है।

25.5 किसी संरचना का सिद्धांत

प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ कुछ वाक्यों को सत्य और कुछ को असत्य करती है। जिन सभी वाक्यों को वह सत्य करती है, उनके समुच्चय को उसका *सिद्धांत* कहते हैं। वह समुच्चय वास्तव में एक सिद्धांत है, क्योंकि उससे निष्पन्न होने वाली प्रत्येक बात उसके सभी प्रतिरूपों में सत्य होनी चाहिए, जिनमें $\mathfrak{M}$ भी सम्मिलित है।

परिभाषा 25.11. कोई संरचना $\mathfrak{M}$ दी गई हो। $\mathfrak{M}$ का *सिद्धांत*, उन वाक्यों का समुच्चय $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ है जो $\mathfrak{M}$ में सत्य हैं, अर्थात् $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi : \mathfrak{M} \vDash \varphi\}$.

हम "सिद्धांत" पद का अनौपचारिक उपयोग उन वाक्यों के समुच्चयों के लिए भी करते हैं जिनकी कोई अभिप्रेत व्याख्या हो, चाहे वे निगमन के अधीन संवृत हों या नहीं।

प्रतिज्ञप्ति 25.12. *प्रत्येक $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ पूर्ण है।*

प्रमाण. किसी भी वाक्य φ के लिए या तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ अथवा $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$, इसलिए या तो $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ अथवा $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$। □

प्रतिज्ञप्ति 25.13. *यदि $\mathfrak{N} \models \varphi$ प्रत्येक $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ के लिए, तो $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$।*

प्रमाण. चूँकि $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ सभी $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ के लिए, $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$। यदि $\mathfrak{N} \vDash \varphi$, तो $\mathfrak{N} \nvDash \neg\varphi$, इसलिए $\neg\varphi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$। चूँकि $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ पूर्ण है, $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$। अतः $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, और इसलिए $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$। □

टिप्पणी 2. $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ पर विचार करें। यह वह संरचना है जिसका प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{R}$ है, और जिसकी भाषा में केवल एक द्वि-स्थानीय विधेय-चिह्न है जिसकी व्याख्या वास्तविक संख्याओं पर $<$ संबंध के रूप में होती है। स्पष्टतः $\mathfrak{R}$ अगणनीय है; किंतु $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ के स्पष्टतः संगत होने से, ल्योवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय के अनुसार उसका कोई गणनीय प्रतिरूप है, मान लें $\mathfrak{S}$। प्रतिज्ञप्ति 25.13 से $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{S}$। फिर भी $\mathfrak{R}$ और $\mathfrak{S}$ समरूपी नहीं हैं, अतः इससे दिखता है कि प्रमेय 25.9 का विलोम सामान्यतः विफल होता है।

25.6 आंशिक समरूपताएँ

परिभाषा 25.14. दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ दी गई हों। $\mathfrak{M}$ से $\mathfrak{N}$ तक कोई *आंशिक समरूपता* ऐसा परिमित आंशिक फलन p है जिसके तर्क $|\mathfrak{M}|$ में और मान $|\mathfrak{N}|$ में होते हैं, तथा जो अपने प्रांत पर परिभाषा 25.8 की समरूपता-शर्तें पूरी करता है:

1. p एकैकी है;
2. प्रत्येक अचर c के लिए: यदि $p(c^{\mathfrak{M}})$ परिभाषित है, तो $p(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$;
3. प्रत्येक n-स्थानीय विधेय-चिह्न P के लिए: यदि a_1, ..., a_n, p के प्रांत में हैं, तो $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$ तभी और केवल तभी जब $\langle p(a_1), \ldots, p(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{N}}$;
4. प्रत्येक n-स्थानीय फलन-चिह्न f के लिए निम्न शर्त लागू होती है: यदि a_1, ..., a_n, p के प्रांत में हैं, तो $p(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(p(a_1), \ldots, p(a_n))$।

p के परिमित होने का अर्थ है कि $\mathrm{dom}(p)$ परिमित है।

ध्यान दें कि रिक्त फलन $\emptyset$ किन्हीं भी दो संरचनाएँ के बीच हमेशा एक आंशिक समरूपता है।

परिभाषा 25.15. दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ *आंशिकतः समरूपी* हैं, और इसे $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$ लिखते हैं, तभी और केवल तभी जब कोई अरिक्त समुच्चय I $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के बीच आंशिक समरूपताओं से बना हो और निम्न *आगे-पीछे* गुणधर्म को संतुष्ट करता हो:

1. (*आगे*) प्रत्येक $p \in I$ और $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $q \in I$ ऐसा है कि $p \subseteq q$ और a, q के प्रांत में है;

2. (*पीछे*) प्रत्येक $p \in I$ और $b \in |\mathfrak{N}|$ के लिए कोई $q \in I$ ऐसा है कि $p \subseteq q$ और b, q के परिसर में है।

प्रमेय 25.16. *यदि $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$ और $\mathfrak{M}$ तथा $\mathfrak{N}$ गणनीय हैं, तो $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$।*

प्रमाण. चूँकि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ गणनीय हैं, मान लें कि $|\mathfrak{M}| = \{a_0, a_1, \ldots\}$ और $|\mathfrak{N}| = \{b_0, b_1, \ldots\}$। किसी मनमाने $p_0 \in I$ से आरंभ करके हम आंशिक समरूपताओं का एक वर्धमान अनुक्रम $p_0 \subseteq p_1 \subseteq p_2 \subseteq \cdots$ इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

1. यदि $n+1$ विषम है, मान लें $n = 2r$, तो आगे गुणधर्म का उपयोग करके कोई $p_{n+1} \in I$ ऐसा खोजें कि $p_n \subseteq p_{n+1}$ और a_r, p_{n+1} के प्रांत में हो;

2. यदि $n+1$ सम है, मान लें $n+1 = 2r$, तो पीछे गुणधर्म का उपयोग करके कोई $p_{n+1} \in I$ ऐसा खोजें कि $p_n \subseteq p_{n+1}$ और b_r, p_{n+1} के परिसर में हो।

अब यदि हम रखें:

$$p = \bigcup_{n \geq 0} p_n,$$

तो p, $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के बीच एक समरूपता है। □

प्रमेय 25.17. *मान लें कि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ किसी शुद्ध संबंधात्मक भाषा की संरचनाएँ हैं (ऐसी भाषा जिसमें केवल विधेय-चिह्नों हों और कोई फलन-चिह्न या नियतांक न हो)। तब यदि $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$, तो $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ भी।*

प्रमाण. सूत्रों पर आगमन द्वारा दिखाया जाता है कि यदि a_1, ..., a_n और b_1, ..., b_n ऐसे हैं कि कोई आंशिक समरूपता p प्रत्येक a_i को b_i पर प्रतिचित्रित करती है, तथा $s_1(x_i) = a_i$ और $s_2(x_i) = b_i$ ($i = 1$, ..., n के लिए), तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N}, s_2 \vDash \varphi$। $n = 0$ की स्थिति से $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ मिलता है। □

टिप्पणी 3. यदि फलन-चिह्नों उपस्थित हों, तो पिछला परिणाम तब भी सत्य है, किंतु उस समरूपता पर विचार करना पड़ता है जो p से प्रेरित होती है और जो $\mathfrak{M}$ की, a_1, ..., a_n द्वारा जनित उपसंरचना तथा $\mathfrak{N}$ की, b_1, ..., b_n द्वारा जनित उपसंरचना के बीच होती है।

किसी सूत्र में एक-दूसरे के भीतर स्थित परिमाणकों की संख्या और संबद्ध आंशिक समरूपताओं को कितनी बार विस्तारित किया जा सकता है, इनके बीच संबंध स्थापित करके पिछले परिणाम को चरणों में "विभाजित" किया जा सकता है।

परिभाषा 25.18. किसी भी सूत्र φ के लिए, φ की *परिमाणक-कोटि*, जिसे $\mathrm{qr}(\varphi) \in \mathbb{N}$ से निरूपित करते हैं, पुनरावर्ती रूप से φ में एक-दूसरे के भीतर स्थित परिमाणकों की अधिकतम संख्या के रूप में परिभाषित होती है। दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ *n-तुल्य* हैं, और इसे $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$ लिखते हैं, यदि वे परिमाणक-कोटि n से कम या उसके बराबर वाले सभी वाक्यों पर सहमत हों।

प्रतिज्ञप्ति 25.19. *मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई परिमित शुद्ध संबंधात्मक भाषा है, अर्थात् ऐसी भाषा जिसमें परिमित रूप से अनेक विधेय-चिह्नों और अचरों हों, तथा कोई फलन-चिह्न न हो। तब प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, तार्किक तुल्यता तक, भाषा $\mathcal{L}$ में परिमाणक-कोटि n से अधिक न रखने वाले प्रथम-कोटि वाक्यों केवल परिमित रूप से अनेक हैं।*

प्रमाण. n पर आगमन द्वारा। □

परिभाषा 25.20. कोई संरचना $\mathfrak{M}$ दी गई हो। $|\mathfrak{M}|^{<\omega}$ को $|\mathfrak{M}|$ के अवयवों के सभी परिमित अनुक्रमों का समुच्चय मानें। परिमित अनुक्रमों पर चरने के लिए हम $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ का उपयोग करते हैं। यदि $\mathbf{a} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ और $a \in |\mathfrak{M}|$, तो $\mathbf{a}a$, $\mathbf{a}$ के साथ a के *संलग्नन* को निरूपित करता है।

परिभाषा 25.21. संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ दी गई हों। समान लंबाई के अनुक्रमों के बीच संबंध $I_n \subseteq |\mathfrak{M}|^{<\omega} \times |\mathfrak{N}|^{<\omega}$ को हम n पर पुनरावर्तन द्वारा इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

1. $I_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ तभी और केवल तभी जब $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$, $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ में उन्हीं परमाण्विक सूत्रों को संतुष्ट करते हैं; अर्थात् यदि $s_1(x_i) = a_i$ और $s_2(x_i) = b_i$, तथा φ परमाण्विक है और उसके सभी चरों x_1, ..., x_n में हैं, तो $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N}, s_2 \vDash \varphi$।

2. $I_{n+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $b \in |\mathfrak{N}|$ ऐसा है कि $I_n(\mathbf{a}a, \mathbf{b}b)$, और इसके विपरीत भी।

परिभाषा 25.22. $\mathfrak{M} \approx_n \mathfrak{N}$ तब लिखें जब $I_n(\Lambda, \Lambda)$, $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के लिए सत्य हो (यहाँ Λ रिक्त अनुक्रम है)।

प्रमेय 25.23. *मान लें कि $\mathcal{L}$ कोई शुद्ध संबंधात्मक भाषा है। तब $I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ से यह निष्पन्न होता है कि प्रत्येक ऐसे φ के लिए, जिसके लिए $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$, $\mathfrak{M}, \mathbf{a} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N}, \mathbf{b} \vDash \varphi$ (यहाँ फिर $\mathbf{a}$, φ को तब संतुष्ट करता है जब कोई भी s, जिसके लिए $s(x_i) = a_i$, φ को संतुष्ट करता हो)। इसके अतिरिक्त, यदि $\mathcal{L}$ परिमित है, तो विलोम भी सत्य है।*

प्रमाण. यह प्रमाण कि $I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ से $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ परिमाणक-कोटि n से अधिक न रखने वाले उन्हीं सूत्रों को संतुष्ट करते हैं, φ पर सरल आगमन से मिलता है। विलोम के लिए हम n पर आगमन करते हुए प्रतिज्ञप्ति 25.19 का उपयोग करते हैं; यह सुनिश्चित करता है कि प्रत्येक n के लिए उस परिमाणक-कोटि के परस्पर अतुल्य सूत्रों अधिक-से-अधिक परिमित रूप से अनेक हैं।

$n = 0$ के लिए, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के उन्हीं परिमाणक-मुक्त सूत्रों को संतुष्ट करने की परिकल्पना से मिलता है कि वे उन्हीं परमाण्विक सूत्रों को संतुष्ट करते हैं, अतः $I_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$।

$n + 1$ की स्थिति के लिए मान लें कि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ परिमाणक-कोटि $n + 1$ से अधिक न रखने वाले उन्हीं सूत्रों को संतुष्ट करते हैं। $I_{n+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ दिखाने के लिए यह दिखाना पर्याप्त है कि प्रत्येक $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $b \in |\mathfrak{N}|$ ऐसा है कि $I_n(\mathbf{a}a, \mathbf{b}b)$; और आगमन-परिकल्पना से इसके लिए फिर यह दिखाना पर्याप्त है कि प्रत्येक $a \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $b \in |\mathfrak{N}|$ ऐसा है कि $\mathbf{a}a$ और $\mathbf{b}b$ परिमाणक-कोटि n से अधिक न रखने वाले उन्हीं सूत्रों को संतुष्ट करते हैं।

कोई $a \in |\mathfrak{M}|$ दिया हो। τ_n^a को उन सूत्रों $\psi(x, \mathbf{y})$ का समुच्चय मानें जिनकी कोटि n से अधिक नहीं है और जिन्हें $\mathbf{a}a$, $\mathfrak{M}$ में संतुष्ट करता है। τ_n^a परिमित है, इसलिए हम उसे एक ही प्रथम-कोटि सूत्र मान सकते हैं। इससे $\mathbf{a}$, $\exists x\, \tau_n^a(x, \mathbf{y})$ को संतुष्ट करता है, जिसकी परिमाणक-कोटि $n+1$ से अधिक नहीं है। परिकल्पना से $\mathbf{b}$, $\mathfrak{N}$ में उसी सूत्र को संतुष्ट करता है, अतः कोई $b \in |\mathfrak{N}|$ ऐसा है कि $\mathbf{b}b$, τ_n^a को संतुष्ट करता है। विशेषतः $\mathbf{b}b$ उन्हीं परिमाणक-कोटि n से अधिक न रखने वाले सूत्रों को संतुष्ट करता है जिन्हें $\mathbf{a}a$ संतुष्ट करता है। इसी प्रकार दिखता है कि प्रत्येक $b \in |\mathfrak{N}|$ के लिए कोई $a \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $\mathbf{a}a$ और $\mathbf{b}b$ परिमाणक-कोटि n से अधिक न रखने वाले उन्हीं सूत्रों को संतुष्ट करते हैं; इससे प्रमाण पूरा होता है। □

उपप्रमेय 25.24. *यदि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ किसी परिमित भाषा में शुद्ध संबंधात्मक संरचनाएँ हैं, तो $\mathfrak{M} \approx_n \mathfrak{N}$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$। विशेषतः $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक n के लिए $\mathfrak{M} \approx_n \mathfrak{N}$।*

25.7 सघन रैखिक क्रम

परिभाषा 25.25. कोई *अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम* ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ है जो केवल एक द्वि-स्थानीय विधेय-चिह्न $<$ वाली भाषा के लिए है और निम्न वाक्यों को संतुष्ट करती है:

1. $\forall x\, \neg x < x$;

2. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \to (y < z \to x < z))$;

3. $\forall x\, \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$;

4. $\forall x\, \exists y\, x < y$;

5. $\forall x\, \exists y\, y < x$;

6. $\forall x\, \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y))$.

प्रमेय 25.26. *कोई भी दो गणनीय अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम समरूपी होते हैं।*

प्रमाण. मान लें कि $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ ऐसे गणनीय अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम हैं जिनमें $<_1 = <^{\mathfrak{M}_1}$ और $<_2 = <^{\mathfrak{M}_2}$, तथा $\mathcal{I}$ उनके बीच सभी आंशिक समरूपताओं का समुच्चय है। $\mathcal{I}$ अरिक्त है, क्योंकि कम-से-कम $\emptyset \in \mathcal{I}$। हम दिखाते हैं कि $\mathcal{I}$ आगे-पीछे गुणधर्म को संतुष्ट करता है। तब $\mathfrak{M}_1 \simeq_p \mathfrak{M}_2$, और प्रमेय प्रमेय 25.16 से मिलता है।

यह दिखाने के लिए कि $\mathcal{I}$ आगे गुणधर्म को संतुष्ट करता है, कोई $p \in \mathcal{I}$ लें और $p(a_i) = b_i$ मानें, जहाँ $i = 1, \ldots, n$। व्यापकता की हानि के बिना मान लें कि $a_1 <_1 a_2 <_1 \cdots <_1 a_n$। कोई $a \in |\mathfrak{M}_1|$ दिया हो, तो $b \in |\mathfrak{M}_2|$ को इस प्रकार खोजें:

1. यदि $a <_1 a_1$, तो $b \in |\mathfrak{M}_2|$ ऐसा लें कि $b <_2 b_1$;

2. यदि $a_n <_1 a$, तो $b \in |\mathfrak{M}_2|$ ऐसा लें कि $b_n <_2 b$;

3. यदि $a_i <_1 a <_1 a_{i+1}$ किसी i के लिए, तो $b \in |\mathfrak{M}_2|$ ऐसा लें कि $b_i <_2 b <_2 b_{i+1}$।

वांछित गुणधर्म वाला b खोजना हमेशा संभव है, क्योंकि $\mathfrak{M}_2$ कोई अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम है। $q = p \cup \{\langle a, b\rangle\}$ परिभाषित करें; तब $q \in \mathcal{I}$, p का वांछित विस्तार है। इससे आगे गुणधर्म स्थापित होता है। पीछे गुणधर्म का प्रमाण समान है। अतः $\mathfrak{M}_1 \simeq_p \mathfrak{M}_2$; प्रमेय 25.16 से $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2$। □

टिप्पणी 4. मान लें कि $\mathfrak{S}$ कोई भी गणनीय अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम है। तब (प्रमेय 25.26 से) $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{Q}$, जहाँ $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ वह गणनीय सघन रैखिक क्रम है जिसका प्रांत परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{Q}$ है। अब टिप्पणी 2 की संरचना $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <)$ पर फिर विचार करें। हमने देखा कि कोई गणनीय संरचना $\mathfrak{S}$ ऐसी है कि $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{S}$। किंतु $\mathfrak{S}$ कोई गणनीय अंतबिंदु-रहित सघन रैखिक क्रम है, इसलिए वह संरचना $\mathfrak{Q}$ के समरूपी (और अतः प्राथमिकतः तुल्य) है। प्राथमिक तुल्यता की संक्रामकता से $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{Q}$। (इसे हम उसी आगे-पीछे तर्क से सीधे $\mathfrak{R} \simeq_p \mathfrak{Q}$ स्थापित करके भी दिखा सकते थे।)

प्रश्न

प्रश्न 25.1. प्रतिज्ञप्ति 25.2 को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 25.2. प्रमेय 25.9 के भाग (b) का प्रमाण विस्तार से दीजिए। यह अवश्य बताइए कि परिभाषा 25.8 में समरूपताओं को अभिलक्षित करने वाले पाँच गुणों में से प्रत्येक का उपयोग कहाँ हुआ है।

प्रश्न 25.3. दिखाइए कि किसी भी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए, यदि X, $\mathfrak{M}$ का परिभाष्य उपसमुच्चय है और h, $\mathfrak{M}$ की स्वसमरूपता है, तो $X = \{h(x) : x \in X\}$ (अर्थात् X, h के अधीन अचर रहता है)।

प्रश्न 25.4. विस्तार से दिखाइए कि प्रमेय 25.16 में परिभाषित p वास्तव में एक समरूपता है।

प्रश्न 25.5. यह सत्यापित करके प्रमेय 25.26 का प्रमाण पूरा कीजिए कि $\mathcal{I}$ पीछे गुणधर्म को संतुष्ट करता है।

अध्याय 26

अंकगणित के प्रतिरूप

26.1 परिचय

अंकगणित का *मानक प्रतिरूप* वह संरचना $\mathfrak{N}$ है जिसमें $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$ है और o, $\prime$, $+$, $\times$ तथा $<$ की व्याख्या वैसी ही की जाती है जैसी अपेक्षित है। अर्थात् o का मान 0 है, $\prime$ उत्तरवर्ती फलन है, $+$ की व्याख्या योग के रूप में और $\times$ की व्याख्या $\mathbb{N}$ की संख्याओं के गुणन के रूप में होती है। विशेषतः,

$$\begin{aligned}
\mathsf{o}^{\mathfrak{N}} &= 0 \\
\prime^{\mathfrak{N}}(n) &= n + 1 \\
+^{\mathfrak{N}}(n, m) &= n + m \\
\times^{\mathfrak{N}}(n, m) &= nm
\end{aligned}$$

निस्संदेह, $\mathcal{L}_A$ की ऐसी संरचनाएँ भी हैं जिनके प्रांत $\mathbb{N}$ से भिन्न हैं। उदाहरण के लिए, हम $\mathfrak{M}$ ले सकते हैं जिसका प्रांत $|\mathfrak{M}| = \{a\}^*$ है (एकमात्र प्रतीक a के परिमित अनुक्रम, अर्थात् $\emptyset$, a, aa, aaa, ...), और जिसकी व्याख्याएँ हैं

$$\begin{aligned}
\mathsf{o}^{\mathfrak{M}} &= \emptyset \\
\prime^{\mathfrak{M}}(s) &= s \frown a \\
+^{\mathfrak{M}}(n, m) &= a^{n+m} \\
\times^{\mathfrak{M}}(n, m) &= a^{nm}
\end{aligned}$$

ये दोनों संरचनाएँ इस अर्थ में "मूलतः एक जैसी" हैं कि अंतर केवल उनके प्रांतों के अवयव में है, इस बात में नहीं कि व्याख्या-फलनों द्वारा उन प्रांतों के अवयव को परस्पर कैसे संबंधित किया गया है। हम कहते हैं कि ये दोनों संरचनाएँ *समरूपी* हैं।

संहतता प्रमेय का एक सरल परिणाम यह है कि $\mathfrak{N}$ में सत्य किसी भी सिद्धांत के ऐसे प्रतिरूप भी होते हैं जो $\mathfrak{N}$ के समरूपी नहीं हैं। ऐसी संरचनाएँ *अमानक* कहलाती हैं। उनकी रोचक विशेषता यह है कि किसी मानक प्रतिरूप के अवयव (अर्थात् $\mathfrak{N}$ के, और उसके समरूपी सभी संरचनाएँ के भी) मानक संख्यांकों $\overline{n}$ के मानों से पूरी तरह मिल जाते हैं, अर्थात्

$$|\mathfrak{N}| = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

पर अमानक प्रतिरूपों में ऐसा नहीं होता: यदि $\mathfrak{M}$ अमानक है, तो कम-से-कम एक $x \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $x \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ प्रत्येक n के लिए।

ये अमानक अवयव काफ़ी दिलचस्प हैं: वे "अनंत प्राकृत संख्याएँ" हैं। किंतु उनका अस्तित्व एक अर्थ में अपूर्णता की परिघटनाओं को भी स्पष्ट करता है। उदाहरण के लिए पियानो अंकगणित का संगतता-कथन $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ लें, अर्थात् $\neg\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x, \ulcorner\bot\urcorner)$। चूँकि **PA** न तो $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को सिद्ध करता है, न $\neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को, इसलिए दोनों में से किसी को

भी **PA** में संगत रूप से जोड़ा जा सकता है। चूँकि **PA** संगत है, $\mathfrak{N} \vDash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$, और फलतः $\mathfrak{N} \nvDash \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$। अतः $\mathfrak{N}$, $\mathbf{PA} \cup \{\neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}\}$ का प्रतिरूप *नहीं* है, और इसके सभी प्रतिरूप अमानक होने चाहिए। $\mathbf{PA} \cup \{\neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}\}$ के प्रतिरूपों में कोई ऐसा अवयव अवश्य होना चाहिए जो $\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$ को सत्य बनाने वाला साक्षी बने, अर्थात् **PA** से किसी विरोधाभास की व्युत्पत्ति की एक ग्योडेल (Gödel) संख्या। ऐसा अवयव मानक नहीं हो सकता—क्योंकि $\mathbf{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(\overline{n}, \ulcorner\bot\urcorner)$ प्रत्येक n के लिए।

26.2 अंकगणित के मानक प्रतिरूप

अंकगणित की भाषा $\mathcal{L}_A$ स्पष्टतः संख्याओं के बारे में, और विशेष रूप से प्राकृत संख्याओं के बारे में, बात करने के लिए बनाई गई है। इसलिए "वह" मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ विशेष है: हम इसी प्रतिरूप के बारे में बात करना चाहते हैं। किंतु तर्कशास्त्र में प्रायः हमारी रुचि केवल संरचनात्मक गुणों में होती है, और कोई भी दो समरूपी संरचनाएँ उन गुणों को साझा करती हैं। अतः हम थोड़ा उदार होकर $\mathfrak{N}$ की समरूपी किसी भी संरचना को "मानक" मान सकते हैं।

परिभाषा 26.1. $\mathcal{L}_A$ की कोई संरचना *मानक* है, यदि वह $\mathfrak{N}$ की समरूपी है।

प्रतिज्ञप्ति 26.2. *यदि संरचना $\mathfrak{M}$ मानक है, तो उसका प्रांत मानक संख्यांकों के मानों का समुच्चय है, अर्थात्*

$$|\mathfrak{M}| = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

प्रमाण. स्पष्टतः प्रत्येक $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) \in |\mathfrak{M}|$ है। हमें केवल यह दिखाना है कि प्रत्येक $x \in |\mathfrak{M}|$, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ के बराबर है किसी n के लिए। चूँकि $\mathfrak{M}$ मानक है, वह $\mathfrak{N}$ की समरूपी है। मान लें कि $g\colon \mathbb{N} \to |\mathfrak{M}|$ एक समरूपता है। तब $g(n) = g(\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(\overline{n})) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$। किंतु प्रत्येक $x \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $n \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि $g(n) = x$, क्योंकि g आच्छादक है। □

यदि कोई संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}_A$ के लिए मानक है, तो उसके प्रांत के सभी अवयवों को मानक संख्यांकों $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ..., अर्थात् पदों o, o', o'' इत्यादि से नाम दिया जा सकता है। निस्संदेह, इसका अर्थ यह नहीं कि $|\mathfrak{M}|$ के अवयव स्वयं संख्याएँ हैं; केवल इतना कि हम उन्हें उसी प्रकार अलग-अलग पहचान सकते हैं जैसे $|\mathfrak{N}|$ में संख्याओं को पहचानते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 26.3. *यदि $\mathfrak{M} \vDash \mathbf{Q}$, और $|\mathfrak{M}| = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, तो $\mathfrak{M}$ मानक है।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ की समरूपी है। उस फलन $g\colon \mathbb{N} \to |\mathfrak{M}|$ पर विचार करें जो $g(n) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ द्वारा परिभाषित है। परिकल्पना से g आच्छादक है। वह एकैकी भी है: $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$, जब भी $n \neq m$। अतः $\mathfrak{M} \vDash \mathbf{Q}$ होने के कारण, $\mathfrak{M} \vDash \overline{n} \neq \overline{m}$, जब भी $n \neq m$। इसलिए यदि $n \neq m$, तो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{m})$, अर्थात् $g(n) \neq g(m)$।

हमें यह भी सत्यापित करना है कि g एक समरूपता है।

1. हमारे पास $g(\mathsf{o}^{\mathfrak{N}}) = g(0)$ है, क्योंकि $\mathsf{o}^{\mathfrak{N}} = 0$। g की परिभाषा से $g(0) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{0})$। किंतु $\overline{0}$ केवल o ही है, और जो पद अचर हो उसका मान वही होता है जो संरचना उस अचर को निर्दिष्ट करती है, अर्थात् $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathsf{o}) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$। इसलिए, जैसा अपेक्षित था, $g(\mathsf{o}^{\mathfrak{N}}) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$।

2. $g(\prime^{\mathfrak{N}}(n)) = g(n+1)$, क्योंकि $\prime$, $\mathfrak{N}$ में $\mathbb{N}$ पर परवर्ती फलन है। फिर $g(n+1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+1})$, g की परिभाषा से। किंतु $\overline{n+1}$ और $\overline{n}'$ एक ही पद हैं, इसलिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+1}) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}')$। मान-फलन की परिभाषा से यह $= \prime^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}))$ है। चूँकि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) = g(n)$, हमें $g(\prime^{\mathfrak{N}}(n)) = \prime^{\mathfrak{M}}(g(n))$ मिलता है।

3. $g(+^{\mathfrak{N}}(n,m)) = g(n+m)$, क्योंकि $+$, $\mathfrak{N}$ में $\mathbb{N}$ पर योग-फलन है। फिर $g(n+m) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+m})$, g की परिभाषा से। किंतु $\mathbf{Q} \vdash \overline{n+m} = (\overline{n} + \overline{m})$, इसलिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+m}) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n} + \overline{m})$। मान-फलन की परिभाषा से यह $= +^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}))$ है। चूँकि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) = g(n)$ और $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}) = g(m)$, हमें $g(+^{\mathfrak{N}}(n,m)) = +^{\mathfrak{M}}(g(n), g(m))$ मिलता है।

4. $g(\times^{\mathfrak{N}}(n,m)) = \times^{\mathfrak{M}}(g(n), g(m))$: अभ्यास।

5. $\langle n, m\rangle \in <^{\mathfrak{N}}$ तभी और केवल तभी जब $n < m$। यदि $n < m$, तो $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} < \overline{m}$, और $\mathfrak{M} \vDash \overline{n} < \overline{m}$ भी। अतः $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{m})\rangle \in <^{\mathfrak{M}}$, अर्थात् $\langle g(n), g(m)\rangle \in <^{\mathfrak{M}}$। यदि $n \not< m$, तो $\mathbf{Q} \vdash \neg\overline{n} < \overline{m}$, और फलतः $\mathfrak{M} \nvDash \overline{n} < \overline{m}$। इसलिए, पहले की तरह, $\langle g(n), g(m)\rangle \notin <^{\mathfrak{M}}$। दोनों को मिलाकर हमें मिलता है: $\langle n, m\rangle \in <^{\mathfrak{N}}$ तभी और केवल तभी जब $\langle g(n), g(m)\rangle \in <^{\mathfrak{M}}$। □

फलन g, $\mathbb{N}$ से किसी अन्य संरचना $\mathfrak{M}$ के प्रांत में, जो $\mathcal{L}_A$ की है, प्रतिचित्रण परिभाषित करने का सबसे स्वाभाविक ढंग है, क्योंकि ऐसी प्रत्येक $\mathfrak{M}$ में $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ इत्यादि से नामित अवयव होते हैं। इसलिए यह आश्चर्यजनक नहीं कि यदि $\mathfrak{M}$, $\overline{n}$ के बारे में कम-से-कम कुछ मूल कथनों को उसी प्रकार सत्य बनाती है जैसे $\mathfrak{N}$ बनाती है, और g एकैकी तथा आच्छादक भी है, तो g एक समरूपता बन जाता है। वस्तुतः, यदि $|\mathfrak{M}|$ में उन अवयव के अतिरिक्त कोई अवयव नहीं है जिन्हें $\overline{n}$ नाम देते हैं, तो यह एकमात्र समरूपता है।

प्रतिज्ञप्ति 26.4. *यदि $\mathfrak{M}$ मानक है, तो प्रतिज्ञप्ति 26.3 के प्रमाण में दिया गया g, $\mathfrak{N}$ से $\mathfrak{M}$ तक की एकमात्र समरूपता है।*

प्रमाण. मान लें कि $h\colon \mathbb{N} \to |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{N}$ और $\mathfrak{M}$ के बीच एक समरूपता है। हम दिखाते हैं कि $g = h$, n पर आगमन द्वारा। यदि $n = 0$, तो $g(0) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$, g की परिभाषा से। किंतु h समरूपता है, इसलिए $h(0) = h(\mathsf{o}^{\mathfrak{N}}) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$, अतः $g(0) = h(0)$।

अब $n+1$ की स्थिति पर विचार करें। हमारे पास

$$\begin{aligned}
g(n+1) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+1}) \text{ } g \text{ की परिभाषा से} \\
&= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}') \text{ क्योंकि } \overline{n+1} \equiv \overline{n}' \\
&= \prime^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})) \ \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t') \text{ की परिभाषा से} \\
&= \prime^{\mathfrak{M}}(g(n)) \text{ } g \text{ की परिभाषा से} \\
&= \prime^{\mathfrak{M}}(h(n)) \text{ आगमन-परिकल्पना से} \\
&= h(\prime^{\mathfrak{N}}(n)) \text{ क्योंकि } h \text{ एक समरूपता है} \\
&= h(n+1)
\end{aligned}$$

□

किसी भी गणनीय अनंत समुच्चय M के लिए $\mathbb{N}$ और M के बीच एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण होती है, इसलिए ऐसा प्रत्येक समुच्चय M किसी मानक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ का संभावित प्रांत है। वस्तुतः, जब हम किसी $z \in M$ और किसी उपयुक्त फलन s को क्रमशः $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ और $\prime^{\mathfrak{M}}$ के रूप में चुन लेते हैं, तो $+$, $\times$ और $<$ की व्याख्याएँ पहले ही निश्चित हो जाती हैं। मानक प्रतिरूप में केवल वे फलन $s\colon M \to M \setminus \{z\}$, जो एकैकी और आच्छादक दोनों हों, $\prime^{\mathfrak{M}}$ के लिए उपयुक्त हैं। s के परास में z नहीं हो सकता, क्योंकि अन्यथा $\forall x\, \mathsf{o} \neq x'$ असत्य होता। वह वाक्य $\mathfrak{N}$ में सत्य है, इसलिए $\mathfrak{M}$ को भी उसे सत्य बनाना होगा। फलन s को एकैकी होना चाहिए, क्योंकि परवर्ती फलन $\prime^{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{N}$ में ऐसा है, और $\prime^{\mathfrak{M}}$ का एकैकी होना $\mathfrak{N}$ में सत्य वाक्य द्वारा व्यक्त होता है। उसे आच्छादक भी होना चाहिए, क्योंकि अन्यथा कोई $x \in M \setminus \{z\}$ ऐसा होता जो s के परास में न होता, अर्थात् वाक्य $\forall x\, (x = \mathsf{o} \vee \exists y\, y' = x)$, $\mathfrak{M}$ में असत्य होता—जबकि वह $\mathfrak{N}$ में सत्य है।

26.3 अमानक प्रतिरूप

$\mathcal{L}_A$ की किसी संरचना को हम मानक कहते हैं, यदि वह $\mathfrak{N}$ की समरूपी हो। यदि कोई संरचना, $\mathfrak{N}$ की समरूपी नहीं है, तो वह अमानक कहलाती है।

परिभाषा 26.5. कोई संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}_A$ के लिए *अमानक* है, यदि वह $\mathfrak{N}$ की समरूपी नहीं है। वे अवयव $x \in |\mathfrak{M}|$ जो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ के बराबर हों किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, ($\mathfrak{M}$ की) *मानक संख्याएँ* कहलाते हैं; जो ऐसे न हों वे *अमानक संख्याएँ* कहलाते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 26.2 के अनुसार, $\mathcal{L}_A$ की प्रत्येक मानक संरचना में केवल मानक अवयव होते हैं। फलतः किसी अमानक संरचना में कम-से-कम एक अमानक अवयव अवश्य होना चाहिए। वस्तुतः, किसी अमानक अवयव का अस्तित्व सुनिश्चित करता है कि वह संरचना अमानक है।

प्रतिज्ञप्ति 26.6. *यदि कोई संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}_A$ के लिए, कोई अमानक संख्या है, तो $\mathfrak{M}$ अमानक है।*

प्रमाण. मान लें कि ऐसा नहीं है; अर्थात् मान लें कि $\mathfrak{M}$ मानक है, किंतु उसमें कोई अमानक संख्या x है। $g\colon \mathbb{N} \to |\mathfrak{M}|$ को एक समरूपता मानें। यह देखना सरल है (n पर आगमन द्वारा) कि $g(\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(\overline{n})) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$। दूसरे शब्दों में, g, $\mathfrak{N}$ की मानक संख्याओं को $\mathfrak{M}$ की मानक संख्याओं पर प्रतिचित्रित करता है। यदि $\mathfrak{M}$ में कोई अमानक संख्या है, तो g आच्छादक नहीं हो सकता, जो परिकल्पना के विरुद्ध है। □

$\mathcal{L}_A$ की अमानक संरचनाएँ निर्दिष्ट करना पर्याप्त सरल है। उदाहरण के लिए, प्रांत $\mathbb{Z}$ वाली संरचना लें और सभी अतार्किक प्रतीकों की व्याख्या सामान्य ढंग से करें। चूँकि ऋणात्मक संख्याएँ $\overline{n}$ के मान नहीं हैं किसी भी n के लिए, यह संरचना अमानक है। निस्संदेह, यह इस अर्थ में अंकगणित का *प्रतिरूप* नहीं होगी कि वह उन्हीं वाक्यों को सत्य बनाती हो जिन्हें $\mathfrak{N}$ सत्य बनाती है। उदाहरणार्थ, $\forall x\, x' \neq 0$ असत्य है। फिर भी, संहतता प्रमेय का उपयोग करके हम पर्याप्त सरलता से सिद्ध कर सकते हैं कि अंकगणित के अमानक प्रतिरूप अस्तित्व में हैं।

प्रतिज्ञप्ति 26.7. *मान लें कि* $\mathbf{TA} = \{\varphi : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$, *$\mathfrak{N}$ का सिद्धांत है।* **TA** *का कोई गणनीय अमानक प्रतिरूप है।*

प्रमाण. $\mathcal{L}_A$ को एक नए अचर c से विस्तृत करें और निम्न वाक्यों के समुच्चय पर विचार करें:

$$\Gamma = \mathbf{TA} \cup \{c \neq \overline{0}, c \neq \overline{1}, c \neq \overline{2}, \dots\}$$

किसी भी प्रतिरूप $\mathfrak{M}^c$ में, जो Γ का हो, कोई अवयव $x = c^{\mathfrak{M}}$ अमानक होगा, क्योंकि $x \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए। साथ ही, स्पष्टतः $\mathfrak{M}^c \vDash \mathbf{TA}$, क्योंकि $\mathbf{TA} \subseteq \Gamma$। यदि हम $\mathfrak{M}^c$ को संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}_A$ के लिए, केवल c को भुलाकर बना दें, तो उसके प्रांत में अमानक x अब भी रहता है, और $\mathfrak{M} \vDash \mathbf{TA}$ भी। बाद वाली बात सुनिश्चित है, क्योंकि c, **TA** में नहीं आता। अतः यह दिखाना पर्याप्त है कि Γ का कोई प्रतिरूप है।

हम संहतता प्रमेय का उपयोग करके दिखाते हैं कि Γ का कोई प्रतिरूप है। यदि Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय है, तो Γ भी संतुष्टनीय है। किसी भी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ पर विचार करें। Γ_0 में **TA** के कुछ वाक्यों और $c \neq \overline{n}$ रूप के कुछ वाक्य आते हैं, किंतु ऐसे वाक्य केवल परिमित संख्या में हैं। मान लें कि k वह सबसे बड़ी संख्या है जिसके लिए $c \neq \overline{k} \in \Gamma_0$। $\mathfrak{N}_k$ को $\mathfrak{N}$ के उस विस्तार के रूप में परिभाषित करें जिसमें व्याख्या $c^{\mathfrak{N}_k} = k + 1$ सम्मिलित है। $\mathfrak{N}_k \vDash \Gamma_0$: यदि $\varphi \in \mathbf{TA}$, तो $\mathfrak{N}_k \vDash \varphi$, क्योंकि $\mathfrak{N}_k$ प्रत्येक दृष्टि से $\mathfrak{N}$ जैसी है, केवल c को छोड़कर, और c, φ में नहीं आता। तथा $\mathfrak{N}_k \vDash c \neq \overline{n}$, क्योंकि $n \leq k$ और $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}_k}(c) = k + 1$। अतः Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय है। □

26.4 Q के प्रतिरूप

हम जानते हैं कि ऐसी अमानक संरचनाएँ हैं जो उन्हीं वाक्यों को सत्य बनाती हैं जिन्हें $\mathfrak{N}$ सत्य बनाती है, अर्थात् वे **TA** की प्रतिरूप हैं। चूँकि $\mathfrak{N} \vDash \mathbf{Q}$, **TA** का प्रत्येक प्रतिरूप **Q** का भी प्रतिरूप है। **Q**, **TA** से बहुत दुर्बल है; उदाहरणतः $\mathbf{Q} \nvdash \forall x\, \forall y\, (x + y) = (y + x)$। दुर्बल सिद्धांतों को संतुष्ट करना अधिक सरल होता है: उनके अधिक प्रतिरूप होते हैं। उदाहरणतः, **Q** के ऐसे प्रतिरूप हैं जो $\forall x\, \forall y\, (x + y) = (y + x)$ को असत्य बनाते हैं, किंतु वे **TA** के प्रतिरूप नहीं हो सकते, और न ही **PA** के। **Q** के प्रतिरूप अपेक्षाकृत सरल भी हैं: हम उन्हें स्पष्ट रूप से निर्दिष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण 26.8. उस संरचना $\mathfrak{K}$ पर विचार करें जिसका प्रांत $|\mathfrak{K}| = \mathbb{N} \cup \{a\}$ और जिसकी व्याख्याएँ निम्न हैं:

$$\mathsf{o}^{\mathfrak{K}} = 0$$

$$\prime^{\mathfrak{K}}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x \in \mathbb{N} \\ a & \text{यदि } x = a \end{cases}$$

$$+^{\mathfrak{K}}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{यदि } x, y \in \mathbb{N} \\ a & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

$$\times^{\mathfrak{K}}(x,y) = \begin{cases} xy & \text{यदि } x, y \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \text{ या } y = 0 \\ a & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

$$<^{\mathfrak{K}} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{N} \text{ और } x < y\} \cup \{\langle x, a\rangle : x \in |\mathfrak{K}|\}$$

$\mathfrak{K} \vDash \mathbf{Q}$ दिखाने के लिए हमें सत्यापित करना है कि $\mathbf{Q}$ के सभी अभिगृहीत $\mathfrak{K}$ में सत्य हैं। सुविधा के लिए, x^* को $\prime^{\mathfrak{K}}(x)$ के लिए (x का, $\mathfrak{K}$ में, "परवर्ती"), $x \oplus y$ को $+^{\mathfrak{K}}(x,y)$ के लिए (x और y का, $\mathfrak{K}$ में, "योग"), $x \otimes y$ को $\times^{\mathfrak{K}}(x,y)$ के लिए (x और y का, $\mathfrak{K}$ में, "गुणनफल"), और $x \lessdot y$ को $\langle x, y\rangle \in <^{\mathfrak{K}}$ के लिए लिखें। इन संक्षेपों से हम $\mathfrak{K}$ की संक्रियाएँ अधिक स्पष्ट रूप में इस प्रकार दे सकते हैं:

x	x^*
n	$n+1$
a	a

$x \oplus y$	0	m	a
0	0	m	a
n	n	$n+m$	a
a	a	a	a

$x \otimes y$	0	m	a
0	0	0	0
n	0	nm	a
a	0	a	a

हमारे पास $n \lessdot m$ तभी और केवल तभी जब $n < m$, जहाँ $n, m \in \mathbb{N}$; और $x \lessdot a$ प्रत्येक $x \in |\mathfrak{K}|$ के लिए।

$\mathfrak{K} \vDash \forall x\, \forall y\, (x' = y' \to x = y)$, क्योंकि $*$ एकैकी है। $\mathfrak{K} \vDash \forall x\, \mathsf{o} \neq x'$, क्योंकि 0 कोई $*$-परवर्ती नहीं है $\mathfrak{K}$ में। $\mathfrak{K} \vDash \forall x\, (x = \mathsf{o} \vee \exists y\, x = y')$, क्योंकि प्रत्येक $n > 0$ के लिए $n = (n-1)^*$, और $a = a^*$।

$\mathfrak{K} \vDash \forall x\, (x + \mathsf{o}) = x$, क्योंकि $n \oplus 0 = n + 0 = n$, और $a \oplus 0 = a$, $\oplus$ की परिभाषा से। $\mathfrak{K} \vDash \forall x\, \forall y\, (x + y') = (x + y)'$ थोड़ा अधिक जटिल है। यदि n, m दोनों मानक हों, तो हमारे पास:

$$(n \oplus m^*) = (n + (m+1)) = (n+m) + 1 = (n \oplus m)^*$$

क्योंकि मानक संख्याओं पर $\oplus$ और * क्रमशः $+$ और $\prime$ से मेल खाते हैं। अब मान लें कि $x \in |\mathfrak{K}|$। तब

$$(x \oplus a^*) = (x \oplus a) = a = a^* = (x \oplus a)^*$$

शेष स्थिति तब है जब $y \in |\mathfrak{K}|$, किंतु $x = a$। यहाँ हमें इस आधार पर स्थितियाँ अलग करनी होंगी कि $y = n$ मानक है या $y = b$:

$$(a \oplus n^*) = (a \oplus (n+1)) = a = a^* = (a \oplus n)^*$$
$$(a \oplus a^*) = (a \oplus a) = a = a^* = (a \oplus a)^*$$

यह निस्संदेह आवश्यकता से थोड़ा अधिक विस्तृत है। उदाहरणार्थ, चूँकि $a \oplus z = a$, z चाहे जो हो, इसलिए हम तुरंत निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $a \oplus a^* = a$। शेष अभिगृहीतों को भी इसी प्रकार सत्यापित किया जा सकता है।

इस प्रकार $\mathfrak{K}$, $\mathbf{Q}$ का प्रतिरूप है। उसका "योग" $\oplus$ क्रमविनिमेय भी है। किंतु कुछ अन्य वाक्य $\mathfrak{N}$ में सत्य और $\mathfrak{K}$ में असत्य हैं, तथा इसके विपरीत भी। उदाहरणार्थ, $a \lessdot a$, अतः $\mathfrak{K} \vDash \exists x\, x < x$ और $\mathfrak{K} \nvDash \forall x\, \neg x < x$। इससे दिखता है कि $\mathbf{Q} \nvdash \forall x\, \neg x < x$।

उदाहरण 26.9. उस संरचना $\mathfrak{L}$ पर विचार करें जिसका प्रांत $|\mathfrak{L}| = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$ है और जिसकी व्याख्याएँ $\prime^{\mathfrak{L}} = *$, $+^{\mathfrak{L}} = \oplus$ निम्न से दी गई हैं:

x	x^*
n	$n+1$
a	a
b	b

$x \oplus y$	m	a	b
n	$n+m$	b	a
a	a	b	a
b	b	b	a

चूँकि $*$ एकैकी है, 0 उसके परास में नहीं है, और प्रत्येक $x \in |\mathfrak{L}|$, 0 के अतिरिक्त, उसके परास में है, इसलिए अभिगृहीत Q_1–Q_3, $\mathfrak{L}$ में सत्य हैं। प्रत्येक x के लिए $x \oplus 0 = x$, इसलिए Q_4 भी सत्य है। Q_5 के लिए $x \oplus y^*$ और $(x \oplus y)^*$ पर विचार करें। यदि x और y दोनों मानक हों, तो वे बराबर हैं, क्योंकि तब $*$ और $\oplus$ क्रमशः $\prime$ और $+$ से मेल खाते हैं। यदि x अमानक और y मानक हो, तो $x \oplus y^* = x = x^* = (x \oplus y)^*$। यदि x और y दोनों अमानक हों, तो चार स्थितियाँ हैं:

$$\begin{aligned}
a \oplus a^* &= b = b^* = (a \oplus a)^* \\
b \oplus b^* &= a = a^* = (b \oplus b)^* \\
b \oplus a^* &= b = b^* = (b \oplus y)^* \\
a \oplus b^* &= a = a^* = (a \oplus b)^*
\end{aligned}$$

यदि x मानक, किंतु y अमानक हो, तो हमारे पास

$$\begin{aligned}
n \oplus a^* &= n \oplus a = b = b^* = (n \oplus a)^* \\
n \oplus b^* &= n \oplus b = a = a^* = (n \oplus b)^*
\end{aligned}$$

अतः $\mathfrak{L} \vDash Q_5$। किंतु $a \oplus 0 \neq 0 \oplus a$, इसलिए $\mathfrak{L} \nvDash \forall x \, \forall y \, (x + y) = (y + x)$।

हमने **Q** के ऐसे प्रतिरूप स्पष्ट रूप से बनाए हैं जिनमें अमानक अवयव मानक अवयवों के "आगे" रहते हैं। वस्तुतः, अभिगृहीतों से इतना होना आवश्यक है। कोई अमानक अवयव x, $\lessdot 0$ नहीं हो सकता, क्योंकि **Q** $\vdash \forall x \neg x < 0$ (सहायक प्रमेय 35.23 देखें)। साथ ही प्रत्येक n के लिए, **Q** $\vdash \forall x \, (x < \overline{n}' \rightarrow (x = \overline{0} \lor x = \overline{1} \lor \cdots \lor x = \overline{n}))$ (सहायक प्रमेय 35.24), इसलिए $a \lessdot n$ किसी भी $n > 0$ के लिए नहीं हो सकता।

26.5 PA के प्रतिरूप

TA का प्रत्येक अमानक प्रतिरूप **PA** का भी अमानक प्रतिरूप है। हम जानते हैं कि **TA** के, और इसलिए **PA** के, अमानक प्रतिरूप अस्तित्व में हैं। हम यह भी जानते हैं कि ऐसे अमानक प्रतिरूपों में अमानक "संख्याएँ" होती हैं, अर्थात् प्रांत के ऐसे अवयव जो सभी मानक "संख्याओं" के "आगे" होते हैं। किंतु वे किस प्रकार व्यवस्थित हैं? वे कितने हैं? हमने देखा है कि दुर्बलतर सिद्धांत **Q** के प्रतिरूपों में केवल एक अमानक संख्या भी हो सकती है। किंतु ये सरल संरचनाएँ न **PA** की प्रतिरूप हैं, न **TA** की।

PA या **TA** के प्रतिरूपों की संरचना समझने की कुंजी यह देखना है कि इन सिद्धांतों में कौन-से तथ्य व्युत्पन्न हैं। उदाहरणार्थ, **PA** पहले ही सिद्ध करता है कि $\forall x \, x \neq x'$ और $\forall x \, \forall y \, (x + y) = (y + x)$; अतः यह सरल संरचनाओं को (जिनमें ये वाक्यों असत्य हैं) **PA** के प्रतिरूप होने से रोकता है।

मान लें कि $\mathfrak{M}$, **PA** का प्रतिरूप है। तब यदि **PA** $\vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$। फिर से **z** का उपयोग $0^{\mathfrak{M}}$ के लिए, $*$ का $\prime^{\mathfrak{M}}$ के लिए, $\oplus$ का $+^{\mathfrak{M}}$ के लिए, $\otimes$ का $\times^{\mathfrak{M}}$ के लिए, और $\lessdot$ का $<^{\mathfrak{M}}$ के लिए करें। तब कोई भी वाक्य φ, **z**, $*$, $\oplus$, $\otimes$ और $\lessdot$ के बारे में कोई शर्त बताता है; यदि $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, तो उस शर्त को संतुष्ट होना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि $\mathfrak{M} \vDash Q_1$, अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash \forall x \, \forall y \, (x' = y' \rightarrow x = y)$, तो $*$ को एकैकी होना चाहिए।

प्रतिज्ञप्ति 26.10. *$\mathfrak{M}$ में $\lessdot$ एक रैखिक सख्त क्रम है; अर्थात् वह निम्न को संतुष्ट करता है:*

1. *$x \lessdot x$ नहीं, किसी भी $x \in |\mathfrak{M}|$ के लिए।*
2. *यदि $x \lessdot y$ और $y \lessdot z$, तो $x \lessdot z$।*
3. *किसी भी $x \neq y$ के लिए, $x \lessdot y$ या $y \lessdot x$।*

प्रमाण. **PA** निम्न को सिद्ध करता है:

1. $\forall x \neg x < x$
2. $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
3. $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y))$ □

प्रतिज्ञप्ति 26.11. *$\mathbf{z}$, $|\mathfrak{M}|$ का $\lessdot$-क्रम में सबसे छोटा अवयव है। किसी भी x के लिए $x \lessdot x^*$, और x^* इस गुण वाला $\lessdot$-सबसे छोटा अवयव है। किसी भी x के लिए एक अद्वितीय y ऐसा है कि $y^* = x$। (हम y को x का, $\mathfrak{M}$ में, "पूर्ववर्ती" कहते हैं और इसे ${}^*x$ से निरूपित करते हैं।)*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 26.12. *$\mathfrak{M}$ के सभी मानक अवयव, सभी अमानक अवयव से ($\lessdot$ के अनुसार) छोटे हैं।*

प्रमाण. हम n का उपयोग $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ के संक्षिप्त रूप में करेंगे, जो $\mathfrak{M}$ का मानक अवयव है। **Q** पहले ही सिद्ध करता है कि किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $\forall x (x < \overline{n}' \rightarrow (x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n}))$। कोई भी अवयव, $\lessdot \mathbf{z}$ नहीं है। इसलिए यदि n मानक और x अमानक हो, तो $x \lessdot n$ नहीं हो सकता। परिभाषा से, अमानक अवयव वह है जो $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ नहीं है किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, इसलिए $x \neq n$ भी। चूँकि $\lessdot$ एक रैखिक क्रम है, $n \lessdot x$ होना आवश्यक है। □

प्रतिज्ञप्ति 26.13. *प्रत्येक अमानक अवयव x, $|\mathfrak{M}|$ के निम्न उपसमुच्चय का एक अवयव है:*

$$\ldots^{***} x \lessdot^{**} x \lessdot^{*} x \lessdot x \lessdot x^{*} \lessdot x^{**} \lessdot x^{***} \lessdot \ldots$$

हम इस उपसमुच्चय को x का खंड कहते हैं और इसे $[x]$ लिखते हैं। इसमें न कोई सबसे छोटा अवयव है, न कोई सबसे बड़ा। इसे उन $y \in |\mathfrak{M}|$ के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है जिनके लिए किसी मानक n पर $x \oplus n = y$ या $y \oplus n = x$।

प्रमाण. स्पष्टतः ऐसा समुच्चय $[x]$ सदैव अस्तित्व में है, क्योंकि प्रत्येक अवयव y, $|\mathfrak{M}|$ में, एक अद्वितीय परवर्ती y^* और एक अद्वितीय पूर्ववर्ती ${}^*y$ है। क्रमागत अवयव y, y^* के लिए $y \lessdot y^*$, और y^* वह $\lessdot$-सबसे छोटा अवयव है $|\mathfrak{M}|$ का, जिससे y, $\lessdot$-छोटा है। चूँकि सदैव ${}^*y \lessdot y$ और $y \lessdot y^*$, इसलिए $[x]$ में न कोई सबसे छोटा अवयव है, न सबसे बड़ा। यदि $y \in [x]$, तो $x \in [y]$, क्योंकि तब या तो $y^{*\cdots*} = x$ या $x^{*\cdots*} = y$। यदि $y^{*\cdots*} = x$ (जिसमें n बार $*$ है), तो $y \oplus n = x$, और इसका विलोम भी, क्योंकि $\mathbf{PA} \vdash \forall x\, x'^{\cdots\prime} = (x + \overline{n})$ (यदि n, $\prime$ की संख्या है)। □

प्रतिज्ञप्ति 26.14. *यदि $[x] \neq [y]$ और $x \lessdot y$, तो किसी भी $u \in [x]$ और किसी भी $v \in [y]$ के लिए $u \lessdot v$।*

प्रमाण. ध्यान दें कि $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y (x < y \rightarrow (x' < y \vee x' = y))$। अतः यदि $u \lessdot v$, तो $u \oplus n^* \lessdot v$ भी किसी n के लिए, यदि $[u] \neq [v]$।

प्रत्येक $u \in [x]$, $\lessdot y$ है: परिकल्पना से $x \lessdot y$। यदि $u \lessdot x$, तो संक्रामकता से $u \lessdot y$। और यदि $x \lessdot u$, किंतु $u \in [x]$, तो हमारे पास $u = x \oplus n^*$ है किसी n के लिए, और इसलिए अभी सिद्ध किए गए तथ्य से $u \lessdot y$।

अब मान लें कि कोई $v \in [y]$, $\lessdot y$ है, अर्थात् $v \oplus m^* = y$ किसी मानक m के लिए। इससे $v \lessdot x$ असंभव हो जाता है, क्योंकि अन्यथा $y = v \oplus m^* \lessdot x$। स्पष्टतः $x \neq v$ भी, क्योंकि अन्यथा $x \oplus m^* = v \oplus m^* = y$ और हमें $[x] = [y]$ मिलता। अतः $x \lessdot v$। किंतु तब $x \oplus n^* \lessdot v$ भी किसी भी n के लिए। इसलिए यदि $x \lessdot u$ और $u \in [x]$, तो $u \lessdot v$। यदि $u \lessdot x$, तो संक्रामकता से $u \lessdot v$।

अंततः यदि $y \lessdot v$, तो $u \lessdot v$, क्योंकि जैसा हमने दिखाया है, $u \lessdot y$ और $y \lessdot v$। □

उपप्रमेय 26.15. *यदि* $[x] \neq [y]$, *तो* $[x] \cap [y] = \emptyset$।

प्रमाण. मान लें कि $z \in [x]$ और $x \lessdot y$। तब $z \lessdot u$ सभी $u \in [y]$ के लिए। यदि $z \in [y]$, तो $z \lessdot z$ होता। $y \lessdot x$ की स्थिति में भी इसी प्रकार। □

इसका अर्थ है कि स्वयं खंडों को ऐसे क्रमित किया जा सकता है जो $\lessdot$ का सम्मान करे: $[x] \lessdot [y]$ तभी और केवल तभी जब $x \lessdot y$, अथवा समतुल्य रूप से, जब $u \lessdot v$ किसी भी $u \in [x]$ और $v \in [y]$ के लिए। स्पष्टतः मानक खंड $[0]$ सबसे छोटा खंड है। वह किसी अमानक खंड को प्रतिच्छेद नहीं करता, और कोई दो अमानक खंड भी परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करते। विशेषतः, बार-बार परवर्ती या पूर्ववर्ती लेकर किसी दूसरे खंड तक "पहुँचा" नहीं जा सकता।

प्रतिज्ञप्ति 26.16. *यदि* x *और* y *अमानक हैं, तो* $x \lessdot x \oplus y$ *और* $x \oplus y \notin [x]$।

प्रमाण. यदि y अमानक है, तो $y \neq \mathbf{z}$। $\mathbf{PA} \vdash \forall x\,(y \neq \mathsf{o} \to x < (x+y))$। अब मान लें कि $x \oplus y \in [x]$। चूँकि $x \lessdot x \oplus y$, हमें $x \oplus n^* = x \oplus y$ मिलता। किंतु $\mathbf{PA} \vdash \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x+y) = (x+z) \to y = z)$ (योग के लिए निरसन नियम)। इसका अर्थ होता कि $y = n^*$ किसी मानक n के लिए; किंतु y को अमानक माना गया है।□

प्रतिज्ञप्ति 26.17. *कोई सबसे छोटा अमानक खंड नहीं है।*

प्रमाण. $\mathbf{PA} \vdash \forall x\,\exists y\,((y+y) = x \vee (y+y)' = x)$; अर्थात् प्रत्येक x, 2 से विभाज्य है (संभवतः शेषफल 1 के साथ)। यदि x अमानक है, तो y भी अमानक है। पिछले प्रस्ताव से $y \lessdot y \oplus y$ और $y \oplus y \notin [y]$। तब $y \lessdot (y \oplus y)^*$ और $(y \oplus y)^* \notin [y]$ भी। किंतु $x = y \oplus y$ या $x = (y \oplus y)^*$, इसलिए $y \lessdot x$ और $y \notin [x]$। □

प्रतिज्ञप्ति 26.18. *कोई सबसे बड़ा खंड नहीं है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 26.19. *खंडों का क्रम सघन है। अर्थात् यदि* $x \lessdot y$ *और* $[x] \neq [y]$, *तो उनके बीच कोई ऐसा खंड* $[z]$ *है जो दोनों से भिन्न है।*

प्रमाण. मान लें कि $x \lessdot y$। पहले की तरह $x \oplus y$ दो से विभाज्य है (संभवतः शेषफल सहित): कोई $z \in |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि या तो $x \oplus y = z \oplus z$ या $x \oplus y = (z \oplus z)^*$। अवयव z, x और y का "औसत" है, और $x \lessdot z$ तथा $z \lessdot y$। □

इसलिए अमानक खंड परिमेय संख्याओं की तरह क्रमित हैं: वे अंतबिंदु-रहित गणनीय अनंत सघन रैखिक क्रम बनाते हैं। यह दिखाया जा सकता है कि ऐसे कोई भी दो गणनीय अनंत क्रम समरूपी होते हैं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि सत्य अंकगणित के किन्हीं दो गणनीय अमानक प्रतिरूपों $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ के, केवल $<$ और $=$ वाली भाषा तक न्यूनीकृत रूप समरूपी होते हैं। वास्तव में, एक समरूपता h इस प्रकार परिभाषित की जा सकती है: $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ के मानक भाग मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ के समरूपी हैं और इसलिए परस्पर भी समरूपी हैं। अमानक भाग बनाने वाले खंड स्वयं परिमेय संख्याओं की तरह क्रमित हैं और इसलिए समरूपी हैं; खंडों की किसी समरूपता को, प्रत्येक खंड के मनमाने अवयवों को आपस में मिलाकर और फिर x के परवर्ती के, $\mathfrak{M}_1$ में, प्रतिबिंब को x के प्रतिबिंब का, $\mathfrak{M}_2$ में, परवर्ती लेकर, खंडों के *भीतर* की समरूपता तक विस्तृत किया जा सकता है। ध्यान दें कि इससे यह निष्कर्ष *नहीं* निकलता कि $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ अंकगणित की पूरी भाषा में समरूपी हैं (वास्तव में, समरूपता सदैव किसी भाषा के सापेक्ष होती है), क्योंकि $|\mathfrak{M}_1|$ और $|\mathfrak{M}_2|$ पर योग तथा गुणन को परिभाषित करने के परस्पर असमरूपी ढंग हैं। (यह वॉट के प्रसिद्ध प्रमेय से भी निकलता है कि किसी पूर्ण सिद्धांत के गणनीय प्रतिरूपों की संख्या 2 नहीं हो सकती।)

26.6 अंकगणित के संगणनीय प्रतिरूप

मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ में दो अच्छे गुण हैं। उसका प्रांत प्राकृत संख्याएँ $\mathbb{N}$ हैं, अर्थात् उसके अवयव ठीक उसी प्रकार की वस्तुएँ हैं जिनके बारे में हम अंकगणित की भाषा का उपयोग करके बात करना चाहते हैं, और मानक संख्यांक $\overline{n}$ वास्तव में n को ही चुनता है। दूसरा अच्छा गुण यह है कि $\mathcal{L}_A$ के अतार्किक प्रतीकों की सभी व्याख्याएँ *संगणनीय* हैं। $\prime^{\mathfrak{N}}$, $+^{\mathfrak{N}}$ और $\times^{\mathfrak{N}}$ के रूप में कार्य करने वाले परवर्ती, योग और गुणन फलन संख्याओं के संगणनीय फलन हैं। (मसलन, ट्यूरिंग मशीनों द्वारा संगणनीय, या आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाष्य।) और $\mathfrak{N}$ पर लघुतर-संबंध, अर्थात् $<^{\mathfrak{N}}$, निर्णेय है।

Q और **PA** जैसे अंकगणितीय सिद्धांतों के अमानक प्रतिरूपों में अमानक अवयव अवश्य होने चाहिए। इसलिए उनके प्रांतों में सामान्यतः $\mathbb{N}$ के अतिरिक्त अवयव भी होते हैं। किंतु किसी भी गणनीय संरचना को $\mathbb{N}$ सहित किसी भी गणनीय अनंत समुच्चय पर बनाया जा सकता है। इसलिए प्रांत $\mathbb{N}$ वाले अमानक प्रतिरूप भी होते हैं। निस्संदेह, ऐसे प्रतिरूपों $\mathfrak{M}$ में कम-से-कम कुछ संख्याएँ अपनी सामान्य भूमिकाएँ नहीं निभा सकतीं, क्योंकि कोई k, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ से भिन्न होना चाहिए प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए।

परिभाषा 26.20. संरचना $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}_A$ के लिए *संगणनीय* तभी और केवल तभी है जब $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$ हो, $\prime^{\mathfrak{M}}$, $+^{\mathfrak{M}}$, $\times^{\mathfrak{M}}$ संगणनीय फलन हों और $<^{\mathfrak{M}}$ निर्णेय संबंध हो।

उदाहरण 26.21. उदाहरण 26.8 की संरचना $\mathfrak{K}$ याद कीजिए। उसका प्रांत $|\mathfrak{K}| = \mathbb{N} \cup \{a\}$ था और उसकी व्याख्याएँ थीं:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{o}^{\mathfrak{K}} &= 0 \\
\prime^{\mathfrak{K}}(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x \in \mathbb{N} \\ a & \text{यदि } x = a \end{cases} \\
+^{\mathfrak{K}}(x,y) &= \begin{cases} x+y & \text{यदि } x, y \in \mathbb{N} \\ a & \text{अन्यथा} \end{cases} \\
\times^{\mathfrak{K}}(x,y) &= \begin{cases} xy & \text{यदि } x, y \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \text{ या } y = 0 \\ a & \text{अन्यथा} \end{cases} \\
<^{\mathfrak{K}} &= \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{N} \text{ और } x < y\} \cup \{\langle x, a\rangle : n \in |\mathfrak{K}|\}
\end{aligned}
$$

किंतु $|\mathfrak{K}|$ गणनीय अनंत है और इसलिए $\mathbb{N}$ के समसंख्य है। उदाहरणार्थ, वह $g\colon \mathbb{N} \to |\mathfrak{K}|$ जिसके लिए $g(0) = a$ और $g(n) = n+1$ जब $n > 0$, एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। हम इसे एक नए प्रतिरूप $\mathfrak{K}'$, जो **Q** का है, और $\mathfrak{K}$ के बीच समरूपता बना सकते हैं। $\mathfrak{K}'$ में हमें $\mathcal{L}_A$ के प्रतीकों को भिन्न फलन और संबंध निर्दिष्ट करने पड़ते हैं, क्योंकि $\mathbb{N}$ के भिन्न अवयव मानक और अमानक संख्याओं की भूमिकाएँ निभाते हैं।

विशेषतः, अब 0 सबसे छोटी मानक संख्या की नहीं, बल्कि a की भूमिका निभाता है। अब सबसे छोटी मानक संख्या 1 है। इसलिए हम $\mathsf{o}^{\mathfrak{K}'} = 1$ निर्दिष्ट करते हैं। परवर्ती फलन भी अब भिन्न है: कोई मानक संख्या, अर्थात् कोई $n > 0$, दिए जाने पर वह अब भी $n+1$ लौटाता है। किंतु अब 0, a की भूमिका निभाता है, जो स्वयं अपना परवर्ती है। इसलिए $\prime^{\mathfrak{K}'}(0) = 0$। योग और गुणन के लिए इसी प्रकार हमारे पास

$$
\begin{aligned}
+^{\mathfrak{K}'}(x,y) &= \begin{cases} x+y-1 & \text{यदि } x, y > 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases} \\
\times^{\mathfrak{K}'}(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{यदि } x = 1 \text{ या } y = 1 \\ xy - x - y + 2 & \text{यदि } x, y > 1 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}
\end{aligned}
$$

और $\langle x, y\rangle \in <^{\mathfrak{K}'}$ तभी और केवल तभी जब $x < y$, $x > 0$ और $y > 0$, अथवा जब $y = 0$।

ये सभी फलन प्राकृत संख्याओं के संगणनीय फलन हैं और $<^{\mathfrak{K}'}$, $\mathbb{N}$ पर एक निर्णेय संबंध है—किंतु ये $\mathbb{N}$ पर परवर्ती, योग और गुणन के समान फलन नहीं हैं, और $<^{\mathfrak{K}'}$, $<$ के समान संबंध नहीं है $\mathbb{N}$ पर।

उदाहरण 26.21 दिखाता है कि **Q** के प्रांत $\mathbb{N}$ वाले संगणनीय अमानक प्रतिरूप हैं। किंतु निम्न परिणाम दिखाता है कि **PA** के प्रतिरूपों के लिए यह सत्य नहीं है (और इसलिए **TA** के प्रतिरूपों के लिए भी नहीं)।

प्रमेय 26.22 (टेनेनबाउम का प्रमेय). $\mathfrak{N}$, **PA** *का एकमात्र संगणनीय प्रतिरूप है।*

प्रश्न

प्रश्न 26.1. दिखाइए कि प्रतिज्ञप्ति 26.2 का विलोम असत्य है; अर्थात् ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ का उदाहरण दीजिए जिसमें $|\mathfrak{M}| = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ हो, पर जो $\mathfrak{N}$ की समरूपी न हो।

प्रश्न 26.2. याद कीजिए कि **Q** में निम्न अभिगृहीत हैं:

$$\forall x\, \forall y\, (x' = y' \to x = y) \tag{Q_1}$$
$$\forall x\, \mathsf{o} \neq x' \tag{Q_2}$$
$$\forall x\, (x = \mathsf{o} \lor \exists y\, x = y') \tag{Q_3}$$

ऐसी संरचनाएँ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ दीजिए कि

1. $\mathfrak{M}_1 \vDash Q_1$, $\mathfrak{M}_1 \vDash Q_2$, $\mathfrak{M}_1 \nvDash Q_3$;
2. $\mathfrak{M}_2 \vDash Q_1$, $\mathfrak{M}_2 \nvDash Q_2$, $\mathfrak{M}_2 \vDash Q_3$; और
3. $\mathfrak{M}_3 \nvDash Q_1$, $\mathfrak{M}_3 \vDash Q_2$, $\mathfrak{M}_3 \vDash Q_3$;

स्पष्टतः, आपको प्रत्येक के लिए केवल $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}_i}$ और $\prime^{\mathfrak{M}_i}$ निर्दिष्ट करने हैं।

प्रश्न 26.3. सिद्ध कीजिए कि उदाहरण 26.8 की $\mathfrak{K}$, **Q** के शेष अभिगृहीतों को संतुष्ट करती है:

$$\forall x\, (x \times \mathsf{o}) = \mathsf{o} \tag{Q_6}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \times y') = ((x \times y) + x) \tag{Q_7}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x < y \leftrightarrow \exists z\, (z' + x) = y) \tag{Q_8}$$

केवल $\prime$ को अंतर्विष्ट करने वाला कोई ऐसा वाक्य खोजिए जो $\mathfrak{N}$ में सत्य, किंतु $\mathfrak{K}$ में असत्य हो।

प्रश्न 26.4. उदाहरण 26.9 की $\mathfrak{L}$ को ऐसे $\otimes$ और $\circledcirc$ सम्मिलित करके विस्तृत कीजिए जो $\times$ और $<$ की व्याख्या करें। दिखाइए कि आपकी संरचना **Q** के शेष अभिगृहीतों को संतुष्ट करती है:

$$\forall x\, (x \times \mathsf{o}) = \mathsf{o} \tag{Q_6}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \times y') = ((x \times y) + x) \tag{Q_7}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x < y \leftrightarrow \exists z\, (z' + x) = y) \tag{Q_8}$$

प्रश्न 26.5. उदाहरण 26.9 की $\mathfrak{L}$ में $a^* = a$ और $b^* = b$। क्या **Q** का कोई ऐसा प्रतिरूप है जिसमें $a^* = b$ और $b^* = a$?

प्रश्न 26.6. $\mathcal{L}_A$ में ऐसे वाक्यों खोजिए जो **PA** में व्युत्पन्न हों (और इसलिए $\mathfrak{N}$ में सत्य हों) तथा प्रतिज्ञप्ति 26.11 में **z**, $*$ और $\oslash$ के गुणों को सुनिश्चित करें।

प्रश्न 26.7. दिखाइए कि **PA** के किसी अमानक प्रतिरूप में कोई सबसे बड़ा खंड नहीं है।

प्रश्न 26.8. प्रतिज्ञप्ति 26.19 का विस्तृत प्रमाण लिखिए। कौन-सा वाक्य **PA** को व्युत्पन्न करना चाहिए ताकि z का अस्तित्व प्रत्याभूत हो? $x \oslash z$ और $z \oslash y$ क्यों, तथा $[x] \neq [z]$ और $[z] \neq [y]$ क्यों?

प्रश्न 26.9. कोई ऐसी संरचना $\mathfrak{L}'$ दीजिए जिसमें $|\mathfrak{L}'| = \mathbb{N}$ हो और जो उदाहरण 26.9 की $\mathfrak{L}$ की समरूपी हो।

अध्याय 27

अंतर्वेशन प्रमेय

27.1 परिचय

अंतर्वेशन प्रमेय निम्न परिणाम है: मान लें कि $\vDash \varphi \to \psi$। तब ऐसा वाक्य χ है कि $\vDash \varphi \to \chi$ और $\vDash \chi \to \psi$। इसके अतिरिक्त, प्रत्येक अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न ($=$ के अतिरिक्त), जो χ में आता है, φ और ψ दोनों में आता है। वाक्य χ को φ और ψ का *अंतर्वेशक* कहते हैं।

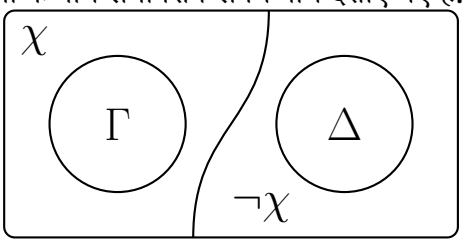
अंतर्वेशन प्रमेय अपने आप में रोचक है, किंतु उसका मुख्य महत्त्व इस बात में है कि उसका उपयोग किसी सिद्धांत में परिभाषणीयता के बारे में परिणाम सिद्ध करने और उन शर्तों को निर्धारित करने में किया जा सकता है जिनके अंतर्गत दो संगत सिद्धांतों को मिलाने पर संगत सिद्धांत मिलता है। पहला परिणाम बेथ के परिभाषणीयता प्रमेय के नाम से और दूसरा रॉबिन्सन के संयुक्त संगतता प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

27.2 वाक्यों का पृथक्करण

अंतर्वेशन प्रमेय के प्रमाण पर आगे बढ़ने से पहले कुछ आधार तैयार करना आवश्यक है। φ और ψ का अंतर्वेशक ऐसा वाक्य χ है कि $\varphi \vDash \chi$ और $\chi \vDash \psi$। प्रतिपक्ष द्वारा, बाद वाला कथन तभी और केवल तभी सत्य है जब $\neg\psi \vDash \neg\chi$। इस गुण वाले वाक्य χ को φ और $\neg\psi$ को *पृथक करने वाला* कहते हैं। अतः φ और ψ का अंतर्वेशक खोजना, φ और $\neg\psi$ को पृथक करने वाला वाक्य खोजने के बराबर है। जैसा प्रायः होता है, एक व्यापकीकरण पर विचार करना उपयोगी होगा: ऐसा वाक्य जो वाक्यों के दो *समुच्चयों* को पृथक करे।

परिभाषा 27.1. कोई वाक्य χ, वाक्यों के समुच्चयों Γ और Δ को तभी और केवल तभी *पृथक करता है* जब $\Gamma \vDash \chi$ और $\Delta \vDash \neg\chi$। यदि ऐसा कोई वाक्य नहीं है, तो Γ और Δ *अपृथक्करणीय* हैं।

Γ, Δ और χ के प्रतिरूपों के वर्गों के बीच समावेशन-संबंध नीचे दर्शाए गए हैं:



चित्र 27.1: χ, Γ और Δ को पृथक करता है

सहायक प्रमेय 27.2. *मान लें कि $\mathcal{L}_0$ वह भाषा है जिसमें प्रत्येक ऐसा अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न ($\doteq$ के अतिरिक्त) है जो Γ और Δ दोनों में आता है, और $\mathcal{L}_0'$ को अनंततः अनेक नए अचरों c_n, जहाँ $n \geq 0$, जोड़कर प्राप्त करें। तब यदि Γ और Δ, $\mathcal{L}_0$ में अपृथक्करणीय हैं, तो वे $\mathcal{L}_0'$ में भी अपृथक्करणीय हैं।*

प्रमाण. हम अप्रत्यक्ष रूप से आगे बढ़ते हैं: विरोधार्थ मान लें कि Γ और Δ, $\mathcal{L}_0'$ में पृथक हैं। तब $\Gamma \vDash \chi[c/x]$ और $\Delta \vDash \neg\chi[c/x]$ ऐसे किसी $\chi \in \mathcal{L}_0$ के लिए हैं (यहाँ c एक नया अचर है—वह स्थिति भी समान है जिसमें χ में ऐसे एक से अधिक नए अचरों आते हैं)। संहतता से, कोई *परिमित* उपसमुच्चय Γ_0, Γ का, और कोई परिमित उपसमुच्चय Δ_0, Δ का, ऐसे हैं कि $\Gamma_0 \vDash \chi[c/x]$ और $\Delta_0 \vDash \neg\chi[c/x]$। γ को Γ_0 के सभी सूत्रों का संयोजन और δ को Δ_0 के सभी सूत्रों का संयोजन मानें। तब

$$\gamma \vDash \chi[c/x], \qquad\qquad \delta \vDash \neg\chi[c/x].$$

पहले तात्पर्य से, व्यापकीकरण द्वारा, हमें $\gamma \vDash \forall x\, \chi$ मिलता है; और दूसरे से, प्रतिपक्ष द्वारा, $\chi[c/x] \vDash \neg\delta$, अतः $\forall x\, \chi \vDash \neg\delta$ भी मिलता है। फिर से प्रतिपक्ष लेने पर $\delta \vDash \neg\forall x\, \chi$ मिलता है। एकदिशता से,

$$\Gamma \vDash \forall x\, \chi, \qquad\qquad \Delta \vDash \neg\forall x\, \chi,$$

इसलिए $\forall x\, \chi$, Γ और Δ को $\mathcal{L}_0$ में पृथक करता है। □

सहायक प्रमेय 27.3. *मान लें कि $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma\}$ और Δ अपृथक्करणीय हैं, और c ऐसा नया अचर है जो Γ, Δ या σ में नहीं आता। तब $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\}$ और Δ भी अपृथक्करणीय हैं।*

प्रमाण. विरोधार्थ मान लें कि χ, $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\}$ और Δ को पृथक करता है, जबकि उसी समय $\Gamma \cup \{\exists x \sigma\}$ और Δ अपृथक्करणीय हैं। हम दो स्थितियाँ अलग करते हैं:

1. c, χ में नहीं आता: इस स्थिति में $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma, \neg\chi\}$ संतुष्टनीय है (अन्यथा χ, $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma\}$ और Δ को पृथक करता)। $\sigma[c/x]$ जोड़ने पर भी वह संतुष्टनीय रहता है, इसलिए अंततः χ, $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\}$ और Δ को पृथक नहीं करता।

2. c, χ में आता है, अतः χ का रूप $\chi[c/x]$ है। तब हमारे पास

   $$\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\} \vDash \chi[c/x],$$

   अतः निगमन प्रमेय और व्यापकीकरण द्वारा $\Gamma, \exists x\, \sigma \vDash \forall x\, (\sigma \to \chi)$, और अंततः $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma\} \vDash \exists x\, \chi$। दूसरी ओर, $\Delta \vDash \neg\chi[c/x]$ और इसलिए व्यापकीकरण द्वारा $\Delta \vDash \neg\exists x\, \chi$। अतः $\Gamma \cup \{\exists x\, \sigma\}$ और Δ पृथक्करणीय हैं, जो विरोधाभास है। □

27.3 क्रेग का अंतर्वेशन प्रमेय

प्रमेय 27.4 (क्रेग का अंतर्वेशन प्रमेय). *यदि $\vDash \varphi \to \psi$, तो ऐसा वाक्य χ है कि $\vDash \varphi \to \chi$ और $\vDash \chi \to \psi$, और प्रत्येक अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न (= के अतिरिक्त), जो χ में आता है, φ और ψ दोनों में आता है। वाक्य χ को φ और ψ का अंतर्वेशक कहते हैं।*

प्रमाण. मान लें कि $\mathcal{L}_1$, φ की भाषा है और $\mathcal{L}_2$, ψ की भाषा है। $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ मानें। प्रत्येक $i \in \{0, 1, 2\}$ के लिए, $\mathcal{L}_i'$ को $\mathcal{L}_i$ में अनंततः अनेक नए अचरों $c_0, c_1, c_2, \ldots$ जोड़कर प्राप्त करें।

यदि φ असंतुष्टनीय है, तो $\exists x\, x \neq x$ एक अंतर्वेशक है। यदि $\neg\psi$ असंतुष्टनीय है (और इसलिए ψ वैध है), तो $\exists x\, x = x$ एक अंतर्वेशक है। अतः हम यह भी मान सकते हैं कि φ और $\neg\psi$ दोनों संतुष्टनीय हैं।

अंतर्वेशन प्रमेय का प्रतिपक्ष सिद्ध करने के लिए मान लें कि φ और ψ का कोई अंतर्वेशक नहीं है। दूसरे शब्दों में, मान लें कि $\{\varphi\}$ और $\{\neg\psi\}$, $\mathcal{L}_0$ में अपृथक्करणीय हैं।

हमारा लक्ष्य युग्म $(\{\varphi\}, \{\neg\psi\})$ को किसी अधिकतम अपृथक्करणीय युग्म (Γ^*, Δ^*) तक विस्तृत करना है। φ_0, φ_1, φ_2, ...को $\mathcal{L}_1$ के वाक्यों की गणना और ψ_0, ψ_1, ψ_2, ...को $\mathcal{L}_2$ के वाक्यों की गणना मानें। हम वाक्यों के समुच्चयों के दो वर्धमान अनुक्रम (Γ_n, Δ_n), जहाँ $n \geq 0$, निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं। $\Gamma_0 = \{\varphi\}$ और $\Delta_0 = \{\neg\psi\}$ रखें। मान लें कि (Γ_n, Δ_n) पहले से परिभाषित हैं; तब Γ_{n+1} और Δ_{n+1} को इस प्रकार परिभाषित करें:

1. यदि $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ और Δ_n, $\mathcal{L}'_0$ में अपृथक्करणीय हैं, तो φ_n को Γ_{n+1} में रखें। इसके अतिरिक्त, यदि φ_n कोई अस्तित्ववाची सूत्र $\exists x\, \sigma$ है, तो ऐसा नया अचर c चुनें जो Γ_n, Δ_n, φ_n या ψ_n में नहीं आता, और $\sigma[c/x]$ को Γ_{n+1} में रखें।

2. यदि Γ_{n+1} और $\Delta_n \cup \{\psi_n\}$, $\mathcal{L}'_0$ में अपृथक्करणीय हैं, तो ψ_n को Δ_{n+1} में रखें। इसके अतिरिक्त, यदि ψ_n कोई अस्तित्ववाची सूत्र $\exists x\, \sigma$ है, तो ऐसा नया अचर c चुनें जो Γ_{n+1}, Δ_n, φ_n या ψ_n में नहीं आता, और $\sigma[c/x]$ को Δ_{n+1} में रखें।

अंत में, परिभाषित करें:

$$\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n, \qquad \Delta^* = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n.$$

अब n पर समकालिक आगमन द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं:

1. Γ_n और Δ_n, $\mathcal{L}'_0$ में अपृथक्करणीय हैं;

2. Γ_{n+1} और Δ_n, $\mathcal{L}'_0$ में अपृथक्करणीय हैं।

(1) का आधार सहायक प्रमेय 27.2 से मिलता है। भाग (2) के लिए हमें तीन स्थितियाँ अलग करनी होंगी:

1. यदि $\Gamma_0 \cup \{\varphi_0\}$ और Δ_0 पृथक्करणीय हैं, तो $\Gamma_1 = \Gamma_0$ और (2), (1) ही है;

2. यदि $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_0\}$, तो रचना से Γ_1 और Δ_0 अपृथक्करणीय हैं।

3. वह स्थिति शेष है जिसमें φ_0 अस्तित्ववाची है, अतः $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\}$। रचना से $\Gamma_0 \cup \{\exists x\, \sigma\}$ और Δ_0 अपृथक्करणीय हैं, इसलिए सहायक प्रमेय 27.3 द्वारा $\Gamma_0 \cup \{\exists x\, \sigma, \sigma[c/x]\}$ और Δ_0 भी अपृथक्करणीय हैं।

इससे ऊपर के (1) और (2) के लिए आगमन का आधार पूरा होता है। अब आगमन-चरण लें। (1) के लिए, यदि $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\psi_n\}$, तो रचना से Γ_{n+1} और Δ_{n+1} अपृथक्करणीय हैं (ψ_n के अस्तित्ववाची होने पर भी, सहायक प्रमेय 27.3 द्वारा); यदि $\Delta_{n+1} = \Delta_n$ (क्योंकि Γ_{n+1} और $\Delta_n \cup \{\psi_n\}$ पृथक्करणीय हैं), तो हम (2) पर आगमन-परिकल्पना का उपयोग करते हैं। (2) के आगमन-चरण के लिए, यदि $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1} \cup \{\varphi_{n+1}\}$, तो रचना से Γ_{n+2} और Δ_{n+1} अपृथक्करणीय हैं (φ_{n+1} के अस्तित्ववाची होने पर भी, सहायक प्रमेय 27.3 द्वारा); और यदि $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$, तो हम अभी सिद्ध किए गए (1) के आगमन-विषयक मामले का उपयोग करते हैं। इससे (1) और (2) पर आगमन पूरा होता है।

इससे Γ^* और Δ^* के अपृथक्करणीय होने का निष्कर्ष निकलता है; अन्यथा संहतता से कोई $n \geq 0$ होता जो Γ_n और Δ_n को पृथक करता, जो (1) के विरुद्ध है। विशेषतः, Γ^* और Δ^* संगत हैं: क्योंकि यदि पहला या दूसरा असंगत होता, तो उन्हें क्रमशः $\exists x\, x \neq x$ या $\forall x\, x = x$ पृथक करते।

अब हम दिखाते हैं कि Γ^*, $\mathcal{L}'_1$ में अधिकतम संगत है और इसी प्रकार Δ^*, $\mathcal{L}'_2$ में अधिकतम संगत है। पहले के लिए मान लें कि $\varphi_n \notin \Gamma^*$ और $\neg\varphi_n \notin \Gamma^*$, किसी $n \geq 0$ के लिए। यदि $\varphi_n \notin \Gamma^*$, तो $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, Δ_n से पृथक्करणीय है, और इसलिए ऐसा $\chi \in \mathcal{L}'_0$ है कि दोनों:

$$\Gamma^* \vDash \varphi_n \to \chi, \qquad \Delta^* \vDash \neg\chi.$$

इसी प्रकार, यदि $\neg\varphi_n \notin \Gamma^*$, तो ऐसा $\chi' \in \mathcal{L}'_0$ है कि दोनों:

$$\Gamma^* \vDash \neg\varphi_n \to \chi', \qquad \Delta^* \vDash \neg\chi'.$$

प्रतिज्ञप्तिक तर्क से $\Gamma^* \vDash \chi \vee \chi'$ और $\Delta^* \vDash \neg(\chi \vee \chi')$, इसलिए $\chi \vee \chi'$, Γ^* और Δ^* को पृथक करता है। ऐसा ही तर्क स्थापित करता है कि Δ^* अधिकतम है।

अंततः हम दिखाते हैं कि $\Gamma^* \cap \Delta^*$, $\mathcal{L}'_0$ में अधिकतम संगत है। वह स्पष्टतः संगत है, क्योंकि वह संगत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ है। अधिकतमता दिखाने के लिए $\sigma \in \mathcal{L}'_0$ लें। अब Γ^*, $\mathcal{L}'_1 \supseteq \mathcal{L}'_0$ में अधिकतम है और इसी प्रकार Δ^*, $\mathcal{L}'_2 \supseteq \mathcal{L}'_0$ में अधिकतम है। इससे या तो $\sigma \in \Gamma^*$ या $\neg\sigma \in \Gamma^*$, और या तो $\sigma \in \Delta^*$ या $\neg\sigma \in \Delta^*$। यदि $\sigma \in \Gamma^*$ और $\neg\sigma \in \Delta^*$, तो σ, Γ^* और Δ^* को पृथक करता; और यदि $\neg\sigma \in \Gamma^*$ और $\sigma \in \Delta^*$, तो Γ^* और Δ^* को $\neg\sigma$ पृथक करता। अतः या तो $\sigma \in \Gamma^* \cap \Delta^*$ या $\neg\sigma \in \Gamma^* \cap \Delta^*$, और $\Gamma^* \cap \Delta^*$ अधिकतम है।

चूँकि Γ^* अधिकतम संगत है, उसका ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}'_1$ है जिसका प्रांत $|\mathfrak{M}'_1|$ ठीक उन अवयवों $c^{\mathfrak{M}'_1}$ से बना है जो अचरों की व्याख्या करते हैं—ठीक पूर्णता प्रमेय के प्रमाण की तरह (प्रमेय 23.20)। इसी प्रकार, Δ^* का ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}'_2$ है जिसका प्रांत $|\mathfrak{M}'_2|$, अचरों की व्याख्याओं $c^{\mathfrak{M}'_2}$ से दिया जाता है।

$\mathfrak{M}_1$ को $\mathfrak{M}'_1$ से $\mathcal{L}'_1 \setminus \mathcal{L}'_0$ के अचरों, फलन-चिह्नों और विधेय-चिह्नों की व्याख्याएँ हटाकर प्राप्त करें, और $\mathfrak{M}_2$ के लिए भी ऐसा ही करें। तब प्रतिचित्र $h\colon M_1 \to M_2$, जिसे $h(c^{\mathfrak{M}'_1}) = c^{\mathfrak{M}'_2}$ द्वारा परिभाषित किया गया है, $\mathcal{L}'_0$ में एक समरूपता है, क्योंकि जैसा दिखाया गया है, $\Gamma^* \cap \Delta^*$, $\mathcal{L}'_0$ में अधिकतम संगत है। यह इसलिए निकलता है कि कोई भी $\mathcal{L}'_0$-वाक्य या तो Γ^* और Δ^* दोनों में है या दोनों में नहीं है: इसलिए $c^{\mathfrak{M}'_1} \in P^{\mathfrak{M}'_1}$ तभी और केवल तभी जब $P(c) \in \Gamma^*$, तभी और केवल तभी जब $P(c) \in \Delta^*$, और तभी और केवल तभी जब $c^{\mathfrak{M}'_2} \in P^{\mathfrak{M}'_2}$। समरूपताओं द्वारा संतुष्ट की जाने वाली अन्य शर्तें भी इसी प्रकार स्थापित की जा सकती हैं।

अब एक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ को भाषा $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ के लिए निम्न प्रकार परिभाषित करें:

1. प्रांत $|\mathfrak{M}|$ ठीक $|\mathfrak{M}_2|$ है, अर्थात् सभी अवयवों $c^{\mathfrak{M}'_2}$ का समुच्चय;
2. यदि विधेय-चिह्न P, $\mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_1$ में है, तो $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}'_2}$;
3. यदि कोई विधेय P, $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$ में है, तो $P^{\mathfrak{M}} = h(P^{\mathfrak{M}'_2})$, अर्थात् $\langle c_1^{\mathfrak{M}'_2}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}'_2}\rangle \in P^{\mathfrak{M}}$ तभी और केवल तभी जब $\langle c_1^{\mathfrak{M}'_1}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}'_1}\rangle \in P^{\mathfrak{M}'_1}$।
4. यदि विधेय-चिह्न P, $\mathcal{L}_0$ में है, तो $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}'_2} = h(P^{\mathfrak{M}'_1})$।
5. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ के फलन-चिह्नों, जिनमें अचरों भी सम्मिलित हैं, इसी प्रकार सँभाले जाते हैं।

अंततः सूत्रों पर आगमन द्वारा दिखाया जाता है कि $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'_1$ से $\mathcal{L}'_1$ के सभी सूत्रों पर और $\mathfrak{M}'_2$ से $\mathcal{L}'_2$ के सभी सूत्रों पर सहमत है। विशेषतः, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma^* \cup \Delta^*$, जिससे $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi$, और $\nvDash \varphi \to \psi$। इससे क्रेग के अंतर्वेशन प्रमेय का प्रमाण पूरा होता है। □

27.4 परिभाषणीयता प्रमेय

अंतर्वेशन प्रमेय का एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग बेथ का परिभाषणीयता प्रमेय है। किसी n-स्थानी संबंध R को परिभाषित करने के लिए हम ऐसा सूत्र χ दे सकते हैं जिसमें n मुक्त चरों हों और जिसमें R न आता हो। यह R की, χ के पदों में, एक *स्पष्ट* परिभाषा होगी। तब हम यह भी कह सकते हैं कि कोई सिद्धांत $\Sigma(P)$, किसी भाषा में जिसमें n-स्थानी विधेय-चिह्न P हो, P को स्पष्टतः परिभाषित करता है, यदि उसमें कोई औपचारिक स्पष्ट परिभाषा हो (या कम-से-कम वह उससे तात्पर्यित हो), अर्थात्

$$\Sigma(P) \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)).$$

किंतु स्पष्ट परिभाषा किसी संबंध को परिभाषित करने—अर्थात् उसे पूरी तरह निर्धारित करने—का केवल एक ढंग है। कोई सिद्धांत ऐसा भी हो सकता है कि किसी भी प्रतिरूप में शेष भाषा की व्याख्या, P की व्याख्या को निश्चित कर दे। परिभाषणीयता प्रमेय कहता है कि जब भी कोई सिद्धांत इस प्रकार P की व्याख्या निश्चित करता है—जब भी वह P को *अंतर्निहित रूप से परिभाषित करता है*—तब वह उसे स्पष्टतः भी परिभाषित करता है।

परिभाषा 27.5. मान लें कि $\mathcal{L}$ ऐसी भाषा है जिसमें विधेय-चिह्न P नहीं है। कोई समुच्चय $\Sigma(P)$, $\mathcal{L} \cup \{P\}$ के वाक्यों का, P को तभी और केवल तभी *स्पष्टतः परिभाषित करता है* जब ऐसा सूत्र $\chi(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{L}$ का, हो कि

$$\Sigma(P) \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)).$$

परिभाषा 27.6. मान लें कि $\mathcal{L}$ ऐसी भाषा है जिसमें विधेय-चिह्नों P और P' नहीं हैं। कोई समुच्चय $\Sigma(P)$, $\mathcal{L} \cup \{P\}$ के वाक्यों का, P को तभी और केवल तभी *अंतर्निहित रूप से परिभाषित करता है* जब

$$\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)),$$

जहाँ $\Sigma(P')$ उस प्रतिस्थापन का परिणाम है जिसमें P को P' से $\Sigma(P)$ में सर्वत्र बदला जाता है।

दूसरे शब्दों में, किसी भी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और $R, R' \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ के लिए, यदि $(\mathfrak{M}, R) \vDash \Sigma(P)$ और $(\mathfrak{M}, R') \vDash \Sigma(P')$ दोनों हों, तो $R = R'$; यहाँ $(\mathfrak{M}, R)$ वह संरचना $\mathfrak{M}'$ है जो $\mathcal{L}$ के $\mathcal{L} \cup \{P\}$ तक विस्तार के लिए ऐसी है कि $P^{\mathfrak{M}'} = R$, और $(\mathfrak{M}, R')$ भी इसी प्रकार है।

प्रमेय 27.7 (बेथ का परिभाषणीयता प्रमेय). *कोई समुच्चय $\Sigma(P)$, $\mathcal{L} \cup \{P\}$-सूत्रों का, P को अंतर्निहित रूप से तभी और केवल तभी परिभाषित करता है जब $\Sigma(P)$, P को स्पष्टतः परिभाषित करता है।*

प्रमाण. यदि $\Sigma(P)$, P को स्पष्टतः परिभाषित करता है, तो दोनों

$$\begin{aligned} \Sigma(P) \vDash & \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)) \\ \Sigma(P') \vDash & \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P'(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

और निष्कर्ष निकलता है। विलोम के लिए मान लें कि $\Sigma(P)$, P को अंतर्निहित रूप से परिभाषित करता है। पहले हम अचरों c_1, ..., c_n को $\mathcal{L}$ में जोड़ते हैं। तब

$$\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \vDash P(c_1, \ldots, c_n) \to P'(c_1, \ldots, c_n).$$

संहतता से ऐसे परिमित समुच्चय $\Delta_0 \subseteq \Sigma(P)$ और $\Delta_1 \subseteq \Sigma(P')$ हैं कि

$$\Delta_0 \cup \Delta_1 \vDash P(c_1, \ldots, c_n) \to P'(c_1, \ldots, c_n).$$

$\theta(P)$ को उन सभी वाक्यों $\varphi(P)$ का संयोजन मानें जिनके लिए या तो $\varphi(P) \in \Delta_0$ या $\varphi(P') \in \Delta_1$ है; और $\theta(P')$ को उन सभी वाक्यों $\varphi(P')$ का संयोजन मानें जिनके लिए या तो $\varphi(P) \in \Delta_0$ या $\varphi(P') \in \Delta_1$ है। तब $\theta(P) \wedge \theta(P') \vDash P(c_1, \ldots, c_n) \to P'c_1 \ldots c_n$। इसे हम इस प्रकार पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं कि प्रत्येक विधेय-चिह्न, $\vDash$ के एक ही ओर आए:

$$\theta(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \vDash \theta(P') \to P'(c_1, \ldots, c_n).$$

क्रेग के अंतर्वेशन प्रमेय से ऐसा वाक्य $\chi(c_1, \ldots, c_n)$ है जिसमें P या P' नहीं आता और जिसके लिए:

$$\begin{aligned} \theta(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n) &\vDash \chi(c_1, \ldots, c_n); \\ \chi(c_1, \ldots, c_n) &\vDash \theta(P') \to P'(c_1, \ldots, c_n). \end{aligned}$$

इन दोनों तात्पर्यों में पहले से हमें मिलता है: $\theta(P) \vDash P(c_1, \ldots, c_n) \to \chi(c_1, \ldots, c_n)$। और दूसरे से, चूँकि कोई $\mathcal{L} \cup \{P\}$-प्रतिरूप $(\mathfrak{M}, R) \vDash \varphi(P)$ तभी और केवल तभी जब संगत $\mathcal{L} \cup \{P'\}$-प्रतिरूप $(\mathfrak{M}, R) \models \varphi(P')$, हमें $\chi(c_1, \ldots, c_n) \vDash \theta(P) \to P(c_1, \ldots, c_n)$ मिलता है, जिससे:

$$\theta(P) \vDash \chi(c_1, \ldots, c_n) \to P(c_1, \ldots, c_n).$$

दोनों को मिलाने पर $\theta(P) \vDash P(c_1, \ldots, c_n) \leftrightarrow \chi(c_1, \ldots, c_n)$, और एकदिशता तथा व्यापकीकरण द्वारा यह भी:

$$\Sigma(P) \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)). \qquad \square$$

अध्याय 28

लिंडस्ट्रॉम (Lindström) का प्रमेय

28.1 परिचय

इस अध्याय में हमारा लक्ष्य लिंडस्ट्रॉम (Lindström) के उस अभिलक्षणन को सिद्ध करना है जिसके अनुसार प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र वह अधिकतम तर्क है जिसके लिए (कुछ अतिरिक्त प्रतिबंध दिए होने पर) संहतता और अवरोही लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) प्रमेय मान्य हैं (प्रमेय 23.23 और प्रमेय 23.32)। पहले हमें उन तर्कों के सामान्य वर्ग का अधिक व्यापक निरूपण चाहिए जिन पर यह प्रमेय लागू होता है। हम अपने को *संबंधपरक* भाषाओं तक सीमित रखेंगे, अर्थात् ऐसी भाषाओं तक जिनमें केवल विधेय-चिह्नों और व्यष्टि-अचर हों, पर कोई फलन-चिह्न न हो।

28.2 अमूर्त तर्क

परिभाषा 28.1. कोई *अमूर्त तर्क* एक युग्म $\langle L, \models_L \rangle$ है, जहाँ L ऐसा फलन है जो प्रत्येक भाषा $\mathcal{L}$ को वाक्यों का एक समुच्चय $L(\mathcal{L})$ निर्दिष्ट करता है, और $\models_L$, भाषा $\mathcal{L}$ की संरचनाएँ तथा $L(\mathcal{L})$ के अवयव के बीच एक संबंध है। विशेषतः, $\langle F, \models \rangle$ सामान्य प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र है, अर्थात् F वह फलन है जो भाषा $\mathcal{L}$ को $\mathcal{L}$ के अचरों से बने प्रथम-कोटि वाक्यों का समुच्चय निर्दिष्ट करता है, और $\models$ प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का संतुष्टि-संबंध है।

ध्यान दें कि किसी दी हुई भाषा के लिए हम अभी भी संरचना की वही धारणा ले रहे हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में ली जाती है; किंतु हम यह पूर्वधारणा नहीं करते कि वाक्यों, $\mathcal{L}$ के मूल चिह्नों से सामान्य ढंग से बने हैं, न यह कि संबंध $\models_L$ को प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की तरह ही पुनरावर्ती रूप से परिभाषित किया गया है। मसलन, यह सर्वथा सामान्य परिभाषा उस स्थिति को भी समेटने के लिए है जिसमें $\langle L, \models_L \rangle$ के वाक्यों में अनंत लंबे संयोजन या वियोजन हों, अथवा $\exists$ और $\forall$ के अतिरिक्त परिमाणक हों (जैसे, "ऐसे अनंततः अनेक x हैं कि ..."), अथवा शायद अनंत लंबे परिमाणक-उपसर्ग हों। यह बल देने के लिए कि $L(\mathcal{L})$ के "वाक्यों" प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के सामान्य वाक्यों होना आवश्यक नहीं, इस अध्याय में हम उनके लिए चरों α, β, ...का प्रयोग करते हैं, और सामान्य प्रथम-कोटि सूत्रों के लिए φ, ψ, ...सुरक्षित रखते हैं।

परिभाषा 28.2. $\mathrm{Mod}_L(\alpha)$ से वर्ग $\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models_L \alpha\}$ निरूपित करें। यदि भाषा को स्पष्ट करना आवश्यक हो, तो हम $\mathrm{Mod}_L^{\mathcal{L}}(\alpha)$ लिखते हैं। दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$, $\mathcal{L}$ के लिए, $\langle L, \models_L \rangle$ में *प्राथमिकतः तुल्य* हैं, जिसे $\mathfrak{M} \equiv_L \mathfrak{N}$ लिखते हैं, यदि $L(\mathcal{L})$ के ठीक वही वाक्यों दोनों में सत्य हों।

परिभाषा 28.3. कोई अमूर्त तर्क $\langle L, \models_L \rangle$, भाषा $\mathcal{L}$ के लिए, *प्रसामान्य* है, यदि वह निम्नलिखित गुणों को संतुष्ट करता है:

1. (L-*एकदिशता*) भाषाओं $\mathcal{L}$ और $\mathcal{L}'$ के लिए, यदि $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, तो $L(\mathcal{L}) \subseteq L(\mathcal{L}')$.

2. (*विस्तार गुण*) प्रत्येक $\alpha \in L(\mathcal{L})$ के लिए कोई *परिमित* उपसमुच्चय $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ का, ऐसा है कि संबंध $\mathfrak{M} \models_L \alpha$, $\mathfrak{M}$ के केवल $\mathcal{L}'$ तक न्यूनीकृत रूप पर निर्भर करता है; अर्थात् यदि $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के $\mathcal{L}'$ तक न्यूनीकृत रूप समान हों, तो $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \models_L \alpha$।

3. (*समरूपता गुण*) यदि $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ और $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$, तो $\mathfrak{N} \models_L \alpha$ भी।

4. (*पुनर्नामकरण गुण*) संबंध $\models_L$ पुनर्नामकरण के अधीन सुरक्षित रहता है: यदि भाषा $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ के प्रत्येक चिह्न P को उसी स्थान-संख्या वाले चिह्न P' से और प्रत्येक अचर c को किसी अलग अचर c' से बदलकर प्राप्त की गई हो, तो प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ और वाक्य α के लिए $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}' \models_L \alpha'$, जहाँ $\mathfrak{M}'$, $\mathcal{L}'$-संरचना है जो $\mathcal{L}$ से संगत है और $\alpha' \in L(\mathcal{L}')$।

5. (*बूलीय गुण*) अमूर्त तर्क $\langle L, \models_L \rangle$ बूलीय संयोजकों के अधीन इस अर्थ में संवृत है कि प्रत्येक $\alpha \in L(\mathcal{L})$ के लिए कोई $\beta \in L(\mathcal{L})$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \models_L \beta$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \not\models_L \alpha$, और प्रत्येक α तथा β के लिए कोई γ ऐसा है कि $\mathrm{Mod}_L(\gamma) = \mathrm{Mod}_L(\alpha) \cap \mathrm{Mod}_L(\beta)$। परमाण्विक सूत्रों और अन्य संयोजकों के लिए भी इसी प्रकार।

6. (*परिमाणक गुण*) प्रत्येक अचर c, $\mathcal{L}$ में, और $\alpha \in L(\mathcal{L})$ के लिए कोई $\beta \in L(\mathcal{L})$ ऐसा है कि

$$\mathrm{Mod}_L^{\mathcal{L}'}(\beta) = \{\mathfrak{M} : (\mathfrak{M}, a) \in \mathrm{Mod}_L^{\mathcal{L}}(\alpha) \text{ जहाँ कोई } a \in |\mathfrak{M}|\},$$

   जहाँ $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{c\}$ और $(\mathfrak{M}, a)$, $\mathfrak{M}$ का $\mathcal{L}$ तक वह विस्तार है जो a को c का मान निर्दिष्ट करता है।

7. (*सापेक्षीकरण गुण*) मान लें कि वाक्य $\alpha \in L(\mathcal{L})$ है और चिह्न R, c_1, ..., c_n, $\mathcal{L}$ में नहीं हैं। तब कोई वाक्य $\beta \in L(\mathcal{L} \cup \{R, c_1, \ldots, c_n\})$ है जिसे α का $R(x, c_1, \ldots c_n)$ तक *सापेक्षीकरण* कहते हैं, और प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए:

$$(\mathfrak{M}, X, b_1, \ldots, b_n) \models_L \beta \text{ तभी और केवल तभी जब } \mathfrak{N} \models_L \alpha,$$

   जहाँ $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ की वह उपसंरचना है जिसका प्रांत $|\mathfrak{N}| = \{a \in |\mathfrak{M}| : R^{\mathfrak{M}}(a, b_1, \ldots, b_n)\}$ है (देखें टिप्पणी 1), और $(\mathfrak{M}, X, b_1, \ldots, b_n)$, $\mathfrak{M}$ का वह विस्तार है जो R, c_1, ..., c_n की व्याख्या क्रमशः X, b_1, ..., b_n से करता है (जहाँ $X \subseteq M^{n+1}$)।

परिभाषा 28.4. दो अमूर्त तर्कों $\langle L_1, \models_{L_1} \rangle$ और $\langle L_2, \models_{L_2} \rangle$ के दिए होने पर हम कहते हैं कि दूसरा, पहले से *कम-से-कम उतना ही अभिव्यंजक* है, जिसे $\langle L_1, \models_{L_1} \rangle \leq \langle L_2, \models_{L_2} \rangle$ लिखते हैं, यदि प्रत्येक भाषा $\mathcal{L}$ और वाक्य $\alpha \in L_1(\mathcal{L})$ के लिए कोई वाक्य $\beta \in L_2(\mathcal{L})$ ऐसा है कि $\mathrm{Mod}_{L_1}^{\mathcal{L}}(\alpha) = \mathrm{Mod}_{L_2}^{\mathcal{L}}(\beta)$। तर्क $\langle L_1, \models_{L_1} \rangle$ और $\langle L_2, \models_{L_2} \rangle$ *तुल्य* हैं, यदि $\langle L_1, \models_{L_1} \rangle \leq \langle L_2, \models_{L_2} \rangle$ और $\langle L_2, \models_{L_2} \rangle \leq \langle L_1, \models_{L_1} \rangle$।

टिप्पणी 5. प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र, अर्थात् अमूर्त तर्क $\langle F, \models \rangle$, प्रसामान्य है। वास्तव में, प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ऊपर के अधिकांश गुण सीधे हैं। हम केवल यह उल्लेख करते हैं कि विस्तार गुण विस्तारात्मकता में परिणत होता है, और वाक्य α का $R(x, c_1, \ldots, c_n)$ तक सापेक्षीकरण, प्रत्येक उपसूत्र $\forall x\, \beta$ को $\forall x\, (R(x, c_1, \ldots, c_n) \rightarrow \beta)$ से बदलकर प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त, यदि $\langle L, \models_L \rangle$ प्रसामान्य है, तो $\langle F, \models \rangle \leq \langle L, \models_L \rangle$; इसे प्रथम-कोटि सूत्रों पर आगमन द्वारा दिखाया जा सकता है। अतः व्यापकता खोए बिना हम मान सकते हैं कि प्रत्येक प्रथम-कोटि वाक्य, प्रत्येक प्रसामान्य तर्क में आता है।

28.3 संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण

अब हम संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) के अमूर्त तर्कों वाली स्थिति तक सहज विस्तार देते हैं।

परिभाषा 28.5. किसी अमूर्त तर्क $\langle L, \models_L \rangle$ में *संहतता गुण* है, यदि प्रत्येक समुच्चय Γ, $L(\mathcal{L})$-वाक्यों का, तब संतुष्टनीय होता है जब प्रत्येक परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ संतुष्टनीय हो।

परिभाषा 28.6. $\langle L, \models_L \rangle$ में *अवरोही लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण* है, यदि प्रत्येक संतुष्टनीय Γ का कोई गणनीय प्रतिरूप हो।

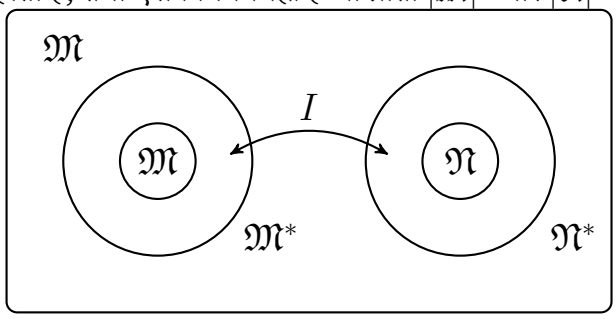
परिभाषा 25.15 में दी गई आंशिक समरूपता की धारणा पूर्णतः "बीजगणितीय" है (अर्थात् वह भाषा के वाक्यों का संदर्भ लिए बिना, केवल उन अचरों के आधार पर दी गई है जो भाषा $\mathcal{L}$, संरचनाएँ को प्रदान करती है), और इसलिए वह अमूर्त तर्कों की स्थिति पर भी लागू होती है। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की स्थिति में हम प्रमेय 25.17 से जानते हैं कि यदि दो संरचनाएँ आंशिक रूप से समरूपी हैं, तो वे प्राथमिकतः तुल्य हैं। वह प्रमाण अमूर्त तर्कों तक नहीं पहुँचता, क्योंकि किसी स्वेच्छ $\alpha \in L(\mathcal{L})$ के लिए सूत्रों पर आगमन उपलब्ध होना आवश्यक नहीं; फिर भी, यदि लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण मान्य हो, तो प्रमेय सत्य है।

प्रमेय 28.7. *मान लें कि $\langle L, \models_L \rangle$ लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण वाला कोई प्रसामान्य तर्क है। तब कोई भी दो आंशिक रूप से समरूपी संरचनाएँ, $\langle L, \models_L \rangle$ में प्राथमिकतः तुल्य हैं।*

प्रमाण. मान लें कि $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$, किंतु किसी α के लिए $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ जबकि $\mathfrak{N} \not\models_L \alpha$। समरूपता गुण से हम मान सकते हैं कि $|\mathfrak{M}|$ और $|\mathfrak{N}|$ असंयुक्त हैं, और विस्तार गुण से हम मान सकते हैं कि $\alpha \in L(\mathcal{L})$, किसी परिमित भाषा $\mathcal{L}$ के लिए। मान लें कि $\mathcal{I}$, $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के बीच आंशिक समरूपताओं का एक समुच्चय है; और व्यापकता खोए बिना यह भी मान लें कि यदि $p \in \mathcal{I}$ और $q \subseteq p$, तो $q \in \mathcal{I}$ भी।

$|\mathfrak{M}|^{<\omega}$, $|\mathfrak{M}|$ के अवयव के परिमित अनुक्रमों का समुच्चय है। S को $|\mathfrak{M}|^{<\omega}$ पर वह त्रयी संबंध मानें जो संलग्नन निरूपित करता है; अर्थात् यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$, तो $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ तभी और केवल तभी मान्य है जब $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ का संलग्नन हो। और T को वह त्रयी संबंध मानें जिसके लिए $T(\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$, $b \in M$ और $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ के लिए, तभी और केवल तभी मान्य है जब $\mathbf{a} = a_1, \ldots a_n$ और $\mathbf{c} = a_1, \ldots a_n, b$। नए त्रिस्थानी विधेय-चिह्नों P और Q चुनें और वह संरचना $\mathfrak{M}^*$ बनाएँ जिसका समग्र समुच्चय $|\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ है, जिसमें $\mathfrak{M}$ उपसंरचना है, और जो P तथा Q की व्याख्या संलग्नन-संबंधों S तथा T से करती है (अतः $\mathfrak{M}^*$, भाषा $\mathcal{L} \cup \{P, Q\}$ में है)।

$|\mathfrak{N}|^{<\omega}$, S', T', P', Q' और $\mathfrak{N}^*$ को इसी प्रकार परिभाषित करें। परिकल्पना से $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$ है, इसलिए कोई संबंध I, $|\mathfrak{M}|^{<\omega}$ और $|\mathfrak{N}|^{<\omega}$ के बीच, ऐसा है कि $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ तभी और केवल तभी मान्य है जब $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समरूपी हों और वे परिभाषा 25.15 की आगे-पीछे शर्त को संतुष्ट करें। अब $\mathfrak{M}$ को वह संरचना मानें जिसका प्रांत, $\mathfrak{M}^*$ और $\mathfrak{N}^*$ के प्रांतों का संघ है, जिसमें $\mathfrak{M}^*$ और $\mathfrak{N}^*$ उपसंरचनाएँ हैं, और जिसकी भाषा में एक अतिरिक्त द्वयी विधेय-चिह्न R है जिसकी व्याख्या संबंध I से होती है, तथा ऐसे विधेय-चिह्नों हैं जो प्रांतों $|\mathfrak{M}|^*$ और $|\mathfrak{N}| *$ को निरूपित करते हैं।



चित्र 28.1: आंतरिक आंशिक समरूपता वाली संरचना $\mathfrak{M}$।

निर्णायक बात यह है कि संरचना $\mathfrak{M}$ की भाषा में कोई *प्रथम-कोटि* वाक्य θ_1 ऐसा है जो $\mathfrak{M}$ में सत्य है और कहता है कि $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ तथा $\mathfrak{N} \not\models_L \alpha$ (इसके लिए सापेक्षीकरण गुण आवश्यक है); साथ ही कोई *प्रथम-कोटि* वाक्य θ_2 ऐसा है जो $\mathfrak{M}$ में सत्य है और कहता है कि $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$, आंशिक समरूपता I के माध्यम से। लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण से θ_1 और θ_2, किसी गणनीय प्रतिरूप $\mathfrak{M}_0$ में संयुक्त रूप से सत्य हैं; उसमें आंशिक रूप से समरूपी उपसंरचनाएँ $\mathfrak{M}_0$ और $\mathfrak{N}_0$ ऐसी हैं कि $\mathfrak{M}_0 \models_L \alpha$ और $\mathfrak{N}_0 \not\models_L \alpha$। किंतु प्रमेय 25.16 से गणनीय आंशिक रूप से समरूपी संरचनाएँ वास्तव में समरूपी हैं, जो प्रसामान्य अमूर्त तर्कों के समरूपता गुण के विरुद्ध है। $\square$

28.4 लिंडस्ट्रॉम (Lindström) का प्रमेय

सहायक प्रमेय 28.8. *मान लें कि $\alpha \in L(\mathcal{L})$, जहाँ $\mathcal{L}$ परिमित है, और यह भी मान लें कि कोई $n \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि किन्हीं दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के लिए, यदि $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$ और $\mathfrak{M} \models_L \alpha$, तो $\mathfrak{N} \models_L \alpha$ भी। तब α किसी प्रथम-कोटि वाक्य के तुल्य है, अर्थात् कोई प्रथम-कोटि θ ऐसा है कि $\mathrm{Mod}_L(\alpha) = \mathrm{Mod}_L(\theta)$।*

प्रमाण. n ऐसा मानें कि कोई भी दो n-तुल्य संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$, α की सत्यता पर सहमत हों। प्रतिज्ञप्ति 25.19 याद करें: तार्किक तुल्यता तक, किसी परिमित भाषा में ऐसे केवल परिमिततः अनेक प्रथम-कोटि वाक्यों हैं जिनकी परिमाणक-कोटि n से अधिक नहीं। अब प्रत्येक नियत संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\theta_{\mathfrak{M}}$ को उन सभी प्रथम-कोटि वाक्यों α का संयोजन मानें जो $\mathfrak{M}$ में सत्य हैं और जिनके लिए $\mathrm{qr}(\alpha) \leq n$ (यह संयोजन परिमित है), ताकि $\mathfrak{N} \models \theta_{\mathfrak{M}}$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \equiv_n \mathfrak{M}$। फिर $\theta = \bigvee\{\theta_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \models_L \alpha\}$ रखें; यह वियोजन भी (तार्किक तुल्यता तक) परिमित है।

निष्कर्ष $\mathrm{Mod}_L(\alpha) = \mathrm{Mod}_L(\theta)$ निकलता है। वास्तव में, यदि $\mathfrak{N} \models_L \theta$, तो किसी $\mathfrak{M} \models_L \alpha$ के लिए $\mathfrak{N} \models \theta_{\mathfrak{M}}$; अतः $\mathfrak{N} \models_L \alpha$ भी (उपपत्ति की परिकल्पना से)। विलोमतः, यदि $\mathfrak{N} \models_L \alpha$, तो $\theta_{\mathfrak{N}}$, θ का एक वियोज्य है; और चूँकि $\mathfrak{N} \models \theta_{\mathfrak{N}}$, इसलिए $\mathfrak{N} \models_L \theta$ भी। □

प्रमेय 28.9 (लिंडस्ट्रॉम (Lindström) का प्रमेय). *मान लें कि $\langle L, \models_L \rangle$ में संहतता और लोवेनहाइम–स्कोलेम (Löwenheim–Skolem) गुण हैं। तब $\langle L, \models_L \rangle \leq \langle F, \models \rangle$ (अर्थात् $\langle L, \models_L \rangle$ प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के तुल्य है)।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 28.8 से इतना दिखाना पर्याप्त है कि किसी भी $\alpha \in L(\mathcal{L})$ के लिए, जहाँ $\mathcal{L}$ परिमित है, कोई $n \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि किन्हीं दो संरचनाएँ $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$ के लिए: यदि $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$, तो $\mathfrak{M}$ और $\mathfrak{N}$, α पर सहमत हैं। तब α किसी प्रथम-कोटि वाक्य के तुल्य होगा, जिससे $\langle L, \models_L \rangle \leq \langle F, \models \rangle$ निकलेगा। चूँकि हम किसी परिमित, पूर्णतः संबंधपरक भाषा में काम कर रहे हैं, प्रमेय 25.23 से हम कथन $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$ को संगत बीजगणितीय कथन $I_n(\emptyset, \emptyset)$ से बदल सकते हैं।

α दिए होने पर, विरोधाभास के लिए मान लें कि प्रत्येक n के लिए ऐसी संरचनाएँ $\mathfrak{M}_n$ और $\mathfrak{N}_n$ हैं कि $I_n(\emptyset, \emptyset)$, किंतु (मान लें) $\mathfrak{M}_n \models_L \alpha$ जबकि $\mathfrak{N}_n \not\models_L \alpha$। समरूपता गुण से हम मान सकते हैं कि सभी $\mathfrak{M}_n$ भाषा के अचरों की व्याख्या उन्हीं वस्तुओं से करती हैं; इसके अतिरिक्त, चूँकि भाषा में केवल परिमिततः अनेक परमाण्विक वाक्यों हैं, हम यह भी मान सकते हैं कि वे उन्हीं परमाण्विक वाक्यों को संतुष्ट करती हैं (अन्यथा हम $\mathfrak{M}$ का कोई उपानुक्रम ले सकते हैं)। $\mathfrak{M}$ को सभी $\mathfrak{M}_n$ का संघ मानें, अर्थात् वह अद्वितीय न्यूनतम संरचना जिसकी प्रत्येक $\mathfrak{M}_n$ उपसंरचना है। प्रमेय 28.7 के प्रमाण की तरह, $\mathfrak{M}^*$ को $\mathfrak{M}$ का वह विस्तार मानें जिसका प्रांत $|\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ है और जिसकी विस्तारित भाषा में संलग्नन-विधेय P और Q आते हैं।

इसी प्रकार $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{N}$ और $\mathfrak{N}^*$ को परिभाषित करें। अब $\mathfrak{M}$ को वह संरचना मानें जिसके प्रांत में $\mathfrak{M}^*$ और $\mathfrak{N}^*$ के प्रांतों के साथ प्राकृत संख्याएँ $\mathbb{N}$ तथा उनका स्वाभाविक क्रम $\leq$ भी आते हैं; उसकी भाषा में $|\mathfrak{M}|$, $|\mathfrak{N}|$, $|\mathfrak{M}|^{<\omega}$ और $|\mathfrak{N}|^{<\omega}$ को निरूपित करने वाले अतिरिक्त विधेय हैं, और $\mathfrak{M}_n$ तथा $\mathfrak{N}_n$ के प्रांतों को इस अर्थ में कूटबद्ध करने वाले विधेय भी हैं कि:

$$|\mathfrak{M}_n| = \{a \in |\mathfrak{M}| : R(a, n)\}; \qquad |\mathfrak{N}_n| = \{a \in |\mathfrak{N}| : S(a, n)\};$$
$$|\mathfrak{M}|_n^{<\omega} = \{a \in |\mathfrak{M}|^{<\omega} : R(a, n)\}; \qquad |\mathfrak{N}|_n^{<\omega} = \{a \in |\mathfrak{N}|^{<\omega} : S(a, n)\}.$$

संरचना $\mathfrak{M}$ में एक त्रयी संबंध J भी है, ऐसा कि $J(n, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ तभी और केवल तभी मान्य है जब $I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$।

अब कोई वाक्य θ, उस भाषा $\mathcal{L}$ में है जो R, S, J इत्यादि से संवर्धित है; वह कहता है कि $\leq$ ऐसा विविक्त रैखिक क्रम है जिसका प्रथम अवयव तो है पर अंतिम अवयव नहीं, और यह कि $\mathfrak{M}_n \models \alpha$, $\mathfrak{N}_n \not\models \alpha$, तथा क्रम के प्रत्येक n के लिए $J(n, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ तभी और केवल तभी मान्य है जब $I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$।

संहतता गुण का उपयोग करके हम कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}^*$, θ का, पा सकते हैं जिसमें क्रम में कोई अमानक अवयव n^* आता है। तब विशेषतः $\mathfrak{M}^*$ में ऐसी उपसंरचनाएँ $\mathfrak{M}_{n^*}$ और $\mathfrak{N}_{n^*}$ होंगी कि $\mathfrak{M}_{n^*} \models_L \alpha$ और $\mathfrak{N}_{n^*} \not\models_L \alpha$। किंतु अब हम कोई समुच्चय $\mathcal{I}$, k-टुपलों के उन युग्मों का जो $|\mathfrak{M}_{n^*}|$ और $|\mathfrak{N}_{n^*}|$ से लिए गए हैं, इस प्रकार परिभाषित कर सकते

हैं: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathcal{I}$ तभी और केवल तभी जब $J(n^* - k, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, जहाँ k, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ की लंबाई है। चूँकि n^* अमानक है, प्रत्येक मानक k के लिए $n^* - k > 0$, और समुच्चय $\mathcal{I}$ इस तथ्य का साक्षी है कि $\mathfrak{M}_{n^*} \simeq_p \mathfrak{N}_{n^*}$। किंतु प्रमेय 28.7 से $\mathfrak{M}_{n^*}$, L की दृष्टि से, $\mathfrak{N}_{n^*}$ के तुल्य है, जो विरोधाभास है। $\square$

खण्ड V

गणनीयता

यह भाग गणनीयता सिद्धांत पर जेरेमी एविगैड की टिप्पणियों पर आधारित है। अभी केवल पुनरावर्ती फलनों वाले अध्याय में अभ्यास हैं और पूरी सामग्री में प्रेरणा, उदाहरण, विवरण तथा अभ्यास जोड़कर विस्तार किया जा सकता है।

अध्याय 29

पुनरावर्ती फलन

ये पुनरावर्ती फलनों पर जेरेमी एविगैड (Jeremy Avigad) की टिप्पणियाँ हैं, जिन्हें रिचर्ड ज़ैक (Richard Zach) ने संशोधित और विस्तृत किया है। इस अध्याय में कुछ अभ्यास हैं, और वाक्यविन्यास के अंकगणितीकरण पर चर्चा का आधार देने के लिए इसे स्वतंत्र रूप से सम्मिलित किया जा सकता है।

29.1 परिचय

संगणनीयता का गणितीय सिद्धांत विकसित करने के लिए सबसे पहले संगणनीयता का एक *प्रतिरूप* विकसित करना पड़ता है। आज हम संगणनीयता को उस प्रकार की क्रिया समझते हैं जो संगणक करते हैं, और संगणक चिह्नों के साथ काम करते हैं। किंतु संगणनीयता के सिद्धांतों के आरंभिक विकास में संगणन का आदर्श उदाहरण *संख्यात्मक* संगणन था। गणितज्ञों की रुचि सदा संख्या-सैद्धांतिक फलनों में रही है, अर्थात् ऐसे फलनों $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ में जिनकी गणना की जा सकती है। इसलिए यह आश्चर्यजनक नहीं कि संगणनीयता-सिद्धांत के आरंभ में ऐसे ही फलनों का अध्ययन हुआ। परिचित संगणनीय संख्यात्मक फलनों के उदाहरणों—जैसे प्राकृतिक संख्याओं का जोड़, गुणा और घातांक—में एक रोचक विशेषता समान है: उन्हें *पुनरावर्ती रूप से* परिभाषित किया जा सकता है। अतः पुनरावर्ती परिभाषाओं के आधार पर *संगणनीय फलन* की सामान्य परिभाषा देने का प्रयास स्वाभाविक है। संख्या-सैद्धांतिक फलनों को पुनरावर्ती रूप से परिभाषित करने के अनेक संभव ढंगों में से परिभाषा का एक विशेष रूप से सरल प्रतिरूप यहाँ केंद्रीय बनता है: तथाकथित *आदिम पुनरावर्तन*।

संगणनीय फलनों के अतिरिक्त हमारी रुचि संगणनीय समुच्चयों और संबंधों में भी हो सकती है। कोई समुच्चय संगणनीय है यदि हम यह उत्तर संगणित कर सकें कि दी हुई संख्या उस समुच्चय की अवयव है या नहीं; और कोई संबंध संगणनीय तभी और केवल तभी है जब हम यह संगणित कर सकें कि टुपल $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ उस संबंध की अवयव है या नहीं। किसी समुच्चय अथवा संबंध के *अभिलाक्षणिक फलन* पर विचार करके संगणनीय समुच्चयों और संबंधों की चर्चा को संगणनीय फलनों की चर्चा में समाहित किया जा सकता है। इस प्रकार हम आदिम पुनरावर्ती संबंध भी परिभाषित कर सकते हैं; मसलन, संबंध "n, m को पूर्णतः विभाजित करता है" एक आदिम पुनरावर्ती संबंध है।

फिर भी आदिम पुनरावर्ती फलन—वे जिन्हें केवल आदिम पुनरावर्तन का उपयोग करके परिभाषित किया जा सकता है—सभी संगणनीय संख्या-सैद्धांतिक फलन नहीं हैं। आदिम पुनरावर्तन के अनेक सामान्यीकरणों पर विचार किया गया है, किंतु फलनों को संगणित करने का सबसे शक्तिशाली और व्यापक रूप से स्वीकृत अतिरिक्त ढंग अपरिबद्ध खोज है। इससे *आंशिक पुनरावर्ती फलनों* की परिभाषा और उससे संबंधित *सामान्य पुनरावर्ती फलनों* की परिभाषा मिलती है। सामान्य पुनरावर्ती फलन संगणनीय और पूर्ण होते हैं, और यह परिभाषा ठीक उन आंशिक पुनरावर्ती फलनों का अभिलक्षणन करती है जो पूर्ण होते हैं। पुनरावर्ती फलन संगणन के प्रत्येक अन्य प्रतिरूप (ट्यूरिंग मशीन, लैम्ब्डा कलन इत्यादि) का अनुकरण कर सकते हैं और इसलिए संगणन के अनेक स्वीकृत प्रतिरूपों में से एक का निरूपण करते हैं।

29.2 आदिम पुनरावर्तन

प्राकृतिक संख्याओं की एक विशेषता यह है कि 0 से आरंभ करके उत्तराधिकारी संक्रिया $+1$ को परिमित बार लागू करने पर प्रत्येक प्राकृतिक संख्या तक पहुँचा जा सकता है—हर प्राकृतिक संख्या या तो 0 है, या ... 0 के उत्तराधिकारी का उत्तराधिकारी है। इस तथ्य का उपयोग करने वाले किसी फलन $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को निर्दिष्ट करने का एक ढंग यह है: (a) यह निर्दिष्ट करें कि h का तर्क 0 पर मान क्या है, और (b) यह भी निर्दिष्ट करें कि $h(x)$ का मान दिए होने पर $h(x+1)$ का मान कैसे संगणित किया जाए। क्योंकि (a) हमें सीधे बताता है कि $h(0)$ क्या है, इसलिए h, 0 पर परिभाषित है। अब $x = 0$ के लिए (b) में दिया निर्देश लेकर हम $h(1) = h(0+1)$ को $h(0)$ से संगणित कर सकते हैं। $x = 1$ के लिए उन्हीं निर्देशों से हम $h(2) = h(1+1)$ को $h(1)$ से संगणित करते हैं, और इसी प्रकार आगे बढ़ते हैं। हर प्राकृतिक संख्या x के लिए अंततः हम उस चरण तक पहुँचेंगे जहाँ $h(x)$ से $h(x+1)$ परिभाषित करते हैं; अतः $h(x)$ प्रत्येक $x \in \mathbb{N}$ के लिए परिभाषित है।

मसलन, मान लें कि हम निम्न दो समीकरणों से $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ निर्दिष्ट करते हैं:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(x+1) &= 2 \cdot h(x) \end{aligned}$$

यदि हम गुणा करना पहले से जानते हैं, तो ये समीकरण हमें ऊपर के (a) और (b) के लिए आवश्यक सूचना देते हैं। दूसरा समीकरण क्रमशः लागू करने पर मिलता है:

$$\begin{aligned} h(1) &= 2 \cdot h(0) = 2, \\ h(2) &= 2 \cdot h(1) = 2 \cdot 2, \\ h(3) &= 2 \cdot h(2) = 2 \cdot 2 \cdot 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

हम देखते हैं कि हमारे द्वारा निर्दिष्ट फलन h, $h(x) = 2^x$ है।

प्राकृतिक संख्याओं की यह विशेषता सुनिश्चित करती है कि इन दोनों कसौटियों को पूरा करने वाला केवल एक फलन h है। ऐसे समीकरणों के युग्म को फलन h की *आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषा* कहते हैं। ऐसा इसलिए कहते हैं कि हम h को "पुनरावर्ती रूप से" परिभाषित करते हैं, अर्थात् परिभाषा में, विशेषकर दूसरे समीकरण के दाहिने पक्ष में, स्वयं h आता है। यह "आदिम" है क्योंकि $h(x+1)$ को परिभाषित करने में हम केवल मान $h(x)$, अर्थात् ठीक पूर्ववर्ती मान, का उपयोग करते हैं। $\mathbb{N}$ पर किसी फलन को पुनरावर्ती रूप से परिभाषित करने का यह सबसे सरल ढंग है।

जोड़ और गुणा जैसे और भी मूलभूत फलनों को हम आदिम पुनरावर्तन से परिभाषित कर सकते हैं। किंतु इन स्थितियों में संबंधित फलन 2-स्थानी हैं। हम एक तर्क-स्थान को नियत करते हैं और दूसरे का उपयोग पुनरावर्तन के लिए करते हैं। मसलन, $\mathrm{add}(x, y)$ को परिभाषित करने के लिए हम x को नियत करके पहले $y = 0$ पर मान और फिर $y + 1$ पर मान को y के पदों में परिभाषित कर सकते हैं। चूँकि x नियत है, वह परिभाषक समीकरणों के बाएँ और दाएँ दोनों पक्षों में आएगा।

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(x, 0) &= x \\ \mathrm{add}(x, y+1) &= \mathrm{add}(x, y) + 1 \end{aligned}$$

ये समीकरण add का मान सभी x *और* y के लिए निर्दिष्ट करते हैं। मसलन, $\mathrm{add}(2, 3)$ ज्ञात करने के लिए हम $x = 2$ पर परिभाषक समीकरण लागू करते हैं: पहले समीकरण से $\mathrm{add}(2, 0) = 2$ और फिर दूसरे से क्रमशः $\mathrm{add}(2, 1) = 2 + 1 = 3$, $\mathrm{add}(2, 2) = 3 + 1 = 4$, $\mathrm{add}(2, 3) = 4 + 1 = 5$ मिलता है।

add की परिभाषा में हमने दूसरे समीकरण के दाहिने पक्ष पर $+$ का उपयोग किया, किंतु केवल 1 जोड़ने के लिए। दूसरे शब्दों में, हमने उत्तराधिकारी फलन $\mathrm{succ}(z) = z + 1$ का उपयोग किया और उसे पूर्ववर्ती मान $\mathrm{add}(x, y)$ पर लागू करके $\mathrm{add}(x, y+1)$ परिभाषित किया। अतः हम पुनरावर्ती परिभाषा को ऐसे एक फलन के पदों में दी हुई

समझ सकते हैं जिसे हम पूर्ववर्ती मान पर लागू करते हैं। फिर भी फलन को केवल पूर्ववर्ती मान पर नहीं, बल्कि x और y पर भी निर्भर होने देना हानिकर नहीं—और कभी-कभी आवश्यक—है। विचार करें:

$$\begin{aligned}\text{mult}(x, 0) &= 0\\ \text{mult}(x, y+1) &= \text{add}(\text{mult}(x, y), x)\end{aligned}$$

यह फलन mult की आदिम पुनरावर्ती परिभाषा है, जिसमें फलन add को पूर्ववर्ती मान $\text{mult}(x, y)$ और प्रथम तर्क x, दोनों पर लागू किया जाता है। यह फलन $\text{mult}(x, y)$ को भी सभी तर्कों x और y के लिए परिभाषित करता है। मसलन, $\text{mult}(2, 3)$ को $\text{mult}(2, 0)$, $\text{mult}(2, 1)$, $\text{mult}(2, 2)$ और $\text{mult}(2, 3)$ क्रमशः संगणित करके निर्धारित किया जाता है:

$$\begin{aligned}&\text{mult}(2, 0) = 0\\ &\text{mult}(2, 1) = \text{mult}(2, 0+1) = \text{add}(\text{mult}(2, 0), 2) = \text{add}(0, 2) = 2\\ &\text{mult}(2, 2) = \text{mult}(2, 1+1) = \text{add}(\text{mult}(2, 1), 2) = \text{add}(2, 2) = 4\\ &\text{mult}(2, 3) = \text{mult}(2, 2+1) = \text{add}(\text{mult}(2, 2), 2) = \text{add}(4, 2) = 6\end{aligned}$$

तब सामान्य प्रतिरूप यह है: किसी फलन $h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$ की आदिम पुनरावर्ती परिभाषा देने के लिए हम दो समीकरण देते हैं। पहला, $h(x_0, \ldots, x_{k-1}, 0)$ का मान h का संदर्भ लिए बिना परिभाषित करता है। दूसरा, $h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y+1)$ का मान $h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$, अन्य तर्कों x_0, ..., x_{k-1} और y के पदों में परिभाषित करता है। उस दूसरे समीकरण में h के केवल ठीक पूर्ववर्ती मान का उपयोग किया जा सकता है। यदि हम इन दोनों समीकरणों के दाहिने पक्षों से दी गई संक्रियाओं को स्वयं फलन f और g मानें, तो आदिम पुनरावर्तन द्वारा नया फलन h परिभाषित करने का सामान्य प्रतिरूप यह है:

$$\begin{aligned}h(x_0, \ldots, x_{k-1}, 0) &= f(x_0, \ldots, x_{k-1})\\ h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y+1) &= g(x_0, \ldots, x_{k-1}, y, h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y))\end{aligned}$$

add की स्थिति में $k = 1$ और $f(x_0) = x_0$ (तत्समक फलन) है, तथा $g(x_0, y, z) = z + 1$ (वह 3-स्थानी फलन जो अपने तीसरे तर्क का उत्तराधिकारी लौटाता है) है:

$$\begin{aligned}\text{add}(x_0, 0) &= f(x_0) = x_0\\ \text{add}(x_0, y+1) &= g(x_0, y, \text{add}(x_0, y)) = \text{succ}(\text{add}(x_0, y))\end{aligned}$$

mult की स्थिति में $f(x_0) = 0$ (सदा 0 लौटाने वाला अचर फलन) और $g(x_0, y, z) = \text{add}(z, x_0)$ (अपने अंतिम और प्रथम तर्कों का योग लौटाने वाला 3-स्थानी फलन) है:

$$\begin{aligned}\text{mult}(x_0, 0) &= f(x_0) = 0\\ \text{mult}(x_0, y+1) &= g(x_0, y, \text{mult}(x_0, y)) = \text{add}(\text{mult}(x_0, y), x_0)\end{aligned}$$

29.3 संयोजन

यदि f और g प्राकृतिक संख्याओं के दो एक-स्थानी फलन हैं, तो हम उनका संयोजन कर सकते हैं: $h(x) = f(g(x))$। तब नया फलन $h(x)$, फलनों f और g से *संयोजन* द्वारा परिभाषित होता है। हम इसे एक से अधिक तर्क वाले फलनों के लिए सामान्यीकृत करना चाहते हैं।

ऐसा करने का एक ढंग यह है: मान लें कि f कोई k-स्थानी फलन है और g_0, ..., g_{k-1} ऐसे k फलन हैं जो सभी n-स्थानी हैं। तब हम एक नया n-स्थानी फलन h इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

यदि f और सभी g_i संगणनीय हैं, तो h भी संगणनीय है। $h(x_0, \ldots, x_{n-1})$ संगणित करने के लिए पहले मान $y_i = g_i(x_0, \ldots, x_{n-1})$ को प्रत्येक $i = 0$, ..., $k-1$ के लिए संगणित करें। फिर इन मानों को f में देकर $h(x_0, \ldots, x_{k-1}) = f(y_0, \ldots, y_{k-1})$ संगणित करें।

कुछ विद्यमान फलनों का उपयोग करके नया फलन संगणित करने पर जो होता है, यह उसका अत्यधिक प्रतिबंधित अभिलक्षणन लग सकता है। एक बात तो यह है कि कभी-कभी हम किसी फलन के सभी तर्कों का उपयोग नहीं करते, जैसे हमने $g(x, y, z) = \text{succ}(z)$ को add की आदिम पुनरावर्ती परिभाषा में उपयोग के लिए परिभाषित किया था। मान लें कि हमें निम्न फलनों का उपयोग करने की अनुमति है:

$$P_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

फलनों P_i^k को *प्रक्षेपण* फलन कहते हैं: P_i^n एक n-स्थानी फलन है। तब g को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$g(x, y, z) = \text{succ}(P_2^3(x, y, z)).$$

यहाँ f की भूमिका 1-स्थानी फलन succ निभाता है, इसलिए $k = 1$ है। और हमारे पास एक 3-स्थानी फलन P_2^3 है जो g_0 की भूमिका निभाता है। परिणाम एक ऐसा 3-स्थानी फलन है जो तीसरे तर्क का उत्तराधिकारी लौटाता है।

प्रक्षेपण फलन तर्कों का क्रम बदलकर या उनकी पहचान करके भी नए फलन परिभाषित करने देते हैं। मसलन, फलन $h(x) = \text{add}(x, x)$ को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$h(x_0) = \text{add}(P_0^1(x_0), P_0^1(x_0)).$$

यहाँ $k = 2, n = 1$ है, $f(y_0, y_1)$ की भूमिका add निभाता है, और $g_0(x_0)$ तथा $g_1(x_0)$ दोनों की भूमिका $P_0^1(x_0)$ निभाता है, जो एक-स्थानी प्रक्षेपण फलन (अर्थात् तत्समक फलन) है।

यदि $f(y_0, y_1)$ हमारे पास पहले से कोई फलन है, तो हम फलन $h(x_0, x_1) = f(x_1, x_0)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$h(x_0, x_1) = f(P_1^2(x_0, x_1), P_0^2(x_0, x_1)).$$

यहाँ $k = 2$, $n = 2$ है, और g_0 तथा g_1 की भूमिकाएँ क्रमशः P_1^2 और P_0^2 निभाते हैं।

आपको यह चिंता भी हो सकती है कि g_0, ..., g_{k-1} सभी की स्थान-संख्या समान n होना आवश्यक है। (याद रखें कि किसी फलन की *स्थान-संख्या* उसके तर्कों की संख्या है; किसी n-स्थानी फलन की स्थान-संख्या n है।) किंतु प्रक्षेपण फलनों को जोड़ने से वांछित लचीलापन मिलता है। मसलन, मान लें कि f और g, 3-स्थानी फलन हैं तथा h वह 2-स्थानी फलन है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$h(x, y) = f(x, g(x, x, y), y).$$

प्रक्षेपण फलनों के साथ h की परिभाषा को इस प्रकार फिर लिखा जा सकता है:

$$h(x, y) = f(P_0^2(x, y), g(P_0^2(x, y), P_0^2(x, y), P_1^2(x, y)), P_1^2(x, y)).$$

तब h, f का P_0^2, l और P_1^2 के साथ संयोजन है, जहाँ

$$l(x, y) = g(P_0^2(x, y), P_0^2(x, y), P_1^2(x, y)),$$

अर्थात् l, g का P_0^2, P_0^2 और P_1^2 के साथ संयोजन है।

29.4 आदिम पुनरावर्ती फलन

आइए फिर याद करें कि आदिम पुनरावर्तन और संयोजन का उपयोग करके हम विद्यमान फलनों से नए फलन कैसे परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 29.1. मान लें कि f कोई k-स्थानी फलन ($k \geq 1$) है और g कोई $(k+2)$-स्थानी फलन है। *f और g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा* परिभाषित फलन वह $(k+1)$-स्थानी फलन h है जिसे निम्न समीकरण परिभाषित करते हैं:

$$h(x_0, \ldots, x_{k-1}, 0) = f(x_0, \ldots, x_{k-1})$$
$$h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y+1) = g(x_0, \ldots, x_{k-1}, y, h(x_0, \ldots, x_{k-1}, y))$$

परिभाषा 29.2. मान लें कि f कोई k-स्थानी फलन है और g_0, ..., g_{k-1} ऐसे k फलन हैं जो सभी n-स्थानी हैं। *f और g_0, ..., g_{k-1} से संयोजन द्वारा* परिभाषित फलन वह n-स्थानी फलन h है जिसे निम्न समीकरण परिभाषित करते हैं:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})).$$

succ और प्रक्षेपण फलनों

$$P_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i,$$

के अतिरिक्त, प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n और $i < n$ के लिए हम फलन $\mathrm{zero}(x) = 0$ को आदिम पुनरावर्ती फलनों में सम्मिलित करेंगे।

परिभाषा 29.3. आदिम पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय, $\mathbb{N}^n$ से $\mathbb{N}$ में फलनों का वह समुच्चय है जिसे निम्न उपवाक्यों से आगमनात्मक रूप से परिभाषित किया गया है:

1. zero आदिम पुनरावर्ती है।
2. succ आदिम पुनरावर्ती है।
3. प्रत्येक प्रक्षेपण फलन P_i^n आदिम पुनरावर्ती है।
4. यदि f कोई k-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलन है और g_0, ..., g_{k-1}, n-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलन हैं, तो f का g_0, ..., g_{k-1} के साथ संयोजन आदिम पुनरावर्ती है।
5. यदि f कोई k-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलन है और g कोई $k+2$-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलन है, तो f और g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित फलन आदिम पुनरावर्ती है।

अधिक संक्षेप में, आदिम पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय वह लघुतम समुच्चय है जिसमें zero, succ और प्रक्षेपण फलन P_j^n आते हैं और जो संयोजन तथा आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत है।

आदिम पुनरावर्ती फलनों के समुच्चय का वर्णन करने का एक अन्य ढंग उसे "चरणों" के पदों में परिभाषित करना है। S_0 से आरंभिक फलनों का समुच्चय निरूपित करें: zero, succ और प्रक्षेपण। ये चरण 0 के आदिम पुनरावर्ती फलन हैं। किसी चरण S_i के परिभाषित हो जाने पर S_{i+1} को उन सभी फलनों का समुच्चय मानें जो S_i में पहले से उपस्थित फलनों पर संयोजन अथवा आदिम पुनरावर्तन का एक अनुप्रयोग करके मिलते हैं। तब

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

सभी आदिम पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय है।

आइए सत्यापित करें कि add एक आदिम पुनरावर्ती फलन है।

प्रतिज्ञप्ति 29.4. *जोड़ फलन* $\mathrm{add}(x, y) = x + y$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हमारे पास add की आदिम पुनरावर्ती परिभाषा दो फलनों f और g के पदों में पहले से है, जो परिभाषा 29.1 के रूप से मेल खाती है:

$$\begin{aligned}\text{add}(x_0, 0) &= f(x_0) = x_0 \\ \text{add}(x_0, y+1) &= g(x_0, y, \text{add}(x_0, y)) = \text{succ}(\text{add}(x_0, y))\end{aligned}$$

add का आदिम पुनरावर्ती होना इस पर निर्भर है कि f और g भी आदिम पुनरावर्ती हों। $f(x_0) = x_0 = P_0^1(x_0)$ है और प्रक्षेपण फलन आदिम पुनरावर्ती माने जाते हैं, इसलिए f आदिम पुनरावर्ती है। फलन g वह त्रि-स्थानी फलन $g(x_0, y, z)$ है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$g(x_0, y, z) = \text{succ}(z).$$

इससे अभी यह नहीं मिलता कि g आदिम पुनरावर्ती है, क्योंकि g और succ ठीक एक ही फलन नहीं हैं: succ एक-स्थानी है, जबकि g को त्रि-स्थानी होना है। किंतु हम संयोजन द्वारा g को "औपचारिक रूप से" इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$g(x_0, y, z) = \text{succ}(P_2^3(x_0, y, z))$$

चूँकि succ और P_2^3 आदिम पुनरावर्ती फलन माने जाते हैं, इसलिए g भी ऐसा ही है, क्योंकि उसे आदिम पुनरावर्ती फलनों से संयोजन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है। □

प्रतिज्ञप्ति 29.5. *गुणा फलन* $\text{mult}(x, y) = x \cdot y$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

उदाहरण 29.6. आदिम पुनरावर्ती परिभाषा का हमारा सबसे पहला उदाहरण यह है:

$$\begin{aligned}h(0) &= 1 \\ h(y+1) &= 2 \cdot h(y).\end{aligned}$$

यह फलन परिभाषा 29.1 द्वारा अपेक्षित रूप में नहीं आ सकता, क्योंकि $k = 0$ है। परिभाषा में अचर 1 और 2 भी आते हैं। पहली समस्या से निपटने के लिए एक निष्क्रिय तर्क जोड़कर फलन h' परिभाषित करें:

$$\begin{aligned}h'(x_0, 0) &= f(x_0) = 1 \\ h'(x_0, y+1) &= g(x_0, y, h'(x_0, y)) = 2 \cdot h'(x_0, y).\end{aligned}$$

फलन $f(x_0) = 1$ को succ और zero से संयोजन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है: $f(x_0) = \text{succ}(\text{zero}(x_0))$। फलन g को $g'(z) = 2 \cdot z$ और प्रक्षेपणों से संयोजन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है:

$$g(x_0, y, z) = g'(P_2^3(x_0, y, z))$$

और फिर g' को संयोजन द्वारा इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$g'(z) = \text{mult}(g''(z), P_0^1(z))$$

और

$$g''(z) = \text{succ}(f(z)),$$

जहाँ f ऊपर वाला ही है: $f(z) = \text{succ}(\text{zero}(z))$। अब हमारे पास h' है, इसलिए फिर संयोजन का उपयोग करके $h(y) = h'(P_0^1(y), P_0^1(y))$ रखें। इससे पता चलता है कि h को मूल फलनों से संयोजनों और आदिम पुनरावर्तनों के एक अनुक्रम द्वारा परिभाषित किया जा सकता है; अतः h आदिम पुनरावर्ती है।

29.5 आदिम पुनरावर्तन की संकेत-पद्धतियाँ

आदिम पुनरावर्ती फलनों का यथार्थ आगमनात्मक वर्णन होने का एक लाभ यह है कि हम उनका व्यवस्थित ढंग से वर्णन कर सकते हैं। मसलन, हम प्रत्येक ऐसे फलन को इस प्रकार एक "संकेत" दे सकते हैं। शून्य, उत्तराधिकारी और प्रक्षेपणों के लिए क्रमशः zero, succ और P_i^n चिह्नों का उपयोग करें। अब मान लें कि h को किसी k-स्थानी फलन f और n-स्थानी फलनों g_0, ..., g_{k-1} से संयोजन द्वारा परिभाषित किया गया है, और हमने बाद वाले फलनों को संकेत F, G_0, ..., G_{k-1} दिए हैं। तब एक नए चिह्न $\text{Comp}_{k,n}$ का उपयोग करके हम फलन h को $\text{Comp}_{k,n}[F, G_0, \ldots, G_{k-1}]$ से निरूपित कर सकते हैं।

आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित फलनों के लिए हम अनुरूप संकेतों का उपयोग कर सकते हैं। मान लें कि $(k+1)$-स्थानी फलन h को k-स्थानी फलन f और $(k+2)$-स्थानी फलन g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित किया गया है, और f तथा g को क्रमशः F और G संकेत दिए गए हैं। तब h को दिया गया संकेत $\text{Rec}_k[F, G]$ है।

याद करें कि जोड़ फलन को आदिम पुनरावर्तन द्वारा इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$\begin{aligned} \text{add}(x_0, 0) &= P_0^1(x_0) = x_0 \\ \text{add}(x_0, y+1) &= \text{succ}(P_2^3(x_0, y, \text{add}(x_0, y))) = \text{add}(x_0, y) + 1 \end{aligned}$$

यहाँ f की भूमिका P_0^1 और g की भूमिका $\text{succ}(P_2^3(x_0, y, z))$ निभाता है। बाद वाले को संकेत $\text{Comp}_{1,3}[\text{succ}, P_2^3]$ दिया जाता है, क्योंकि वह 1-स्थानी फलन succ और 3-स्थानी फलन P_2^3 से संयोजन द्वारा फलन परिभाषित करने का परिणाम है। इस व्यवस्था में हम जोड़ फलन को इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं:

$$\text{Rec}_1[P_0^1, \text{Comp}_{1,3}[\text{succ}, P_2^3]].$$

ये संकेत कभी-कभी उपयोगी सिद्ध होते हैं, मसलन आदिम पुनरावर्ती फलनों को परिगणित करते समय।

29.6 आदिम पुनरावर्ती फलन संगणनीय हैं

मान लें कि कोई फलन h आदिम पुनरावर्तन द्वारा इस प्रकार परिभाषित है:

$$\begin{aligned} h(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) &= g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{aligned}$$

और मान लें कि फलन f तथा g संगणनीय हैं। ($\vec{x}$ का उपयोग हम x_0, ..., x_{k-1} को संक्षेप में लिखने के लिए करते हैं।) तब $h(\vec{x}, 0)$ को स्पष्टतः संगणित किया जा सकता है, क्योंकि वह केवल $f(\vec{x})$ है, जिसे हमने संगणनीय माना है। फिर $h(\vec{x}, 1)$ को भी संगणित किया जा सकता है, क्योंकि $1 = 0 + 1$ और इसलिए $h(\vec{x}, 1)$ केवल यह है:

$$h(\vec{x}, 1) = g(\vec{x}, 0, h(\vec{x}, 0)) = g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})).$$

हम इसी प्रकार आगे बढ़कर इन्हें संगणित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned} h(\vec{x}, 2) &= g(\vec{x}, 1, h(\vec{x}, 1)) = g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x}))) \\ h(\vec{x}, 3) &= g(\vec{x}, 2, h(\vec{x}, 2)) = g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})))) \\ h(\vec{x}, 4) &= g(\vec{x}, 3, h(\vec{x}, 3)) = g(\vec{x}, 3, g(\vec{x}, 2, g(\vec{x}, 1, g(\vec{x}, 0, f(\vec{x})))))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

अतः सामान्यतः $h(\vec{x}, y)$ संगणित करने के लिए $h(\vec{x}, 0)$, $h(\vec{x}, 1)$, ... को क्रमशः संगणित करते जाएँ, जब तक हम $h(\vec{x}, y)$ तक न पहुँचें।

इस प्रकार, यदि फलन f और g संगणनीय हैं, तो आदिम पुनरावर्ती परिभाषा एक नया संगणनीय फलन देती है। इसी तरह, यदि फलन f और g_i संगणनीय हैं, तो फलनों के संयोजन से भी संगणनीय फलन मिलता है।

चूँकि मूल फलन zero, succ और P_i^n संगणनीय हैं, और संयोजन तथा आदिम पुनरावर्तन संगणनीय फलनों से संगणनीय फलन देते हैं, इसलिए प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन संगणनीय है।

29.7 आदिम पुनरावर्ती फलनों के उदाहरण

हमारे पास आदिम पुनरावर्ती फलनों के कुछ उदाहरण पहले से हैं: जोड़ और गुणा फलन add तथा mult। तत्समक फलन $\mathrm{id}(x) = x$ आदिम पुनरावर्ती है, क्योंकि वह केवल P_0^1 है। अचर फलन $\mathrm{const}_n(x) = n$ आदिम पुनरावर्ती है, क्योंकि उसे zero और succ से क्रमिक संयोजन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है। यह तब उपयोगी है जब हम आदिम पुनरावर्ती परिभाषाओं में अचरों का उपयोग करना चाहते हैं। मसलन, यदि हम फलन $f(x) = 2 \cdot x$ परिभाषित करना चाहें, तो उसे $\mathrm{const}_n(x)$ और गुणा से संयोजन द्वारा $f(x) = \mathrm{mult}(\mathrm{const}_2(x), P_0^1(x))$ के रूप में पा सकते हैं। आगे से हम इस युक्ति का उपयोग करेंगे।

प्रतिज्ञप्ति 29.7. *घातांक फलन* $\exp(x, y) = x^y$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हम $\exp$ को आदिम पुनरावर्ती रूप से इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned} \exp(x, 0) &= 1 \\ \exp(x, y+1) &= \mathrm{mult}(x, \exp(x, y)). \end{aligned}$$

ठीक-ठीक कहें तो यह आदिम पुनरावर्ती फलनों से पुनरावर्ती परिभाषा नहीं है। किंतु औपचारिक रूप से हमारे पास है:

$$\begin{aligned} \exp(x, 0) &= f(x) \\ \exp(x, y+1) &= g(x, y, \exp(x, y)). \end{aligned}$$

जहाँ

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{succ}(\mathrm{zero}(x)) = 1 \\ g(x, y, z) &= \mathrm{mult}(P_0^3(x, y, z), P_2^3(x, y, z)) = x \cdot z \end{aligned}$$

और इस प्रकार f तथा g आदिम पुनरावर्ती फलनों से संयोजन द्वारा परिभाषित हैं। □

प्रतिज्ञप्ति 29.8. *निम्न प्रकार परिभाषित पूर्ववर्ती फलन* $\mathrm{pred}(y)$

$$\mathrm{pred}(y) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } y = 0 \\ y - 1 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

आदिम पुनरावर्ती है।

प्रमाण. ध्यान दें कि

$$\begin{aligned} \mathrm{pred}(0) &= 0 \text{ और} \\ \mathrm{pred}(y+1) &= y. \end{aligned}$$

यह लगभग आदिम पुनरावर्ती परिभाषा है। ठीक-ठीक कहें तो यह आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषा के प्रतिरूप में नहीं आती, क्योंकि उस प्रतिरूप को कम-से-कम एक अतिरिक्त तर्क x चाहिए। यह इस अर्थ में भी असामान्य है कि $\mathrm{pred}(y)$

का वास्तव में उपयोग नहीं होता जब $\text{pred}(y+1)$ को परिभाषित किया जाता है। किंतु पहले हम $\text{pred}'(x,y)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}\text{pred}'(x,0) &= \text{zero}(x) = 0,\\ \text{pred}'(x,y+1) &= P_1^3(x,y,\text{pred}'(x,y)) = y.\end{aligned}$$

और फिर उससे संयोजन द्वारा pred परिभाषित कर सकते हैं, मसलन $\text{pred}(x) = \text{pred}'(\text{zero}(x), P_0^1(x))$ के रूप में। □

प्रतिज्ञप्ति 29.9. *क्रमगुणित फलन* $\text{fac}(x) = x\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot x$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. स्पष्ट आदिम पुनरावर्ती परिभाषा यह है:

$$\begin{aligned}\text{fac}(0) &= 1\\ \text{fac}(y+1) &= \text{fac}(y) \cdot (y+1).\end{aligned}$$

औपचारिक रूप से हमें पहले एक द्वि-स्थानी फलन h परिभाषित करना है:

$$\begin{aligned}h(x,0) &= \text{const}_1(x)\\ h(x,y+1) &= g(x,y,h(x,y))\end{aligned}$$

जहाँ $g(x,y,z) = \text{mult}(P_2^3(x,y,z), \text{succ}(P_1^3(x,y,z)))$ है, और फिर रखें:

$$\text{fac}(y) = h(P_0^1(y), P_0^1(y)) = h(y,y).$$

आगे से हम कुछ अधिक अनौपचारिक रहेंगे और संयोजन तथा आदिम पुनरावर्तन द्वारा पूर्ण औपचारिक परिभाषाएँ नहीं देंगे। □

प्रतिज्ञप्ति 29.10. *निम्न प्रकार परिभाषित छँटा हुआ घटाव* $x \dot{-} y$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \textit{यदि}\ x < y \\ x - y & \textit{अन्यथा} \end{cases}$$

आदिम पुनरावर्ती है।

प्रमाण. हमारे पास है:

$$\begin{aligned}x \dot{-} 0 &= x\\ x \dot{-} (y+1) &= \text{pred}(x \dot{-} y)\end{aligned}$$ □

प्रतिज्ञप्ति 29.11. x *और* y *के बीच की दूरी* $|x-y|$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हमारे पास $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ है; अतः दूरी को $+$ और $\dot{-}$ से संयोजन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है, जो आदिम पुनरावर्ती हैं। □

प्रतिज्ञप्ति 29.12. x *और* y *का अधिकतम* $\max(x,y)$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हम $\max(x, y)$ को $+$ और $\dot{-}$ से संयोजन द्वारा इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\max(x, y) = x + (y \dot{-} x).$$

यदि x अधिकतम है, अर्थात् $x \geq y$, तो $y \dot{-} x = 0$, इसलिए $x + (y \dot{-} x) = x + 0 = x$। यदि y अधिकतम है, तो $y \dot{-} x = y - x$, और इसलिए $x + (y \dot{-} x) = x + (y - x) = y$। □

प्रतिज्ञप्ति 29.13. *x और y का न्यूनतम $\min(x, y)$ आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 29.14. *आदिम पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय निम्न दो संक्रियाओं के अधीन संवृत है:*

1. *परिमित योग: यदि $f(\vec{x}, z)$ आदिम पुनरावर्ती है, तो निम्न फलन भी ऐसा ही है:*

$$g(\vec{x}, y) = \sum_{z=0}^{y} f(\vec{x}, z).$$

2. *परिमित गुणनफल: यदि $f(\vec{x}, z)$ आदिम पुनरावर्ती है, तो निम्न फलन भी ऐसा ही है:*

$$h(\vec{x}, y) = \prod_{z=0}^{y} f(\vec{x}, z).$$

प्रमाण. मसलन, परिमित योग निम्न समीकरणों से पुनरावर्ती रूप में परिभाषित होते हैं:

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}, 0) \\ g(\vec{x}, y+1) &= g(\vec{x}, y) + f(\vec{x}, y+1). \end{aligned}$$

□

29.8 आदिम पुनरावर्ती संबंध

परिभाषा 29.15. किसी संबंध $R(\vec{x})$ को आदिम पुनरावर्ती कहते हैं यदि उसका अभिलाक्षणिक फलन

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } R(\vec{x}) \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

आदिम पुनरावर्ती हो।

दूसरे शब्दों में, जब हम किसी आदिम पुनरावर्ती संबंध $R(\vec{x})$ की बात करते हैं, तो हमारा आशय $\chi_R(\vec{x}) = 1$ रूप के संबंध से होता है, जहाँ χ_R ऐसा आदिम पुनरावर्ती फलन है जो किसी भी निवेश पर 1 या 0 लौटाता है। मसलन, संबंध $\text{IsZero}(x)$, जो तभी और केवल तभी मान्य है जब $x = 0$, उस फलन χ_{IsZero} के संगत है जिसे आदिम पुनरावर्तन से इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{IsZero}}(0) &= 1, \\ \chi_{\text{IsZero}}(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

यह स्पष्ट होना चाहिए कि संबंधों का अन्य आदिम पुनरावर्ती फलनों के साथ संयोजन किया जा सकता है। अतः निम्न भी आदिम पुनरावर्ती हैं:

1. समता संबंध $x = y$, जिसे $\text{IsZero}(|x - y|)$ से परिभाषित किया गया है।
2. छोटा-या-बराबर संबंध $x \leq y$, जिसे $\text{IsZero}(x \dot{-} y)$ से परिभाषित किया गया है।

प्रतिज्ञप्ति 29.16. *आदिम पुनरावर्ती संबंधों का समुच्चय बूलीय संक्रियाओं के अधीन संवृत है; अर्थात् यदि $P(\vec{x})$ और $Q(\vec{x})$ आदिम पुनरावर्ती हैं, तो निम्न भी आदिम पुनरावर्ती हैं:*

1. $\neg P(\vec{x})$
2. $P(\vec{x}) \wedge Q(\vec{x})$
3. $P(\vec{x}) \vee Q(\vec{x})$
4. $P(\vec{x}) \to Q(\vec{x})$

प्रमाण. मान लें कि $P(\vec{x})$ और $Q(\vec{x})$ आदिम पुनरावर्ती हैं, अर्थात् उनके अभिलाक्षणिक फलन χ_P और χ_Q ऐसे हैं। हमें दिखाना है कि $\neg P(\vec{x})$ इत्यादि के अभिलाक्षणिक फलन भी आदिम पुनरावर्ती हैं।

$$\chi_{\neg P}(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } \chi_P(\vec{x}) = 1 \\ 1 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हम $\chi_{\neg P}(\vec{x})$ को $1 \dot{-} \chi_P(\vec{x})$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

$$\chi_{P \wedge Q}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \chi_P(\vec{x}) = \chi_Q(\vec{x}) = 1 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हम $\chi_{P \wedge Q}(\vec{x})$ को $\chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x})$ अथवा $\min(\chi_P(\vec{x}), \chi_Q(\vec{x}))$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। इसी प्रकार,

$$\chi_{P \vee Q}(\vec{x}) = \max(\chi_P(\vec{x}), \chi_Q(\vec{x})) \text{ और}$$
$$\chi_{P \to Q}(\vec{x}) = \max(1 \dot{-} \chi_P(\vec{x}), \chi_Q(\vec{x})).$$

□

प्रतिज्ञप्ति 29.17. *आदिम पुनरावर्ती संबंधों का समुच्चय परिबद्ध परिमाणीकरण के अधीन संवृत है; अर्थात् यदि $R(\vec{x}, z)$ कोई आदिम पुनरावर्ती संबंध है, तो निम्न संबंध भी ऐसे हैं:*

$$(\forall z < y)\ R(\vec{x}, z) \text{ और}$$
$$(\exists z < y)\ R(\vec{x}, z).$$

$(\forall z < y)\ R(\vec{x}, z)$, $\vec{x}$ और y के लिए तभी और केवल तभी मान्य है जब $R(\vec{x}, z)$ प्रत्येक z के लिए मान्य हो जो y से छोटा है; और $(\exists z < y)\ R(\vec{x}, z)$ के लिए भी इसी प्रकार।

प्रमाण. परिपाटी से हम $(\forall z < 0)\ R(\vec{x}, z)$ को सत्य मानते हैं (इस सरल कारण से कि कोई z, 0 से छोटा नहीं है) और $(\exists z < 0)\ R(\vec{x}, z)$ को असत्य मानते हैं। कोई परिबद्ध सार्विक परिमाणक ठीक परिमित गुणनफल या पुनरावृत्त न्यूनतम की तरह काम करता है; अर्थात् यदि $P(\vec{x}, y) \Leftrightarrow (\forall z < y)\ R(\vec{x}, z)$, तो $\chi_P(\vec{x}, y)$ को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\chi_P(\vec{x}, 0) = 1$$
$$\chi_P(\vec{x}, y + 1) = \min(\chi_P(\vec{x}, y), \chi_R(\vec{x}, y)).$$

परिबद्ध अस्तित्वात्मक परिमाणीकरण को इसी प्रकार $\max$ का उपयोग करके परिभाषित किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, तुल्यता $(\exists z < y)\ R(\vec{x}, z) \leftrightarrow \neg(\forall z < y)\ \neg R(\vec{x}, z)$ का उपयोग करके उसे परिबद्ध सार्विक परिमाणीकरण से परिभाषित किया जा सकता है। ध्यान दें कि, मसलन, $(\exists x \leq y)\ \ldots x \ldots$ रूप का परिबद्ध परिमाणक $(\exists x < y + 1)\ \ldots x \ldots$ के तुल्य है। □

एक अन्य उपयोगी आदिम पुनरावर्ती फलन सप्रतिबंध फलन $\mathrm{cond}(x, y, z)$ है, जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$\mathrm{cond}(x, y, z) = \begin{cases} y & \text{यदि } x = 0 \\ z & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

इसे पुनरावर्ती रूप से इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$\begin{aligned} \mathrm{cond}(0, y, z) &= y, \\ \mathrm{cond}(x+1, y, z) &= z. \end{aligned}$$

इसका उपयोग आदिम पुनरावर्ती संबंधों से आदिम पुनरावर्ती फलनों की प्रकरणानुसार परिभाषाओं को उचित ठहराने के लिए किया जा सकता है:

प्रतिज्ञप्ति 29.18. *यदि $g_0(\vec{x})$, ..., $g_m(\vec{x})$ आदिम पुनरावर्ती फलन हैं और $R_0(\vec{x})$, ..., $R_{m-1}(\vec{x})$ आदिम पुनरावर्ती संबंध हैं, तो निम्न प्रकार परिभाषित फलन f*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_0(\vec{x}) & \textit{यदि } R_0(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) & \textit{यदि } R_1(\vec{x}) \textit{ और } R_0(\vec{x}) \textit{ नहीं} \\ \vdots & \\ g_{m-1}(\vec{x}) & \textit{यदि } R_{m-1}(\vec{x}) \textit{ और पिछले में से कोई मान्य नहीं} \\ g_m(\vec{x}) & \textit{अन्यथा} \end{cases}$$

भी आदिम पुनरावर्ती है।

प्रमाण. जब $m = 1$, तब यह केवल निम्न प्रकार परिभाषित फलन है:

$$f(\vec{x}) = \mathrm{cond}(\chi_{\neg R_0}(\vec{x}), g_0(\vec{x}), g_1(\vec{x})).$$

m, 1 से बड़ा होने पर इस रूप की परिभाषाओं का संयोजन भर करना होता है। □

29.9 परिबद्ध न्यूनीकरण

किसी गुण अथवा संबंध P को संतुष्ट करने वाली लघुतम संख्या के रूप में किसी फलन को परिभाषित करना प्रायः उपयोगी होता है। यदि P निर्णेय है, तो हम सभी संभव संख्याएँ 0, 1, 2, ... आज़माते हुए, P को संतुष्ट करने वाली लघुतम संख्या मिलने तक, इस फलन को सरलता से संगणित कर सकते हैं। इस प्रकार की अपरिबद्ध खोज हमें आदिम पुनरावर्ती फलनों के क्षेत्र से बाहर ले जाती है। किंतु यदि हमारी रुचि केवल किसी *स्वतंत्र रूप से दिए गए परिबंध से छोटी* लघुतम संख्या में है, तो हम आदिम पुनरावर्ती क्षेत्र में बने रहते हैं। दूसरे शब्दों में, और कुछ अधिक सामान्यतः, मान लें कि हमारे पास कोई आदिम पुनरावर्ती संबंध $R(x, z)$ है। उस फलन पर विचार करें जो x और y को उस लघुतम $z < y$ पर भेजता है जिसके लिए $R(x, z)$ है। $R(x, 0)$, $R(x, 1)$, ..., $R(x, y-1)$ को जाँचकर इसे भी संगणित किया जा सकता है। किंतु यह आदिम पुनरावर्ती क्यों है?

प्रतिज्ञप्ति 29.19. *यदि $R(\vec{x}, z)$ आदिम पुनरावर्ती है, तो फलन $m_R(\vec{x}, y)$ भी आदिम पुनरावर्ती है, जो ऐसा कोई मान होने पर उस लघुतम z को लौटाता है जो y से छोटा है और जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ मान्य है, तथा अन्यथा y लौटाता है। हम फलन m_R को इस प्रकार लिखेंगे:*

$$(\min z < y)\, R(\vec{x}, z),$$

प्रमाण. ध्यान दें कि ऐसा कोई $z < 0$ नहीं हो सकता जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ हो, क्योंकि कोई $z < 0$ होता ही नहीं। अतः $m_R(\vec{x}, 0) = 0$।

जब परिबंध $y + 1$ रूप का हो, तब हमारे पास तीन प्रकरण हैं:

1. ऐसा कोई $z < y$ है जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ मान्य है; इस स्थिति में $m_R(\vec{x}, y + 1) = m_R(\vec{x}, y)$।
2. ऐसा कोई $z < y$ नहीं है, किंतु $R(\vec{x}, y)$ मान्य है; तब $m_R(\vec{x}, y + 1) = y$।
3. ऐसा कोई $z < y + 1$ नहीं है जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ मान्य हो; तब $m_R(\vec{z}, y + 1) = y + 1$।

अतः हम $m_R(\vec{x}, 0)$ को आदिम पुनरावर्तन द्वारा इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$m_R(\vec{x}, 0) = 0$$
$$m_R(\vec{x}, y+1) = \begin{cases} m_R(\vec{x}, y) & \text{यदि } m_R(\vec{x}, y) \neq y \\ y & \text{यदि } m_R(\vec{x}, y) = y \text{ और } R(\vec{x}, y) \\ y + 1 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

ध्यान दें कि ऐसा $z < y$ है जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ मान्य हो, तभी और केवल तभी जब $m_R(\vec{x}, y) \neq y$। □

29.10 अभाज्य संख्याएँ

परिबद्ध परिमाणीकरण और परिबद्ध न्यूनीकरण हमें यह दिखाने के लिए पर्याप्त साधन देते हैं कि स्वाभाविक फलन और संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं। मसलन, संबंध "x, y को विभाजित करता है" पर विचार करें, जिसे $x \mid y$ लिखते हैं। संबंध $x \mid y$ तब मान्य है जब y का x से भाग शेष के बिना संभव हो, अर्थात् जब y, x का कोई पूर्णांक गुणज हो। (यदि यह मान्य नहीं है, अर्थात् x से y को भाग देने पर शेष > 0 है, तो हम $x \nmid y$ लिखते हैं।) दूसरे शब्दों में, $x \mid y$ तभी और केवल तभी जब किसी z के लिए $x \cdot z = y$ हो। स्पष्टतः ऐसा कोई z, यदि वह अस्तित्व में है, तो $\leq y$ होना चाहिए। अतः $x \mid y$ तभी और केवल तभी जब किसी $z \leq y$ के लिए $x \cdot z = y$ हो। हम संबंध $x \mid y$ को $=$ और गुणा से परिबद्ध अस्तित्वात्मक परिमाणीकरण द्वारा इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$x \mid y \Leftrightarrow (\exists z \leq y)\ (x \cdot z) = y.$$

इस प्रकार हमने दिखाया कि $x \mid y$ आदिम पुनरावर्ती है।

कोई प्राकृतिक संख्या x *अभाज्य* है यदि वह न 0 है, न 1, और केवल 1 तथा स्वयं से विभाज्य है। दूसरे शब्दों में, अभाज्य संख्याएँ ऐसी हैं कि जब भी $y \mid x$ हो, तब या तो $y = 1$ अथवा $y = x$। यह जाँचने के लिए कि x अभाज्य है या नहीं, हमें केवल $y \mid x$ की जाँच उन सभी $y \leq x$ के लिए करनी है, क्योंकि यदि $y > x$, तो स्वतः $y \nmid x$। अतः संबंध $\text{Prime}(x)$, जो तभी और केवल तभी मान्य है जब x अभाज्य हो, इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\text{Prime}(x) \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge (\forall y \leq x)\ (y \mid x \rightarrow y = 1 \vee y = x)$$

और इसलिए आदिम पुनरावर्ती है।

अभाज्य संख्याएँ $2, 3, 5, 7, 11$ इत्यादि हैं। उस फलन $p(x)$ पर विचार करें जो इस अनुक्रम की xवीं अभाज्य संख्या लौटाता है, अर्थात् $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$ इत्यादि। (सुविधा के लिए हम प्रायः $p(x)$ को p_x लिखेंगे: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$ इत्यादि।)

यदि हमारे पास ऐसा फलन nextPrime(x) हो जो x से बड़ी पहली अभाज्य संख्या लौटाता है, तो p को आदिम पुनरावर्तन का उपयोग करके सरलता से परिभाषित किया जा सकता है:

$$p(0) = 2$$
$$p(x+1) = \text{nextPrime}(p(x))$$

चूँकि $\text{nextPrime}(x)$ वह लघुतम y है जिसके लिए $y > x$ और y अभाज्य है, उसे अपरिबद्ध खोज द्वारा सरलता से संगणित किया जा सकता है। किंतु यूक्लिड के एक परिणाम के कारण उसे परिबद्ध न्यूनीकरण द्वारा भी परिभाषित किया जा सकता है: x और $x\,! + 1$ के बीच सदा कोई अभाज्य संख्या होती है।

$$\text{nextPrime(x)} = (\min y \leq x\,! + 1)\,(y > x \wedge \text{Prime}(y)).$$

इससे पता चलता है कि $\text{nextPrime}(x)$ और इसलिए $p(x)$ (केवल संगणनीय ही नहीं, बल्कि) आदिम पुनरावर्ती हैं।

(यदि आप जानना चाहें, तो यूक्लिड के प्रमेय का एक संक्षिप्त प्रमाण यह है। मान लें कि p_n, $\leq x$ वाली सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है और गुणनफल $p = p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_n$ पर विचार करें, जो सभी अभाज्यों $\leq x$ का गुणनफल है। या तो $p + 1$ अभाज्य है, या x और $p + 1$ के बीच कोई अभाज्य है। क्यों? मान लें कि $p + 1$ अभाज्य नहीं है। तब कोई अभाज्य संख्या $q \mid p+1$ ऐसी है कि $q < p+1$। अभाज्यों $\leq x$ में से कोई भी $p+1$ को विभाजित नहीं करता। (p की परिभाषा से प्रत्येक अभाज्य $p_i \leq x$, p को विभाजित करता है, अर्थात् शेष 0 रहता है। इसलिए प्रत्येक अभाज्य $p_i \leq x$, $p + 1$ को शेष 1 के साथ विभाजित करता है, और अतः $p_i \nmid p + 1$।) इसलिए q ऐसा अभाज्य है जो $> x$ और $< p + 1$ है। और $p \leq x\,!$, इसलिए कोई अभाज्य $> x$ और $\leq x\,! + 1$ है।)

29.11 अनुक्रम

आदिम पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय उल्लेखनीय रूप से सुदृढ़ है। किंतु *अनुक्रमों* को सँभालने का पर्याप्त साधन विकसित कर लेने पर हम और भी अधिक कर पाएँगे। हम प्राकृतिक संख्याओं के परिमित अनुक्रमों की प्राकृतिक संख्याओं से निम्न प्रकार पहचान करेंगे: अनुक्रम $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$ उस संख्या के संगत है:

$$p_0^{a_0+1} \cdot p_1^{a_1+1} \cdot p_2^{a_2+1} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k+1}.$$

हम घातांकों में एक जोड़ते हैं, ताकि यह सुनिश्चित हो कि, मसलन, अनुक्रमों $\langle 2, 7, 3\rangle$ और $\langle 2, 7, 3, 0, 0\rangle$ के संख्यात्मक कूट भिन्न हों। हम 0 और 1, दोनों को रिक्त अनुक्रम का कूट मान सकते हैं; निश्चितता के लिए Λ से 0 निरूपित करें।

अनुक्रमों का यह कूटन इसलिए काम करता है कि अंकगणित का तथाकथित मूल प्रमेय मान्य है: प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n \geq 2$ को ठीक एक ढंग से निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$n = p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k}$$

जहाँ $a_k \geq 1$। यह सुनिश्चित करता है कि प्रतिचित्रण $\langle\rangle(a_0, \ldots, a_k) = \langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ एकैकी है: भिन्न अनुक्रम भिन्न संख्याओं पर भेजे जाते हैं; प्रत्येक संख्या के संगत अधिकतम एक अनुक्रम है।

अब हम दिखाएँगे कि किसी अनुक्रम की लंबाई निर्धारित करने, उसका iवाँ अवयव निर्धारित करने, किसी अनुक्रम के अंत में एक अवयव जोड़ने और दो अनुक्रमों का संलग्नन करने की संक्रियाएँ सभी आदिम पुनरावर्ती हैं।

प्रतिज्ञप्ति 29.20. *फलन* $\text{len}(s)$*, जो अनुक्रम* s *की लंबाई लौटाता है, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. $R(i, s)$ को निम्न प्रकार परिभाषित संबंध मानें:

$$R(i, s) \text{ तभी और केवल तभी जब } p_i \mid s \wedge p_{i+1} \nmid s.$$

R स्पष्टतः आदिम पुनरावर्ती है। जब भी s किसी अरिक्त अनुक्रम का कूट हो, अर्थात्

$$s = p_0^{a_0+1} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k+1},$$

तब $R(i, s)$ मान्य है यदि p_i ऐसा सबसे बड़ा अभाज्य है कि $p_i \mid s$, अर्थात् $i = k$। इस प्रकार s की लंबाई $i + 1$ तभी और केवल तभी है जब p_i, s को विभाजित करने वाला सबसे बड़ा अभाज्य हो; इसलिए हम रख सकते हैं:

$$\text{len}(s) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } s = 0 \text{ अथवा } s = 1 \\ 1 + (\min i < s)\, R(i, s) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हम यहाँ परिबद्ध न्यूनीकरण का उपयोग कर सकते हैं, क्योंकि केवल एक i ऐसा है जो $R(i, s)$ को संतुष्ट करता है जब s किसी अनुक्रम का कूट हो, और यदि i अस्तित्व में है तो वह स्वयं s से छोटा है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 29.21. *फलन* $\text{append}(s, a)$*, जो* a *को अनुक्रम* s *के अंत में जोड़ने का परिणाम लौटाता है, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. append को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\text{append}(s, a) = \begin{cases} 2^{a+1} & \text{यदि } s = 0 \text{ अथवा } s = 1 \\ s \cdot p_{\text{len}(s)}^{a+1} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

$\square$

प्रतिज्ञप्ति 29.22. *फलन* $\text{element}(s, i)$*, जो* i *क्रमांक का अवयव* s *में से लौटाता है (जहाँ आरंभिक अवयव को* 0*वाँ कहते हैं), अथवा* 0 *लौटाता है यदि* i*,* s *की लंबाई से बड़ा या उसके बराबर हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. ध्यान दें कि a, i क्रमांक पर s का अवयव तभी और केवल तभी है जब p_i^{a+1}, p_i की वह महत्तम घात हो जो s को विभाजित करती है, अर्थात् $p_i^{a+1} \mid s$ किंतु $p_i^{a+2} \nmid s$। अतः:

$$\text{element}(s, i) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } i \geq \text{len}(s) \\ (\min a < s)\,(p_i^{a+2} \nmid s) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

$\square$

ऊपर परिभाषित फलनों के औपचारिक नामों का उपयोग करने के बदले हम अधिक संक्षिप्त संकेत-पद्धति प्रस्तुत करते हैं। हम $(s)_i$ लिखेंगे, न कि $\text{element}(s, i)$, और निम्न को संक्षेप में लिखने के लिए $\langle s_0, \ldots, s_k \rangle$ का उपयोग करेंगे:

$$\text{append}(\text{append}(\ldots \text{append}(\Lambda, s_0) \ldots), s_k).$$

ध्यान दें कि यदि s की लंबाई k है, तो s के अवयव $(s)_0$, ..., $(s)_{k-1}$ हैं।

प्रतिज्ञप्ति 29.23. *दो अनुक्रमों का संलग्नन करने वाला फलन* $\text{concat}(s, t)$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हमें ऐसा फलन concat चाहिए जिसमें यह गुण हो:

$$\text{concat}(\langle a_0, \ldots, a_k \rangle, \langle b_0, \ldots, b_l \rangle) = \langle a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l \rangle.$$

हम एक "सहायक" फलन $\text{hconcat}(s, t, n)$ का उपयोग करेंगे, जो प्रथम n अवयव t से लेकर s के साथ संलग्न करता है। इस फलन को आदिम पुनरावर्तन द्वारा इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} \text{hconcat}(s, t, 0) &= s \\ \text{hconcat}(s, t, n+1) &= \text{append}(\text{hconcat}(s, t, n), (t)_n) \end{aligned}$$

तब हम concat को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\text{concat}(s, t) = \text{hconcat}(s, t, \text{len}(t)).$$

$\square$

हम $s \frown t$ लिखेंगे, न कि $\text{concat}(s, t)$।

किसी अनुक्रम के संख्यात्मक कूट को उसकी लंबाई और उसके महत्तम अवयव के पदों में परिबद्ध कर पाना हमारे लिए उपयोगी होगा। मान लें कि s, लंबाई k का ऐसा अनुक्रम है जिसका प्रत्येक अवयव किसी संख्या x से छोटा या उसके

बराबर है। तब s के अधिकतम k अभाज्य गुणनखंड हैं, प्रत्येक अधिकतम p_{k-1} है, और प्रत्येक की घात अधिकतम $x+1$ है, s के अभाज्य गुणनखंडन में। दूसरे शब्दों में, यदि हम परिभाषित करें:

$$\text{sequenceBound}(x,k) = p_{k-1}^{k\cdot(x+1)},$$

तो ऊपर वर्णित अनुक्रम s का संख्यात्मक कूट अधिकतम $\text{sequenceBound}(x,k)$ है।

अनुक्रमों पर ऐसा परिबंध होने से हमें परिबद्ध खोज का उपयोग करके नए फलन परिभाषित करने का ढंग मिलता है। मसलन, हम परिबद्ध खोज का उपयोग करके concat परिभाषित कर सकते हैं। हमें केवल उस वस्तु (संलग्न अनुक्रम की संख्या) का आदिम पुनरावर्ती *विनिर्देश* और यह परिबंध लिखना है कि खोज कहाँ तक करनी है। निम्न काम करता है:

$$\begin{aligned}\text{concat}(s,t) = (\min v < \text{sequenceBound}(s+t, \text{len}(s)+\text{len}(t)))\\ (\text{len}(v) = \text{len}(s)+\text{len}(t) \wedge\\ (\forall i < \text{len}(s))\ ((v)_i = (s)_i) \wedge\\ (\forall j < \text{len}(t))\ ((v)_{\text{len}(s)+j} = (t)_j))\end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 29.24. *फलन* $\text{subseq}(s,i,n)$*, जो* s *का लंबाई* n *का वह उपानुक्रम लौटाता है जो* i*वें अवयव से आरंभ होता है, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

29.12 वृक्ष

कभी-कभी वृक्षों को प्राकृतिक संख्याओं से निरूपित करना उपयोगी होता है, ठीक वैसे ही जैसे हम अनुक्रमों को संख्याओं से और उनके गुणों तथा उन पर होने वाली संक्रियाओं को उनके कूटों पर आदिम पुनरावर्ती संबंधों और फलनों से निरूपित कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए हम अनुक्रमों और उनके कूटों का उपयोग करेंगे। कोई वृक्ष या तो एक अकेला शीर्ष (संभवतः किसी चिह्नक सहित) हो सकता है, या अनेक उपवृक्षों से जुड़ा कोई शीर्ष (संभवतः किसी चिह्नक सहित)। उस शीर्ष को वृक्ष का *मूल* और उससे जुड़े उपवृक्षों को उसके *तत्क्षण उपवृक्ष* कहते हैं।

हम वृक्षों को पुनरावर्ती रूप से अनुक्रम $\langle k, d_1, \ldots, d_k\rangle$ के रूप में कूटबद्ध करते हैं, जहाँ k तत्क्षण उपवृक्षों की संख्या है और d_1, ..., d_k उन तत्क्षण उपवृक्षों के कूट हैं। यदि शीर्षों पर चिह्नक हों, तो उन्हें तत्क्षण उपवृक्षों के बाद सम्मिलित किया जा सकता है। अतः केवल चिह्नक l वाले एक शीर्ष से बने वृक्ष का कूट $\langle 0, l\rangle$ होगा; और ऐसे मूल (जिसका चिह्नक l_1 है) से बने वृक्ष का कूट, जो दो अकेले शीर्षों (जिनके चिह्नक l_2, l_3 हैं) से जुड़ा हो, $\langle 2, \langle 0, l_2\rangle, \langle 0, l_3\rangle, l_1\rangle$ होगा।

प्रतिज्ञप्ति 29.25. *फलन* $\text{SubtreeSeq}(t)$*, जो ऐसे अनुक्रम का कूट लौटाता है जिसके अवयव कूट* t *वाले वृक्ष के सभी उपवृक्षों के कूट हैं, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. पहले ध्यान दें कि $\text{ISubtrees}(t) = \text{subseq}(t, 1, (t)_0)$ आदिम पुनरावर्ती है और वृक्ष t के तत्क्षण उपवृक्षों के कूट लौटाता है। अब हम एक सहायक फलन $\text{hSubtreeSeq}(t,n)$ परिभाषित कर सकते हैं, जो मूल से n किनारियों की दूरी पर स्थित सभी उपवृक्षों का अनुक्रम संगणित करता है। t के उपवृक्षों का वह अनुक्रम जो मूल से 0 किनारियों की दूरी पर है—दूसरे शब्दों में, t के मूल से आरंभ होने वाला अनुक्रम—केवल t से बना अनुक्रम है। स्तर $n+1$ पर स्थित, t के सभी उपवृक्षों का अनुक्रम पाने के लिए हम स्तर n के उपवृक्षों का संलग्नन ऐसे अनुक्रम से करते हैं जो स्तर n के उपवृक्षों के सभी तत्क्षण उपवृक्षों से बना है। इन सभी की सूची पाने के लिए ध्यान दें कि यदि $f(x)$ अनुक्रमों के कूट लौटाने वाला आदिम पुनरावर्ती फलन है, तो $g_f(s,k) = f((s)_0) \frown \ldots \frown f((s)_k)$ भी आदिम पुनरावर्ती है:

$$\begin{aligned}g(s,0) &= f((s)_0)\\ g(s,k+1) &= g(s,k) \frown f((s)_{k+1})\end{aligned}$$

मसलन, यदि s वृक्षों का अनुक्रम है, तो $h(s) = g_{\text{ISubtrees}}(s, \text{len}(s))$, s के अवयवों के तत्क्षण उपवृक्षों का अनुक्रम देता है। इसका उपयोग करके हम hSubtreeSeq को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}\text{hSubtreeSeq}(t, 0) &= \langle t \rangle \\ \text{hSubtreeSeq}(t, n+1) &= \text{hSubtreeSeq}(t, n) \frown h(\text{hSubtreeSeq}(t, n)).\end{aligned}$$

कूट t वाले वृक्ष में उपवृक्षों का महत्तम स्तर, अर्थात् मूल और किसी पर्ण-शीर्ष के बीच की महत्तम दूरी, कूट t से परिबद्ध है। अतः कूट t वाले वृक्ष के सभी उपवृक्षों के कूटों का अनुक्रम $\text{hSubtreeSeq}(t, t)$ से मिलता है। □

29.13 अन्य पुनरावर्तन

युग्मन और अनुक्रमण का उपयोग करके हम आदिम पुनरावर्तन के अधिक असामान्य (और उपयोगी) रूपों को उचित ठहरा सकते हैं। मसलन, प्रायः दो फलनों को एक साथ परिभाषित करना उपयोगी होता है, जैसे निम्न परिभाषा में:

$$\begin{aligned}h_0(\vec{x}, 0) &= f_0(\vec{x}) \\ h_1(\vec{x}, 0) &= f_1(\vec{x}) \\ h_0(\vec{x}, y+1) &= g_0(\vec{x}, y, h_0(\vec{x}, y), h_1(\vec{x}, y)) \\ h_1(\vec{x}, y+1) &= g_1(\vec{x}, y, h_0(\vec{x}, y), h_1(\vec{x}, y))\end{aligned}$$

यह *सहकालिक पुनरावर्तन* का एक उदाहरण है। फलनों को परिभाषित करने का एक अन्य उपयोगी ढंग यह है कि $h(\vec{x}, y+1)$ का मान *सभी* मानों $h(\vec{x}, 0)$, ..., $h(\vec{x}, y)$ के पदों में दिया जाए, जैसे निम्न परिभाषा में:

$$\begin{aligned}h(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) &= g(\vec{x}, y, \langle h(\vec{x}, 0), \ldots, h(\vec{x}, y) \rangle).\end{aligned}$$

निम्न प्रारूप इस विचार को अधिक संक्षेप में व्यक्त करता है:

$$h(\vec{x}, y) = g(\vec{x}, y, \langle h(\vec{x}, 0), \ldots, h(\vec{x}, y-1) \rangle)$$

इस समझ के साथ कि g का अंतिम तर्क, जब y, 0 हो, केवल रिक्त अनुक्रम है। दोनों निरूपणों में विचार यह है कि "उत्तराधिकारी चरण" संगणित करते समय फलन h अब तक संगणित मानों के पूरे अनुक्रम का उपयोग कर सकता है। इसे *मान-क्रम पुनरावर्तन* कहते हैं। एक विशिष्ट उदाहरण के रूप में, इसका उपयोग निम्न प्रकार की परिभाषा को उचित ठहराने के लिए किया जा सकता है:

$$h(\vec{x}, y) = \begin{cases} g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, k(\vec{x}, y))) & \text{यदि } k(\vec{x}, y) < y \\ f(\vec{x}) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

दूसरे शब्दों में, h का y पर मान, h के उस *किसी भी* पूर्ववर्ती मान पर मान के पदों में संगणित किया जा सकता है जो k द्वारा दिया गया हो।

आपको विचार करना चाहिए कि सामान्य आदिम पुनरावर्तन का उपयोग करके ये फलन कैसे प्राप्त किए जाएँ। आदिम पुनरावर्तन का एक अंतिम रूप इस अर्थ में अधिक लचीला है कि प्रक्रिया के दौरान *प्राचलों* (पार्श्व मानों) को बदलने की अनुमति होती है:

$$\begin{aligned}h(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) &= g(\vec{x}, y, h(k(\vec{x}), y))\end{aligned}$$

इसका भी सामान्य आदिम पुनरावर्तन से अनुकरण किया जा सकता है। (ऐसा करना कठिन है। संकेत के लिए संगणन को हाथ से खोलकर देखने का प्रयास करें।)

29.14 गैर-आदिम पुनरावर्ती फलन

आदिम पुनरावर्ती फलन सहज रूप से संगणनीय समझे जाने वाले सभी फलनों को पूरा नहीं करते। यह सहज रूप से स्पष्ट होना चाहिए कि हम सभी एक-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलनों की ऐसी सूची f_0, f_1, f_2, ... बना सकते हैं कि f_x का मान निवेश y पर प्रभावी रूप से संगणित किया जा सके; दूसरे शब्दों में, निम्न प्रकार परिभाषित फलन $g(x, y)$ संगणनीय है:

$$g(x, y) = f_x(y)$$

किंतु तब निम्न फलन भी संगणनीय है:

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x, x) + 1 \\ &= f_x(x) + 1. \end{aligned}$$

प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन f_i के लिए h और f_i के मान i पर भिन्न हैं। अतः h संगणनीय है, किंतु आदिम पुनरावर्ती नहीं; और g के बारे में भी यही कहा जा सकता है। यह कैंटर के विकर्णीकरण तर्क का "प्रभावी" रूप है।

ऐसे संगणनीय फलनों के और अधिक स्पष्ट उदाहरण दिए जा सकते हैं जो आदिम पुनरावर्ती नहीं हैं। मसलन, संकेत $g^n(x)$ से $g(g(\ldots g(x)))$ निरूपित हो, जिसमें कुल n बार g आता है; और फलनों का अनुक्रम $g_0, g_1, \ldots$ इस प्रकार परिभाषित करें:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= x + 1 \\ g_{n+1}(x) &= g_n^x(x) \end{aligned}$$

आप सत्यापित कर सकते हैं कि प्रत्येक फलन g_n आदिम पुनरावर्ती है। हर अगला फलन अपने पूर्ववर्ती से बहुत अधिक तीव्रता से बढ़ता है; $g_1(x)$, $2x$ के बराबर है, $g_2(x)$, $2^x \cdot x$ के बराबर है, और $g_3(x)$ लगभग ऐसे घातांकीय स्तंभ की तरह बढ़ता है जिसमें x बार 2 आता है। एकरमान–पीटर (Ackermann–Péter) फलन मूलतः $G(x) = g_x(x)$ फलन है, और दिखाया जा सकता है कि यह किसी भी आदिम पुनरावर्ती फलन से अधिक तीव्रता से बढ़ता है।

आइए आदिम पुनरावर्ती फलनों को परिगणित करने के प्रश्न पर लौटें। याद रखें कि हमने प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन को औपचारिक संकेत दिया है; इसलिए संकेतों को परिगणित करना पर्याप्त है। हम प्राकृतिक संख्या $\#(F)$ को प्रत्येक संकेत F के साथ पुनरावर्ती रूप से इस प्रकार जोड़ सकते हैं:

$$\begin{aligned} \#(0) &= \langle 0 \rangle \\ \#(S) &= \langle 1 \rangle \\ \#(P_i^n) &= \langle 2, n, i \rangle \\ \#(\mathrm{Comp}_{k,l}[H, G_0, \ldots, G_{k-1}]) &= \langle 3, k, l, \#(H), \#(G_0), \ldots, \#(G_{k-1}) \rangle \\ \#(\mathrm{Rec}_l[G, H]) &= \langle 4, l, \#(G), \#(H) \rangle \end{aligned}$$

यहाँ हम इस तथ्य का उपयोग कर रहे हैं कि पिछले अनुभाग के कूटों से संख्याओं के प्रत्येक अनुक्रम को प्राकृतिक संख्या माना जा सकता है। निष्कर्ष यह है कि प्रत्येक कूट को एक प्राकृतिक संख्या दी जाती है। निस्संदेह, कुछ अनुक्रम (और इसलिए कुछ संख्याएँ) संकेतों के संगत नहीं होते; किंतु हम f_i को उस एक-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलन के रूप में ले सकते हैं जिसका संकेत i से कूटबद्ध है, यदि i ऐसा कोई संकेत कूटबद्ध करता है; और अन्यथा उसे अचर 0 फलन मान सकते हैं। अंतिम परिणाम यह है कि हमारे पास एक-स्थानी आदिम पुनरावर्ती फलनों को परिगणित करने का स्पष्ट ढंग है।

(वास्तव में, अचर शून्य फलन जैसे कुछ फलन सूची में एक से अधिक बार आएँगे। यह केवल हमारे कूटन की कृत्रिम उपज नहीं, बल्कि इस तथ्य का परिणाम भी है कि अचर शून्य फलन के एक से अधिक संकेत हैं। आगे हम देखेंगे कि इन पुनरावृत्तियों को संगणनीय रूप से टाला नहीं जा सकता; मसलन, ऐसा कोई संगणनीय फलन नहीं है जो यह निर्णय करे कि दिया हुआ संकेत अचर शून्य फलन को निरूपित करता है या नहीं।)

अब हम फलन $g(x, y)$ को $f_x(y)$ से दिया हुआ मान सकते हैं, जहाँ f_x अभी वर्णित परिगणन का संदर्भ देता है। हम कैसे जानते हैं कि $g(x, y)$ संगणनीय है? सहज रूप से यह स्पष्ट है: $g(x, y)$ संगणित करने के लिए पहले x को

"खोलें" और देखें कि वह किसी एक-स्थानी फलन का संकेत है या नहीं। यदि है, तो निवेश y पर उस फलन का मान संगणित करें।

आपको शायद पहले से विश्वास हो गया हो कि (कुछ परिश्रम से!) ऐसा करने वाला प्रोग्राम (मान लें Java या C++ में) लिखा जा सकता है; और अब हम चर्च–ट्यूरिंग परिकल्पना का सहारा ले सकते हैं, जो कहती है कि सहज रूप से संगणनीय हर चीज़ को ट्यूरिंग मशीन से संगणित किया जा सकता है।

निस्संदेह, यह दिखाने का अधिक सीधा ढंग कि $g(x, y)$ संगणनीय है, उसे संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीन का स्पष्ट वर्णन करना है। विशेषतः इससे चर्च–ट्यूरिंग परिकल्पना और सहज-बोध के सहारे से बचा जा सकेगा। शीघ्र ही हमारे पास यह दिखाने के लिए पर्याप्त साधन होंगे कि $g(x, y)$ संगणनीय है; हम संगणन के ऐसे प्रतिरूप का सहारा लेंगे जिसका ट्यूरिंग मशीन पर *अनुकरण* किया जा सकता है: अर्थात् पुनरावर्ती फलन।

29.15 आंशिक पुनरावर्ती फलन

पुनरावर्ती फलनों की परिभाषा को प्रेरित करने के लिए ध्यान दें कि हमारा यह प्रमाण कि ऐसे संगणनीय फलन हैं जो आदिम पुनरावर्ती नहीं हैं, वास्तव में कहीं अधिक स्थापित करता है। तर्क सरल था: हमने केवल इस तथ्य का उपयोग किया कि फलनों $f_0, f_1, \ldots$ को इस प्रकार परिगणित करना संभव है कि x और y के फलन के रूप में $f_x(y)$ संगणनीय हो। अतः तर्क *फलनों के हर ऐसे वर्ग पर लागू होता है जिसे इस ढंग से परिगणित किया जा सके*। इससे हम दुविधा में पड़ते हैं: हम संगणनीय फलनों का स्पष्ट वर्णन करना चाहते हैं, किंतु संगणनीय फलनों के किसी संग्रह का कोई भी स्पष्ट वर्णन सर्वसमावेशी नहीं हो सकता!

इससे निकलने का मार्ग *आंशिक* फलनों को भूमिका देना है। हम देखेंगे कि आंशिक संगणनीय फलनों को परिगणित करना *संभव है*। वास्तव में हम लगभग पहले से जानते हैं कि ऐसा है, क्योंकि ट्यूरिंग मशीनों को व्यवस्थित ढंग से परिगणित करना संभव है। आगे हम अपने विकर्ण तर्क पर लौटेंगे और देखेंगे कि आंशिक फलनों को सम्मिलित करने पर वह क्यों नहीं चलता।

अब प्रश्न यह है: सभी आंशिक पुनरावर्ती फलन पाने के लिए हमें आदिम पुनरावर्ती फलनों में क्या जोड़ना होगा? हमें दो काम करने हैं:

1. आदिम पुनरावर्ती फलनों की अपनी परिभाषा को इस प्रकार बदलना कि उसमें आंशिक फलनों की भी अनुमति हो।

2. परिभाषा में कुछ *जोड़ना*, ताकि उसमें कुछ नए आंशिक फलन आएँ।

पहला काम सरल है। पहले की तरह हम शून्य, उत्तराधिकारी और प्रक्षेपणों से आरंभ करेंगे और संयोजन तथा आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत करेंगे। केवल यह अंतर है कि संयोजन और आदिम पुनरावर्तन की परिभाषाओं को इस संभावना की अनुमति देने के लिए बदलना होगा कि परिभाषा के कुछ पद परिभाषित न हों। यदि f और g आंशिक फलन हैं, तो $f(x)\downarrow$ का अर्थ होगा कि f, x पर परिभाषित है, अर्थात् x, f के प्रांत में है; और $f(x)\uparrow$ का अर्थ इसका उलटा होगा, अर्थात् f, x पर परिभाषित नहीं है। हम $f(x) \simeq g(x)$ का अर्थ लेंगे कि या तो $f(x)$ और $g(x)$ दोनों अपरिभाषित हैं, अथवा दोनों परिभाषित और बराबर हैं। अधिक जटिल पदों के लिए भी हम इन संकेतों का उपयोग करेंगे। हम यह परिपाटी अपनाएँगे कि यदि h और g_0, ..., g_k सभी आंशिक फलन हों, तो

$$h(g_0(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x}))$$

तभी और केवल तभी परिभाषित है जब प्रत्येक g_i, $\vec{x}$ पर परिभाषित हो और h, $g_0(\vec{x})$, ..., $g_k(\vec{x})$ पर परिभाषित हो। इस समझ के साथ आंशिक फलनों के लिए संयोजन और आदिम पुनरावर्तन की परिभाषाएँ ठीक ऊपर जैसी हैं, सिवाय इसके कि हमें "$=$" को "$\simeq$" से बदलना होगा।

आंशिक फलन पाने के लिए आदिम पुनरावर्ती फलनों की परिभाषा में हम *अपरिबद्ध खोज संकारक* जोड़ेंगे। यदि $f(x, \vec{z})$ प्राकृतिक संख्याओं पर कोई आंशिक फलन है, तो $\mu x\ f(x, \vec{z})$ को यह मान परिभाषित करें:

> वह लघुतम x जिसके लिए $f(0, \vec{z}), f(1, \vec{z}), \ldots, f(x, \vec{z})$ सभी परिभाषित हैं और $f(x, \vec{z}) = 0$ है, यदि ऐसा कोई x अस्तित्व में हो।

इस समझ के साथ कि अन्यथा $\mu x\ f(x, \vec{z})$ अपरिभाषित है। इससे $\mu x\ f(x, \vec{z})$ अद्वितीय रूप से परिभाषित होता है।

ध्यान दें कि हमारी परिभाषा में ट्यूरिंग मशीनों, कलनविधियों या किसी विशिष्ट संगणकीय प्रतिरूप का कोई संदर्भ नहीं है। किंतु संयोजन और आदिम पुनरावर्तन की तरह अपरिबद्ध खोज के पीछे भी एक संक्रियात्मक, संगणकीय सहज-बोध है। किसी आंशिक फलन की संगणनीयता के संदर्भ में, जिन तर्कों पर फलन अपरिभाषित है वे उन निवेशों के संगत हैं जिनके लिए संगणन रुकता नहीं। $\mu x\ f(x, \vec{z})$ को संगणित करने की प्रक्रिया यह होगी: $f(0, \vec{z}), f(1, \vec{z}), f(2, \vec{z})$ को तब तक संगणित करें जब तक मान 0 न लौटे। किंतु यदि बीच का कोई संगणन न रुके, तो $\mu x\ f(x, \vec{z})$ का संगणन भी नहीं रुकता।

यदि $R(x, \vec{z})$ कोई संबंध है, तो $\mu x\ R(x, \vec{z})$ को $\mu x\ (1 \dot{-} \chi_R(x, \vec{z}))$ परिभाषित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, $\mu x\ R(x, \vec{z})$ उस लघुतम x को लौटाता है जिसके लिए $R(x, \vec{z})$ मान्य है। अतः यदि $f(x, \vec{z})$ कोई पूर्ण फलन है, तो $\mu x\ f(x, \vec{z})$ वही है जो $\mu x\ (f(x, \vec{z}) = 0)$। किंतु ध्यान दें कि हमारी मूल परिभाषा अधिक सामान्य है, क्योंकि वह इस संभावना की अनुमति देती है कि $f(x, \vec{z})$ सर्वत्र परिभाषित न हो (इसके विपरीत, किसी संबंध का अभिलाक्षणिक फलन सदा पूर्ण होता है)।

परिभाषा 29.26. *आंशिक पुनरावर्ती फलनों* का समुच्चय प्राकृतिक संख्याओं से प्राकृतिक संख्याओं में (विभिन्न स्थान-संख्याओं वाले) आंशिक फलनों का वह लघुतम समुच्चय है जिसमें शून्य, उत्तराधिकारी और प्रक्षेपण आते हैं तथा जो संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और अपरिबद्ध खोज के अधीन संवृत है।

निस्संदेह, कुछ आंशिक पुनरावर्ती फलन पूर्ण होंगे, अर्थात् प्रत्येक तर्क के लिए परिभाषित होंगे।

परिभाषा 29.27. *पुनरावर्ती फलनों* का समुच्चय उन आंशिक पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय है जो पूर्ण हैं।

किसी पुनरावर्ती फलन को कभी-कभी "पूर्ण पुनरावर्ती" कहा जाता है, ताकि इस बात पर बल दिया जा सके कि वह सर्वत्र परिभाषित है।

29.16 प्रसामान्य-रूप प्रमेय

प्रमेय 29.28 (क्लिनी (Kleene) का प्रसामान्य-रूप प्रमेय). *एक आदिम पुनरावर्ती संबंध $T(e, x, s)$ और एक आदिम पुनरावर्ती फलन $U(s)$ हैं जिनका निम्न गुण है: यदि f कोई आंशिक पुनरावर्ती फलन है, तो किसी e के लिए*

$$f(x) \simeq U(\mu s\, T(e, x, s))$$

प्रत्येक x के लिए मान्य है।

प्रसामान्य-रूप प्रमेय का प्रमाण विस्तृत है, किंतु मूल विचार सरल है। हर आंशिक पुनरावर्ती फलन का कोई *अनुक्रमांक* e होता है, जिसे सहज रूप से उसके प्रोग्राम अथवा परिभाषा को कूटबद्ध करने वाली संख्या समझें। यदि $f(x)\downarrow$, तो संगणन को व्यवस्थित रूप से दर्ज करके किसी संख्या s से कूटबद्ध किया जा सकता है; और इस तथ्य को कि s, f के निवेश x वाले संगणन को कूटबद्ध करता है, केवल x और परिभाषा e का उपयोग करके आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँचा जा सकता है। फलतः संबंध T—"अनुक्रमांक e वाले फलन का निवेश x के लिए कोई संगणन है और s उस संगणन को कूटबद्ध करता है"—आदिम पुनरावर्ती है। संगणन का पूरा अभिलेख s दिए होने पर s का "परिणाम" $f(x)$ का मान है और उसे भी s से आदिम पुनरावर्ती ढंग से पाया जा सकता है।

प्रसामान्य-रूप प्रमेय दिखाता है कि किसी भी आंशिक पुनरावर्ती फलन की परिभाषा के लिए केवल एक अपरिबद्ध खोज चाहिए। मूलतः हम सभी संख्याओं में तब तक खोज सकते हैं जब तक ऐसी संख्या न मिले जो अनुक्रमांक e वाले फलन के निवेश x के किसी संगणन को कूटबद्ध करती हो। हम संख्याओं e को आंशिक पुनरावर्ती फलनों के "नाम" के रूप में उपयोग कर सकते हैं और प्रमेय के समीकरण से परिभाषित फलन के लिए φ_e लिख सकते हैं; वह फलन f है। ध्यान दें कि किसी आंशिक पुनरावर्ती फलन के एक से अधिक अनुक्रमांक हो सकते हैं—वास्तव में प्रत्येक आंशिक पुनरावर्ती फलन के अनंततः अनेक अनुक्रमांक होते हैं।

29.17 विराम समस्या

सामान्यतः *विराम समस्या* (halting problem) यह निर्णय करने की समस्या है कि किसी संगणनीय फलन का विनिर्देश e (मसलन कोई प्रोग्राम) और संख्या n दिए होने पर निवेश n पर उस फलन का संगणन रुकता है या नहीं, अर्थात् कोई परिणाम देता है या नहीं। प्रसिद्ध रूप से, ऐलन ट्यूरिंग ने सिद्ध किया कि स्वयं इस समस्या को किसी संगणनीय फलन से हल नहीं किया जा सकता; अर्थात् फलन

$$h(e,n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि संगणन } e\text{, निवेश } n \text{ पर रुकता है} \\ 0 & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

संगणनीय नहीं है।

आंशिक पुनरावर्ती फलनों के संदर्भ में, किसी प्रोग्राम के विनिर्देश की भूमिका क्लिनी के प्रसामान्य-रूप प्रमेय में दिया अनुक्रमांक e निभा सकता है। यदि f कोई आंशिक पुनरावर्ती फलन है, तो हर ऐसा e जिसके लिए प्रसामान्य-रूप प्रमेय का समीकरण मान्य हो, f का अनुक्रमांक है। संख्या e दिए होने पर प्रसामान्य-रूप प्रमेय कहता है कि

$$\varphi_e(x) \simeq U(\mu s\, T(e,x,s))$$

आंशिक पुनरावर्ती है; और प्रत्येक आंशिक पुनरावर्ती $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ के लिए कोई $e \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि $\varphi_e(x) \simeq f(x)$ सभी $x \in \mathbb{N}$ के लिए। वास्तव में, प्रत्येक ऐसे f के लिए केवल एक नहीं, बल्कि अनंततः अनेक ऐसे e हैं। *विराम फलन* h को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$h(e,x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \varphi_e(x)\downarrow \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

ध्यान दें कि $h(e,x) = 0$ होता है यदि $\varphi_e(x)\uparrow$; और ऐसा तब भी है जब e किसी आंशिक पुनरावर्ती फलन का अनुक्रमांक है ही नहीं।

प्रमेय 29.29. *विराम फलन h आंशिक पुनरावर्ती नहीं है।*

प्रमाण. यदि h आंशिक पुनरावर्ती होता, तो हम परिभाषित कर सकते थे:

$$d(y) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } h(y,y) = 0 \\ \mu x\; x \neq x & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

चूँकि कोई संख्या x, $x \neq x$ को संतुष्ट नहीं करती, इसलिए $\mu x\; x \neq x$ अस्तित्व में नहीं है; अतः $d(y)\uparrow$ तभी और केवल तभी जब $h(y,y) \neq 0$। इस परिभाषा से निकलता है:

1. $d(y)\downarrow$ तभी और केवल तभी जब $\varphi_y(y)\uparrow$ अथवा y किसी आंशिक पुनरावर्ती फलन का अनुक्रमांक नहीं है।
2. $d(y)\uparrow$ तभी और केवल तभी जब $\varphi_y(y)\downarrow$।

यदि h आंशिक पुनरावर्ती होता, तो d भी आंशिक पुनरावर्ती होता। अतः क्लिनी के प्रसामान्य-रूप प्रमेय से उसका कोई अनुक्रमांक e_d है। $h(e_d,e_d)$ के मान पर विचार करें। दो संभव प्रकरण हैं: 0 और 1।

1. यदि $h(e_d,e_d) = 1$, तो $\varphi_{e_d}(e_d)\downarrow$। किंतु $\varphi_{e_d} \simeq d$, और $d(e_d)$ तभी और केवल तभी परिभाषित है जब $h(e_d,e_d) = 0$। अतः $h(e_d,e_d) \neq 1$।
2. यदि $h(e_d,e_d) = 0$, तो या तो e_d किसी आंशिक पुनरावर्ती फलन का अनुक्रमांक नहीं है, या है और $\varphi_{e_d}(e_d)\uparrow$। किंतु फिर, $\varphi_{e_d} \simeq d$, और $d(e_d)$ तभी और केवल तभी अपरिभाषित है जब $\varphi_{e_d}(e_d)\downarrow$।

निष्कर्ष यह है कि अंततः e_d किसी आंशिक पुनरावर्ती फलन का अनुक्रमांक नहीं हो सकता। किंतु यदि h आंशिक पुनरावर्ती होता, तो d भी ऐसा होता; अतः उसके अनुक्रमांक के रूप में e_d की हमारी परिभाषा मान्य होती। हमें निष्कर्ष निकालना होगा कि h आंशिक पुनरावर्ती नहीं हो सकता। $\square$

29.18 सामान्य पुनरावर्ती फलन

पूर्ण फलनों का समुच्चय पाने का एक अन्य ढंग है। किसी पूर्ण फलन $f(x, \vec{z})$ को *नियमित* कहें यदि प्राकृतिक संख्याओं के प्रत्येक अनुक्रम $\vec{z}$ के लिए कोई x ऐसा हो कि $f(x, \vec{z}) = 0$। दूसरे शब्दों में, नियमित फलन ठीक वे फलन हैं जिन पर अपरिबद्ध खोज लागू करके अंत में पूर्ण फलन मिलता है। हम सावधानीपूर्वक अपरिबद्ध खोज को नियमित फलनों तक सीमित कर सकते हैं:

परिभाषा 29.30. *सामान्य पुनरावर्ती फलनों* का समुच्चय प्राकृतिक संख्याओं से प्राकृतिक संख्याओं में (विभिन्न स्थान-संख्याओं वाले) फलनों का वह लघुतम समुच्चय है जिसमें शून्य, उत्तराधिकारी और प्रक्षेपण आते हैं तथा जो संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और *नियमित* फलनों पर लागू अपरिबद्ध खोज के अधीन संवृत है।

स्पष्टतः प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन पूर्ण है। परिभाषा 29.30 और परिभाषा 29.27 के बीच अंतर यह है कि बाद वाले में प्रक्रिया के दौरान आंशिक पुनरावर्ती फलनों का उपयोग करने की अनुमति है; एकमात्र अपेक्षा यह है कि अंत में मिलने वाला फलन पूर्ण हो। इसलिए ऐतिहासिक अवशेष "सामान्य" शब्द अनुपयुक्त नाम है; ऊपर से देखने पर परिभाषा 29.30, परिभाषा 29.27 से *कम* सामान्य है। किंतु सौभाग्य से यह अंतर आभासी है; यद्यपि परिभाषाएँ भिन्न हैं, सामान्य पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय और पुनरावर्ती फलनों का समुच्चय एक ही है।

प्रश्न

प्रश्न 29.1. यह दिखाकर प्रतिज्ञप्ति 29.5 सिद्ध करें कि mult की आदिम पुनरावर्ती परिभाषा को परिभाषा 29.1 द्वारा अपेक्षित रूप में रखा जा सकता है और संगत फलन f तथा g आदिम पुनरावर्ती हैं।

प्रश्न 29.2. mult के लिए पूर्ण आदिम पुनरावर्ती संकेत दें।

प्रश्न 29.3. प्रतिज्ञप्ति 29.13 सिद्ध करें।

प्रश्न 29.4. दिखाएँ कि

$$f(x, y) = 2^{(2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^x}}}})}\Big\}y \text{ बार } 2$$

आदिम पुनरावर्ती है।

प्रश्न 29.5. दिखाएँ कि पूर्णांक भाग $d(x, y) = \lfloor x/y \rfloor$ (अर्थात् ऐसा भाग जिसमें दशमलव बिंदु के बाद की हर चीज़ छोड़ दी जाती है) आदिम पुनरावर्ती है। जब $y = 0$ हो, तब हम $d(x, y) = 0$ निर्धारित करते हैं। आदिम पुनरावर्तन और संयोजन का उपयोग करके d की स्पष्ट परिभाषा दें।

प्रश्न 29.6. दिखाएँ कि त्रि-स्थानी संबंध $x \equiv y \mod n$ (मापांक n में सर्वांगसमता) आदिम पुनरावर्ती है।

प्रश्न 29.7. मान लें कि $R(\vec{x}, z)$ आदिम पुनरावर्ती है। फलन $m'_R(\vec{x}, y)$ को परिभाषित करें, जहाँ यह फलन ऐसा कोई मान होने पर उस लघुतम z को लौटाता है जो y से छोटा है और जिसके लिए $R(\vec{x}, z)$ मान्य है, तथा अन्यथा 0 लौटाता है; इसे χ_R से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित करें।

प्रश्न 29.8. परिबद्ध न्यूनीकरण का उपयोग करके पूर्णांक भाग $d(x, y)$ परिभाषित करें।

प्रश्न 29.9. दिखाएँ कि ऐसा आदिम पुनरावर्ती फलन $\mathrm{sconcat}(s)$ है जिसमें यह गुण है:

$$\mathrm{sconcat}(\langle s_0, \ldots, s_k \rangle) = s_0 \frown \ldots \frown s_k.$$

प्रश्न 29.10. दिखाएँ कि ऐसा आदिम पुनरावर्ती फलन $\text{tail}(s)$ है जिसमें यह गुण है:

$$\text{tail}(\Lambda) = 0 \text{ और}$$
$$\text{tail}(\langle s_0, \ldots, s_k \rangle) = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle.$$

प्रश्न 29.11. प्रतिज्ञप्ति 29.24 सिद्ध करें।

प्रश्न 29.12. प्रतिज्ञप्ति 29.25 के प्रमाण में hSubtreeSeq की परिभाषा सामान्यतः पुनरावृत्तियाँ सम्मिलित करती है। ऐसी वैकल्पिक परिभाषा दें जो सुनिश्चित करे कि परिणामी सूची में किसी उपवृक्ष का कूट केवल एक बार आए।

प्रश्न 29.13. मान-क्रम पुनरावर्तन द्वारा शेषफल फलन $r(x, y)$ परिभाषित करें। (यदि x, y प्राकृतिक संख्याएँ हैं और $y > 0$, तो $r(x, y)$ वह संख्या है जो y से छोटी है तथा $x = z \times y + r(x, y)$ किसी z के लिए मान्य है। निश्चितता के लिए मान लें कि यदि $y = 0$, तो $r(x, 0) = 0$।)

अध्याय 30

संगणनीयता सिद्धांत

इस अध्याय की सामग्री की समीक्षा और इसका विस्तार किया जाना चाहिए। विशेषतः, इसमें अभी कोई अभ्यास नहीं है।

30.1 परिचय

तर्कशास्त्र की वह शाखा जिसे *संगणनीयता सिद्धांत* कहा जाता है, फलनों और समुच्चयों की संगणनीयता अथवा सापेक्ष संगणनीयता से जुड़े प्रश्नों का अध्ययन करती है। क्लीन के प्रभाव का प्रमाण यह है कि इस विषय को पहले *पुनरावर्तन सिद्धांत* कहा जाता था; आज दोनों नाम सामान्यतः प्रयुक्त होते हैं।

किसी फलन $f\colon \mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$ को हम *आंशिक संगणनीय* कहेंगे, यदि उसे संगणना के किसी मॉडल में संगणित किया जा सकता हो। यदि f पूर्ण है, तो हम केवल यह कहेंगे कि f *संगणनीय* है। जिस संबंध R का अभिलाक्षणिक फलन χ_R संगणनीय हो, उसे भी संगणनीय कहते हैं। यदि f और g आंशिक फलन हैं, तो $f(x)\downarrow$ लिखने का अर्थ होगा कि f, x पर परिभाषित है, अर्थात् x, f के प्रांत में है; और $f(x)\uparrow$ का अर्थ इसका उलटा होगा, अर्थात् f, x पर परिभाषित नहीं है। $f(x) \simeq g(x)$ से हमारा आशय होगा कि या तो $f(x)$ और $g(x)$ दोनों अपरिभाषित हैं, अथवा दोनों परिभाषित और समान हैं।

संगणना के किसी विशिष्ट मॉडल का उल्लेख किए बिना भी संगणनीयता सिद्धांत का अध्ययन किया जा सकता है। इसके लिए यह दिखाया जाता है कि एक सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन $\mathrm{Un}(k,x)$ अस्तित्व में है। इससे आंशिक संगणनीय फलनों का परिगणन किया जा सकता है। हम संकेत φ_k अपनाएँगे, जो k-वें एकस्थानी आंशिक संगणनीय फलन को निरूपित करेगा और जिसकी परिभाषा $\varphi_k(x) \simeq \mathrm{Un}(k,x)$ है। (क्लीन ने इस प्रयोजन के लिए $\{k\}$ का उपयोग किया था, किंतु हाल में यह संकेत उतना प्रचलित नहीं रहा है।) कुछ अधिक सामान्य रूप में, हम मनमानी स्थान-संख्या वाले आंशिक संगणनीय फलनों का एकसमान परिगणन कर सकते हैं; हम φ_k^n लिखेंगे, जो k-वें n-स्थानी आंशिक पुनरावर्ती फलन को निरूपित करेगा।

यदि $f(\vec{x},y)$ कोई पूर्ण अथवा आंशिक फलन है, तो $\mu y\ f(\vec{x},y)$, $\vec{x}$ का वह फलन है जो वह लघुतम y लौटाता है जिसके लिए $f(\vec{x},y)=0$, बशर्ते $f(\vec{x},0)$, ..., $f(\vec{x},y-1)$ सभी परिभाषित हों; यदि ऐसा कोई y न हो, तो $\mu y\ f(\vec{x},y)$ अपरिभाषित है। यदि $R(\vec{x},y)$ कोई संबंध है, तो $\mu y\ R(\vec{x},y)$ को उस लघुतम y के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसके लिए $R(\vec{x},y)$ सत्य हो; दूसरे शब्दों में, वह लघुतम y जिसके लिए $1 \dot{-} \chi_R(\vec{x},y)=0$।

किसी फलन को संगणनीय दिखाने के लिए दो प्रकार से आगे बढ़ा जा सकता है:

1. कठोर रूप से: किसी ट्यूरिंग मशीन अथवा आंशिक पुनरावर्ती फलन का स्पष्ट वर्णन करें और दिखाएँ कि वह इच्छित फलन को संगणित करता है;

2. अनौपचारिक रूप से: उसे संगणित करने वाली किसी कलनविधि का वर्णन करें और चर्च की प्रस्थापना का सहारा लें।

इन दोनों के बीच कोई तीखी सीमा नहीं है; किसी कलनविधि के विस्तृत वर्णन में इतनी सूचना होनी चाहिए कि यह अपेक्षाकृत स्पष्ट हो जाए कि सिद्धांततः उचित ट्यूरिंग मशीन अथवा आंशिक पुनरावर्ती परिभाषाओं का अनुक्रम कैसे बनाया जा सकता है। पूर्णतः कठोर परिभाषाएँ प्रायः विशेष ज्ञानवर्धक नहीं होंगी, इसलिए हम इन दोनों दृष्टियों के बीच उपयुक्त संतुलन खोजेंगे; संक्षेप में, ऐसे सहज किंतु कठोर प्रमाण खोजेंगे जिनसे सटीक परिभाषाएँ प्राप्त की जा सकें।

30.2 संगणनाओं का कूटांकन

संगणना के प्रत्येक मॉडल में निम्नलिखित करना संभव है:

1. संगणनीय फलनों की *परिभाषाओं* का व्यवस्थित ढंग से वर्णन करना। उदाहरणतः, ट्यूरिंग मशीन के विनिर्देशों, पुनरावर्ती परिभाषाओं अथवा किसी प्रोग्रामिंग भाषा के प्रोग्रामों को ऐसी परिभाषाएँ देने वाला माना जा सकता है।

2. किसी दी हुई परिभाषा वाले फलन की किसी दी हुई आगत पर संगणना का पूरा अभिलेख वर्णित करना। उदाहरणतः, किसी ट्यूरिंग मशीन की संगणना को संगणना के प्रत्येक चरण के विन्यासों (मशीन की अवस्था और टेप की सामग्री) के अनुक्रम द्वारा वर्णित किया जा सकता है।

3. यह जाँचना कि संगणना का कोई प्रस्तावित अभिलेख वास्तव में इस बात का अभिलेख है कि दी हुई परिभाषा वाले संगणनीय फलन को किसी दी हुई आगत पर कैसे संगणित किया जाएगा (जिस पर फलन परिभाषित है, अर्थात् संगणना रुकती है)।

4. संगणना के पूर्ण अभिलेख के ऐसे वर्णन से किसी दी हुई आगत के लिए फलन का मान निकालना। उदाहरणतः, रुकने वाली ट्यूरिंग मशीन की संगणना के अंतिम चरण में टेप की सामग्री ही वह मान होती है।

कूटांकन के द्वारा किसी संगणनीय फलन के प्रत्येक वर्णन को एक संख्यात्मक *सूचकांक* इस प्रकार दिया जा सकता है कि सूचकांक से निर्देश संगणनीय ढंग से पुनः प्राप्त किए जा सकें। इसी तरह, किसी संगणना के पूरे अभिलेख को भी एक ही संख्या से कूटित किया जा सकता है। तब इससे प्राप्त अंकगणितीय संबंध "s, सूचकांक e वाले फलन की आगत x पर संगणना का अभिलेख कूटित करता है" और फलन "कूट s वाले संगणना-अनुक्रम का निर्गत" संगणनीय होते हैं; वास्तव में वे आदिम पुनरावर्ती होते हैं।

यह मूलभूत तथ्य अत्यंत शक्तिशाली है और चुने गए संगणना-मॉडल से स्वतंत्र रहकर संगणनीयता के विषय में अनेक उल्लेखनीय और महत्त्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करने देता है।

30.3 प्रसामान्य रूप प्रमेय

मान लें कि हम संगणनीय फलनों की परिभाषाओं का वर्णन कर सकते हैं और यह जाँच सकते हैं कि किसी आगत पर उस फलन की संगणना के पूर्ण अभिलेख का कोई प्रस्तावित वर्णन सही है या नहीं। तब यह उचित ही है कि संगणना के मॉडल से स्वतंत्र होकर हम किसी भी संगणनीय फलन f का किसी भी आगत x पर मान इस प्रकार निर्धारित कर सकते हैं:

1. संगणना-अभिलेखों के सभी संभव वर्णनों में खोज करें।

2. जाँचें कि कोई दिया हुआ अभिलेख $f(x)$ की संगणना का अभिलेख है या नहीं।

3. सही अभिलेख मिल जाने पर उससे $f(x)$ का मान निकालें।

वास्तव में ऐसा ही होता है—यही क्लीन के प्रसामान्य रूप प्रमेय का विषय है।

प्रमेय 30.1 (क्लीन का प्रसामान्य रूप प्रमेय). *एक आदिम पुनरावर्ती संबंध $T(e,x,s)$ और एक आदिम पुनरावर्ती फलन $U(s)$ हैं जिनमें निम्न गुण है: यदि f कोई आंशिक संगणनीय फलन है, तो किसी e के लिए,*

$$f(x) \simeq U(\mu s\, T(e,x,s))$$

प्रत्येक x के लिए।

प्रमाण की रूपरेखा. संगणना के किसी भी मॉडल के लिए संगणनीय फलन f के वर्णन को कठोरता से परिभाषित किया जा सकता है और ऐसे वर्णन को किसी प्राकृतिक संख्या e से कूटित किया जा सकता है। इसी प्रकार "संगणना अनुक्रम" की धारणा को कठोरता से परिभाषित किया जा सकता है, जो सूचकांक e वाले फलन की आगत x पर संगणना की प्रक्रिया को अभिलिखित करती है। ऐसे संगणना अनुक्रम को भी किसी संख्या s से कूटित किया जा सकता है। यह इस प्रकार किया जा सकता है कि

1. संबंध $T(e,x,s)$, जो तभी सत्य होता है जब संख्या s, सूचकांक e वाले फलन के आगत x पर संगणना अनुक्रम को कूटित करती है, और
2. फलन $U(s)$, जो s से कूटित संगणना अनुक्रम को उस संगणना के अंतिम परिणाम पर प्रतिचित्रित करता है,

दोनों संगणनीय हैं। वास्तव में संबंध T और फलन U आदिम पुनरावर्ती हैं। □

प्रसामान्य रूप प्रमेय का कठोर प्रमाण देने के लिए हमें संगणना का कोई मॉडल नियत करना होगा, संगणनीय फलनों के वर्णनों और संगणना अनुक्रमों का कूटांकन विस्तार से करना होगा, और सत्यापित करना होगा कि संबंध T तथा फलन U आदिम पुनरावर्ती हैं। अधिकांश अनुप्रयोगों के लिए इतना पर्याप्त है कि T और U संगणनीय हों तथा U पूर्ण हो।

प्रसामान्य रूप प्रमेय के प्रमाण को इस सूत्र-वाक्य में याद रखना संभवतः सबसे अच्छा है: $\mu s\, T(e,x,s)$, सूचकांक e वाले फलन की आगत x पर संगणना के अनुक्रम की खोज करता है, और ऐसा अनुक्रम मिल जाने पर U उस संगणना अनुक्रम का निर्गत लौटाता है।

यदि संगणना का मॉडल आंशिक पुनरावर्ती फलनों का है (जिसका क्लीन ने मूलतः उपयोग किया था), तो यह दिखाता है कि किसी भी फलन की परिभाषा में अपरिबद्ध खोज का केवल एक प्रयोग, अर्थात् केवल एक $\mu y\ f(\vec{x},y)$ संकारक आवश्यक है। इस अर्थ में यह दिखाता है कि प्रत्येक आंशिक पुनरावर्ती फलन का एक प्रसामान्य रूप होता है।

T और U का उपयोग परिगणन φ_0, φ_1, φ_2, ...को परिभाषित करने में किया जा सकता है। अब से हम मानेंगे कि हमने T और U का कोई उपयुक्त चयन नियत कर लिया है, और समीकरण

$$\varphi_e(x) \simeq U(\mu s\, T(e,x,s))$$

को φ_e की *परिभाषा* मानेंगे।

एक और उपयोगी तथ्य यह है:

प्रमेय 30.2. *प्रत्येक आंशिक संगणनीय फलन के अपरिमित रूप से अनेक सूचकांक होते हैं।*

यह भी सहज रूप से स्पष्ट है। किसी संगणनीय फलन (के वर्णन) से आरंभ करके हम एक अलग वर्णन बना सकते हैं जो उसी फलन (आगत–निर्गत युग्म) को संगणित करता है, किंतु पहले ऐसा कोई कार्य करता है जिसका संगणना पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता (मसलन, जाँचता है कि $0 = 0$, अथवा 5 तक गिनता है, आदि)। परिवर्तित वर्णन का सूचकांक सदैव मूल सूचकांक से भिन्न होगा। दोनों उसी फलन के सूचकांक हैं; बस उसकी संगणना कुछ भिन्न ढंग से की गई है।

30.4 s-m-n प्रमेय

अगला प्रमेय "s-m-n प्रमेय" कहलाता है; इसका कारण अभी स्पष्ट हो जाएगा। कठिन भाग यह समझना है कि प्रमेय कहता क्या है; कथन समझ में आ जाने पर वह काफ़ी स्पष्ट प्रतीत होगा।

प्रमेय 30.3. *प्राकृतिक संख्याओं n और m के प्रत्येक युग्म के लिए एक आदिम पुनरावर्ती फलन s_n^m है, ऐसा कि प्रत्येक अनुक्रम e, a_0, ..., a_{m-1}, y_0 ,..., y_{n-1} के लिए हमें*

$$\varphi^n_{s^m_n(e,a_0,\ldots,a_{m-1})}(y_0,\ldots,y_{n-1}) \simeq \varphi^{m+n}_e(a_0,\ldots,a_{m-1},y_0,\ldots,y_{n-1}).$$

s_n^m को *प्रोग्रामों* पर क्रिया करने वाला मानना उपयोगी है। अर्थात् s_n^m, प्रोग्राम e लेता है जो किसी $(m+n)$-स्थानी फलन के लिए है, और साथ में नियत आगत a_0, ..., a_{m-1} लेता है; तथा प्रोग्राम $s_n^m(x, a_0, \ldots, a_{m-1})$ लौटाता है, जो शेष तर्कों के n-स्थानी फलन के लिए है। यदि x को किसी ट्यूरिंग मशीन का वर्णन माना जाए, तो $s_n^m(e, a_0, \ldots, a_{m-1})$ वह ट्यूरिंग मशीन है जो आगत y_0, ..., y_{n-1} मिलने पर आगत शृंखला के आरंभ में a_0, ..., a_{m-1} लगाती है और e चलाती है। तब प्रत्येक s_n^m केवल वह आदिम पुनरावर्ती फलन है जो उपयुक्त ट्यूरिंग मशीन का कूट ज्ञात करता है।

30.5 सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन

प्रमेय 30.4. *एक सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन $\mathrm{Un}(e,x)$ है। दूसरे शब्दों में, एक फलन $\mathrm{Un}(e,x)$ ऐसा है कि:*

1. $\mathrm{Un}(e,x)$ *आंशिक संगणनीय है।*
2. *यदि $f(x)$ कोई आंशिक संगणनीय फलन है, तो कोई प्राकृतिक संख्या e ऐसी है कि $f(x) \simeq \mathrm{Un}(e,x)$ प्रत्येक x के लिए।*

प्रमाण. $\mathrm{Un}(e,x) \simeq U(\mu s\ T(e,x,s))$ मानें, जहाँ U और T, क्लीन के प्रसामान्य रूप प्रमेय (प्रमेय 30.1) के अनुसार हैं। □

यह केवल इस बात को सटीक रूप से कहने का ढंग है कि हमारे पास आंशिक संगणनीय फलनों का एक प्रभावी परिगणन है। आशय यह है कि यदि f_e से उस फलन को लिखें जिसकी परिभाषा $f_e(x) = \mathrm{Un}(e,x)$ है, तो अनुक्रम f_0, f_1, f_2, ...में सभी आंशिक संगणनीय फलन आते हैं और $f_e(x)$ को e तथा x में "एकसमान रूप से" संगणित किया जा सकता है। सरलता के लिए हम ऐसे द्विस्थानी फलन का उपयोग कर रहे हैं जो एकस्थानी फलनों के लिए सार्वत्रिक है, पर संख्याओं के अनुक्रमों को कूटित करके इसे अधिक तर्कों के लिए सहज ही सामान्यीकृत किया जा सकता है। उदाहरणतः, ध्यान दें कि यदि $f(x,y,z)$ कोई 3-स्थानी आंशिक पुनरावर्ती फलन है, तो फलन $g(x) \simeq f((x)_0, (x)_1, (x)_2)$ एकस्थानी पुनरावर्ती फलन है।

30.6 कोई सार्वत्रिक संगणनीय फलन नहीं

यद्यपि ऐसा आंशिक संगणनीय फलन है जो आंशिक संगणनीय फलनों के लिए सार्वत्रिक है, ऐसा कोई पूर्ण संगणनीय फलन नहीं है जो पूर्ण संगणनीय फलनों के लिए सार्वत्रिक हो।

प्रमेय 30.5. *कोई सार्वत्रिक संगणनीय फलन नहीं है। दूसरे शब्दों में, ऐसा कोई भी फलन $\mathrm{Un}'(k,x)$ संगणनीय नहीं है जिसमें यह गुण हो कि यदि $f(x)$ कोई पूर्ण संगणनीय फलन है, तो कोई प्राकृतिक संख्या k ऐसी है कि $f(x) = \mathrm{Un}'(k,x)$ प्रत्येक x के लिए।*

प्रमाण. प्रमाण एक सरल विकर्णीकरण है: यदि $\mathrm{Un}'(k,x)$ पूर्ण और संगणनीय होता, तो

$$d(x) = \mathrm{Un}'(x,x) + 1$$

भी पूर्ण और संगणनीय होता। किंतु परिभाषा से $d(k)$, $\mathrm{Un}'(k,k)$ के बराबर नहीं है। अतः प्रत्येक k के लिए $d(x)$ और $\mathrm{Un}'(k,x)$ के मान कम-से-कम एक x, अर्थात् $x = k$, पर भिन्न हैं। □

ऊपर का प्रमेय 30.4 दिखाता है कि इस विकर्णीकरण तर्क से बचा जा सकता है, पर केवल सार्वत्रिक फलन को आंशिक रहने देने की कीमत पर। अर्थात् Un पूर्ण संगणनीय फलनों के लिए सार्वत्रिक तो है, बस स्वयं पूर्ण नहीं है। आंशिक स्थिति में विकर्णीकरण तर्क काम नहीं करता।

30.7 विराम समस्या

रचना के अनुसार सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन $\mathrm{Un}(e,x)$ तभी और केवल तभी परिभाषित है, जब e से कूटित फलन की संगणना आगत x के लिए कोई मान उत्पन्न करती है। यह पूछना स्वाभाविक है कि क्या हम तय कर सकते हैं कि ऐसा होता है या नहीं। वास्तव में हम ऐसा नहीं कर सकते। संगणना के ट्यूरिंग मशीन मॉडल में इसका अर्थ है कि कोई दी हुई ट्यूरिंग मशीन किसी दी हुई आगत पर रुकती है या नहीं, यह संगणनात्मक रूप से अनिर्णेय है। इसलिए अगला प्रमेय "विराम समस्या की अनिर्णेयता" कहलाता है। नीचे हम दो प्रमाण देंगे। पहला हमारी पिछली चर्चा की कड़ी को आगे बढ़ाता है, जबकि दूसरा अधिक प्रत्यक्ष है।

प्रमेय 30.6. *मानें*

$$h(e,x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \mathrm{Un}(e,x) \text{ परिभाषित है} \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

तब h संगणनीय नहीं है।

प्रमाण. मान लें कि h संगणनीय है। हम दिखाते हैं कि तब हम एक सार्वत्रिक संगणनीय फलन परिभाषित कर सकते हैं। परिभाषित करें

$$\mathrm{Un}'(e,x) = \begin{cases} \mathrm{Un}(e,x) & \text{यदि } h(e,x) = 1 \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अब $\mathrm{Un}'(e,x)$ एक पूर्ण फलन है, और यदि h संगणनीय है तो यह भी संगणनीय है। उदाहरणतः, आदिम पुनरावर्तन से g को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$g(0,e,x) \simeq 0$$
$$g(y+1,e,x) \simeq \mathrm{Un}(e,x);$$

तब

$$\mathrm{Un}'(e,x) \simeq g(h(e,x),e,x).$$

$\mathrm{Un}'(e,x)$, $\mathrm{Un}(e,x)$ से हर उस स्थान पर सहमत है जहाँ बाद वाला परिभाषित है; अतः Un' उन आंशिक संगणनीय फलनों के लिए सार्वत्रिक है जो पूर्ण हैं। किंतु यह प्रमेय 30.5 के विरुद्ध है। □

प्रमाण. मान लें कि $h(e,x)$ संगणनीय होता। फलन g को इस प्रकार परिभाषित करें:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } h(x,x) = 0 \\ \uparrow & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

फलन g आंशिक संगणनीय है। उदाहरणतः, इसे $\mu y\ h(x,x) = 0$ के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। अतः किसी e के लिए $g(x) \simeq \mathrm{Un}(e,x)$ प्रत्येक x पर। क्या g, e पर परिभाषित है? यदि हाँ, तो g की परिभाषा से $h(e,e) = 0$ (h मान 0 तभी ले सकता है जब वह परिभाषित हो)। फिर h की परिभाषा से $\mathrm{Un}(e,e)$ अपरिभाषित है। हमारी मान्यता $g(x) \simeq \mathrm{Un}(e,x)$, जो प्रत्येक x के लिए है, से इसका अर्थ है कि $g(e)$ अपरिभाषित है—विरोधाभास। दूसरी ओर, यदि $g(e)$ अपरिभाषित है, तो $h(e,e) \neq 0$, और इसलिए $h(e,e) = 1$। फलतः $\mathrm{Un}(e,e)$ परिभाषित है। किंतु $g(x) \simeq \mathrm{Un}(e,x)$ होने से $g(e)$ भी परिभाषित होगा। फिर से विरोधाभास। $\square$

इस तर्क को ट्यूरिंग मशीनों के पदों में भी कहा जा सकता है। मान लें कि कोई ट्यूरिंग मशीन H है, जो किसी ट्यूरिंग मशीन E का वर्णन और कोई आगत x लेकर तय करती है कि E, आगत x पर रुकती है या नहीं। तब हम एक दूसरी ट्यूरिंग मशीन G बना सकते हैं, जो एक ही आगत x लेती है, H को चलाकर तय करती है कि मशीन M_x, जिसका सूचकांक x है, आगत x पर रुकती है या नहीं, और फिर इसके विपरीत करती है। दूसरे शब्दों में, यदि H बताती है कि M_x, आगत x पर रुकती है, तो G अनंत चक्र में चली जाती है; और यदि H बताती है कि M_x, आगत x पर नहीं रुकती, तो G रुक जाती है। क्या G अपने ही सूचकांक को आगत बनाने पर रुकती है? ऊपर का तर्क दिखाता है कि वह तभी रुकती है जब वह नहीं रुकती—यह विरोधाभास है। अतः ऐसी ट्यूरिंग मशीन H के अस्तित्व की हमारी मान्यता असत्य है।

30.8 रसेल के विरोधाभास से तुलना

इस अनुभाग के तर्कों की रसेल के विरोधाभास से समानता और भिन्नता देखना ज्ञानवर्धक है:

1. रसेल का विरोधाभास: $S = \{x : x \notin x\}$ मानें। तब $S \in S$ तभी और केवल तभी जब $X \notin S$—यह विरोधाभास है।

   निष्कर्ष: ऐसा कोई समुच्चय S नहीं है। "सभी समुच्चयों के समुच्चय" का अस्तित्व मानना समुच्चय सिद्धांत के अन्य अभिगृहीतों से असंगत है।

2. रसेल के विरोधाभास का एक रूपांतरण: F को सभी फलनों के समुच्चय से $\{0,1\}$ में वह "फलन" मानें जिसकी परिभाषा है

$$F(f) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } f,\ f \text{ के प्रांत में है और } f(f) = 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

   ऐसा ही तर्क दिखाता है कि $F(F) = 0$ तभी और केवल तभी जब $F(F) = 1$— यह विरोधाभास है।

   निष्कर्ष: F कोई फलन नहीं है। "सभी फलनों का समुच्चय" इतना बड़ा है कि वह किसी फलन का प्रांत नहीं हो सकता।

3. विकर्णीकरण तर्क: f_0, f_1, ...को आंशिक संगणनीय फलनों का परिगणन मानें, और $G\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ की परिभाषा हो

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } f_x(x) \downarrow = 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

   यदि G संगणनीय है, तो वह फलन f_k है, किसी k के लिए। किंतु तब $G(k) = 1$ तभी और केवल तभी जब $G(k) = 0$—यह विरोधाभास है।

   निष्कर्ष: G संगणनीय नहीं है। ध्यान दें कि समुच्चय सिद्धांत के अभिगृहीतों के अनुसार G फिर भी एक फलन है; यहाँ कोई विरोधाभास नहीं, केवल एक स्पष्टीकरण है।

आंशिक फलनों, संगणनीय फलनों, आंशिक संगणनीय फलनों आदि की यह चर्चा भ्रमित कर सकती है। $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ में सभी आंशिक फलनों का समुच्चय वस्तुओं का एक बड़ा संग्रह है। उनमें कुछ पूर्ण हैं, कुछ संगणनीय हैं, कुछ पूर्ण और संगणनीय दोनों हैं, और कुछ इनमें से कोई नहीं हैं। ध्यान रखें कि जब हम "फलन" कहते हैं, तो सामान्यतः हमारा अर्थ पूर्ण फलन होता है। अतः हमारे पास ये वर्ग हैं:

1. संगणनीय फलन
2. वे आंशिक संगणनीय फलन जो पूर्ण नहीं हैं
3. वे फलन जो संगणनीय नहीं हैं
4. वे आंशिक फलन जो न पूर्ण हैं, न संगणनीय

इसे व्यवस्थित करने के लिए $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ में सभी आंशिक फलनों को दर्शाने वाला एक बड़ा वर्ग बनाना और फिर क्रमशः पूर्ण फलनों तथा संगणनीय आंशिक फलनों के अनुरूप दो अतिव्यापी क्षेत्र चिह्नित करना सहायक हो सकता है। आरेख में बने प्रत्येक क्षेत्र की किसी वस्तु का वर्णन कर पाना एक अच्छा अभ्यास है।

30.9 संगणनीय समुच्चय

हम संगणनीयता की धारणा को संगणनीय फलनों से संगणनीय समुच्चयों तक विस्तृत कर सकते हैं:

परिभाषा 30.7. S को प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय मानें। तब S *संगणनीय* तभी और केवल तभी है जब उसका अभिलाक्षणिक फलन χ_S संगणनीय हो। दूसरे शब्दों में, S तभी और केवल तभी संगणनीय है जब फलन

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \in S \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

संगणनीय हो। इसी प्रकार संबंध $R(x_0, \ldots, x_{k-1})$ तभी और केवल तभी संगणनीय है जब उसका अभिलाक्षणिक फलन संगणनीय हो।

संगणनीय समुच्चयों और संबंधों को *निर्णेय* भी कहा जाता है।

ध्यान दें कि अब हमारे पास संगणनीयता की कई धारणाएँ हैं: आंशिक फलनों, फलनों और समुच्चयों के लिए। इन्हें परस्पर न मिलाएँ! किसी आंशिक फलन को संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीन उन आगत मानों पर फलन का निर्गत लौटाती है जिन पर फलन परिभाषित है; किसी समुच्चय को संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीन यह तय करने के बाद कि आगत मान समुच्चय में है या नहीं, या तो 1 अथवा 0 लौटाती है।

30.10 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय

परिभाषा 30.8. कोई समुच्चय *संगणनीयतः परिगणनीय* है, यदि वह रिक्त है अथवा किसी संगणनीय फलन का परिसर है।

ऐतिहासिक टिप्पणियाँ संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों को *पुनरावर्ततः परिगणनीय* भी कहा जाता है। यही मूल शब्दावली है; आज दोनों नाम और उनके संक्षेप "c.e." तथा "r.e." सामान्यतः प्रयुक्त होते हैं।

आपको विचार करना चाहिए कि इस परिभाषा का क्या अर्थ है और यह शब्दावली उचित क्यों है। विचार यह है कि यदि S, संगणनीय फलन f का परिसर है, तो

$$S = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\},$$

और इस प्रकार f को S के अवयवों का "परिगणन" करने वाला माना जा सकता है। ध्यान दें कि परिभाषा के अनुसार f का वर्धमान फलन होना आवश्यक नहीं, अर्थात् परिगणन का वर्धमान क्रम में होना आवश्यक नहीं। वास्तव में f का एकैकी होना भी आवश्यक नहीं; अर्थात् परिगणन $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... में S के अवयवों की पुनरावृत्तियाँ अनुमत हैं। उदाहरणतः अचर फलन $f(x) = 0$, समुच्चय $\{0\}$ का परिगणन करता है।

प्रत्येक संगणनीय समुच्चय संगणनीयतः परिगणनीय है। इसे देखने के लिए मान लें कि S संगणनीय है। यदि S रिक्त है, तो परिभाषा से वह संगणनीयतः परिगणनीय है। अन्यथा a को S का कोई अवयव मानें। f को परिभाषित करें:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } \chi_S(x) = 1 \\ a & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

तब f एक संगणनीय फलन है और S, f का परिसर है।

30.11 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों की समतुल्य परिभाषाएँ

निम्न प्रमेय संगणनीयतः परिगणनीय होने के अर्थ के कई महत्त्वपूर्ण समतुल्य कथन देता है।

प्रमेय 30.9. *S को प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय मानें। तब निम्नलिखित कथन समतुल्य हैं:*

1. *S संगणनीयतः परिगणनीय है।*
2. *S किसी आंशिक संगणनीय फलन का परिसर है।*
3. *S रिक्त है अथवा किसी आदिम पुनरावर्ती फलन का परिसर है।*
4. *S किसी आंशिक संगणनीय फलन का प्रांत है।*

पहले तीन उपवाक्य कहते हैं कि किसी भी अरिक्त संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय को समतुल्य रूप से किसी संगणनीय फलन, किसी आंशिक संगणनीय फलन अथवा किसी आदिम पुनरावर्ती फलन द्वारा परिगणित माना जा सकता है। चौथा उपवाक्य बताता है कि यदि S संगणनीयतः परिगणनीय है, तो किसी सूचकांक e के लिए

$$S = \{x : \varphi_e(x) \downarrow\}.$$

दूसरे शब्दों में, S उन आगतों का समुच्चय है जिन पर φ_e की संगणना रुकती है। इसी कारण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों को कभी-कभी *अर्ध-निर्णेय* कहते हैं: यदि कोई संख्या समुच्चय में है, तो अंततः "हाँ" मिल जाती है; लेकिन यदि वह उसमें नहीं है, तो कभी "नहीं" नहीं मिलती!

प्रमाण. चूँकि प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन संगणनीय और प्रत्येक संगणनीय फलन आंशिक संगणनीय है, (3) से (1) तथा (1) से (2) निष्पन्न होता है। (ध्यान दें कि यदि S रिक्त है, तो S उस आंशिक संगणनीय फलन का परिसर है जो कहीं भी परिभाषित नहीं है।) यदि हम दिखा दें कि (2) से (3) निष्पन्न होता है, तो पहले तीनों उपवाक्यों की समतुल्यता सिद्ध हो जाएगी।

अतः मान लें कि S, आंशिक संगणनीय फलन φ_e का परिसर है। यदि S रिक्त है, तो कार्य पूरा हुआ। अन्यथा a को S का कोई अवयव मानें। क्लीन के प्रसामान्य रूप प्रमेय से हम लिख सकते हैं

$$\varphi_e(x) = U(\mu s\, T(e, x, s)).$$

विशेषतः, $\varphi_e(x) \downarrow$ और $= y$ तभी और केवल तभी जब कोई s ऐसा हो कि $T(e, x, s)$ तथा $U(s) = y$। $f(z)$ को परिभाषित करें:

$$f(z) = \begin{cases} U((z)_1) & \text{यदि } T(e, (z)_0, (z)_1) \\ a & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

तब f आदिम पुनरावर्ती है, क्योंकि T और U ऐसे ही हैं। ट्यूरिंग मशीनों के पदों में, यदि z किसी ऐसे युग्म $\langle (z)_0, (z)_1 \rangle$ को कूटित करता है जिसमें $(z)_1$, मशीन M_e की आगत $(z)_0$ पर रुकने वाली संगणना है, तो f संगणना का निर्गत लौटाता है; अन्यथा वह a लौटाता है।हमें दिखाना है कि S, f का परिसर है; अर्थात् किसी भी प्राकृतिक संख्या y के लिए

$y \in S$ तभी और केवल तभी जब वह f के परिसर में है। आगे की दिशा में मान लें कि $y \in S$। तब y, φ_e के परिसर में है, अतः किन्हीं x और s के लिए $T(e, x, s)$ सत्य है तथा $U(s) = y$। पर तब $y = f(\langle x, s\rangle)$। उलटी दिशा में मान लें कि y, f के परिसर में है। तब या तो $y = a$, अथवा किसी z के लिए $T(e, (z)_0, (z)_1)$ और $U((z)_1) = y$। चूँकि बाद वाली स्थिति में $\varphi_e(x) \downarrow= y$, दोनों ही स्थितियों में y, S में है।

(संकेत $\varphi_e(x) \downarrow= y$ का अर्थ है कि "$\varphi_e(x)$ परिभाषित और y के बराबर है।" हम $\varphi_e(x) = y$ भी लिख सकते थे, पर अतिरिक्त तीर कभी-कभी यह याद दिलाने में सहायक है कि हम किसी आंशिक फलन से व्यवहार कर रहे हैं।)

प्रमेय 30.9 का प्रमाण पूरा करने के लिए यह दिखाना पर्याप्त है कि (1) और (4) समतुल्य हैं। पहले दिखाएँ कि (1) से (4) निष्पन्न होता है। मान लें कि S किसी संगणनीय फलन f का परिसर है, अर्थात्

$$S = \{y : \text{किसी } x \text{ के लिए, } f(x) = y\}.$$

मानें

$$g(y) = \mu x\ (f(x) = y).$$

तब g एक आंशिक संगणनीय फलन है, और $g(y)$ तभी और केवल तभी परिभाषित है जब किसी x के लिए $f(x) = y$। दूसरे शब्दों में, g का प्रांत f का परिसर है। ट्यूरिंग मशीनों के पदों में: ट्यूरिंग मशीन F मिलने पर, जो S के अवयवों का परिगणन करती है, G वह ट्यूरिंग मशीन हो जो S को F के निर्गतों में किसी दिए अवयव को खोजकर अर्ध-निर्णीत करती है; अवयव मिलने पर रुकती है और न मिलने पर सदा खोजती रहती है।

अंततः, (4) से (1) दिखाने के लिए मान लें कि S आंशिक संगणनीय फलन φ_e का प्रांत है, अर्थात्

$$S = \{x : \varphi_e(x) \downarrow\}.$$

यदि S रिक्त है, तो कार्य पूरा हुआ; अन्यथा a को S का कोई अवयव मानें। f को परिभाषित करें:

$$f(z) = \begin{cases} (z)_0 & \text{यदि } T(e, (z)_0, (z)_1) \\ a & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

तब, ऊपर की तरह, कोई संख्या x, f के परिसर में तभी और केवल तभी है जब $\varphi_e(x) \downarrow$, अर्थात् तभी और केवल तभी जब $x \in S$। ट्यूरिंग मशीनों के पदों में: मशीन M_e मिलने पर, जो S को अर्ध-निर्णीत करती है, सभी संभव ट्यूरिंग मशीन संगणनाओं को चलाकर और रुकने वाली संगणनाओं के अनुरूप आगत लौटाकर S के अवयवों का परिगणन करें। □

प्रमेय 30.9 का उपवाक्य (4) संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों के परिगणन का सुविधाजनक ढंग देता है: प्रत्येक e के लिए W_e, φ_e के प्रांत को निरूपित करे, अर्थात्

$$W_e = \{x : \varphi_e(x) \downarrow\}.$$

तब यदि A कोई संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय है, तो $A = W_e$, किसी e के लिए।

अगला प्रमेय संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों का एक और अभिलक्षण देता है।

प्रमेय 30.10. *कोई समुच्चय S तभी और केवल तभी संगणनीयतः परिगणनीय है जब कोई संगणनीय संबंध $R(x, y)$ ऐसा हो कि*

$$S = \{x : \exists y\, R(x, y)\}.$$

प्रमाण. आगे की दिशा में मान लें कि S संगणनीयतः परिगणनीय है। तब किसी e के लिए $S = W_e$। e के इस मान पर हम S को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$S = \{x : \exists y\, T(e, x, y)\}.$$

उलटी दिशा में मान लें कि $S = \{x : \exists y\, R(x, y)\}$। f को परिभाषित करें:

$$f(x) \simeq \mu y\ R(x, y).$$

तब f आंशिक संगणनीय है और S, f का प्रांत है। □

30.12 असंगणनीय समुच्चय अस्तित्व में हैं

हमने ऊपर देखा कि प्रत्येक संगणनीय समुच्चय संगणनीयतः परिगणनीय है। क्या इसका विलोम सत्य है? अगला परिणाम दिखाता है कि सामान्यतः ऐसा नहीं है।

प्रमेय 30.11. *K_0 को समुच्चय $\{\langle e, x\rangle : \varphi_e(x) \downarrow\}$ मानें। तब K_0 संगणनीयतः परिगणनीय है, किंतु संगणनीय नहीं।*

प्रमाण. K_0 को संगणनीयतः परिगणनीय देखने के लिए ध्यान दें कि वह इस प्रकार परिभाषित फलन f का प्रांत है:

$$f(z) = \mu y\ (\mathrm{len}(z) = 2 \wedge T((z)_0, (z)_1, y)).$$

वास्तव में, यदि $\varphi_e(x)$ परिभाषित है, तो $f(\langle e, x\rangle)$ रुकने वाला कोई संगणना अनुक्रम खोज लेता है; यदि $\varphi_e(x)$ अपरिभाषित है, तो $f(\langle e, x\rangle)$ भी अपरिभाषित है; और यदि z किसी युग्म को कूटित तक नहीं करता, तो $f(z)$ भी अपरिभाषित है।

K_0 का असंगणनीय होना ठीक विराम समस्या की अनिर्णेयता, प्रमेय 30.6, है। □

समुच्चय K_0 उन युग्मों $\langle e, x\rangle$ का समुच्चय है जिनके लिए $\varphi_e(x) \downarrow$; अर्थात् $\langle e, x\rangle \in K_0$ तभी और केवल तभी जब φ_e, आगत x पर परिभाषित है (रुकता है), इसलिए इसे "विराम समुच्चय" भी कहते हैं। समुच्चय $K = \{e : \varphi_e(e) \downarrow\}$ "स्व-विराम समुच्चय" है। इसे प्रायः एक आदर्श अनिर्णेय समुच्चय के रूप में प्रयोग किया जाता है।

प्रमेय 30.12. *स्व-विराम समुच्चय $K = \{e : \varphi_e(e) \downarrow\}$ संगणनीयतः परिगणनीय है, किंतु निर्णेय नहीं।*

प्रमाण. मान लें कि K निर्णेय है, अर्थात् उसका अभिलाक्षणिक फलन χ_K संगणनीय है। मानें

$$d(e) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \chi_K(e) = 0 \\ \uparrow & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

k को d का सूचकांक मानें, अर्थात् $d \simeq \varphi_k$। तब $d(k) \simeq \varphi_k(k)$। यह इस तथ्य के विरुद्ध है कि $d(k) \downarrow$ तभी और केवल तभी जब $\varphi_k(k) \uparrow$; यह d की परिभाषा से निष्पन्न होता है।

K, $f(x) = \mu y\ T(x, x, y)$ का प्रांत है और इसलिए संगणनीयतः परिगणनीय है। □

30.13 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय संघ और प्रतिच्छेद के अंतर्गत संवृत हैं

अगला प्रमेय संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों के कुछ संवृतता-गुण देता है।

प्रमेय 30.13. *मान लें कि A और B संगणनीयतः परिगणनीय हैं। तब $A \cap B$ और $A \cup B$ भी ऐसे ही हैं।*

प्रमाण. प्रमेय 30.9 हमें संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों के विभिन्न अभिलक्षणों का उपयोग करने देता है। स्पष्टीकरण के लिए हम कुछ भिन्न प्रमाण देंगे।

पहले प्रमाण के लिए मान लें कि A का परिगणन संगणनीय फलन f और B का परिगणन संगणनीय फलन g करता है। मानें

$$h(x) = \mu y\ (f(y) = x \vee g(y) = x) \text{ तथा}$$
$$j(x) = \mu y\ (f((y)_0) = x \wedge g((y)_1) = x).$$

तब $A \cup B$, h का प्रांत है और $A \cap B$, j का प्रांत है।

संगणनात्मक पदों में यह हो रहा है: A और B का परिगणन करने वाली प्रक्रियाएँ मिलने पर हम अर्ध-निर्णय कर सकते हैं कि अवयव x, $A \cup B$ में है या नहीं—इसके लिए किसी भी परिगणन में x खोजें; और हम अर्ध-निर्णय कर सकते हैं कि अवयव x, $A \cap B$ में है या नहीं—इसके लिए दोनों परिगणनों में एक साथ x खोजें।

दूसरे प्रमाण के लिए फिर मान लें कि A का परिगणन f और B का परिगणन g करता है। मानें

$$k(x) = \begin{cases} f(x/2) & \text{यदि } x \text{ सम है} \\ g((x-1)/2) & \text{यदि } x \text{ विषम है।} \end{cases}$$

तब k, $A \cup B$ का परिगणन करता है; विचार यह है कि k, f और g द्वारा दिए परिगणनों को बारी-बारी से लेता है। $A \cap B$ का परिगणन अधिक कठिन है। यदि $A \cap B$ रिक्त है, तो वह तुच्छतः संगणनीयतः परिगणनीय है। अन्यथा c को $A \cap B$ का कोई अवयव मानें और l को परिभाषित करें:

$$l(x) = \begin{cases} f((x)_0) & \text{यदि } f((x)_0) = g((x)_1) \\ c & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

संगणनात्मक पदों में, l, f और g के परिगणनों के अवयव-युग्मों से होकर चलता है और मिलने वाला प्रत्येक मेल निर्गत करता है; अन्यथा वह c निर्गत करके वहीं बना रहता है।

अंतिम प्रमाण के लिए मान लें कि A आंशिक फलन $m(x)$ का *प्रांत* और B आंशिक फलन $n(x)$ का प्रांत है। तब $A \cap B$ आंशिक फलन $m(x) + n(x)$ का प्रांत है।

संगणनात्मक पदों में, यदि A उन मानों का समुच्चय है जिन पर m रुकता है और B उन मानों का समुच्चय है जिन पर n रुकता है, तो $A \cap B$ उन मानों का समुच्चय है जिन पर दोनों प्रक्रियाएँ रुकती हैं।

$A \cup B$ को रुकने वाले मानों के समुच्चय के रूप में व्यक्त करना अधिक कठिन है, क्योंकि m और n का समानांतर अनुकरण करना पड़ता है। d को m का और e को n का सूचकांक मानें; दूसरे शब्दों में, $m = \varphi_d$ और $n = \varphi_e$। तब $A \cup B$ इस फलन का प्रांत है:

$$p(x) = \mu y\ (T(d, x, y) \vee T(e, x, y)).$$

संगणनात्मक पदों में, आगत x पर p, m की रुकने वाली संगणना अथवा n की रुकने वाली संगणना खोजता है और इनमें से कोई मिलते ही रुक जाता है। □

30.14 संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय पूरक के अंतर्गत संवृत नहीं हैं

मान लें कि A संगणनीयतः परिगणनीय है। क्या A का पूरक $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$ भी सदैव संगणनीयतः परिगणनीय होता है? अगला प्रमेय और उपप्रमेय दिखाते हैं कि उत्तर "नहीं" है।

प्रमेय 30.14. *A को प्राकृतिक संख्याओं का कोई समुच्चय मानें। तब A तभी और केवल तभी संगणनीय है जब A और $\overline{A}$ दोनों संगणनीयतः परिगणनीय हों।*

प्रमाण. आगे की दिशा सरल है: यदि A संगणनीय है, तो $\overline{A}$ भी संगणनीय है ($\chi_A = 1 \dot{-} \chi_{\overline{A}}$), और इसलिए दोनों संगणनीयतः परिगणनीय हैं।

दूसरी दिशा में मान लें कि A और $\overline{A}$ दोनों संगणनीयतः परिगणनीय हैं। A को φ_d का प्रांत और $\overline{A}$ को φ_e का प्रांत मानें। h को परिभाषित करें:

$$h(x) = \mu s\ (T(d, x, s) \vee T(e, x, s)).$$

दूसरे शब्दों में, आगत x पर h, φ_d की रुकने वाली संगणना अथवा φ_e की रुकने वाली संगणना खोजता है। अब यदि $x \in A$, तो वह पहली स्थिति में सफल होगा; और यदि $x \in \overline{A}$, तो दूसरी स्थिति में सफल होगा। अतः h एक पूर्ण संगणनीय फलन है। किंतु अब प्रत्येक x के लिए $x \in A$ तभी और केवल तभी जब $T(e, x, h(x))$, अर्थात् जब φ_e ही परिभाषित हो। चूँकि $T(e, x, h(x))$ एक संगणनीय संबंध है, A संगणनीय है। □

जो हो रहा है उसे अनौपचारिक संगणनात्मक पदों में समझना सरल है: A का निर्णय करने के लिए आगत x पर φ_e और φ_f की रुकने वाली संगणनाएँ खोजें। उनमें से एक अवश्य रुकेगी; यदि वह φ_e है, तो x, A में है, अन्यथा x, $\overline{A}$ में है।

उपप्रमेय 30.15. *$\overline{K_0}$ संगणनीयतः परिगणनीय नहीं है।*

प्रमाण. हम जानते हैं कि K_0 संगणनीयतः परिगणनीय है, किंतु संगणनीय नहीं। यदि $\overline{K_0}$ संगणनीयतः परिगणनीय होता, तो प्रमेय 30.14 से K_0 संगणनीय होता, जो प्रमेय 30.11 के विरुद्ध है। □

30.15 अपचयनीयता

अब हम जानते हैं कि कम-से-कम एक समुच्चय K_0 ऐसा है जो संगणनीयतः परिगणनीय तो है, पर संगणनीय नहीं। स्पष्टतः ऐसे और भी समुच्चय हैं। अपचयनीयता की विधि अन्य समुच्चयों में ये गुण दिखाने का एक शक्तिशाली ढंग देती है, जिसमें बार-बार मूल सिद्धांतों पर लौटने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

सामान्यतः, किसी समुच्चय A का किसी समुच्चय B में "अपचयन" वह विधि है जो प्रत्येक अवयव के B में होने या न होने के उत्तर को उसी अवयव के A में होने या न होने के उत्तर में बदलती है। हम "अनेक-एक अपचयनीयता" नामक धारणा पर ध्यान देंगे, यद्यपि विभिन्न गुणों वाली अपचयनीयता की कई अन्य धारणाएँ भी हैं। संगणनात्मक जटिलता के अध्ययन में भी अपचयनीयता की धारणाएँ केंद्रीय हैं, जहाँ दक्षता के प्रश्नों पर भी विचार करना पड़ता है। उदाहरणतः, कोई समुच्चय "NP-पूर्ण" कहलाता है यदि वह NP में हो और प्रत्येक NP समस्या को उसमें अपचयित किया जा सके; इसमें नीचे वर्णित धारणा जैसी अपचयन-धारणा प्रयुक्त होती है, साथ में यह अतिरिक्त आवश्यकता होती है कि अपचयन बहुपद समय में संगणित हो सके।

हम अपचयन की धारणा का परोक्ष रूप से पहले ही उपयोग कर चुके हैं। समुच्चय K को परिभाषित करें:

$$K = \{x : \varphi_x(x) \downarrow\},$$

अर्थात् $K = \{x : x \in W_x\}$। विराम समस्या के असमाधेय होने का हमारा प्रमाण (प्रमेय 30.6) सबसे सीधे ढंग से दिखाता है कि K संगणनीय नहीं है। याद करें कि K_0 यह समुच्चय है:

$$K_0 = \{\langle e, x\rangle : \varphi_e(x) \downarrow\},$$

अर्थात् $K_0 = \{\langle x, e\rangle : x \in W_e\}$। K की असंगणनीयता के किसी भी प्रमाण को K_0 की असंगणनीयता तक बढ़ाना सरल है: यदि K_0 संगणनीय होता, तो हम केवल यह पूछकर तय कर सकते थे कि अवयव x, K में है या नहीं कि युग्म $\langle x, x\rangle$, K_0 में है या नहीं। फलन f, जो x को $\langle x, x\rangle$ पर प्रतिचित्रित करता है, K से K_0 में एक *अपचयन* का उदाहरण है।

परिभाषा 30.16. A और B को प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय मानें। कोई संगणनीय फलन $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, A से B में *अनेक-एक अपचयन* तभी और केवल तभी है जब प्रत्येक प्राकृतिक संख्या x के लिए

$$x \in A \quad \text{तभी और केवल तभी} \quad f(x) \in B.$$

यदि ऐसा अपचयन f अस्तित्व में हो, तो हम कहते हैं कि A, B में *अनेक-एक अपचयनीय* है और $A \leq_m B$ लिखते हैं। यदि A, B में अनेक-एक अपचयनीय हो और विलोमतः भी ऐसा हो, तो A और B *अनेक-एक समतुल्य* कहलाते हैं और $A \equiv_m B$ लिखा जाता है।

यदि ऊपर की परिभाषा का फलन f एकैकी हो, तो A, B में *एक-एक अपचयनीय* कहलाता है। नीचे वर्णित अधिकांश अपचयन इस अधिक प्रबल आवश्यकता को पूरा करते हैं, पर हम इस तथ्य का उपयोग नहीं करेंगे।

यह सत्य है, किंतु तनिक भी स्पष्ट नहीं, कि एक-एक अपचयनीयता वास्तव में अनेक-एक अपचयनीयता से अधिक प्रबल आवश्यकता है। दूसरे शब्दों में, ऐसे अनंत समुच्चय A और B हैं जिनमें A, B में अनेक-एक अपचयनीय है, किंतु B में एक-एक अपचयनीय नहीं।

30.16 अपचयनीयता के गुण

हम $A \leq_m B$ लिखते हैं यदि A, B में अपचयित होता है। यह संकेत सुझाता है कि यदि $A \leq_m B$, तो A, B से "अधिक कठिन नहीं" और B, A के "बराबर या उससे अधिक कठिन" है; तथा $\leq_m$, संख्याओं पर सामान्य $\leq$ की तरह, समुच्चयों (या निर्णय समस्याओं) को उनकी जटिलता के अनुसार क्रमबद्ध करता है। अगले दो साध्य इस सहज बोध का समर्थन करते हैं। पहला कहता है कि $\leq_m$ संक्रामक है।

प्रतिज्ञप्ति 30.17. *यदि $A \leq_m B$ और $B \leq_m C$, तो $A \leq_m C$।*

प्रमाण. A से B में अपचयन को B से C में अपचयन के साथ संयोजित करने पर A से C में अपचयन मिलता है। □

प्रतिज्ञप्ति 30.18. *A और B को कोई समुच्चय मानें और मान लें कि $A \leq_m B$।*

1. *यदि B संगणनीयतः परिगणनीय है, तो A भी है।*
2. *यदि B संगणनीय है, तो A भी है।*

प्रमाण. f को A से B में अनेक-एक अपचयन मानें। पहले दावे के लिए केवल जाँचें कि यदि B किसी आंशिक फलन g का प्रांत है, तो A, $g \circ f$ का प्रांत है:

$$\begin{aligned} x \in A \text{ तभी और केवल तभी } & f(x) \in B \\ \text{तभी और केवल तभी } & g(f(x)) \downarrow . \end{aligned}$$

दूसरे दावे के लिए याद करें कि यदि B संगणनीय है, तो B और $\overline{B}$ संगणनीयतः परिगणनीय हैं (प्रमेय 30.14)। यह जाँचना कठिन नहीं कि f, $\overline{A}$ से $\overline{B}$ में भी अनेक-एक अपचयन है; अतः इस प्रमाण के पहले भाग से A और $\overline{A}$ दोनों संगणनीयतः परिगणनीय हैं। इसलिए प्रमेय 30.14 से A भी संगणनीय है। (वैकल्पिक रूप से, आप जाँच सकते हैं कि $\chi_A = \chi_B \circ f$; अतः यदि χ_B संगणनीय है, तो χ_A भी है।) □

अपचयनीयता की अधिक सामान्य धारणा, *ट्यूरिंग अपचयनीयता*, अन्य संदर्भों में—विशेषतः अनिर्णेयता के परिणाम सिद्ध करने में—उपयोगी है। ध्यान दें कि उपप्रमेय 30.15 से K_0 का पूरक K_0 में अपचयनीय नहीं है, क्योंकि वह संगणनीयतः परिगणनीय नहीं है। किंतु सहज रूप से, यदि आप K_0 के बारे में प्रश्नों के उत्तर जानते, तो उसके पूरक के बारे में प्रश्नों के उत्तर भी जानते। कोई समुच्चय A, B में ट्यूरिंग अपचयनीय कहलाता है यदि A के प्रश्नों के उत्तर, B के बारे में प्रश्न पूछ सकने वाली संगणनीय प्रक्रिया से निर्धारित किए जा सकें। यह अनेक-एक अपचयनीयता से अधिक उदार है, जिसमें (1) आपको B के बारे में केवल एक प्रश्न पूछने की अनुमति है, और (2) "हाँ" उत्तर का A के प्रश्न के "हाँ" उत्तर में बदलना आवश्यक है, तथा "नहीं" के लिए भी वैसा ही। फिर भी, यदि A, B में ट्यूरिंग अपचयनीय और B संगणनीय है, तो A भी संगणनीय है (यद्यपि, जैसा हमने देखा, संगणनीय परिगणनीयता के लिए अनुरूप कथन सत्य नहीं है)।

हमने जिन विभिन्न अपचयनीयता-धारणाओं पर चर्चा की है, उन पर विचार करें और उनके भेद समझें। किंतु इस अध्याय में हम केवल अनेक-एक अपचयनीयता से व्यवहार करेंगे। प्रसंगवश, पिछले अनुच्छेद में चर्चित दोनों प्रकारों के संगणनात्मक जटिलता में अनुरूप रूप हैं, साथ में यह अतिरिक्त आवश्यकता कि ट्यूरिंग मशीनें बहुपद समय में चलें: अनेक-एक अपचयनीयता का जटिलता-संस्करण *कार्प अपचयनीयता* और ट्यूरिंग अपचयनीयता का जटिलता-संस्करण *कुक अपचयनीयता* कहलाता है।

30.17 पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय

परिभाषा 30.19. कोई समुच्चय A (अनेक-एक अपचयनीयता के अंतर्गत) *पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय* है, यदि

1. A संगणनीयतः परिगणनीय है, और

2. किसी भी अन्य संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय B के लिए $B \leq_m A$।

दूसरे शब्दों में, पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय संभवतः "सबसे कठिन" संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय हैं। वे *किसी भी* संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय के प्रश्नों का उत्तर देने देते हैं।

प्रमेय 30.20. *K, K_0, और K_1 सभी पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय हैं।*

प्रमाण. K_0 को पूर्ण देखने के लिए B को कोई संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय मानें। तब किसी सूचकांक e के लिए

$$B = W_e = \{x : \varphi_e(x) \downarrow\}.$$

f को फलन $f(x) = \langle e, x\rangle$ मानें। तब प्रत्येक प्राकृतिक संख्या x के लिए $x \in B$ तभी और केवल तभी जब $f(x) \in K_0$। दूसरे शब्दों में, f, B को K_0 में अपचयित करता है।

K_1 को पूर्ण देखने के लिए ध्यान दें कि प्रतिज्ञप्ति 30.21 के प्रमाण में हमने K_0 को उसमें अपचयित किया था। अतः प्रतिज्ञप्ति 30.17 से किसी भी संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय को K_1 में भी अपचयित किया जा सकता है।

K को लगभग इसी ढंग से K_0 में अपचयित किया जा सकता है। □

इस प्रकार अब तक विचार किए गए संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों के सभी उदाहरण या तो संगणनीय हैं या पूर्ण। यह विचित्र लगना चाहिए! क्या ऐसे संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय भी हैं जो न संगणनीय हों, न पूर्ण? उत्तर हाँ है, किंतु 1950 के दशक के मध्य में ही फ्रीडबर्ग और मुचनिक ने स्वतंत्र रूप से इसे स्थापित किया।

30.18 अपचयनीयता का एक उदाहरण

आइए प्रतिज्ञप्ति 30.18 के एक अनुप्रयोग पर विचार करें।

प्रतिज्ञप्ति 30.21. *मानें*

$$K_1 = \{e : \varphi_e(0) \downarrow\}.$$

तब K_1 संगणनीयतः परिगणनीय है, किंतु संगणनीय नहीं।

प्रमाण. चूँकि $K_1 = \{e : \exists s\, T(e, 0, s)\}$, इसलिए प्रमेय 30.10 से K_1 संगणनीयतः परिगणनीय है।

K_1 को असंगणनीय दिखाने के लिए हम दिखाएँ कि K_0 उसमें अपचयनीय है।

यह कुछ कठिन है, क्योंकि K_1 का उपयोग करके हम केवल उन संगणनाओं के विषय में प्रश्न पूछ सकते हैं जो किसी विशेष आगत 0 से आरंभ होती हैं। मान लें कि आपका कोई बुद्धिमान मित्र ऐसे प्रश्नों का उत्तर दे सकता है (ऐसे मित्रों को "दैवज्ञ" कहा जाता है)। अब कोई आपसे पूछता है कि $\langle e, x\rangle$, K_0 में है या नहीं, अर्थात् मशीन e, आगत x पर रुकती है या नहीं। आप एक दूसरी मशीन e_x बना सकते हैं, जो *किसी भी* आगत को अनदेखा करके e को आगत x पर चलाती है। स्पष्टतः मशीन e का आगत x पर रुकना इस प्रश्न के समतुल्य है कि मशीन e_x आगत 0 (या किसी अन्य आगत) पर रुकती है या नहीं। अतः आप अपने मित्र से पूछते हैं कि यह नई मशीन e_x, आगत 0 पर रुकती है या नहीं; परिवर्तित प्रश्न का उसका उत्तर मूल प्रश्न का उत्तर देता है। इससे K_0 से K_1 में इच्छित अपचयन मिलता है।

सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलन का उपयोग करके f को इस प्रकार परिभाषित 3-स्थानी फलन मानें:

$$f(x, y, z) \simeq \varphi_x(y).$$

ध्यान दें कि f अपनी तीसरी आगत को पूरी तरह अनदेखा करता है। ऐसा सूचकांक e चुनें कि $f = \varphi_e^3$; अतः हमें

$$\varphi_e^3(x, y, z) \simeq \varphi_x(y).$$

s-m-n प्रमेय से कोई फलन $s(e,x,y)$ ऐसा है कि प्रत्येक z के लिए

$$\begin{aligned}\varphi_{s(e,x,y)}(z) &\simeq \varphi_e^3(x,y,z)\\ &\simeq \varphi_x(y).\end{aligned}$$

ऊपर के अनौपचारिक तर्क के पदों में, $s(e,x,y)$ उस मशीन का सूचकांक है जो किसी भी आगत z को अनदेखा करके $\varphi_x(y)$ संगणित करती है।

विशेषतः, हमें

$$\varphi_{s(e,x,y)}(0)\downarrow \quad \text{तभी और केवल तभी} \quad \varphi_x(y)\downarrow.$$

दूसरे शब्दों में, $\langle x,y\rangle \in K_0$ तभी और केवल तभी जब $s(e,x,y)\in K_1$। अतः इस प्रकार परिभाषित फलन g

$$g(w) = s(e,(w)_0,(w)_1)$$

K_0 से K_1 में एक अपचयन है। □

30.19 पूर्णता अनिर्णेय है

किसी वस्तु को असंगणनीय दिखाने के लिए s-m-n प्रमेय के उपयोग का एक और उदाहरण देखें। Tot को पूर्ण संगणनीय फलनों के सूचकांकों का समुच्चय मानें, अर्थात्

$$\text{Tot} = \{x : \text{प्रत्येक } y \text{ के लिए, } \varphi_x(y)\downarrow\}.$$

प्रतिज्ञप्ति 30.22. Tot *संगणनीय नहीं है।*

प्रमाण. Tot को असंगणनीय देखने के लिए यह दिखाना पर्याप्त है कि K उसमें अपचयनीय है। $h(x,y)$ को परिभाषित करें:

$$h(x,y)\simeq \begin{cases}0 & \text{यदि } x\in K\\ \uparrow & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

ध्यान दें कि $h(x,y)$ तनिक भी y पर निर्भर नहीं है। यह देखना कठिन नहीं कि h आंशिक संगणनीय है: आगत x,y पर h को संगणित करने के लिए पहले फलन φ_x का आगत x पर अनुकरण करते हैं; यदि यह संगणना रुकती है, तो $h(x,y)$, 0 निर्गत करके रुक जाता है। अतः $h(x,y)$ केवल $\text{zero}(\mu s\, T(x,x,s))$ है, जहाँ zero अचर शून्य फलन है।

s-m-n प्रमेय से कोई आदिम पुनरावर्ती फलन $k(x)$ ऐसा है कि प्रत्येक x और y के लिए

$$\varphi_{k(x)}(y) = \begin{cases}0 & \text{यदि } x\in K\\ \uparrow & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

अतः $\varphi_{k(x)}$ पूर्ण है यदि $x\in K$, और अन्यथा अपरिभाषित। इसलिए k, K से Tot में एक अपचयन है। □

वास्तव में Tot संगणनीयतः परिगणनीय तक नहीं है—उसकी जटिलता "अंकगणितीय पदानुक्रम" में और ऊपर स्थित है। किंतु यहाँ हम इस प्रबलतर परिणाम की चिंता नहीं करेंगे।

30.20 राइस का प्रमेय

विचार करने पर आप देखेंगे कि Tot की विशिष्टताओं की प्रतिज्ञप्ति 30.22 के प्रमाण में कोई भूमिका नहीं है। हमने $h(x, y)$ को इस प्रकार बनाया था कि वह अचर फलन $j(y) = 0$ की तरह ठीक तब व्यवहार करे जब x, K में हो; किंतु उन परिस्थितियों में हम उससे किसी अन्य आंशिक संगणनीय फलन जैसा व्यवहार भी करा सकते थे। यह अवलोकन हमें एक अधिक सामान्य प्रमेय कहने देता है, जिसका मोटा आशय है कि संगणनीय फलनों का कोई अतुच्छ गुण निर्णेय नहीं है।

ध्यान रखें कि φ_0, φ_1, φ_2, ...आंशिक संगणनीय फलनों का हमारा मानक परिगणन है।

प्रमेय 30.23 (राइस का प्रमेय). *C को आंशिक संगणनीय फलनों का कोई समुच्चय मानें और $A = \{n : \varphi_n \in C\}$ मानें। यदि A संगणनीय है, तो या तो C रिक्त है अथवा C सभी आंशिक संगणनीय फलनों का समुच्चय है।*

सूचकांक समुच्चय वह समुच्चय A है जिसमें यह गुण होता है कि यदि n और m ऐसे सूचकांक हैं जो समान फलन को "संगणित" करते हैं, तो या तो n और m दोनों A में हैं, अथवा दोनों में से कोई नहीं। यह देखना कठिन नहीं कि प्रमेय के समुच्चय A में यह गुण है। विलोमतः, यदि A सूचकांक समुच्चय और C इन सूचकांकों द्वारा संगणित फलनों का समुच्चय है, तो $A = \{n : \varphi_n \in C\}$।

इस शब्दावली में राइस का प्रमेय यह कहने के समतुल्य है कि कोई अतुच्छ सूचकांक समुच्चय निर्णेय नहीं है। प्रमेय का अर्थ समझने के लिए *प्रोग्रामों* (मान लें, आपकी पसंदीदा प्रोग्रामिंग भाषा में) और उनके द्वारा संगणित फलनों का भेद उभारना सहायक है। प्रोग्राम (सूचकांक) वाक्यगत वस्तुएँ हैं, और उनके बारे में कुछ प्रश्न निश्चय ही संगणनीय हैं: क्या इस प्रोग्राम में 150 से अधिक चिह्न हैं? क्या इसमें 22 से अधिक पंक्तियाँ हैं? क्या इसमें "while" कथन है? क्या "hello world" अक्षर-शृंखला कभी किसी "print" कथन के तर्क के रूप में आती है? राइस का प्रमेय कहता है कि प्रोग्राम के *व्यवहार* के बारे में कोई अतुच्छ प्रश्न संगणनीय नहीं है। इनमें ऐसे प्रश्न आते हैं: क्या प्रोग्राम आगत 0 पर रुकता है? क्या वह कभी रुकता है? क्या वह कभी कोई सम संख्या निर्गत करता है?

राइस के प्रमेय का प्रमाण. मान लें कि C न तो रिक्त है, न सभी आंशिक संगणनीय फलनों का समुच्चय, और A को C के फलनों के सूचकांकों का समुच्चय मानें। हम दिखाएँगे कि यदि A संगणनीय होता, तो हम विराम समस्या हल कर सकते थे; अतः A संगणनीय नहीं है।

व्यापकता की हानि के बिना हम मान सकते हैं कि वह फलन f जो कहीं भी परिभाषित नहीं है, C में नहीं है (अन्यथा नीचे के तर्क में C और उसके पूरक की अदला-बदली करें)। g को C का कोई फलन मानें। विचार यह है कि यदि हम A का निर्णय कर सकें, तो f को संगणित करने वाले सूचकांकों और g को संगणित करने वाले सूचकांकों का भेद बता सकेंगे; फिर इस क्षमता से विराम समस्या हल कर सकेंगे।

इस प्रकार। सार्वत्रिक आंशिक संगणनीय फलनों का उपयोग करके हम एक फलन परिभाषित कर सकते हैं:

$$h(x, y) \simeq \begin{cases} \text{अपरिभाषित} & \text{यदि } \varphi_x(x) \uparrow \\ g(y) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

h को संगणित करने के लिए पहले हम $\varphi_x(x)$ को संगणित करने का प्रयत्न करते हैं; यदि वह संगणना रुकती है, तो $g(y)$ को संगणित करते हैं; और यदि *वह* संगणना रुकती है, तो निर्गत लौटाते हैं। अधिक औपचारिक रूप में हम लिख सकते हैं

$$h(x, y) \simeq P_0^2(g(y), \mathrm{Un}(x, x)).$$

जहाँ $P_0^2(z_0, z_1) = z_0$ वह 2-स्थानी प्रक्षेपण फलन है जो 0-वाँ तर्क लौटाता है; यह संगणनीय है।

तब h आंशिक संगणनीय फलनों का संयोजन है, और दायाँ पक्ष ठीक तभी परिभाषित और $g(y)$ के बराबर है जब $\mathrm{Un}(x, x)$ तथा $g(y)$ दोनों परिभाषित हों।

ध्यान दें कि किसी नियत x के लिए, यदि $\varphi_x(x)$ अपरिभाषित है, तो $h(x, y)$ प्रत्येक y पर अपरिभाषित है; और यदि $\varphi_x(x)$ परिभाषित है, तो $h(x, y) \simeq g(y)$। अतः x के किसी नियत मान पर $h(x, y)$ या तो ठीक f जैसा, या ठीक g जैसा व्यवहार करता है; और $\varphi_x(x)$ के परिभाषित होने का निर्णय करना इन्हीं दो स्थितियों में से एक का निर्णय

करना है। किंतु यह निर्णय करना है कि $h_x(y) \simeq h(x,y)$, C में है या नहीं; और यदि A संगणनीय होता, तो हम ठीक यही कर सकते थे।

अधिक औपचारिक रूप में, चूँकि h आंशिक संगणनीय है, इसलिए वह फलन φ_e के बराबर है, किसी सूचकांक e के लिए। s-m-n प्रमेय से कोई आदिम पुनरावर्ती फलन s ऐसा है कि प्रत्येक x पर $\varphi_{s(e,x)}(y) = h_x(y)$। अब प्रत्येक x के लिए, यदि $\varphi_x(x)\downarrow$, तो $\varphi_{s(e,x)}$, g के समान फलन है और इसलिए $s(e,x)$, A में है। दूसरी ओर, यदि $\varphi_x(x)\uparrow$, तो $\varphi_{s(e,x)}$, f के समान फलन है और इसलिए $s(e,x)$, A में नहीं है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक x के लिए $x \in K$ तभी और केवल तभी जब $s(e,x) \in A$। यदि A संगणनीय होता, तो K भी होता—यह विरोधाभास है। अतः A संगणनीय नहीं है। □

राइस का प्रमेय अत्यंत शक्तिशाली है। अगला तात्कालिक उपप्रमेय इसके कुछ नमूना अनुप्रयोग दिखाता है।

उपप्रमेय 30.24. *निम्नलिखित समुच्चय अनिर्णेय हैं।*

1. $\{x : 17, \varphi_x$ *के परिसर में है*$\}$
2. $\{x : \varphi_x$ *अचर है*$\}$
3. $\{x : \varphi_x$ *पूर्ण है*$\}$
4. $\{x :$ *जब भी* $y < y'$, $\varphi_x(y)\downarrow$, *और यदि* $\varphi_x(y')\downarrow$, *तो* $\varphi_x(y) < \varphi_x(y')\}$

प्रमाण. ये सभी अतुच्छ सूचकांक समुच्चय हैं। □

30.21 नियत-बिंदु प्रमेय

विराम समस्या पर फिर विचार करें। अस्थायी संकेत के रूप में $\ulcorner\varphi_x(y)\urcorner$ को $\langle x,y\rangle$ के लिए लिखें; इसे मान $\varphi_x(y)$ के किसी "नाम" को निरूपित करने वाला समझें। इस संकेत से विराम समस्या की अनिर्णेयता के अपने प्रमाणों में से एक को नए शब्दों में कहा जा सकता है।

प्रश्न: क्या निम्न गुण वाला कोई संगणनीय फलन h है? प्रत्येक x और y के लिए,

$$h(\ulcorner\varphi_x(y)\urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \varphi_x(y)\downarrow \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

उत्तर: नहीं; अन्यथा आंशिक फलन

$$g(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{यदि } h(\ulcorner\varphi_x(x)\urcorner) = 0 \\ \text{अपरिभाषित} & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

संगणनीय होता और इसलिए उसका कोई सूचकांक e होता। किंतु तब हमें

$$\varphi_e(e) \simeq \begin{cases} 0 & \text{यदि } h(\ulcorner\varphi_e(e)\urcorner) = 0 \\ \text{अपरिभाषित} & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

मिलता है; तब $\varphi_e(e)$ तभी और केवल तभी परिभाषित है जब वह परिभाषित नहीं है—यह विरोधाभास है।

अब φ_e वाले समीकरण को देखें। एक अर्थ में वहाँ स्व-संदर्भ का एक उदाहरण है: हमने मान $\varphi_e(e)$ को एक विशेष ढंग से $\ulcorner\varphi_e(e)\urcorner$ पर निर्भर बनाया है। नियत-बिंदु प्रमेय कहता है कि सामान्यतः हम ऐसा *कर सकते हैं*—केवल विरोधाभास सिद्ध करने के लिए नहीं।

सहायक प्रमेय 30.25 नियत-बिंदु प्रमेय को कहने के दो समतुल्य ढंग देता है। तार्किक रूप से कथनों की समतुल्यता उनके दोनों सत्य होने से निकलती है; पर हमारा वास्तविक आशय है कि प्रत्येक कथन दूसरे से सीधे निष्पन्न होता है, इसलिए उन्हें उसी प्रमेय के वैकल्पिक कथन माना जा सकता है।

सहायक प्रमेय 30.25. *निम्नलिखित कथन समतुल्य हैं:*

1. *प्रत्येक आंशिक संगणनीय फलन $g(x, y)$ के लिए कोई सूचकांक e ऐसा है कि प्रत्येक y के लिए*

$$\varphi_e(y) \simeq g(e, y).$$

2. *प्रत्येक संगणनीय फलन $f(x)$ के लिए कोई सूचकांक e ऐसा है कि प्रत्येक y के लिए*

$$\varphi_e(y) \simeq \varphi_{f(e)}(y).$$

प्रमाण. $(1) \Rightarrow (2)$: f मिलने पर g को $g(x, y) \simeq \mathrm{Un}(f(x), y)$ से परिभाषित करें। (1) से ऐसा सूचकांक e पाएँ कि प्रत्येक y के लिए

$$\begin{aligned}\varphi_e(y) &= \mathrm{Un}(f(e), y)\\ &= \varphi_{f(e)}(y).\end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (1)$: g मिलने पर s-m-n प्रमेय से ऐसा f पाएँ कि प्रत्येक x और y के लिए $\varphi_{f(x)}(y) \simeq g(x, y)$। (2) से ऐसा सूचकांक e पाएँ कि

$$\begin{aligned}\varphi_e(y) &= \varphi_{f(e)}(y)\\ &= g(e, y).\end{aligned}$$

इससे प्रमाण पूरा होता है। □

कथन (1) को सत्य दिखाने (और फलतः (2) को भी) से पहले विचार करें कि वह कितना विचित्र है। e को कोई कंप्यूटर प्रोग्राम मानें; कथन (1) कहता है कि कोई भी आंशिक संगणनीय $g(x, y)$ मिलने पर आप ऐसा कंप्यूटर प्रोग्राम e खोज सकते हैं जो $g_e(y) \simeq g(e, y)$ को संगणित करे। दूसरे शब्दों में, आप ऐसा कंप्यूटर प्रोग्राम खोज सकते हैं जो स्वयं उसी प्रोग्राम का संदर्भ लेने वाले फलन को संगणित करता है।

प्रमेय 30.26. *सहायक प्रमेय 30.25 के दोनों कथन सत्य हैं। विशेषतः, प्रत्येक आंशिक संगणनीय फलन $g(x, y)$ के लिए कोई सूचकांक e ऐसा है कि प्रत्येक y के लिए*

$$\varphi_e(y) \simeq g(e, y).$$

प्रमाण. आवश्यक अवयव ऊपर विराम समस्या की चर्चा में पहले से निहित हैं। $\mathrm{diag}(x)$ को वह संगणनीय फलन मानें जो प्रत्येक x के लिए फलन $f_x(y) \simeq \varphi_x(x, y)$ का कोई सूचकांक लौटाता है, अर्थात्

$$\varphi_{\mathrm{diag}(x)}(y) \simeq \varphi_x(x, y).$$

diag को ऐसा फलन मानें जो किसी 2-स्थानी फलन के प्रोग्राम को, मूल प्रोग्राम को उसके प्रथम तर्क के रूप में नियत करके मिले 1-स्थानी फलन के प्रोग्राम में बदलता है। फलन diag को औपचारिक रूप से इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है: पहले s को परिभाषित करें:

$$s(x, y) \simeq \mathrm{Un}^2(x, x, y),$$

जहाँ Un^2 वह 3-स्थानी फलन है जो आंशिक संगणनीय 2-स्थानी फलनों के लिए सार्वत्रिक है। तब s-m-n प्रमेय से हम ऐसा आदिम पुनरावर्ती फलन diag खोज सकते हैं जो

$$\varphi_{\mathrm{diag}(x)}(y) \simeq s(x, y).$$

अब फलन l को परिभाषित करें:

$$l(x, y) \simeq g(\text{diag}(x), y).$$

और $\ulcorner l \urcorner$ को l का कोई सूचकांक मानें। अंततः $e = \text{diag}(\ulcorner l \urcorner)$ मानें। तब प्रत्येक y के लिए हमें

$$\begin{aligned}
\varphi_e(y) &\simeq \varphi_{\text{diag}(\ulcorner l \urcorner)}(y) \\
&\simeq \varphi_{\ulcorner l \urcorner}(\ulcorner l \urcorner, y) \\
&\simeq l(\ulcorner l \urcorner, y) \\
&\simeq g(\text{diag}(\ulcorner l \urcorner), y) \\
&\simeq g(e, y),
\end{aligned}$$

मिलता है, जैसा अपेक्षित था। □

यहाँ क्या हो रहा है? मान लें कि आपको ऐसा कंप्यूटर प्रोग्राम लिखना है जो स्वयं को मुद्रित करे। यह भी मान लें कि आप ऐसी प्रोग्रामिंग भाषा में काम कर रहे हैं जिसमें अक्षर-शृंखला फलनों का समृद्ध और विचित्र संग्रह है। विशेषतः, मान लें कि आपकी भाषा में कोई फलन diag इस प्रकार काम करता है: आगत अक्षर-शृंखला s मिलने पर diag, s में आए चिह्न 'x' के हर उदाहरण को ढूँढ़ता है और उसे मूल अक्षर-शृंखला के उद्धृत रूप से बदलता है। उदाहरणतः, अक्षर-शृंखला

```
hello x world
```

को आगत देने पर फलन

```
hello 'hello x world' world
```

निर्गत लौटाता है। उस स्थिति में इच्छित प्रोग्राम लिखना सरल है; आप जाँच सकते हैं कि

```
print(diag('print(diag(x))'))
```

से कार्य हो जाता है। C++ और Java जैसी अधिक सामान्य प्रोग्रामिंग भाषाओं में भी यही विचार (अधिक जटिल कार्यान्वयन के साथ) काम करता है।

अब हम नियत-बिंदु प्रमेय के प्रमाण से केवल कुछ चरण दूर हैं। मान लें कि मुद्रण फलन का कोई रूप $\text{print}(x, y)$, अक्षर-शृंखला x और दूसरा संख्यात्मक तर्क y स्वीकार करता है तथा अक्षर-शृंखला x को y बार मुद्रित करता है। तब "प्रोग्राम"

```
getinput(y);
print(diag('getinput(y); print(diag(x), y)'), y)
```

आगत y पर स्वयं को y बार मुद्रित करता है। getinput—print—diag के ढाँचे को किसी मनमाने फलन $g(x, y)$ से बदलने पर

```
g(diag('g(diag(x), y)'), y)
```

मिलता है; यह ऐसा प्रोग्राम है जो आगत y पर g को स्वयं उस प्रोग्राम और y पर चलाता है। "उद्धृत करने" को "के लिए सूचकांक का उपयोग करने" के रूप में समझने पर हमें ऊपर का प्रमाण मिलता है।

अभी के लिए यदि आप प्रमाण को औपचारिक बाज़ीगरी अथवा काला जादू मानना चाहें, तो ठीक है। किंतु आपको ऊपर दिए तर्क का विवरण पुनर्निर्मित कर पाना चाहिए। जब हम अपूर्णता प्रमेय (और संबंधित "नियत-बिंदु प्रमेय") सिद्ध करेंगे, तब इसके काम करने के कारण को समझने के अन्य ढंगों पर चर्चा करेंगे।

यही विचार "नियत-बिंदु" संयोजक प्राप्त करने में प्रयुक्त हो सकता है। मान लें कि आपके पास लैम्ब्डा पद g है और आप ऐसा दूसरा पद k चाहते हैं जिसमें k, β-अर्थ में gk के समतुल्य हो। पदों को परिभाषित करें:

$$\text{diag}(x) = xx$$

और

$$l(x) = g(\mathrm{diag}(x))$$

अपने संकेत-संप्रदाय के अनुसार; दूसरे शब्दों में, l पद $\lambda x.\, g(xx)$ है। k को पद ll मानें। तब हमें

$$\begin{aligned} k &= (\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx)) \\ &\twoheadrightarrow g((\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx))) \\ &= gk. \end{aligned}$$

यदि हम

$$Y = \lambda g.\, ((\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx)))$$

लें, तो Yg और $g(Yg)$ एक ही पद में अपचयित होते हैं; अतः $Yg \equiv_\beta g(Yg)$। इसे "करी का संयोजक" कहते हैं। यदि इसके स्थान पर

$$Y = (\lambda xg.\, g(xxg))(\lambda xg.\, g(xxg))$$

लें, तो वास्तव में Yg, $g(Yg)$ में अपचयित होता है, जो अधिक प्रबल कथन है। Y का यह बाद वाला रूप "ट्यूरिंग का संयोजक" कहलाता है।

30.22 नियत-बिंदु प्रमेय का अनुप्रयोग

नियत-बिंदु प्रमेय मूलतः हमें आंशिक संगणनीय फलनों को उनके सूचकांकों के पदों में परिभाषित करने देता है। उदाहरणतः, हम ऐसा सूचकांक e खोज सकते हैं कि प्रत्येक y के लिए

$$\varphi_e(y) = e + y.$$

एक और उदाहरण के रूप में, नियत-बिंदु प्रमेय के प्रमाण का उपयोग Java या C++ में ऐसा प्रोग्राम बनाने के लिए किया जा सकता है जो स्वयं को मुद्रित करे।

याद रखें कि यदि प्रत्येक e के लिए W_e को φ_e का प्रांत मानें, तो अनुक्रम W_0, W_1, W_2, ...संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चयों का परिगणन करता है। इनमें से कुछ समुच्चय संगणनीय हैं। पूछा जा सकता है कि क्या ऐसी कोई कलनविधि है जो मान x को आगत ले और यदि W_x संगणनीय हो, तो उसके अभिलाक्षणिक फलन का कोई सूचकांक लौटाए। उत्तर "नहीं" है; ऐसी कोई कलनविधि नहीं है:

प्रमेय 30.27. *निम्न गुण वाला कोई आंशिक संगणनीय फलन f नहीं है: जब भी W_e संगणनीय हो, तब $f(e)$ परिभाषित हो और $\varphi_{f(e)}$ उसका अभिलाक्षणिक फलन हो।*

प्रमाण. f को कोई संगणनीय फलन मानें; हम ऐसा e बनाएँगे कि W_e संगणनीय हो, किंतु $\varphi_{f(e)}$ उसका अभिलाक्षणिक फलन न हो। नियत-बिंदु प्रमेय से हम ऐसा सूचकांक e खोज सकते हैं कि

$$\varphi_e(y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{यदि } y = 0 \text{ और } \varphi_{f(e)}(0) \downarrow = 0 \\ \text{अपरिभाषित} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अर्थात् e इस प्रकार परिभाषित फलन पर नियत-बिंदु प्रमेय लगाकर मिलता है:

$$g(x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{यदि } y = 0 \text{ और } \varphi_{f(x)}(0) \downarrow = 0 \\ \text{अपरिभाषित} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अनौपचारिक रूप से हम इस प्रकार देख सकते हैं कि g आंशिक संगणनीय है: आगत x और y पर कलनविधि पहले जाँचती है कि y, 0 के बराबर है या नहीं। यदि हाँ, तो वह $f(x)$ संगणित करती है और फिर सार्वत्रिक मशीन से $\varphi_{f(x)}(0)$ संगणित करती है। यदि यह अंतिम संगणना रुककर 0 लौटाती है, तो कलनविधि 0 लौटाती है; अन्यथा वह नहीं रुकती।

अब ध्यान दें कि यदि $\varphi_{f(e)}(0)$ परिभाषित और 0 के बराबर है, तो $\varphi_e(y)$ ठीक तभी परिभाषित है जब y, 0 के बराबर है; अतः $W_e = \{0\}$। यदि $\varphi_{f(e)}(0)$ अपरिभाषित है, अथवा परिभाषित होकर भी 0 के बराबर नहीं, तो $W_e = \emptyset$। दोनों ही स्थितियों में $\varphi_{f(e)}$, W_e का अभिलाक्षणिक फलन नहीं है, क्योंकि वह आगत 0 पर गलत उत्तर देता है। $\square$

30.23 स्व-संदर्भ से फलनों की परिभाषा

फलनों को स्वयं उन्हीं के पदों में परिभाषित कर पाना सामान्यतः उपयोगी है। उदाहरणतः, संगणनीय फलन k, l, और m मिलने पर नियत-बिंदु लेम्मा बताता है कि कोई आंशिक संगणनीय फलन f ऐसा है जो प्रत्येक y के लिए निम्न समीकरण को संतुष्ट करता है:

$$f(y) \simeq \begin{cases} k(y) & \text{यदि } l(y) = 0 \\ f(m(y)) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

और अधिक स्पष्ट रूप से, f इसे मानकर प्राप्त होता है:

$$g(x, y) \simeq \begin{cases} k(y) & \text{यदि } l(y) = 0 \\ \varphi_x(m(y)) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

और फिर नियत-बिंदु लेम्मा से ऐसा सूचकांक e खोजा जाता है कि $\varphi_e(y) = g(e, y)$।

एक ठोस उदाहरण के रूप में, "महत्तम समापवर्तक" फलन $\gcd(u, v)$ को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\gcd(u, v) \simeq \begin{cases} v & \text{यदि } u = 0 \\ \gcd(\mathrm{mod}(v, u), u) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जहाँ $\mathrm{mod}(v, u)$, v को u से भाग देने का शेषफल निरूपित करता है। नियत-बिंदु लेम्मा का सहारा लेने पर gcd आंशिक संगणनीय सिद्ध होता है। (वास्तव में इसे ऊपर के प्रारूप में रखा जा सकता है, जहाँ y, युग्म $\langle u, v\rangle$ को कूटित करे।) इसके बाद u पर आगमन से दिखता है कि वास्तव में gcd पूर्ण है।

निश्चय ही अभी चर्चित उदाहरणों से कहीं अधिक जटिल स्व-संदर्भी परिभाषाएँ बनाई जा सकती हैं। अधिकांश प्रोग्रामिंग भाषाएँ किसी न किसी ढंग से फलनों की परिभाषा स्वयं उन्हीं के पदों में करने देती हैं। ध्यान दें कि यह किसी फलन को उसे संगणित करने वाली कलनविधि के *सूचकांक* के पदों में परिभाषित कर पाने से कुछ कम आश्चर्यजनक है; पूर्ण सामान्यता में नियत-बिंदु प्रमेय आपको यही करने देता है।

प्रश्न

प्रश्न 30.1. यह समझने के लिए कि प्रमेय 30.5 के प्रमाण का विकर्णीकरण तर्क आंशिक स्थिति में क्यों काम नहीं करता, फलन $f(x) \simeq \mathrm{Un}(x, x) + 1$ पर विचार करें। क्या यह आंशिक संगणनीय है? यदि हाँ, तो इसका कोई सूचकांक e है, अर्थात् $f(x) \simeq \mathrm{Un}(e, x)$। आप $f(e)$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

प्रश्न 30.2. यह दिखाकर प्रतिज्ञप्ति 30.17 सिद्ध करें कि यदि f और g क्रमशः A से B तथा B से C में अनेक-एक अपचयन हैं, तो $g \circ f$, A से C में अनेक-एक अपचयन है।

प्रश्न 30.3. मान लें कि f, A से B में अनेक-एक अपचयन है। दिखाएँ कि f, $\overline{A}$ से $\overline{B}$ में भी अनेक-एक अपचयन है।

प्रश्न 30.4. दिखाएँ कि यदि $f\colon A \to B$ अनेक-एक अपचयन है, तो $\chi_A = \chi_B \circ f$।

प्रश्न 30.5. K से K_0 में कोई अपचयन दें।

खण्ड VI

ट्यूरिंग मशीनें

अध्याय 31

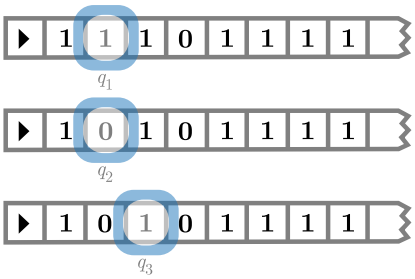
ट्यूरिंग मशीन संगणनाएँ

31.1 परिचय

मान लें कि कोई फलन $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ में जाता है। उसके *संगणनीय* होने का क्या अर्थ है? सबसे आरंभिक और सर्वाधिक प्रसिद्ध उत्तरों में से एक यह है कि कोई फलन तभी संगणनीय है जब उसे किसी ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणित किया जा सके। एलन ट्यूरिंग ने यह धारणा 1936 में प्रस्तुत की थी। ट्यूरिंग मशीनें *संगणना के एक प्रतिरूप* का उदाहरण हैं—वे "संगणनात्मक प्रक्रिया" के विचार को परिभाषित करने की एक गणितीयतः सटीक रीति देती हैं। इसका ठीक-ठीक अर्थ क्या है, इस पर मतभेद है; फिर भी इस बात पर व्यापक सहमति है कि ट्यूरिंग मशीनें संगणनात्मक प्रक्रियाओं को निर्दिष्ट करने की एक रीति हैं। यद्यपि "ट्यूरिंग मशीन" पद चलायमान पुर्जों वाली किसी भौतिक मशीन की छवि उत्पन्न करता है, किंतु कड़ाई से कहें तो ट्यूरिंग मशीन पूर्णतः गणितीय रचना है और इस रूप में वह संगणनात्मक प्रक्रिया के विचार का आदर्शीकरण करती है। उदाहरणार्थ, हम ट्यूरिंग मशीन की समय अथवा स्मृति-संबंधी आवश्यकताओं पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाते: ट्यूरिंग मशीन किसी वस्तु को तब भी संगणित कर सकती है जब उस संगणना के लिए ब्रह्मांड में उपस्थित परमाणुओं की संख्या से अधिक भंडारण-स्थान या अधिक चरणों की आवश्यकता पड़े।

ट्यूरिंग मशीन को किसी विशेष प्रकार की काल्पनिक युक्ति के प्रोग्राम के रूप में समझना संभवतः सर्वोत्तम है। इस युक्ति में एक *पट्टी* और एक *पठन-लेखन शीर्ष* होता है। ट्यूरिंग मशीन के हमारे संस्करण में पट्टी एक दिशा में (दाईं ओर) अनंत होती है और *खानों* में विभाजित होती है; प्रत्येक खाने में किसी परिमित *वर्णमाला* का एक प्रतीक हो सकता है। ऐसी वर्णमालाओं में कितने भी भिन्न प्रतीक हो सकते हैं, किंतु हम मुख्यतः तीन प्रतीकों से काम चलाएँगे: $\triangleright$, 0, और 1। युक्ति को आरंभ करते समय पट्टी रिक्त होती है (अर्थात् प्रत्येक खाने में 0 प्रतीक होता है), सिवाय सबसे बाएँ खाने के, जिसमें $\triangleright$ होता है, और उन परिमित खानों के जिनमें *आगत* होता है। किसी भी समय युक्ति परिमित संख्या में उपलब्ध *अवस्थाओं* में से एक में होती है। आरंभ में शीर्ष सबसे बाएँ खाने को पढ़ता है और युक्ति एक निर्दिष्ट *आरंभिक अवस्था* में होती है। युक्ति की क्रिया के प्रत्येक चरण में वर्तमानतः पढ़े जा रहे खाने की सामग्री, युक्ति की अवस्था और ट्यूरिंग मशीन का प्रोग्राम मिलकर निर्धारित करते हैं कि आगे क्या होगा। ट्यूरिंग मशीन का प्रोग्राम एक आंशिक फलन द्वारा दिया जाता है, जो किसी अवस्था q और प्रतीक σ को आगत के रूप में लेकर त्रिक $\langle q', \sigma', D\rangle$ निर्गत करता है। जब भी युक्ति अवस्था q में होती है और प्रतीक σ पढ़ती है, वह वर्तमान खाने के प्रतीक को σ' से बदल देती है; D क्रमशः L, R, या N होने के अनुसार शीर्ष बाएँ जाता है, दाएँ जाता है, या वहीं रहता है; और युक्ति अवस्था q' में चली जाती है।

उदाहरणार्थ, आकृति 31.1 की स्थिति पर विचार करें। ट्यूरिंग मशीन की पट्टी के दिखाई देने वाले भाग में सबसे बाएँ खाने पर पट्टी-अंत प्रतीक $\triangleright$ है; उसके बाद तीन 1, एक 0, और फिर चार 1 हैं। शीर्ष बाएँ से तीसरे खाने को पढ़ रहा है, जिसमें एक 1 है, और वह अवस्था q_1 में है—हम कहते हैं, "मशीन 1 को अवस्था q_1 में पढ़ रही है।" यदि ट्यूरिंग मशीन का प्रोग्राम आगत $\langle q_1, 1\rangle$ के लिए त्रिक $\langle q_2, 0, N\rangle$ लौटाता है, तो मशीन तीसरे खाने के 1 को 0 से बदल देगी, पठन-लेखन शीर्ष को वहीं रहने देगी और अवस्था q_2 में चली जाएगी। यदि इसके बाद प्रोग्राम $\langle q_3, 0, R\rangle$ को आगत $\langle q_2, 0\rangle$ के लिए लौटाता है, तो मशीन उस 0 के ऊपर एक और 0 लिखेगी (अर्थात् पठन-लेखन शीर्ष के नीचे पट्टी की सामग्री वस्तुतः अपरिवर्तित रहेगी), एक खाना दाईं ओर जाएगी और अवस्था q_3 में प्रवेश करेगी। इसी प्रकार क्रिया आगे चलती रहती है।



चित्र 31.1: अपना प्रोग्राम निष्पादित करती हुई एक ट्यूरिंग मशीन।

हम कहते हैं कि मशीन तब *रुकती* है जब वह किसी ऐसी अवस्था q_n और प्रतीक σ पर पहुँचती है जिसके लिए $\langle q_n, \sigma \rangle$ का कोई निर्देश नहीं है; अर्थात् आगत $\langle q_n, \sigma \rangle$ पर संक्रमण फलन अपरिभाषित है। दूसरे शब्दों में, मशीन के पास निष्पादित करने के लिए कोई निर्देश नहीं होता और उस बिंदु पर उसकी क्रिया समाप्त हो जाती है। रुकने को कभी-कभी एक विशिष्ट विराम-अवस्था h द्वारा दर्शाया जाता है। इसे आगे अधिक विस्तार से दिखाया जाएगा।

ट्यूरिंग के शोधपत्र "संगणनीय संख्याओं पर" की सुंदरता यह है कि उसमें वे केवल एक आकारिक परिभाषा ही नहीं देते, बल्कि यह तर्क भी देते हैं कि वह परिभाषा संगणनीयता की सहज धारणा को ग्रहण करती है। परिभाषा से यह स्पष्ट होना चाहिए कि ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणनीय कोई भी फलन सहज अर्थ में संगणनीय है। ट्यूरिंग इस विलोम के सत्य होने के पक्ष में तीन प्रकार के तर्क देते हैं; अर्थात् जिस किसी फलन को हम स्वाभाविक रूप से संगणनीय मानेंगे, वह ऐसी मशीन द्वारा संगणनीय है। वे (ट्यूरिंग के शब्दों में) हैं:

1. सहज बोध की सीधी दुहाई।
2. दो परिभाषाओं की समतुल्यता का प्रमाण (यदि नई परिभाषा सहज बोध को अधिक आकर्षित करती हो)।
3. संगणनीय संख्याओं के बड़े वर्गों के उदाहरण देना।

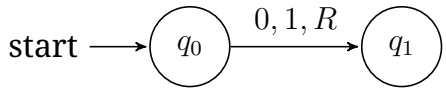
हमारा लक्ष्य संगणनीयता की धारणा को "सिद्धांततः" परिभाषित करना है; अर्थात् समय और स्थान की व्यावहारिक सीमाओं को ध्यान में रखे बिना। निश्चय ही, संगणनीयता की व्यापकतम परिभाषा स्थापित हो जाने पर परिबद्ध संसाधनों वाली संगणना पर विचार किया जा सकता है; यही "संगणनात्मक जटिलता" नामक विषय का केंद्र है।

ऐतिहासिक टिप्पणियाँ एलन ट्यूरिंग ने 1936 में ट्यूरिंग मशीनों का आविष्कार किया। उस समय उनकी रुचि प्रथम-कोटि तर्क की निर्णेयता में थी, फिर भी इस शोधपत्र को संगणक की अभिकल्पना की नींव पर एक निर्णायक शोधपत्र कहा गया है। उसमें ट्यूरिंग का ध्यान संगणनीय वास्तविक संख्याओं पर है, अर्थात् ऐसी वास्तविक संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार संगणनीय हैं; किंतु वे बताते हैं कि उनकी धारणाओं को प्राकृतिक संख्याओं पर संगणनीय फलनों आदि के अनुकूल बनाना कठिन नहीं है। ध्यान दें कि यह 1941 में पहले कार्यशील सामान्य-प्रयोजन संगणक के निर्माण से पूरे पाँच वर्ष पहले था (जर्मन कोनराड त्सूज़े ने इसे अपने माता-पिता के बैठक-कक्ष में बनाया था); ब्लेच्ली पार्क में ट्यूरिंग और उनके सहकर्मियों द्वारा कूट-भेदी कोलोसस (1943) बनाए जाने से सात वर्ष पहले; अमेरिकी ईएनिऐक (1945) से नौ वर्ष पहले; मैनचेस्टर में पहले ब्रिटिश सामान्य-प्रयोजन संगणक—मैनचेस्टर लघु-माप प्रायोगिक मशीन—के निर्माण (1948) से बारह वर्ष पहले; और अमेरिकियों द्वारा बाइनैक (1949) के प्रथम परीक्षण से तेरह वर्ष पहले। मैनचेस्टर एसएसईएम को प्रथम संग्रहित-प्रोग्राम संगणक होने का गौरव प्राप्त है—इससे पहले की मशीनों को प्रत्येक नए कार्य के लिए हाथ से पुनः तारबद्ध करना पड़ता था।

31.2 ट्यूरिंग मशीनों का निरूपण

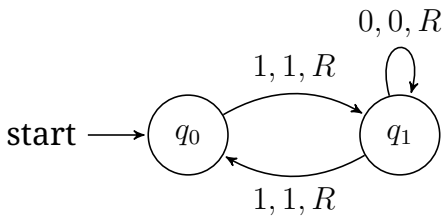
ट्यूरिंग मशीनों को *अवस्था आरेखों* द्वारा दृश्य रूप में निरूपित किया जा सकता है। ये आरेख तीरों से जुड़े अवस्था-कोष्ठों से बने होते हैं। जैसा कि अपेक्षित है, प्रत्येक अवस्था-कोष्ठ मशीन की एक अवस्था को निरूपित करता है। प्रत्येक तीर उस निर्देश को निरूपित करता है जिसे उस अवस्था से निष्पादित किया जा सकता है; निर्देश का विशिष्ट विवरण संबंधित तीर

के ऊपर या नीचे लिखा होता है। निम्न मशीन पर विचार करें, जिसमें केवल दो आंतरिक अवस्थाएँ q_0 और q_1, तथा एक निर्देश है:



याद करें कि ट्यूरिंग मशीन में एक पठन-लेखन शीर्ष और उस पर लिखे आगत वाली एक पट्टी होती है। इस निर्देश को ऐसे पढ़ सकते हैं: *यदि एक 0 को अवस्था q_0 में पढ़ रहे हों, तो 1 लिखें, दाईं ओर जाएँ और अवस्था q_1 में चले जाएँ।* यह उस संक्रमण फलन के समतुल्य है जो $\langle q_0, 0\rangle$ को $\langle q_1, 1, R\rangle$ पर भेजता है।

उदाहरण 31.1. *सम मशीन*: निम्न ट्यूरिंग मशीन तभी और केवल तभी रुकती है जब पट्टी पर 1 प्रतीकों की संख्या सम हो (यह मानते हुए कि सभी 1 प्रतीक पट्टी के पहले 0 से पहले आते हैं)।



यह अवस्था आरेख निम्न संक्रमण फलन के अनुरूप है:

$$\delta(q_0, 1) = \langle q_1, 1, R\rangle,$$
$$\delta(q_1, 1) = \langle q_0, 1, R\rangle,$$
$$\delta(q_1, 0) = \langle q_1, 0, R\rangle$$

ऊपर की मशीन केवल तभी रुकती है जब आगत में आघात-प्रतीकों की संख्या सम हो। अन्यथा मशीन (सैद्धांतिक रूप से) अनिश्चित काल तक चलती रहती है। किसी भी मशीन और आगत के लिए निर्गत निर्धारित करने हेतु मशीन के *विन्यासों* का क्रम देखा जा सकता है। हम विन्यास की आकारिक परिभाषा आगे देंगे। अभी हम सहज रूप से विन्यासों को ऐसे आरेखों की शृंखला मान सकते हैं जो क्रिया के दौरान किसी भी समय मशीन की अवस्था दिखाते हैं। विन्यास पट्टी की सामग्री, मशीन की अवस्था और पठन-लेखन शीर्ष का स्थान दिखाते हैं।

यदि सम मशीन को चार 1 के आगत से आरंभ किया जाए, तो उसके विन्यासों का क्रम देखें। इस स्थिति में हम मशीन के रुकने की अपेक्षा करते हैं। इसके बाद मशीन को तीन 1 के आगत पर चलाएँगे, जहाँ वह सदा चलती रहेगी।

मशीन अवस्था q_0 में आरंभ होकर सबसे बाएँ 1 को पढ़ती है। मशीन के आरंभिक विन्यास को इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं:

$$\triangleright 1_0 1110\ldots$$

ऊपर का विन्यास सीधा है। जैसा दिखाई देता है, मशीन आरंभिक अवस्था में सबसे बाएँ 1 को पढ़ती है। इसे पहले 1 पर अवस्था के नाम को अधोलिखित करके निरूपित किया गया है। इस बिंदु पर लागू निर्देश $\delta(q_0, 1) = \langle q_1, 1, R\rangle$ है; अतः मशीन पट्टी पर दाईं ओर जाती है और अवस्था q_1 में बदल जाती है।

$$\triangleright 11_1 110\ldots$$

चूँकि अब मशीन अवस्था q_1 में एक 1 पढ़ रही है, हमें निर्देश $\delta(q_1, 1) = \langle q_0, 1, R\rangle$ का "अनुसरण" करना होगा। इससे निम्न विन्यास मिलता है:

$$\triangleright 111_0 10\ldots$$

मशीन के आगे चलने पर नियम पुनः उसी क्रम में लागू होते हैं, जिससे अगले दो विन्यास मिलते हैं:

$$\triangleright 1111_1 0\ldots$$

$$\triangleright 11110_0 \ldots$$

अब मशीन अवस्था q_0 में एक 0 पढ़ रही है। संक्रमण आरेख से सरलता से दिखता है कि निष्पादित करने के लिए कोई निर्देश नहीं है; अतः मशीन रुक गई है। इसका अर्थ है कि आगत स्वीकार कर लिया गया है।

अब मान लें कि मशीन को तीन 1 के आगत से आरंभ करते हैं। आरंभिक कुछ विन्यास समान हैं, क्योंकि वही निर्देश निष्पादित होते हैं; अंतर केवल पट्टी के आगत में थोड़ा-सा है:

$$\triangleright 1_0 110 \ldots$$

$$\triangleright 11_1 10 \ldots$$

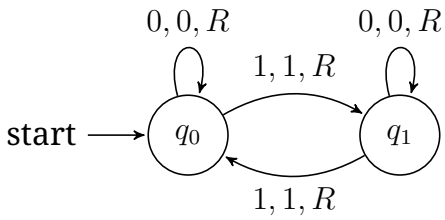
$$\triangleright 111_0 0 \ldots$$

$$\triangleright 1110_1 \ldots$$

अब मशीन सभी 1 से आगे निकल चुकी है और एक 0 को अवस्था q_1 में पढ़ रही है। आरेख के अनुसार यहाँ $\delta(q_1, 0) = \langle q_1, 0, R\rangle$ रूप का निर्देश है। चूँकि पट्टी दाईं ओर अनिश्चित काल तक 0 से भरी है, मशीन अवस्था q_1 में रहते और निरंतर दाईं ओर जाते हुए इस निर्देश को *सदा* निष्पादित करती रहेगी। मशीन कभी नहीं रुकेगी और आगत स्वीकार नहीं करेगी।

यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि सभी मशीनें नहीं रुकेंगी। यदि रुकने का अर्थ यह है कि मशीन के पास निष्पादित करने के लिए कोई निर्देश शेष नहीं रहा, तो प्रत्येक अवस्था पर प्रत्येक प्रतीक के लिए एक बाहर जाने वाला तीर सुनिश्चित करके ऐसी मशीन बनाई जा सकती है जो कभी न रुके। एक 0 को अवस्था q_0 में पढ़ने का निर्देश जोड़कर सम मशीन को अनिश्चित काल तक चलने वाली मशीन में बदला जा सकता है।

उदाहरण 31.2.



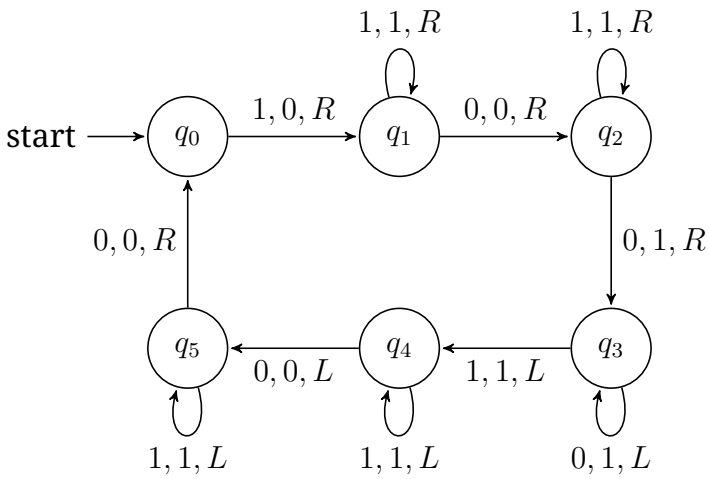
मशीन सारणियाँ ट्यूरिंग मशीनों के निरूपण की दूसरी रीति हैं। मशीन सारणी में पट्टी की वर्णमाला x-अक्ष पर और मशीन की अवस्थाओं का समुच्चय y-अक्ष पर दिखाया जाता है। सारणी के भीतर प्रत्येक अवस्था और प्रतीक के प्रतिच्छेद पर निर्देश का शेष भाग—नई अवस्था, नया प्रतीक और गति की दिशा—लिखा होता है। मशीन सारणी से यह निर्धारित करना सरल हो जाता है कि मशीन किस अवस्था और किस प्रतीक पर रुकती है। सारणी का प्रत्येक रिक्त स्थान मशीन के रुकने का संभावित बिंदु है। अवस्था आरेखों और निर्देश-समुच्चयों में मशीन के रुकने के बिंदु सदैव तुरंत स्पष्ट नहीं होते; इसके विपरीत, मशीन सारणी के रिक्त स्थान खोजकर सभी विराम-बिंदुओं को शीघ्र पहचाना जा सकता है।

उदाहरण 31.3. सम मशीन की मशीन सारणी यह है:

	0	1	$\triangleright$
q_0		$1, q_1, R$	
q_1	$0, q_1, R$	$1, q_0, R$	

जैसा दिखाई देता है, मशीन एक 0 को अवस्था q_0 में पढ़ते समय रुकती है।

अब तक हमने केवल उन मशीनों पर विचार किया है जो आगत को पढ़ती और स्वीकार करती हैं। किंतु ट्यूरिंग मशीनों में पढ़ने और लिखने दोनों की क्षमता होती है। ऐसी मशीन का एक उदाहरण (यद्यपि उदाहरण बहुत अधिक हैं) *द्विगुणक* है। पट्टी पर n 1 के खंड से आरंभ करने पर द्विगुणक $2n$ 1 का खंड निर्गत करता है।



चित्र 31.2: एक द्विगुणक मशीन

उदाहरण 31.4. द्विगुणक मशीन बनाने से पहले समस्या हल करने की एक *रणनीति* बनाना महत्त्वपूर्ण है। चूँकि मशीन (जैसा हमने उसे सूत्रबद्ध किया है) यह याद नहीं रख सकती कि उसने कितने 1 पढ़े हैं, इसलिए पट्टी के सभी 1 का लेखा रखने की रीति चाहिए। एक रीति यह है कि निर्गत को आगत से एक 0 द्वारा अलग कर दें। तब मशीन आगत से पहला 1 मिटा सकती है, शेष आगत को पार कर सकती है, एक 0 छोड़ सकती है और दो नए 1 लिख सकती है। फिर मशीन लौटकर आगत में दूसरा 1 खोजेगी और उसे भी दुगुना करेगी। आगत के प्रत्येक एक 1 के लिए वह निर्गत के दो 1 लिखेगी। चलते-चलते आगत मिटाने से यह सुनिश्चित होता है कि कोई 1 छूटे नहीं और किसी को दो बार दुगुना न किया जाए। पूरा आगत मिट जाने पर पट्टी पर $2n$ 1 शेष रहेंगे। परिणामी ट्यूरिंग मशीन का अवस्था आरेख आकृति 31.2 में दिखाया गया है।

31.3 ट्यूरिंग मशीनें

ट्यूरिंग मशीन किन वस्तुओं से बनती है, इसकी आकारिक परिभाषा अमूर्त दिखती है, किंतु वास्तव में सरल है: वह ट्यूरिंग मशीन की कार्यप्रणाली निर्दिष्ट करने के लिए आवश्यक सारी सूचना को केवल एक गणितीय संरचना में समेटती है। इसमें यह सम्मिलित है कि (1) मशीन किन अवस्थाओं में हो सकती है, (2) पट्टी पर किन प्रतीकों की अनुमति है, (3) मशीन को किस अवस्था में आरंभ होना चाहिए, और (4) मशीन का निर्देश-समुच्चय क्या है।

परिभाषा 31.5 (ट्यूरिंग मशीन). एक *ट्यूरिंग मशीन* M एक टपल $\langle Q, \Sigma, q_0, \delta \rangle$ है, जिसमें होते हैं:

1. *अवस्थाओं* का एक परिमित समुच्चय Q,
2. एक परिमित *वर्णमाला* Σ, जिसमें $\triangleright$ और 0 सम्मिलित हैं,
3. एक *आरंभिक अवस्था* $q_0 \in Q$,
4. एक परिमित *निर्देश-समुच्चय* $\delta \colon Q \times \Sigma \nrightarrow Q \times \Sigma \times \{L, R, N\}$.

आंशिक फलन δ को M का *संक्रमण फलन* भी कहते हैं।

हम मानते हैं कि पट्टी केवल एक दिशा में अनंत है। इसलिए पट्टी के बाएँ अंत के चिह्नक के रूप में एक विशेष प्रतीक $\triangleright$ निर्दिष्ट करना उपयोगी है। इससे ट्यूरिंग मशीन के प्रोग्राम के लिए यह बताना सरल हो जाता है कि वह कब

पट्टी से बाहर निकलने के "संकट" में है। हम मान सकते थे कि इस प्रतीक के ऊपर कभी नहीं लिखा जाता; अर्थात् $\delta(q, \triangleright) = \langle q', \triangleright, x \rangle$, यदि $\delta(q, \triangleright)$ परिभाषित हो। कुछ पाठ्यपुस्तकें ऐसा करती हैं; हम नहीं करते। अपनी ट्यूरिंग मशीन बनाते समय आप केवल इतना ध्यान रख सकते हैं कि वह $\triangleright$ के ऊपर कभी न लिखे। इसके अतिरिक्त, कुछ स्थितियों में इसके ऊपर लिखने की अनुमति सुविधाजनक लचीलापन देती है।

उदाहरण 31.6. *सम मशीन:* सम मशीन आकारिक रूप से चतुष्टय $\langle Q, \Sigma, q_0, \delta \rangle$ है, जहाँ

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1\} \\ \Sigma &= \{\triangleright, 0, 1\}, \\ \delta(q_0, 1) &= \langle q_1, 1, R \rangle, \\ \delta(q_1, 1) &= \langle q_0, 1, R \rangle, \\ \delta(q_1, 0) &= \langle q_1, 0, R \rangle. \end{aligned}$$

31.4 विन्यास और संगणनाएँ

पहले सम मशीन के विन्यासों का क्रम निकालना याद करें। पट्टी, पठन-लेखन शीर्ष और ट्यूरिंग मशीन प्रोग्राम से बनी काल्पनिक युक्ति वास्तव में केवल यह सहज रूप से देखने की रीति है कि ट्यूरिंग मशीन की संगणना क्या होती है। आकारिक रूप से, किसी दिए आगत पर ट्यूरिंग मशीन की संगणना को *विन्यासों* के अनुक्रम के रूप में परिभाषित कर सकते हैं—और प्रत्येक विन्यास स्वयं प्रतीकों का एक अनुक्रम (जो संगणना के उस बिंदु पर पट्टी की सामग्री के अनुरूप है), पठन-लेखन शीर्ष की स्थिति बताने वाली एक संख्या और एक अवस्था है। इनकी सहायता से हम परिभाषित कर सकते हैं कि किसी दिए आगत पर ट्यूरिंग मशीन M क्या संगणित करती है।

परिभाषा 31.7 (विन्यास). ट्यूरिंग मशीन $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta \rangle$ का एक *विन्यास* त्रिक $\langle C, m, q \rangle$ है, जहाँ

1. $C \in \Sigma^*$, Σ के प्रतीकों का एक परिमित अनुक्रम है,
2. $m \in \mathbb{N}$, $< \mathrm{len}(C)$ कोई संख्या है, और
3. $q \in Q$

सहज रूप से, अनुक्रम C पट्टी की सामग्री है (सबसे बाएँ खाने से लेकर अंतिम अरिक्त अथवा पहले देखे गए खाने तक के सभी खानों के प्रतीक), m उस खाने की संख्या है जिसे पठन-लेखन शीर्ष पढ़ रहा है (सबसे बाएँ खाने की संख्या 0 से आरंभ करते हुए), और q मशीन की वर्तमान अवस्था है।

ट्यूरिंग मशीन का संभावित आगत प्रतीकों का एक अनुक्रम है, सामान्यतः ऐसा अनुक्रम जो किसी संख्या को किसी रूप में कूटबद्ध करता है। ट्यूरिंग मशीन का आरंभिक विन्यास वह विन्यास है जिसमें हम उस आगत पर काम करने के लिए मशीन आरंभ करते हैं: पट्टी पर पट्टी-अंत चिह्नक के तुरंत बाद दाईं ओर के खानों पर आगत लिखा होता है, पठन-लेखन शीर्ष आगत के सबसे बाएँ खाने को पढ़ता है (अर्थात् बाएँ अंत के चिह्नक की दाईं ओर वाला खाना), और युक्ति निर्दिष्ट आरंभिक अवस्था q_0 में होती है।

परिभाषा 31.8 (आरंभिक विन्यास). M का आगत $I \in \Sigma^*$ के लिए *आरंभिक विन्यास* है:

$$\langle \triangleright \frown I, 1, q_0 \rangle.$$

प्रतीक $\frown$, *संलग्नन* के लिए है—आगत अक्षर-शृंखला बाएँ अंत-चिह्नक के तुरंत बाद आरंभ होती है।

परिभाषा 31.9. हम कहते हैं कि विन्यास $\langle C, m, q \rangle$ *एक चरण में विन्यास* $\langle C', m', q' \rangle$ *देता है* (M के अनुसार), तभी और केवल तभी जब

1. mवाँ प्रतीक, C का, σ है,

2. M का निर्देश-समुच्चय $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', D \rangle$ निर्दिष्ट करता है,

3. mवाँ प्रतीक, C' का, σ' है, और

4. a) $D = L$ और $m' = m - 1$, यदि $m > 0$; अन्यथा $m' = 0$; अथवा
   b) $D = R$ और $m' = m + 1$; अथवा
   c) $D = N$ और $m' = m$,

5. यदि $m' = \text{len}(C)$, तो $\text{len}(C') = \text{len}(C) + 1$ और m'वाँ प्रतीक, C' का, 0 है। अन्यथा $\text{len}(C') = \text{len}(C)$।

6. उन सभी i के लिए जिनके लिए $i < \text{len}(C)$ और $i \neq m$, $C'(i) = C(i)$,

परिभाषा 31.10. M की *आगत I पर क्रिया* विन्यासों का एक अनुक्रम C_i है, जो M के विन्यास हैं, जहाँ C_0, M का आगत I के लिए आरंभिक विन्यास है और प्रत्येक C_i एक चरण में C_{i+1} देता है।

हम कहते हैं कि M, *आगत I पर k चरणों के बाद रुकती है*, यदि $C_k = \langle C, m, q \rangle$, mवाँ प्रतीक C का σ है और $\delta(q, \sigma)$ अपरिभाषित है। उस स्थिति में M का आगत I के लिए *निर्गत* O है, जहाँ O प्रतीकों की ऐसी अक्षर-शृंखला है जिसका अंत 0 से नहीं होता और $C = \triangleright \frown O \frown 0^j$ किसी $j \in \mathbb{N}$ के लिए। (0^j, j 0 प्रतीकों का अनुक्रम है।)

इस परिभाषा के अनुसार, निर्गत O, जो M का है, सदैव 0 से भिन्न किसी प्रतीक से होता है; अथवा यदि समय k पर पूरी पट्टी 0 से भरी है (सबसे बाएँ $\triangleright$ को छोड़कर), तो O रिक्त अक्षर-शृंखला है।

31.5 संख्याओं का एकाधारी निरूपण

ट्यूरिंग मशीनें अपनी पट्टी पर लिखे प्रतीकों के अनुक्रमों पर काम करती हैं। ट्यूरिंग मशीन द्वारा प्रयुक्त वर्णमाला के अनुसार ये प्रतीक-अनुक्रम विभिन्न आगतों और निर्गतों को निरूपित कर सकते हैं। निश्चय ही, प्राकृतिक संख्याओं के फलनों अर्थात् *अंकगणितीय* फलनों को संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीनें विशेष रुचि की हैं। धन पूर्णांकों को निरूपित करने की एक सरल रीति उन्हें एक ही प्रतीक 1 के अनुक्रमों के रूप में कूटबद्ध करना है। यदि $n \in \mathbb{N}$, तो 1^n को, $n = 0$ होने पर, रिक्त अनुक्रम और अन्यथा ठीक n 1 वाला अनुक्रम मानें।

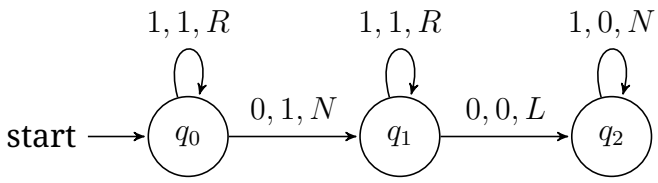
परिभाषा 31.11 (संगणना). ट्यूरिंग मशीन M, फलन $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ को *संगणित करती है*, तभी और केवल तभी जब M आगत

$$1^{n_1}01^{n_2}0 \ldots 01^{n_k}$$

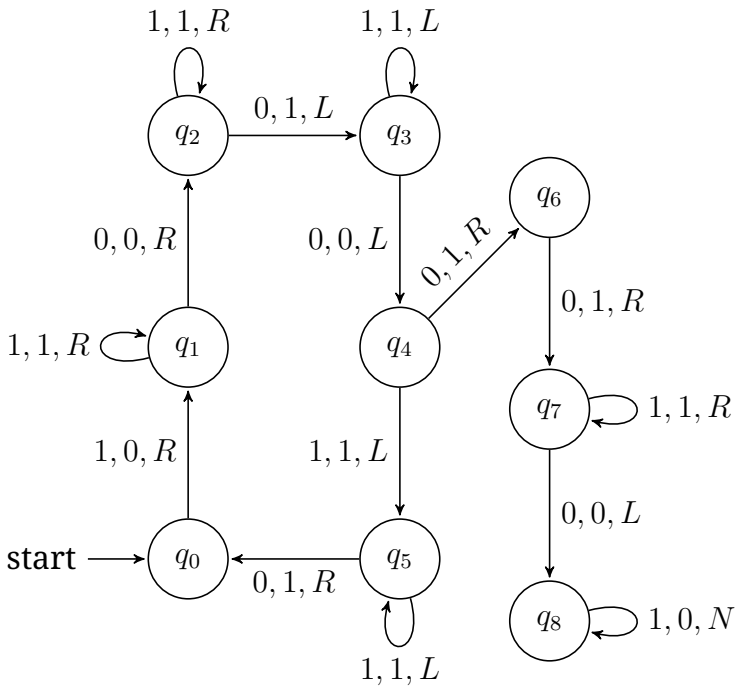
पर निर्गत $1^{f(n_1,\ldots,n_k)}$ के साथ रुकती है।

उदाहरण 31.12. *योग:* फलन $f(n, m) = n + m$ को संगणित करने वाली मशीन बनाएँ। इसके लिए ऐसी मशीन चाहिए जो पट्टी पर 1 के दो खंडों से आरंभ हो, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः n और m हों, और $n + m$ 1 वाले एक खंड के साथ रुके। आगत में 1 के दोनों खंडों के बीच एक 0 है; अतः एक रीति यह होगी कि 0 वाले खाने पर एक आघात लिख दें और अंतिम 1 मिटा दें।

उदाहरण 31.4 में हमने ऐसी ट्यूरिंग मशीन का उदाहरण दिया था जो 1 के अनुक्रम को आगत के रूप में लेती है और पट्टी पर उससे दुगुने 1 के अनुक्रम के साथ रुकती है—द्विगुणक मशीन। किंतु निर्गत में 0 भी हैं, जो 1 के दुगुने खंड के बाईं ओर हैं; इसलिए आपकी संभावित धारणा के विपरीत, वह वास्तव में फलन $f(x) = 2x$ को संगणित नहीं करती। इसे ठीक करने की दो रीतियाँ बताएँगे।



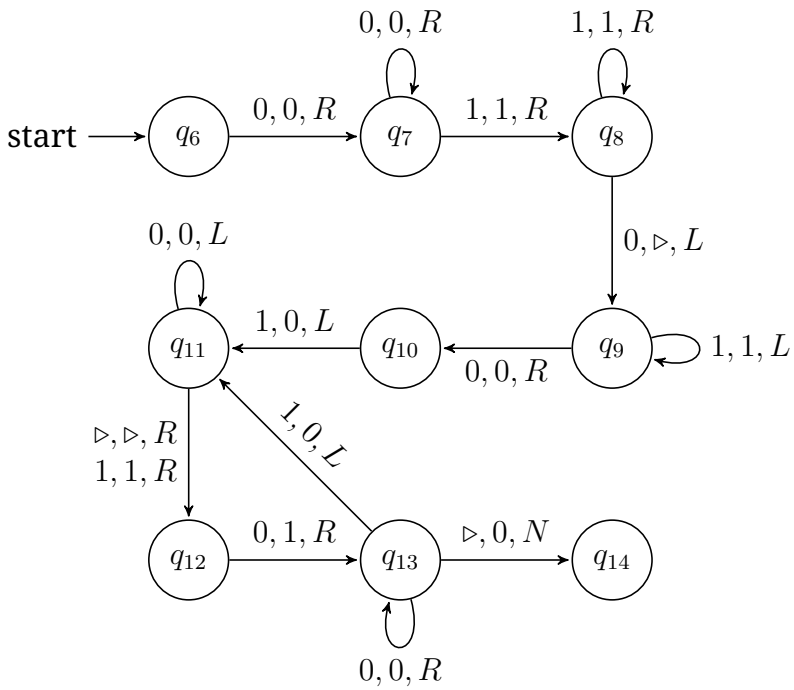
चित्र 31.3: $f(x, y) = x + y$ संगणित करने वाली मशीन



चित्र 31.4: $f(x) = 2x$ संगणित करने वाली मशीन

उदाहरण 31.13. आकृति 31.4 की मशीन फलन $f(x) = 2x$ को संगणित करती है। उदाहरण 31.4 की मशीन की तरह आगत मिटाकर उसके प्रत्येक 1 के लिए दूर दाईं ओर दो 1 लिखने के स्थान पर यह मशीन आगत के प्रत्येक 1 के लिए दाईं ओर एक 1 जोड़ती है। इसे लेखा रखना होता है कि आगत कहाँ समाप्त होता है; इसलिए वह आगत और जोड़े गए आघातों के बीच एक 0 छोड़ती है और सबसे अंत में उसे 1 से भर देती है। हमें यह भी "याद" रखना होता है कि हम आगत में कहाँ हैं; इसलिए आगत-खंड के एक 1 को अस्थायी रूप से 0 से बदलते हैं।

उदाहरण 31.14. $f(x) = 2x$ संगणित करने की दूसरी संभावना यह है कि मूल द्विगुणक मशीन को रखें, किंतु अंत में ऐसी अवस्थाएँ और निर्देश जोड़ें जो आघातों के दुगुने खंड को पट्टी के दूर बाएँ सिरे पर ले जाएँ। आकृति 31.5 की मशीन केवल यही अंतिम भाग करती है: 0 के एक खंड और उसके बाद 1 के एक खंड वाली पट्टी पर आरंभ करने पर (और शीर्ष को 0 के खंड में कहीं भी रखने पर), वह 1 को एक-एक करके मिटाती है और उन्हें पट्टी के आरंभ में लिखती है। काम पूरा होने का पता लगाने के लिए वह पहले 1 के खंड के अंत को एक $\triangleright$ प्रतीक से चिह्नित करती है, जिसे अंत में मिटा दिया जाता है। हमने अवस्थाओं की संख्या q_6 से आरंभ की है ताकि इन्हें द्विगुणक मशीन में जोड़ा जा सके। आपको केवल एक अतिरिक्त निर्देश $\delta(q_0, 0) = \langle q_6, 0, N\rangle$ चाहिए; अर्थात् q_0 से q_6 तक $0, 0, N$ अंकित एक तीर। (एक सूक्ष्म समस्या है: परिणामी मशीन आगत $x = 0$ के लिए काम नहीं करती। इसे अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।)



चित्र 31.5: 1 के एक खंड को बाईं ओर ले जाना

परिभाषा 31.15. ट्यूरिंग मशीन M, आंशिक फलन $f\colon \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$ को संगणित करती है, तभी और केवल तभी जब

1. M आगत $1^{n_1} \frown 0 \frown \ldots \frown 0 \frown 1^{n_k}$ पर निर्गत 1^m के साथ रुकती है, यदि $f(n_1, \ldots, n_k) = m$।
2. M बिल्कुल नहीं रुकती, अथवा ऐसे निर्गत के साथ रुकती है जो 1 का एकल खंड नहीं है, यदि $f(n_1, \ldots, n_k)$ अपरिभाषित है।

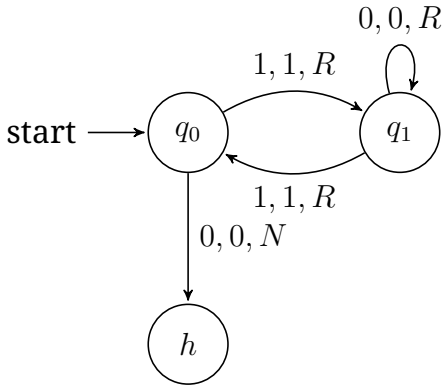
31.6 विराम-अवस्थाएँ

यद्यपि हमने अपनी मशीनों को केवल तभी रुकने के लिए परिभाषित किया है जब निष्पादित करने हेतु कोई निर्देश न हो, ट्यूरिंग मशीनों के सामान्य निरूपणों में एक समर्पित *विराम-अवस्था* h होती है, ऐसी कि $h \in Q$।

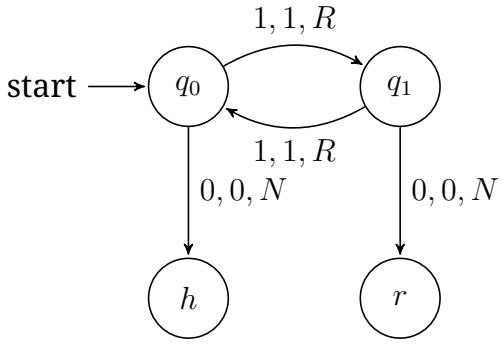
विराम-अवस्था के पीछे का विचार सरल है: जब मशीन अपनी क्रिया पूरी कर चुकी होती है (वह आगत स्वीकार करने को तैयार होती है अथवा निर्गत लिख चुकी होती है), तब वह अवस्था h में जाती है और वहाँ रुकती है। कुछ मशीनों में दो विराम-अवस्थाएँ होती हैं—एक आगत को स्वीकार करती है और दूसरी उसे अस्वीकार करती है।

उदाहरण 31.16. *विराम-अवस्थाएँ*। इस धारणा को स्पष्ट करने के लिए सम मशीन में एक परिवर्तन से आरंभ करें। आगत सम होने पर मशीन को अवस्था q_0 में रुकवाने के स्थान पर हम मशीन को किसी विराम-अवस्था में भेजने वाला

निर्देश जोड़ सकते हैं।



उदाहरण को और बढ़ाएँ। जब मशीन निर्धारित करती है कि आगत विषम है, तब वह कभी नहीं रुकती। चक्रकारी निर्देश को अस्वीकार-अवस्था r में जाने वाले निर्देश से बदलकर मशीन में एक *अस्वीकार-अवस्था* सम्मिलित कर सकते हैं।



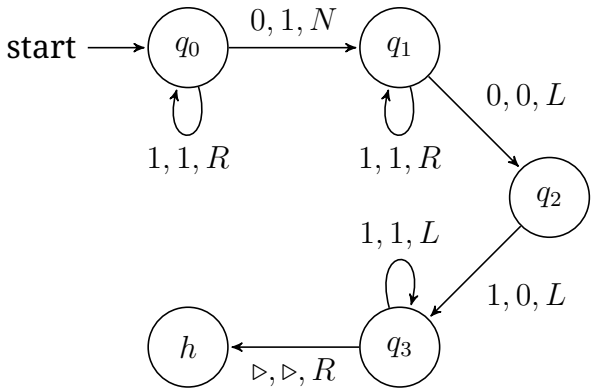
इस प्रकार की स्थितियों में समर्पित विराम-अवस्था जोड़ना लाभकारी हो सकता है, क्योंकि उससे यह स्पष्ट होता है कि मशीन किन आगतों को स्वीकार या अस्वीकार करती है। किंतु यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि समर्पित विराम-अवस्था जोड़ने से संगणन-शक्ति में कोई वृद्धि नहीं होती। इसी प्रकार, रुकने की कम आकारिक धारणा के अपने लाभ हैं। इस अध्याय में अब तक प्रयुक्त रुकने की परिभाषा *विराम समस्या* के प्रमाण को सहज और प्रदर्शित करने में सरल बनाती है। इसी कारण हम अपनी मूल परिभाषा जारी रखते हैं।

31.7 अनुशासित मशीनें

अनुभाग खंड 31.6 में हमने ऐसी ट्यूरिंग मशीनों पर विचार किया जिनकी एक निर्दिष्ट विराम-अवस्था h होती है—यदि ऐसी मशीनें रुकती हैं, तो अवस्था h में ही रुकती हैं। इस अर्थ में एकल विराम-अवस्था वाली मशीनें सामान्य ट्यूरिंग मशीनों के लिए हमारी अनुमति की अपेक्षा अधिक "अनुशासित" हैं। ट्यूरिंग मशीनों के व्यवहार पर अन्य प्रतिबंध भी लगाए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, हमने ट्यूरिंग मशीनों को खाना 0 पर पट्टी-अंत चिह्नक मिटाने अथवा खाना 0 से बाईं ओर जाने का प्रयास करने से भी नहीं रोका है। (हमारी परिभाषा कहती है कि इस स्थिति में शीर्ष केवल खाना 0 पर रहता है; अन्य परिभाषाओं में मशीन रुक जाती है।) इसी प्रकार कभी-कभी यह मान पाना वांछनीय होता है कि यदि ट्यूरिंग मशीन रुकती है, तो खाना 1 पर रुकती है।

परिभाषा 31.17. ट्यूरिंग मशीन M *अनुशासित* है, तभी और केवल तभी जब

1. उसकी एक निर्दिष्ट एकल विराम-अवस्था h है,
2. यदि वह रुकती है, तो खाना 1 पढ़ते हुए रुकती है,
3. वह $\triangleright$ प्रतीक कभी नहीं मिटाती, जो खाना 0 पर है, और



चित्र 31.6: एक अनुशासित योग मशीन

4. वह खाना 0 से बाईं ओर जाने का कभी प्रयास नहीं करती।

हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं कि किसी भी ट्यूरिंग मशीन को समान व्यवहार वाली, किंतु निर्दिष्ट विराम-अवस्था वाली मशीन में बदला जा सकता है। इसके लिए केवल एक नई अवस्था h जोड़ते हैं और निर्देश $\delta(q, \sigma) = \langle h, \sigma, N\rangle$ प्रत्येक ऐसे युग्म $\langle q, \sigma\rangle$ के लिए जोड़ते हैं जहाँ मूल δ अपरिभाषित है। यह सत्य है, यद्यपि इसका प्रमाण श्रमसाध्य है, कि किसी भी ट्यूरिंग मशीन M को ऐसी अनुशासित ट्यूरिंग मशीन M' में बदला जा सकता है जो उन्हीं आगतों पर रुकती और वही निर्गत उत्पन्न करती है। उदाहरणार्थ, यदि ट्यूरिंग मशीन रुकती है और खाना 1 पर नहीं है, तो कुछ निर्देश जोड़कर शीर्ष को बाईं ओर तब तक चला सकते हैं जब तक उसे पट्टी-अंत चिह्नक न मिल जाए; फिर उसे एक खाना दाईं ओर ले जाकर मशीन रोक सकते हैं। अन्य शर्तों को कैसे पूरा किया जाए, इस पर आप विचार करें।

उदाहरण 31.18. आकृति 31.6 में हम उदाहरण 31.12 की योग मशीन को अनुशासित मशीन में बदलते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 31.19. *प्रत्येक ट्यूरिंग मशीन M के लिए एक अनुशासित ट्यूरिंग मशीन M' है जो निर्गत O के साथ रुकती है यदि M निर्गत O के साथ रुकती है, और नहीं रुकती यदि M नहीं रुकती। विशेष रूप से, ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणनीय प्रत्येक फलन $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ किसी अनुशासित ट्यूरिंग मशीन द्वारा भी संगणनीय है।*

31.8 ट्यूरिंग मशीनों का संयोजन

अब तक देखे गए ट्यूरिंग मशीनों के उदाहरण स्वभावतः अपेक्षाकृत सरल रहे हैं। किंतु वास्तव में आधुनिक प्रोग्रामन की किसी भी भाषा से हल की जा सकने वाली प्रत्येक समस्या ट्यूरिंग मशीनों से भी हल की जा सकती है। अधिक जटिल ट्यूरिंग मशीनें बनाने के लिए यह स्थापित करना महत्त्वपूर्ण है कि हम उनका संयोजन कर सकते हैं, ताकि प्रक्रिया को सरल भागों में बाँटकर अधिक जटिल समस्याएँ हल करने वाली मशीनें बना सकें। यदि किसी जटिल समस्या को उसके घटक भागों में बाँटने की स्वाभाविक रीति मिल जाए, तो कई सरल ट्यूरिंग मशीनें बनाकर और उन्हें समस्या हल करने वाली एक मशीन में मिलाकर समस्या को कई चरणों में हल किया जा सकता है। अगले अनुभाग में विराम समस्या पर काम करते समय यह बात विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण होगी।

ट्यूरिंग मशीनों $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta\rangle$ और $M' = \langle Q', \Sigma', q_0', \delta'\rangle$ का संयोजन कैसे करें? अब हम M के रुकने के बाद पट्टी के विन्यास को मशीन M' की किसी क्रिया के आगत विन्यास के रूप में लेते हैं। यह करने वाली एकल ट्यूरिंग मशीन $M \frown M'$ पाने के लिए निम्न कार्य करें:

1. Q' की सभी अवस्थाओं को, जो M' की हैं, पुनः संख्या (या पुनः नाम) दें, ताकि M और M' की कोई अवस्था समान न हो ($Q \cap Q' = \emptyset$)।

2. $M \frown M'$ की अवस्थाएँ $Q \cup Q'$ हैं।

3. पट्टी की वर्णमाला $\Sigma \cup \Sigma'$ है।

4. आरंभिक अवस्था q_0 है।

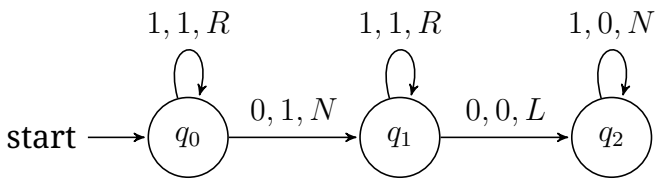
5. संक्रमण फलन निम्न फलन δ'' है:

$$\delta''(q,\sigma) = \begin{cases} \delta(q,\sigma) & \text{यदि } q \in Q \\ \delta'(q,\sigma) & \text{यदि } q \in Q' \\ \langle q_0', \sigma, N\rangle & \text{यदि } q \in Q \text{ और } \delta(q,\sigma) \text{ अपरिभाषित है} \end{cases}$$

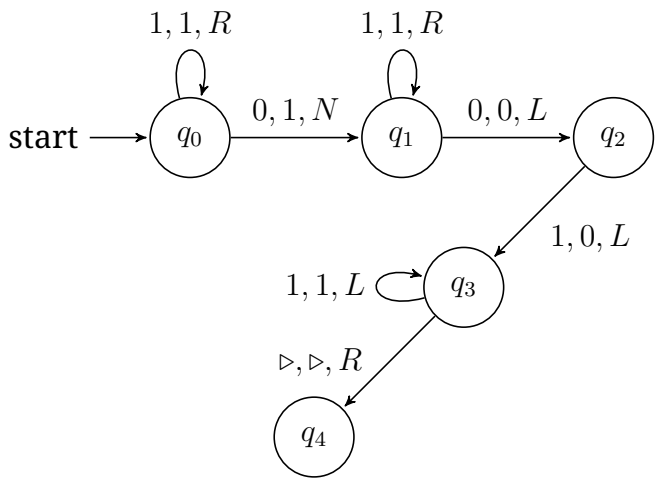
परिणामी मशीन M के निर्देशों का उपयोग तब करती है जब वह अवस्था $q \in Q$ में हो, और M' के निर्देशों का उपयोग तब करती है जब वह अवस्था $q \in Q'$ में हो। जब वह अवस्था $q \in Q$ में है और ऐसा प्रतीक σ पढ़ रही है जिसके लिए M में कोई संक्रमण नहीं है (अर्थात् M रुक जाती), तब वह M' की आरंभिक अवस्था में प्रवेश करती है (और पट्टी की सामग्री तथा शीर्ष की स्थिति को यथावत् छोड़ती है)।

ध्यान दें कि यदि मशीन M अनुशासित नहीं है, तो M के रुकते समय हमें नहीं पता कि पट्टी का शीर्ष कहाँ है; अतः आवश्यक नहीं कि M के अंतिम विन्यास में शीर्ष खाना 1 पढ़ रहा हो। मशीनों का संयोजन करते समय इसे ध्यान में रखना महत्त्वपूर्ण है।

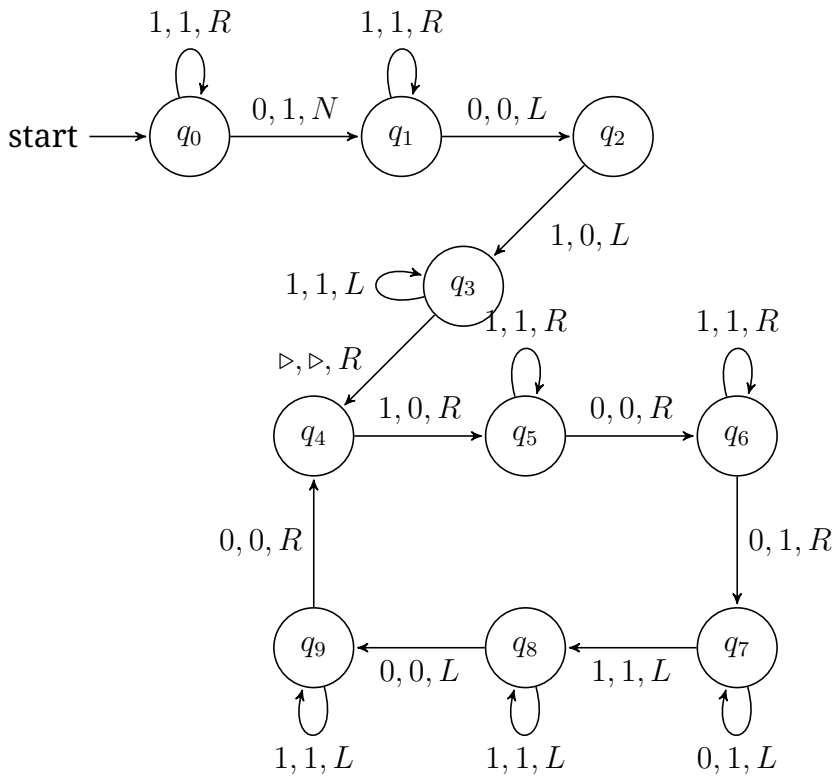
उदाहरण 31.20. *मशीनों का संयोजन:* हम ऐसी मशीन की अभिकल्पना करेंगे जो 1 के दो खंडों के आगत पर आरंभ हो, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः n और m हों, और पट्टी पर $2(m+n)$ 1 के एकल खंड के साथ रुके। इस मशीन को बनाने के लिए हम दो परिचित मशीनों का संयोजन कर सकते हैं: योग मशीन और द्विगुणक। योग मशीन का अवस्था आरेख बनाकर आरंभ करें।



अवस्था q_2 में रुकने के स्थान पर निर्गत को दुगुना करने के लिए क्रिया जारी रखना चाहते हैं। याद करें कि द्विगुणक मशीन आगत का पहला आघात मिटाकर अलग निर्गत में दो आघात लिखती है। यह सुनिश्चित करने वाला निर्देश जोड़ें कि पट्टी का शीर्ष योग मशीन के निर्गत का पहला आघात पढ़ रहा हो।



अब आगत को दुगुना करना सरल है—हमें केवल द्विगुणक मशीन को अवस्था q_4 पर जोड़ना है। इसके लिए द्विगुणक मशीन की अवस्थाओं का पुनर्नामकरण करना होगा, ताकि वे q_4 से आरंभ हों, न कि q_0 से—इस प्रकार दो आरंभिक अवस्थाएँ नहीं बनेंगी। अंतिम आरेख आकृति 31.7 जैसा दिखना चाहिए।



चित्र 31.7: योग और द्विगुणक मशीनों का संयोजन

प्रतिज्ञप्ति 31.21. *यदि M और M' अनुशासित हैं और क्रमशः फलनों $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ और $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को संगणित करती हैं, तो $M \frown M'$ अनुशासित है और $f' \circ f$ को संगणित करती है।*

प्रमाण. चूँकि M अनुशासित है, इसलिए जब वह निर्गत $f(n_1, \ldots, n_k) = m$ के साथ रुकती है, तब शीर्ष खाना 1 पढ़ रहा होता है। अब यदि हम M' की आरंभिक अवस्था में प्रवेश करें, तो मशीन निर्गत $f'(m)$ के साथ और फिर से खाना 1 पढ़ते हुए रुकेगी। परिभाषा 31.17 की अन्य शर्तें भी पूरी होती हैं। □

31.9 ट्यूरिंग मशीनों के रूपांतर

वास्तव में ट्यूरिंग मशीनों को परिभाषित करने की अनेक संभव रीतियाँ हैं; हमारी रीति उनमें से केवल एक है। कुछ दृष्टियों से हमारी परिभाषा अन्य परिभाषाओं की अपेक्षा अधिक उदार है। हम मनमानी परिमित वर्णमालाओं की अनुमति देते हैं; कोई अधिक प्रतिबंधित परिभाषा पट्टी पर केवल दो प्रतीकों 1 और 0 की अनुमति दे सकती है। हम मशीन को पट्टी पर प्रतीक लिखने और उसी समय चलने देते हैं; अन्य परिभाषाएँ लिखने अथवा चलने में से केवल एक की अनुमति देती हैं। हम पट्टी के शीर्ष को चलाए बिना लिखने की संभावना स्वीकार करते हैं; अन्य परिभाषाएँ N "निर्देश" को छोड़ देती हैं। दूसरी दृष्टियों से हमारी परिभाषा अधिक प्रतिबंधित है। हमने माना कि पट्टी केवल एक दिशा में अनंत है; अन्य परिभाषाएँ पट्टी को बाईं और दाईं दोनों ओर अनंत होने देती हैं। वास्तव में, कितनी भी अलग पट्टियों, या खानों के अनंत जालक तक की अनुमति दी जा सकती है। हम ट्यूरिंग मशीन के निर्देश-समुच्चय को संक्रमण फलन द्वारा निरूपित करते हैं; अन्य परिभाषाएँ संक्रमण संबंध का उपयोग करती हैं, जिसमें किसी दी हुई स्थिति में मशीन के लिए एक से अधिक संभव निर्देश होते हैं।

परिभाषा का यह अंतिम शिथिलीकरण विशेष रूप से रोचक है। हमारी परिभाषा में, जब मशीन अवस्था q में प्रतीक σ पढ़ रही होती है, तब $\delta(q, \sigma)$ नया प्रतीक, अवस्था और पट्टी के शीर्ष की स्थिति निर्धारित करता है। किंतु यदि निर्देश-

समुच्चय को वर्तमान अवस्था-प्रतीक युग्मों $\langle q, \sigma \rangle$ और नए अवस्था-प्रतीक-दिशा त्रिकों $\langle q', \sigma', D \rangle$ के बीच संबंध होने दें, तो ट्यूरिंग मशीन की क्रिया अद्वितीय रूप से निर्धारित न हो—निर्देश संबंध में $\langle q, \sigma, q', \sigma', D \rangle$ और $\langle q, \sigma, q'', \sigma'', D' \rangle$ दोनों हो सकते हैं। इस स्थिति में हमारे पास एक *अनियतात्मक* ट्यूरिंग मशीन होती है। संगणनात्मक जटिलता सिद्धांत में ऐसी मशीनों की महत्त्वपूर्ण भूमिका है।

ट्यूरिंग मशीन कब रुकती है, इसके लिए भी भिन्न परिपाटियाँ हैं: हम कहते हैं कि संक्रमण फलन अपरिभाषित होने पर वह रुकती है; अन्य परिभाषाएँ मशीन का किसी विशेष निर्दिष्ट विराम-अवस्था में होना आवश्यक मानती हैं। खंड 31.6 में हम समझा चुके हैं कि निर्दिष्ट विराम-अवस्था की आवश्यकता ऐसा प्रतिबंध क्यों नहीं है जो ट्यूरिंग मशीनों की संगणन-क्षमता को प्रभावित करे। चूँकि हमारी ट्यूरिंग मशीनों की पट्टियाँ केवल एक दिशा में अनंत हैं, इसलिए ऐसी स्थितियाँ आती हैं जहाँ ट्यूरिंग मशीन किसी निर्देश को ठीक से निष्पादित नहीं कर सकती: जब वह सबसे बायाँ खाना पढ़ रही हो और उसे बाईं ओर जाना हो। हमारी परिभाषा के अनुसार वह "गिरने" के स्थान पर वहीं रहती है; किंतु हम इसे ऐसी परिभाषा दे सकते थे कि ऐसा होने पर वह रुक जाए। यह परिभाषा भी समतुल्य है: खाना 0 से बाईं ओर जाने का प्रयास करने पर रुकने वाली ट्यूरिंग मशीन के व्यवहार का अनुकरण प्रत्येक संक्रमण $\delta(q, \triangleright) = \langle q', \sigma, L \rangle$ को मिटाकर कर सकते हैं—तब $\triangleright$ पर बाईं ओर जाने का प्रयास करने के स्थान पर मशीन रुक जाती है।[1]

संख्याओं के निरूपण की भी भिन्न रीतियाँ हैं (और इसलिए ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणित आगत-निर्गत फलन की भी): हम एकाधारी निरूपण का उपयोग करते हैं, किंतु द्विआधारी निरूपण भी उपयोग कर सकते हैं। इसके लिए 0 और $\triangleright$ के अतिरिक्त दो प्रतीक चाहिए।

अब एक रोचक तथ्य देखें: कौन-से फलन ट्यूरिंग-संगणनीय हैं, इस पर इनमें से किसी रूपांतर का प्रभाव नहीं पड़ता। *यदि कोई फलन एक परिभाषा के अनुसार ट्यूरिंग-संगणनीय है, तो वह उन सभी के अनुसार ट्यूरिंग-संगणनीय है।*

हम इसके सत्यापन के विस्तार में नहीं जाएँगे। केवल एक उदाहरण देखें: दोनों दिशाओं में अनंत पट्टी अथवा अनेक पट्टियों की अनुमति देने से कोई अतिरिक्त संगणन-शक्ति नहीं मिलती। मोटे तौर पर कारण यह है कि एकल एकदिश अनंत पट्टी वाली ट्यूरिंग मशीन अनेक पट्टियों अथवा द्विदिश अनंत पट्टियों का अनुकरण कर सकती है। उदाहरणार्थ, अतिरिक्त अवस्थाओं और निर्देशों का उपयोग करके अनेक पट्टियों या द्विदिश अनंत पट्टी वाली मशीन के प्रोग्राम का "अनुवाद" एकल एकदिश अनंत पट्टी वाली मशीन में कर सकते हैं। अनूदित मशीन सम खानों को पट्टी 1 के खानों (या द्विदिश अनंत पट्टी के "धन" खानों) के लिए और विषम खानों को पट्टी 2 के खानों (या "ऋण" खानों) के लिए उपयोग कर सकती है।

31.10 चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा

ट्यूरिंग मशीनों को प्रभावी प्रक्रिया की धारणा का सटीक प्रतिस्थापन माना जाता है। ट्यूरिंग का विचार था कि प्रभावी प्रक्रिया और ट्यूरिंग मशीन की दोनों धारणाएँ समझने वाले प्रत्येक व्यक्ति को यह सहज बोध होगा कि प्रभावी प्रक्रिया द्वारा किया जा सकने वाला प्रत्येक कार्य ट्यूरिंग मशीन द्वारा भी किया जा सकता है। इस दावे को इस तथ्य से समर्थन मिलता है कि प्रभावी प्रक्रिया की धारणा के लिए प्रस्तावित अन्य सभी सटीक प्रतिस्थापन ट्यूरिंग मशीन की धारणा के विस्तारतः समतुल्य निकलते हैं—अर्थात् वे ठीक उसी फलन-समुच्चय को संगणित कर सकते हैं। इस दावे को *चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा* कहते हैं।

परिभाषा 31.22 (चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा). *चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा* कहती है कि प्रभावी प्रक्रिया द्वारा संगणनीय प्रत्येक वस्तु ट्यूरिंग-संगणनीय है।

चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का आह्वान दो प्रकार से किया जाता है। उसका पहला प्रकार का उपयोग आलस्य का बहाना है। मान लें कि हमारे पास किसी वस्तु को संगणित करने की प्रभावी प्रक्रिया का वर्णन, मान लें "छद्म-कूट" में, है। तब चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का आह्वान करके इस दावे को उचित ठहरा सकते हैं कि वही फलन किसी ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणित होता है, भले ही हमने वास्तव में उस मशीन का निर्माण न किया हो।

चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का दूसरा उपयोग दार्शनिक दृष्टि से अधिक रोचक है। यह दिखाया जा सकता है कि ऐसे फलन हैं जिन्हें ट्यूरिंग मशीनें संगणित नहीं कर सकतीं। इससे चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का उपयोग करके निष्कर्ष निकाला

[1] यह *पूरी तरह* काम नहीं करता, क्योंकि हमें $\triangleright$ उन खानों पर भी लिखने और पढ़ने से कुछ नहीं रोकता जो खाना 0 नहीं हैं (देखें उदाहरण 31.14)। ऐसे प्रयोजन के लिए इसके स्थान पर उपयोग करने हेतु दूसरा $\triangleright'$ प्रतीक जोड़कर इसे हल कर सकते हैं।

जा सकता है कि किसी भी प्रक्रिया द्वारा उन्हें प्रभावी रूप से संगणित नहीं किया जा सकता। क्योंकि यदि ऐसी प्रक्रिया होती, तो चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा से उसके लिए ट्यूरिंग मशीन का अस्तित्व निकलता। अतः यदि हम सिद्ध कर सकें कि उसे संगणित करने वाली कोई ट्यूरिंग मशीन नहीं है, तो कोई प्रभावी प्रक्रिया भी नहीं हो सकती। विशेष रूप से, चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का आह्वान यह दावा करने के लिए किया जाता है कि तथाकथित विराम समस्या को न केवल ट्यूरिंग मशीनों द्वारा हल नहीं किया जा सकता, बल्कि उसे किसी भी प्रकार प्रभावी रूप से हल नहीं किया जा सकता।

प्रश्न

प्रश्न 31.1. कोई मनमाना आगत चुनें और उदाहरण 31.4 की द्विगुणक मशीन के विन्यासों का क्रम निकालें।

प्रश्न 31.2. $\{\triangleright, 0, A, B\}$ वर्णमाला वाली ऐसी ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें जो A और B की प्रत्येक ऐसी अक्षर-शृंखला को स्वीकार करे, अर्थात् उस पर रुके, जिसमें A की संख्या B की संख्या के बराबर हो *और* सभी A, सभी B से पहले आएँ; तथा प्रत्येक ऐसी अक्षर-शृंखला को अस्वीकार करे, अर्थात् उस पर न रुके, जिसमें A की संख्या B की संख्या के बराबर न हो अथवा सभी A, सभी B से पहले न आएँ। (उदाहरणतः, मशीन को $AABB$ और $AAABBB$ स्वीकार करना चाहिए, किंतु AAB और $AABBAABB$ दोनों को अस्वीकार करना चाहिए।)

प्रश्न 31.3. $\{\triangleright, 0, A, B\}$ वर्णमाला वाली ऐसी ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें जो किसी भी अक्षर-शृंखला α को, जो A और B की हो, आगत के रूप में लेकर उसकी प्रतिलिपि बनाए और $\alpha\alpha$ रूप का निर्गत दे। (उदाहरणतः, आगत $ABBA$ का निर्गत $ABBAABBA$ होना चाहिए।)

प्रश्न 31.4. *वर्णानुक्रम में?*: $\{\triangleright, 0, A, B\}$ वर्णमाला वाली ऐसी ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें जो A और B का कोई परिमित अनुक्रम आगत के रूप में मिलने पर जाँचे कि सभी A, सभी B के बाईं ओर हैं या नहीं। मशीन को आगत अक्षर-शृंखला पट्टी पर छोड़ देनी चाहिए और यदि शृंखला "वर्णानुक्रम में" हो तो रुकना चाहिए, अन्यथा सदा चक्रित होना चाहिए।

प्रश्न 31.5. *वर्णानुक्रमक*: $\{\triangleright, 0, A, B\}$ वर्णमाला वाली ऐसी ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें जो A और B के किसी परिमित अनुक्रम को आगत के रूप में लेकर उन्हें इस प्रकार पुनर्व्यवस्थित करे कि सभी A, सभी B के बाईं ओर हों। (उदाहरणतः, अनुक्रम $BABAA$ को अनुक्रम $AAABB$ बनना चाहिए और अनुक्रम $ABBABB$ को अनुक्रम $AABBBB$ बनना चाहिए।)

प्रश्न 31.6. ट्यूरिंग मशीन M, फलन $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ को कब संगणित करती है, इसकी परिभाषा दें।

प्रश्न 31.7. आगत $\langle 3, 2\rangle$ के लिए उदाहरण 31.12 की मशीन के विन्यासों का क्रम निकालें। यदि मशीन $0+0$ संगणित करे, तो क्या होता है?

प्रश्न 31.8. उदाहरण 31.14 में हमने ऐसी मशीन बताई जो आकृति 31.4 की द्विगुणक मशीन और आकृति 31.5 की स्थानांतरक मशीन का संयोजन है। यदि इस संयुक्त मशीन को आगत $x = 0$, अर्थात् रिक्त पट्टी पर आरंभ करें, तो क्या होता है? मशीन को कैसे ठीक करेंगे ताकि इस स्थिति में वह निर्गत $2x = 0$ के साथ रुके? (यह एक अवस्था और एक संक्रमण जोड़कर किया जा सकना चाहिए।)

प्रश्न 31.9. *घटाव:* ऐसी ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें जो क्रमशः n और m लंबाई वाली आघातों की दो अरिक्त अक्षर-शृंखलाएँ आगत के रूप में मिलने पर, जहाँ $n > m$, फलन $f(n, m) = n - m$ संगणित करे।

प्रश्न 31.10. *समानता:* निम्न फलन को संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें:

$$\text{equality}(n, m) = \begin{cases} १ & \text{यदि } n = m \\ ० & \text{यदि } n \neq m \end{cases}$$

जहाँ n और $m \in \mathbb{Z}^+$।

प्रश्न 31.11. फलन $\min(x, y)$ को संगणित करने वाली ट्यूरिंग मशीन की अभिकल्पना करें, जहाँ x और y ऐसे धन पूर्णांक हैं जिन्हें पट्टी पर 1 की अक्षर-शृंखलाओं द्वारा निरूपित किया गया है और जो एक 0 से अलग हैं। मशीन की वर्णमाला में अतिरिक्त प्रतीकों का उपयोग कर सकते हैं।

फलन $\min$ अपने तर्कों में सबसे छोटा मान चुनता है; अतः $\min(3, 5) = 3$, $\min(20, 16) = 16$, और $\min(4, 4) = 4$, इत्यादि।

प्रश्न 31.12. $f(x) = x + 1$ संगणित करने वाली एक अनुशासित मशीन दें।

प्रश्न 31.13. ऐसी अनुशासित मशीन खोजें जो आगत 1^n पर आरंभ किए जाने पर निर्गत $1^n \frown 0 \frown 1^n$ उत्पन्न करे।

प्रश्न 31.14. $f(x) = x + 2$ संगणित करने के लिए मशीन M को प्रश्न 31.12 से लें और $M \frown M$ बनाएँ; इस प्रकार प्राप्त अनुशासित ट्यूरिंग मशीन दें।

अध्याय 32

अनिर्णेयता

32.1 परिचय

यह सहज लग सकता है कि प्रत्येक फलन—यहाँ तक कि प्रत्येक अंकगणितीय फलन भी—संगणनीय नहीं हो सकता। ऐसे फलन अत्यधिक हैं और उनका व्यवहार बहुत जटिल है। उदाहरणतः रेडियोधर्मी कणों के क्षय, अथवा अन्य अराजक या यादृच्छिक व्यवहार से परिभाषित फलन। मान लें कि हम किसी निश्चित समय से एक-सेकंड के अंतराल गिनना आरंभ करते हैं और फलन $f(n)$ को उस आरंभिक क्षण के बाद n-वें एक-सेकंड अंतराल में ब्रह्मांड में क्षय होने वाले कणों की संख्या के रूप में परिभाषित करते हैं। यह ऐसे फलन का प्रत्याशी लगता है जिसकी संगणना कर पाने की आशा हम कभी नहीं कर सकते।

किंतु ऐसे फलनों की संगणना की विधि की कल्पना न कर पाना एक बात है और वास्तव में यह सिद्ध करना बिल्कुल दूसरी बात कि वे असंगणनीय हैं। वस्तुतः जो फलन निराशाजनक रूप से जटिल लगते हैं, वे भी अमूर्त अर्थ में संगणनीय हो सकते हैं। उदाहरण के लिए मान लें कि ब्रह्मांड समय की दृष्टि से परिमित है—कुछ ब्रह्मांड-विज्ञान संबंधी सिद्धांतों के पूर्वानुमान के अनुसार बहुत दूर भविष्य में किसी दिन ब्रह्मांड सिकुड़कर एक बिंदु बन जाएगा। तब उस आरंभिक क्षण से केवल परिमित (यद्यपि अविश्वसनीय रूप से विशाल) संख्या में ऐसे सेकंड होंगे जिनके लिए $f(n)$ परिभाषित है। और केवल परिमित संख्या में आगतों पर परिभाषित प्रत्येक फलन संगणनीय है: हम उसके निर्गतों को एक बड़ी सारणी में लिख सकते हैं, अथवा उसे ट्यूरिंग मशीन के एक बहुत बड़े अवस्था-संक्रमण आरेख में कूटबद्ध कर सकते हैं।

हम प्रायः फलनों के उन विशेष मामलों में रुचि रखते हैं जिनके मान हाँ/नहीं प्रश्नों के उत्तर देते हैं। उदाहरणतः प्रश्न "क्या n एक अभाज्य संख्या है?" निम्न फलन से संबद्ध है:

$$\text{isprime}(n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } n \text{ अभाज्य है} \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

हम कहते हैं कि किसी हाँ/नहीं प्रश्न का *प्रभावी रूप से निर्णय* किया जा सकता है, यदि उससे संबद्ध $1/0$-मान वाला फलन प्रभावी रूप से संगणनीय हो।

गणितीय रूप से यह सिद्ध करने के लिए कि कुछ फलन प्रभावी रूप से संगणित नहीं किए जा सकते अथवा कुछ समस्याओं का प्रभावी रूप से निर्णय नहीं किया जा सकता, संगणना का कोई विशिष्ट प्रतिरूप निश्चित करना और यह दिखाना अनिवार्य है कि कुछ फलनों की वह संगणना नहीं कर सकता या कुछ समस्याओं का वह निर्णय नहीं कर सकता। उदाहरणतः हम दिखा सकते हैं कि प्रत्येक फलन की संगणना ट्यूरिंग मशीनों द्वारा नहीं की जा सकती और प्रत्येक समस्या का निर्णय ट्यूरिंग मशीनों द्वारा नहीं किया जा सकता। तब चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का आह्वान करके निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि न केवल ट्यूरिंग मशीनें प्रत्येक फलन की संगणना करने के लिए पर्याप्त शक्तिशाली नहीं हैं, बल्कि कोई भी प्रभावी प्रक्रिया ऐसा नहीं कर सकती।

ऐसे निषेधात्मक परिणाम सिद्ध करने की कुंजी यह तथ्य है कि हम स्वयं ट्यूरिंग मशीनों को संख्याएँ दे सकते हैं। ऐसा करने का सबसे सरल उपाय उनका परिगणन करना है: संभवतः ट्यूरिंग मशीनों और उनके प्रोग्रामों को लिखने की कोई विशिष्ट रीति निश्चित करके, फिर उन्हें क्रमबद्ध ढंग से सूचीबद्ध करना। एक बार यह देख लेने पर कि ऐसा किया जा सकता है, ट्यूरिंग-असंगणनीय फलनों का अस्तित्व समुच्चयों के आकार संबंधी सरल विचारों से निकलता है: $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$

तक के फलनों का समुच्चय (वस्तुतः केवल $\mathbb{N}$ से $\{0,1\}$ तक के फलनों का भी) अगणनीय है, किंतु चूँकि हम सभी ट्यूरिंग मशीनों का परिगणन कर सकते हैं, इसलिए ट्यूरिंग-संगणनीय फलनों का समुच्चय केवल गणनीय अनंत है।

हम ऐसे *विशिष्ट* फलन और समस्याएँ भी परिभाषित कर सकते हैं जिन्हें क्रमशः असंगणनीय और अनिर्णेय सिद्ध किया जा सके। ऐसी एक समस्या तथाकथित *विराम समस्या* है। ट्यूरिंग मशीनों के निर्देशों को सूचीबद्ध करके उनका परिमित वर्णन किया जा सकता है। ट्यूरिंग मशीन का ऐसा वर्णन, अर्थात् ट्यूरिंग मशीन प्रोग्राम, निश्चय ही किसी दूसरी ट्यूरिंग मशीन के आगत के रूप में प्रयुक्त किया जा सकता है। अतः हम उन ट्यूरिंग मशीनों पर विचार कर सकते हैं जो दूसरी ट्यूरिंग मशीनों के विषय में प्रश्नों का निर्णय करती हैं। एक विशेष रूप से रोचक प्रश्न है: "क्या दी गई ट्यूरिंग मशीन आगत n पर आरंभ किए जाने पर अंततः रुकती है?" यदि इस प्रश्न का निर्णय करने वाली ट्यूरिंग मशीन होती तो अच्छा होता: उसे ऐसी गुणवत्ता-नियंत्रण ट्यूरिंग मशीन समझें जो सुनिश्चित करती हो कि ट्यूरिंग मशीनें अनंत चक्रों आदि में न फँसें। ट्यूरिंग द्वारा सिद्ध रोचक तथ्य यह है कि ऐसी ट्यूरिंग मशीन हो ही नहीं सकती। कोई एक ट्यूरिंग मशीन ऐसी नहीं हो सकती जो ट्यूरिंग मशीन M के वर्णन और किसी संख्या n से बने आगत पर आरंभ होकर सदैव निर्गत 1 या 0 के साथ इस अनुसार रुके कि M आगत n पर आरंभ होने पर रुकती या नहीं।

विशिष्ट अनिर्णेय समस्याओं के उदाहरण मिल जाने पर हम उनका उपयोग यह दिखाने के लिए कर सकते हैं कि अन्य समस्याएँ भी अनिर्णेय हैं। उदाहरणतः एक प्रसिद्ध अनिर्णेय समस्या यह प्रश्न है, "क्या प्रथम-कोटि सूत्र φ वैध है?" ऐसी कोई ट्यूरिंग मशीन नहीं है जिसके बारे में यह सुनिश्चित हो कि प्रथम-कोटि सूत्र φ को आगत के रूप में दिए जाने पर वह इस अनुसार निर्गत 1 या 0 के साथ रुकेगी कि φ वैध है या नहीं। ऐतिहासिक रूप से, इस समस्या को प्रभावी ढंग से हल करने वाली प्रक्रिया खोजने का प्रश्न केवल "निर्णय समस्या" कहलाता था; अतः हम कहते हैं कि निर्णय समस्या असमाधेय है। ट्यूरिंग और चर्च ने लगभग एक ही समय पर स्वतंत्र रूप से इस परिणाम को सिद्ध किया था, इसलिए इसे चर्च–ट्यूरिंग प्रमेय भी कहते हैं।

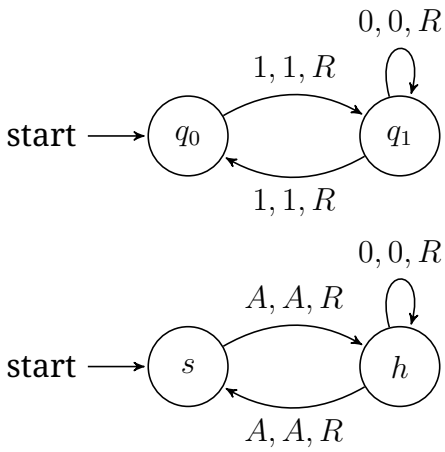
32.2 ट्यूरिंग मशीनों का परिगणन

हम दिखा सकते हैं कि सभी ट्यूरिंग मशीनों का समुच्चय गणनीय है। यह इस तथ्य से निकलता है कि प्रत्येक ट्यूरिंग मशीन का परिमित वर्णन किया जा सकता है। अवस्थाओं का समुच्चय और पट्टी की शब्दावली परिमित समुच्चय हैं। संक्रमण फलन $Q \times \Sigma$ से $Q \times \Sigma \times \{L, R, N\}$ तक का आंशिक फलन है; अतः जिन परिमित संख्या में युग्म-आगतों पर वह परिभाषित है, उनके लिए उसके मान सूचीबद्ध करके उसे भी निर्दिष्ट किया जा सकता है।

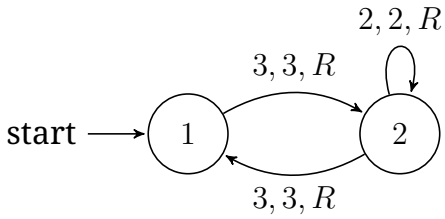
इतना कथन सही है, किंतु यहाँ एक सूक्ष्म अंतर है। ट्यूरिंग मशीन की परिभाषा ने इस पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाया कि अवस्थाओं के समुच्चय और पट्टी-वर्णमाला में कौन-से अवयव हो सकते हैं। अतः उदाहरण के लिए, तकनीकी रूप से प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए ऐसी ट्यूरिंग मशीन है जो उस संख्या को एक अवस्था के रूप में उपयोग करती है। फिर भी ट्यूरिंग मशीन का *व्यवहार* इससे स्वतंत्र है कि कौन-सी वस्तुएँ अवस्थाओं और शब्दावली का काम करती हैं। आकृति 32.1 की दोनों ट्यूरिंग मशीनों पर विचार करें। ये दोनों आरेख दो मशीनों के अनुरूप हैं: M, जिसकी पट्टी-वर्णमाला $\Sigma = \{\triangleright, 0, 1\}$ और अवस्था-समुच्चय $\{q_0, q_1\}$ हैं; तथा M', जिसकी वर्णमाला $\Sigma' = \{\triangleright, 0, A\}$ और अवस्थाएँ $\{s, h\}$ हैं। किंतु अन्यथा उनके निर्देश समान हैं: M, n संख्या के 1 के अनुक्रम पर तभी रुकती है जब n सम हो, और M', n संख्या के A के अनुक्रम पर तभी रुकती है जब n सम हो। हमने केवल 1 का नाम बदलकर A, q_0 का s, और q_1 का h किया है। इस उदाहरण का सामान्यीकरण होता है: जब तक एक ट्यूरिंग मशीन दूसरी से प्रतीकों और अवस्थाओं के ऐसे पुनर्नामकरण द्वारा मिलती है, हम दोनों को एक ही मान सकते हैं। वस्तुतः हम ट्यूरिंग मशीन के प्रतीकों और अवस्थाओं को केवल धन पूर्णांक मान सकते हैं: σ_0 के स्थान पर 1, σ_1 के स्थान पर 2, इत्यादि; $\triangleright$ को 1, 0 को 2, इत्यादि। इस प्रकार *सम* मशीन आकृति 32.2 में दर्शाई मशीन बन जाती है। जिस ट्यूरिंग मशीन की अवस्थाएँ और प्रतीक धन पूर्णांक हों, उसे हम *मानक* मशीन कह सकते हैं और अब से केवल मानक मशीनों पर विचार कर सकते हैं।[1]

हम दिखाना चाहते थे कि ट्यूरिंग मशीनों का समुच्चय गणनीय है, और ऊपर के विचारों को ध्यान में रखते हुए मानक ट्यूरिंग मशीनों के समुच्चय को गणनीय दिखाना पर्याप्त है। मान लें कि हमें मानक ट्यूरिंग मशीन $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta \rangle$ दी गई है। धन पूर्णांकों की परिमित अक्षर-शृंखला से उसका वर्णन कैसे करें? पहले हम अवस्थाओं की संख्या, स्वयं अवस्थाएँ, प्रतीकों की संख्या, स्वयं प्रतीक और आरंभिक अवस्था सूचीबद्ध करेंगे। (याद रखें, ये सभी धन पूर्णांक हैं

[1] "मानक मशीन" पदावली स्वयं मानक नहीं है।



चित्र 32.1: *सम* मशीन के रूपांतर



चित्र 32.2: एक मानक *सम* मशीन

क्योंकि M एक मानक मशीन है।) अब δ का क्या करें? संभावित आगतों का समुच्चय, अर्थात् युग्मों $\langle q, \sigma \rangle$ का समुच्चय, परिमित है क्योंकि Q और Σ परिमित हैं। अतः δ में निहित सूचना उन सभी 5-गुणजों $\langle q, \sigma, q', \sigma', d \rangle$ की परिमित सूची मात्र है जिनके लिए $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', D \rangle$ है और d, दिशा D को कूटबद्ध करने वाली संख्या है (मान लें, 1 से L, 2 से R, और 3 से N कूटबद्ध होते हैं)।

इस प्रकार प्रत्येक मानक ट्यूरिंग मशीन का वर्णन धन पूर्णांकों की एक परिमित सूची द्वारा, अर्थात् अनुक्रम $s_M \in (\mathbb{Z}^+)^*$ के रूप में, किया जा सकता है। उदाहरणतः मानक *सम* मशीन को निम्न अनुक्रम कूटबद्ध करता है:

$$2, \underbrace{1, 2}_{Q}, 3, \overbrace{1, 2, 3}^{\Sigma}, 1, \underbrace{1, 3, 2, 3, 2}_{\delta(1,3)=\langle 2,3,R\rangle}, \overbrace{2, 2, 2, 2, 2}^{\delta(2,2)=\langle 2,2,R\rangle}, \underbrace{2, 3, 1, 3, 2}_{\delta(2,3)=\langle 1,3,R\rangle}.$$

प्रमेय 32.1. *$\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ तक ऐसे फलन हैं जो ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं हैं।*

प्रमाण. हम जानते हैं कि धन पूर्णांकों के परिमित अनुक्रमों का समुच्चय $(\mathbb{Z}^+)^*$, गणनीय है (प्रश्न 4.7)। इससे मिलता है कि $(\mathbb{Z}^+)^*$ के उपसमुच्चय के रूप में मानक ट्यूरिंग मशीनों के वर्णनों का समुच्चय स्वयं परिगणनीय है। $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ तक प्रत्येक ट्यूरिंग-संगणनीय फलन की संगणना कोई (वस्तुतः अनेक) ट्यूरिंग मशीन करती है। उसकी अवस्थाओं और प्रतीकों का नाम बदलकर धन पूर्णांक रखने पर (विशेषतः $\triangleright$ को 1, 0 को 2, और 1 को 3) हम देख सकते हैं कि प्रत्येक ट्यूरिंग-संगणनीय फलन की संगणना कोई मानक ट्यूरिंग मशीन करती है। इसका अर्थ है कि $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ तक के सभी ट्यूरिंग-संगणनीय फलनों का समुच्चय भी परिगणनीय है।

दूसरी ओर, $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ तक के सभी फलनों का समुच्चय गणनीय नहीं है (प्रश्न 4.21)। यदि सभी फलन किसी ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणनीय होते, तो उनकी संगणना करने वाली ट्यूरिंग मशीनों के सभी वर्णनों को सूचीबद्ध करके हम सभी फलनों के समुच्चय का परिगणन कर सकते थे। अतः कुछ फलन ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं हैं। □

32.3 सार्वत्रिक ट्यूरिंग मशीनें

खंड 32.2 में हमने चर्चा की थी कि प्रत्येक ट्यूरिंग मशीन का वर्णन पूर्णांकों के एक परिमित अनुक्रम द्वारा कैसे किया जा सकता है। यह अनुक्रम ट्यूरिंग मशीन की अवस्थाओं, वर्णमाला, आरंभिक अवस्था और निर्देशों को कूटबद्ध करता है। हमने यह भी बताया था कि इन सभी वर्णनों का समुच्चय गणनीय है। चूँकि ऐसे वर्णनों का समुच्चय गणनीय अनंत है, इसका अर्थ है कि $\mathbb{N}$ से इन वर्णनों तक आच्छादक फलन है। ऐसा आच्छादक फलन, उदाहरणतः, कांटोर की टेढ़ी-मेढ़ी विधि से पाया जा सकता है। इससे ट्यूरिंग मशीनों के सभी वर्णनों का परिगणन करने की रीति मिलती है। ऐसा कोई परिगणन निश्चित कर लेने पर 1वीं, 2वीं, ..., eवीं ट्यूरिंग मशीन की बात करना सार्थक है। इन संख्याओं को *सूचकांक* कहते हैं।

परिभाषा 32.2. यदि हमारे निश्चित परिगणन में M, eवीं ट्यूरिंग मशीन है, तो हम कहते हैं कि e, M का एक *सूचकांक* है। M_e से हम eवीं ट्यूरिंग मशीन निरूपित करते हैं।

किसी मशीन के एक से अधिक सूचकांक हो सकते हैं। उदाहरणतः M के दो वर्णन उसके निर्देशों को सूचीबद्ध करने के क्रम में भिन्न हो सकते हैं और इन भिन्न वर्णनों के सूचकांक भी भिन्न होंगे।

महत्त्वपूर्ण बात यह है कि ट्यूरिंग मशीन के वर्णनों का परिगणन ऐसी रीति से दिया जा सकता है कि मशीन M के सूचकांक से उसका वर्णन प्रभावी रूप से संगणित किया जा सके और मशीन M के वर्णन से उसका कोई सूचकांक प्रभावी रूप से संगणित किया जा सके। तब चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा के अनुसार ऐसी ट्यूरिंग मशीन पाई जा सकती है जो सूचकांक e वाली ट्यूरिंग मशीन का वर्णन प्राप्त करके उस अनुरूप वर्णन को अपनी पट्टी पर निर्गत के रूप में लिखती है। यह वर्णन 1 के खंडों का अनुक्रम होगा (जो M_e का वर्णन करने वाले अनुक्रम के धन पूर्णांकों को निरूपित करता है)।

इसे देखते हुए अब यह पूछना स्वाभाविक है: ट्यूरिंग मशीन के सूचकांकों के कौन-से फलन स्वयं ट्यूरिंग मशीनों द्वारा संगणनीय हैं? ट्यूरिंग मशीन के सूचकांकों के किन गुणों का निर्णय ट्यूरिंग मशीनें कर सकती हैं? एक उदाहरण लें: सूचकांक e को सूचकांक e वाली ट्यूरिंग मशीन की अवस्था-संख्या पर भेजने वाला फलन किसी ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणनीय है। ऐसी ट्यूरिंग मशीन यह करेगी: e संख्या के 1 का एक खंड रखने वाली पट्टी पर आरंभ होकर वह पहले e को उसके वर्णन में विकूटित करेगी। अब पट्टी पर वह वर्णन 1 के खंडों के अनुक्रम से निरूपित है। चूँकि इस अनुक्रम का पहला अवयव अवस्थाओं की संख्या है, इसलिए अब केवल पहले 1-खंड को छोड़कर सब कुछ मिटाना और फिर रुकना है।

निम्न परिणाम उल्लेखनीय है:

प्रमेय 32.3. *एक सार्वत्रिक ट्यूरिंग मशीन U है जो आगत $\langle e, n\rangle$ पर आरंभ किए जाने पर*

1. *तभी रुकती है जब M_e आगत n पर रुकती है, और*
2. *यदि M_e निर्गत m के साथ रुकती है, तो U भी ऐसा करती है।*

अतः U, फलन $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$ की संगणना करती है, जहाँ $f(e,n) = m$ तब है जब M_e, आगत n पर आरंभ होकर निर्गत m के साथ रुकती है, और अन्यथा अपरिभाषित है।

प्रमाण. वास्तव में U का निर्माण करना लगभग असंभव है, क्योंकि वह अत्यंत जटिल मशीन है। किंतु हम उसके कार्य की रूपरेखा बता सकते हैं और फिर चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का आह्वान कर सकते हैं। आरंभ के समय U की पट्टी पर e संख्या के 1 का एक खंड और उसके बाद n संख्या के 1 का एक खंड होता है। वह पहले सूचकांक e को आगत n की दाईं ओर "विकूटित" करती है। इससे संख्याओं की ऐसी सूची (अर्थात् 1 के ऐसे खंड जो 0 से पृथक हैं) बनती है जो मशीन M_e के निर्देशों का वर्णन करती है। फिर U, M_e की आरंभिक अवस्था की संख्या और संख्या 1, M_e के वर्णन की दाईं ओर पट्टी पर लिखती है। (इनका भी एकाधारी रूप में, 1 के खंडों द्वारा, निरूपण होता है।) इसके बाद वह आगत

(n संख्या के 1 का खंड) को दाईं ओर प्रतिलिपित करती है—किंतु प्रत्येक 1 के स्थान पर तीन 1 का एक खंड रखती है (याद रखें, 1 प्रतीक की संख्या 3 है; 1, $\triangleright$ की संख्या है और 2, 0 की संख्या है)। खंडों के इस अनुक्रम के बाएँ सिरे पर (जो 0 प्रतीकों द्वारा U की पट्टी पर पृथक हैं) वह एक अकेला 1 लिखती है, जो $\triangleright$ का कूट है।

अब U की पट्टी पर ये हैं: सूचकांक e, संख्या n, आरंभिक अवस्था की कूट-संख्या ("वर्तमान अवस्था"), आरंभिक शीर्ष-स्थान 1 की संख्या ("वर्तमान शीर्ष-स्थान"), और "पट्टी" की आरंभिक सामग्री (1-खंडों का अनुक्रम, जो M_e के प्रतीकों की कूट-संख्याओं—"प्रतीकों"—को निरूपित करता है और 0 द्वारा पृथक है)।

अब वह निम्न कार्यों द्वारा इसका अनुकरण करती है कि M_e आगत n पर आरंभ होने पर क्या करती:

1. "वर्तमान शीर्ष-स्थान" की संख्या k खोजें (आरंभ में यह 1 है),
2. वहाँ कौन-सा "प्रतीक" है यह देखने के लिए "पट्टी" के kवें खंड पर जाएँ,
3. वर्तमान "अवस्था" और "प्रतीक" से मेल खाने वाला निर्देश खोजें,
4. "पट्टी" के kवें खंड पर वापस जाएँ और वहाँ के "प्रतीक" को उस प्रतीक की कूट-संख्या से बदलें जिसे M_e लिखती,
5. शीर्ष को उस स्थान पर ले जाएँ जहाँ वर्तमान "अवस्था" दर्ज है और वहाँ की संख्या को नई अवस्था की संख्या से बदलें,
6. उस स्थान पर जाएँ जहाँ "पट्टी-स्थान" दर्ज है और एक 1 मिटाएँ अथवा एक 1 जोड़ें (यदि निर्देश क्रमशः बाईं अथवा दाईं ओर जाने को कहता है)।
7. दोहराएँ।[2]

यदि M_e आगत n पर आरंभ होकर कभी नहीं रुकती, तो U भी कभी नहीं रुकती और इसलिए उसका निर्गत अपरिभाषित है।

यदि चरण (3) में पता चलता है कि M_e के वर्णन में वर्तमान "अवस्था"/"प्रतीक" युग्म के लिए कोई निर्देश नहीं है, तो M_e रुक जाती। ऐसा होने पर U अपनी पट्टी का "पट्टी" के बाईं ओर का भाग मिटा देती है। तीन 1 के प्रत्येक खंड के लिए (जो एक 1, M_e की पट्टी पर, निरूपित करता है), वह अपनी पट्टी के बाएँ सिरे पर एक 1 लिखती है और क्रमशः "पट्टी" को मिटाती जाती है। यह पूरा होने पर U की पट्टी में 1 का एक अकेला खंड होता है जिसकी लंबाई m है।

यदि U को "पट्टी" पर तीन 1 के खंड के अतिरिक्त कुछ और मिलता है, तो वह तुरंत रुक जाती है। चूँकि इस स्थिति में U की पट्टी में 1 का एक अकेला खंड नहीं होता, उसका निर्गत कोई प्राकृतिक संख्या नहीं है; अर्थात् इस स्थिति में $f(e,n)$ अपरिभाषित है। □

32.4 विराम समस्या

मान लें कि हमने ट्यूरिंग मशीन के वर्णनों का कोई परिगणन निश्चित किया है। इस प्रकार प्रत्येक ट्यूरिंग मशीन को एक *सूचकांक* मिलता है: ट्यूरिंग मशीन के वर्णनों के परिगणन M_1, M_2, M_3, ... में उसका स्थान।

हम जानते हैं कि ट्यूरिंग-असंगणनीय फलन अवश्य हैं: ट्यूरिंग मशीन के वर्णनों का समुच्चय—और इसलिए ट्यूरिंग मशीनों का समुच्चय—गणनीय है, किंतु $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ तक के सभी फलनों का समुच्चय ऐसा नहीं है। फिर भी हम असंगणनीय फलनों के विशिष्ट उदाहरण भी पा सकते हैं। ऐसा एक फलन विराम फलन है।

परिभाषा 32.4 (विराम फलन). *विराम फलन* h को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$h(e,n) = \begin{cases} 0 & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } n \text{ पर नहीं रुकती} \\ 1 & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } n \text{ पर रुकती है} \end{cases}$$

[2] हम यहाँ कुछ सूक्ष्म कठिनाइयों का विस्तार छोड़ रहे हैं। उदाहरणतः "वर्तमान शीर्ष-स्थान" का लेखा रखने वाले गणक को बढ़ाते समय U को कुछ अतिरिक्त स्थान चाहिए हो सकता है—उस स्थिति में उसे पूरी "पट्टी" को दाईं ओर खिसकाना होगा।

परिभाषा 32.5 (विराम समस्या). *विराम समस्या*, किसी भी e, n के लिए यह निर्धारित करने की समस्या है कि ट्यूरिंग मशीन M_e, n रेखाओं वाले आगत पर रुकती है या नहीं।

हम सिद्ध करते हैं कि h ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है; इसके लिए हम एक संबद्ध फलन s को ट्यूरिंग-असंगणनीय दिखाते हैं। यह प्रमाण इस तथ्य पर निर्भर है कि ट्यूरिंग मशीन द्वारा संगणित की जा सकने वाली प्रत्येक वस्तु की संगणना अनुशासित ट्यूरिंग मशीन (खंड 31.7) द्वारा की जा सकती है, और इस तथ्य पर कि दो ट्यूरिंग मशीनों को जोड़कर एक अकेली मशीन बनाई जा सकती है (खंड 31.8)।

परिभाषा 32.6. फलन s को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$s(e) = \begin{cases} 0 & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } e \text{ पर नहीं रुकती} \\ 1 & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } e \text{ पर रुकती है} \end{cases}$$

सहायक प्रमेय 32.7. *फलन s ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है।*

प्रमाण. विरोधाभास के लिए मान लें कि फलन s ट्यूरिंग-संगणनीय है। तब कोई ट्यूरिंग मशीन S होगी जो s की संगणना करती है। व्यापकता की हानि के बिना मान सकते हैं कि S जब रुकती है तब पहले खाने को पढ़ रही होती है (अर्थात् वह अनुशासित है)। इस मशीन को दूसरी मशीन J से "जोड़ा" जा सकता है, जो आगत 0 पर आरंभ किए जाने पर रुकती है (अर्थात् आरंभिक अवस्था में पट्टी-अंत प्रतीक की दाईं ओर का खाना पढ़ते हुए यदि उसे 0 मिलता है), और अन्यथा कभी न रुकते हुए दाईं ओर भटकती जाती है। $S \frown J$, अर्थात् S को J से जोड़कर बनी मशीन, एक ट्यूरिंग मशीन है; अतः वह M_e है, किसी e के लिए (अर्थात् परिगणन में कहीं आती है)। M_e को e संख्या के 1 वाले आगत पर आरंभ करें। दो संभावनाएँ हैं: या तो M_e रुकती है या नहीं रुकती।

1. मान लें कि M_e, e संख्या के 1 वाले आगत पर रुकती है। तब $s(e) = 1$। अतः S, e पर आरंभ होने पर पट्टी पर निर्गत के रूप में एक अकेले 1 के साथ रुकती है। फिर J पट्टी पर एक 1 के साथ आरंभ होती है। इस स्थिति में J नहीं रुकती। किंतु M_e ही मशीन $S \frown J$ है, इसलिए उसे ठीक वही करना चाहिए जो पहले S और फिर J करतीं (अर्थात् इस स्थिति में दाईं ओर भटकना और कभी न रुकना)। अतः M_e, e संख्या के 1 वाले आगत पर नहीं रुक सकती।

2. अब मान लें कि M_e, e संख्या के 1 वाले आगत पर नहीं रुकती। तब $s(e) = 0$, और S, आगत e पर आरंभ होने पर रिक्त पट्टी के साथ रुकती है। रिक्त पट्टी पर आरंभ होने वाली J तुरंत रुकती है। फिर, M_e वही करती है जो पहले S और फिर J करतीं, अतः M_e को e संख्या के 1 वाले आगत पर रुकना ही चाहिए।

दोनों स्थितियों में हमें अपनी मान्यता से विरोधाभास मिलता है। इससे दिखता है कि ऐसी ट्यूरिंग मशीन S नहीं हो सकती: s ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है। □

प्रमेय 32.8 (विराम समस्या की असमाधेयता). *विराम समस्या असमाधेय है; अर्थात् फलन h ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है।*

प्रमाण. मान लें कि h ट्यूरिंग-संगणनीय है, मान लें किसी ट्यूरिंग मशीन H द्वारा। हम H का उपयोग करके s की संगणना करने वाली ट्यूरिंग मशीन बना सकते हैं: पहले आगत की एक प्रतिलिपि बनाएँ (जिसे एक 0 प्रतीक से पृथक किया गया हो)। फिर आरंभ पर लौटकर H चलाएँ। स्पष्टतः हम पहली क्रिया करने वाली मशीन बना सकते हैं (प्रश्न 31.13 देखें), और यदि H का अस्तित्व होता तो उसे ऐसी प्रतिलिपिकार मशीन से "जोड़कर" नई मशीन पा सकते थे जो निर्धारित करती कि M_e आगत e पर रुकती है या नहीं, अर्थात् s की संगणना करती। किंतु हम पहले ही दिखा चुके हैं कि ऐसी मशीन का अस्तित्व नहीं हो सकता। अतः h भी ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है। □

32.5 निर्णय समस्या

हम कहते हैं कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र *निर्णेय* है, तभी और केवल तभी जब यह निर्धारित करने की कोई प्रभावी विधि हो कि दिया गया वाक्य वैध है या नहीं। वास्तव में ऐसी कोई विधि नहीं है: प्रथम-कोटि वाक्यों की वैधता का निर्णय करने की समस्या असमाधेय है।

इस महत्त्वपूर्ण निषेधात्मक परिणाम को स्थापित करने के लिए हम सिद्ध करते हैं कि निर्णय समस्या को ट्यूरिंग मशीन द्वारा हल नहीं किया जा सकता। अर्थात् हम दिखाते हैं कि ऐसी कोई ट्यूरिंग मशीन नहीं है जो प्रथम-कोटि वाक्य वाली पट्टी पर आरंभ किए जाने पर अंततः रुके और वह वाक्य वैध है या नहीं, इसके अनुसार 1 अथवा 0 निर्गत करे। चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा के अनुसार प्रत्येक संगणनीय फलन ट्यूरिंग-संगणनीय है। अतः यदि यह "वैधता फलन" किसी भी प्रकार प्रभावी रूप से संगणनीय होता, तो वह ट्यूरिंग-संगणनीय होता। यदि वह ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है, तो वह प्रभावी रूप से संगणनीय भी नहीं हो सकता।

निर्णय समस्या को असमाधेय सिद्ध करने की हमारी कार्यनीति विराम समस्या को इसमें अपचयित करना है। इसका अर्थ यह है: हमने सिद्ध किया है कि फलन $h(e, w)$, जो निर्गत 1 के साथ रुकता है यदि e द्वारा वर्णित ट्यूरिंग मशीन आगत w पर रुकती है और अन्यथा निर्गत 0 देता है, ट्यूरिंग-संगणनीय नहीं है। हम दिखाएँगे कि यदि प्रथम-कोटि वाक्यों की वैधता का निर्णय करने वाली ट्यूरिंग मशीन होती, तो h की संगणना करने वाली ट्यूरिंग मशीन भी होती। चूँकि h की संगणना ट्यूरिंग मशीन द्वारा नहीं की जा सकती, वैधता का निर्णय करने वाली ट्यूरिंग मशीन भी नहीं हो सकती।

इस कार्यनीति का पहला चरण यह दिखाना है कि प्रत्येक आगत w और ट्यूरिंग मशीन M के लिए हम प्रभावी रूप से वाक्य $\tau(M, w)$ का वर्णन कर सकते हैं, जो M के निर्देश-समुच्चय और आगत w को निरूपित करता है, तथा वाक्य $\alpha(M, w)$ का, जो व्यक्त करता है कि "M अंततः रुकती है," इस प्रकार कि:

$\vDash \tau(M, w) \to \alpha(M, w)$ तभी और केवल तभी जब M आगत w पर रुकती है।

हमारे प्रमाण का अधिकांश भाग इन वाक्यों $\tau(M, w)$ और $\alpha(M, w)$ का वर्णन करने तथा यह सत्यापित करने में होगा कि $\tau(M, w) \to \alpha(M, w)$ तभी और केवल तभी वैध है जब M आगत w पर रुकती है।

32.6 ट्यूरिंग मशीनों का निरूपण

ट्यूरिंग मशीनों और उनके व्यवहार को प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य द्वारा निरूपित करने के लिए हमें उपयुक्त भाषा परिभाषित करनी होगी। भाषा के दो भाग हैं: मशीन के विन्यासों का वर्णन करने वाले विधेय-चिह्न, और निष्पादन के चरणों ("क्षणों") तथा पट्टी के स्थानों को क्रमांकित करने वाली अभिव्यक्तियाँ।

हम दो प्रकार के विधेय-चिह्न प्रस्तुत करते हैं और दोनों द्विस्थानी हैं: प्रत्येक अवस्था q के लिए विधेय-चिह्न Q_q, तथा पट्टी के प्रत्येक प्रतीक σ के लिए विधेय-चिह्न S_σ। पहले प्रकार से हम M की अवस्था और उसके पट्टी-शीर्ष का स्थान वर्णित कर सकते हैं; दूसरे प्रकार से पट्टी की सामग्री का वर्णन कर सकते हैं।

पट्टी-शीर्ष के स्थानों और निष्पादित चरणों की संख्या को व्यक्त करने के लिए हमें संख्याएँ व्यक्त करने की कोई रीति चाहिए। इसके लिए अचर o और 1-स्थानी उत्तरवर्ती फलन $\prime$ का उपयोग होता है। परिपाटी के अनुसार इसे अपने आगत के *बाद* लिखा जाता है (और हम कोष्ठक छोड़ देते हैं)।

प्रत्येक संख्या n के लिए एक विहित पद $\overline{n}$ है, जो n का *अंक-पद* है और $\mathcal{L}_M$ में उसे निरूपित करता है। $\overline{0}$, o है; $\overline{1}$, o' है; $\overline{2}$, o'' है; और इसी प्रकार आगे। अधिक औपचारिक रूप से:

$$\overline{0} = \mathsf{o}$$
$$\overline{n+1} = \overline{n}'$$

पद $\overline{0}$, अर्थात् o, पट्टी के सबसे बाएँ स्थान और प्रथम निष्पादन-चरण से पहले के समय (आरंभिक विन्यास) दोनों को नाम देता है। पद $\overline{1}$, अर्थात् o', सबसे बाएँ खाने की दाईं ओर के खाने और प्रथम निष्पादन-चरण के बाद के समय को नाम देता है; और इसी प्रकार आगे।

हम पट्टी के स्थानों के क्रम (जहाँ इसका अर्थ "के बाईं ओर" है) और निष्पादन-चरणों के क्रम (जहाँ इसका अर्थ "से पहले" है) दोनों को व्यक्त करने के लिए विधेय-चिह्न $<$ भी प्रस्तुत करते हैं।

भाषा निर्धारित हो जाने पर हम $\tau(M, w)$ के "अभिगृहीत" सूचीबद्ध करते हैं, अर्थात् वे वाक्य जो साथ मिलकर आगत w पर चलने वाली M का व्यवहार वर्णित करते हैं। कुछ वाक्य, 0, ′, और $<$ पर शर्तें लगाएँगे; कुछ वाक्य आगत-विन्यास का वर्णन करेंगे; और कुछ वाक्य यह बताएँगे कि किसी विशेष निर्देश को निष्पादित करने के बाद M का विन्यास क्या है।

परिभाषा 32.9. दी गई ट्यूरिंग मशीन $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta \rangle$ के लिए भाषा $\mathcal{L}_M$ में ये होते हैं:

1. प्रत्येक अवस्था $q \in Q$ के लिए द्विस्थानी विधेय-चिह्न $Q_q(x, y)$। सहज रूप से, $Q_q(\overline{m}, \overline{n})$ यह व्यक्त करता है कि "n चरणों के बाद M, अवस्था q में है और mवाँ खाना पढ़ रही है।"
2. प्रत्येक प्रतीक $\sigma \in \Sigma$ के लिए द्विस्थानी विधेय-चिह्न $S_\sigma(x, y)$। सहज रूप से, $S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})$ यह व्यक्त करता है कि "n चरणों के बाद mवें खाने में प्रतीक σ है।"
3. एक अचर 0
4. एक-स्थानी फलन-चिह्न ′
5. द्विस्थानी विधेय-चिह्न $<$

आगत $w = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ पर ट्यूरिंग मशीन M की क्रिया का वर्णन करने वाले वाक्य निम्न हैं:

1. संख्याओं और $<$ का वर्णन करने वाले अभिगृहीत:
   a) यह कहने वाला वाक्य कि प्रत्येक संख्या अपने उत्तरवर्ती से छोटी है:
   $$\forall x\, x < x'$$
   b) यह सुनिश्चित करने वाला वाक्य कि $<$ संक्रामक है:
   $$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$
2. आगत-विन्यास का वर्णन करने वाले अभिगृहीत:
   a) 0 चरणों के बाद—मशीन के आरंभ होने से पहले—M आरंभिक अवस्था q_0 में है और खाना 1 पढ़ रही है:
   $$Q_{q_0}(\overline{1}, \overline{0})$$
   b) पहले $k + 1$ खानों में प्रतीक $\triangleright$, σ_{i_1}, ..., σ_{i_k} हैं:
   $$S_\triangleright(\overline{0}, \overline{0}) \wedge S_{\sigma_{i_1}}(\overline{1}, \overline{0}) \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_{i_k}}(\overline{k}, \overline{0})$$
   c) अन्यथा पट्टी रिक्त है:
   $$\forall x\, (\overline{k} < x \rightarrow S_0(x, \overline{0}))$$
3. एक विन्यास से अगले विन्यास तक संक्रमण का वर्णन करने वाले अभिगृहीत:
   निम्न के लिए $\varphi(x, y)$ को इस रूप वाले सभी वाक्य का संयोजन मानें:
   $$\forall z\, (((z < x \vee x < z) \wedge S_\sigma(z, y)) \rightarrow S_\sigma(z, y'))$$
   जहाँ $\sigma \in \Sigma$। हम $\varphi(\overline{m}, \overline{n})$ का उपयोग यह व्यक्त करने के लिए करते हैं कि "खाना m को छोड़कर, $n + 1$ चरणों के बाद पट्टी वैसी ही है जैसी n चरणों के बाद थी।"

a) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', R\rangle$ के लिए निम्न वाक्य:

$$\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x,y) \wedge S_\sigma(x,y)) \to \\ (Q_{q_j}(x',y') \wedge S_{\sigma'}(x,y') \wedge \varphi(x,y)))$$

यह कहता है कि यदि y चरणों के बाद मशीन अवस्था q_i में है और प्रतीक σ रखने वाला खाना x पढ़ रही है, तो $y+1$ चरणों के बाद वह खाना $x+1$ पढ़ रही है, अवस्था q_j में है, खाना x में अब σ' है, और x के अतिरिक्त प्रत्येक खाने में वही प्रतीक है जो उसमें y चरणों के बाद था।

b) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', L\rangle$, के लिए निम्न वाक्य:

$$\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x',y) \wedge S_\sigma(x',y)) \to \\ (Q_{q_j}(x,y') \wedge S_{\sigma'}(x',y') \wedge \varphi(x,y))) \wedge \\ \forall y\, ((Q_{q_i}(\overline{0},y) \wedge S_\sigma(\overline{0},y)) \to \\ (Q_{q_j}(\overline{0},y') \wedge S_{\sigma'}(\overline{0},y') \wedge \varphi(\overline{0},y)))$$

यह कैसे काम करता है, इस पर कुछ क्षण विचार करें: अब हम "यदि खाना x पढ़ रही है ..." से नहीं, बल्कि "यदि खाना $x+1$ पढ़ रही है ..." से आरंभ करते हैं। बाईं ओर जाने का अर्थ है कि अगले चरण में मशीन खाना x पढ़ रही होगी। किंतु जिस खाने पर लिखा जाता है वह $x+1$ है। हम ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि हमारे पास घटाव अथवा पूर्ववर्ती फलन नहीं है।

ध्यान दें कि $x+1$ रूप वाली संख्याएँ $1, 2, \ldots$हैं; अर्थात् इसमें वह स्थिति सम्मिलित नहीं है जिसमें मशीन खाना 0 पढ़ रही है और उसे बाईं ओर जाना है (जो निश्चय ही वह नहीं कर सकती—वह वहीं रहती है)। इस विशेष स्थिति को दूसरा संयोजन समाहित करता है: वह कहता है कि यदि y चरणों के बाद मशीन अवस्था q_i में खाना 0 पढ़ रही है और खाना 0 में प्रतीक σ है, तो $y+1$ चरणों के बाद भी वह खाना 0 पढ़ रही है, अब अवस्था q_j में है, खाना 0 पर प्रतीक σ' है, और खाना 0 के अतिरिक्त खानों में वही प्रतीक हैं जो उनमें y चरणों के बाद थे।

c) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', N\rangle$ के लिए निम्न वाक्य:

$$\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x,y) \wedge S_\sigma(x,y)) \to \\ (Q_{q_j}(x,y') \wedge S_{\sigma'}(x,y') \wedge \varphi(x,y)))$$

ट्यूरिंग मशीन M और आगत w के लिए ऊपर के सभी वाक्य के संयोजन को $\tau(M,w)$ मानें।

यह व्यक्त करने के लिए कि M अंततः रुकती है, हमें ऐसा वाक्य खोजना होगा जो कहे, "कुछ चरणों के बाद संक्रमण फलन अपरिभाषित होगा।" X को उन सभी युग्मों $\langle q, \sigma\rangle$ का समुच्चय मानें जिनके लिए $\delta(q,\sigma)$ अपरिभाषित है। तब $\alpha(M,w)$ को निम्न वाक्य मानें:

$$\exists x\, \exists y\, (\bigvee_{\langle q,\sigma\rangle \in X} (Q_q(x,y) \wedge S_\sigma(x,y)))$$

यदि हम निर्दिष्ट विराम-अवस्था h वाली ट्यूरिंग मशीन का उपयोग करें, तो यह और भी सरल है: तब निम्न वाक्य $\alpha(M,w)$

$$\exists x\, \exists y\, Q_h(x,y)$$

व्यक्त करता है कि मशीन अंततः रुकती है।

प्रतिज्ञप्ति 32.10. *यदि $m < k$, तो $\tau(M,w) \vDash \overline{m} < \overline{k}$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

32.7 निरूपण का सत्यापन

यह सत्यापित करने के लिए कि हमारा निरूपण काम करता है, हमें दो बातें सिद्ध करनी हैं। पहले हमें दिखाना है कि यदि M आगत w पर रुकती है, तो $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ वैध है। फिर हमें इसका विपरीत सिद्ध करना है, अर्थात् यदि $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ वैध है, तो आगत w पर चलाने पर M वास्तव में अंततः रुकती है।

इन दोनों बातों को सिद्ध करने की रणनीतियाँ बहुत भिन्न हैं। पहले परिणाम के लिए हमें दिखाना है कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का वाक्य (अर्थात् $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$) वैध है। ऐसा करने की सबसे सरल रीति व्युत्पत्ति देना है। किंतु हमारे प्रमाण को सभी M और w के लिए काम करना है, इसलिए वास्तव में कोई एक वाक्य नहीं है जिसके लिए हमें व्युत्पत्ति देना हो, बल्कि ऐसे वाक्य अनंततः अनेक हैं। अतः अधिकतम इतना किया जा सकता है कि आगमन से सिद्ध करें: M और w चाहे जैसे हों और आगत w पर M को रुकने में चाहे जितने चरण लगें, $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ की व्युत्पत्ति होगी।

स्वाभाविक है कि हमारा आगमन उन चरणों की संख्या पर चलेगा जो M किसी रुकने वाले विन्यास तक पहुँचने से पहले लेती है। आगमनात्मक प्रमाण में हम स्थापित करेंगे कि आगत w पर M के निष्पादन के प्रत्येक चरण n के लिए $\tau(M,w) \vDash \chi(M,w,n)$, जहाँ $\chi(M,w,n)$ आगत w पर चलाई गई M के n चरणों के बाद वाले विन्यास का ठीक वर्णन करता है। अब यदि M आगत w पर, मान लें, n चरणों के बाद रुकती है, तो $\chi(M,w,n)$ रुकने वाले विन्यास का वर्णन करेगा। हम यह भी दिखाएँगे कि जब भी $\chi(M,w,n)$ रुकने वाले विन्यास का वर्णन करता है, तब $\chi(M,w,n) \vDash \alpha(M,w)$। अतः यदि M आगत w पर रुकती है, तो किसी n के लिए M, n चरणों के बाद रुकने वाले विन्यास में होगी। फलतः $\tau(M,w) \vDash \chi(M,w,n)$, जहाँ $\chi(M,w,n)$ रुकने वाले विन्यास का वर्णन करता है; और चूँकि उस दशा में $\chi(M,w,n) \vDash \alpha(M,w)$, हमें $T(M,w) \vDash \alpha(M,w)$ मिलता है, अर्थात् $\vDash \tau(M,w) \to \alpha(M,w)$।

विपरीत दिशा की रणनीति बहुत भिन्न है। यहाँ हम मानते हैं कि $\vDash \tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ और हमें सिद्ध करना है कि M आगत w पर रुकती है। परिकल्पना से मिलता है कि $\tau(M,w) \vDash \alpha(M,w)$, अर्थात् हर उस संरचना में $\alpha(M,w)$ सत्य है जिसमें $\tau(M,w)$ सत्य है। इसलिए हम संरचना $\mathfrak{M}$ का वर्णन करेंगे जिसमें $\tau(M,w)$ सत्य है: उसका प्रांत $\mathbb{N}$ होगा, और सभी Q_q तथा S_σ की व्याख्या आगत w पर M के निष्पादन के दौरान आने वाले विन्यासों द्वारा दी जाएगी। उदाहरणार्थ, $\mathfrak{M} \vDash Q_q(\overline{m},\overline{n})$ तभी जब आगत w पर n चरणों तक चलाए जाने पर T, अवस्था q में हो और खाना m पढ़ रही हो। अब परिकल्पना के अनुसार $\tau(M,w) \vDash \alpha(M,w)$, और रचना के अनुसार $\mathfrak{M} \vDash \tau(M,w)$, इसलिए $\mathfrak{M} \vDash \alpha(M,w)$। किंतु $\mathfrak{M} \vDash \alpha(M,w)$ तभी जब कोई $n \in |\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$ ऐसा हो कि आगत w पर चलाई गई M, n चरणों के बाद रुकने वाले विन्यास में हो।

परिभाषा 32.11. $\chi(M,w,n)$ को निम्न वाक्य मानें:

$$Q_q(\overline{m},\overline{n}) \land S_{\sigma_0}(\overline{0},\overline{n}) \land \cdots \land S_{\sigma_k}(\overline{k},\overline{n}) \land \forall x\,(\overline{k} < x \to S_0(x,\overline{n}))$$

जहाँ समय n पर M की अवस्था q है, समय n पर M खाना m पढ़ रही है, समय n पर खाना i में प्रतीक σ_i है ($0 \le i \le k$), और k समय 0 पर पट्टी का सबसे दायाँ अरिक्त खाना अथवा n चरणों के बाद तक पट्टी-शीर्ष द्वारा देखा गया सबसे दायाँ खाना है—इन दोनों में जो भी अधिक दायाँ हो।

सहायक प्रमेय 32.12. *यदि आगत w पर चलाई गई M, n चरणों के बाद रुकने वाले विन्यास में है, तो $\chi(M,w,n) \vDash \alpha(M,w)$।*

प्रमाण. मान लें कि M आगत w पर n चरणों के बाद रुकती है। कोई अवस्था q, खाना m, और प्रतीक σ ऐसे हैं कि:

1. n चरणों के बाद M, अवस्था q में है और खाना m पढ़ रही है, जिस पर σ लिखा है।
2. संक्रमण फलन $\delta(q,\sigma)$ अपरिभाषित है।

$\chi(M,w,n)$ इस विन्यास का वर्णन है और इसमें खंड $Q_q(\overline{m},\overline{n})$ तथा $S_\sigma(\overline{m},\overline{n})$ सम्मिलित होंगे। ये खंड मिलकर $\alpha(M,w)$ को फलित करते हैं:

$$\exists x\,\exists y\,(\bigvee_{\langle q,\sigma\rangle \in X} (Q_q(x,y) \land S_\sigma(x,y)))$$

क्योंकि $\langle q', \sigma' \rangle \in X$, अतः $Q_{q'}(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_{\sigma'}(\overline{m}, \overline{n}) \vDash \bigvee_{\langle q,\sigma\rangle \in X}(Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m}, \overline{n}))$। $\square$

इसलिए यदि M आगत w पर रुकती है, तो कोई n ऐसा है कि $\chi(M, w, n) \vDash \alpha(M, w)$। अब हम दिखाएँगे कि किसी भी समय n के लिए $\tau(M, w) \vDash \chi(M, w, n)$।

सहायक प्रमेय 32.13. *प्रत्येक n के लिए, यदि M, n चरणों के बाद नहीं रुकी है, तो $\tau(M, w) \vDash \chi(M, w, n)$।*

प्रमाण. आगमन का आधार: यदि $n = 0$, तो $\chi(M, w, 0)$ के संयोजक $\tau(M, w)$ के भी संयोजक हैं और इसलिए उससे फलित होते हैं।

आगमन-परिकल्पना: यदि M, nवें चरण से पहले नहीं रुकी है, तो $\tau(M, w) \vDash \chi(M, w, n)$। हमें दिखाना है कि (जब तक $\chi(M, w, n)$ किसी रुकने वाले विन्यास का वर्णन न करे) $\tau(M, w) \vDash \chi(M, w, n+1)$।

मान लें कि $n > 0$ और w पर आरंभ की गई M, n चरणों के बाद अवस्था q में है और खाना m पढ़ रही है। चूँकि M, n चरणों के बाद नहीं रुकती, M के प्रोग्राम में निम्न तीन रूपों में से किसी एक का निर्देश अवश्य होना चाहिए:

1. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', R \rangle$
2. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', L \rangle$
3. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', N \rangle$

अब हम इन तीनों स्थितियों पर बारी-बारी से विचार करेंगे।

1. मान लें कि (1) रूप का कोई निर्देश है। परिभाषा 32.9(3a) के अनुसार इसका अर्थ है कि

$$\forall x \, \forall y \, ((Q_q(x, y) \wedge S_\sigma(x, y)) \rightarrow \\ (Q_{q'}(x', y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y)))$$

$\tau(M, w)$ का एक संयोजक है। इससे निम्न वाक्य फलित होता है (सार्वत्रिक निदर्शन, x के लिए $\overline{m}$ और y के लिए $\overline{n}$):

$$(Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})) \rightarrow \\ (Q_{q'}(\overline{m}', \overline{n}') \wedge S_{\sigma'}(\overline{m}, \overline{n}') \wedge \varphi(\overline{m}, \overline{n})).$$

आगमन-परिकल्पना से $\tau(M, w) \vDash \chi(M, w, n)$, अर्थात्

$$Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_{\sigma_0}(\overline{0}, \overline{n}) \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_k}(\overline{k}, \overline{n}) \wedge \\ \forall x \, (\overline{k} < x \rightarrow S_0(x, \overline{n}))$$

n चरणों के बाद पट्टी के खाना m में σ है, इसलिए संबंधित संयोजक $S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})$ है और इससे फलित होता है:

$$Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})$$

अब हमें मिलता है

$$Q_{q'}(\overline{m}', \overline{n}') \wedge S_{\sigma'}(\overline{m}, \overline{n}') \wedge \\ S_{\sigma_0}(\overline{0}, \overline{n}') \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_k}(\overline{k}, \overline{n}') \wedge \\ \forall x \, (\overline{k} < x \rightarrow S_0(x, \overline{n}'))$$

इस प्रकार: पहली पंक्ति पूर्ववर्ती सशर्त के परिणामांश से प्रत्यक्षतः, मोडस पोनेन्स द्वारा मिलती है। बीच की पंक्ति का प्रत्येक संयोजक—जिसमें $S_{\sigma_m}(\overline{m}, \overline{n}')$ सम्मिलित नहीं है—$\chi(M, w, n)$ के संबंधित संयोजक और $\varphi(\overline{m}, \overline{n})$ से मिलता है।

यदि $m < k$, तो $\tau(M, w) \vdash \overline{m} < \overline{k}$ (प्रतिज्ञप्ति 32.10), और $<$ की संक्रामकता से हमें $\forall x\, (\overline{k} < x \to \overline{m} < x)$ मिलता है। यदि $m = k$, तो केवल तर्कशास्त्र से $\forall x\, (\overline{k} < x \to \overline{m} < x)$। तब अंतिम पंक्ति $\chi(M, w, n)$ के संबंधित संयोजक, $\forall x\, (\overline{k} < x \to \overline{m} < x)$, और $\varphi(\overline{m}, \overline{n})$ से मिलती है। यदि $m < k$, तो यही पहले से $\chi(M, w, n+1)$ है।

अब मान लें कि $m = k$। उस दशा में $n+1$ चरणों के बाद पट्टी-शीर्ष ने खाना $k+1$ भी देख लिया है, जो अब देखा गया सबसे दायाँ खाना है। इसलिए $\chi(M, w, n+1)$ में एक नया संयोजक $S_0(\overline{k}', \overline{n}')$ है, और अंतिम संयोजक $\forall x\, (\overline{k}' < x \to S_0(x, \overline{n}'))$ है। हमें सत्यापित करना है कि ये दोनों वाक्य भी फलित होते हैं।

हमारे पास पहले से $\forall x\, (\overline{k} < x \to S_0(x, \overline{n}'))$ है। विशेषतः इससे $\overline{k} < \overline{k}' \to S_0(\overline{k}', \overline{n}')$ मिलता है। अभिगृहीत $\forall x\, x < x'$ से हमें $\overline{k} < \overline{k}'$ मिलता है। मोडस पोनेन्स से $S_0(\overline{k}', \overline{n}')$ फलित होता है।

साथ ही, चूँकि $\tau(M, w) \vdash \overline{k} < \overline{k}'$, $<$ की संक्रामकता का अभिगृहीत हमें $\forall x\, (\overline{k}' < x \to S_0(x, \overline{n}'))$ देता है। (इसका सत्यापन अभ्यास के रूप में छोड़ा जाता है।)

2. मान लें कि (2) रूप का कोई निर्देश है। तब परिभाषा 32.9(3b) के अनुसार,

$$\begin{aligned}
&\forall x\, \forall y\, ((Q_q(x', y) \land S_\sigma(x', y)) \to \\
&\qquad (Q_{q'}(x, y') \land S_{\sigma'}(x', y') \land \varphi(x, y))) \land \\
&\forall y\, ((Q_{q_i}(\overline{0}, y) \land S_\sigma(\overline{0}, y)) \to \\
&\qquad (Q_{q_j}(\overline{0}, y') \land S_{\sigma'}(\overline{0}, y') \land \varphi(\overline{0}, y)))
\end{aligned}$$

$\tau(M, w)$ का एक संयोजक है। यदि $m > 0$, तो $l = m - 1$ (अर्थात् $m = l + 1$) मानें। ऊपर के वाक्य के प्रथम संयोजक से निम्न फलित होता है:

$$\begin{aligned}
&(Q_q(\overline{l}', \overline{n}) \land S_\sigma(\overline{l}', \overline{n})) \to \\
&\qquad (Q_{q'}(\overline{l}, \overline{n}') \land S_{\sigma'}(\overline{l}', \overline{n}') \land \varphi(\overline{l}, \overline{n}))
\end{aligned}$$

अन्यथा $l = m = 0$ मानें और दूसरे संयोजक से फलित निम्न वाक्य पर विचार करें:

$$\begin{aligned}
&((Q_{q_i}(\overline{0}, \overline{n}) \land S_\sigma(\overline{0}, \overline{n})) \to \\
&\qquad (Q_{q_j}(\overline{0}, \overline{n}') \land S_{\sigma'}(\overline{0}, \overline{n}') \land \varphi(\overline{0}, \overline{n})))
\end{aligned}$$

दोनों में से कोई भी वाक्य निम्न को फलित करता है:

$$\begin{aligned}
&Q_{q'}(\overline{l}, \overline{n}') \land S_{\sigma'}(\overline{m}, \overline{n}') \land \\
&\qquad S_{\sigma_0}(\overline{0}, \overline{n}') \land \cdots \land S_{\sigma_k}(\overline{k}, \overline{n}') \land \\
&\qquad \forall x\, (\overline{k} < x \to S_0(x, \overline{n}'))
\end{aligned}$$

पहले की तरह। (ध्यान दें कि पहली दशा में $\overline{l}' \equiv \overline{l+1} \equiv \overline{m}$, और दूसरी दशा में $\overline{l} \equiv \overline{0}$।) किंतु यही $\chi(M, w, n+1)$ है।

3. स्थिति (3) को अभ्यास के रूप में छोड़ा जाता है।

हमने दिखा दिया कि किसी भी n के लिए $\tau(M,w) \vDash \chi(M,w,n)$। $\square$

सहायक प्रमेय 32.14. *यदि M आगत w पर रुकती है, तो $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ वैध है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 32.13 से हम जानते हैं कि किसी भी समय n के लिए समय n पर M के विन्यास का वर्णन $\chi(M,w,n)$, $\tau(M,w)$ से फलित होता है। मान लें कि M, k चरणों के बाद रुकती है। उस समय वह किसी $m \in \mathbb{N}$ के लिए खाना m पढ़ रही होगी। तब $\chi(M,w,k)$, M के रुकने वाले विन्यास का वर्णन करता है, अर्थात् इसमें $Q_q(\overline{m},\overline{k})$ और $S_\sigma(\overline{m},\overline{k})$ दोनों संयोजक होते हैं, जहाँ $\delta(q,\sigma)$ अपरिभाषित है। अतः सहायक प्रमेय 32.12 के अनुसार $\chi(M,w,k) \vDash \alpha(M,w)$। किंतु चूँकि $\tau(M,w) \vDash \chi(M,w,k)$, हमारे पास $\tau(M,w) \vDash \alpha(M,w)$ है, और इसलिए $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ वैध है। $\square$

अपने दावे का सत्यापन पूरा करने के लिए हमें विपरीत दिशा भी स्थापित करनी है: यदि $\tau(M,w) \to \alpha(M,w)$ वैध है, तो आगत w पर आरंभ किए जाने पर M वास्तव में रुकती है।

सहायक प्रमेय 32.15. *यदि $\vDash \tau(M,w) \to \alpha(M,w)$, तो M आगत w पर रुकती है।*

प्रमाण. प्रांत $\mathbb{N}$ वाली $\mathcal{L}_M$-संरचना $\mathfrak{M}$ पर विचार करें, जो 0 की व्याख्या 0 के रूप में, $\prime$ की उत्तरवर्ती फलन के रूप में, और $<$ की लघुतर संबंध के रूप में करती है; और विधेयों Q_q तथा S_σ की व्याख्या इस प्रकार करती है:

$$Q_q^{\mathfrak{M}} = \{\langle m,n\rangle : \begin{array}{l} w \text{ पर आरंभ करने के बाद, } n \text{ चरणों पश्चात्,} \\ M \text{ अवस्था } q \text{ में है और खाना } m \text{ पढ़ रही है} \end{array} \}$$

$$S_\sigma^{\mathfrak{M}} = \{\langle m,n\rangle : \begin{array}{l} w \text{ पर आरंभ करने के बाद, } n \text{ चरणों पश्चात्,} \\ M \text{ के खाना } m \text{ में प्रतीक } \sigma \text{ है} \end{array} \}$$

दूसरे शब्दों में, हम संरचना $\mathfrak{M}$ की रचना इस तरह करते हैं कि वह आगत w पर आरंभ की गई M के वास्तविक व्यवहार को चरण-दर-चरण वर्णित करे। स्पष्ट है कि $\mathfrak{M} \vDash \tau(M,w)$। यदि $\vDash \tau(M,w) \to \alpha(M,w)$, तो $\mathfrak{M} \vDash \alpha(M,w)$ भी, अर्थात्

$$\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \exists y\, (\bigvee_{\langle q,\sigma\rangle \in X} (Q_q(x,y) \wedge S_\sigma(x,y))).$$

चूँकि $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, कोई $m, n \in \mathbb{N}$ ऐसे अवश्य हैं कि किसी ऐसे q और σ के लिए $\mathfrak{M} \vDash Q_q(\overline{m},\overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m},\overline{n})$, जिनके लिए $\delta(q,\sigma)$ अपरिभाषित है। $\mathfrak{M}$ की परिभाषा के अनुसार इसका अर्थ है कि आगत w पर आरंभ की गई M, n चरणों के बाद अवस्था q में है और प्रतीक σ पढ़ रही है, तथा संक्रमण फलन अपरिभाषित है; अर्थात् M रुक चुकी है। $\square$

32.8 निर्णय समस्या असमाधेय है

प्रमेय 32.16. *निर्णय समस्या असमाधेय है: ऐसी कोई ट्यूरिंग मशीन D नहीं है जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य ψ को आगत के रूप में रखने वाली पट्टी पर आरंभ किए जाने पर D अंततः रुके और ψ के वैध होने पर और केवल तभी 1, तथा अन्यथा 0 निर्गत करे।*

प्रमाण. मान लें कि निर्णय समस्या समाधेय है, अर्थात् मान लें कि कोई ट्यूरिंग मशीन D है। तब हम विराम समस्या को निम्न प्रकार हल कर सकते हैं। हम ऐसी ट्यूरिंग मशीन E बनाते हैं जो ट्यूरिंग मशीन M_e की संख्या e और आगत w दिए जाने पर अनुरूप वाक्य $\tau(M_e,w) \to \alpha(M_e,w)$ की संगणना करती है और पट्टी का सबसे बायाँ खाना पढ़ते हुए रुकती है। तब मशीन $E \frown D$, आगत e और w दिए जाने पर पहले $\tau(M_e,w) \to \alpha(M_e,w)$ की संगणना करती और फिर उस आगत पर निर्णय-समस्या मशीन D चलाती। D, निर्गत 1 के साथ तभी और केवल तभी रुकती है जब $\tau(M_e,w) \to \alpha(M_e,w)$ वैध हो, और अन्यथा 0 निर्गत करती है। सहायक प्रमेय 32.15 और सहायक प्रमेय 32.14 के अनुसार $\tau(M_e,w) \to \alpha(M_e,w)$ तभी और केवल तभी वैध है जब M_e आगत w पर रुकती है। अतः $E \frown D$,

आगत e और w दिए जाने पर निर्गत 1 के साथ तभी और केवल तभी रुकती जब M_e आगत w पर रुकती, और अन्यथा निर्गत 0 के साथ रुकती। दूसरे शब्दों में, $E \frown D$ विराम समस्या को हल कर देती। किंतु प्रमेय 32.8 से हम जानते हैं कि ऐसी ट्यूरिंग मशीन का अस्तित्व नहीं हो सकता। □

उपप्रमेय 32.17. *यह अनिर्णेय है कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का कोई मनमाना वाक्य संतुष्टनीय है या नहीं।*

प्रमाण. मान लें कि संतुष्टनीयता का निर्णय ट्यूरिंग मशीन S द्वारा किया जा सकता है। तब हम निर्णय समस्या को इस प्रकार हल कर सकते हैं: आगत के रूप में वाक्य B दिए जाने पर ψ को एक खाना दाईं ओर खिसकाएँ। खाना 1 पर लौटें और प्रतीक $\neg$ लिखें।

अब ट्यूरिंग मशीन S चलाएँ। वह अंततः पट्टी पर या तो निर्गत 1 (यदि $\neg\psi$ संतुष्टनीय है) अथवा 0 (यदि $\neg\psi$ असंतुष्टनीय है) के साथ रुकती है। यदि खाना 1 पर 1 है तो उसे मिटाएँ; यदि खाना 1 रिक्त है तो एक 1 लिखें, फिर रुकें।

यह ट्यूरिंग मशीन सदैव रुकती है और उसका निर्गत 1 तभी और केवल तभी है जब $\neg\psi$ असंतुष्टनीय हो, तथा अन्यथा 0 है। चूँकि ψ तभी और केवल तभी वैध है जब $\neg\psi$ असंतुष्टनीय हो, मशीन 1 तभी और केवल तभी निर्गत करती है जब ψ वैध हो, और अन्यथा 0; अर्थात् वह निर्णय समस्या को हल कर देती। □

अतः ऐसी कोई ट्यूरिंग मशीन नहीं है जो "क्या ψ प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का वैध वाक्य है?" प्रश्न का सदैव सही "हाँ" अथवा "नहीं" उत्तर दे। फिर भी ऐसी ट्यूरिंग मशीन है जो सदैव सही "हाँ" उत्तर देती है—किंतु उत्तर "नहीं" होने पर बस रुकती नहीं। यह प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के सुदृढ़ता और पूर्णता प्रमेय तथा इस तथ्य से निकलता है कि व्युत्पत्ति का प्रभावी रूप से परिगणन किया जा सकता है।

प्रमेय 32.18. *प्रथम-कोटि वाक्य की वैधता अर्ध-निर्णेय है: ऐसी ट्यूरिंग मशीन E है जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य ψ को आगत के रूप में रखने वाली पट्टी पर आरंभ किए जाने पर E अंततः रुकती है और 1 तभी और केवल तभी निर्गत करती है जब ψ वैध हो, किंतु अन्यथा नहीं रुकती।*

प्रमाण. प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की सभी संभावित व्युत्पत्ति को एक प्रभावी कलनविधि द्वारा एक के बाद एक उत्पन्न किया जा सकता है। मशीन E ऐसा करती है और जब उसे यह दिखाने वाली व्युत्पत्ति मिलती है कि $\vdash \psi$, तब वह निर्गत 1 के साथ रुकती है। सुदृढ़ता प्रमेय के अनुसार यदि E निर्गत 1 के साथ रुकती है तो इसका कारण $\vDash \psi$ है। पूर्णता प्रमेय के अनुसार यदि $\vDash \psi$, तो यह दिखाने वाली व्युत्पत्ति है कि $\vdash \psi$। चूँकि E सभी संभावित व्युत्पत्ति को क्रमबद्ध ढंग से उत्पन्न करती है, वह अंततः $\vdash \psi$ दिखाने वाली किसी एक को पाएगी और इसलिए अंततः निर्गत 1 के साथ रुकेगी। □

32.9 ट्राख्टेनब्रॉट का प्रमेय

खंड 32.6 में हमने ट्यूरिंग मशीन M और आगत डोरी w के लिए वाक्य $\tau(M, w)$ तथा $\alpha(M, w)$ परिभाषित किए। फिर सहायक प्रमेय 32.14 और सहायक प्रमेय 32.15 में हमने दिखाया कि $\tau(M, w) \to \alpha(M, w)$ तभी वैध है जब आगत w पर आरंभ की गई M अंततः रुकती है। चूँकि विराम समस्या अनिर्णेय है, इससे फलित होता है कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य की वैधता और संतुष्टनीयता अनिर्णेय हैं (प्रमेय 32.16 और उपप्रमेय 32.17)।

किंतु वाक्यों की वैधता और संतुष्टनीयता स्वेच्छ संरचना के लिए परिभाषित हैं, चाहे वे परिमित हों या अनंत। आपको संदेह हो सकता है कि यह तय करना अधिक सरल है कि कोई वाक्य किसी परिमित संरचना में संतुष्टनीय है या नहीं (अथवा सभी परिमित संरचना में वैध है या नहीं)। हम निर्णय समस्या की असमाधेयता के प्रमाण को इस तरह अनुकूलित कर सकते हैं कि वह दिखाए कि ऐसा नहीं है।

पहले, यदि आप सहायक प्रमेय 32.15 के प्रमाण पर लौटें, तो देखेंगे कि वहाँ हमने $\tau(M, w)$ का ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ बनाया था जो ठीक-ठीक वर्णित करता है कि आगत w पर आरंभ होने पर मशीन M क्या करती है। उस प्रतिरूप का प्रांत $\mathbb{N}$, अर्थात् अनंत था। किंतु यदि M वास्तव में आगत w पर रुकती है, तो हम उसी तरह एक परिमित प्रतिरूप $\mathfrak{M}'$ बना सकते हैं। मान लें कि आगत w पर आरंभ की गई M, k चरणों के बाद रुकती है। प्रांत $|\mathfrak{M}'|$ के रूप में समुच्चय

$\{0, \ldots, n\}$ लें, जहाँ n, k और w की लंबाई में बड़ा है, और मानें कि

$$\prime^{\mathfrak{M}'}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x < n \\ n & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

तथा $\langle x, y\rangle \in <^{\mathfrak{M}'}$ तभी जब $x < y$ अथवा $x = y = n$। अन्य बातों में $\mathfrak{M}'$ को ठीक $\mathfrak{M}$ की तरह परिभाषित करें। $\mathfrak{M}'$ की परिभाषा के अनुसार, ठीक सहायक प्रमेय 32.15 के प्रमाण की तरह, $\mathfrak{M}' \vDash \tau(M, w)$। और चूँकि हमने माना कि M आगत w पर रुकती है, $\mathfrak{M}' \vDash \alpha(M, w)$। इसलिए $\mathfrak{M}'$, $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का परिमित प्रतिरूप है (ध्यान दें कि हमने $\rightarrow$ को $\wedge$ से बदल दिया है)।

हम प्रमाण का आधा भाग पूरा कर चुके हैं: हमने दिखाया है कि यदि M आगत w पर रुकती है, तो $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का कोई परिमित प्रतिरूप है। दुर्भाग्यवश इसका विपरीत सत्य नहीं है; अर्थात् ऐसी ट्यूरिंग मशीनें हैं जो किसी आगत w पर नहीं रुकतीं, फिर भी $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का कोई परिमित प्रतिरूप है। उदाहरण के लिए, उस मशीन M पर विचार करें जिसकी एकमात्र अवस्था q_0 और निर्देश $\delta(q_0, 0) = \langle q_0, 0, N\rangle$ है। रिक्त आगत $w = \Lambda$ पर आरंभ की गई यह मशीन कभी नहीं रुकती: वह अनंत पाश में है, किंतु न पट्टी बदलती है, न शीर्ष को चलाती है। सभी विन्यास समान हैं (वही अवस्था, वही शीर्ष-स्थान, वही पट्टी-सामग्री)। हम ऐसा परिमित संरचना $\mathfrak{M}''$ परिभाषित कर सकते हैं जो $\tau(M, \Lambda) \wedge \alpha(M, \Lambda)$ को संतुष्ट करता है (अभ्यास)। फिर भी हम $\tau(M, w)$ को उपयुक्त ढंग से बदल सकते हैं ताकि ऐसे संरचना अपवर्जित हो जाएँ।

आगत $w = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ पर ट्यूरिंग मशीन M की क्रिया का वर्णन करने वाले वाक्य पर विचार करें:

1. संख्याओं और $<$ का वर्णन करने वाले अभिगृहीत (ठीक खंड 32.6 में $\tau(M, w)$ की परिभाषा की तरह)।

2. आगत-विन्यास का वर्णन करने वाले अभिगृहीत: ठीक $\tau(M, w)$ की परिभाषा की तरह।

3. एक विन्यास से अगले विन्यास तक संक्रमण का वर्णन करने वाले अभिगृहीत:

   निम्न के लिए $\varphi(x, y)$ को पहले की तरह मानें, और मानें कि

   $$\psi(y) \equiv \forall x\, (x < y \rightarrow x \neq y).$$

   a) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', R\rangle$ के लिए यह वाक्य:

   $$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x, y) \wedge S_\sigma(x, y)) \rightarrow \\ &\qquad (Q_{q_j}(x', y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y) \wedge \psi(y'))) \end{aligned}$$

   b) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', L\rangle$ के लिए यह वाक्य:

   $$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x', y) \wedge S_\sigma(x', y)) \rightarrow \\ &\qquad (Q_{q_j}(x, y') \wedge S_{\sigma'}(x', y') \wedge \varphi(x, y))) \wedge \\ &\forall y\, ((Q_{q_i}(\overline{0}, y) \wedge S_\sigma(\overline{0}, y)) \rightarrow \\ &\qquad (Q_{q_j}(\overline{0}, y') \wedge S_{\sigma'}(\overline{0}, y') \wedge \varphi(\overline{0}, y) \wedge \psi(y'))) \end{aligned}$$

   c) प्रत्येक निर्देश $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', N\rangle$ के लिए यह वाक्य:

   $$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, ((Q_{q_i}(x, y) \wedge S_\sigma(x, y)) \rightarrow \\ &\qquad (Q_{q_j}(x, y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y) \wedge \psi(y'))) \end{aligned}$$

   जैसा आप देख सकते हैं, M के संक्रमणों का वर्णन करने वाले वाक्य, $\tau(M, w)$ के संगत वाक्य के समान हैं; केवल अंत में $\psi(y')$ जोड़ा गया है। $\psi(y')$ यह सुनिश्चित करता है कि "अगले" विन्यास की संख्या y', पिछली सभी संख्याओं 0, 0′, ... से भिन्न है।

$\tau'(M, w)$ को ट्यूरिंग मशीन M और आगत w के लिए ऊपर के सभी वाक्य का संयोजन मानें।

सहायक प्रमेय 32.19. *यदि आगत w पर आरंभ की गई M रुकती है, तो $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का कोई परिमित प्रतिरूप है।*

प्रमाण. $\mathfrak{M}'$ को सहायक प्रमेय 32.15 के प्रमाण की तरह मानें, केवल ये अपवाद रखें:

$$|\mathfrak{M}'| = \{0, \dots, n\},$$
$$\prime^{\mathfrak{M}'}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x < n \\ n & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$
$$\langle x, y\rangle \in <^{\mathfrak{M}'} \text{तभी जब } x < y \text{ अथवा } x = y = n,$$

जहाँ $n = \max(k, \mathrm{len}(w))$ और k वह न्यूनतम संख्या है जिसके लिए आगत w पर आरंभ की गई M, k चरणों के बाद रुक चुकी है। $\mathfrak{M}' \vDash \tau'(M, w) \wedge E(M, w)$ का सत्यापन अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं। □

सहायक प्रमेय 32.20. *यदि $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का कोई परिमित प्रतिरूप है, तो आगत w पर आरंभ की गई M रुकती है।*

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक कथन सिद्ध करते हैं। मान लें कि आगत w पर आरंभ की गई M नहीं रुकती। यदि $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का कोई प्रतिरूप ही नहीं है, तो प्रमाण पूरा हुआ। अतः मान लें कि $\mathfrak{M}$, $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का प्रतिरूप है। हमें दिखाना है कि वह परिमित नहीं हो सकता।

ठीक सहायक प्रमेय 32.13 की तरह हम सिद्ध कर सकते हैं कि यदि आगत w पर आरंभ की गई M, n चरणों के बाद नहीं रुकी है, तो $\tau'(M, w) \vDash \chi(M, w, n) \wedge \psi(\overline{n})$। चूँकि आगत w पर आरंभ की गई M नहीं रुकती, इसलिए सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\tau'(M, w) \vDash \chi(M, w, n) \wedge \psi(\overline{n})$। ध्यान दें कि प्रतिज्ञप्ति 32.10 के अनुसार सभी $k < n$ के लिए $\tau'(M, w) \vDash \overline{k} < \overline{n}$। साथ ही $\psi(\overline{n}) \vDash \overline{k} < \overline{n} \to \overline{k} \neq \overline{n}$। अतः सभी $k < n$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \overline{k} \neq \overline{n}$, अर्थात् अनंततः अनेक पद $\overline{k}$ के मान $\mathfrak{M}$ में परस्पर भिन्न होने चाहिए। किंतु इसके लिए $|\mathfrak{M}|$ का अनंत होना आवश्यक है; अतः $\mathfrak{M}$, $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ का परिमित प्रतिरूप नहीं हो सकता। □

प्रमेय 32.21 (ट्राख्टेनब्रॉट का प्रमेय). *यह अनिर्णेय है कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के किसी स्वेच्छ वाक्य का परिमित प्रतिरूप है या नहीं (अर्थात् वह परिमित रूप से संतुष्टनीय है या नहीं)।*

प्रमाण. मान लें कि कोई ट्यूरिंग मशीन F है जो परिमित संतुष्टनीयता की समस्या का निर्णय करती है। तब किसी भी ट्यूरिंग मशीन M और आगत w के दिए होने पर हम वाक्य $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ की संगणना कर सकते हैं और F का उपयोग करके तय कर सकते हैं कि इसका कोई परिमित प्रतिरूप है या नहीं। सहायक प्रमेय 32.19 और 32.20 के अनुसार ऐसा तभी है जब आगत w पर आरंभ की गई M रुकती है। इस प्रकार हम F से विराम समस्या हल कर सकते, जबकि हम जानते हैं कि वह असमाधेय है। □

उपप्रमेय 32.22. *ऐसी कोई व्युत्पत्ति प्रणाली नहीं हो सकती जो परिमित वैधता के लिए सुदृढ़ और पूर्ण हो; अर्थात् ऐसी व्युत्पत्ति प्रणाली जिसमें प्रत्येक परिमित संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \psi$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रश्न

प्रश्न 32.1. क्या आप ट्यूरिंग मशीनों का वर्णन करने की ऐसी रीति सोच सकते हैं जिसमें अवस्थाओं और वर्णमाला के प्रतीकों को स्पष्टतः सूचीबद्ध करना आवश्यक न हो? आप "मानक" मशीन की अपनी धारणा परिभाषित कर सकते हैं, किंतु यह भी बताएँ कि आपके नए अर्थ की किसी "मानक" मशीन द्वारा प्रत्येक ट्यूरिंग मशीन का अनुकरण क्यों किया जा सकता है।

प्रश्न 32.2. त्रि-विराम (3-विराम) समस्या ऐसी निर्णय-प्रक्रिया देने की समस्या है जो निर्धारित करे कि मनमाने ढंग से चुनी गई ट्यूरिंग मशीन, अन्यथा रिक्त पट्टी पर तीन 1 वाले आगत के लिए रुकती है या नहीं। सिद्ध करें कि 3-विराम समस्या असमाधेय है।

प्रश्न 32.3. दिखाएँ कि यदि विराम समस्या उन ट्यूरिंग मशीन और आगत युग्मों M_e और n के लिए समाधेय है जहाँ $e \neq n$, तो वह उन स्थितियों के लिए भी समाधेय है जहाँ $e = n$।

प्रश्न 32.4. हमने सिद्ध किया कि यदि आगत कोई संख्या e है, जो सभी ट्यूरिंग मशीनों के परिगणन द्वारा ट्यूरिंग मशीन M_e को पहचानती है, तो विराम समस्या असमाधेय है। यदि हम खंड 32.2 के ट्यूरिंग मशीन-वर्णन को सीधे आगत के रूप में लेने दें तो क्या होगा? क्या ऐसी ट्यूरिंग मशीन हो सकती है जो विराम समस्या का निर्णय करती हो किंतु आगत के रूप में सूचकांकों के स्थान पर ट्यूरिंग मशीनों के वर्णन लेती हो? समझाएँ कि क्यों या क्यों नहीं।

प्रश्न 32.5. दिखाएँ कि निम्न प्रकार परिभाषित *आंशिक* फलन s'

$$s'(e) = \begin{cases} 1 & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } e \text{ पर रुकती है} \\ \text{अपरिभाषित} & \text{यदि मशीन } M_e \text{ आगत } e \text{ पर नहीं रुकती} \end{cases}$$

ट्यूरिंग-संगणनीय है।

प्रश्न 32.6. प्रतिज्ञप्ति 32.10 सिद्ध करें। (संकेत: $k - m$ पर आगमन का उपयोग करें।)

प्रश्न 32.7. सहायक प्रमेय 32.13 के प्रमाण की स्थिति (3) पूरी करें।

प्रश्न 32.8. $S_{\sigma_i}(\bar{i}, \overline{n})$ और $\varphi(m, n)$ से $S_{\sigma_i}(\bar{i}, \overline{n}')$ की व्युत्पत्ति दें (मानते हुए कि $i \neq m$, अर्थात् या तो $i < m$ अथवा $m < i$)।

प्रश्न 32.9. $\forall x\, (\overline{k} < x \to S_0(x, \overline{n}'))$, $\forall x\, x < x'$, और $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ से $\forall x\, (\overline{k}' < x \to S_0(x, \overline{n}'))$ की व्युत्पत्ति दें।)

प्रश्न 32.10. मान लें कि M एक ऐसी ट्यूरिंग मशीन है जिसकी एकमात्र अवस्था q_0 और एकमात्र निर्देश $\delta(q_0, 0) = \langle q, 0, N\rangle$ है। मानें कि $|\mathfrak{M}''| = \{0, 1, 2\}$, $\prime^{\mathfrak{M}''}(0) = \prime^{\mathfrak{M}'}(1) = 1$ तथा $\prime^{\mathfrak{M}''}(2) = 2$, और $<^{\mathfrak{M}''} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$। $Q_{q_0}^{\mathfrak{M}''}$, $S_0^{\mathfrak{M}''}$, और $S_\triangleright^{\mathfrak{M}''}$ को इस तरह परिभाषित करें कि $\tau(M, \Lambda)$ और $\alpha(M, \Lambda)$ सत्य हो जाएँ, और समझाएँ कि वे सत्य क्यों हैं। संकेत: ध्यान दें कि $\delta(q_0, \triangleright)$ अपरिभाषित है। सुनिश्चित करें कि

$$\begin{aligned} & Q_{q_0}(\overline{1}, \overline{n}) \wedge S_\triangleright(\overline{0}, \overline{n}) \wedge \forall x\, (\overline{0} < x \to S_0(x, \overline{n})) \quad \text{सभी } n \in \mathbb{N} \text{ के लिए} \\ & \exists y\, (Q_{q_0}(\overline{0}, y) \wedge S_\triangleright(\overline{0}, y)) \end{aligned}$$

दोनों $\mathfrak{M}''$ में सत्य हैं।

प्रश्न 32.11. $\mathfrak{M}' \vDash \tau(M, w) \wedge E(M, w)$ सिद्ध करके सहायक प्रमेय 32.19 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 32.12. यह सिद्ध करके सहायक प्रमेय 32.20 का प्रमाण पूरा करें कि यदि आगत w पर आरंभ की गई M, n चरणों के बाद नहीं रुकी है, तो $\tau'(M, w) \vDash \psi(\overline{n})$।

प्रश्न 32.13. उपप्रमेय 32.22 सिद्ध करें। ध्यान दें कि ψ प्रत्येक परिमित संरचना में तभी संतुष्ट होता है जब $\neg\psi$ परिमित रूप से संतुष्टनीय नहीं है। समझाएँ कि प्रमेय 32.18 के अर्थ में परिमित संतुष्टनीयता अर्ध-निर्णेय क्यों है। इसका उपयोग यह तर्क देने के लिए करें कि यदि परिमित वैधता के लिए कोई व्युत्पत्ति प्रणाली होती, तो परिमित संतुष्टनीयता निर्णेय होती।

खण्ड VII

अपूर्णता

इस भाग की सामग्री अपूर्णता प्रमेयों को समेटती है। यह प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र वाले भाग की सामग्री (विशेषतः प्रमाण-तंत्र) और संगणनीयता वाले भाग की पुनरावर्ती फलनों संबंधी सामग्री पर निर्भर है। यह जेरेमी एविगैड के नोट्स पर आधारित है, जिनमें रिचर्ड ज़ाख ने संशोधन किए हैं।

अध्याय 33

अपूर्णता का परिचय

33.1 ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

इस अनुभाग में हम उन ऐतिहासिक विकासों की संक्षेप में चर्चा करेंगे जिनसे अपूर्णता प्रमेयों को उनके संदर्भ में समझने में सहायता मिलेगी। विशेष रूप से, हम गणितीय तर्कशास्त्र के इतिहास का बहुत स्थूल अवलोकन देंगे और फिर गणित की आधारशिलाओं के इतिहास के विषय में कुछ बातें कहेंगे।

"गणितीय तर्कशास्त्र" पद द्व्यर्थी है। "गणितीय" शब्द को विषय-वस्तु का वर्णन मानकर इसका अर्थ "गणित का तर्कशास्त्र", अर्थात् गणितीय तर्कणा के सिद्धांत, लिया जा सकता है; अथवा इसे विधियों का वर्णन मानकर "तर्कशास्त्र का गणित", अर्थात् तर्कणा के सिद्धांतों का गणितीय अध्ययन, समझा जा सकता है। आगे का विवरण गणितीय तर्कशास्त्र को इन दोनों अर्थों में, प्रायः एक ही समय, ग्रहण करता है।

तर्कशास्त्र का अध्ययन मूलतः अरस्तू से आरंभ हुआ, जो लगभग 384–322 ईसा-पूर्व जीवित थे। उनकी *कोटियाँ*, *पूर्व विश्लेषिकी* और *उत्तर विश्लेषिकी* में वैज्ञानिक तर्कणा के सिद्धांतों का क्रमबद्ध अध्ययन मिलता है, जिसमें न्यायवाक्य का विस्तृत और सुव्यवस्थित अध्ययन भी सम्मिलित है।

अरस्तू का तर्कशास्त्र पूरे मध्ययुग में शास्त्रीय दर्शन पर छाया रहा; वास्तव में अठारहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध तक कांट का मत था कि अरस्तू का तर्कशास्त्र पूर्ण है और उसमें किसी संशोधन की आवश्यकता नहीं। किंतु न्यायवाक्य का सिद्धांत इतना सीमित है कि वह गणितीय तर्कणा के केवल अत्यंत सतही पक्षों का ही प्रतिरूपण कर सकता है। इससे एक शताब्दी पहले, न्यूटन के समकालीन लाइबनित्स ने तार्किक तर्कणा के लिए एक पूर्ण "कलन" की कल्पना की थी और ऐसे कलन की रचना की दिशा में कुछ आरंभिक कदम उठाए थे; उनका वर्णन मूलतः प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के एक रूप के समान था।

उन्नीसवीं शताब्दी तर्कशास्त्र के लिए निर्णायक मोड़ थी। 1854 में जॉर्ज बूल ने *चिंतन के नियम* लिखी, जिसमें प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र का विस्तृत बीजीय अध्ययन आधुनिक प्रस्तुतियों से बहुत दूर नहीं है। 1879 में गोटलोब फ्रेगे ने अपनी *संकल्पना-लिपि* प्रकाशित की, जो प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र में परिमाणक और संबंध जोड़ती है और इस प्रकार प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र को समाहित करती है। वास्तव में फ्रेगे के तार्किक तंत्रों में उच्चतर-कोटि तर्कशास्त्र और उससे भी अधिक सामग्री थी। अपनी *अंकगणित के मूल नियम* में फ्रेगे ने यह दिखाने का प्रयास किया कि संपूर्ण अंकगणित को उनकी संकल्पना-लिपि में केवल तार्किक मान्यताओं से व्युत्पन्न किया जा सकता है। दुर्भाग्य से ये मान्यताएँ असंगत निकलीं, जैसा रसेल ने 1902 में दिखाया। किंतु उस असंगत अभिगृहीत को अलग रख दें तो फ्रेगे ने लगभग अकेले ही आधुनिक तर्कशास्त्र का आविष्कार कर दिया—यह एक चकित कर देने वाली उपलब्धि थी। बूल के बाद बीजीय दृष्टि रखने वाले विचारकों, जिनमें पियर्स और श्रेडर (Schröder) भी थे, ने परिमाणन तर्कशास्त्र का स्वतंत्र रूप से विकास किया।

अब हम गणित की आधारशिलाओं से जुड़े विकासों की ओर मुड़ें। निस्संदेह, गणित में तर्कशास्त्र की महत्त्वपूर्ण भूमिका होने के कारण इनका अभी वर्णित विकासों से गहरा अंतःसंबंध है। उदाहरण के लिए, फ्रेगे ने अपना तर्कशास्त्र इस स्पष्ट उद्देश्य से विकसित किया था कि समस्त गणित को केवल उनके तार्किक ढाँचे पर आधारित दिखाया जा सके; विशेषतः वे दिखाना चाहते थे कि गणित कांट के कथनानुसार प्रागनुभविक *संश्लेषणात्मक* सत्यों का नहीं, बल्कि प्रागनुभविक *विश्लेषणात्मक* सत्यों का समुच्चय है।

बहुत-से लोग वास्तविक गणित का जन्म यूनानियों के साथ मानते हैं। लगभग 300 ईसा-पूर्व लिखी यूक्लिड की *तत्त्व* अपनी कठोरता और परिशुद्धता पर बल देने के कारण यूनानी गणित की पहले से ही परिपक्व प्रतिनिधि है। यूक्लिड की *तत्त्व* की परिभाषाएँ और प्रमाण आज के माध्यमिक-विद्यालय ज्यामिति के पाठ्यक्रमों में लगभग अक्षुण्ण बने हुए हैं (जहाँ तक विद्यालयों में अब भी ज्यामिति पढ़ाई जाती है)। गणितीय तर्कणा का यह प्रतिमान केवल गणित में ही नहीं, दर्शन की शाखाओं में भी कठोर युक्ति का आदर्श माना गया है। (स्पिनोज़ा ने तो नैतिक और धार्मिक तर्क भी यूक्लिडीय शैली में प्रस्तुत किए थे—उन्हें इस रूप में देखना विचित्र लगता है!)

सत्रहवीं शताब्दी में न्यूटन और लाइबनित्स ने कलन का आविष्कार किया। (प्राथमिकता को लेकर उग्र विवाद सदियों चला, किंतु आज अधिकांश विद्वान मानते हैं कि दोनों विकास अधिकतर स्वतंत्र थे।) कलन में, उदाहरणतः, अनंतसूक्ष्म राशियों के अनंत योगों के विषय में तर्क किया जाता है; इन विशेषताओं ने बिशप बर्कली की आलोचना को बल दिया। उनका तर्क था कि ईश्वर में विश्वास उनके समय के गणित से कम युक्तिसंगत नहीं था। अठारहवीं शताब्दी में कलन की विधियों का व्यापक उपयोग हुआ; उदाहरण के लिए लियोनार्ड ऑयलर ने अनंत योगों वाले परिकलनों से नाटकीय परिणाम निकाले।

उन्नीसवीं शताब्दी में गणितज्ञों ने कलन को अधिक दृढ़ आधार देकर बर्कली की आलोचनाओं का उत्तर देने का प्रयास किया। कॉशी, वाइयरश्ट्रास, बोल्ज़ानो और अन्य लोगों के प्रयासों से सीमा, सातत्य, अवकलन और समाकलन की हमारी आधुनिक परिभाषाएँ "एप्सिलॉन और डेल्टा" के पदों में बनीं—दूसरे शब्दों में, उनमें अनंतसूक्ष्म राशियों का कोई उल्लेख नहीं था। शताब्दी के उत्तरार्ध में गणितज्ञों ने और आगे बढ़कर वास्तविक संख्याओं सहित कलन के सभी पक्षों को प्राकृतिक संख्याओं के पदों में समझाने का प्रयास किया। (क्रोनेकर: "ईश्वर ने पूर्ण संख्याएँ बनाईं; शेष सब मनुष्य का कार्य है।") 1872 में डेडेकिंड ने "सातत्य और अपरिमेय संख्याएँ" लिखी, जिसमें उन्होंने दिखाया कि वास्तविक संख्याओं को परिमेय संख्याओं के समुच्चयों के रूप में कैसे "निर्मित" किया जा सकता है (और जैसा आप जानते हैं, परिमेय संख्याओं को प्राकृतिक संख्याओं के युग्मों के रूप में देखा जा सकता है)। 1888 में उन्होंने "प्राकृतिक संख्याएँ क्या हैं और उन्हें क्या होना चाहिए?" लिखी, जिसका उद्देश्य प्राकृतिक संख्याओं को शुद्ध "तार्किक" पदों में समझाना था। 1887 में क्रोनेकर ने "Über den Zahlbegriff" ("संख्या की संकल्पना पर") लिखी, जिसमें उन्होंने सभी गणितीय वस्तुओं को पूर्णांकों के पदों में निरूपित करने की बात कही; 1889 में जुज़ेप्पे पियानो ने प्राकृतिक संख्याओं के लिए औपचारिक, सांकेतिक अभिगृहीत दिए।

उन्नीसवीं शताब्दी का अंत अनंत से निपटने में एक नया साहस भी लाया। उससे पहले अनंतात्मक वस्तुओं और संरचनाओं (जैसे प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय) को बहुत सावधानी से ग्रहण किया जाता था; "अनंततः अनेक" का अर्थ "जितने आप चाहें" और "सीमा में अभिगमन" का अर्थ "जितना निकट आप चाहें" समझा जाता था। किंतु जॉर्ग कैंटर ने दिखाया कि अनंत को उसके अंकित मूल्य पर स्वीकार करना संभव है। कैंटर, डेडेकिंड और अन्य लोगों के कार्य ने गणित की उस सामान्य समुच्चय-सैद्धांतिक समझ को जन्म देने में सहायता की जो अब व्यापक रूप से स्वीकृत है।

इससे हम तर्कशास्त्र और आधारशिलाओं में बीसवीं शताब्दी के विकासों तक पहुँचते हैं। 1902 में रसेल ने फ़्रेगे के तार्किक तंत्र में विरोधाभास खोजा। 1904 में ज़र्मेलो ने तथाकथित "वरण अभिगृहीत" का उपयोग करके कैंटर का सुव्यवस्थापन सिद्धांत सिद्ध किया; इस अभिगृहीत की वैधता पर बहुत बहस हुई। 1910 से 1913 के बीच रसेल और व्हाइटहेड की *प्रिंसिपिया मैथमेटिका* के तीन खंड प्रकाशित हुए, जिन्होंने गणित को तार्किक आधार पर स्थापित करने के फ़्रेगे-कार्यक्रम को आगे बढ़ाया। दुर्भाग्य से रसेल और व्हाइटहेड को दो ऐसे सिद्धांत स्वीकार करने पड़े जिन्हें शुद्ध तार्किक मानना कठिन था: अनंतता का अभिगृहीत और "अपचयनीयता" का अभिगृहीत। 1900 के दशक में प्वाँकारे (Poincaré) ने गणित में "अपूर्वसूचक परिभाषाओं" के उपयोग की आलोचना की; और 1910 के दशक में ब्राउवर ने संपूर्ण गणित को ऐसे "अंतःप्रज्ञावादी" आधार पर पुनःस्थापित करने का प्रस्ताव देना आरंभ किया जिसमें मध्यनिषेध नियम ($\varphi \vee \neg\varphi$) का उपयोग नहीं होता।

वे सचमुच विचित्र दिन थे! समस्त गणित को तर्कशास्त्र में अपचयित करने का कार्यक्रम अब "तर्कवाद" कहलाता है और ऊपर बताई कठिनाइयों के कारण सामान्यतः असफल माना जाता है। अंतःप्रज्ञावादी मानसिक रचनाओं के पदों में गणित विकसित करने का कार्यक्रम "अंतःप्रज्ञावाद" कहलाता है और माना जाता है कि वह दैनिक गणित पर अत्यधिक कठोर प्रतिबंध लगाता है। शताब्दी के मोड़ के आसपास सर्वकालीन सबसे प्रभावशाली गणितज्ञों में से एक, डेविड हिल्बर्ट, कैंटर और डेडेकिंड द्वारा लाई गई नई अमूर्त विधियों के प्रबल समर्थक थे: "कैंटर ने हमारे लिए जो स्वर्ग रचा है, उससे कोई हमें बाहर नहीं निकाल सकेगा।" साथ ही वे इन नई विधियों की आधारगत आलोचनाओं के प्रति संवेदनशील थे (विचित्र रूप से इन्हीं विधियों को अब "चिरसम्मत" कहा जाता है)। उन्होंने दोनों लाभ एक साथ पाने का यह उपाय सुझाया:

1. चिरसम्मत विधियों को औपचारिक अभिगृहीतों और नियमों से निरूपित करें; गणितीय प्रश्नों को किसी अभिगृही-

तीय तंत्र में सूत्र के रूप में निरूपित करें।

2. सुरक्षित, "परिमितवादी" विधियों का उपयोग करके सिद्ध करें कि ये औपचारिक निगमनात्मक तंत्र संगत हैं।

हिल्बर्ट के कार्य ने पहले लक्ष्य की सिद्धि की दिशा में बहुत प्रगति की। 1899 में उन्होंने अपनी प्रसिद्ध पुस्तक *ज्यामिति की आधारशिलाएँ* में ज्यामिति के लिए यह कार्य कर दिया था। बाद के वर्षों में उन्होंने और उनके अनेक छात्रों तथा सहयोगियों ने गणित के अन्य क्षेत्रों में वही करने का प्रयास किया जो हिल्बर्ट ने ज्यामिति के लिए किया था। हिल्बर्ट ने स्वयं अंकगणित और विश्लेषण के लिए अभिगृहीत-तंत्र दिए। ज़र्मेलो ने समुच्चय सिद्धांत का अभिगृहीतीकरण दिया, जिसे फ्रेंकेल, स्कोलेम, फ़ॉन न्यूमान और अन्य लोगों ने विस्तृत किया। 1920 के दशक के मध्य तक "समस्त" गणित के अभिगृहीतीकरण की पदवी के दो दावेदार थे: रसेल और व्हाइटहेड की *प्रिंसिपिया मैथमेटिका*, और वह सिद्धांत जो ज़र्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय सिद्धांत कहलाया।

1921 में हिल्बर्ट ने इन तंत्रों की संगतता सिद्ध करने के लक्ष्य पर एक शोध परियोजना आरंभ की। उनके कई छात्रों ने इसमें सहायता की, विशेषतः बर्नाइस, आकरमान और बाद में गेंट्सेन ने। लक्ष्य पूरा करने का मूल विचार यह था कि गणित में किसी असंगतता की व्युत्पत्ति की संभावना के प्रश्न को चिह्नों के संभावित अनुक्रमों की एक संयोजकीय समस्या में बदला जाए। अर्थात् वाक्यों के ऐसे संभावित अनुक्रमों पर विचार किया जाए जो अंकगणित, विश्लेषण या समुच्चय सिद्धांत के किसी अभिगृहीत-तंत्र के अभिगृहीतों से, मान लें, $\varphi \wedge \neg\varphi$ की सही व्युत्पत्ति होने की कसौटी पूरी करते हों। चिह्नों के ऐसे अनुक्रम की असंभाव्यता का प्रमाण—चूँकि वह स्वयं गणितीय प्रमाण है—इन अभिगृहीतीय तंत्रों में औपचारिक बनाया जा सकता था। दूसरे शब्दों में, कोई वाक्य Con होता जो, मान लें, अंकगणित की संगतता कथित करता। इसके अतिरिक्त यह वाक्य संबंधित तंत्रों में सिद्ध होना चाहिए था, विशेषतः तब जब उसके प्रमाण को केवल बहुत सीमित, "परिमितवादी" साधनों की आवश्यकता हो।

दूसरे लक्ष्य—कि विकसित अभिगृहीत-तंत्र प्रत्येक गणितीय प्रश्न का निपटारा करेंगे—को दो प्रकार से सटीक बनाया जा सकता है। पहले प्रकार में इसे ऐसे सूत्रित कर सकते हैं: गणित के किसी अभिगृहीत-तंत्र की भाषा के प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो φ अथवा $\neg\varphi$ अभिगृहीतों से सिद्ध है। यदि यह सत्य होता, तो ऐसा कोई वाक्य न होता जिसे अभिगृहीतों के आधार पर न सिद्ध किया जा सके, न खंडित; ऐसा कोई प्रश्न न होता जिसका अभिगृहीत निपटारा न करते। इस गुण वाले अभिगृहीत-तंत्र को *पूर्ण* कहते हैं। निस्संदेह, किसी दिए हुए वाक्य के लिए यह निर्धारित करना फिर भी कठिन हो सकता था कि दोनों विकल्पों में कौन-सा लागू होता है। किंतु सिद्धांततः ऐसा करने की कोई विधि होनी चाहिए थी। वास्तव में हिल्बर्ट द्वारा विचारित अभिगृहीत और व्युत्पत्ति तंत्रों के लिए पूर्णता से ऐसी विधि का अस्तित्व फलित होता—यद्यपि हिल्बर्ट को इसका ज्ञान नहीं था। प्रश्न की दूसरी व्याख्या यह अधिक प्रबल अपेक्षा होगी: कोई यांत्रिक, संगणकीय विधि हो जो दिए गए वाक्य φ के लिए निर्धारित करे कि वह अभिगृहीतों से व्युत्पन्न है या नहीं।

1931 में ग्योडेल (Gödel) ने दो "अपूर्णता प्रमेय" सिद्ध किए, जिनसे पता चला कि यह कार्यक्रम सफल नहीं हो सकता। गणित का कोई पूर्ण अभिगृहीत-तंत्र नहीं है; विशेषतः अभिगृहीतों की संगतता व्यक्त करने वाला वाक्य न सिद्ध किया जा सकता है, न खंडित।

इससे हिल्बर्ट के मूल कार्यक्रम को घातक आघात लगा। किंतु, जैसा गणित में प्रायः होता है, इससे शोध के रोमांचक नए मार्ग भी खुले। यदि गणित का कोई एक सर्वग्राही औपचारिक तंत्र नहीं है, तो अधिक परिसीमित तंत्र विकसित करना और यह जाँचना उचित है कि उनमें क्या सिद्ध किया जा सकता है। उन तंत्रों की संगतता स्थापित करने के लिए कम प्रतिबंधित प्रमाण-विधियाँ विकसित करना और उनकी संगतता सिद्ध करने की कठिनाई मापने के उपाय खोजना भी सार्थक है। चूँकि ग्योडेल (Gödel) ने दिखाया कि (लगभग) प्रत्येक औपचारिक तंत्र में ऐसे प्रश्न हैं जिनका वह निपटारा नहीं कर सकता, इसलिए किसी दिए हुए औपचारिक तंत्र के लिए ऐसे "रोचक" प्रश्न खोजना और यह निर्धारित करना सार्थक है कि उन्हें निपटाने के लिए तंत्र कितना प्रबल होना चाहिए। आज तक तर्कशास्त्री एक नए गणितीय अनुशासन—प्रमाण सिद्धांत—में इन्हीं प्रश्नों का अनुसरण कर रहे हैं।

33.2 परिभाषाएँ

गणित को औपचारिक बनाने और यह दिखाने की हिल्बर्ट की परियोजना पूरी करने के लिए कि ऐसा औपचारिकीकरण संगत और पूर्ण है, पहला कार्य किसी भाषा, तार्किक ढाँचे और अभिगृहीत-तंत्र का चयन करना होगा। अपने प्रयोजनों के लिए मान लें कि गणित को किसी प्रथम-कोटि भाषा में औपचारिक बनाया जा सकता है; अर्थात् अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न के कुछ ऐसे समुच्चय हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के संयोजकों और परिमाणकों के साथ मिलकर हमें गणित

के कथन व्यक्त करने देते हैं। अधिकांश लोग सहमत हैं कि ऐसी भाषा विद्यमान है: समुच्चय सिद्धांत की भाषा, जिसमें $\in$ एकमात्र अतार्किक चिह्न है। पहली दृष्टि में यह दावा बहुत अविश्वसनीय लगता है कि इतनी सरल भाषा इतनी अभिव्यंजक है; और यह स्थापित करने में बहुत कार्य लगा कि लगभग संपूर्ण गणित को इस अत्यंत मित शब्दावली में व्यक्त किया जा सकता है। बात सरल रखने के लिए अभी अपनी चर्चा को अंकगणित, अर्थात् गणित के उस भाग तक सीमित करें जो केवल प्राकृतिक संख्याओं $\mathbb{N}$ से संबंधित है। अंकगणित के तथ्यों को व्यक्त करने की स्वाभाविक भाषा $\mathcal{L}_A$ है। $\mathcal{L}_A$ में एक द्विस्थानी विधेय-चिह्न $<$, एक अचर o, एक एकस्थानी फलन-चिह्न $\prime$, और दो द्विस्थानी फलन-चिह्न $+$ तथा $\times$ हैं।

परिभाषा 33.1. वाक्य का समुच्चय Γ एक *सिद्धांत* है यदि वह तार्किक फलन के अंतर्गत संवृत है; अर्थात् यदि $\Gamma = \{\varphi : \Gamma \vDash \varphi\}$।

सिद्धांतों को निर्दिष्ट करने की दो सरल विधियाँ हैं। पहली है किसी संरचना में सत्य वाक्य के समुच्चय के रूप में। उदाहरण के लिए, $\mathcal{L}_A$ के उस संरचना पर विचार करें जिसमें प्रांत $\mathbb{N}$ है और सभी अतार्किक चिह्नों की व्याख्या अपेक्षित ढंग से की गई है।

परिभाषा 33.2. *अंकगणित का मानक प्रतिरूप* निम्न प्रकार परिभाषित संरचना $\mathfrak{N}$ है:

1. $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$
2. $\mathsf{o}^{\mathfrak{N}} = 0$
3. $\prime^{\mathfrak{N}}(n) = n + 1$, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए
4. $+^{\mathfrak{N}}(n, m) = n + m$, प्रत्येक $n, m \in \mathbb{N}$ के लिए
5. $\times^{\mathfrak{N}}(n, m) = n \cdot m$, प्रत्येक $n, m \in \mathbb{N}$ के लिए
6. $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m\rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

'$\times$' और '$\cdot$' के बीच अंतर पर ध्यान दें: $\times$ अंकगणित की भाषा का एक चिह्न है। निस्संदेह, हमने इसे इसलिए चुना है कि यह हमें गुणन की याद दिलाए; किंतु $\times$ गुणन संक्रिया नहीं, बल्कि एक द्विस्थानी फलन-चिह्न (औपचारिक रूप से f_1^2) है। इसके विपरीत, $\cdot$ साधारण गुणन फलन है। $n \cdot m$ जैसी अभिव्यक्ति में हमारा आशय संख्याओं n और m के गुणनफल से है; $x \times y$ जैसी अभिव्यक्ति में हम अंकगणित की भाषा के एक पद की बात कर रहे होते हैं। मानक प्रतिरूप में फलन-चिह्न $\times$ की व्याख्या प्राकृतिक संख्याओं पर फलन $\cdot$ के रूप में होती है। योग के लिए हम $+$ का उपयोग अंकगणित की भाषा के फलन-चिह्न और प्राकृतिक संख्याओं पर योग-फलन, दोनों के रूप में करते हैं। यहाँ आशय संदर्भ से निर्धारित करना होता है।

परिभाषा 33.3. *सत्य अंकगणित* का सिद्धांत अंकगणित के मानक प्रतिरूप में संतुष्ट वाक्य का समुच्चय है; अर्थात्

$$\mathbf{TA} = \{\varphi : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}.$$

TA एक सिद्धांत है, क्योंकि जब भी $\mathbf{TA} \vDash \varphi$ होता है, तब φ प्रत्येक ऐसे संरचना में संतुष्ट होता है जो **TA** को संतुष्ट करता है। चूँकि $\mathfrak{N} \vDash \mathbf{TA}$, अतः $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ और इसलिए $\varphi \in \mathbf{TA}$।

सिद्धांत Γ को निर्दिष्ट करने की दूसरी विधि उसे उन वाक्य का समुच्चय मानना है जो वाक्यों के किसी समुच्चय Γ_0 से तार्किक रूप से फलित होते हैं। तब Γ, तार्किक फलन के अंतर्गत Γ_0 का "संवरण" है। इस प्रकार किसी सिद्धांत को निर्दिष्ट करना तभी रोचक है जब Γ_0 को स्पष्ट रूप से दिया गया हो; उदाहरणतः Γ_0 के अवयव सूचीबद्ध हों। कम-से-कम Γ_0 निर्णेय होना चाहिए; अर्थात् यह जाँचने के लिए कोई संगणनीय परीक्षण होना चाहिए कि कोई वाक्य, Γ_0 का अवयव है या नहीं। हम Γ_0 के वाक्य को Γ के *अभिगृहीत* कहते हैं, और कहते हैं कि Γ, Γ_0 द्वारा *अभिगृहीतीकृत* है।

परिभाषा 33.4. सिद्धांत Γ, Γ_0 द्वारा *अभिगृहीतीकृत* है, यदि और केवल यदि

$$\Gamma = \{\varphi : \Gamma_0 \vDash \varphi\}$$

परिभाषा 33.5. निम्न वाक्यों द्वारा अभिगृहीतीकृत सिद्धांत **Q** "रॉबिन्सन का **Q**" कहलाता है और अंकगणित का एक बहुत सरल सिद्धांत है।

$$\forall x\, \forall y\, (x' = y' \to x = y) \tag{Q_1}$$
$$\forall x\, \mathsf{o} \neq x' \tag{Q_2}$$
$$\forall x\, (x = \mathsf{o} \vee \exists y\, x = y') \tag{Q_3}$$
$$\forall x\, (x + \mathsf{o}) = x \tag{Q_4}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x + y') = (x + y)' \tag{Q_5}$$
$$\forall x\, (x \times \mathsf{o}) = \mathsf{o} \tag{Q_6}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \times y') = ((x \times y) + x) \tag{Q_7}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x < y \leftrightarrow \exists z\, (z' + x) = y) \tag{Q_8}$$

वाक्य का समुच्चय $\{Q_1, \ldots, Q_8\}$, **Q** के अभिगृहीत हैं; अतः **Q** उन सभी वाक्य से बना है जो उनसे तार्किक रूप से फलित होते हैं:

$$\mathbf{Q} = \{\varphi : \{Q_1, \ldots, Q_8\} \vDash \varphi\}.$$

परिभाषा 33.6. मान लें कि $\varphi(x)$, $\mathcal{L}_A$ में मुक्त चरों x और y_1, ..., y_n वाला सूत्र है। तब निम्न रूप का कोई भी वाक्य

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n\, ((\varphi(\mathsf{o}) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x\, \varphi(x))$$

आगमन-योजना का एक उदाहरण है।

पियानो अंकगणित **PA** वह सिद्धांत है जो **Q** के अभिगृहीतों और आगमन-योजना के सभी उदाहरणों द्वारा अभिगृहीतीकृत है।

आगमन-योजना का प्रत्येक उदाहरण $\mathfrak{N}$ में सत्य है। इसे देखना तब सबसे सरल है जब सूत्र φ में केवल एक मुक्त चर x हो। तब $\varphi(x)$, $\mathfrak{N}$ में $\mathbb{N}$ का उपसमुच्चय X_φ परिभाषित करता है। X_φ उन सभी $n \in \mathbb{N}$ का समुच्चय है जिनके लिए $s(x) = n$ होने पर $\mathfrak{N}, s \vDash \varphi(x)$। आगमन-योजना का संबंधित उदाहरण है

$$((\varphi(\mathsf{o}) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x\, \varphi(x)).$$

यदि इसका पूर्वपक्ष $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो $0 \in X_\varphi$ और जब भी $n \in X_\varphi$, तब $n + 1$ भी उसमें है। चूँकि $0 \in X_\varphi$, हमें $1 \in X_\varphi$ मिलता है। $1 \in X_\varphi$ से $2 \in X_\varphi$ मिलता है, और यही क्रम चलता रहता है। अतः प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $n \in X_\varphi$। इसका अर्थ है कि $\forall x\, \varphi(x)$, $\mathfrak{N}$ में संतुष्ट है।

दोनों **Q** और **PA** अभिगृहीतीकृत सिद्धांत हैं। बड़ा प्रश्न है कि वे कितने प्रबल हैं। उदाहरणतः, क्या **PA**, $\mathbb{N}$ के विषय में वे सभी सत्य सिद्ध कर सकता है जिन्हें $\mathcal{L}_A$ में व्यक्त किया जा सकता है? विशेषतः, क्या **PA** के अभिगृहीत उन सभी प्रश्नों का निपटारा करते हैं जिन्हें $\mathcal{L}_A$ में सूत्रित किया जा सकता है?

इसे पूछने का दूसरा ढंग है: क्या **PA** = **TA**? स्पष्टतः **TA**, $\mathbb{N}$ के विषय में सभी सत्यों को सिद्ध करता है (अर्थात् उन्हें समाहित करता है), और वह $\mathcal{L}_A$ में सूत्रित किए जा सकने वाले सभी प्रश्नों का निपटारा करता है; क्योंकि यदि φ, $\mathcal{L}_A$ में वाक्य है, तो या तो $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ अथवा $\mathfrak{N} \vDash \neg\varphi$, और इसलिए या तो **TA** $\vDash \varphi$ अथवा **TA** $\vDash \neg\varphi$। ऐसे सिद्धांत को *पूर्ण* कहें।

परिभाषा 33.7. सिद्धांत Γ, *पूर्ण* है यदि और केवल यदि उसकी भाषा के प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो $\Gamma \vDash \varphi$ अथवा $\Gamma \vDash \neg\varphi$।

पूर्णता प्रमेय के अनुसार, $\Gamma \vDash \varphi$ यदि और केवल यदि $\Gamma \vdash \varphi$; अतः Γ पूर्ण है यदि और केवल यदि उसकी भाषा के प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो $\Gamma \vdash \varphi$ अथवा $\Gamma \vdash \neg\varphi$।

इससे एक और प्रश्न उठता है: क्या कोई ऐसी संगणकीय प्रक्रिया है जिससे हम जाँच सकें कि कोई वाक्य, **TA** में, **PA** में, अथवा केवल **Q** में ही है या नहीं? कोई समुच्चय (उदाहरणतः वाक्य का समुच्चय) कब निर्णेय है, इसे परिभाषित करके हम प्रश्न को अधिक सटीक बना सकते हैं।

परिभाषा 33.8. समुच्चय X, *निर्णेय* है यदि और केवल यदि कोई ऐसी संगणकीय प्रक्रिया है जो आगत x पर, $x \in X$ होने पर 1 और अन्यथा 0 लौटाती है।

अतः हमारा प्रश्न बनता है: क्या **TA (PA, Q)** निर्णेय है?

इन सभी प्रश्नों का उत्तर होगा: नहीं। इनमें से कोई सिद्धांत निर्णेय नहीं है। किंतु यह परिघटना केवल इन्हीं विशिष्ट सिद्धांतों तक सीमित नहीं। वास्तव में कुछ शर्तें पूरी करने वाला *कोई भी* सिद्धांत इन्हीं परिणामों के अधीन है। इनमें एक शर्त, जिसे **Q** और **PA** पूरा करते हैं, यह है कि वे अभिगृहीतों के निर्णेय समुच्चय द्वारा अभिगृहीतीकृत हैं।

परिभाषा 33.9. कोई सिद्धांत *अभिगृहीतीकरणीय* है यदि वह अभिगृहीतों के निर्णेय समुच्चय द्वारा अभिगृहीतीकृत है।

उदाहरण 33.10. वाक्य के किसी परिमित समुच्चय द्वारा अभिगृहीतीकृत प्रत्येक सिद्धांत अभिगृहीतीकरणीय है, क्योंकि प्रत्येक परिमित समुच्चय निर्णेय होता है। इसलिए, उदाहरणतः, **Q** अभिगृहीतीकरणीय है।

PA जैसे योजनाबद्ध रूप से अभिगृहीतीकृत सिद्धांत भी अभिगृहीतीकरणीय हैं। यह जाँचने के लिए कि ψ, **PA** के अभिगृहीतों में है या नहीं—अर्थात् उस फलन χ_X की गणना करने के लिए जिसमें यदि ψ, **PA** का अभिगृहीत है तो $\chi_X(\psi) = 1$ और अन्यथा $= 0$—हम यह कर सकते हैं। पहले जाँचें कि ψ, **Q** के अभिगृहीतों में से एक है या नहीं। यदि है, तो उत्तर "हाँ" और $\chi_X(\psi) = 1$ है। यदि नहीं, तो जाँचें कि वह आगमन-योजना का उदाहरण है या नहीं। यह व्यवस्थित ढंग से किया जा सकता है; इस स्थिति में शायद निम्न विधि से इसे देखना सबसे सरल है। आगमन-योजना का प्रत्येक उदाहरण अनेक सार्वत्रिक परिमाणकों से आरंभ होता है, और उसके बाद एक उप-सूत्र आता है जो एक प्रतिबंधात्मक है। उस प्रतिबंधात्मक का उत्तरपक्ष $\forall x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ है, जहाँ x और y_1, ..., y_n, φ के सभी मुक्त चर हैं, और ψ के आरंभिक परिमाणक चरों y_1, ..., y_n को आबद्ध करते हैं। इस φ को निकालने और यह जाँचने के बाद कि उसके मुक्त चर आरंभ के सार्वत्रिक परिमाणकों तथा $\forall x$ से आबद्ध चरों से मेल खाते हैं, हम जाँचते हैं कि प्रतिबंधात्मक का पूर्वपक्ष निम्न से मेल खाता है:

$$\varphi(\mathsf{o}, y_1, \ldots, y_n) \wedge \forall x\, (\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \varphi(x', y_1, \ldots, y_n))$$

यदि मेल खाता है, तो ψ आगमन-योजना का उदाहरण है; और यदि नहीं, तो ψ नहीं है।

इस प्रश्न का—और कौन-से सिद्धांत पूर्ण या निर्णेय हैं, इस अधिक सामान्य प्रश्न का—उत्तर देते समय निम्न परिभाषा पर भी विचार करना उपयोगी होगा। स्मरण करें कि समुच्चय X, गणनीय है यदि और केवल यदि वह रिक्त है अथवा कोई आच्छादक फलन $f\colon \mathbb{N} \to X$ है। ऐसे फलन को X का परिगणन कहते हैं।

परिभाषा 33.11. समुच्चय X को *संगणनीयतः परिगणनीय* (संक्षेप में संगणनीयतः परिगणनीय) कहते हैं यदि और केवल यदि वह रिक्त है अथवा उसका कोई संगणनीय परिगणन है।

अभिगृहीतीकरणीयता के अतिरिक्त, जिन सिद्धांतों पर अपूर्णता प्रमेय लागू होते हैं उनके लिए एक और शर्त यह होगी कि वे संगणनीय फलनों और निर्णेय संबंधों के मूल तथ्यों को सिद्ध करने के लिए पर्याप्त प्रबल हों। "मूल तथ्यों" से हमारा आशय उन वाक्य से है जो प्रत्येक तर्क के लिए संगणनीय फलनों के मान व्यक्त करते हैं। "पर्याप्त प्रबल" से आशय है कि संबंधित सिद्धांत इन वाक्यों को अपने प्रमेयों में गिनते हैं। उदाहरण के लिए, एक आदर्श संगणनीय फलन—योग—पर विचार करें। तर्कों 2 और 3 के लिए $+$ का मान 5 है, अर्थात् $2 + 3 = 5$। अंकगणित की भाषा में यह व्यक्त करने वाला वाक्य कि तर्कों 2 और 3 के लिए $+$ का मान 5 है, यह है: $(\overline{2} + \overline{3}) = \overline{5}$। उदाहरणतः, **Q** इस वाक्य को सिद्ध करता है। अधिक सामान्यतः, हम चाहेंगे कि प्रत्येक संगणनीय फलन $f(x_1, x_2)$ के लिए $\mathcal{L}_A$ में कोई सूत्र $\varphi_f(x_1, x_2, y)$ ऐसा हो कि जब भी $f(n_1, n_2) = m$, तब **Q** $\vdash \varphi_f(\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{m})$। इस प्रकार **Q** सिद्ध करता है कि तर्कों n_1, n_2 के लिए f का मान m है। वास्तव में हम उससे थोड़ा अधिक सिद्ध करने की अपेक्षा करते हैं: तर्कों n_1, n_2 के लिए कोई अन्य संख्या f का मान नहीं है। निर्णेय संबंधों के लिए भी यही बात लागू होती है। इसे अगली दो परिभाषाएँ सटीक बनाती हैं।

परिभाषा 33.12. सूत्र $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$, Γ में फलन $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ को *निरूपित करता है* करता है यदि और केवल यदि जब भी $f(n_1, \ldots, n_k) = m$, तब

1. $\Gamma \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$, और

2. $\Gamma \vdash \forall y(\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y) \to y = \overline{m})$.

परिभाषा 33.13. सूत्र $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ संबंध $R \subseteq \mathbb{N}^k$ को *निरूपित करता है* करता है यदि और केवल यदि

1. जब भी $R(n_1, \ldots, n_k)$ हो, $\Gamma \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$, और

2. जब $R(n_1, \ldots, n_k)$ नहीं होता, तब $\Gamma \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$।

अपूर्णता प्रमेय लागू होने के लिए कोई सिद्धांत तब "पर्याप्त प्रबल" है जब वह सभी संगणनीय फलनों और सभी निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करता है। Q और उसके विस्तार यह शर्त पूरी करते हैं, किंतु इसे स्थापित करने में हमें कुछ समय लगेगा। यह इस विषय का अतुच्छ तथ्य है कि Q किस प्रकार की बातें सिद्ध कर सकता है; और इसे दिखाना कठिन है, क्योंकि Q में केवल कुछ ही अभिगृहीत हैं जिनसे हमें ये सभी तथ्य सिद्ध करने होंगे। फिर भी Q एक बहुत दुर्बल सिद्धांत है। अतः यद्यपि यह सिद्ध करना कठिन है कि Q सभी संगणनीय फलनों को निरूपित करता है, अधिकांश रोचक सिद्धांत Q से अधिक प्रबल हैं, अर्थात् वे Q से अधिक सिद्ध करते हैं। और यदि Q कोई बात सिद्ध करता है, तो प्रत्येक अधिक प्रबल सिद्धांत भी उसे सिद्ध करता है; चूँकि Q सभी संगणनीय फलनों को निरूपित करता है, अतः प्रत्येक अधिक प्रबल सिद्धांत भी ऐसा करता है। इसका अर्थ है कि बहुत-से रोचक सिद्धांत अपूर्णता प्रमेयों की यह शर्त पूरी करते हैं। इसलिए हमारा कठिन कार्य सार्थक होगा, क्योंकि वह दिखाता है कि अपूर्णता प्रमेय सिद्धांतों के एक व्यापक वर्ग पर लागू होते हैं। निश्चित ही "समस्त गणित" को औपचारिक बनाने का लक्ष्य रखने वाले किसी भी सिद्धांत को वह सब सिद्ध करना चाहिए जो Q सिद्ध करता है, क्योंकि कम-से-कम उसे प्रारंभिक परिकलनों के परिणाम ग्रहण करने योग्य होना चाहिए। अतः "समस्त गणित" के सिद्धांत का प्रत्येक प्रत्याशी ऐसा सिद्धांत होगा जिस पर अपूर्णता प्रमेय लागू होते हैं।

33.3 अपूर्णता परिणामों का अवलोकन

हिल्बर्ट को आशा थी कि गणित को किसी ऐसे अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत में औपचारिक बनाया जा सकता है जिसे पूर्ण और निर्णेय सिद्ध करना संभव होगा। इसके अतिरिक्त, उनका लक्ष्य बहुत दुर्बल, "परिमितवादी" साधनों से इस सिद्धांत की संगतता सिद्ध करना था, जिससे अंतःप्रज्ञावाद की चुनौतियों के विरुद्ध चिरसम्मत गणित की रक्षा हो सके। ग्योडेल (Gödel) के अपूर्णता प्रमेयों ने दिखाया कि ये लक्ष्य प्राप्त नहीं किए जा सकते।

ग्योडेल (Gödel) के प्रथम अपूर्णता प्रमेय ने दिखाया कि रसेल और व्हाइटहेड की *प्रिंसिपिया मैथमेटिका* का एक रूप पूर्ण नहीं है। किंतु प्रमाण वास्तव में अत्यंत सामान्य था और अनेक प्रकार के सिद्धांतों पर लागू होता है। इसका अर्थ है कि केवल *प्रिंसिपिया मैथमेटिका* ही गणित को पूर्णतः ग्रहण करने में विफल नहीं हुई, बल्कि *कोई भी* स्वीकार्य सिद्धांत ऐसा नहीं कर सकता। उन सिद्धांतगत विशेषताओं को अलग करने में कुछ समय लगा जो अपूर्णता प्रमेयों के लागू होने के लिए पर्याप्त हैं, और ग्योडेल (Gödel) के प्रमाण को इस प्रकार सामान्य बनाने में भी कि वह केवल इन्हीं विशेषताओं पर निर्भर रहे। किंतु अब हम अंकगणित की भाषा $\mathcal{L}_A$ के सिद्धांतों के लिए प्रथम अपूर्णता प्रमेय का अत्यंत सामान्य रूप कह सकते हैं।

प्रमेय 33.14. *यदि Γ, $\mathcal{L}_A$ में ऐसा संगत और अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत है जो सभी संगणनीय फलनों और निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करता है, तो Γ पूर्ण नहीं है।*

Γ के पूर्ण न होने का अर्थ है कि कम-से-कम एक वाक्य φ के लिए $\Gamma \nvdash \varphi$ और $\Gamma \nvdash \neg\varphi$। ऐसे वाक्य को ($\Gamma$) से *स्वतंत्र* कहते हैं। वास्तव में हम अपेक्षाकृत शीघ्र सिद्ध कर सकते हैं कि स्वतंत्र वाक्य अवश्य होते हैं। किंतु प्रमेय के ग्योडेल (Gödel) वाले प्रमाण की शक्ति इस तथ्य में है कि वह ऐसे स्वतंत्र वाक्य का एक *विशिष्ट उदाहरण* प्रस्तुत करता है। यह रोचक रचना वाक्य γ_Γ उत्पन्न करती है, जिसे Γ का *ग्योडेल (Gödel) वाक्य* कहते हैं। वह असिद्धनीय है क्योंकि Γ में γ_Γ इस दावे के तुल्य है कि Γ में γ_Γ असिद्धनीय है। रचना यह काम *रचनात्मक रूप से* करती है; अर्थात् Γ का अभिगृहीतीकरण और व्युत्पत्ति तंत्र का वर्णन दिए जाने पर प्रमाण वास्तव में γ_Γ लिखने की एक विधि देता है।

ग्योडेल (Gödel) के प्रमाण की रचना के लिए हमें $\mathcal{L}_A$ में स्वयं $\mathcal{L}_A$ के पदों और सूत्र के गुण तथा उन पर संक्रियाएँ व्यक्त करने का कोई उपाय खोजना होगा। इनमें "φ एक वाक्य है", "δ, φ की व्युत्पत्ति है" जैसे गुण और $\varphi[t/x]$

जैसी संक्रियाएँ सम्मिलित हैं। इस उपाय को (क) चिह्नों और उनके अनुक्रमों (जिनसे पद, सूत्र, व्युत्पत्ति आदि बनते हैं) के प्राकृतिक संख्याओं के रूप में "कूटलेखन" के माध्यम से इन गुणों और संबंधों को व्यक्त करना होगा (क्योंकि $\mathcal{L}_A$ प्राकृतिक संख्याओं की ही चर्चा कर सकती है)। उसे (ख) यह ऐसे ढंग से करना होगा कि Γ संबंधित तथ्यों को सिद्ध करे; इसलिए हमें दिखाना होगा कि इन गुणों का कूटलेखन प्राकृतिक संख्याओं के निर्णेय गुणों से होता है और संक्रियाएँ प्राकृतिक संख्याओं पर संगणनीय फलनों के अनुरूप हैं। इसे "वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण" कहते हैं।

किंतु वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण कैसे हो सकता है, इसकी जाँच से पहले हम इस शर्त पर विचार करेंगे कि Γ "पर्याप्त प्रबल" है, अर्थात् सभी संगणनीय फलनों और निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करता है। इसके लिए हमें "संगणनीय" की सटीक परिभाषा देनी होगी। यह कई प्रकार से किया जा सकता है; उदाहरणतः ट्यूरिंग मशीनों के प्रतिरूप द्वारा, अथवा किसी सामान्य-प्रयोजन क्रमादेश भाषा के क्रमादेशों से संगणनीय फलनों के रूप में। किंतु हमारा लक्ष्य इन फलनों और संबंधों को भाषा $\mathcal{L}_A$ के किसी सिद्धांत में निरूपित करता है करना है, इसलिए केवल संख्यात्मक फलनों की संगणनीयता की कोई सरल परिभाषा चुनना उत्तम है। यह *पुनरावर्ती फलन* की धारणा है। अतः हम पहले पुनरावर्ती फलनों की चर्चा करेंगे। फिर दिखाएँगे कि **Q** पहले से ही सभी पुनरावर्ती फलनों और संबंधों को निरूपित करता है करता है। इससे हम अपूर्णता प्रमेय को **Q** और **PA** जैसे विशिष्ट सिद्धांतों पर लागू कर सकेंगे, क्योंकि हम स्थापित कर चुके होंगे कि ये "पर्याप्त प्रबल" सिद्धांतों के उदाहरण हैं।

वाक्यविन्यास के अंकगणितीकरण का अंतिम परिणाम सूत्र $\mathrm{Prov}_\Gamma(x)$ है, जो सूत्र को संख्याओं के रूप में कूटित करके Γ के अभिगृहीतों से सिद्धनीयता व्यक्त करता है। विशेषतः, यदि φ को संख्या n से कूटित किया गया है और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \mathrm{Prov}_\Gamma(\overline{n})$। Γ के लिए यह "सिद्धनीयता विधेय" हमें एक निश्चित अर्थ में Γ की संगतता को भी $\mathcal{L}_A$ के वाक्य के रूप में व्यक्त करने देता है: Γ का "संगतता कथन" वह वाक्य $\neg\mathrm{Prov}_\Gamma(\overline{n})$ हो, जहाँ हम n को किसी विरोधाभास, उदाहरणतः $\perp$, का कूट लेते हैं। द्वितीय अपूर्णता प्रमेय कहता है कि संगत अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत अपने ही संगतता कथनों को भी सिद्ध नहीं करते। इस प्रमेय के लागू होने के लिए आवश्यक शर्तें केवल यह कहने से कुछ अधिक कठोर हैं कि सिद्धांत सभी संगणनीय फलनों और निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है; किंतु हम दिखाएँगे कि **PA** उन्हें पूरा करता है।

33.4 अनिर्णेयता और अपूर्णता

ग्योडेल (Gödel) के अपूर्णता प्रमेयों के प्रमाण में वाक्यविन्यास के अंकगणितीकरण की आवश्यकता होती है। किंतु उसके बिना भी हम केवल इस मान्यता से कुछ सुंदर परिणाम प्राप्त कर सकते हैं कि कोई सिद्धांत सभी निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करता है। इसका प्रमाण विराम समस्या की अनिर्णेयता के प्रमाण जैसा एक विकर्ण तर्क है।

प्रमेय 33.15. *यदि Γ ऐसा संगत सिद्धांत है जो प्रत्येक निर्णेय संबंध को निरूपित करता है करता है, तो Γ निर्णेय नहीं है।*

प्रमाण. मान लें कि Γ निर्णेय है। हम दिखाते हैं कि यदि Γ प्रत्येक निर्णेय संबंध को निरूपित करता है करता है, तो वह असंगत होना चाहिए।

निर्णेय गुणों (एकस्थानी संबंधों) का निरूपण एक मुक्त चर वाले सूत्र से होता है। मान लें कि $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., ऐसे सभी सूत्र का संगणनीय परिगणन है। अब निम्न समुच्चय $D \subseteq \mathbb{N}$ पर विचार करें:

$$D = \{n : \Gamma \vdash \neg\varphi_n(\overline{n})\}$$

समुच्चय D निर्णेय है, क्योंकि $n \in D$ है या नहीं, इसे जाँचने के लिए हम पहले $\varphi_n(x)$ और उससे $\neg\varphi_n(\overline{n})$ की गणना कर सकते हैं। स्पष्टतः $\varphi_n(x)$ में x की प्रत्येक मुक्त उपस्थिति के स्थान पर पद $\overline{n}$ रखना और $\varphi(\overline{n})$ के आगे $\neg$ लगाना यांत्रिक कार्य है। मान्यता के अनुसार Γ निर्णेय है, अतः हम जाँच सकते हैं कि $\neg\varphi(\overline{n}) \in \Gamma$ है या नहीं। यदि है, तो $n \in D$; यदि नहीं, तो $n \notin D$। इसलिए D भी निर्णेय है।

चूँकि Γ सभी निर्णेय गुणों को निरूपित करता है करता है, वह D को भी निरूपित करता है करता है। और Γ में D को निरूपित करता है करने वाले सूत्र, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., में सम्मिलित हैं। अतः कोई संख्या d ऐसी मानें कि $\varphi_d(x)$, Γ में D को निरूपित करता है करता है। यदि $d \notin D$, तो चूँकि $\varphi_d(x)$, D को निरूपित करता है करता है, $\Gamma \vdash \neg\varphi_d(\overline{d})$।

किंतु इसका अर्थ है कि d, D की परिभाषक शर्त पूरी करता है, और इसलिए $d \in D$। यह $d \notin D$ का विरोधाभास है। अतः परोक्ष प्रमाण से $d \in D$।

चूँकि $d \in D$, D की परिभाषा के अनुसार $\Gamma \vdash \neg\varphi_d(\overline{d})$। दूसरी ओर, चूँकि $\varphi_d(x)$, Γ में D को निरूपित करता है करता है, $\Gamma \vdash \varphi_d(\overline{d})$। अतः Γ असंगत है। □

पिछला प्रमेय दिखाता है कि सभी निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करने वाला कोई संगत सिद्धांत निर्णेय नहीं हो सकता। हम दिखाएँगे कि **Q** सभी निर्णेय संबंधों को निरूपित करता है करता है; इसका अर्थ है कि **Q** को समाहित करने वाले सभी सिद्धांत, जैसे **PA** और **TA**, भी ऐसा करते हैं और इसलिए वे भी निर्णेय नहीं हैं। (चूँकि ये सभी सिद्धांत मानक प्रतिरूप में सत्य हैं, वे सभी संगत हैं।)

इस परिणाम से हम प्रथम अपूर्णता प्रमेय का एक दुर्बल रूप भी प्राप्त कर सकते हैं। प्रत्येक अभिगृहीतीकरणीय और पूर्ण सिद्धांत निर्णेय है। अतः ऐसे संगत सिद्धांत जो अभिगृहीतीकरणीय हैं और सभी निर्णेय गुणों को निरूपित करता है करते हैं, पूर्ण नहीं हो सकते।

प्रमेय 33.16. *यदि Γ अभिगृहीतीकरणीय और पूर्ण है, तो वह निर्णेय है।*

प्रमाण. प्रत्येक असंगत सिद्धांत निर्णेय है, क्योंकि असंगत सिद्धांत सभी वाक्य समाहित करते हैं; इसलिए "क्या $\varphi \in \Gamma$ है?" प्रश्न का उत्तर सदा "हाँ" होता है, अर्थात् उसका निर्णय किया जा सकता है।

अब मान लें कि Γ संगत है और साथ ही अभिगृहीतीकरणीय तथा पूर्ण है। चूँकि Γ अभिगृहीतीकरणीय है, वह संगणनीयतः परिगणनीय है। वास्तव में हम किसी संगणनीय फलन से Γ के अभिगृहीतों की सभी सही व्युत्पत्ति का परिगणन कर सकते हैं। किसी सही व्युत्पत्ति से हम उसके द्वारा व्युत्पन्न किया गया वाक्य गणित कर सकते हैं; अतः दोनों को मिलाकर ऐसा संगणनीय फलन मिलता है जो Γ के सभी प्रमेयों का परिगणन करता है। चूँकि Γ संगत और पूर्ण है, कोई वाक्य, Γ का प्रमेय है यदि और केवल यदि $\neg\varphi$ प्रमेय नहीं है। अतः हम निम्न प्रकार तय कर सकते हैं कि $\varphi \in \Gamma$ है या नहीं। Γ के सभी प्रमेयों का परिगणन करें। जब इस सूची में φ आए, तब हमें ज्ञात होगा कि $\Gamma \vdash \varphi$। जब सूची में $\neg\varphi$ आए, तब हमें ज्ञात होगा कि $\Gamma \nvdash \varphi$। चूँकि Γ पूर्ण है, इनमें से एक स्थिति अंततः अवश्य आएगी, इसलिए प्रक्रिया अंततः उत्तर देगी। □

उपप्रमेय 33.17. *यदि Γ संगत और अभिगृहीतीकरणीय है तथा प्रत्येक निर्णेय गुण को निरूपित करता है करता है, तो वह पूर्ण नहीं है।*

प्रमाण. यदि Γ पूर्ण होता, तो पिछले प्रमेय के अनुसार वह निर्णेय होता (क्योंकि वह अभिगृहीतीकरणीय और संगत है)। किंतु चूँकि Γ प्रत्येक निर्णेय गुण को निरूपित करता है करता है, पहले प्रमेय के अनुसार वह निर्णेय नहीं है। □

जब हम स्थापित कर लें कि, उदाहरणतः, **Q** सभी निर्णेय गुणों को निरूपित करता है करता है, तब उपप्रमेय बताता है कि **Q** अपूर्ण होना चाहिए। किंतु इसका प्रमाण किसी स्वतंत्र वाक्य का उदाहरण नहीं देता; वह केवल दिखाता है कि ऐसा वाक्य अवश्य विद्यमान है। उदाहरण पाने के लिए हमें वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण करके ग्योडेल (Gödel) के मूल प्रमाण-विचार का अनुसरण करना होगा। और निस्संदेह, हमें अब भी पहला दावा सिद्ध करना है कि वास्तव में **Q** सभी निर्णेय गुणों को निरूपित करता है करता है।

ध्यान रहे कि प्रत्येक *रोचक* सिद्धांत अपूर्ण या अनिर्णेय नहीं होता। ऐसे अनेक सिद्धांत हैं जो रोचक गणितीय तथ्यों का वर्णन करने के लिए पर्याप्त प्रबल हैं, पर ग्योडेल (Gödel) के परिणाम की शर्तें पूरी नहीं करते। उदाहरणतः, $\mathbf{Pres} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{A^+} : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$, अर्थात् मानक प्रतिरूप में सत्य, $\times$ रहित अंकगणितीय भाषा के वाक्य का समुच्चय, पूर्ण और निर्णेय दोनों है। यह सिद्धांत प्रेस्बर्गर अंकगणित कहलाता है और प्राकृतिक संख्याओं के वे सभी सत्य सिद्ध करता है जिन्हें केवल 0, $\prime$ और $+$ से सूत्रित किया जा सकता है।

प्रश्न

प्रश्न 33.1. दिखाएँ कि $\mathbf{TA} = \{\varphi : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$ अभिगृहीतीकरणीय नहीं है। आप मान सकते हैं कि **TA** सभी निर्णेय गुणों को निरूपित करता है।

अध्याय 34

वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण

ध्यान दें कि चिह्नित सत्य-वृक्षों का अंकगणितीकरण अभी उपलब्ध नहीं है।

34.1 परिचय

संगणनीयता और तर्कशास्त्र को जोड़ने के लिए हमें तार्किक वस्तुओं (चिह्नों, पदों, सूत्र और व्युत्पत्ति), उन पर संक्रियाओं तथा उनके गुणों और संबंधों की चर्चा ऐसे ढंग से करने का उपाय चाहिए जो संगणकीय उपचार के अनुकूल हो। हम चिह्नों, चिह्न-अनुक्रमों और उनसे बनी अन्य वस्तुओं पर संगणनीय फलनों और संबंधों पर सीधे विचार करके ऐसा कर सकते हैं। तार्किक वाक्यविन्यास की सभी वस्तुएँ परिमित हैं और चिह्नों के गणनीय समुच्चयों से बनी हैं, इसलिए संगणना के कुछ प्रतिरूपों में यह संभव है। किंतु संगणना के अन्य प्रतिरूप—जैसे पुनरावर्ती फलन—संख्याओं तथा उनके संबंधों और फलनों तक सीमित हैं। इसके अतिरिक्त, अंततः हम कुछ सिद्धांतों के भीतर, विशेषतः अंकगणित की भाषा में सूत्रित सिद्धांतों में, वाक्यविन्यास को संभालना चाहते हैं। इन स्थितियों में वाक्यविन्यास का *अंकगणितीकरण* आवश्यक है; अर्थात् वाक्यविन्यासी वस्तुओं, उन पर संक्रियाओं और उनके संबंधों को क्रमशः संख्याओं, अंकगणितीय फलनों और अंकगणितीय संबंधों के रूप में निरूपित करना होगा। लाइबनित्स तक पीछे जाने वाला विचार वाक्यविन्यासी वस्तुओं को संख्याएँ निर्दिष्ट करना है।

चिह्नों को उनके "कूट" के रूप में संख्याएँ देना अपेक्षाकृत सरल है। कुछ चिह्न थोड़ी चुनौती देते हैं, क्योंकि उदाहरणतः अनंततः अनेक चर और प्रत्येक स्थान-संख्या n के अनंततः अनेक फलन-चिह्न हैं। फिर भी चिह्नों को व्यवस्थित ढंग से संख्याएँ देना संभव है ताकि, मान लें, v_2 और v_3 को भिन्न कूट मिलें। चिह्न-अनुक्रम (जैसे पद और सूत्र) बड़ी चुनौती हैं। किंतु यदि हम संख्या-अनुक्रमों को शुद्ध अंकगणितीय ढंग से संभाल सकें (उदाहरणतः अनुक्रमों के अभाज्य-घात कूटलेखन से), तो अलग-अलग चिह्नों के कूटलेखन को चिह्न-अनुक्रमों तक, और फिर सूत्र के अनुक्रमों या व्युत्पत्ति जैसी अन्य व्यवस्थाओं तक विस्तृत कर सकते हैं। यह विस्तृत कूटलेखन "ग्योडेल (Gödel) क्रमांकन" कहलाता है। प्रत्येक पद, सूत्र और व्युत्पत्ति को एक ग्योडेल (Gödel) संख्या दी जाती है।

चिह्न-अनुक्रमों को उनके कूटों के अनुक्रमों के रूप में कूटित करके और अनुक्रमों का ऐसा कूटलेखन-तंत्र चुनकर जिसे संगणनीय फलनों से संभाला जा सके, हम ग्योडेल (Gödel) संख्याओं को भी संगणनीय फलनों से संभाल सकते हैं। व्यवहार में सभी संबंधित फलन आदिम पुनरावर्ती होंगे। उदाहरणतः किसी अनुक्रम की लंबाई निकालना और उसके कूट से उसका i-वाँ अवयव निकालना, दोनों आदिम पुनरावर्ती हैं। यदि अनुक्रम को कूटित करने वाली संख्या, उदाहरणतः, सूत्र φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या है, तो तुरंत दिखता है कि सूत्र की लंबाई और उस सूत्र में i-वें चिह्न का कूट भी φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या से निकाला जा सकता है। यह सिद्ध करना कुछ कठिन है कि, उदाहरणतः, किसी संख्या का सुगठित पद या सही व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या होना आदिम पुनरावर्ती गुण है। फिर भी यह संभव है, क्योंकि संबंधित अनुक्रम—पद, सूत्र और व्युत्पत्ति—आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं।

उदाहरण के लिए प्रतिस्थापन संक्रिया पर विचार करें। यदि φ कोई सूत्र, x कोई चर और t कोई पद है, तो $\varphi[t/x]$ वह परिणाम है जो φ में x की प्रत्येक मुक्त उपस्थिति को t से बदलने पर मिलता है। अब मान लें कि हमने φ, x, t को क्रमशः k, l और m ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ दी हैं। यही योजना $\varphi[t/x]$ को, मान लें, n ग्योडेल (Gödel)

संख्या देती है। k, l और m को n पर भेजने वाला यह प्रतिचित्रण प्रतिस्थापन संक्रिया का अंकगणितीय अनुरूप है। जब प्रतिस्थापन संक्रिया φ, x, t को $\varphi[t/x]$ पर भेजती है, तब अंकगणितीकृत प्रतिस्थापन फलन ग्योडेल (Gödel) संख्याओं k, l, m को ग्योडेल (Gödel) संख्या n पर भेजता है। हम देखेंगे कि यह फलन आदिम पुनरावर्ती है।

वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण केवल अमूर्त रुचि का विषय नहीं। मूलतः यह अपने आप में एक अतुच्छ अंतर्दृष्टि थी कि अंकगणित की भाषा जैसी भाषाएँ, जिनमें भाषाओं के विषय में "बात करने" की कोई व्यवस्था अंतर्निहित नहीं, फिर भी अभिव्यक्तियों के जटिल गुणों को औपचारिक बना सकती हैं। इसके बाद यह पूछना केवल एक छोटा कदम है कि इस भाषा का कोई सिद्धांत, जैसे पियानो अंकगणित, अपनी ही भाषा के विषय में क्या *सिद्ध* कर सकता है (उदाहरणतः क्या वाक्य सिद्धनीय या सत्य हैं)। यह हमें ग्योडेल (Gödel) के असिद्धनीयता संबंधी और टार्स्की के सत्य की अपरिभाष्यता संबंधी प्रसिद्ध परिसीमन प्रमेयों तक ले जाता है। किंतु वाक्यविन्यास के अंकगणितीकरण की युक्ति संगणनीयता सिद्धांत के कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करने के लिए भी आवश्यक है; उदाहरणतः सिद्धांतों की संगणकीय शक्ति या संगणनीयता के विभिन्न प्रतिरूपों के संबंध के विषय में। वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण अन्य वस्तुओं और गुणों के अंकगणितीकरण का प्रतिमान बनता है। उदाहरण के लिए, विन्यासों और संगणनाओं (मान लें, ट्यूरिंग मशीनों की) का भी इसी प्रकार अंकगणितीकरण संभव है। इससे एक प्रतिरूप (जैसे ट्यूरिंग मशीन) की संगणनाओं का दूसरे प्रतिरूप (जैसे पुनरावर्ती फलनों) में अनुकरण संभव होता है।

34.2 चिह्नों का कूटलेखन

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की मूल भाषा $\mathcal{L}$ निम्न चिह्नों का उपयोग करती है:

$$\bot \quad \neg \quad \vee \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \forall \quad \exists \quad = \quad (\quad) \quad ,$$

और इनके साथ चरों तथा अचर के गणनीय समुच्चय और मनमानी स्थान-संख्या के फलन-चिह्न तथा विधेय-चिह्न के गणनीय समुच्चय। हम इन प्रत्येक चिह्न को ऐसे *कूट* दे सकते हैं कि प्रत्येक चिह्न को उसके कूट के रूप में एक अद्वितीय संख्या मिले और किन्हीं दो भिन्न चिह्नों को समान संख्या न मिले। हम जानते हैं कि यह संभव है, क्योंकि सभी चिह्नों का समुच्चय गणनीय है और इसलिए उसके तथा प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के बीच एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। किंतु हम यह भी सुनिश्चित करना चाहते हैं कि कूट से चिह्न (और उसके विषय में कुछ जानकारी, जैसे किसी फलन-चिह्न की स्थान-संख्या) संगणनीय ढंग से पुनः प्राप्त हो सके। निस्संदेह, ऐसा करने के अनेक उपाय हैं। यहाँ आदिम पुनरावर्ती फलनों का उपयोग करने वाला एक उपाय दिया गया है। (स्मरण करें कि $\langle n_0, \ldots, n_k \rangle$ वह संख्या है जो संख्याओं n_0, ..., n_k के अनुक्रम को कूटित करती है।)

परिभाषा 34.1. यदि s, $\mathcal{L}$ का चिह्न है, तो *चिह्न-कूट* c_s को निम्न प्रकार परिभाषित करें:

1. यदि s तार्किक चिह्नों में है, तो c_s निम्न सारणी से मिलता है:

$\bot$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall$
$\langle 0,0 \rangle$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$	$\langle 0,5 \rangle$
$\exists$	$=$	$($	$)$	$,$	
$\langle 0,6 \rangle$	$\langle 0,7 \rangle$	$\langle 0,8 \rangle$	$\langle 0,9 \rangle$	$\langle 0,10 \rangle$	

2. यदि s, i-वाँ चर v_i है, तो $\mathsf{c}_s = \langle 1, i \rangle$।

3. यदि s, i-वाँ अचर c_i है, तो $\mathsf{c}_s = \langle 2, i \rangle$.

4. यदि s, i-वाँ n-स्थानी फलन-चिह्न f_i^n है, तो $\mathsf{c}_s = \langle 3, n, i \rangle$.

5. यदि s, i-वाँ n-स्थानी विधेय-चिह्न P_i^n है, तो $\mathsf{c}_s = \langle 4, n, i \rangle$.

प्रतिज्ञप्ति 34.2. *निम्न संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं:*

1. $\mathrm{Fn}(x, n)$ *यदि और केवल यदि किसी* i *के लिए* x, f_i^n *का कूट है; अर्थात्* x *किसी* n*-स्थानी फलन-चिह्न का कूट है।*

2. $\mathrm{Pred}(x, n)$ *यदि और केवल यदि किसी* i *के लिए* x, P_i^n *का कूट है, अथवा* x, $=$ *का कूट और* $n = 2$ *है; अर्थात्* x *किसी* n*-स्थानी विधेय-चिह्न का कूट है।*

परिभाषा 34.3. यदि $s_0, \ldots, s_{n-1}$ चिह्नों का अनुक्रम है, तो उसकी *ग्योडेल (Gödel) संख्या* $\langle \mathsf{c}_{s_0}, \ldots, \mathsf{c}_{s_{n-1}} \rangle$ है।

ध्यान दें कि *कूट* और *ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ* भिन्न वस्तुएँ हैं। उदाहरणतः चर v_5 का कूट $\mathsf{c}_{v_5} = \langle 1, 5 \rangle = 2^2 \cdot 3^6$ है। किंतु पद के रूप में देखा गया चर v_5, चिह्नों का (लंबाई 1 वाला) अनुक्रम भी है। *पद* v_5 *की ग्योडेल (Gödel) संख्या* $\ulcorner v_5 \urcorner$, $\langle \mathsf{c}_{v_5} \rangle = 2^{\mathsf{c}_{v_5}+1} = 2^{2^2 \cdot 3^6 + 1}$ है।

उदाहरण 34.4. स्मरण करें कि यदि k_0, ..., k_{n-1} संख्याओं का अनुक्रम है, तो अभाज्य-घात कूटलेखन में अनुक्रम $\langle k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$ का कूट है

$$2^{k_0+1} \cdot 3^{k_1+1} \cdot \cdots \cdot p_{n-1}^{k_{n-1}+1},$$

जहाँ p_i, i-वाँ अभाज्य है ($p_0 = 2$ से आरंभ करके)। अतः उदाहरणतः सूत्र $v_0 = \mathsf{o}$, अथवा अधिक स्पष्ट रूप में $=(v_0, c_0)$, की ग्योडेल (Gödel) संख्या है

$$\langle \mathsf{c}_=, \mathsf{c}_(, \mathsf{c}_{v_0}, \mathsf{c}_,, \mathsf{c}_{c_0}, \mathsf{c}_) \rangle.$$

यहाँ $\mathsf{c}_=$, $\langle 0, 7 \rangle = 2^{0+1} \cdot 3^{7+1}$ है, c_{v_0}, $\langle 1, 0 \rangle = 2^{1+1} \cdot 3^{0+1}$ है, आदि। अतः $\ulcorner = (v_0, c_0) \urcorner$ है

$$\begin{aligned} 2^{\mathsf{c}_=+1} \cdot 3^{\mathsf{c}_(+1} \cdot 5^{\mathsf{c}_{v_0}+1} \cdot 7^{\mathsf{c}_,+1} \cdot 11^{\mathsf{c}_{c_0}+1} \cdot 13^{\mathsf{c}_)+1} &= \\ 2^{2^1 \cdot 3^8+1} \cdot 3^{2^1 \cdot 3^9+1} \cdot 5^{2^2 \cdot 3^1+1} \cdot 7^{2^1 \cdot 3^{11}+1} \cdot 11^{2^3 \cdot 3^1+1} \cdot 13^{2^1 \cdot 3^{10}+1} &= \\ 2^{13\,123} \cdot 3^{39\,367} \cdot 5^{13} \cdot 7^{354\,295} \cdot 11^{25} \cdot 13^{118\,099}. \end{aligned}$$

34.3 पदों का कूटलेखन

पद केवल एक विशेष प्रकार का चिह्न-अनुक्रम है: पदों के निर्माण-नियमों के अनुसार वह अचरों और चरों से आगमनात्मक रूप में बनता है। चूँकि चिह्नों की कूटलेखन-योजना और संख्या-अनुक्रमों को कूटित करने के किसी उपाय से चिह्न-अनुक्रमों को संख्याओं के रूप में कूटित किया जा सकता है, इसलिए पदों को ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ देना कठिन नहीं। चुनौती यह दिखाना है कि किसी संख्या का किसी सुगठित पद की ग्योडेल (Gödel) संख्या होना संगणनीय, बल्कि आदिम पुनरावर्ती, गुण है।

चर और अचर सबसे सरल पद हैं, और यह जाँचना सरल है कि x ऐसे किसी पद की ग्योडेल (Gödel) संख्या है या नहीं: $\mathrm{Var}(x)$ तब लागू होता है जब किसी i के लिए x, $\ulcorner v_i \urcorner$ हो। दूसरे शब्दों में, x लंबाई 1 वाला अनुक्रम है और उसका एकमात्र अवयव $(x)_0$ किसी चर v_i का कूट है; अर्थात् किसी i के लिए x, $\langle \langle 1, i \rangle \rangle$ है। इसी प्रकार, $\mathrm{Const}(x)$ तब लागू होता है जब किसी i के लिए x, $\ulcorner c_i \urcorner$ हो। ये दोनों संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं, क्योंकि यदि ऐसा i विद्यमान है, तो वह अनिवार्यतः $< x$ है:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x) &\Leftrightarrow (\exists i < x)\ x = \langle \langle 1, i \rangle \rangle \\ \mathrm{Const}(x) &\Leftrightarrow (\exists i < x)\ x = \langle \langle 2, i \rangle \rangle \end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 34.5. *संबंध* $\mathrm{Term}(x)$ *और* $\mathrm{ClTerm}(x)$*, जो क्रमशः तभी लागू होते हैं जब* x *किसी पद या बंद पद की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, आदिम पुनरावर्ती हैं।*

प्रमाण. चिह्नों का अनुक्रम s पद है यदि और केवल यदि पदों का कोई अनुक्रम s_0, ..., $s_{k-1} = s$ यह दर्ज करता है कि पदों के निर्माण-नियमों के अनुसार अचर और चर से पद s कैसे बना। यह व्यक्त करने के लिए कि ऐसा अभिकल्पित निर्माण-अनुक्रम निर्माण-नियमों का पालन करता है, प्रत्येक $i < k$ के लिए निम्न में से कोई एक बात सत्य होनी चाहिए:

1. s_i, चर v_j है; अथवा
2. s_i, अचर c_j है; अथवा
3. s_i, स्थान i से पहले आने वाले n पदों t_1, ..., t_n से किसी n-स्थानी फलन-चिह्न f_j^n का उपयोग करके बना है।

यह दिखाने के लिए कि ग्योडेल (Gödel) संख्याओं पर संगत संबंध आदिम पुनरावर्ती है, हमें इस शर्त को आदिम पुनरावर्ती ढंग से, अर्थात् आदिम पुनरावर्ती फलनों, संबंधों और परिबद्ध परिमाणीकरण का उपयोग करके, व्यक्त करना होगा।

मान लें कि y वह संख्या है जो अनुक्रम s_0, ..., s_{k-1} को कूटित करती है; अर्थात् $y = \langle \ulcorner s_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner s_{k-1} \urcorner \rangle$। वह ग्योडेल (Gödel) संख्या x वाले पद के निर्माण-अनुक्रम को कूटित करती है यदि और केवल यदि सभी $i < k$ के लिए:

1. $\mathrm{Var}((y)_i)$, अथवा
2. $\mathrm{Const}((y)_i)$, अथवा
3. कोई n और संख्या $z = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ ऐसी है कि प्रत्येक z_l, किसी $i' < i$ के लिए $(y)_{i'}$ के बराबर है, और

$$(y)_i = \ulcorner f_j^n (\urcorner \frown \mathrm{flatten}(z) \frown \ulcorner) \urcorner,$$

और इसके अतिरिक्त $(y)_{k-1} = x$। (फलन $\mathrm{flatten}(z)$ अनुक्रम $\langle \ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle$ को $\ulcorner t_1, \ldots, t_n \urcorner$ में बदलता है और आदिम पुनरावर्ती है।)

खंड (3) में सूचकांक j, n, पदों t_l की ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ z_l, और अनुक्रम $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ का कूट z, सभी y से छोटे हैं। ऊपर k के स्थान पर $\mathrm{len}(y)$ रख सकते हैं। अतः हम "y, ग्योडेल (Gödel) संख्या x वाले पद के निर्माण-अनुक्रम का कूट है" को ऐसे ढंग से व्यक्त कर सकते हैं जिससे यह संबंध आदिम पुनरावर्ती सिद्ध होता है।

अब हमें केवल यह विश्वास दिलाना है कि y पर कोई आदिम पुनरावर्ती परिसीमा है। किंतु यदि x किसी पद की ग्योडेल (Gödel) संख्या है, तो उसका ऐसा निर्माण-अनुक्रम होना चाहिए जिसमें अधिकतम $\mathrm{len}(x)$ पद हों (क्योंकि s के निर्माण-अनुक्रम का प्रत्येक पद s में किसी स्थान से आरंभ होना चाहिए, और दो उपपद एक ही स्थान से आरंभ नहीं हो सकते)। निस्संदेह, s के प्रत्येक उपपद की ग्योडेल (Gödel) संख्या $\leq x$ है। अतः सदा कोई ऐसा निर्माण-अनुक्रम है जिसका कूट $\leq p_{k-1}^{k(x+1)}$ है, जहाँ $k = \mathrm{len}(x)$।

ClTerm के लिए केवल चर वाला खंड छोड़ दें। □

प्रतिज्ञप्ति 34.6. *फलन* $\mathrm{num}(n) = \ulcorner \overline{n} \urcorner$ *आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हम $\mathrm{num}(n)$ को आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित करते हैं:

$$\begin{aligned} \mathrm{num}(0) &= \ulcorner \mathsf{o} \urcorner \\ \mathrm{num}(n+1) &= \ulcorner \prime (\urcorner \frown \mathrm{num}(n) \frown \ulcorner) \urcorner. \end{aligned}$$

□

34.4 सूत्रों का कूटलेखन

संबंध $\mathrm{Term}(x)$ को आदिम पुनरावर्ती रूप से परिभाषित कर लेने के बाद हम उसका उपयोग करके सूत्र के लिए संगत संबंध $\mathrm{Frm}(x)$ को आदिम पुनरावर्ती रूप से परिभाषित कर सकते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 34.7. *संबंध $\mathrm{Atom}(x)$, जो तभी लागू होता है जब x किसी परमाणु सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. संख्या x किसी परमाणु सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या है यदि और केवल यदि निम्न में से कोई एक बात लागू होती है:

1. ऐसे $n, j < x$ और $z < x$ हैं कि प्रत्येक $i < n$ के लिए $\mathrm{Term}((z)_i)$ और $x =$
$$\ulcorner P_j^n(\urcorner \frown \mathrm{flatten}(z) \frown \ulcorner)\urcorner.$$
2. ऐसे $z_1, z_2 < x$ हैं कि $\mathrm{Term}(z_1)$, $\mathrm{Term}(z_2)$ और $x =$
$$\ulcorner =(\urcorner \frown z_1 \frown \ulcorner,\urcorner \frown z_2 \frown \ulcorner)\urcorner.$$
3. $x = \ulcorner \bot \urcorner$.
4. $x = \ulcorner \top \urcorner$. □

प्रतिज्ञप्ति 34.8. *संबंध $\mathrm{Frm}(x)$, जो तभी लागू होता है जब x किसी सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. चिह्नों का अनुक्रम s सूत्र है यदि और केवल यदि सूत्र का कोई निर्माण-अनुक्रम s_0, ..., $s_{k-1} = s$ यह दर्ज करता है कि निर्माण-नियमों के अनुसार परमाणु सूत्र से s कैसे बना। प्रत्येक s_i का कूट (और वास्तव में अनुक्रम $\langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle$ का कूट भी), s के कूट x से छोटा है। □

प्रतिज्ञप्ति 34.9. *संबंध $\mathrm{FreeOcc}(x, z, i)$, जो तभी लागू होता है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या x वाले सूत्र का i-वाँ चिह्न ग्योडेल (Gödel) संख्या z वाले चर की मुक्त उपस्थिति हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 34.10. *गुण $\mathrm{Sent}(x)$, जो तभी लागू होता है जब x किसी वाक्य की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. वाक्य ऐसा सूत्र है जिसमें चर की कोई मुक्त उपस्थिति नहीं होती। अतः $\mathrm{Sent}(x)$ लागू होता है यदि और केवल यदि

$$(\forall i < \mathrm{len}(x))\ (\forall z < x)$$
$$((\exists j < z)\ z = \ulcorner v_j \urcorner \to \neg\mathrm{FreeOcc}(x, z, i)).$$ □

34.5 प्रतिस्थापन

स्मरण करें कि प्रतिस्थापन वह संक्रिया है जिसमें सूत्र φ में चर u की सभी मुक्त उपस्थितियों को पद t से बदला जाता है; इसे $\varphi[t/u]$ लिखते हैं। चर, सूत्र और पदों की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं पर की गई यह संक्रिया आदिम पुनरावर्ती है।

प्रतिज्ञप्ति 34.11. *ऐसा आदिम पुनरावर्ती फलन* $\mathrm{Subst}(x, y, z)$ *है जिसका गुण है कि*

$$\mathrm{Subst}({}^{\#}\varphi^{\#}, {}^{\#}t^{\#}, {}^{\#}u^{\#}) = {}^{\#}\varphi[t/u]^{\#}.$$

प्रमाण. तब हम फलन hSubst को आदिम पुनरावर्तन द्वारा निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned} \mathrm{hSubst}(x, y, z, 0) &= \Lambda \\ \mathrm{hSubst}(x, y, z, i+1) &= \\ & \begin{cases} \mathrm{hSubst}(x, y, z, i) \frown y & \text{यदि } \mathrm{FreeOcc}(x, z, i) \\ \mathrm{append}(\mathrm{hSubst}(x, y, z, i), (x)_i) & \text{अन्यथा।} \end{cases} \end{aligned}$$

अब $\mathrm{Subst}(x, y, z)$ को $\mathrm{hSubst}(x, y, z, \mathrm{len}(x))$ के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। □

प्रतिज्ञप्ति 34.12. *संबंध* $\mathrm{FreeFor}(x, y, z)$*, जो तभी लागू होता है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या* y *वाला पद, ग्योडेल (Gödel) संख्या* x *वाले सूत्र में ग्योडेल (Gödel) संख्या* z *वाले चर के लिए मुक्त हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

34.6 LK में व्युत्पत्तियाँ

व्युत्पत्ति का अंकगणितीकरण करने के लिए हमें व्युत्पत्ति को संख्याओं के रूप में निरूपित करना होगा। चूँकि व्युत्पत्ति ऐसे अनुक्रमों के वृक्ष हैं जिनमें प्रत्येक अनुमान के साथ एक नामपत्र भी होता है, पुनरावर्ती निरूपण सबसे स्वाभाविक उपाय है: हम किसी व्युत्पत्ति को ऐसे टपल के रूप में निरूपित करते हैं जिसके घटक अंतिम अनुक्रम, नामपत्र और अंतिम अनुमान के आधारवाक्यों तक पहुँचाने वाली उप-व्युत्पत्ति के निरूपण हैं।

परिभाषा 34.13. यदि Γ, वाक्य का परिमित अनुक्रम है, $\Gamma = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, तो ${}^{\#}\Gamma^{\#} = \langle {}^{\#}\varphi_1{}^{\#}, \ldots, {}^{\#}\varphi_n{}^{\#} \rangle$।
यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ एक अनुक्रम है, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta$ की ग्योडेल (Gödel) संख्या है

$${}^{\#}\Gamma \Rightarrow \Delta^{\#} = \langle {}^{\#}\Gamma^{\#}, {}^{\#}\Delta^{\#} \rangle$$

यदि π, **LK** में व्युत्पत्ति है, तो ${}^{\#}\pi^{\#}$ निम्न प्रकार परिभाषित है:

1. यदि π केवल आरंभिक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ से बनी है, तो ${}^{\#}\pi^{\#}$ है

$$\langle 0, {}^{\#}\Gamma \Rightarrow \Delta^{\#} \rangle.$$

2. यदि π एक या दो आधारवाक्यों वाले अनुमान पर समाप्त होती है, उसका निष्कर्ष $\Gamma \Rightarrow \Delta$ है, और π_1 तथा π_2 अंतिम अनुमान के आधारवाक्यों पर समाप्त होने वाले तात्कालिक उपप्रमाण हैं, तो ${}^{\#}\pi^{\#}$ क्रमशः है

$$\langle 1, {}^{\#}\pi_1{}^{\#}, {}^{\#}\Gamma \Rightarrow \Delta^{\#}, k \rangle \text{ अथवा}$$
$$\langle 2, {}^{\#}\pi_1{}^{\#}, {}^{\#}\pi_2{}^{\#}, {}^{\#}\Gamma \Rightarrow \Delta^{\#}, k \rangle,$$

जहाँ अंतिम अनुमान में प्रयुक्त नियम के अनुसार k निम्न सारणी से मिलता है:

नियम:	WL	WR	CL	CR	XL	XR
k:	1	2	3	4	5	6
नियम:	$\neg$L	$\neg$R	$\wedge$L	$\wedge$R	$\vee$L	$\vee$R
k:	7	8	9	10	11	12
नियम:	$\to$L	$\to$R	$\forall$L	$\forall$R	$\exists$L	$\exists$R
k:	13	14	15	16	17	18
नियम:	Cut	=				
k:	19	20				

उदाहरण 34.14. इस बहुत सरल व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,\to\mathrm{R}$$

आरंभिक अनुक्रम की ग्योडेल (Gödel) संख्या $p_0 = \langle 0, {}^{\#}\varphi \Rightarrow \varphi^{\#}\rangle$ होगी। $\wedge$L के निष्कर्ष पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या $p_1 = \langle 1, p_0, {}^{\#}\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi^{\#}, 9\rangle$ होगी (1 इसलिए कि $\wedge$L का एक आधारवाक्य है, $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ निष्कर्ष की ग्योडेल (Gödel) संख्या है, और 9, $\wedge$L को कूटित करने वाली संख्या है)। तब संपूर्ण व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या $\langle 1, p_1, {}^{\#}\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \to \varphi)^{\#}, 14\rangle$ है, अर्थात्

$$\langle 1, \langle 1, \langle 0, {}^{\#}\varphi \Rightarrow \varphi)^{\#}\rangle, {}^{\#}\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi^{\#}, 9\rangle, {}^{\#}\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \to \varphi^{\#}, 14\rangle.$$

व्युत्पत्ति का निरूपण तय कर लेने पर हमें यह भी दिखाना होगा कि ऐसी व्युत्पत्ति पर आदिम पुनरावर्ती ढंग से क्रियाएँ की जा सकती हैं और उनके आवश्यक गुण तथा संबंध भी उसी ढंग से व्यक्त किए जा सकते हैं। कुछ संक्रियाएँ सरल हैं: उदाहरणतः किसी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या p दिए जाने पर $\mathrm{EndSeq}(p) = (p)_{(p)_0+1}$ उसके अंतिम अनुक्रम की ग्योडेल (Gödel) संख्या और $\mathrm{LastRule}(p) = (p)_{(p)_0+2}$ उसके अंतिम नियम का कूट देता है। गुण $\mathrm{Sequent}(s)$, जिसे

$$\mathrm{len}(s) = 2 \wedge (\forall i < \mathrm{len}((s)_0) + \mathrm{len}((s)_1))\ \mathrm{Sent}(((s)_0 \frown (s)_1)_i)$$

से परिभाषित किया गया है, s के लिए तभी लागू होता है जब s, वाक्य से बने किसी अनुक्रम की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। कुछ संक्रियाएँ कहीं अधिक कठिन हैं। हम कम-से-कम यह रूपरेखा देंगे कि उन्हें कैसे किया जाए। लक्ष्य यह दिखाना है कि "π, Γ से φ की व्युत्पत्ति है" संबंध, π और φ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का आदिम पुनरावर्ती संबंध है।

प्रतिज्ञप्ति 34.15. *गुण* $\mathrm{Correct}(p)$*, जो तभी लागू होता है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या* p *वाली व्युत्पत्ति* π *का अंतिम अनुमान सही हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ आरंभिक अनुक्रम है यदि या तो कोई वाक्य φ ऐसा है कि $\Gamma \Rightarrow \Delta$, $\varphi \Rightarrow \varphi$ है, अथवा कोई पद t ऐसा है कि $\Gamma \Rightarrow \Delta$, $\emptyset \Rightarrow t = t$ है। ग्योडेल (Gödel) संख्याओं के पदों में $\mathrm{InitSeq}(s)$ लागू होता है यदि और केवल यदि

$$(\exists x < s)\ (\mathrm{Sent}(x) \wedge s = \langle\langle x\rangle, \langle x\rangle\rangle) \vee$$
$$(\exists t < s)\ (\mathrm{Term}(t) \wedge s = \langle 0, \langle {}^{\#}{=}({}^{\#} \frown t \frown {}^{\#}{,}{}^{\#} \frown t \frown {}^{\#})^{\#}\rangle\rangle).$$

हमें यह भी दिखाना है कि प्रत्येक अनुमान-नियम R के लिए संबंध $\text{FollowsBy}_R(p)$ आदिम पुनरावर्ती है, जहाँ $\text{FollowsBy}_R(p)$ तभी लागू होता है जब p, व्युत्पत्ति π की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो और π का अंतिम अनुक्रम, π की तात्कालिक उप-व्युत्पत्ति से R के सही अनुप्रयोग द्वारा फलित हो।

एक सरल स्थिति $\wedge$R नियम की है। यदि π किसी सही $\wedge$R अनुमान पर समाप्त होती है, तो वह ऐसी दिखती है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{R}$$

अतः व्युत्पत्ति π का अंतिम अनुमान $\wedge$R का सही अनुप्रयोग है यदि और केवल यदि वाक्य के ऐसे अनुक्रम Γ और Δ तथा ऐसे दो वाक्य φ और ψ हैं कि π_1 का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, π_2 का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, और π का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ है। हमें इसे केवल ग्योडेल (Gödel) संख्याओं में अनूदित करना है। यदि $s = {}^{\#}\Gamma \Rightarrow \Delta^{\#}$, तो $(s)_0 = {}^{\#}\Gamma^{\#}$ और $(s)_1 = {}^{\#}\Delta^{\#}$। अतः $\text{FollowsBy}_{\wedge\text{R}}(p)$ लागू होता है यदि और केवल यदि

$$\begin{aligned}
&(\exists g < p)\ (\exists d < p)\ (\exists a < p)\ (\exists b < p)\\
&\qquad \text{EndSequent}(p) = \langle g, d \frown \langle {}^{\#}({}^{\#} \frown a \frown {}^{\#}\wedge^{\#} \frown b \frown {}^{\#})^{\#}\rangle\rangle \wedge\\
&\qquad \text{EndSequent}((p)_1) = \langle g, d \frown \langle a\rangle\rangle \wedge\\
&\qquad \text{EndSequent}((p)_2) = \langle g, d \frown \langle b\rangle\rangle \wedge\\
&\qquad (p)_0 = 2 \wedge \text{LastRule}(p) = 10.
\end{aligned}$$

अलग-अलग पंक्तियाँ क्रमशः व्यक्त करती हैं कि "ग्योडेल (Gödel) संख्या g वाला अनुक्रम (Γ), ग्योडेल (Gödel) संख्या d वाला अनुक्रम (Δ), ग्योडेल (Gödel) संख्या a वाला सूत्र (φ), और ग्योडेल (Gödel) संख्या b वाला सूत्र (ψ) है", ऐसे कि "π का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ है", "π_1 का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ है", "π_2 का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ है", और "π की दो तात्कालिक उपव्युत्पत्तियाँ हैं तथा अंतिम अनुमान-नियम $\wedge$R (संख्या 10 वाला) है"।

π का अंतिम अनुमान $\exists$R का सही अनुप्रयोग है यदि और केवल यदि ऐसे अनुक्रम Γ और Δ, सूत्र φ, चर x और पद t हैं कि π का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi$ और π_1 का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t/x]$ है। अतः ग्योडेल (Gödel) संख्याओं के पदों में $\text{FollowsBy}_{\exists\text{R}}(p)$ लागू होता है यदि और केवल यदि

$$\begin{aligned}
&(\exists g < p)\ (\exists d < p)\ (\exists a < p)\ (\exists x < p)\ (\exists t < p)\\
&\qquad \text{EndSequent}(p) = \langle g, d \frown \langle {}^{\#}\exists^{\#} \frown x \frown a\rangle\rangle \wedge\\
&\qquad \text{EndSequent}((p)_1) = \langle g, d \frown \langle \text{Subst}(a, t, x)\rangle\rangle \wedge\\
&\qquad (p)_0 = 1 \wedge \text{LastRule}(p) = 18.
\end{aligned}$$

तब हम $\text{Correct}(p)$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\begin{aligned}
&\text{Sequent}(\text{EndSequent}(p)) \wedge\\
&\qquad [(\text{LastRule}(p) = 1 \wedge \text{FollowsBy}_{\text{WL}}(p)) \vee \cdots \vee\\
&\qquad\quad (\text{LastRule}(p) = 20 \wedge \text{FollowsBy}_{=}(p)) \vee\\
&\qquad\qquad (p)_0 = 0 \wedge \text{InitialSeq}(\text{EndSequent}(p))]
\end{aligned}$$

पहली पंक्ति सुनिश्चित करती है कि d का अंतिम अनुक्रम वास्तव में वाक्य से बना अनुक्रम है। अंतिम पंक्ति उस स्थिति को समेटती है जिसमें p केवल एक आरंभिक अनुक्रम है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 34.16. *संबंध* $\mathrm{Deriv}(p)$*, जो तब लागू होता है जब* p *किसी सही व्युत्पत्ति* π *की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. व्युत्पत्ति π तब सही है जब उसका प्रत्येक अनुमान किसी नियम का सही अनुप्रयोग हो; अर्थात् उसकी प्रत्येक उप-व्युत्पत्ति किसी सही अनुमान पर समाप्त हो। अतः $\mathrm{Deriv}(d)$ यदि और केवल यदि

$$(\forall i < \mathrm{len}(\mathrm{SubtreeSeq}(p)))\ \mathrm{Correct}((\mathrm{SubtreeSeq}(p))_i. \qquad \square$$

प्रतिज्ञप्ति 34.17. *मान लें कि* Γ*, वाक्य का आदिम पुनरावर्ती समुच्चय है। तब यह व्यक्त करने वाला संबंध* $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ *कि "किसी परिमित* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *के लिए* x*,* $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ *की व्युत्पत्ति* π *का कूट है और* y*,* φ *की ग्योडेल (Gödel) संख्या है", आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. मान लें कि "$y \in \Gamma$" आदिम पुनरावर्ती विधेय $R_\Gamma(y)$ से दिया गया है। हमें दिखाना है कि $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ आदिम पुनरावर्ती है, जो तब लागू होता है जब y किसी वाक्य φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो और x, अंतिम अनुक्रम $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ वाली किसी **LK**-व्युत्पत्ति का कूट हो।

पिछली प्रतिज्ञप्ति के अनुसार गुण $\mathrm{Deriv}(x)$, जो तभी लागू होता है जब x, **LK** में किसी सही व्युत्पत्ति π का कूट हो, आदिम पुनरावर्ती है। यदि x ऐसा कूट है, तो $\mathrm{EndSequent}(x)$, π के अंतिम अनुक्रम का कूट है; इसलिए $(\mathrm{EndSequent}(x))_0$ अंतिम अनुक्रम के बाएँ पक्ष का कूट और $(\mathrm{EndSequent}(x))_1$ दाएँ पक्ष का कूट है। अतः हम " π के अंतिम अनुक्रम का दायाँ पक्ष φ है" को $\mathrm{len}((\mathrm{EndSequent}(x))_1) = 1 \wedge ((\mathrm{EndSequent}(x))_1)_0 = x$ से व्यक्त कर सकते हैं। π के अंतिम अनुक्रम का बायाँ पक्ष निस्संदेह स्वतः परिमित है; हमें केवल यह व्यक्त करना है कि उसमें प्रत्येक वाक्य Γ में है। इस प्रकार हम $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ को परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y) \Leftrightarrow\ & \mathrm{Deriv}(x) \wedge \\ & (\forall i < \mathrm{len}((\mathrm{EndSequent}(x))_0))\ R_\Gamma(((\mathrm{EndSequent}(x))_0)_i) \wedge \\ & \mathrm{len}((\mathrm{EndSequent}(x))_1) = 1 \wedge ((\mathrm{EndSequent}(x))_1)_0 = y. \qquad \square\end{aligned}$$

34.7 स्वाभाविक निगमन में व्युत्पत्तियाँ

व्युत्पत्तियाँ का अंकगणितीकरण करने के लिए हमें व्युत्पत्तियाँ को संख्याओं के रूप में निरूपित करना होगा। चूँकि व्युत्पत्तियाँ ऐसे वृक्ष हैं जिनके नोडों पर सूत्रों होते हैं और प्रत्येक अनुमान के साथ एक या दो लेबल जुड़े होते हैं, इसलिए पुनरावर्ती निरूपण सबसे स्पष्ट उपाय है: हम किसी व्युत्पत्ति को ऐसे टपल के रूप में निरूपित करते हैं जिसके घटक हैं—अंतिम अनुमान के आधारवाक्यों तक पहुँचने वाले तात्कालिक उप-व्युत्पत्तियाँ की संख्या, इन उप-व्युत्पत्तियाँ के निरूपण, अंतिम सूत्र, अंतिम अनुमान का मुक्ति-लेबल, और अंतिम अनुमान का प्रकार बताने वाली एक संख्या।

परिभाषा 34.18. यदि δ स्वाभाविक निगमन में व्युत्पत्ति है, तो ${}^\sharp\delta^\#$ को निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित किया जाता है:

1. यदि δ में केवल मान्यता φ है, तो ${}^\sharp\delta^\#$, $\langle 0, {}^\sharp\varphi^\#, n\rangle$ है। यदि यह अमुक्त मान्यता है तो संख्या n, 0 है; अन्यथा वह उसका संख्यात्मक लेबल है।

2. यदि δ का अंत शून्य, एक, दो अथवा तीन आधारवाक्यों वाले अनुमान में होता है, तो ${}^\sharp\delta^\#$ क्रमशः

$$\begin{aligned}&\langle 0, {}^\sharp\varphi^\#, n, k\rangle, \\ &\langle 1, {}^\sharp\delta_1{}^\#, {}^\sharp\varphi^\#, n, k\rangle, \\ &\langle 2, {}^\sharp\delta_1{}^\#, {}^\sharp\delta_2{}^\#, {}^\sharp\varphi^\#, n, k\rangle, \text{ अथवा} \\ &\langle 3, {}^\sharp\delta_1{}^\#, {}^\sharp\delta_2{}^\#, {}^\sharp\delta_3{}^\#, {}^\sharp\varphi^\#, n, k\rangle\end{aligned}$$

है। यहाँ δ_1, δ_2, δ_3 वे उप-व्युत्पत्तियाँ हैं जिनका अंत δ के अंतिम अनुमान के आधारवाक्य (अथवा आधारवाक्यों) में होता है; φ, δ के अंतिम अनुमान का निष्कर्ष है; n अंतिम अनुमान का मुक्ति-लेबल है (यदि अनुमान किसी मान्यता को मुक्त नहीं करता, तो 0); और अंतिम अनुमान में प्रयुक्त नियम के अनुसार k निम्न तालिका से मिलता है।

नियम:	$\wedge$Intro	$\wedge$Elim	$\vee$Intro	$\vee$Elim
k:	1	2	3	4
नियम:	$\rightarrow$Intro	$\rightarrow$Elim	$\neg$Intro	$\neg$Elim
k:	5	6	7	8
नियम:	$\bot_I$	$\bot_C$	$\forall$Intro	$\forall$Elim
k:	9	10	11	12
नियम:	$\exists$Intro	$\exists$Elim	$=$Intro	$=$Elim
k:	13	14	15	16

उदाहरण 34.19. इस अत्यंत सरल व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$1\,\frac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\,\rightarrow\text{Intro}$$

मान्यता की ग्योडेल (Gödel) संख्या $d_0 = \langle 0, {}^{\#}\varphi \wedge \psi^{\#}, 1\rangle$ होगी। $\wedge$Elim के निष्कर्ष पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या $d_1 = \langle 1, d_0, {}^{\#}\varphi^{\#}, 0, 2\rangle$ होगी (1, क्योंकि $\wedge$Elim का एक आधारवाक्य है; निष्कर्ष φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या; 0, क्योंकि कोई मान्यता मुक्त नहीं होती; और 2, $\wedge$Elim को कूटबद्ध करने वाली संख्या है)। तब पूरी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या $\langle 1, d_1, {}^{\#}((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)^{\#}, 1, 5\rangle$ है, अर्थात्

$$\langle 1, \langle 1, \langle 0, {}^{\#}(\varphi \wedge \psi)^{\#}, 1\rangle, {}^{\#}\varphi^{\#}, 0, 2\rangle, {}^{\#}((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)^{\#}, 1, 5\rangle.$$

व्युत्पत्तियाँ का एक निरूपण चुन लेने के बाद हमें यह भी दिखाना होगा कि ऐसी व्युत्पत्तियाँ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं को हम आदिम पुनरावर्ती ढंग से परिचालित कर सकते हैं और उनके आवश्यक गुण तथा संबंध व्यक्त कर सकते हैं। कुछ संक्रियाएँ सरल हैं: उदाहरणतः, व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या d दिए जाने पर $\mathrm{EndFmla}(d) = (d)_{(d)_0+1}$ उसके अंतिम सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या देता है, $\mathrm{DischargeLabel}(d) = (d)_{(d)_0+2}$ उसका मुक्ति-लेबल देता है और $\mathrm{LastRule}(d) = (d)_{(d)_0+3}$ अंतिम अनुमान का प्रकार बताने वाली संख्या देता है। कुछ संक्रियाएँ कहीं कठिन हैं। हम कम-से-कम यह रेखांकित करेंगे कि उन्हें कैसे किया जा सकता है। लक्ष्य यह दिखाना है कि संबंध "δ, Γ से φ की व्युत्पत्ति है" δ और φ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का आदिम पुनरावर्ती संबंध है।

प्रतिज्ञप्ति 34.20. *निम्न संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं:*

1. *φ, δ में लेबल n वाली मान्यता के रूप में आता है।*
2. *δ में लेबल n वाली सभी मान्यताएँ φ के रूप की हैं (अर्थात् हम δ में लेबल n का उपयोग करके मान्यता φ को मुक्त कर सकते हैं)।*

प्रमाण. हमें यह दिखाना है कि सूत्रों की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं और व्युत्पत्तियाँ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं के बीच संगत संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं।

1. हम दिखाना चाहते हैं कि $\mathrm{Assum}(x, d, n)$ आदिम पुनरावर्ती है; यह संबंध तभी लागू होता है जब x, ग्योडेल (Gödel) संख्या d वाली व्युत्पत्ति की, लेबल n वाली मान्यता की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। ऐसा तभी है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या $\langle 0, x, n\rangle$ वाली व्युत्पत्ति, d की उप-व्युत्पत्ति हो। ध्यान दें कि व्युत्पत्तियाँ

का हमारा कूटलेखन खंड 29.12 में दिए गए वृक्ष-कूटलेखन का विशेष मामला है, इसलिए आदिम पुनरावर्ती फलन $\mathsf{SubtreeSeq}(d)$, d की सभी उप-व्युत्पत्तियाँ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का एक अनुक्रम देता है (जिसकी लंबाई अधिकतम d है)। अतः हम परिभाषित कर सकते हैं

$$\mathsf{Assum}(x, d, n) \Leftrightarrow (\exists i < d)\ (\mathsf{SubtreeSeq}(d))_i = \langle 0, x, n\rangle.$$

2. हम दिखाना चाहते हैं कि $\mathsf{Discharge}(x, d, n)$ आदिम पुनरावर्ती है; यह संबंध तभी लागू होता है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या d वाली व्युत्पत्ति में लेबल n वाली सभी मान्यताएँ, ग्योडेल (Gödel) संख्या x वाले सूत्र की ही हों। किंतु यह संबंध तभी और केवल तभी लागू होता है जब $(\forall y < d)\ (\mathsf{Assum}(y, d, n) \to y = x)$। □

प्रतिज्ञप्ति 34.21. *वह गुण* $\mathsf{Correct}(d)$ *आदिम पुनरावर्ती है, जो तभी लागू होता है जब ग्योडेल (Gödel) संख्या* d *वाली व्युत्पत्ति* δ *का अंतिम अनुमान सही हो।*

प्रमाण. यहाँ हमें प्रत्येक अनुमान-नियम R के लिए यह दिखाना है कि संबंध $\mathsf{FollowsBy}_R(d)$ आदिम पुनरावर्ती है, जहाँ $\mathsf{FollowsBy}_R(d)$ तभी लागू होता है जब d, व्युत्पत्ति δ की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो और δ का अंतिम सूत्र, δ की तात्कालिक उप-व्युत्पत्तियाँ से R के सही अनुप्रयोग द्वारा निकले।

$\wedge$Intro नियम का मामला सरल है। यदि δ का अंत सही $\wedge$Intro अनुमान में होता है, तो वह ऐसा दिखता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \delta_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

तब δ की ग्योडेल (Gödel) संख्या d, $\langle 2, d_1, d_2, {}^{\#}(\varphi \wedge \psi)^{\#}, 0, k\rangle$ है, जहाँ $\mathsf{EndFmla}(d_1) = {}^{\#}\varphi^{\#}$, $\mathsf{EndFmla}(d_2) = {}^{\#}\psi^{\#}$, $n = 0$, और $k = 1$। अतः हम $\mathsf{FollowsBy}_{\wedge\text{Intro}}(d)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}(d)_0 = 2 \wedge \mathsf{DischargeLabel}(d) = 0 \wedge \mathsf{LastRule}(d) = 1 \wedge \\ \mathsf{EndFmla}(d) = \\ {}^{\#}({}^{\#} \frown \mathsf{EndFmla}((d)_1) \frown {}^{\#}\wedge^{\#} \frown \mathsf{EndFmla}((d)_2) \frown {}^{\#})^{\#}.\end{aligned}$$

दूसरा सरल उदाहरण $=$Intro नियम है। इसका कोई आधारवाक्य नहीं है, इसलिए मान्यताओं की तरह $(d)_0 = 0$। इसका कोई मुक्ति-लेबल भी नहीं है, अर्थात् $n = 0$। किंतु किसी बंद पद t के लिए φ, $t = t$ के रूप का होना चाहिए। यहाँ एक आदिम पुनरावर्ती परिभाषा यह है:

$$\begin{aligned}(d)_0 = 0 \wedge \mathsf{DischargeLabel}(d) = 0 \wedge \\ (\exists t < d)\ (\mathsf{ClTerm}(t) \wedge \mathsf{EndFmla}(d) = \\ {}^{\#}{=}({}^{\#} \frown t \frown {}^{\#},{}^{\#} \frown t \frown {}^{\#})^{\#}).\end{aligned}$$

एक अधिक जटिल उदाहरण में, $\mathsf{FollowsBy}_{\to\text{Intro}}(d)$ तभी लागू होता है जब δ का अंतिम सूत्र, $(\varphi \to \psi)$ के रूप का हो, δ_1 का अंतिम सूत्र, ψ हो और δ में लेबल n वाली हर मान्यता φ के रूप की हो। इसे हम निम्न प्रकार आदिम पुनरावर्ती रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}(d)_0 = 1 \wedge \\ (\exists a < d)\ (\mathsf{Discharge}(a, (d)_1, \mathsf{DischargeLabel}(d)) \wedge \\ \mathsf{EndFmla}(d) = ({}^{\#}({}^{\#} \frown a \frown {}^{\#}{\to}^{\#} \frown \mathsf{EndFmla}((d)_1) \frown {}^{\#})^{\#}))\end{aligned}$$

(a को φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या मानें)।

एक और उदाहरण के लिए $\exists$Intro पर विचार करें। यहाँ δ का अंतिम अनुमान तभी सही है जब कोई सूत्र φ, कोई बंद पद t और कोई चर x ऐसे हों कि $\varphi[t/x]$, व्युत्पत्ति δ_1 का अंतिम सूत्र हो और $\exists x\, \varphi$ अंतिम अनुमान का निष्कर्ष हो। अतः $\text{FollowsBy}_{\exists\text{Intro}}(d)$ तभी लागू होता है जब

$$\begin{aligned}(d)_0 = 1 \land \text{DischargeLabel}(d) = 0 \land \\ (\exists a < d)\ (\exists x < d)\ (\exists t < d)\ (\text{ClTerm}(t) \land \text{Var}(x) \land \\ \text{Subst}(a, t, x) = \text{EndFmla}((d)_1) \land \text{EndFmla}(d) = ({}^{\#}\exists^{\#} \frown x \frown a)).\end{aligned}$$

तब हम $\text{Correct}(d)$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\begin{aligned}\text{Sent}(\text{EndFmla}(d)) \land \\ (\text{LastRule}(d) = 1 \land \text{FollowsBy}_{\land\text{Intro}}(d)) \lor \cdots \lor \\ (\text{LastRule}(d) = 16 \land \text{FollowsBy}_{=\text{Elim}}(d)) \lor \\ (\exists n < d)\ (\exists x < d)\ (d = \langle 0, x, n\rangle).\end{aligned}$$

पहली पंक्ति सुनिश्चित करती है कि d का अंतिम सूत्र कोई वाक्य है। अंतिम पंक्ति उस मामले को समेटती है जिसमें d केवल एक मान्यता है। □

प्रतिज्ञप्ति 34.22. *वह संबंध* $\text{Deriv}(d)$ *आदिम पुनरावर्ती है, जो तब लागू होता है जब* d *किसी सही व्युत्पत्ति* δ *की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो।*

प्रमाण. व्युत्पत्ति δ तभी सही है जब उसका प्रत्येक अनुमान किसी नियम का सही अनुप्रयोग हो, अर्थात् जब उसकी प्रत्येक उप-व्युत्पत्ति का अंत किसी सही अनुमान में हो। अतः $\text{Deriv}(d)$ तभी लागू होता है जब

$$(\forall i < \text{len}(\text{SubtreeSeq}(d)))\ \text{Correct}((\text{SubtreeSeq}(d))_i)$$ □

प्रतिज्ञप्ति 34.23. *संबंध* $\text{OpenAssum}(z, d)$ *तब लागू होता है जब* z*, ग्योडेल (Gödel) संख्या* d *वाली व्युत्पत्ति* δ *की किसी अमुक्त मान्यता* φ *की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो; यह संबंध आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. मान्यता की कोई उपस्थिति तभी मुक्त होती है जब वह δ की ऐसी उप-व्युत्पत्ति में लेबल n के साथ आती है, जिसका अंत मुक्ति-लेबल n वाले नियम में होता है। अतः φ, δ की a अमुक्त मान्यता तभी है जब उसकी कम-से-कम एक उपस्थिति δ में मुक्त न हो। हमें सावधान रहना चाहिए: δ में φ की मुक्त और अमुक्त, दोनों प्रकार की उपस्थितियाँ हो सकती हैं।

ऐसे अनुक्रम δ_0, ..., δ_k पर विचार करें जिसमें $\delta_0 = \delta$, δ_k मान्यता $[\varphi]^n$ है (किसी n के लिए), और δ_{i+1}, δ_i की तात्कालिक उप-व्युत्पत्ति है। यदि ऐसा अनुक्रम मौजूद है जिसमें किसी δ_i का अंत मुक्ति-लेबल n वाले अनुमान में नहीं होता, तो φ, δ की a अमुक्त मान्यता है।

आदिम पुनरावर्ती फलन $\text{SubtreeSeq}(d)$ हमें δ की सभी उप-व्युत्पत्तियाँ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का अनुक्रम देता है। δ की उप-व्युत्पत्तियाँ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का प्रत्येक अनुक्रम इसका उपानुक्रम है। उपानुक्रम होना आदिम पुनरावर्ती संबंध है: $\text{Subseq}(s, s')$ तभी लागू होता है जब $(\forall i < \text{len}(s))\ \exists j < \text{len}(s')\ (s)_i = (s')_j$। तात्कालिक उप-व्युत्पत्ति होना भी ऐसा ही है: $\text{Subderiv}(d, d')$ तभी लागू होता है जब $(\exists j < (d')_0)\ d = (d')_j$। अतः हम $\text{OpenAssum}(z, d)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}(\exists s < \text{SubtreeSeq}(d))\ (\text{Subseq}(s, \text{SubtreeSeq}(d)) \land (s)_0 = d \land \\ (\exists n < d)\ ((s)_{\text{len}(s) \dot{-} 1} = \langle 0, z, n\rangle \land \\ (\forall i < (\text{len}(s) \dot{-} 1))\ (\text{Subderiv}((s)_{i+1}, (s)_i) \land \\ \text{DischargeLabel}((s)_i) \neq n))).\end{aligned}$$ □

प्रतिज्ञप्ति 34.24. *मान लें कि Γ, वाक्यों का आदिम पुनरावर्ती समुच्चय है। तब संबंध $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$, जो व्यक्त करता है कि "$x$, Γ में स्थित अमुक्त मान्यताओं से φ की व्युत्पत्ति δ का कूट है और y, φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या है", आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. मान लें कि "$y \in \Gamma$" आदिम पुनरावर्ती विधेय $R_\Gamma(y)$ द्वारा दिया गया है। हमें दिखाना है कि $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ आदिम पुनरावर्ती है; यह संबंध तभी लागू होता है जब y किसी वाक्य φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो और x, ऐसे स्वाभाविक निगमन व्युत्पत्ति का कूट हो जिसका अंतिम सूत्र φ है तथा जिसकी सभी अमुक्त मान्यताएँ Γ में हैं।

प्रतिज्ञप्ति 34.22 के अनुसार वह गुण $\mathrm{Deriv}(x)$ आदिम पुनरावर्ती है, जो तभी लागू होता है जब x स्वाभाविक निगमन की किसी सही व्युत्पत्ति δ की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। अतः हम $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y) \Leftrightarrow \mathrm{Deriv}(x) \wedge \mathrm{EndFmla}(x) = y \wedge \\ (\forall z < x)\ (\mathrm{OpenAssum}(z, x) \to R_\Gamma(z)).\end{aligned}$$

□

34.8 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति का अंकगणितीकरण करने के लिए हमें व्युत्पत्ति को संख्याओं के रूप में निरूपित करना होगा। चूँकि व्युत्पत्ति केवल सूत्र के अनुक्रम हैं, स्वाभाविक उपाय प्रत्येक व्युत्पत्ति को उसमें आए सूत्र के कूटों के अनुक्रम के कूट के रूप में कूटित करना है।

परिभाषा 34.25. यदि δ, सूत्र φ_1, ..., φ_n से बनी अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति है, तो ${}^\#\delta^\#$ है

$$\langle {}^\#\varphi_1{}^\#, \ldots, {}^\#\varphi_n{}^\# \rangle.$$

उदाहरण 34.26. इस बहुत सरल व्युत्पत्ति पर विचार करें:

1. $\psi \to (\psi \vee \varphi)$
2. $(\psi \to (\psi \vee \varphi)) \to (\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi)))$
3. $\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))$

इस व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या होगी

$$\begin{aligned}\langle\ & {}^\#\psi \to (\psi \vee \varphi)^\#, \\ & {}^\#(\psi \to (\psi \vee \varphi)) \to (\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi)))^\#, \\ & {}^\#\varphi \to (\psi \to (\psi \vee \varphi))^\#\ \rangle.\end{aligned}$$

व्युत्पत्ति का निरूपण तय कर लेने पर हमें यह भी दिखाना होगा कि ऐसी व्युत्पत्ति पर आदिम पुनरावर्ती ढंग से क्रियाएँ की जा सकती हैं और उनके आवश्यक गुणों तथा संबंधों को भी उसी ढंग से व्यक्त किया जा सकता है। कुछ संक्रियाएँ सरल हैं: उदाहरणतः किसी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या d दिए जाने पर $(d)_{\mathrm{len}(d)-1}$ उसके अंतिम-सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या देता है। कुछ संक्रियाएँ कहीं अधिक कठिन हैं। हम कम-से-कम यह रूपरेखा देंगे कि उन्हें कैसे किया जाए। लक्ष्य यह दिखाना है कि "δ, Γ से φ की व्युत्पत्ति है" संबंध, δ और φ की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं में आदिम पुनरावर्ती है।

प्रतिज्ञप्ति 34.27. *निम्न संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं:*

1. *φ एक अभिगृहीत है।*

2. *δ की i-वीं पंक्ति मोडस पोनेन्स से औचित्यप्राप्त है।*

3. *δ की i-वीं पंक्ति qr से औचित्यप्राप्त है।*

4. *δ एक सही व्युत्पत्ति है।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं और व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं के बीच संगत संबंध आदिम पुनरावर्ती हैं।

1. हमारे पास अभिगृहीत-प्रतिरूपों की एक दी हुई सूची है, और यदि φ इनमें से किसी प्रतिरूप द्वारा दिए गए रूप का है, तो वह अभिगृहीत है। चूँकि प्रतिरूपों की सूची परिमित है, इतना दिखाना पर्याप्त है कि प्रत्येक अभिगृहीत-प्रतिरूप के लिए हम आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँच सकते हैं कि φ उस रूप का है या नहीं। उदाहरण के लिए, अभिगृहीत-प्रतिरूप पर विचार करें
$$\psi \to (\chi \to \psi).$$
φ इस अभिगृहीत-प्रतिरूप का उदाहरण है यदि ऐसे सूत्र ψ और χ हैं कि '(', ψ, '$\to$', '(', χ, '$\to$', ψ और '))' को जोड़ने पर φ मिलता है। हम φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या n का संगत गुण जाँच सकते हैं, क्योंकि अनुक्रमों का संयोजन आदिम पुनरावर्ती है और ψ तथा χ की ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या से छोटी होनी चाहिए; संबंध लागू होने पर ψ और χ, दोनों φ के उप-सूत्र हैं। अतः हम परिभाषित कर सकते हैं:
$$\mathrm{IsAx}_{\psi\to(\chi\to\psi)}(n) \Leftrightarrow (\exists b < n)\ (\exists c < n)\ (\mathrm{Sent}(b) \wedge \mathrm{Sent}(c) \wedge \\ n = {}^{\#}(^{\#} \frown b \frown {}^{\#}\to^{\#} \frown {}^{\#}(^{\#} \frown c \frown {}^{\#}\to^{\#} \frown b \frown {}^{\#}))^{\#}).$$
यदि प्रत्येक अभिगृहीत-प्रतिरूप के लिए ऐसी परिभाषा हो, तो उनका वियोजन गुण $\mathrm{IsAx}(n)$, "n किसी अभिगृहीत की ग्योडेल (Gödel) संख्या है", परिभाषित करता है।

2. δ की i-वीं पंक्ति मोडस पोनेन्स से औचित्यप्राप्त है यदि और केवल यदि ऐसी पंक्तियाँ j और $k < i$ हैं जिनमें पंक्ति j का वाक्य कोई सूत्र φ, पंक्ति k का वाक्य $\varphi \to \psi$, और पंक्ति i का वाक्य ψ है।
$$\mathrm{MP}(d, i) \Leftrightarrow (\exists j < i)\ (\exists k < i) \\ (d)_k = {}^{\#}(^{\#} \frown (d)_j \frown {}^{\#}\to^{\#} \frown (d)_i \frown {}^{\#})^{\#}$$
चूँकि परिबद्ध परिमाणीकरण, संयोजन और $=$ आदिम पुनरावर्ती हैं, यह एक आदिम पुनरावर्ती संबंध परिभाषित करता है।

3. δ की कोई पंक्ति qr से औचित्यप्राप्त है यदि वह $\psi \to \forall x\, \varphi(x)$ रूप की है, कोई पिछली पंक्ति किसी अचर c के लिए $\psi \to \varphi(c)$ है, और c, ψ में नहीं आता। यह लागू होता है यदि और केवल यदि
   a) कोई वाक्य ψ है, और
   b) केवल एक चर x मुक्त रखने वाला सूत्र $\varphi(x)$ ऐसा है कि
   c) पंक्ति i में $\psi \to \forall x\, \varphi(x)$ है,
   d) किसी पंक्ति $j < i$ में किसी अचर c के लिए $\psi \to \varphi[c/x]$ है,
   e) और वह अचर ψ में नहीं आता।

इन सभी को आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँचा जा सकता है, क्योंकि ψ, $\varphi(x)$ और x की ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ पंक्ति i के सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या से छोटी हैं, और a की संख्या पंक्ति j के सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या से छोटी है:

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}_1(d,i) \Leftrightarrow (\exists b < (d)_i)\ (\exists x < (d)_i)\ (\exists a < (d)_i)\ (\exists c < (d)_j)\ (&\\ \mathrm{Var}(x) \wedge \mathrm{Const}(c) \wedge&\\ (d)_i = \sharp(\# \frown b \frown \sharp{\to}\# \frown \sharp\forall\# \frown x \frown a \frown \sharp)\# \wedge&\\ (d)_j = \sharp(\# \frown b \frown \sharp{\to}\# \frown \mathrm{Subst}(a,c,x) \frown \sharp)\# \wedge&\\ \mathrm{Sent}(b) \wedge \mathrm{Sent}(\mathrm{Subst}(a,c,x)) \wedge (\forall k < \mathrm{len}(b))\ (b)_k \neq (c)_0)&\end{aligned}$$

यहाँ हम मानते हैं कि c और x, पदों के रूप में लिए गए चर और अचर की ग्योडेल (Gödel) संख्याएँ हैं (अर्थात् उनके चिह्न-कूट नहीं)। हम यह जाँचकर परीक्षण करते हैं कि x, $\varphi(x)$ का एकमात्र मुक्त चर है कि $\varphi(x)[c/x]$ वाक्य है या नहीं; और ψ के प्रत्येक चिह्न को c से भिन्न अपेक्षित करके सुनिश्चित करते हैं कि c, ψ में नहीं आता।

qr का दूसरा रूप अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

4. d किसी सही व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या है यदि और केवल यदि उसकी प्रत्येक पंक्ति अभिगृहीत है अथवा मोडस पोनेन्स या qr से औचित्यप्राप्त है। अतः:

$$\mathrm{Deriv}(d) \Leftrightarrow (\forall i < \mathrm{len}(d))\ (\mathrm{IsAx}((d)_i) \vee \mathrm{MP}(d,i) \vee \mathrm{QR}(d,i)) \qquad \square$$

प्रतिज्ञप्ति 34.28. *मान लें कि Γ, वाक्य का आदिम पुनरावर्ती समुच्चय है। तब यह व्यक्त करने वाला संबंध $\mathrm{Prf}_\Gamma(x,y)$ कि "x, Γ से φ की व्युत्पत्ति δ का कूट है और y, φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या है", आदिम पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. मान लें कि "$y \in \Gamma$" आदिम पुनरावर्ती विधेय $R_\Gamma(y)$ से दिया गया है। हमें दिखाना है कि संबंध $\mathrm{Prf}_\Gamma(x,y)$ आदिम पुनरावर्ती है, जहाँ $\mathrm{Prf}_\Gamma(x,y)$ तब लागू होता है जब y किसी वाक्य φ की ग्योडेल (Gödel) संख्या और x, Γ से φ की व्युत्पत्ति का कूट हो।

पिछली प्रतिज्ञप्ति के अनुसार गुण $\mathrm{Deriv}(x)$, जो तभी लागू होता है जब x किसी सही व्युत्पत्ति δ का कूट हो, आदिम पुनरावर्ती है। किंतु उस परिभाषा ने व्युत्पत्ति की पंक्तियों को औचित्य देने के अतिरिक्त उपाय के रूप में समुच्चय Γ को सम्मिलित नहीं किया। किसी पंक्ति के qr से औचित्यप्राप्त होने के हमारे आदिम पुनरावर्ती परीक्षण ने यह अपेक्षा भी छोड़ दी कि अचर c को Γ में आने की अनुमति नहीं। परिभाषा में संशोधन करके Γ को सीधे सम्मिलित करना संभव है, किंतु Deriv और निगमन प्रमेय का उपयोग अधिक सरल है। $\Gamma \vdash \varphi$ यदि और केवल यदि वाक्य की कोई परिमित सूची ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ ऐसी है कि $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi$। और निगमन प्रमेय के अनुसार यह तब लागू होता है जब $\vdash (\psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots))$। ग्योडेल (Gödel) संख्या z वाला कोई वाक्य इस रूप का है या नहीं, इसे आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँचा जा सकता है। इसलिए x को Γ *से* ग्योडेल (Gödel) संख्या y वाले वाक्य की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या मानने के स्थान पर हम x को $\emptyset$ से उपर्युक्त रूप के अंतर्निहित प्रतिबंधात्मक की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या मानते हैं।

पहले, यदि हमारे पास वाक्य का कोई अनुक्रम है, तो हम आदिम पुनरावर्ती ढंग से ऐसा प्रतिबंधात्मक बना सकते हैं जिसमें ये सभी वाक्य पूर्वपक्ष और दिया हुआ वाक्य उत्तरपक्ष हो:

$$\begin{aligned}\mathrm{hCond}(s,y,0) &= y\\ \mathrm{hCond}(s,y,n+1) &= \sharp(\# \frown (s)_n \frown \sharp{\to}\# \frown \mathrm{Cond}(s,y,n) \frown \sharp)\#\\ \mathrm{Cond}(s,y) &= \mathrm{hCond}(s,y,\mathrm{len}(s))\end{aligned}$$

अतः हम $\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}\mathrm{Prf}_\Gamma(x, y) \Leftrightarrow (\exists s < \mathrm{sequenceBound}(x, x))\ (&\\ &(x)_{\mathrm{len}(x)-1} = \mathrm{Cond}(s, y) \wedge \\ &(\forall i < \mathrm{len}(s))\ (s)_i \in \Gamma \wedge \\ &\mathrm{Deriv}(x)).\end{aligned}$$

s पर परिसीमा इस बात से मिलती है कि प्रत्येक $(s)_i$, व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति के किसी उप-सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या है; अर्थात् वह $(x)_{\mathrm{len}(x)-1}$ से छोटा है। पूर्वपक्षों $\psi \in \Gamma$ की संख्या, अर्थात् s की लंबाई, x की अंतिम पंक्ति की लंबाई से छोटी है। □

प्रश्न

प्रश्न 34.1. दिखाएँ कि अनुक्रम $\langle \ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle$ को $\ulcorner t_1, \ldots, t_n \urcorner$ में बदलने वाला फलन $\mathrm{flatten}(z)$ आदिम पुनरावर्ती है।

प्रश्न 34.2. प्रतिज्ञप्ति 34.5 के पहले प्रमाण की पद्धति पर प्रतिज्ञप्ति 34.8 का विस्तृत प्रमाण दें।

प्रश्न 34.3. प्रतिज्ञप्ति 34.9 सिद्ध करें। आप इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि किसी सूत्र की प्रत्येक ऐसी उपडोरी जो स्वयं सूत्र है, उसका उप-सूत्र है।

प्रश्न 34.4. प्रतिज्ञप्ति 34.12 सिद्ध करें।

प्रश्न 34.5. प्रतिज्ञप्ति 34.15 की भाँति निम्न गुण परिभाषित करें:

1. $\mathrm{FollowsBy}_{\mathrm{Cut}}(p)$,
2. $\mathrm{FollowsBy}_{\to\mathrm{L}}(p)$,
3. $\mathrm{FollowsBy}_{=}(p)$,
4. $\mathrm{FollowsBy}_{\forall\mathrm{R}}(p)$।

अंतिम गुण के लिए आपको यह भी दिखाना होगा कि आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँचा जा सकता है कि ग्योडेल (Gödel) संख्या p वाली व्युत्पत्ति का अंतिम अनुमान स्वचर-शर्त पूरी करता है या नहीं; अर्थात् $\forall$R का स्वचर a अंतिम अनुक्रम में नहीं आता।

प्रश्न 34.6. निम्न गुणों को प्रतिज्ञप्ति 34.21 की भाँति परिभाषित करें:

1. $\mathrm{FollowsBy}_{\to\mathrm{Elim}}(d)$,
2. $\mathrm{FollowsBy}_{=\mathrm{Elim}}(d)$,
3. $\mathrm{FollowsBy}_{\vee\mathrm{Elim}}(d)$,
4. $\mathrm{FollowsBy}_{\forall\mathrm{Intro}}(d)$।

अंतिम गुण के लिए आपको यह भी दिखाना होगा कि हम आदिम पुनरावर्ती ढंग से जाँच सकते हैं कि ग्योडेल (Gödel) संख्या d वाली व्युत्पत्ति का अंतिम अनुमान स्वचर-प्रतिबंध को संतुष्ट करता है या नहीं; अर्थात् $\forall$Intro अनुमान का स्वचर a, न तो d के अंतिम सूत्र में और न d की किसी खुली मान्यता में आता है। इसके लिए आप प्रतिज्ञप्ति 34.23 का आदिम पुनरावर्ती विधेय OpenAssum उपयोग कर सकते हैं।

प्रश्न 34.7. प्रतिज्ञप्ति 34.27 की भाँति निम्न संबंध परिभाषित करें:

1. $\mathrm{IsAx}_{\varphi\to(\psi\to(\varphi\wedge\psi))}(n)$,
2. $\mathrm{IsAx}_{\forall x\,\varphi(x)\to\varphi(t)}(n)$,
3. $\mathrm{QR}_2(d,i)$ (qr के दूसरे रूप के लिए)।

अध्याय 35

Q में निरूपणीयता

35.1 परिचय

अपूर्णता-प्रमेय उन सिद्धांतों पर लागू होते हैं जिनमें संगणनीय फलनों के मूलभूत तथ्यों को व्यक्त और सिद्ध किया जा सकता है। हम ऐसे एक अत्यंत न्यूनतम सिद्धांत का वर्णन करेंगे, जिसे "Q" (अथवा कभी-कभी रफ़ाएल रॉबिन्सन के नाम पर "रॉबिन्सन का Q") कहते हैं। हम बताएँगे कि किसी फलन का Q में *निरूपणीय* होने का क्या अर्थ है और फिर यह सिद्ध करेंगे:

> कोई फलन Q में तभी और केवल तभी निरूपणीय है जब वह संगणनीय है।

एक बात तो यह है कि इससे हमें संगणनीयता का एक और प्रतिरूप मिलता है। किंतु हम इसका उपयोग यह दिखाने के लिए भी करेंगे कि समुच्चय $\{\varphi : \mathsf{Q} \vdash \varphi\}$ निर्णेय नहीं है: हम विराम समस्या को इस समस्या में घटाएँगे। जब तक हमारी चर्चा पूरी होगी, तब तक हम इससे कहीं अधिक प्रबल परिणाम सिद्ध कर चुके होंगे।

Q की भाषा अंकगणित की भाषा है; Q में निम्न अभिगृहीत हैं (जिन्हें तादात्म्य सहित प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के अन्य अभिगृहीतों और नियमों के साथ उपयोग करना है):

$$\forall x\, \forall y\, (x' = y' \to x = y) \tag{Q_1}$$
$$\forall x\, \mathsf{o} \neq x' \tag{Q_2}$$
$$\forall x\, (x = \mathsf{o} \lor \exists y\, x = y') \tag{Q_3}$$
$$\forall x\, (x + \mathsf{o}) = x \tag{Q_4}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x + y') = (x + y)' \tag{Q_5}$$
$$\forall x\, (x \times \mathsf{o}) = \mathsf{o} \tag{Q_6}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \times y') = ((x \times y) + x) \tag{Q_7}$$
$$\forall x\, \forall y\, (x < y \leftrightarrow \exists z\, (z' + x) = y) \tag{Q_8}$$

प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए अंक-सूचक $\overline{n}$ को वह पद $\mathsf{o}''^{\cdots\prime}$ परिभाषित करें जिसमें कुल n प्राइम चिह्न हों। अतः $\overline{0}$ केवल अचर o है, $\overline{1}$, o' है, $\overline{2}$, o'' है, इत्यादि।

अंकगणित के सिद्धांत के रूप में Q *अत्यंत* दुर्बल है; उदाहरणतः, इसमें $\forall x\, x \neq x'$ अथवा $\forall x\, \forall y\, (x + y) = (y + x)$ जैसे बहुत सरल तथ्य भी सिद्ध नहीं किए जा सकते। किंतु हम देखेंगे कि Q के इतना रोचक होने का बड़ा कारण *ठीक यही* है कि वह इतना दुर्बल है। वास्तव में वह अपूर्णता-प्रमेय को लागू करने भर के लिए मुश्किल से पर्याप्त प्रबल है। Q के रोचक होने का दूसरा कारण यह है कि उसके अभिगृहीतों का समुच्चय *परिमित* है।

Q से अधिक प्रबल सिद्धांत (जिसे *पियानो अंकगणित* **PA** कहते हैं) Q में आगमन की एक योजना जोड़कर मिलता है:

$$(\varphi(\mathsf{o}) \land \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x\, \varphi(x)$$

जहाँ $\varphi(x)$ कोई भी सूत्र है। यदि $\varphi(x)$ में x के अतिरिक्त कोई और मुक्त चरों हों, तो हम उन सबको बाँधने के लिए आरंभ में सार्विक परिमाणक जोड़ते हैं (ताकि आगमन-योजना का संगत उदाहरण वाक्य हो)। उदाहरणतः, यदि $\varphi(x, y)$ में चर y भी मुक्त हो, तो संगत उदाहरण है

$$\forall y\,((\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x\,\varphi(x))$$

आगमन-योजना के उदाहरणों का उपयोग करके **PA** के अभिगृहीतों से उन तथ्यों से कहीं अधिक सिद्ध किया जा सकता है जो **Q** के अभिगृहीतों से सिद्ध होते हैं। वास्तव में, प्राकृतिक संख्याओं के ऐसे "स्वाभाविक" कथन ढूँढ़ने में काफी मेहनत लगती है जिन्हें पियानो अंकगणित में सिद्ध नहीं किया जा सकता!

परिभाषा 35.1. प्राकृतिक संख्याओं से प्राकृतिक संख्याओं में जाने वाला फलन $f(x_0, \ldots, x_k)$ **Q** *में निरूपणीय* कहलाता है यदि कोई सूत्र $\varphi_f(x_0, \ldots, x_k, y)$ ऐसा हो कि जब भी $f(n_0, \ldots, n_k) = m$ हो, **Q** निम्न दोनों को सिद्ध करे:

1. $\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$,
2. $\forall y\,(\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, y) \to \overline{m} = y)$।

इस परिभाषा को कहने के और भी ढंग हैं; उदाहरणतः, हम समतुल्य रूप से यह माँग सकते थे कि **Q**, $\forall y\,(\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m})$ को सिद्ध करे।

प्रमेय 35.2. *कोई फलन* **Q** *में तभी और केवल तभी निरूपणीय है जब वह संगणनीय है।*

इस प्रमेय के प्रमाण की दो दिशाएँ हैं। वाक्यविन्यास का अंकगणितीकरण उपलब्ध हो जाने पर बाएँ-से-दाएँ दिशा काफी सीधी है। दूसरी दिशा के लिए अधिक काम चाहिए। मूल विचार यह है: हम "संगणनीय" को सटीक बनाने के लिए "सामान्य पुनरावर्ती" को चुनते हैं और दिखाते हैं कि प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन **Q** में निरूपणीय है। याद करें कि कोई फलन सामान्य पुनरावर्ती है यदि उसे zero, उत्तराधिकारी फलन succ और प्रक्षेप फलनों P_i^n से संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और नियमित न्यूनीकरण का उपयोग करके परिभाषित किया जा सके। अतः प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन को **Q** में निरूपणीय दिखाने का एक ढंग यह दिखाना है कि मूल फलन निरूपणीय हैं और जब कुछ फलन निरूपणीय हों, तो उनसे संयोजन, आदिम पुनरावर्तन तथा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित फलन भी निरूपणीय हों। दूसरे शब्दों में, हम दिखा सकते हैं कि मूल फलन निरूपणीय हैं और निरूपणीय फलन संयोजन, आदिम पुनरावर्तन तथा नियमित न्यूनीकरण के अंतर्गत "संवृत" हैं। इससे प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन की निरूपणीयता सुनिश्चित होती है।

पर यह पता चलता है कि निरूपणीय फलनों का आदिम पुनरावर्तन के अंतर्गत संवृत होना दिखाने वाला चरण कठिन है। इस चरण से बचने के लिए हम पहले दिखाते हैं कि वास्तव में हम आदिम पुनरावर्तन के बिना काम चला सकते हैं। अर्थात् हम दिखाते हैं कि प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन को केवल संयोजन और नियमित न्यूनीकरण का उपयोग करके मूल फलनों से परिभाषित किया जा सकता है। इसके लिए हम दिखाते हैं कि आदिम पुनरावर्तन वस्तुतः एक विशिष्ट नियमित न्यूनीकरण द्वारा किया जा सकता है। किंतु इसे सफल बनाने के लिए हमें कुछ अतिरिक्त मूल फलन जोड़ने होंगे: जोड़, गुणन और सर्वसमिका-संबंध का अभिलाक्षणिक फलन $\chi_=$। तब हम यह दिखाकर प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं कि ये सभी मूल फलन **Q** में निरूपणीय हैं और निरूपणीय फलन संयोजन तथा नियमित न्यूनीकरण के अंतर्गत संवृत हैं।

35.2 Q में निरूपणीय फलन संगणनीय हैं

हम सिद्ध करेंगे कि **Q** में निरूपणीय प्रत्येक फलन संगणनीय है। पहले हमें **Q** में निरूपणीय फलनों के बारे में एक उपपत्ति स्थापित करनी होगी।

सहायक प्रमेय 35.3. *यदि* $f(x_0, \ldots, x_k)$, **Q** *में निरूपणीय है, तो कोई सूत्र* $\varphi(x_0, \ldots, x_k, y)$ *ऐसा है कि*

$$\mathbf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m}) \quad \textit{तभी और केवल तभी जब} \quad m = f(n_0, \ldots, n_k).$$

प्रमाण. "यदि" भाग परिभाषा 35.1(1) है। "केवल यदि" भाग इस प्रकार मिलता है: मान लें कि $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$, किंतु $m \neq f(n_0, \ldots, n_k)$। मानें $l = f(n_0, \ldots, n_k)$। परिभाषा 35.1(1) के अनुसार $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{l})$। परिभाषा 35.1(2) के अनुसार $\forall y\, (\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, y) \to \overline{l} = y)$। तर्कशास्त्र और इस मान्यता का उपयोग करके कि $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$, हमें मिलता है कि $\mathsf{Q} \vdash \overline{l} = \overline{m}$। दूसरी ओर, सहायक प्रमेय 35.14 के अनुसार $\mathsf{Q} \vdash \overline{l} \neq \overline{m}$। अतः Q असंगत है। किंतु यह असंभव है, क्योंकि Q मानक प्रतिरूप द्वारा संतुष्ट होता है (देखें परिभाषा 33.2), $\mathfrak{N} \vDash \mathsf{Q}$, और सुदृढ़ता प्रमेय के अनुसार संतुष्टनीय सिद्धांत सदैव संगत होते हैं (उपप्रमेय 19.31, 20.29, 21.31 और 22.38)। □

सहायक प्रमेय 35.4. *Q में निरूपणीय प्रत्येक फलन संगणनीय है।*

प्रमाण. पहले यह सत्य क्यों है, इसका सहज विचार दें। f को संगणित करने के लिए हम यह करते हैं। अंकगणित की भाषा में सभी संभव व्युत्पत्तियाँ δ की सूची बनाएँ। यह यांत्रिक रूप से किया जा सकता है। प्रत्येक के लिए जाँचें कि क्या वह $\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$ रूप के किसी सूत्र की व्युत्पत्ति है (अर्थात् सहायक प्रमेय 35.3 का वह सूत्र जो Q में f का निरूपण करता है)। यदि हाँ, तो सहायक प्रमेय 35.3 के अनुसार $m = f(n_0, \ldots, n_k)$, और हमें f का मान मिल गया है। खोज समाप्त होती है, क्योंकि $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{f(n_0, \ldots, n_k)})$; अतः अंततः हमें सही प्रकार का कोई δ मिल जाता है।

यह अभी पूरी तरह सटीक नहीं है, क्योंकि हमारी प्रक्रिया केवल संख्याओं के स्थान पर व्युत्पत्तियाँ और सूत्रों पर काम करती है, और हमने ठीक-ठीक यह नहीं बताया कि "सभी संभव व्युत्पत्तियाँ की सूची बनाना" यांत्रिक रूप से क्यों संभव है। किंतु जैसा हमने देखा है, पदों, सूत्रों और व्युत्पत्तियाँ को ग्योडेल (Gödel) संख्याओं से कूटबद्ध किया जा सकता है। हमने संगणना का एक सटीक प्रतिरूप—सामान्य पुनरावर्ती फलन—भी प्रस्तुत किया है। और हमने देखा है कि संबंध $\mathrm{Prf}_{\mathsf{Q}}(d, y)$ (जो तभी लागू होता है जब d, Q के अभिगृहीतों से ग्योडेल (Gödel) संख्या y वाले सूत्र की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो) (आदिम) पुनरावर्ती है। हमें जिन अन्य आदिम पुनरावर्ती फलनों की आवश्यकता होगी, वे num (प्रतिज्ञप्ति 34.6) और Subst (प्रतिज्ञप्ति 34.11) हैं। इनसे f को न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है; अतः f पुनरावर्ती है।

पहले परिभाषित करें

$$A(n_0, \ldots, n_k, m) = \mathrm{Subst}(\mathrm{Subst}(\ldots \mathrm{Subst}(\ulcorner\varphi_f\urcorner, \mathrm{num}(n_0), \ulcorner x_0 \urcorner), \ldots), \mathrm{num}(n_k), \ulcorner x_k \urcorner), \mathrm{num}(m), \ulcorner y \urcorner).$$

यह जटिल दिखता है, किंतु यह केवल फलन $A(n_0, \ldots, n_k, m) = \ulcorner\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})\urcorner$ है।

अब संबंध $R(n_0, \ldots, n_k, s)$ पर विचार करें, जो तब लागू होता है जब $(s)_0$, Q से $\varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{(s)_1})$ की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो:

$$R(n_0, \ldots, n_k, s) \quad \text{तभी और केवल तभी जब} \quad \mathrm{Prf}_{\mathsf{Q}}((s)_0, A(n_0, \ldots, n_k, (s)_1))$$

यदि हमें ऐसा s मिल जाए जिसके लिए $R(n_0, \ldots, n_k, s)$ लागू हो, तो हमें संख्याओं का ऐसा युग्म—$(s)_0$ और $(s)_1$—मिल गया है जिसमें $(s)_0$, $A_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, (s)_1)$ की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या है। अतः s को खोजना अनौपचारिक प्रमाण के d और m युग्म को खोजने जैसा है। ऐसे s को "खोजने वाला" संगणनीय फलन नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है। ध्यान दें कि R नियमित है: प्रत्येक n_0, ..., n_k के लिए $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{f(n_0, \ldots, n_k)})$ की कोई व्युत्पत्ति δ है; इसलिए $s = \langle \ulcorner\delta\urcorner, f(n_0, \ldots, n_k)\rangle$ के लिए $R(n_0, \ldots, n_k, s)$ लागू होता है। अतः हम f को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$f(n_0, \ldots, n_k) = (\mu s\, R(n_0, \ldots, n_k, s))_1. \qquad \square$$

35.3 बीटा फलन उपपत्ति

यह दिखाने के लिए कि जोड़, गुणन और $\chi_=$ उपलब्ध होने पर हम आदिम पुनरावर्तन कर सकते हैं, हमें अनुक्रमों को सँभालने वाले फलन विकसित करने होंगे। (यदि हमारे पास घातांक भी होता, तो हमारा कार्य अधिक सरल होता।) जब हमारे पास आदिम पुनरावर्तन था, तब हम "n-वीं अभाज्य संख्या" जैसी चीजें परिभाषित करके काफी सीधा कूटलेखन चुन सकते थे। किंतु यहाँ हमारे पास आदिम पुनरावर्तन नहीं है—वास्तव में हम यह दिखाना चाहते हैं कि न्यूनीकरण का उपयोग करके आदिम पुनरावर्तन किया जा सकता है—इसलिए हमें कुछ अधिक चतुर होना होगा।

सहायक प्रमेय 35.5. *ऐसा कोई फलन $\beta(d,i)$ है कि प्रत्येक अनुक्रम a_0, ..., a_n के लिए कोई संख्या d ऐसी है कि प्रत्येक $i \leq n$ के लिए $\beta(d,i) = a_i$। इसके अतिरिक्त β को मूल फलनों से केवल संयोजन और नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।*

d को अनुक्रम $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ का कूट और $\beta(d,i)$ को उसका i-वाँ अवयव लौटाने वाला फलन समझें। (ध्यान दें कि इस "कूटलेखन" में वह अभाज्य-घात कूटलेखन *नहीं* प्रयुक्त होता जिससे हम पहले ही परिचित हैं!) उपपत्ति बहुत न्यूनतम दावा करती है; वह यह नहीं कहती कि हम अनुक्रमों को जोड़ सकते हैं या उनमें अवयव अंत में लगा सकते हैं, बल्कि यह भी नहीं कहती कि संयोजन और नियमित न्यूनीकरण से परिभाष्य फलनों द्वारा a_0, ..., a_n से d को *संगणित* कर सकते हैं। वह केवल इतना कहती है कि ऐसा एक "विकूटन" फलन है जिससे प्रत्येक अनुक्रम "कूटबद्ध" होता है।

β संकेतन ग्योडेल (Gödel) का है। फिर कहें तो उपपत्ति सिद्ध करने का कठिन भाग इन देखने में सीमित साधनों से उपयुक्त β परिभाषित करना है, अर्थात् केवल संयोजन और न्यूनीकरण से—यद्यपि हमें जोड़, गुणन और $\chi_=$ का उपयोग करने की अनुमति है। इस उपपत्ति को सिद्ध करने के कई ढंग हैं, किंतु सबसे साफ ढंगों में अब भी ग्योडेल (Gödel) की मूल विधि है, जिसमें सुन ज़ी प्रमेय (परंपरागत नाम "चीनी शेषफल प्रमेय") नामक संख्या-सैद्धांतिक तथ्य का उपयोग हुआ था।

परिभाषा 35.6. दो प्राकृतिक संख्याएँ a और b *परस्पर अभाज्य* तभी और केवल तभी हैं जब उनका महत्तम समापवर्तक 1 हो; दूसरे शब्दों में, उनका कोई और उभयनिष्ठ भाजक न हो।

परिभाषा 35.7. प्राकृतिक संख्याएँ a और b, *मापांक c के अनुसार सर्वांगसम* हैं, $a \equiv b \mod c$, तभी और केवल तभी जब $c \mid (a-b)$; अर्थात् c से भाग देने पर a और b का शेषफल समान हो।

सुन ज़ी प्रमेय यह है:

प्रमेय 35.8. *मान लें कि x_0, ..., x_n (युग्मशः) परस्पर अभाज्य हैं। y_0, ..., y_n कोई भी संख्याएँ हों। तब कोई संख्या z ऐसी है कि*

$$\begin{aligned} z &\equiv y_0 \mod x_0 \\ z &\equiv y_1 \mod x_1 \\ &\vdots \\ z &\equiv y_n \mod x_n. \end{aligned}$$

हम सुन ज़ी प्रमेय का उपयोग इस प्रकार करेंगे: यदि x_0, ..., x_n क्रमशः y_0, ..., y_n से बड़े हैं, तो हम z को अनुक्रम $\langle y_0, \ldots, y_n \rangle$ का कूट मान सकते हैं। y_i को वापस पाने के लिए केवल z को x_i से भाग देकर शेषफल लेना होगा। इस कूटलेखन का उपयोग करने के लिए हमें x_0, ..., x_n के उपयुक्त मान खोजने होंगे।

इस संबंध में कुछ प्रेक्षण हमारी सहायता करेंगे। y_0, ..., y_n दिए जाने पर मानें

$$\begin{aligned} j &= \max(n, y_0+1, \ldots, y_n+1), \\ m &= \operatorname{lcm}(1, \ldots, j), \end{aligned}$$

और मानें

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 + m \\ x_1 &= 1 + 2 \cdot m \\ x_2 &= 1 + 3 \cdot m \\ &\vdots \\ x_n &= 1 + (n+1) \cdot m. \end{aligned}$$

तब दो बातें सत्य हैं:

1. $x_0, \ldots, x_n$ परस्पर अभाज्य हैं।
2. प्रत्येक i के लिए $y_i < x_i$।

यह देखने के लिए कि (1) सत्य है, ध्यान दें कि यदि p अभाज्य संख्या है और $p \mid x_i$ तथा $p \mid x_k$, तो $p \mid 1+(i+1)m$ और $p \mid 1 + (k+1)m$। किंतु तब p उनके अंतर को विभाजित करता है,

$$(1 + (i+1)m) - (1 + (k+1)m) = (i-k)m.$$

चूँकि p, $1 + (i+1)m$ को विभाजित करता है, वह m को भी विभाजित नहीं कर सकता (अन्यथा पहले भाग में शेषफल 1 आता)। अतः p, $i-k$ को विभाजित करता है, क्योंकि p, $(i-k)m$ को विभाजित करता है। किंतु $|i-k|$ अधिकतम n है और हमने $j \geq n$ चुना है, इसलिए इससे $p \mid m$ निकलता है, जो फिर विरोधाभास है। अतः कोई अभाज्य संख्या x_i और x_k दोनों को विभाजित नहीं करती। अनुच्छेद (2) सरल है: हमारे पास $y_i < j \leq m < x_i$ है।

अब β फलन उपपत्ति सिद्ध करें। याद करें कि हम 0, उत्तराधिकारी, जोड़, गुणन, $\chi_=$, प्रक्षेप और उनसे संयोजन तथा नियमित फलनों पर लागू न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किसी भी फलन का उपयोग कर सकते हैं। किसी संबंध का अभिलाक्षणिक फलन इस प्रकार परिभाष्य हो तो हम उस संबंध का भी उपयोग कर सकते हैं। पहले की तरह हम दिखा सकते हैं कि ये संबंध बूलीय संयोजनों और परिबद्ध परिमाणीकरण के अंतर्गत संवृत हैं; उदाहरणतः:

$$\begin{aligned} \text{not}(x) &= \chi_=(x, 0) \\ (\min x \leq z)\, R(x,y) &= \mu x\, (R(x,y) \vee x = z) \\ (\exists x \leq z)\, R(x,y) &\Leftrightarrow R((\min x \leq z)\, R(x,y), y). \end{aligned}$$

तब हम दिखा सकते हैं कि निम्न सभी भी आदिम पुनरावर्तन के बिना परिभाष्य हैं:

1. युग्मन फलन, $J(x,y) = \frac{1}{2}[(x+y)(x+y+1)] + x$;
2. प्रक्षेप फलन

$$\begin{aligned} K(z) &= (\min x \leq z)\, (\exists y \leq z)\, z = J(x,y), \\ L(z) &= (\min y \leq z)\, (\exists x \leq z)\, z = J(x,y); \end{aligned}$$

3. लघुतर संबंध $x < y$;
4. भाज्यता संबंध $x \mid y$;
5. फलन $\text{rem}(x,y)$, जो y को x से भाग देने पर प्राप्त शेषफल लौटाता है।

अब परिभाषित करें

$$\beta^*(d_0, d_1, i) = \text{rem}(1 + (i+1)d_1, d_0) \text{ और}$$
$$\beta(d, i) = \beta^*(K(d), L(d), i).$$

यही वह फलन है जो हमें चाहिए। ऊपर की भाँति $a_0, \ldots, a_n$ दिए जाने पर मानें

$$j = \max(n, a_0 + 1, \ldots, a_n + 1),$$

और $d_1 = \text{lcm}(1, \ldots, j)$ मानें। ऊपर के (1) के अनुसार हम जानते हैं कि $1 + d_1$, $1 + 2d_1$, ..., $1 + (n+1)d_1$ परस्पर अभाज्य हैं, और (2) के अनुसार वे क्रमशः $a_0, \ldots, a_n$ से बड़े हैं। सुन ज़ी प्रमेय के अनुसार कोई मान d_0 ऐसा है कि प्रत्येक i के लिए

$$d_0 \equiv a_i \mod (1 + (i+1)d_1)$$

और इसलिए (d_1, a_i से बड़ा होने के कारण)

$$a_i = \text{rem}(1 + (i+1)d_1, d_0).$$

$d = J(d_0, d_1)$ मानें। तब प्रत्येक $i \leq n$ के लिए हमारे पास

$$\begin{aligned}\beta(d, i) &= \beta^*(d_0, d_1, i) \\ &= \text{rem}(1 + (i+1)d_1, d_0) \\ &= a_i\end{aligned}$$

है, और यही हमें चाहिए था। इससे β-फलन उपपत्ति का प्रमाण पूरा होता है।

35.4 आदिम पुनरावर्तन का अनुकरण

अब हम दिखा सकते हैं कि बीटा फलन का उपयोग करके आदिम पुनरावर्तन द्वारा दी गई परिभाषा का नियमित न्यूनीकरण द्वारा "अनुकरण" किया जा सकता है। मान लें कि हमारे पास $f(\vec{x})$ और $g(\vec{x}, y, z)$ हैं। तब f और g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित फलन $h(x, \vec{z})$ है

$$h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$
$$h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)).$$

हमें दिखाना है कि मूल फलनों और उनसे संयोजन तथा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित फलनों (जैसे β) का उपयोग करते हुए, h को f और g से केवल संयोजन तथा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

सहायक प्रमेय 35.9. *यदि h को f और g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है, तो उसे f, g, फलनों* zero, succ, P_i^n, add, mult, $\chi_=$ *से संयोजन तथा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।*

प्रमाण. पहले एक सहायक फलन $\hat{h}(\vec{x}, y)$ परिभाषित करें जो वह न्यूनतम संख्या d लौटाता है जिसके द्वारा d से कूटबद्ध अनुक्रम निम्न शर्तें पूरी करता है:

1. $(d)_0 = f(\vec{x})$, और
2. प्रत्येक $i < y$ के लिए $(d)_{i+1} = g(\vec{x}, i, (d)_i)$,

जहाँ अब $(d)_i$, $\beta(d,i)$ का संक्षिप्त रूप है। दूसरे शब्दों में, $\hat{h}$ अनुक्रम $\langle h(\vec{x},0), h(\vec{x},1), \ldots, h(\vec{x},y)\rangle$ लौटाता है। हम $\hat{h}$ को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\hat{h}(\vec{x},y) = \mu d\ (\beta(d,0) = f(\vec{x}) \wedge (\forall i < y)\ \beta(d,i+1) = g(\vec{x},i,\beta(d,i)).$$

ध्यान दें: यहाँ आदिम पुनरावर्तन की आवश्यकता नहीं है, केवल न्यूनीकरण की है। जिस फलन का हम न्यूनीकरण करते हैं, वह बीटा फलन उपपत्ति सहायक प्रमेय 35.5 के कारण नियमित है।

किंतु अब हमारे पास

$$h(\vec{x},y) = \beta(\hat{h}(\vec{x},y),y),$$

है, इसलिए h को मूल फलनों से केवल संयोजन और नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है। □

35.5 मूल फलन Q में निरूपणीय हैं

पहले हमें दिखाना है कि सभी मूल फलन Q में निरूपणीय हैं। अंततः हमें दिखाना होगा कि प्रत्येक k-स्थानीय मूल फलन $f(x_0,\ldots,x_{k-1})$ को उसका निरूपण करने वाला कोई सूत्र $\varphi_f(x_0,\ldots,x_{k-1},y)$ कैसे नियत किया जाए।

हम शून्य, उत्तराधिकारी, जोड़, गुणन, समता के अभिलाक्षणिक फलन और प्रक्षेपों का निरूपण कर सकेंगे। प्रत्येक मामले में उपयुक्त निरूपक सूत्र पूरी तरह सीधा है; उदाहरणतः शून्य का निरूपण सूत्र $y = 0$ द्वारा, उत्तराधिकारी का निरूपण सूत्र $x_0' = y$ द्वारा और जोड़ का निरूपण सूत्र $(x_0 + x_1) = y$ द्वारा होता है। काम यह दिखाने में है कि Q संबद्ध वाक्यों को सिद्ध कर सकता है; उदाहरणतः ऊपर के सूत्र द्वारा जोड़ का निरूपण होने का अर्थ यह दिखाना है कि प्राकृतिक संख्याओं m और n के प्रत्येक युग्म के लिए Q सिद्ध करता है

$$\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m} \text{ और}$$
$$\forall y\,((\overline{n} + \overline{m}) = y \to y = \overline{n+m}).$$

प्रतिज्ञप्ति 35.10. *शून्य फलन* $\mathrm{zero}(x) = 0$ *का* Q *में निरूपण* $\varphi_{\mathrm{zero}}(x,y) \equiv y = 0$ *द्वारा होता है।*

प्रतिज्ञप्ति 35.11. *उत्तराधिकारी फलन* $\mathrm{succ}(x) = x + 1$ *का* Q *में निरूपण* $\varphi_{\mathrm{succ}}(x,y) \equiv y = x'$ *द्वारा होता है।*

प्रतिज्ञप्ति 35.12. *प्रक्षेप फलन* $P_i^n(x_0,\ldots,x_{n-1}) = x_i$ *का* Q *में निरूपण*

$$\varphi_{P_i^n}(x_0,\ldots,x_{n-1},y) \equiv y = x_i.$$

द्वारा होता है।

प्रतिज्ञप्ति 35.13. *समता (=) का अभिलाक्षणिक फलन,*

$$\chi_=(x_0,x_1) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x_0 = x_1 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

का Q *में निरूपण*

$$\varphi_{\chi_=}(x_0,x_1,y) \equiv (x_0 = x_1 \wedge y = \overline{1}) \vee (x_0 \neq x_1 \wedge y = \overline{0}).$$

द्वारा होता है।

प्रमाण के लिए निम्न उपपत्ति चाहिए।

सहायक प्रमेय 35.14. *प्राकृतिक संख्याएँ n और m दी गई हों। यदि $n \neq m$, तो* **Q** $\vdash \overline{n} \neq \overline{m}$।

प्रमाण. n पर आगमन का उपयोग करके दिखाएँ कि प्रत्येक m के लिए, यदि $n \neq m$, तो $Q \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$।

आधार मामले में $n = 0$। यदि m, 0 के बराबर नहीं है, तो किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए $m = k + 1$। हमारे पास अभिगृहीत $\forall x\, 0 \neq x'$ है। किसी परिमाणक-अभिगृहीत द्वारा x के स्थान पर $\overline{k}$ रखकर हम $0 \neq \overline{k}'$ निष्कर्षित कर सकते हैं। किंतु $\overline{k}'$ केवल $\overline{m}$ है।

आगमन चरण में हम मान सकते हैं कि दावा n के लिए सत्य है और $n+1$ पर विचार करते हैं। m कोई भी प्राकृतिक संख्या हो। दो संभावनाएँ हैं: या तो $m = 0$, अथवा किसी k के लिए $m = k + 1$। पहला मामला ऊपर की तरह हल होता है। दूसरे मामले में मान लें कि $n + 1 \neq k + 1$। तब $n \neq k$। n के लिए आगमन परिकल्पना से हमारे पास **Q** $\vdash \overline{n} \neq \overline{k}$ है। हमारे पास अभिगृहीत $\forall x\, \forall y\, x' = y' \to x = y$ है। किसी परिमाणक-अभिगृहीत से हमें $\overline{n}' = \overline{k}' \to \overline{n} = \overline{k}$ मिलता है। प्रतिज्ञप्तिक तर्क का उपयोग करके हम **Q** में $\overline{n} \neq \overline{k} \to \overline{n}' \neq \overline{k}'$ निष्कर्षित कर सकते हैं। मोडस पोनेन्स से हमें $\overline{n}' \neq \overline{k}'$ मिलता है, और यही हमें चाहिए, क्योंकि $\overline{k}'$, $\overline{m}$ है। □

ध्यान दें कि उपपत्ति बहुत बड़ा दावा नहीं करती: मूलतः वह कहती है कि **Q** सिद्ध कर सकता है कि अलग-अलग अंक-सूचक अलग वस्तुओं को निर्दिष्ट करते हैं। उदाहरणतः, **Q** सिद्ध करता है कि $0'' \neq 0'''$। किंतु इसे सामान्य रूप में दिखाने के लिए कुछ सावधानी चाहिए। यह भी ध्यान दें कि यद्यपि हम आगमन का उपयोग कर रहे हैं, यह **Q** के *बाहर* का आगमन है।

प्रतिज्ञप्ति 35.13 का प्रमाण. यदि $n = m$, तो $\overline{n}$ और $\overline{m}$ एक ही पद हैं, और $\chi_=(n, m) = 1$। किंतु **Q** $\vdash (\overline{n} = \overline{m} \wedge \overline{1} = \overline{1})$, इसलिए वह $\varphi_=(\overline{n}, \overline{m}, \overline{1})$ को सिद्ध करता है। यदि $n \neq m$, तो $\chi_=(n, m) = 0$। सहायक प्रमेय 35.14 के अनुसार **Q** $\vdash \overline{n} \neq \overline{m}$, और इसलिए $(\overline{n} \neq \overline{m} \wedge \mathsf{o} = \mathsf{o})$ भी। अतः **Q** $\vdash \varphi_=(\overline{n}, \overline{m}, \overline{0})$।

दूसरे भाग के लिए भी दो मामले हैं। यदि $n = m$, तो हमें दिखाना है कि **Q** $\vdash \forall y\, (\varphi_=(\overline{n}, \overline{m}, y) \to y = \overline{1})$। अनौपचारिक रूप से तर्क करते हुए, मान लें कि $\varphi_=(\overline{n}, \overline{m}, y)$, अर्थात्

$$(\overline{n} = \overline{n} \wedge y = \overline{1}) \vee (\overline{n} \neq \overline{n} \wedge y = \overline{0})$$

बायाँ वियोज्य तर्क द्वारा $y = \overline{1}$ देता है; दायाँ वियोज्य $\overline{n} = \overline{n}$ के विरुद्ध है, जो तर्क द्वारा सिद्ध है।

दूसरी ओर मान लें कि $n \neq m$। तब $\varphi_=(\overline{n}, \overline{m}, y)$ है

$$(\overline{n} = \overline{m} \wedge y = \overline{1}) \vee (\overline{n} \neq \overline{m} \wedge y = \overline{0})$$

यहाँ बायाँ वियोज्य $\overline{n} \neq \overline{m}$ के विरुद्ध है, जो सहायक प्रमेय 35.14 के अनुसार **Q** में सिद्ध है; दायाँ वियोज्य $y = \overline{0}$ निष्पन्न करता है। □

प्रतिज्ञप्ति 35.15. *जोड़ फलन* $\mathrm{add}(x_0, x_1) = x_0 + x_1$ *का* **Q** *में निरूपण*

$$\varphi_{\mathrm{add}}(x_0, x_1, y) \equiv y = (x_0 + x_1).$$

द्वारा होता है।

सहायक प्रमेय 35.16. **Q** $\vdash (\overline{n} + \overline{m}) = \overline{n + m}$।

प्रमाण. हम इसे m पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं। यदि $m = 0$, तो दावा है कि **Q** $\vdash (\overline{n} + \mathsf{o}) = \overline{n}$। यह अभिगृहीत Q_4 से निकलता है। अब दावा m के लिए मानें; $m + 1$ के लिए दावा सिद्ध करें, अर्थात् सिद्ध करें कि **Q** $\vdash (\overline{n} + \overline{m + 1}) = \overline{n + m + 1}$। ध्यान दें कि $\overline{m + 1}$ केवल $\overline{m}'$ और $\overline{n + m + 1}$ केवल $\overline{n + m}'$ है। अभिगृहीत Q_5 से **Q** $\vdash (\overline{n} + \overline{m}') = (\overline{n} + \overline{m})'$। आगमन परिकल्पना से **Q** $\vdash (\overline{n} + \overline{m}) = \overline{n + m}$। अतः **Q** $\vdash (\overline{n} + \overline{m}') = \overline{n + m}'$। □

प्रतिज्ञप्ति 35.15 का प्रमाण. add का निरूपण करने वाला सूत्र $\varphi_{\text{add}}(x_0, x_1, y)$, $y = (x_0 + x_1)$ है। पहले हम दिखाते हैं कि यदि $\text{add}(n, m) = k$, तो $\mathbf{Q} \vdash \varphi_{\text{add}}(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$, अर्थात् $\mathbf{Q} \vdash \overline{k} = (\overline{n} + \overline{m})$। किंतु $k = n + m$ होने से $\overline{k}$ केवल $\overline{n+m}$ है, और हम सहायक प्रमेय 35.16 में दिखा चुके हैं कि $\mathbf{Q} \vdash (\overline{n} + \overline{m}) = \overline{n+m}$।

हमें यह भी दिखाना है कि यदि $\text{add}(n, m) = k$, तो

$$\mathbf{Q} \vdash \forall y\, (\varphi_{\text{add}}(\overline{n}, \overline{m}, y) \to y = \overline{k}).$$

मान लें कि हमारे पास $(\overline{n} + \overline{m}) = y$ है। चूँकि

$$\mathbf{Q} \vdash (\overline{n} + \overline{m}) = \overline{n+m},$$

हम बाएँ पक्ष को $\overline{n+m}$ से बदलकर स्वेच्छ y के लिए $\overline{n+m} = y$ प्राप्त कर सकते हैं। □

प्रतिज्ञप्ति 35.17. *गुणन फलन* $\text{mult}(x_0, x_1) = x_0 \cdot x_1$ *का* **Q** *में निरूपण*

$$\varphi_{\text{mult}}(x_0, x_1, y) \equiv y = (x_0 \times x_1).$$

द्वारा होता है।

प्रमाण. अभ्यास। □

सहायक प्रमेय 35.18. $\mathbf{Q} \vdash (\overline{n} \times \overline{m}) = \overline{n \cdot m}$ *।*

प्रमाण. अभ्यास। □

याद करें कि हम अंकगणित की भाषा के फलन-चिह्न के लिए $\times$ और संख्याओं पर सामान्य गुणन-संक्रिया के लिए $\cdot$ का उपयोग करते हैं। अतः $\cdot$ संख्याओं के व्यंजकों के बीच आ सकता है (जैसे $m \cdot n$ में), जबकि $\times$ केवल अंकगणित की भाषा के पदों के बीच आता है (जैसे $(\overline{m} \times \overline{n})$ में)। और भी भ्रमकारी ढंग से, $+$ का उपयोग फलन-चिह्न और जोड़-संक्रिया दोनों के लिए होता है। जब वह पदों के बीच आता है—उदाहरणतः $(\overline{n} + \overline{m})$ में—तो वह अंकगणित की भाषा का 2-स्थानीय फलन-चिह्न है, और जब वह संख्याओं के बीच आता है—उदाहरणतः $n + m$ में—तो वह जोड़-संक्रिया है। इसमें $\overline{n+m}$ का मामला भी शामिल है: यह संख्या $n + m$ के संगत मानक अंक-सूचक है।

35.6 संयोजन Q में निरूपणीय है

मान लें कि h इस प्रकार परिभाषित है:

$$h(x_0, \ldots, x_{l-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

और हम पहले ही ऐसे सूत्रों $\varphi_f, \varphi_{g_0}, \ldots, \varphi_{g_{k-1}}$ पा चुके हैं जो क्रमशः फलनों f और g_0, ..., g_{k-1} का निरूपण करते हैं। हमें h का निरूपण करने वाला कोई सूत्र φ_h खोजना है।

एक सरल मामले से आरंभ करें जिसमें सभी फलन 1-स्थानीय हैं, अर्थात् $h(x) = f(g(x))$ पर विचार करें। यदि $\varphi_f(y, z)$, f का और $\varphi_g(x, y)$, g का निरूपण करता है, तो हमें h का निरूपण करने वाला कोई सूत्र $\varphi_h(x, z)$ चाहिए। ध्यान दें कि $h(x) = z$ तभी और केवल तभी जब कोई y ऐसा हो कि $z = f(y)$ और $y = g(x)$ दोनों हों। (यदि $h(x) = z$, तो $g(x)$ ऐसा y है; और यदि ऐसा कोई y मौजूद है, तो $y = g(x)$ तथा $z = f(y)$ होने से $z = f(g(x))$।) इससे संकेत मिलता है कि $\exists y\, (\varphi_g(x, y) \wedge \varphi_f(y, z))$, $\varphi_h(x, z)$ के लिए अच्छा प्रत्याशी है। हमें केवल यह सत्यापित करना है कि **Q** संबद्ध सूत्रों को सिद्ध करता है।

प्रतिज्ञप्ति 35.19. *यदि* $h(n) = m$, *तो* $\mathbf{Q} \vdash \varphi_h(\overline{n}, \overline{m})$ *।*

प्रमाण. मान लें $h(n) = m$, अर्थात् $f(g(n)) = m$। मानें $k = g(n)$। तब

$$\mathbf{Q} \vdash \varphi_g(\overline{n}, \overline{k})$$

क्योंकि φ_g, g का निरूपण करता है, और

$$\mathbf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{k}, \overline{m})$$

क्योंकि φ_f, f का निरूपण करता है। अतः

$$\mathbf{Q} \vdash \varphi_g(\overline{n}, \overline{k}) \land \varphi_f(\overline{k}, \overline{m})$$

और फलतः

$$\mathbf{Q} \vdash \exists y\, (\varphi_g(\overline{n}, y) \land \varphi_f(y, \overline{m})),$$

अर्थात् $\mathbf{Q} \vdash \varphi_h(\overline{n}, \overline{m})$। □

प्रतिज्ञप्ति 35.20. *यदि $h(n) = m$, तो $\mathbf{Q} \vdash \forall z\, (\varphi_h(\overline{n}, z) \to z = \overline{m})$।*

प्रमाण. मान लें $h(n) = m$, अर्थात् $f(g(n)) = m$। मानें $k = g(n)$। तब

$$\mathbf{Q} \vdash \forall y\, (\varphi_g(\overline{n}, y) \to y = \overline{k})$$

क्योंकि φ_g, g का निरूपण करता है, और

$$\mathbf{Q} \vdash \forall z\, (\varphi_f(\overline{k}, z) \to z = \overline{m})$$

क्योंकि φ_f, f का निरूपण करता है। थोड़े-से तर्क का उपयोग करके हम यह भी दिखा सकते हैं कि

$$\mathbf{Q} \vdash \forall z\, (\exists y\, (\varphi_g(\overline{n}, y) \land \varphi_f(y, z)) \to z = \overline{m}).$$

अर्थात् $\mathbf{Q} \vdash \forall y\, (\varphi_h(\overline{n}, y) \to y = \overline{m})$। □

यही विचार उस अधिक जटिल मामले में भी काम करता है जिसमें f और g_i की स्थानिकता 1 से अधिक है।

प्रतिज्ञप्ति 35.21. *यदि $\varphi_f(y_0, \ldots, y_{k-1}, z)$, $\mathbf{Q}$ में $f(y_0, \ldots, y_{k-1})$ का निरूपण करता है, और $\varphi_{g_i}(x_0, \ldots, x_{l-1}, y)$, $\mathbf{Q}$ में $g_i(x_0, \ldots, x_{l-1})$ का निरूपण करता है, तो*

$$\exists y_0 \ldots \exists y_{k-1}\, (\varphi_{g_0}(x_0, \ldots, x_{l-1}, y_0) \land \cdots \land \\ \varphi_{g_{k-1}}(x_0, \ldots, x_{l-1}, y_{k-1}) \land \varphi_f(y_0, \ldots, y_{k-1}, z))$$

फलन

$$h(x_0, \ldots, x_{l-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

का निरूपण करता है।

प्रमाण. अभ्यास। □

35.7 नियमित न्यूनीकरण Q में निरूपणीय है

अपरिबद्ध खोज पर विचार करें। मान लें कि $g(x, z)$ नियमित है और **Q** में, मान लें सूत्र $\varphi_g(x, z, y)$ द्वारा, निरूपणीय है। f को $f(z) = \mu x\ [g(x, z) = 0]$ द्वारा परिभाषित करें। हम f का निरूपण करने वाला कोई सूत्र $\varphi_f(z, y)$ खोजना चाहते हैं। $f(z)$ का मान वह संख्या x है जो (क) $g(x, z) = 0$ को संतुष्ट करती है और (ख) ऐसी सबसे छोटी संख्या है, अर्थात् प्रत्येक $w < x$ के लिए $g(w, z) \neq 0$। अतः निम्न सूत्र स्वाभाविक चुनाव है:

$$\varphi_f(z, y) \equiv \varphi_g(y, z, \mathsf{o}) \wedge \forall w\,(w < y \to \neg\varphi_g(w, z, \mathsf{o})).$$

निस्संदेह सामान्य मामले में हमें z के स्थान पर z_0, ..., z_k रखने होंगे।

प्रमाण में फिर उन बातों के बारे में कुछ उपपत्तियाँ आएँगी जिन्हें सिद्ध करने के लिए **Q** पर्याप्त प्रबल है।

सहायक प्रमेय 35.22. *प्रत्येक अचर a और प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए*

$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \overline{n}) = (a + \overline{n})'.$$

प्रमाण. सामान्यतः प्रमाण n पर आगमन द्वारा है। आधार मामले में $n = 0$; हमें दिखाना है कि **Q**, $(a' + \mathsf{o}) = (a + \mathsf{o})'$ को सिद्ध करता है। किंतु हमारे पास है:

$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \mathsf{o}) = a' \quad \text{अभिगृहीत } Q_4 \text{ से} \tag{35.1}$$
$$\mathbf{Q} \vdash (a + \mathsf{o}) = a \quad \text{अभिगृहीत } Q_4 \text{ से} \tag{35.2}$$
$$\mathbf{Q} \vdash (a + \mathsf{o})' = a' \quad \text{समीकरण (35.2) से} \tag{35.3}$$
$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \mathsf{o}) = (a + \mathsf{o})' \quad \text{समीकरण (35.1) और समीकरण (35.3) से।}$$

आगमन चरण में हम मान सकते हैं कि हमने $\mathbf{Q} \vdash (a' + \overline{n}) = (a + \overline{n})'$ दिखा दिया है। चूँकि $\overline{n+1}$, $\overline{n}'$ है, हमें दिखाना है कि **Q**, $(a' + \overline{n}') = (a + \overline{n}')'$ को सिद्ध करता है। हमारे पास है:

$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \overline{n}') = (a' + \overline{n})' \quad \text{अभिगृहीत } Q_5 \text{ से} \tag{35.4}$$
$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \overline{n}') = (a + \overline{n}')' \quad \text{आगमन परिकल्पना} \tag{35.5}$$
$$\mathbf{Q} \vdash (a' + \overline{n})' = (a + \overline{n}')' \quad \text{समीकरण (35.4) और समीकरण (35.5) से।}$$

□

यह फिर उल्लेखनीय है कि यह उस कथन से दुर्बल है जिसके अनुसार **Q**, $\forall x\,\forall y\,(x' + y) = (x + y)'$ को सिद्ध करता है। यद्यपि यह वाक्य, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, **Q** इसे सिद्ध नहीं करता।

सहायक प्रमेय 35.23. $\mathbf{Q} \vdash \forall x\,\neg x < \mathsf{o}$।

प्रमाण. हम प्रमाण अनौपचारिक रूप से देते हैं (अर्थात् औपचारिक व्युत्पत्ति बनाने के केवल संकेत देते हैं)।

हमें स्वेच्छ a के लिए $\neg a < \mathsf{o}$ सिद्ध करना है। $<$ की परिभाषा से हमें **Q** में $\neg\exists y\,(y' + a) = \mathsf{o}$ सिद्ध करना होगा। हम $\exists y\,(y' + a) = \mathsf{o}$ मानकर विरोधाभास सिद्ध करेंगे। मान लें $(b' + a) = \mathsf{o}$। Q_3 का उपयोग करके हमारे पास $a = \mathsf{o} \vee \exists y\, a = y'$ है। हम मामलों में भेद करते हैं।

मामला 1: $a = \mathsf{o}$ लागू है। $(b' + a) = \mathsf{o}$ से हमारे पास $(b' + \mathsf{o}) = \mathsf{o}$ है। **Q** के अभिगृहीत Q_4 से हमारे पास $(b' + \mathsf{o}) = b'$ है, और इसलिए $b' = \mathsf{o}$। किंतु अभिगृहीत Q_2 से हमारे पास $b' \neq \mathsf{o}$ भी है, जो विरोधाभास है।

मामला 2: किसी c के लिए $a = c'$। किंतु तब हमारे पास $(b' + c') = \mathsf{o}$ है। अभिगृहीत Q_5 से हमारे पास $(b' + c)' = \mathsf{o}$ है, जो फिर अभिगृहीत Q_2 के विरुद्ध है। □

सहायक प्रमेय 35.24. *प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए*

$$\mathbf{Q} \vdash \forall x\,(x < \overline{n+1} \to (x = \mathsf{o} \vee \cdots \vee x = \overline{n})).$$

प्रमाण. हम n पर आगमन का उपयोग करते हैं। आधार मामले $n = 0$ पर विचार करें। उस मामले में हमें स्वेच्छ a के लिए $a < \overline{1} \to a = \mathsf{o}$ दिखाना है। मान लें $a < \overline{1}$। तब $<$ के परिभाषक अभिगृहीत से हमारे पास $\exists y\,(y' + a) = \mathsf{o}'$ है (क्योंकि $\overline{1} \equiv \mathsf{o}'$)।

मान लें कि b में यह गुण है, अर्थात् हमारे पास $(b' + a) = \mathsf{o}'$ है। हमें $a = \mathsf{o}$ दिखाना है। अभिगृहीत Q_3 से या तो $a = \mathsf{o}$, अथवा कोई c ऐसा है कि $a = c'$। पहले मामले में कुछ सिद्ध करना शेष नहीं। अतः मान लें $a = c'$। तब हमारे पास $(b' + c') = \mathsf{o}'$ है। **Q** के अभिगृहीत Q_5 से हमारे पास $(b' + c)' = \mathsf{o}'$ है। अभिगृहीत Q_1 से हमारे पास $(b' + c) = \mathsf{o}$ है। किंतु अभिगृहीत Q_8 से इसका अर्थ है कि $c < \mathsf{o}$, जो सहायक प्रमेय 35.23 के विरुद्ध है।

अब आगमन चरण लें। n का मामला मानकर हम $n+1$ का मामला सिद्ध करते हैं। अतः मान लें $a < \overline{n+2}$। फिर Q_3 का उपयोग करके हम दो मामलों में भेद कर सकते हैं: $a = \mathsf{o}$, अथवा किसी b के लिए $a = b'$। पहले मामले में $a = \mathsf{o} \vee \cdots \vee a = \overline{n+1}$ तुच्छतः निकलता है। दूसरे मामले में हमारे पास $b' < \overline{n+2}$, अर्थात् $b' < \overline{n+1}'$ है। अभिगृहीत Q_8 से किसी c के लिए $(c' + b') = \overline{n+1}'$। अभिगृहीत Q_5 से $(c' + b)' = \overline{n+1}'$। अभिगृहीत Q_1 से $(c' + b) = \overline{n+1}$, और इसलिए अभिगृहीत Q_8 से $b < \overline{n+1}$। आगमन परिकल्पना से $b = \mathsf{o} \vee \cdots \vee b = \overline{n}$। इससे तर्क द्वारा $b' = \mathsf{o}' \vee \cdots \vee b' = \overline{n}'$ मिलता है, और $a = b'$ होने से $a = \overline{1} \vee \cdots \vee a = \overline{n+1}$। □

सहायक प्रमेय 35.25. *प्रत्येक प्राकृतिक संख्या m के लिए*

$$\mathbf{Q} \vdash \forall y\,((y < \overline{m} \vee \overline{m} < y) \vee y = \overline{m}).$$

प्रमाण. प्रमाण m पर आगमन द्वारा है। पहले $m = 0$ का मामला लें। Q_3 से $\mathbf{Q} \vdash \forall y\,(y = \mathsf{o} \vee \exists z\, y = z')$। a को स्वेच्छ मानें। तब या तो $a = \mathsf{o}$, अथवा किसी b के लिए $a = b'$। पहले मामले में हमारे पास $(a < \mathsf{o} \vee \mathsf{o} < a) \vee a = \mathsf{o}$ भी है। किंतु यदि $a = b'$, तो $=$ के तर्क से $(b' + \mathsf{o}) = (a + \mathsf{o})$। Q_4 से $(a + \mathsf{o}) = a$, अतः हमारे पास $(b' + \mathsf{o}) = a$ और फलतः $\exists z\,(z' + \mathsf{o}) = a$ है। Q_8 में $<$ की परिभाषा से $\mathsf{o} < a$। यदि $\mathsf{o} < a$, तो $(\mathsf{o} < a \vee a < \mathsf{o}) \vee a = \mathsf{o}$ भी।

अब मान लें कि हमारे पास

$$\mathbf{Q} \vdash \forall y\,((y < \overline{m} \vee \overline{m} < y) \vee y = \overline{m})$$

है और हम दिखाना चाहते हैं कि

$$\mathbf{Q} \vdash \forall y\,((y < \overline{m+1} \vee \overline{m+1} < y) \vee y = \overline{m+1}).$$

a को स्वेच्छ मानें। Q_3 से या तो $a = \mathsf{o}$, अथवा किसी b के लिए $a = b'$। पहले मामले में Q_4 से हमारे पास $\overline{m}' + a = \overline{m+1}$ है, और इसलिए Q_8 से $a < \overline{m+1}$।

अब दूसरे मामले $a = b'$ पर विचार करें। आगमन परिकल्पना से $(b < \overline{m} \vee \overline{m} < b) \vee b = \overline{m}$।

पहला वियोज्य $b < \overline{m}$, Q_8 से, $\exists z\,(z' + b) = \overline{m}$ के समतुल्य है। मान लें c में यह गुण है। यदि $(c' + b) = \overline{m}$, तो $(c' + b)' = \overline{m}'$ भी। Q_5 से $(c' + b)' = (c' + b')$। अतः $(c' + b') = \overline{m}'$। c' पर अस्तित्वात्मक व्यापकीकरण करके और $\overline{m}' \equiv \overline{m+1}$ ध्यान में रखकर हमें $\exists u\,(u' + b') = \overline{m+1}$ मिलता है। अतः यदि $b < \overline{m}$, तो $b' < \overline{m+1}$ और इसलिए $a < \overline{m+1}$।

अब मान लें $\overline{m} < b$, अर्थात् $\exists z\,(z' + \overline{m}) = b$। मान लें c ऐसा z है, अर्थात् $(c' + \overline{m}) = b$। तर्क से $(c' + \overline{m})' = b'$। Q_5 से $(c' + \overline{m}') = b'$। चूँकि $a = b'$ और $\overline{m}' \equiv \overline{m+1}$, इसलिए $(c' + \overline{m+1}) = a$। Q_8 से $\overline{m+1} < a$।

अंततः मान लें $b = \overline{m}$। तब तर्क से $b' = \overline{m}'$, और इसलिए $a = \overline{m+1}$।

इस प्रकार m और b के मामले के प्रत्येक वियोज्य से हम $m+1$ और a के लिए संगत वियोज्य प्राप्त कर सकते हैं। □

प्रतिज्ञप्ति 35.26. *यदि $\varphi_g(x, z, y)$, **Q** में $g(x, z)$ का निरूपण करता है, तो*

$$\varphi_f(z, y) \equiv \varphi_g(y, z, \mathsf{o}) \wedge \forall w\,(w < y \to \neg\varphi_g(w, z, \mathsf{o}))$$

$f(z) = \mu x\,[g(x, z) = 0]$ का निरूपण करता है।

प्रमाण. पहले हम दिखाते हैं कि यदि $f(n) = m$, तो $\mathsf{Q} \vdash \varphi_f(\overline{n}, \overline{m})$, अर्थात्

$$\mathsf{Q} \vdash \varphi_g(\overline{m}, \overline{n}, \mathsf{o}) \land \forall w\,(w < \overline{m} \to \neg\varphi_g(w, \overline{n}, \mathsf{o})).$$

चूँकि $\varphi_g(x, z, y)$, $g(x, z)$ का निरूपण करता है और $f(n) = m$ हो तो $g(m, n) = 0$, हमारे पास है

$$\mathsf{Q} \vdash \varphi_g(\overline{m}, \overline{n}, \mathsf{o}).$$

यदि $f(n) = m$, तो प्रत्येक $k < m$ के लिए $g(k, n) \neq 0$। अतः

$$\mathsf{Q} \vdash \neg\varphi_g(\overline{k}, \overline{n}, \mathsf{o}).$$

हमें मिलता है

$$\mathsf{Q} \vdash \forall w\,(w < \overline{m} \to \neg\varphi_g(w, \overline{n}, \mathsf{o})). \tag{35.6}$$

यदि $m = 0$ हो तो यह सहायक प्रमेय 35.23 से, अन्यथा सहायक प्रमेय 35.24 से मिलता है।

अब दिखाएँ कि यदि $f(n) = m$, तो $\mathsf{Q} \vdash \forall y\,(\varphi_f(\overline{n}, y) \to y = \overline{m})$। हम फिर तर्क को अनौपचारिक रूप में रेखांकित करते हैं और औपचारिकीकरण पाठक पर छोड़ते हैं।

मान लें $\varphi_f(\overline{n}, b)$। इससे हमें (क) $\varphi_g(b, \overline{n}, \mathsf{o})$ और (ख) $\forall w\,(w < b \to \neg\varphi_g(w, \overline{n}, \mathsf{o}))$ मिलते हैं। सहायक प्रमेय 35.25 से $(b < \overline{m} \lor \overline{m} < b) \lor b = \overline{m}$। हम दिखाएँगे कि $b < \overline{m}$ और $\overline{m} < b$, दोनों विरोधाभास तक पहुँचाते हैं।

यदि $\overline{m} < b$, तो (ख) से $\neg\varphi_g(\overline{m}, \overline{n}, \mathsf{o})$। किंतु $m = f(n)$, इसलिए $g(m, n) = 0$; और चूँकि φ_g, g का निरूपण करता है, इसलिए $\mathsf{Q} \vdash \varphi_g(\overline{m}, \overline{n}, \mathsf{o})$। अतः हमें विरोधाभास मिलता है।

अब मान लें $b < \overline{m}$। चूँकि समीकरण (35.6) से $\mathsf{Q} \vdash \forall w\,(w < \overline{m} \to \neg\varphi_g(w, \overline{n}, \mathsf{o}))$, हमें $\neg\varphi_g(b, \overline{n}, \mathsf{o})$ मिलता है। यह फिर (क) के विरुद्ध है। □

35.8 संगणनीय फलन Q में निरूपणीय हैं

प्रमेय 35.27. *प्रत्येक संगणनीय फलन* Q *में निरूपणीय है।*

प्रमाण. निश्चितता के लिए और चर्च–ट्यूरिंग अभिधारणा का उपयोग करते हुए, हम कहें कि कोई फलन तभी और केवल तभी संगणनीय है जब वह सामान्य पुनरावर्ती है। सामान्य पुनरावर्ती फलन वे हैं जिन्हें शून्य फलन zero, उत्तराधिकारी फलन succ और प्रक्षेप फलन P_i^n से संयोजन, आदिम पुनरावर्तन तथा नियमित न्यूनीकरण का उपयोग करके परिभाषित किया जा सकता है। सहायक प्रमेय 35.9 के अनुसार f और g से परिभाषित किए जा सकने वाले किसी भी फलन h को f, g तथा zero, succ, P_i^n, add, mult, $\chi_=$ से संयोजन और नियमित न्यूनीकरण द्वारा भी परिभाषित किया जा सकता है। फलतः कोई फलन सामान्य पुनरावर्ती तभी और केवल तभी है जब उसे zero, succ, P_i^n, add, mult, $\chi_=$ से संयोजन तथा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सके।

इसके अतिरिक्त हमने दिखाया है कि विचाराधीन मूल फलन Q में निरूपणीय हैं (प्रतिज्ञप्तियाँ 35.10 से 35.13, 35.15 और 35.17), और निरूपणीय फलनों से संयोजन अथवा नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित कोई भी फलन (प्रतिज्ञप्ति 35.21, प्रतिज्ञप्ति 35.26) भी निरूपणीय है। अतः प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन Q में निरूपणीय है।□

हमने दिखाया है कि संगणनीय फलनों के समुच्चय को Q में निरूपणीय फलनों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है। वास्तव में प्रमाण इससे अधिक व्यापक है। निरूपणीयता की परिभाषा से यह देखना कठिन नहीं है कि Q का कोई भी विस्तार (अथवा कोई ऐसा सिद्धांत जिसमें Q की व्याख्या की जा सके) संगणनीय फलनों का निरूपण कर सकता है। किंतु विलोमतः, जिस किसी व्युत्पत्ति-तंत्र में व्युत्पत्ति की धारणा संगणनीय हो, उसमें प्रत्येक निरूपणीय फलन संगणनीय है। अतः, उदाहरण के लिए, संगणनीय फलनों के समुच्चय को पियानो अंकगणित में, बल्कि

ज़र्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय-सिद्धांत में भी, निरूपणीय फलनों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है। जैसा ग्योडेल (Gödel) ने उल्लेख किया, यह कुछ आश्चर्यजनक है। हम देखेंगे कि सिद्धता के विषय में प्रश्न इस बात के प्रति अत्यंत संवेदनशील होते हैं कि हम किस सिद्धांत पर विचार कर रहे हैं; मोटे तौर पर, अभिगृहीत जितने प्रबल होंगे, उतना अधिक सिद्ध किया जा सकेगा। किंतु अभिगृहीती सिद्धांतों के एक व्यापक वर्ग में निरूपणीय फलन ठीक संगणनीय फलन ही हैं; जब तक सिद्धांत अभिगृहीतीकरणीय हैं, अधिक प्रबल सिद्धांत अधिक फलनों का निरूपण नहीं करते।

35.9 संबंधों का निरूपण

आइए बताएँ कि किसी *संबंध* के निरूपणीय होने का क्या अर्थ है।

परिभाषा 35.28. प्राकृतिक संख्याओं पर संबंध $R(x_0, \ldots, x_k)$ **Q** *में निरूपणीय* है यदि कोई सूत्र $\varphi_R(x_0, \ldots, x_k)$ ऐसा हो कि जब भी $R(n_0, \ldots, n_k)$ सत्य हो, **Q**, $\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ को सिद्ध करे, और जब भी $R(n_0, \ldots, n_k)$ असत्य हो, **Q**, $\neg\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ को सिद्ध करे।

प्रमेय 35.29. *कोई संबंध* **Q** *में तभी और केवल तभी निरूपणीय है जब वह संगणनीय है।*

प्रमाण. आगे की दिशा के लिए मान लें कि सूत्र $\varphi_R(x_0, \ldots, x_k)$ संबंध $R(x_0, \ldots, x_k)$ का निरूपण करता है। R को संगणित करने की एक कलन-विधि यह है: निवेश n_0, ..., n_k पर एक साथ $\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ के प्रमाण और $\neg\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ के प्रमाण की खोज करें। हमारी मान्यता के अनुसार खोज को दोनों में से कोई एक अवश्य मिलेगा; यदि पहला मिले, तो "हाँ" बताएँ, अन्यथा "नहीं"।

दूसरी दिशा में मान लें कि $R(x_0, \ldots, x_k)$ संगणनीय है। परिभाषा के अनुसार इसका अर्थ है कि फलन $\chi_R(x_0, \ldots, x_k)$ संगणनीय है। प्रमेय 35.2 के अनुसार χ_R का निरूपण किसी सूत्र, मान लें $\varphi_{\chi_R}(x_0, \ldots, x_k, y)$, द्वारा होता है। $\varphi_R(x_0, \ldots, x_k)$ को सूत्र $\varphi_{\chi_R}(x_0, \ldots, x_k, \overline{1})$ मानें। तब किन्हीं भी n_0, ..., n_k के लिए, यदि $R(n_0, \ldots, n_k)$ सत्य है, तो $\chi_R(n_0, \ldots, n_k) = 1$; उस स्थिति में **Q**, $\varphi_{\chi_R}(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{1})$ को सिद्ध करता है, और इसलिए **Q**, $\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ को सिद्ध करता है। दूसरी ओर यदि $R(n_0, \ldots, n_k)$ असत्य है, तो $\chi_R(n_0, \ldots, n_k) = 0$। इसका अर्थ है कि **Q** सिद्ध करता है

$$\forall y\, (\varphi_{\chi_R}(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, y) \to y = \overline{0}).$$

चूँकि **Q**, $\overline{0} \neq \overline{1}$ को सिद्ध करता है, इसलिए **Q**, $\neg\varphi_{\chi_R}(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{1})$ को सिद्ध करता है और इस प्रकार $\neg\varphi_R(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_k})$ को भी सिद्ध करता है। □

35.10 अनिर्णेयता

हम किसी सिद्धांत **T** को *अनिर्णेय* कहते हैं यदि ऐसी कोई संगणनात्मक प्रक्रिया न हो जो **T** की भाषा के किसी भी वाक्य φ के लिए परिमित चरणों के बाद, बिना विफल हुए, इस प्रश्न का सही उत्तर दे: "क्या **T**, φ को सिद्ध करता है?" अतः **Q** तभी और केवल तभी निर्णेय होता जब ऐसी कोई संगणनात्मक प्रक्रिया होती जो अंकगणित की भाषा का कोई वाक्य φ दिए जाने पर तय करती कि $\mathbf{Q} \vdash \varphi$ है या नहीं। हम इसे यह पूछकर अधिक सटीक बना सकते हैं: क्या संबंध $\mathrm{Prov}_{\mathbf{Q}}(y)$, जो y के लिए तभी लागू होता है जब y, **Q** में सिद्ध किए जा सकने वाले किसी वाक्य की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो, पुनरावर्ती है? उत्तर है: नहीं।

प्रमेय 35.30. **Q** *अनिर्णेय है, अर्थात् संबंध*

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{Q}}(y) \Leftrightarrow \mathrm{Sent}(y) \wedge \exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{Q}}(x, y)$$

पुनरावर्ती नहीं है।

प्रमाण. मान लें कि वह पुनरावर्ती है। तब हम विराम समस्या को इस प्रकार हल कर सकते हैं: e और n दिए जाने पर हम जानते हैं कि $\varphi_e(n) \downarrow$ तभी और केवल तभी जब कोई s ऐसा हो कि $T(e, n, s)$, जहाँ T, प्रमेय 29.28 का क्लेनी (Kleene) विधेय है। चूँकि T आदिम पुनरावर्ती है, उसका निरूपण **Q** में किसी सूत्र ψ_T द्वारा होता है; अर्थात् $\mathbf{Q} \vdash \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, \overline{s})$ तभी और केवल तभी जब $T(e, n, s)$। यदि $\mathbf{Q} \vdash \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, \overline{s})$, तो $\mathbf{Q} \vdash \exists y\, \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, y)$ भी। यदि ऐसा कोई s मौजूद नहीं है, तो प्रत्येक s के लिए $\mathbf{Q} \vdash \neg\psi_T(\overline{e}, \overline{n}, \overline{s})$। किंतु **Q**, ω-संगत है; अर्थात् यदि प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\mathbf{Q} \vdash \neg\varphi(\overline{n})$, तो $\mathbf{Q} \nvdash \exists y\, \varphi(y)$। हम यह इसलिए जानते हैं क्योंकि **Q** के अभिगृहीत मानक प्रतिरूप $\mathfrak{N}$ में सत्य हैं। अतः $\mathbf{Q} \nvdash \exists y\, \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, y)$। दूसरे शब्दों में, $\mathbf{Q} \vdash \exists y\, \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, y)$ तभी और केवल तभी जब कोई s ऐसा हो कि $T(e, n, s)$, अर्थात् तभी और केवल तभी जब $\varphi_e(n) \downarrow$। e और n से हम $^{\#}\exists y\, \psi_T(\overline{e}, \overline{n}, y)^{\#}$ संगणित कर सकते हैं; ऐसा करने वाले आदिम पुनरावर्ती फलन को $g(e, n)$ मानें। अतः

$$h(e, n) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } \mathrm{Prov}_{\mathbf{Q}}(g(e, n)) \\ 0 & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

यदि $\mathrm{Prov}_{\mathbf{Q}}$ पुनरावर्ती होता, तो इससे h भी पुनरावर्ती होता। किंतु प्रमेय 29.29 के अनुसार h पुनरावर्ती नहीं है, इसलिए $\mathrm{Prov}_{\mathbf{Q}}$ भी पुनरावर्ती नहीं हो सकता। □

उपप्रमेय 35.31. *प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र अनिर्णेय है।*

प्रमाण. यदि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र निर्णेय होता, तो **Q** में सिद्धता भी निर्णेय होती, क्योंकि $\mathbf{Q} \vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\vdash \tau \to \varphi$, जहाँ τ, **Q** के अभिगृहीतों का संयोजन है। □

35.11 Σ_1 पूर्णता

Q और उसके संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार अपूर्ण होने के बावजूद हमने देखा है कि **Q** अंक-सूचकों के बारे में अनेक मूलभूत तथ्य सिद्ध करता है। वास्तव में इसे काफी अधिक विस्तृत किया जा सकता है। यह समझने के लिए कि **Q** में क्या-क्या सिद्ध किया जा सकता है, हम Δ_0, Σ_1 और Π_1 सूत्रों की धारणाएँ प्रस्तुत करते हैं। मोटे तौर पर, Σ_1 सूत्र, $\exists x\, \psi(x)$ रूप का होता है, जहाँ ψ केवल प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों और परिबद्ध परिमाणकों से बनाया गया है। हम दिखाएँगे कि यदि φ ऐसा Σ_1 वाक्य है जो $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो $\mathbf{Q} \vdash \varphi$ (प्रमेय 35.38)।

परिभाषा 35.32. *परिबद्ध अस्तित्वात्मक सूत्र* वह है जो $\exists x\, (x < t \wedge \varphi(x))$ के रूप का हो, जहाँ t कोई भी पद है; इसे हम परंपरानुसार $(\exists x < t)\ \varphi(x)$ लिखते हैं। *परिबद्ध सार्विक सूत्र* वह है जो $\forall x\, (x < t \to \varphi(x))$ के रूप का हो, जहाँ t कोई भी पद है; इसे हम परंपरानुसार $(\forall x < t)\ \varphi(x)$ लिखते हैं।

परिभाषा 35.33. कोई सूत्र ψ, Δ_0 है यदि वह परमाण्विक सूत्रों से केवल प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों और परिबद्ध परिमाणीकरण द्वारा बना हो। कोई सूत्र φ, Σ_1 है यदि $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$, जहाँ ψ, Δ_0 है। कोई सूत्र φ, Π_1 है यदि $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$, जहाँ ψ, Δ_0 है।

सहायक प्रमेय 35.34. *मान लें कि t ऐसा बंद पद है कि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t) = n$। तब $\mathbf{Q} \vdash t = \overline{n}$।*

प्रमाण. हम इसे t की जटिलता पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं। आधार मामले में $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(0) = 0$, और $\overline{0} \equiv 0$ होने से $\mathbf{Q} \vdash 0 = \overline{0}$। आगमन मामले के लिए t_1 और t_2 ऐसे पद हों कि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1) = n_1$, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2) = n_2$, $\mathbf{Q} \vdash t_1 = \overline{n}_1$ और $\mathbf{Q} \vdash t_2 = \overline{n}_2$।

तब $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}((t_1')) = n_1 + 1$, और आगमन परिकल्पना तथा सूत्र $\overline{n_1}' = \overline{n_1}'$ पर समता के प्रथम-कोटि नियम लागू करने से $\mathbf{Q} \vdash t_1' = \overline{n}_1'$; अतः अंक-सूचकों की परिभाषा से $\mathbf{Q} \vdash t_1' = \overline{n_1 + 1}$।

योगों के लिए हमारे पास

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}((t_1 + t_2)) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1) + \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2) = n_1 + n_2.$$

आगमन परिकल्पना और समता के नियमों से $\mathsf{Q} \vdash t_1 + t_2 = \overline{n_1} + t_2$, और फिर समता के नियमों के दूसरे अनुप्रयोग से $\mathsf{Q} \vdash t_1 + t_2 = \overline{n_1} + \overline{n_2}$। सहायक प्रमेय 35.16 से $\mathsf{Q} \vdash \overline{n_1} + \overline{n_2} = \overline{n_1 + n_2}$, इसलिए $\mathsf{Q} \vdash t_1 + t_2 = \overline{n_1 + n_2}$।

इसी प्रकार का तर्क $\times$ के लिए भी काम करता है, जिसमें सहायक प्रमेय 35.18 का उपयोग होता है। इससे अंकगणित के सभी बंद पद समेट लिए जाते हैं, अतः प्रत्येक ऐसे बंद पद t के लिए जिसके लिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t) = n$, हमारे पास $\mathsf{Q} \vdash t = \overline{n}$ है। □

सहायक प्रमेय 35.35. *मान लें कि t_1 और t_2 बंद पद हैं। तब*

1. *यदि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2)$, तो $\mathsf{Q} \vdash t_1 = t_2$।*
2. *यदि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1) \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2)$, तो $\mathsf{Q} \vdash t_1 \neq t_2$।*
3. *यदि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1) < \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2)$, तो $\mathsf{Q} \vdash t_1 < t_2$।*
4. *यदि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2) \leq \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1)$, तो $\mathsf{Q} \vdash \neg(t_1 < t_2)$।*

प्रमाण. पद t_1 और t_2 दिए जाने पर हम $n = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_1)$ और $m = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t_2)$ नियत करते हैं।

मान लें $\varphi \equiv t_1 = t_2$। सहायक प्रमेय 35.34 से $\mathsf{Q} \vdash t_1 = \overline{n}$ और $\mathsf{Q} \vdash t_2 = \overline{n}$। यदि $n = m$, तो $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} = \overline{m}$, और इसलिए समता की संक्रामकता से $\mathsf{Q} \vdash t_1 = t_2$। यदि $n \neq m$, तो $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$, और समता की संक्रामकता से फिर $\mathsf{Q} \vdash t_1 \neq t_2$।

अब $\varphi \equiv t_1 < t_2$ मानें। दोनों मामलों के लिए हम अभिगृहीत Q_8 पर निर्भर करते हैं, जो सभी x, y के लिए $x < y \leftrightarrow \exists z\, z' + x = y$ कहता है।

मान लें $\mathfrak{N} \vDash t_1 < t_2$। तब कोई $k \in \mathbb{N}$ ऐसा है कि $n + k + 1 = m$। सहायक प्रमेय 35.34 से $\mathsf{Q} \vdash t_1 = \overline{n}$ और $\mathsf{Q} \vdash t_2 = \overline{m}$, और इस उपपत्ति के पहले भाग से $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} + \overline{k}' = \overline{m}$। समता की संक्रामकता से निकलता है कि $\mathsf{Q} \vdash \overline{k}' + t_1 = t_2$, इसलिए $\mathsf{Q} \vdash \exists z\, z' + t_1 = t_2$। Q_8 की दाएँ-से-बाएँ दिशा से $\mathsf{Q} \vdash t_1 < t_2$।

इसके स्थान पर मान लें $\mathfrak{N} \nvDash t_1 < t_2$, अर्थात् $m \leq n$। हम Q के भीतर काम करते हुए $t_1 < t_2$ मानते हैं। Q_8 की बाएँ-से-दाएँ दिशा से कोई z ऐसा है कि $z' + t_1 = t_2$। चूँकि $\mathsf{Q} \vdash t_1 = \overline{n}$ और $\mathsf{Q} \vdash t_2 = \overline{m}$, इसलिए $z' + \overline{n} = \overline{m}$। Q_5 का उपयोग करते हुए m पर बाहरी आगमन से $z' + \overline{n - m} = 0$। यदि $m = n$, तो $z' \neq 0$, जिससे Q_3 द्वारा विरोधाभास मिलता है। यदि $m < n$, तो फिर Q_5 से $(z' + \overline{n - m - 1})' = 0$, जिससे Q_3 द्वारा विरोधाभास मिलता है। अतः $\mathsf{Q} \vdash \neg(t_1 < t_2)$। □

सहायक प्रमेय 35.36. *मान लें कि φ कोई सूत्र, t कोई बंद पद और $k = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t)$ है। तब*

1. *$\mathsf{Q} \vdash (\forall x < t)\ \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{k-1})$।*
2. *$\mathsf{Q} \vdash (\exists x < t)\ \varphi(x)$ तभी और केवल तभी जब $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{0}) \vee \cdots \vee \varphi(\overline{k-1})$।*

प्रमाण. हम परिबद्ध सार्विक परिमाणक का मामला सिद्ध करते हैं। यदि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t) = 0$, तो समतुल्यता का बायाँ पक्ष Q में सिद्ध है, क्योंकि सहायक प्रमेय 35.23 के अनुसार कोई $x < \overline{0}$ नहीं है। इसी प्रकार हम रिक्त वियोजन को केवल $\top$ मान सकते हैं, जो Q में भी सिद्ध है। अतः हम मानते हैं कि किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t) = k + 1$। सहायक प्रमेय 35.34 से हम मान सकते हैं कि हम $(\forall x < \overline{k+1})\ \varphi(x)$ रूप के सूत्र के साथ काम कर रहे हैं।

मान लें कि $\mathsf{Q} \vdash (\forall x < \overline{k+1})\ \varphi(x)$, और $n \leq k$। चूँकि सहायक प्रमेय 35.35 से $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} < \overline{k+1}$, तर्क से निकलता है कि $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{n})$। प्रत्येक $n \leq k$ के लिए इस तथ्य को $k + 1$ बार लागू करके हमें इच्छित $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{k})$ मिलता है।

दूसरी दिशा के लिए मान लें कि $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{k})$। Q में काम करते हुए मान लें कि $x < \overline{k+1}$। सहायक प्रमेय 35.24 से हमारे पास $x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{k}$ है, इसलिए तर्क से $\varphi(x)$ निकलता है, और फलतः सार्विक दावा $(\forall x < \overline{k+1})\ \varphi(x)$ निकलता है।

परिबद्ध अस्तित्वात्मक रूप से परिमाणित सूत्रों की समतुल्यता का प्रमाण इसी प्रकार है। □

सहायक प्रमेय 35.37. *यदि φ ऐसा Δ_0 वाक्य है जो $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो* $\mathsf{Q} \vdash \varphi$।

प्रमाण. हम इसे सूत्र की जटिलता पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं। आधार मामला सहायक प्रमेय 35.35 से मिलता है, इसलिए हम आगमन चरण पर आते हैं। सरलता के लिए निषेध के मामले को उस सूत्र की संरचना के आधार पर उपमामलों में बाँटते हैं जिस पर निषेध लागू होता है।

1. मान लें $(\varphi \wedge \psi)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है; अतः φ और ψ दोनों $\mathfrak{N}$ में सत्य हैं। आगमन परिकल्पना से $\mathsf{Q} \vdash \varphi$ और $\mathsf{Q} \vdash \psi$, इसलिए तर्क से $\mathsf{Q} \vdash (\varphi \wedge \psi)$।

2. मान लें $\neg(\varphi \wedge \psi)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है; अतः या तो $\neg\varphi$ अथवा $\neg\psi$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है। सामान्यता की हानि के बिना पहले को मान लें। आगमन परिकल्पना से $\mathsf{Q} \vdash \neg\varphi$, और इसलिए तर्क से $\mathsf{Q} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$।

3. मान लें $(\varphi \vee \psi)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है; अतः या तो φ, $\mathfrak{N}$ में सत्य है अथवा ψ, $\mathfrak{N}$ में सत्य है। सामान्यता की हानि के बिना पहले को मान लें। आगमन परिकल्पना से $\mathsf{Q} \vdash \varphi$, और इसलिए तर्क से $\mathsf{Q} \vdash (\varphi \vee \psi)$।

4. मान लें $\neg(\varphi \vee \psi)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है; अतः $\neg\varphi$ और $\neg\psi$, $\mathfrak{N}$ में सत्य हैं। तब आगमन परिकल्पना से $\mathsf{Q} \vdash \neg\varphi$ और $\mathsf{Q} \vdash \neg\psi$। फलतः तर्क से $\mathsf{Q} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$।

5. मान लें $(\forall x < t)\ \varphi(x)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, जहाँ t कोई बंद पद और $k = \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t)$ है। आगमन परिकल्पना और तर्क से, यदि प्रत्येक $n < \mathrm{Val}^{\mathfrak{N}}(t)$ के लिए $\varphi(\overline{n})$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{k-1})$। सहायक प्रमेय 35.36 से निकलता है कि $\mathsf{Q} \vdash (\forall x < t)\ \varphi(x)$।

6. परिबद्ध अस्तित्वात्मक परिमाणक का मामला, जिसमें हमारे पास $(\exists x < t)\ \varphi(x)$ रूप का वाक्य है, परिबद्ध सार्विक परिमाणक के मामले जैसा है।

7. मान लें $\neg(\forall x < t)\ \varphi(x)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, जहाँ t कोई बंद पद है। यह वाक्य, वाक्य $(\exists x < t)\ \neg\varphi(x)$ के समतुल्य है और यह समतुल्यता Q में व्युत्पन्न की जा सकती है; अतः हम परिबद्ध अस्तित्वात्मक परिमाणकों वाला तर्क लागू कर सकते हैं।

8. इसी प्रकार मान लें कि $\neg(\exists x < t)\ \varphi(x)$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, जहाँ t कोई बंद पद है। यह वाक्य, Q में $(\forall x < t)\ \neg\varphi(x)$ के समतुल्य है, इसलिए हम परिबद्ध सार्विक परिमाणकों वाला तर्क लागू कर सकते हैं।

9. अंततः मान लें $\neg\varphi$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है। अब केवल वे मामले शेष हैं जिनमें φ परमाण्विक है, अथवा किसी Δ_0 वाक्य ψ के लिए $\neg\varphi \equiv \neg\neg\psi$। यदि φ परमाण्विक है, तो सहायक प्रमेय 35.35 से $\mathsf{Q} \vdash \neg\varphi$। यदि $\neg\varphi \equiv \neg\neg\psi$, तो तर्क द्वारा यह Q में ψ के सिद्धतः समतुल्य है; और चूँकि $\neg\varphi$, $\mathfrak{N}$ में सत्य है, इसलिए वह भी $\mathfrak{N}$ में सत्य है। अतः आगमन परिकल्पना से हमारे पास $\mathsf{Q} \vdash \neg\varphi$ है। □

प्रमेय 35.38. *यदि φ ऐसा Σ_1 वाक्य है जो $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो* $\mathsf{Q} \vdash \varphi$।

प्रमाण. यदि $\exists x \varphi(x)$ ऐसा Σ_1 वाक्य है जो $\mathfrak{N}$ में सत्य है, तो कोई प्राकृतिक संख्या n और कोई चर-नियतन s ऐसे हैं कि $s(x) = n$ और $\mathfrak{N}, s \vDash \varphi(x)$। संतुष्टि-संबंध के मानक तथ्यों से निकलता है कि $\mathfrak{N} \vDash \varphi(\overline{n})$। किंतु $\varphi(\overline{n})$ कोई Δ_0 सूत्र है, इसलिए सहायक प्रमेय 35.37 से हमारे पास $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{n})$ है, और फलतः तर्क से हमारे पास $\mathsf{Q} \vdash \exists x\, \varphi(x)$ भी है। □

प्रश्न

प्रश्न 35.1. दिखाएँ कि संबंध $x < y$, $x \mid y$ और फलन $\mathrm{rem}(x, y)$ को आदिम पुनरावर्तन के बिना परिभाषित किया जा सकता है। आप 0, उत्तराधिकारी, जोड़, गुणन, $\chi_=$, प्रक्षेप तथा परिबद्ध न्यूनीकरण और परिमाणीकरण का उपयोग कर सकते हैं।

प्रश्न 35.2. सिद्ध करें कि $y = \mathrm{o}$, $y = x'$ और $y = x_i$ क्रमशः zero, succ और P_i^n का निरूपण करते हैं।

प्रश्न 35.3. सहायक प्रमेय 35.18 सिद्ध करें।

प्रश्न 35.4. सहायक प्रमेय 35.18 का उपयोग करके प्रतिज्ञप्ति 35.17 सिद्ध करें।

प्रश्न 35.5. प्रतिज्ञप्ति 35.20 और प्रतिज्ञप्ति 35.20 के प्रमाणों को मार्गदर्शक बनाकर प्रतिज्ञप्ति 35.21 का प्रमाण विस्तार से पूरा करें।

प्रश्न 35.6. दिखाएँ कि यदि R, **Q** में निरूपणीय है, तो χ_R भी निरूपणीय है।

प्रश्न 35.7. सहायक प्रमेय 35.34 के $\times$ वाले भाग को विस्तार से सिद्ध करें।

प्रश्न 35.8. सहायक प्रमेय 35.36 के अस्तित्वात्मक मामले का विस्तृत प्रमाण दें।

प्रश्न 35.9. सहायक प्रमेय 35.37 के अस्तित्वात्मक मामले का विस्तृत प्रमाण दें।

यह अध्याय संगणनीयता-सिद्धांत वाले अध्याय की सामग्री पर निर्भर है, किंतु यदि वह सामग्री न पढ़ी गई हो तो इसे छोड़ा जा सकता है। अभी यह जेरेमी एविगैड (Jeremy Avigad) की टिप्पणियों का मूल रूपांतरण है, इसका पुनरीक्षण नहीं हुआ है और इसमें अभ्यास नहीं हैं।

अध्याय 36

सिद्धांत और संगणनीयता

36.1 परिचय

इस अनुभाग को फिर से लिखा जाना चाहिए।

हमारे पास निम्न परिणाम हैं:

1. Q में किसी फलन के निरूपणीय होने के अर्थ की परिभाषा (परिभाषा 35.1);
2. Q में किसी संबंध के निरूपणीय होने के अर्थ की परिभाषा (परिभाषा 35.28);
3. यह कहने वाला प्रमेय कि Q के निरूपणीय फलन ठीक संगणनीय फलन हैं (प्रमेय 35.2);
4. यह कहने वाला प्रमेय कि Q के निरूपणीय संबंध ठीक संगणनीय संबंध हैं (प्रमेय 35.29)।

कोई *सिद्धांत* वाक्यों का ऐसा समुच्चय है जो निगमनात्मकतः संवृत हो; अर्थात् उसमें यह गुण हो कि जब भी T, φ को सिद्ध करे, तब φ, T में हो। किसी सिद्धांत को वाक्यों का ऐसा संग्रह समझना शायद सबसे अच्छा है जिसमें इन वाक्यों से निष्पन्न होने वाली सभी बातें भी सम्मिलित हों। अब से हम Q का उपयोग उस *सिद्धांत* के लिए करेंगे जिसमें खंड 35.1 के आठ अभिगृहीतों से व्युत्पन्न वाक्यों का समुच्चय है। याद रखें कि हम Q के सूत्रों को संख्याओं से कूटबद्ध कर सकते हैं; यदि φ ऐसा सूत्र है, तो φ को कूटबद्ध करने वाली संख्या को ${}^{\#}\varphi^{\#}$ लिखें। इस कूटलेखन के आधार पर हम अब पूछ सकते हैं कि सूत्रों के विविध समुच्चय संगणनीय हैं या नहीं।

36.2 Q, संगणनीयतः परिगणनीय-पूर्ण है

प्रमेय 36.1. Q, *संगणनीयतः परिगणनीय है, किंतु निर्णेय नहीं है। वास्तव में वह एक पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय है।*

प्रमाण. यह देखना कठिन नहीं है कि Q, संगणनीयतः परिगणनीय है, क्योंकि वह उन वाक्यों (के कूटों) y का समुच्चय है जिनके लिए Q में y का कोई प्रमाण x है:

$$Q = \{y : \exists x \, \mathrm{Prf}_{\mathsf{Q}}(x, y)\}.$$

किंतु हम जानते हैं कि $\mathrm{Prf}_{\mathsf{Q}}(x, y)$ संगणनीय (वास्तव में आदिम पुनरावर्ती) है, और ऊपर के रूप में लिखा जा सकने वाला प्रत्येक समुच्चय संगणनीयतः परिगणनीय है।

उसके पूर्ण संगणनीयतः परिगणनीय समुच्चय होने का कथन $K \leq_m Q$ के समतुल्य है, जहाँ $K = \{x : \varphi_x(x) \downarrow \}$। अतः दिखाएँ कि K को **Q** में घटाया जा सकता है। चूँकि क्लेनी (Kleene) का विधेय $T(e, x, s)$ आदिम पुनरावर्ती है, वह **Q** में, मान लें φ_T द्वारा, निरूपणीय है। तब प्रत्येक x के लिए हमारे पास

$$\begin{aligned} x \in K &\to \exists s\, T(x, x, s) \\ &\to \exists s\, (\mathbf{Q} \vdash \varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, \overline{s})) \\ &\to \mathbf{Q} \vdash \exists s\, \varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, s). \end{aligned}$$

विलोमतः यदि $\mathbf{Q} \vdash \exists s\, \varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, s)$, तो वास्तव में किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए सूत्र $\varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, \overline{n})$ सत्य होना चाहिए। अब यदि $T(x, x, n)$ असत्य होता, तो φ_T द्वारा T का निरूपण होने से **Q**, $\neg\varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, \overline{n})$ को सिद्ध करता। किंतु तब **Q** एक असत्य सूत्र सिद्ध करता, जो विरोधाभास है। अतः $T(x, x, n)$ सत्य होना चाहिए, जिससे $\varphi_x(x) \downarrow$ निकलता है।

संक्षेप में, प्रत्येक x के लिए x, K में तभी और केवल तभी है जब **Q**, $\exists s\, T(\overline{x}, \overline{x}, s)$ को सिद्ध करता है। अतः वह फलन f जो x को वाक्य $\exists s\, T(\overline{x}, \overline{x}, s)$ के (किसी कूट) पर भेजता है, K का **Q** में एक अपचयन है। □

36.3 Q के ω-संगत विस्तार अनिर्णेय हैं

Q के संगणनीयतः परिगणनीय-पूर्ण होने का प्रमाण इस तथ्य पर निर्भर था कि **Q** में सिद्ध प्रत्येक वाक्य प्राकृतिक संख्याओं के बारे में "सत्य" है। अगली परिभाषा और प्रमेय ठीक उन "सत्यता"-पक्षों को चिन्हित करके इस प्रमेय को प्रबल बनाते हैं जिनकी ऊपर के प्रमाण में आवश्यकता थी। किंतु इस प्रमेय पर बहुत देर न रुकें, क्योंकि हम शीघ्र ही इसे और भी प्रबल बनाएँगे। हम इसे मुख्यतः ऐतिहासिक कारणों से सम्मिलित करते हैं: ग्योडेल (Gödel) के मूल शोधपत्र ने ω-संगतता की धारणा का उपयोग किया था, किंतु शीघ्र ही ω-संगतता के स्थान पर साधारण संगतता रखकर उनके परिणाम को प्रबल बना दिया गया।

परिभाषा 36.2. कोई सिद्धांत **T**, ω-संगत है यदि निम्न लागू हो: यदि $\exists x\, \varphi(x)$ कोई वाक्य है और **T**, $\neg\varphi(\overline{0})$, $\neg\varphi(\overline{1})$, $\neg\varphi(\overline{2})$, ...को सिद्ध करता है, तो **T**, $\exists x\, \varphi(x)$ को सिद्ध नहीं करता।

प्रमेय 36.3. **T** *ऐसा कोई ω-संगत सिद्धांत हो जिसमें* **Q** *सम्मिलित है। तब* **T** *निर्णेय नहीं है।*

प्रमाण. यदि **T** में **Q** सम्मिलित है, तो **T** संगणनीय फलनों और संबंधों का निरूपण करता है। हमें केवल पिछले प्रमाण को संशोधित करना है। ऊपर की तरह यदि $x \in K$, तो **T**, $\exists s\, \varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, s)$ को सिद्ध करता है। विलोमतः मान लें कि **T**, $\exists s\, \varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, s)$ को सिद्ध करता है। तब x, K में होना चाहिए: अन्यथा निवेश x पर मशीन x की कोई विरामशील संगणना नहीं है; चूँकि φ_T क्लेनी के T संबंध का निरूपण करता है, **T**, $\neg\varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, \overline{0})$, $\neg\varphi_T(\overline{x}, \overline{x}, \overline{1})$, ...को सिद्ध करता है, जिससे **T**, ω-असंगत हो जाता है। □

36.4 Q के संगत विस्तार अनिर्णेय हैं

याद करें कि कोई सिद्धांत *संगत* है यदि वह किसी सूत्र φ के लिए φ और $\neg\varphi$ दोनों को सिद्ध नहीं करता। चूँकि विरोधाभास से कुछ भी निष्पन्न होता है, असंगत सिद्धांत तुच्छ है: प्रत्येक वाक्य सिद्ध होता है। स्पष्टतः यदि कोई सिद्धांत ω-संगत है, तो वह संगत है। किंतु संगत होना दुर्बलतर आवश्यकता है (अर्थात् ऐसे सिद्धांत हैं जो संगत तो हैं, पर ω-संगत नहीं)। हम परिभाषा 36.2 की मान्यता को केवल संगतता तक दुर्बल करके अधिक प्रबल प्रमेय प्राप्त कर सकते हैं।

सहायक प्रमेय 36.4. *कोई "सार्वत्रिक संगणनीय संबंध" नहीं है। अर्थात् ऐसा कोई द्वि-स्थानीय संगणनीय संबंध $R(x, y)$ नहीं है जिसमें यह गुण हो: जब भी $S(y)$ कोई एक-स्थानीय संगणनीय संबंध हो, तब कोई k ऐसा हो कि प्रत्येक y के लिए $S(y)$ तभी और केवल तभी सत्य हो जब $R(k, y)$ सत्य हो।*

प्रमाण. मान लें $R(x, y)$ कोई सार्वत्रिक संगणनीय संबंध है। $S(y)$ को संबंध $\neg R(y, y)$ मानें। चूँकि $S(y)$ संगणनीय है, किसी k के लिए $S(y)$, $R(k, y)$ के समतुल्य है। किंतु तब $S(k)$, $R(k, k)$ और $\neg R(k, k)$ दोनों के समतुल्य है, जो विरोधाभास है। □

प्रमेय 36.5. *T कोई ऐसा संगत सिद्धांत हो जिसमें Q सम्मिलित है। तब T निर्णेय नहीं है।*

प्रमाण. मान लें T, Q का कोई संगत, निर्णेय विस्तार है। हम T का उपयोग करके सार्वत्रिक संगणनीय संबंध परिभाषित करेंगे और विरोधाभास प्राप्त करेंगे।

$R(x, y)$ को तभी और केवल तभी लागू मानें जब

x किसी सूत्र $\theta(u)$ का कूट है, और T, $\theta(\overline{y})$ को सिद्ध करता है।

हमारी मान्यता के अनुसार T निर्णेय है, इसलिए R संगणनीय है। दिखाएँ कि R सार्वत्रिक है। यदि $S(y)$ कोई भी संगणनीय संबंध है, तो Q में (और इसलिए T में) उसका निरूपण किसी सूत्र $\theta_S(u)$ द्वारा होता है। तब प्रत्येक n के लिए हमारे पास

$$\begin{aligned} S(\overline{n}) &\rightarrow T \vdash \theta_S(\overline{n}) \\ &\rightarrow R(^{\#}\theta_S(u)^{\#}, n) \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} \neg S(\overline{n}) &\rightarrow T \vdash \neg\theta_S(\overline{n}) \\ &\rightarrow T \nvdash \theta_S(\overline{n}) \quad \text{(क्योंकि T संगत है)} \\ &\rightarrow \neg R(^{\#}\theta_S(u)^{\#}, n). \end{aligned}$$

अर्थात् प्रत्येक y के लिए $S(y)$ तभी और केवल तभी सत्य है जब $R(^{\#}\theta_S(u)^{\#}, y)$ सत्य है। अतः R सार्वत्रिक है, और हमें वांछित विरोधाभास मिल गया। □

"सत्य अंकगणित" को सिद्धांत $\{\varphi : N \vDash \varphi\}$ मानें, अर्थात् अंकगणित की भाषा के उन वाक्यों का समुच्चय जो मानक व्याख्या में सत्य हैं।

उपप्रमेय 36.6. *सत्य अंकगणित निर्णेय नहीं है।*

36.5 अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत

कोई सिद्धांत T *अभिगृहीतीकरणीय* कहलाता है यदि उसके पास अभिगृहीतों का कोई संगणनीय समुच्चय A हो। (A को T के अभिगृहीतों का समुच्चय कहने का अर्थ है $T = \{\varphi : A \vdash \varphi\}$।) प्राकृतिक संख्याओं के प्रत्येक "उचित" अभिगृहीतीकरण में यह गुण होगा। विशेषतः, अभिगृहीतों के परिमित समुच्चय वाला प्रत्येक सिद्धांत अभिगृहीतीकरणीय है।

सहायक प्रमेय 36.7. *मान लें T, अभिगृहीतीकरणीय है। तब T, संगणनीयतः परिगणनीय है।*

प्रमाण. मान लें A, T के अभिगृहीतों का कोई संगणनीय समुच्चय है। यह निर्धारित करने के लिए कि $\varphi \in T$ है या नहीं, अभिगृहीतों से φ की किसी व्युत्पत्ति की खोज करें।

कुछ भिन्न शब्दों में, φ, T में तभी और केवल तभी है जब A में अभिगृहीतों ψ_1, ..., ψ_k की कोई परिमित सूची और प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k) \rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। किंतु हम पहले ही जानते हैं कि "कोई ...ऐसा है कि ..." रूप की परिभाषा वाला प्रत्येक समुच्चय संगणनीयतः परिगणनीय है, बशर्ते दूसरा "..." संगणनीय हो। □

36.6 अभिगृहीतीकरणीय पूर्ण सिद्धांत निर्णेय हैं

कोई सिद्धांत *पूर्ण* कहलाता है यदि प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो φ अथवा $\neg\varphi$ सिद्ध हो।

सहायक प्रमेय 36.8. *मान लें कोई सिद्धांत* $\mathbf{T}$ *पूर्ण और अभिगृहीतीकरणीय है। तब* $\mathbf{T}$ *निर्णेय है।*

प्रमाण. मान लें $\mathbf{T}$ पूर्ण है और A अभिगृहीतों का संगणनीय समुच्चय है। यदि $\mathbf{T}$ असंगत है, तो स्पष्टतः वह संगणनीय है। (कलन-विधि: "बस हाँ कहें।") अतः हम मान सकते हैं कि $\mathbf{T}$ संगत भी है।

यह तय करने के लिए कि कोई वाक्य φ, $\mathbf{T}$ में है या नहीं, $\mathbf{T}$ से φ की किसी व्युत्पत्ति और $\neg\varphi$ की किसी व्युत्पत्ति की एक साथ खोज करें। $\mathbf{T}$ पूर्ण है, इसलिए दोनों में से कोई एक अवश्य मिलेगी; और $\mathbf{T}$ संगत है, इसलिए यदि आपको $\neg\varphi$ की व्युत्पत्ति मिले, तो φ की कोई व्युत्पत्ति नहीं है।

भिन्न शब्दों में, हम पहले ही जानते हैं कि $\mathbf{T}$, संगणनीयतः परिगणनीय है; इसलिए पहले सिद्ध किए गए एक प्रमेय के अनुसार इतना दिखाना पर्याप्त है कि $\mathbf{T}$ का पूरक भी संगणनीयतः परिगणनीय है। किंतु कोई सूत्र φ, $\overline{\mathbf{T}}$ में तभी और केवल तभी है जब $\neg\varphi$, $\mathbf{T}$ में हो; अतः $\overline{\mathbf{T}} \leq_m \mathbf{T}$। □

36.7 Q का कोई पूर्ण, संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार नहीं है

प्रमेय 36.9. $\mathbf{Q}$ *का कोई पूर्ण, संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार नहीं है।*

प्रमाण. हम पहले ही जानते हैं कि $\mathbf{Q}$ का कोई संगत, निर्णेय विस्तार नहीं है। किंतु यदि $\mathbf{T}$ पूर्ण और अभिगृहीतीकृत है, तो वह निर्णेय है। □

यह प्रमेय ग्योडेल (Gödel) के 1931 के प्रथम अपूर्णता-प्रमेय के मूल प्रतिपादन से बहुत दूर नहीं है। अधिक आधुनिक शब्दावली के अतिरिक्त मुख्य अंतर ये हैं: ग्योडेल (Gödel) के यहाँ "संगत" के स्थान पर "ω-संगत" है; और वह पूरी व्यापकता में "अभिगृहीतीकरणीय" नहीं कह सकते थे, क्योंकि उस समय संगणनीयता की औपचारिक धारणा उपलब्ध नहीं थी। (अगले दशक में संगणनीयता के औपचारिक प्रतिरूप विकसित किए गए—इनमें ग्योडेल (Gödel) भी सहभागी थे—और इसका एक बड़ा उद्देश्य उन प्रकार के सिद्धांतों का अभिलक्षण करना था जो ग्योडेलीय (Gödelian) परिघटना के अधीन होते हैं।)

प्रमेय कहता है कि आपको सब कुछ एक साथ नहीं मिल सकता: पूर्णता, संगतता और अभिगृहीतीकरणीयता। किंतु इनमें से किसी एक को छोड़ दें तो अन्य दो मिल सकते हैं: $\mathbf{Q}$ संगत और संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत है, किंतु पूर्ण नहीं; असंगत सिद्धांत पूर्ण और संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत (उदाहरणतः $\{0 \neq 0\}$ द्वारा) है, किंतु संगत नहीं; और अंकगणित के सत्य वाक्यों का समुच्चय पूर्ण तथा संगत है, किंतु संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत नहीं।

36.8 Q में सिद्ध और खंडनीय वाक्य संगणनीयतः अवियोज्य हैं

$\overline{\mathbf{Q}}$ को उन वाक्यों का समुच्चय मानें जिनके *निषेध* $\mathbf{Q}$ में सिद्ध होते हैं, अर्थात् $\overline{\mathbf{Q}} = \{\varphi : \mathbf{Q} \vdash \neg\varphi\}$। याद करें कि असंयुक्त समुच्चय A और B संगणनीयतः अवियोज्य कहलाते हैं यदि ऐसा कोई संगणनीय समुच्चय C न हो कि $A \subseteq C$ और $B \subseteq \overline{C}$।

सहायक प्रमेय 36.10. $\mathbf{Q}$ *और* $\overline{\mathbf{Q}}$ *संगणनीयतः अवियोज्य हैं।*

प्रमाण. मान लें C ऐसा संगणनीय समुच्चय है कि $\mathbf{Q} \subseteq C$ और $\overline{\mathbf{Q}} \subseteq \overline{C}$। $R(x, y)$ को संबंध

x किसी सूत्र $\theta(u)$ का कूट है और $\theta(\overline{y})$, C में है

मानें। हम दिखाएँगे कि $R(x, y)$ कोई सार्वत्रिक संगणनीय संबंध है, जिससे विरोधाभास मिलेगा।

मान लें $S(y)$ संगणनीय है और **Q** में $\theta_S(u)$ द्वारा निरूपित है। तब

$$\begin{aligned} S(\overline{n}) &\rightarrow \mathbf{Q} \vdash \theta_S(\overline{n}) \\ &\rightarrow \theta_S(\overline{n}) \in C \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} \neg S(\overline{n}) &\rightarrow \mathbf{Q} \vdash \neg\theta_S(\overline{n}) \\ &\rightarrow \theta_S(\overline{n}) \in \overline{\mathbf{Q}} \\ &\rightarrow \theta_S(\overline{n}) \notin C। \end{aligned}$$

अतः $S(y)$, $R(\#(\theta_S(\overline{u})), y)$ के समतुल्य है। □

36.9 Q के साथ संगत सिद्धांत अनिर्णेय हैं

अगला प्रमेय कहता है कि केवल **Q** ही अनिर्णेय नहीं है, बल्कि वास्तव में **Q** से असहमत न होने वाला प्रत्येक सिद्धांत अनिर्णेय है।

प्रमेय 36.11. **T** *अंकगणित की भाषा का ऐसा कोई सिद्धांत हो जो* **Q** *के साथ संगत है (अर्थात्* $\mathbf{T} \cup \mathbf{Q}$ *संगत है)। तब* **T** *अनिर्णेय है।*

प्रमाण. याद करें कि **Q** के अभिगृहीतों का परिमित समुच्चय Q_1, ..., Q_8 है। हम इनके स्थान पर एक ही अभिगृहीत $\alpha = Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_8$ भी रख सकते हैं।

मान लें **T** कोई निर्णेय सिद्धांत है जो **Q** के साथ संगत है। मानें

$$C = \{\varphi : \mathbf{T} \vdash \alpha \rightarrow \varphi\}.$$

हम दिखाते हैं कि C, **Q** और $\overline{\mathbf{Q}}$ का संगणनीय वियोजन होगा, जो विरोधाभास है। पहले, यदि φ, **Q** में है, तो φ, **Q** के अभिगृहीतों से सिद्ध है; निगमन प्रमेय से प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में $\alpha \rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। अतः φ, C में है।

दूसरी ओर यदि φ, $\overline{\mathbf{Q}}$ में है, तो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में $\alpha \rightarrow \neg\varphi$ का प्रमाण है। यदि **T**, $\alpha \rightarrow \varphi$ को भी सिद्ध करता है, तो **T**, $\neg\alpha$ को सिद्ध करता है; उस स्थिति में $\mathbf{T} \cup \mathbf{Q}$ असंगत है। किंतु हम मान रहे हैं कि $\mathbf{T} \cup \mathbf{Q}$ संगत है, इसलिए **T**, $\alpha \rightarrow \varphi$ को सिद्ध नहीं करता और इस प्रकार φ, C में नहीं है।

हमने दिखाया है कि यदि φ, **Q** में है, तो वह C में है; और यदि φ, $\overline{\mathbf{Q}}$ में है, तो वह $\overline{C}$ में है। अतः C एक संगणनीय वियोजन है, और यही हमारा वांछित विरोधाभास है। □

यह प्रमेय बहुत शक्तिशाली है। उदाहरणतः, इससे निकलता है:

उपप्रमेय 36.12. *अंकगणित की भाषा के लिए प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र (अर्थात् समुच्चय* $\{\varphi$: φ *प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में सिद्ध है*$\}$ *) अनिर्णेय है।*

प्रमाण. प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र $\emptyset$ के निष्पादों का समुच्चय है, और वह **Q** के साथ संगत है। □

36.10 जिन सिद्धांतों में Q व्याख्येय है वे अनिर्णेय हैं

हम इन परिणामों को और भी प्रबल बना सकते हैं। अनौपचारिक रूप से, किसी भाषा $\mathcal{L}_1$ की किसी दूसरी भाषा $\mathcal{L}_2$ में व्याख्या करने में $\mathcal{L}_2$ के सूत्रों द्वारा $\mathcal{L}_1$ का विश्व, संबंध-चिह्न और फलन-चिह्न परिभाषित करना शामिल है। यद्यपि हम इसके लिए समय नहीं देंगे, इस परिभाषा को सटीक बनाया जा सकता है।

प्रमेय 36.13. *मान लें* **T** *ऐसी भाषा का सिद्धांत है जिसमें अंकगणित की भाषा की ऐसी व्याख्या की जा सकती है कि* **T**, **Q** *की व्याख्या के साथ संगत हो। तब* **T** *अनिर्णेय है। यदि* **T**, **Q** *के अभिगृहीतों की व्याख्या को सिद्ध करता है, तो* **T** *का कोई संगत विस्तार निर्णेय नहीं है।*

प्रमाण पिछले प्रमेय के प्रमाण का केवल एक छोटा संशोधन है; प्रतिवाद का उपयोग करके **Q** और $\overline{\mathbf{Q}}$ का वियोजन प्राप्त किया जा सकता है। चयन-अभिगृहीत सहित ज़र्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय-सिद्धांत **ZFC** को ऐसा अभिगृहीती आधार माना जा सकता है जो सामान्य गणित का बड़ा भाग करने के लिए पर्याप्त शक्तिशाली है। **ZFC** में प्राकृतिक संख्याएँ परिभाषित की जा सकती हैं, और इस व्याख्या के माध्यम से **Q** के अभिगृहीत सत्य हैं। अतः हमारे पास है:

उपप्रमेय 36.14. **ZFC** *का कोई निर्णेय विस्तार नहीं है।*

उपप्रमेय 36.15. **ZFC** *का कोई पूर्ण, संगत, संगणनीयतः अभिगृहीतीकरणीय विस्तार नहीं है।*

ZFC की भाषा में केवल एक द्वि-स्थानीय संबंध $\in$ है। (वास्तव में समता की भी आवश्यकता नहीं है।) अतः हमारे पास है:

उपप्रमेय 36.16. *किसी द्वि-स्थानीय संबंध-चिह्न वाली प्रत्येक भाषा का प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र अनिर्णेय है।*

यह परिणाम दो एक-स्थानीय फलन-चिह्नों वाली प्रत्येक भाषा तक विस्तृत होता है, क्योंकि उनका उपयोग करके द्वि-स्थानीय संबंध-चिह्न का अनुकरण किया जा सकता है। अभी उद्धृत परिणाम सटीक सीमाएँ देते हैं: पता चलता है कि केवल *एक-स्थानीय* संबंध-चिह्नों और अधिकतम एक *एक-स्थानीय* फलन-चिह्न वाली भाषा के लिए प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र निर्णेय है।

एक और रोचक तथ्य। हम जानते हैं कि मानक प्रतिरूप में सत्य, भाषा $0, ', +, \times, <$ के वाक्यों का समुच्चय अनिर्णेय है। वास्तव में अन्य चिह्नों के पदों में $<$ परिभाषित किया जा सकता है, और फिर $\times$ तथा $'$ के पदों में $+$ परिभाषित किया जा सकता है। अतः भाषा $0, ', \times$ में सत्य वाक्यों का समुच्चय अनिर्णेय है। दूसरी ओर प्रेस्बर्गर (Presburger) ने दिखाया कि अंकगणित की भाषा में सत्य, भाषा $0, ', +$ के वाक्यों का समुच्चय निर्णेय है। किंतु वह प्रक्रिया संगणनात्मक रूप से अव्यावहारिक है।

अध्याय 37

अपूर्णता और सिद्धता

37.1 परिचय

हिल्बर्ट का विचार था कि प्राकृतिक संख्याओं जैसी किसी गणितीय संरचना के लिए अभिगृहीतों का तंत्र तब तक अपर्याप्त है, जब तक वह उस संरचना के बारे में सभी सत्य कथनों को व्युत्पन्न न करने दे। निगमन के औपचारिक तंत्रों में उनकी बाद की रुचि के साथ मिलाकर इससे संकेत मिलता है कि उनके विचार में हमें यह सुनिश्चित करना चाहिए कि, मान लें, प्राकृतिक संख्याओं के बारे में तर्क करने के लिए प्रयुक्त औपचारिक तंत्र न केवल संगत हो, बल्कि *पूर्ण* भी हो; अर्थात् उसकी भाषा का प्रत्येक कथन या तो व्युत्पन्न हो या उसका निषेध हो। ग्योडेल (Gödel) का प्रथम अपूर्णता-प्रमेय दिखाता है कि अभिगृहीतों का ऐसा कोई तंत्र नहीं है: अंकगणित का कोई पूर्ण, संगत, अभिगृहीतीकरणीय औपचारिक तंत्र नहीं है। वास्तव में कोई भी "पर्याप्त प्रबल," संगत, अभिगृहीतीकरणीय गणितीय सिद्धांत पूर्ण नहीं है।

हिल्बर्ट का अधिक महत्त्वपूर्ण लक्ष्य—आधुनिक ("चिरसम्मत") गणित के औचित्य के उनके कार्यक्रम का केंद्रीय अंश—चिरसम्मत तर्क का निरूपण करने वाले औपचारिक तंत्रों के लिए परिमितीय संगतता-प्रमाण खोजना था। इसलिए हिल्बर्ट के कार्यक्रम के संदर्भ में ग्योडेल (Gödel) का द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय कहीं अधिक बड़ा आघात था। द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय को प्रथम अपूर्णता-प्रमेय की तरह कुछ अस्पष्ट शब्दों में कहा जा सकता है। मोटे तौर पर वह कहता है कि अंकगणित का कोई पर्याप्त प्रबल सिद्धांत अपनी संगतता स्वयं सिद्ध नहीं कर सकता। यहाँ "पर्याप्त प्रबल" में हमें **Q** से कुछ अधिक सम्मिलित करना होगा।

ग्योडेल (Gödel) के अपूर्णता-प्रमेय के मूल प्रमाण के पीछे का विचार एपिमेनिडीज़ (Epimenides) विरोधाभास में मिलता है। क्रीट निवासी एपिमेनिडीज़ ने कहा था कि सभी क्रीट निवासी झूठे हैं; इस विरोधाभास का अधिक सीधा रूप है कथन "यह वाक्य असत्य है।" मूलतः सत्यता के स्थान पर व्युत्पन्नता रखकर ग्योडेल (Gödel) ऐसे वाक्य को औपचारिक बनाने में सफल हुए जो घुमावदार ढंग से कहता है कि वह स्वयं व्युत्पन्न नहीं है। यदि वह वाक्य, व्युत्पन्न होता, तो सिद्धांत असंगत होता। ग्योडेल (Gödel) ने यह भी दिखाया कि जिस अभिगृहीत-तंत्र पर वे विचार कर रहे थे, उससे उस वाक्य का निषेध भी व्युत्पन्न नहीं है। (इस दूसरे भाग के लिए ग्योडेल (Gödel) को यह मानना पड़ा कि सिद्धांत **T** "ω-संगत" है। ω-संगतता, संगतता से संबंधित किंतु उससे अधिक प्रबल गुण है।[1] ग्योडेल (Gödel) के कुछ वर्ष बाद रॉसर (Rosser) ने दिखाया कि **T** की केवल साधारण संगतता मानना पर्याप्त है।)

पहली चुनौती यह समझना है कि स्वयं को निर्दिष्ट करने वाला कोई वाक्य कैसे बनाया जा सकता है। **Q** की भाषा के प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\ulcorner\varphi\urcorner$ को ${}^{\#}\varphi^{\#}$ के संगत अंक-सूचक मानें। इसका अर्थ ध्यान से सोचें: φ, **Q** की भाषा का सूत्र है; ${}^{\#}\varphi^{\#}$ कोई प्राकृतिक संख्या है; और $\ulcorner\varphi\urcorner$, **Q** की भाषा का कोई *पद* है। अतः **Q** की भाषा के प्रत्येक सूत्र φ का एक *नाम*, $\ulcorner\varphi\urcorner$, है, जो **Q** की भाषा का पद है; इससे हमें ऐसा संकल्पनात्मक ढाँचा मिलता है जिसमें **Q** की भाषा के सूत्रों दूसरे सूत्रों के बारे में बातें "कह" सकते हैं। अगली उपपत्ति नियत-बिंदु उपपत्ति कहलाती है।

सहायक प्रमेय 37.1. **T**, **Q** *का कोई विस्तार हो, और* $\psi(x)$ *ऐसा कोई सूत्र हो जिसमें केवल चर* x *मुक्त है। तब कोई वाक्य* φ *ऐसा है कि* $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ *।*

[1] अर्थात् प्रत्येक ω-संगत सिद्धांत संगत है, किंतु विलोम सत्य नहीं है।

उपपत्ति कहती है कि कोई गुण $\psi(x)$ दिए जाने पर ऐसा वाक्य φ है जो कहता है "$\psi(x)$ मेरे बारे में सत्य है," और **T** इसे "जानता" है।

ऐसा वाक्य हम कैसे बना सकते हैं? क्वाइन (Quine) द्वारा दिए गए एपिमेनिडीज़ विरोधाभास के निम्न रूप पर विचार करें:

> "अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है" अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है।

यह वाक्य सीधे स्वयं को निर्दिष्ट नहीं करता। वह केवल उद्धरण-चिह्नों के बीच की वाक्यविन्यासिक वस्तुओं के बारे में दावा करता है और ऐसा करते हुए निम्न वाक्यों के समान स्तर पर है:

1. "रॉबर्ट" अच्छा नाम है।
2. "मैं दौड़ा।" छोटा वाक्य है।
3. "तीन शब्द हैं" में तीन शब्द हैं।

किंतु जब कोई "अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है" पदबंध को लेकर उसके पहले उसी का उद्धृत रूप रखता है, तो क्या होता है? तब मूल वाक्य ही मिल जाता है! संक्षेप में, वाक्य कहता है कि वह असत्य है।

37.2 नियत-बिंदु उपपत्ति

नियत-बिंदु उपपत्ति कहती है कि किसी भी सूत्र $\psi(x)$ के लिए कोई वाक्य φ ऐसा है कि $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$, बशर्ते **T**, **Q** का विस्तार हो। झूठे वाक्य के मामले में हम चाहेंगे कि φ, **T** में सिद्धतः, "$\ulcorner\varphi\urcorner$ असत्य है" के समतुल्य हो; अर्थात् उस कथन के समतुल्य कि $^\#\varphi^\#$ किसी असत्य वाक्य की ग्योडेल (Gödel) संख्या है। प्रमाण का विचार समझने के लिए इसकी तुलना क्वाइन द्वारा φ की इस अनौपचारिक व्याख्या से करना उपयोगी होगा: "'अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है' अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है।" किसी व्यंजक को लेकर, उसके पहले उसी व्यंजक का उद्धरण रखकर वाक्य बनाने की संक्रिया को उस व्यंजक का *विकर्णीकरण* और परिणाम को उसका विकर्ण रूप कह सकते हैं। अतः 'अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है' का विकर्णीकरण है " 'अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है' अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है।" अब ध्यान दें कि क्वाइन का झूठा वाक्य 'असत्य देता है' का नहीं, बल्कि 'अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है' का विकर्णीकरण है। इसलिए जिस गुण का विकर्णीकरण करके झूठा वाक्य मिलता है, उसमें स्वयं विकर्णीकरण शामिल है!

अंकगणित की भाषा में हम एक मुक्त चर वाले सूत्र की ग्योडेल (Gödel) संख्या संगणित करके और उस ग्योडेल (Gödel) संख्या का मानक अंक-सूचक मुक्त चर के स्थान पर रखकर उसका उद्धरण बनाते हैं। $\alpha(x)$ का विकर्णीकरण $\alpha(\overline{n})$ है, जहाँ $n = {}^\#\alpha(x)^\#$। (अब से $\overline{{}^\#\alpha(x)^\#}$ को $\ulcorner\alpha(x)\urcorner$ लिखें।) अतः यदि $\psi(x)$ का अर्थ "असत्य है" है, तो "अपना उद्धरण पहले रखने पर असत्य देता है" का अर्थ होगा "अपने विकर्ण रूप की ग्योडेल (Gödel) संख्या पर लागू किए जाने पर असत्य देता है।" यदि हमारे पास ऐसे फलन $\mathrm{diag}(n)$ के लिए चिह्न $diag$ होता जो ग्योडेल (Gödel) संख्या n वाले सूत्र के विकर्ण रूप की ग्योडेल (Gödel) संख्या संगणित करता है, तो हम $\alpha(x)$ को $\psi(diag(x))$ लिख सकते थे। तब झूठे वाक्य का क्वाइन रूप उसका विकर्णीकरण होता, अर्थात् $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$ अथवा $\psi(diag(\ulcorner\psi(diag(x))\urcorner))$। निस्संदेह अब $\psi(x)$ कोई अन्य गुण भी हो सकता है और यही रचना काम करेगी। अपूर्णता-प्रमेय के लिए हम $\psi(x)$ को "x, **T** में व्युत्पन्न नहीं है" लेंगे। तब $\alpha(x)$ का अर्थ होगा "अपने विकर्ण रूप की ग्योडेल (Gödel) संख्या पर लागू किए जाने पर ऐसा वाक्य देता है जो **T** में व्युत्पन्न नहीं है।"

इसे **T** में औपचारिक बनाने के लिए हमें diag को औपचारिक बनाने का ढंग खोजना होगा। फलन $\mathrm{diag}(n)$ संगणनीय, बल्कि आदिम पुनरावर्ती है: यदि n किसी सूत्र $\alpha(x)$ की ग्योडेल (Gödel) संख्या है, तो $\mathrm{diag}(n)$, $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$ की ग्योडेल (Gödel) संख्या लौटाता है। (याद करें, $\ulcorner\alpha(x)\urcorner$, $\alpha(x)$ की ग्योडेल (Gödel) संख्या का मानक अंक-सूचक, अर्थात् $\overline{{}^\#\alpha(x)^\#}$, है।) यदि $diag$, **T** में फलन diag का निरूपण करने वाला फलन-चिह्न होता, तो हम φ को सूत्र $\psi(diag(\ulcorner\psi(diag(x))\urcorner))$ ले सकते थे। ध्यान दें कि

$$\begin{aligned}\mathrm{diag}({}^\#\psi(diag(x))^\#) &= {}^\#\psi(diag(\ulcorner\psi(diag(x))\urcorner))^\# \\ &= {}^\#\varphi^\#.\end{aligned}$$

यह मानते हुए कि **T**

$$diag(\ulcorner\psi(diag(x))\urcorner) = \ulcorner\varphi\urcorner,$$

को व्युत्पन्न कर सकता है, वह $\psi(diag(\ulcorner\psi(diag(x))\urcorner)) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ को व्युत्पन्न कर सकता है। किंतु बायाँ पक्ष परिभाषा से φ है।

निस्संदेह $diag$ सामान्यतः **T** का फलन-चिह्न नहीं होगा, और निश्चिततः वह **Q** का फलन-चिह्न नहीं है। किंतु diag संगणनीय है, इसलिए उसका **Q** में किसी सूत्र $\theta_{\text{diag}}(x, y)$ द्वारा *निरूपण* होता है। अतः $\psi(diag(x))$ लिखने के स्थान पर हम $\exists y\,(\theta_{\text{diag}}(x, y) \wedge \psi(y))$ लिख सकते हैं। ऊपर रेखांकित शेष प्रमाण फिर चल जाता है, और वास्तव में वह **Q** में ही चल जाता है।

सहायक प्रमेय 37.2. *$\psi(x)$ एक मुक्त चर x वाला कोई सूत्र हो। तब कोई वाक्य φ ऐसा है कि* $\mathbf{Q} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$*।*

प्रमाण. $\psi(x)$ दिए जाने पर $\alpha(x)$ को सूत्र $\exists y\,(\theta_{\text{diag}}(x, y) \wedge \psi(y))$ मानें और φ को उसका विकर्णीकरण, अर्थात् सूत्र $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$, मानें।

चूँकि θ_{diag}, diag का निरूपण करता है और $\text{diag}(^{\#}\alpha(x)^{\#}) = {}^{\#}\varphi^{\#}$, इसलिए **Q** निम्न को व्युत्पन्न कर सकता है:

$$\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \tag{37.1}$$

$$\forall y\,(\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, y) \to y = \ulcorner\varphi\urcorner). \tag{37.2}$$

अब हम दिखाते हैं कि $\mathbf{Q} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$। हम केवल तर्क और **Q** में व्युत्पन्न तथ्यों का उपयोग करके अनौपचारिक तर्क देते हैं।

पहले φ, अर्थात् $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$, मान लें। $\alpha(x)$ की परिभाषा पर वापस जाने से देखते हैं कि $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$ केवल

$$\exists y\,(\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, y) \wedge \psi(y)).$$

है। ऐसा y लें। चूँकि $\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, y)$, इसलिए समीकरण (37.2) से $y = \ulcorner\varphi\urcorner$। अतः $\psi(y)$ से हमें $\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ मिलता है।

अब $\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ मान लें। समीकरण (37.1) से हमारे पास

$$\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \psi(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

इससे निकलता है कि

$$\exists y\,(\theta_{\text{diag}}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, y) \wedge \psi(y)).$$

किंतु यह केवल $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$, अर्थात् φ, है। □

इसकी तुलना संगणनीयता-सिद्धांत में नियत-बिंदु उपपत्ति के प्रमाण से करें। अंतर यह है कि यहाँ हम किसी *कथन* को स्वयं उसके पदों में परिभाषित करना चाहते हैं, जबकि वहाँ हम किसी *फलन* को स्वयं उसके पदों में परिभाषित करना चाहते थे; इस अंतर के अतिरिक्त विचार वास्तव में एक ही है।

37.3 प्रथम अपूर्णता-प्रमेय

अब हम प्रथम अपूर्णता-प्रमेय के ग्योडेल (Gödel) के मूल प्रमाण का वर्णन कर सकते हैं। **T** ऐसी भाषा में कोई संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत सिद्धांत हो जो अंकगणित की भाषा का विस्तार करती है, और मान लें कि **T** में **Q** के अभिगृहीत सम्मिलित हैं। इसका विशेषतः अर्थ है कि **T** संगणनीय फलनों और संबंधों का निरूपण करता है।

हमने तर्क दिया है कि सूत्रों और प्रमाणों का संख्याओं द्वारा उचित कूटलेखन दिए जाने पर संबंध $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ संगणनीय है, जहाँ $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ तभी और केवल तभी लागू होता है जब x, **T** में ग्योडेल (Gödel) संख्या y वाले सूत्र की व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। वास्तव में ग्योडेल (Gödel) के मन में जो विशेष सिद्धांत था, उसके लिए अपने शोधपत्र के 45 फलनों और संबंधों की सूची का उपयोग करके ग्योडेल (Gödel) दिखा सके कि यह संबंध आदिम पुनरावर्ती है। 45वाँ संबंध xBy, उनके **T** के विशेष चुनाव के लिए केवल $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ है। याद रखें कि ग्योडेल (Gödel) अपने शोधपत्र में जहाँ "पुनरावर्ती" शब्द का उपयोग करते हैं, वहाँ अब हम "आदिम पुनरावर्ती" पदबंध का उपयोग करेंगे।

चूँकि $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ संगणनीय है, उसका **T** में निरूपण होता है। उसका निरूपण करने वाले सूत्र को हम $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ लिखेंगे। $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ को सूत्र $\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ मानें। यह ग्योडेल (Gödel) की सूची के 46वें संबंध $\mathrm{Bew}(y)$ का वर्णन करता है। ग्योडेल (Gödel) के शब्दों में यही एकमात्र संबंध है जिसके बारे में "यह नहीं कहा जा सकता कि वह पुनरावर्ती है।" संभवतः उनका अर्थ यह था: परिभाषा से यह स्पष्ट नहीं है कि वह संगणनीय है; और बाद के विकास वास्तव में दिखाते हैं कि वह संगणनीय नहीं है।

T ऐसा कोई अभिगृहीतीकरणीय सिद्धांत हो जिसमें **Q** सम्मिलित है। तब $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ निर्णेय है, इसलिए उसका **Q** में किसी सूत्र $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ द्वारा निरूपण होता है। $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ ऊपर वर्णित सूत्र हो। नियत-बिंदु उपपत्ति से कोई सूत्र $\gamma_{\mathbf{T}}$ ऐसा है कि **Q** (और इसलिए **T**) निम्न को व्युत्पन्न करता है:

$$\gamma_{\mathbf{T}} \leftrightarrow \neg \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner). \tag{37.3}$$

ध्यान दें कि सारतः $\gamma_{\mathbf{T}}$ कहता है, "$\gamma_{\mathbf{T}}$, **T** में व्युत्पन्न नहीं है।"

सहायक प्रमेय 37.3. *यदि* **T**, **Q** *का कोई संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार है, तो* $\mathbf{T} \nvdash \gamma_{\mathbf{T}}$*।*

प्रमाण. मान लें **T**, $\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है। तब कोई व्युत्पत्ति *सचमुच* है, और इसलिए किसी संख्या m के लिए संबंध $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(m, {}^{\#}\gamma_{\mathbf{T}}{}^{\#})$ लागू होता है। किंतु तब **Q** वाक्य $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{m}, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner)$ को व्युत्पन्न करता है। अतः **Q**, $\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner)$ को व्युत्पन्न करता है, जो परिभाषा से $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner)$ है। समीकरण (37.3) से **Q**, $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है; और चूँकि **T**, **Q** का विस्तार है, **T** भी ऐसा करता है। हमने दिखाया कि यदि **T**, $\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है, तो वह $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$ को भी व्युत्पन्न करता है और इसलिए असंगत होगा। □

परिभाषा 37.4. कोई सिद्धांत **T** ω*-संगत* है यदि निम्न लागू हो: यदि $\exists x\, \varphi(x)$ कोई वाक्य है और **T**, $\neg\varphi(\overline{0})$, $\neg\varphi(\overline{1})$, $\neg\varphi(\overline{2})$, ...को व्युत्पन्न करता है, तो **T**, $\exists x\, \varphi(x)$ को सिद्ध नहीं करता।

ध्यान दें कि प्रत्येक ω-संगत सिद्धांत संगत भी है। यह सीधे इस तथ्य से निकलता है कि यदि **T** असंगत है, तो प्रत्येक φ के लिए $\mathbf{T} \vdash \varphi$। विशेषतः, यदि **T** असंगत है, तो वह प्रत्येक n के लिए $\neg\varphi(\overline{n})$ को व्युत्पन्न करता है और $\exists x\, \varphi(x)$ को भी व्युत्पन्न करता है। अतः यदि **T** असंगत है, तो वह ω-असंगत है। प्रतिधनात्मक रूप से, यदि **T**, ω-संगत है, तो उसे संगत होना चाहिए।

सहायक प्रमेय 37.5. *यदि* **T**, **Q** *का कोई* ω*-संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार है, तो* $\mathbf{T} \nvdash \neg\gamma_{\mathbf{T}}$*।*

प्रमाण. हम दिखाते हैं कि यदि **T**, $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है, तो वह ω-असंगत है। मान लें **T**, $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है। यदि **T** असंगत है, तो वह ω-असंगत है और हमारा काम पूरा है। अन्यथा **T** संगत है, इसलिए सहायक प्रमेय 37.3 से वह $\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न नहीं करता। चूँकि **T** में $\gamma_{\mathbf{T}}$ की कोई व्युत्पत्ति नहीं है, **Q** निम्न को व्युत्पन्न करता है:

$$\neg\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{0}, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner), \neg\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{1}, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner), \neg\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{2}, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner), \ldots$$

और **T** भी ऐसा करता है। दूसरी ओर समीकरण (37.3) से $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$, $\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, \ulcorner \gamma_{\mathbf{T}} \urcorner)$ के समतुल्य है। अतः **T**, ω-असंगत है। □

प्रमेय 37.6. **T**, **Q** *का कोई* ω*-संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार हो। तब* **T** *पूर्ण नहीं है।*

प्रमाण. यदि **T**, ω-संगत है, तो वह संगत है; अतः सहायक प्रमेय 37.3 से $\mathbf{T} \nvdash \gamma_{\mathbf{T}}$। सहायक प्रमेय 37.5 से $\mathbf{T} \nvdash \neg\gamma_{\mathbf{T}}$। इसका अर्थ है कि **T** अपूर्ण है, क्योंकि वह न $\gamma_{\mathbf{T}}$ को और न $\neg\gamma_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है। □

37.4 रॉसर का प्रमेय

क्या हम ग्योडेल (Gödel) के प्रमाण को संशोधित करके अधिक प्रबल परिणाम पा सकते हैं, जिसमें "ω-संगत" के स्थान पर केवल "संगत" हो? रॉसर (Rosser) की खोजी हुई एक युक्ति से उत्तर "हाँ" है। रॉसर की युक्ति $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ के स्थान पर "संशोधित" व्युत्पन्नता विधेय $\mathrm{RProv}_T(y)$ का उपयोग करना है।

प्रमेय 37.7. **T, Q** *का कोई संगत, अभिगृहीतीकरणीय विस्तार हो। तब* **T** *पूर्ण नहीं है।*

प्रमाण. याद करें कि $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ को $\exists x\, \mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ के रूप में परिभाषित किया जाता है, जहाँ $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y)$ उस निर्णेय संबंध का निरूपण करता है जो तभी और केवल तभी लागू होता है जब x, ग्योडेल (Gödel) संख्या y वाले वाक्य की किसी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। वह संबंध भी निर्णेय है जो x और y के बीच तब लागू होता है जब x, ग्योडेल (Gödel) संख्या y वाले वाक्य के किसी *खंडन* की ग्योडेल (Gödel) संख्या हो। $\mathrm{not}(x)$ को वह आदिम पुनरावर्ती फलन मानें जो यह करता है: यदि x किसी सूत्र φ का कूट है, तो $\mathrm{not}(x)$, $\neg\varphi$ का कूट है। तब $\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(x, y)$ तभी और केवल तभी लागू होता है जब $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, \mathrm{not}(y))$। उसका निरूपण $\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(x, y)$ करें। तब यदि $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$ और δ कोई संगत व्युत्पत्ति है, तो $\mathbf{Q} \vdash \mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\delta\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner)$। हम $\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(y)$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\exists x\, (\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, y) \wedge \forall z\, (z < x \to \neg\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z, y))).$$

मोटे तौर पर $\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(y)$ कहता है, "**T** में y का कोई प्रमाण है, और y का इससे छोटा कोई खंडन नहीं है।" यदि **T** संगत हो, तो $\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(y)$ उन्हीं संख्याओं के लिए सत्य है जिनके लिए $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ सत्य है; किंतु **T** में *सिद्धता* की दृष्टि से (और अब हम जानते हैं कि सत्यता और सिद्धता में अंतर है!) दोनों के गुण अलग हैं। यदि **T** *असंगत* है, तो दोनों समान संख्याओं के लिए लागू *नहीं* होते! ($\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(y)$ को प्रायः "y रॉसर-सिद्ध है" पढ़ा जाता है। चूँकि अभी की चर्चा के अनुसार रॉसर-सिद्धता कोई विशेष प्रकार की सिद्धता नहीं है—असंगत सिद्धांतों में ऐसे वाक्यों होते हैं जो सिद्ध तो हैं, किंतु रॉसर-सिद्ध नहीं—यह भ्रमकारी हो सकता है। भ्रम से बचने के लिए आप इसके स्थान पर "y शमूवेबल है" पढ़ सकते हैं।)

नियत-बिंदु उपपत्ति से कोई सूत्र $\rho_{\mathbf{T}}$ ऐसा है कि

$$\mathbf{Q} \vdash \rho_{\mathbf{T}} \leftrightarrow \neg\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner). \tag{37.4}$$

प्रमेय 37.6 के प्रमाण के विपरीत, यहाँ हमारा दावा है कि यदि **T** संगत है, तो **T** न $\rho_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है, और **T** न $\neg\rho_{\mathbf{T}}$ को व्युत्पन्न करता है। (दूसरे शब्दों में हमें ω-संगतता की मान्यता नहीं चाहिए।)

पहले दिखाएँ कि $\mathbf{T} \nvdash \rho_{\mathbf{T}}$। मान लें वह इसे सिद्ध करता है; तब T से $\rho_{\mathbf{T}}$ की कोई व्युत्पत्ति है। उसकी ग्योडेल (Gödel) संख्या n मानें। तब $\mathbf{Q} \vdash \mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{n}, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$, क्योंकि $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}$, **Q** में $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}$ का निरूपण करता है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक $k < n$ के लिए k, $\neg\rho_{\mathbf{T}}$ की किसी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या नहीं है, क्योंकि **T** संगत है। अतः प्रत्येक $k < n$ के लिए $\mathbf{Q} \vdash \neg\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(\overline{k}, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$। सहायक प्रमेय 35.24 से $\mathbf{Q} \vdash \forall z\, (z < \overline{n} \to \neg\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))$। अतः

$$\mathbf{Q} \vdash \exists x\, (\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner) \wedge \forall z\, (z < x \to \neg\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))),$$

किंतु यह केवल $\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$ है। समीकरण (37.4) से $\mathbf{Q} \vdash \neg\rho_{\mathbf{T}}$। चूँकि **T**, **Q** का विस्तार है, इसलिए $\mathbf{T} \vdash \neg\rho_{\mathbf{T}}$ भी। हमने मान लिया था कि $\mathbf{T} \vdash \rho_{\mathbf{T}}$, अतः **T** असंगत होगा, जो प्रमेय की मान्यता के विरुद्ध है।

अब दिखाएँ कि $\mathbf{T} \nvdash \neg\rho_{\mathbf{T}}$। फिर मान लें कि वह इसे सिद्ध करता है और n, $\neg\rho_{\mathbf{T}}$ की किसी व्युत्पत्ति की ग्योडेल (Gödel) संख्या है। तब $\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(n, {}^{\#}\rho_{\mathbf{T}}{}^{\#})$ लागू होता है; और चूँकि $\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}$, **Q** में $\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}$ का निरूपण करता है, इसलिए $\mathbf{Q} \vdash \mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(\overline{n}, \ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$। हम फिर दिखाएँगे कि तब **T** असंगत होगा, क्योंकि वह $\rho_{\mathbf{T}}$ को भी व्युत्पन्न करेगा। चूँकि

$$\mathbf{Q} \vdash \rho_{\mathbf{T}} \leftrightarrow \neg\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner),$$

और चूँकि **T**, **Q** का विस्तार है, इतना दिखाना पर्याप्त है कि

$$\mathbf{Q} \vdash \neg\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner).$$

वाक्य $\neg\mathrm{RProv}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$, अर्थात्

$$\neg\exists x\,(\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)\wedge\forall z\,(z<x\to\neg\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))),$$

तार्किकतः इसके समतुल्य है:

$$\forall x\,(\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)\to\exists z\,(z<x\wedge\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))).$$

हम तर्क और **Q** द्वारा व्युत्पन्न किए जाने वाले तथ्यों का उपयोग करके अनौपचारिक तर्क देते हैं। मान लें x स्वेच्छ है और $\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$। हम पहले ही जानते हैं कि $\mathbf{T}\nvdash\rho_{\mathbf{T}}$; अतः प्रत्येक k के लिए $\mathbf{Q}\vdash\neg\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{k},\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$। इसलिए प्रत्येक k के लिए $x\neq\overline{k}$ निकलता है। विशेषतः हमारे पास (क) $x\neq\overline{n}$ है। हमारे पास $\neg(x=\overline{0}\vee x=\overline{1}\vee\cdots\vee x=\overline{n-1})$ भी है, और इसलिए सहायक प्रमेय 35.24 से (ख) $\neg(x<\overline{n})$। सहायक प्रमेय 35.25 से $\overline{n}<x$। चूँकि $\mathbf{Q}\vdash\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(\overline{n},\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$, हमारे पास $\overline{n}<x\wedge\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(\overline{n},\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)$ है, और उससे $\exists z\,(z<x\wedge\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))$। चूँकि x स्वेच्छ था, हमें आवश्यकतानुसार मिलता है कि

$$\forall x\,(\mathrm{Prf}_{\mathbf{T}}(x,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner)\to\exists z\,(z<x\wedge\mathrm{Ref}_{\mathbf{T}}(z,\ulcorner\rho_{\mathbf{T}}\urcorner))).\qquad\square$$

37.5 ग्योडेल (Gödel) के मूल शोधपत्र से तुलना

ग्योडेल (Gödel) के 1931 के शोधपत्र पर कुछ समय लगाना सार्थक है। उसका परिचय उन विचारों की रूपरेखा देता है जिनकी हमने अभी चर्चा की। शोधपत्र को केवल सरसरी तौर पर पढ़ने पर भी प्रत्येक चरण में चल रही बात समझना आसान है: पहले ग्योडेल (Gödel) औपचारिक तंत्र P (वाक्यविन्यास, अभिगृहीत, प्रमाण-नियम) का वर्णन करते हैं; फिर आदिम पुनरावर्ती फलन और संबंध परिभाषित करते हैं; फिर दिखाते हैं कि xBy आदिम पुनरावर्ती है और तर्क देते हैं कि आदिम पुनरावर्ती फलनों तथा संबंधों का **P** में निरूपण होता है। इसके बाद वे ऊपर की भाँति अपूर्णता-प्रमेय सिद्ध करते हैं। अनुभाग 3 में वे दिखाते हैं कि असिद्ध कथन को अंकगणित की भाषा का वाक्य चुना जा सकता है। यही β-उपपत्ति का उद्गम है; संगणनीय फलनों की **Q** में निरूपणीयता दिखाते समय अनुक्रमों को सँभालने के लिए हमने भी उसी का उपयोग किया। ग्योडेल (Gödel) पर्याप्त अभिगृहीतों का कोई न्यूनतम समुच्चय अलग करने तक नहीं जाते, किंतु अब हम जानते हैं कि **Q** काम कर देता है। अंततः अनुभाग 4 में वे द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय के प्रमाण की रूपरेखा देते हैं।

37.6 PA के लिए व्युत्पन्नता प्रतिबंध

पियानो अंकगणित, अथवा **PA**, वह सिद्धांत है जो सभी सूत्रों के लिए आगमन-अभिगृहीत जोड़कर **Q** का विस्तार करता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक सूत्र φ के लिए **Q** में इस रूप का अभिगृहीत जोड़ते हैं:

$$(\varphi(0)\wedge\forall x\,(\varphi(x)\to\varphi(x')))\to\forall x\,\varphi(x)$$

ध्यान दें कि यह वास्तव में एक *योजना* है, अर्थात् अनंततः अनेक अभिगृहीत (और पता चलता है कि **PA** परिमिततः अभिगृहीतीकरणीय *नहीं* है)। किंतु क्योंकि प्रभावी ढंग से निर्धारित किया जा सकता है कि चिह्नों की कोई शृंखला आगमन-अभिगृहीत का उदाहरण है या नहीं, इसलिए **PA** के अभिगृहीतों का समुच्चय संगणनीय है। **PA**, **Q** से कहीं अधिक समर्थ सिद्धांत है। उदाहरणतः सामान्य ढंग से आगमन का उपयोग करके सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि जोड़ और गुणन क्रमविनिमेय हैं। वास्तव में अधिकांश परिमितीय संख्या-सैद्धांतिक और संयोजनात्मक तर्क **PA** में किए जा सकते हैं।

चूँकि **PA** संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत है, व्युत्पन्नता विधेय $\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x,y)$ संगणनीय है और इसलिए **Q** में (और इस प्रकार **PA** में) निरूपित होता है। पहले की तरह संबंध का निरूपण करने वाले सूत्र को हम $\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x,y)$ लिखेंगे। $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(y)$ को सूत्र $\exists x\,\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x,y)$ मानें, जो सहजतः कहता है, "y, **PA** के अभिगृहीतों से व्युत्पन्न है।" हमें **Q** के अभिगृहीतों से कुछ अधिक की आवश्यकता इसलिए है कि प्रयुक्त सिद्धांत इस व्युत्पन्नता विधेय के बारे में कुछ मूलभूत तथ्यों को व्युत्पन्न करने के लिए पर्याप्त प्रबल होना चाहिए। वास्तव में हमें निम्न तथ्य चाहिए:

P1. यदि $\mathbf{PA} \vdash \varphi$, तो $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$।

P2. सभी सूत्रों φ और ψ के लिए,

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)).$$

P3. प्रत्येक सूत्र φ के लिए,

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner).$$

इन तीन गुणों की पुष्टि करने का एकमात्र ढंग सूत्र $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(y)$ का सावधानी से वर्णन करना और संबद्ध औपचारिक व्युत्पत्तियाँ का वर्णन करने के लिए **PA** के अभिगृहीतों का उपयोग करना है। प्रतिबंध (1) और (2) सरल हैं; वास्तव में प्रतिबंध (3) में काम लगता है। (सोचें कि इसमें किस प्रकार का काम लगेगा ...।) विवरण पूरा करना श्रमसाध्य और अरुचिकर होगा, इसलिए यहाँ हम आपसे विश्वास करने को कहेंगे कि **PA** में ऊपर सूचीबद्ध तीन गुण हैं। $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(y)$ का कोई उचित चुनाव यह भी संतुष्ट करेगा:

P4. यदि $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, तो $\mathbf{PA} \vdash \varphi$।

किंतु हमें इस तथ्य की आवश्यकता नहीं होगी।

संयोग से, ग्योडेल (Gödel) भी उसी ढंग से आलसी थे जैसे हम अभी हैं। 1931 के शोधपत्र के अंत में वे द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय के प्रमाण की रूपरेखा देते हैं और बाद के शोधपत्र में विवरण देने का वचन देते हैं। उन्होंने उसे कभी पूरा नहीं किया; क्योंकि तर्क समझने वाले सभी लोगों को विश्वास था कि उसे पूरा किया जा सकता है, उन्हें विवरण भरने की आवश्यकता नहीं पड़ी।

37.7 द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय

इस कथन को हम कैसे व्यक्त कर सकते हैं कि **PA** अपनी संगतता स्वयं सिद्ध नहीं करता? **PA** के असंगत होने का अर्थ यह कहना है कि $\mathbf{PA} \vdash 0 = 1$। अतः हम संगतता-कथन $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को वाक्य $\neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ मान सकते हैं; तब अगला प्रमेय वांछित परिणाम देता है:

प्रमेय 37.8. *यदि* **PA** *संगत है, तो* **PA**, $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ *को व्युत्पन्न नहीं करता।*

यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि प्रमेय $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ के विशिष्ट निरूपण (अर्थात् $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(y)$ के विशिष्ट निरूपण) पर निर्भर है। हम केवल यह उपयोग करेंगे कि $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(y)$ का निरूपण तीनों व्युत्पन्नता प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है; अतः प्रमेय ऐसे व्युत्पन्नता विधेय वाले प्रत्येक सिद्धांत तक व्यापक होता है जिसमें ये गुण हों।

ग्योडेल (Gödel) के तर्क की रूपरेखा पढ़ना ज्ञानवर्धक है, क्योंकि प्रमेय एक प्रभावी अंतिम पंक्ति की तरह निकलता है। तर्क ऐसा है। $\gamma_{\mathbf{PA}}$ को वह ग्योडेल (Gödel) वाक्य मानें जिसे हमने प्रमेय 37.6 के प्रमाण में बनाया था। हमने दिखाया है: "यदि **PA** संगत है, तो **PA**, $\gamma_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न नहीं करता।" यदि इसे **PA** *के भीतर* औपचारिक बनाएँ, तो हमें इसका प्रमाण मिलता है:

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \to \neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\gamma_{\mathbf{PA}}\urcorner).$$

अब मान लें **PA**, $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न करता है। तब वह $\neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\gamma_{\mathbf{PA}}\urcorner)$ को व्युत्पन्न करता है। किंतु चूँकि $\gamma_{\mathbf{PA}}$ ग्योडेल (Gödel) वाक्य है, यह $\gamma_{\mathbf{PA}}$ के समतुल्य है। अतः **PA**, $\gamma_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न करता है।

किंतु हम जानते हैं कि यदि **PA** संगत है, तो वह $\gamma_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न नहीं करता! अतः यदि **PA** संगत है, तो वह $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न नहीं कर सकता।

तर्क को अधिक सटीक बनाने के लिए हम $\gamma_{\mathbf{PA}}$ को **PA** का ग्योडेल (Gödel) वाक्य लेंगे और व्युत्पन्नता प्रतिबंधों (P1)–(P3) का उपयोग करके दिखाएँगे कि **PA**, $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \to \gamma_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न करता है। इससे दिखेगा कि **PA**, $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न नहीं करता। यहाँ **PA** के भीतर प्रमाण की रूपरेखा है। (सरलता के लिए हम **PA** के अधोलेख हटा देते हैं।)

$$\gamma \leftrightarrow \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \tag{37.5}$$

γ ग्योडेल (Gödel) वाक्य है

$$\gamma \to \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \tag{37.6}$$

समीकरण (37.5) से

$$\gamma \to (\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \bot) \tag{37.7}$$

समीकरण (37.6) से, तर्क द्वारा

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma \to (\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \bot)\urcorner) \tag{37.8}$$

समीकरण (37.7) से, प्रतिबंध P1 द्वारा

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \mathrm{Prov}(\ulcorner(\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \bot)\urcorner) \tag{37.9}$$

समीकरण (37.8) से, प्रतिबंध P2 द्वारा

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to (\mathrm{Prov}(\ulcorner\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Prov}(\ulcorner\bot\urcorner)) \tag{37.10}$$

समीकरण (37.9) से, प्रतिबंध P2 और तर्क द्वारा

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \mathrm{Prov}(\ulcorner\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner)\urcorner) \tag{37.11}$$

P3 द्वारा

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \mathrm{Prov}(\ulcorner\bot\urcorner) \tag{37.12}$$

समीकरण (37.10) और समीकरण (37.11) से, तर्क द्वारा

$$\mathrm{Con} \to \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \tag{37.13}$$

समीकरण (37.12) का प्रतिधनात्मक रूप और $\mathrm{Con} \equiv \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\bot\urcorner)$

$$\mathrm{Con} \to \gamma$$

समीकरण (37.5) और समीकरण (37.13) से, तर्क द्वारा।

ऊपर तर्क का उपयोग प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के केवल प्राथमिक तथ्यों के लिए है; उदाहरणतः समीकरण (37.7), $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)$ का उपयोग करता है और समीकरण (37.12), $\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \chi$ का। समीकरण (37.9) और समीकरण (37.10) में प्रतिबंध P2 का उपयोग P2 के उदाहरणों $\mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prov}(\ulcorner\psi\urcorner))$ पर निर्भर करता है। पहले में $\varphi \equiv \gamma$ और $\psi \equiv \mathrm{Prov}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \bot$; दूसरे में $\varphi \equiv \mathrm{Prov}(\ulcorner G\urcorner)$ और $\psi \equiv \bot$।

द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय का अधिक अमूर्त रूप यह है:

प्रमेय 37.9. **T**, **Q** *का कोई संगत, अभिगृहीतीकृत विस्तार हो और* $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ *ऐसा कोई सूत्र हो जो* **T** *के लिए व्युत्पन्नता प्रतिबंध P1–P3 को संतुष्ट करता है। तब* **T**, Con_T *को व्युत्पन्न नहीं करता।*

कथा का निष्कर्ष यह है कि गणित का कोई "उचित" संगत सिद्धांत अपने ही संगतता-कथन को व्युत्पन्न नहीं कर सकता। मान लें **T** गणित का ऐसा सिद्धांत है जिसमें **Q** और हिल्बर्ट का "परिमितीय" तर्क (वह चाहे जो भी हो) सम्मिलित हैं। तब पूरा **T**, **T** के संगतता-कथन को व्युत्पन्न नहीं कर सकता; अतः और भी स्पष्टतः, उसका परिमितीय खंड भी **T** के संगतता-कथन को व्युत्पन्न नहीं कर सकता। इस अर्थ में "समूचे गणित" का कोई परिमितीय संगतता-प्रमाण नहीं हो सकता।

"परिमितीय" पद की व्याख्या में कुछ छूट है, और 1931 के शोधपत्र में ग्योडेल (Gödel) इस संभावना को स्वीकार करते हैं कि जिसे हम "परिमितीय" मानें वह उस प्रकार के गणित से बाहर हो सकता है जिसे हिल्बर्ट औपचारिक बनाना चाहते थे। किंतु ग्योडेल (Gödel) उदार हो रहे थे; आज यह देखना कठिन है कि हम ऐसी कोई चीज़ कैसे

पा सकते हैं जिसे उचित रूप से परिमितीय कहा जा सके, किंतु जिसे, मान लें, चयन-अभिगृहीत सहित ज़र्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय-सिद्धांत **ZFC** में औपचारिक न बनाया जा सके।

37.8 लोब (Löb) का प्रमेय

किसी सिद्धांत **T** का ग्योडेल (Gödel) वाक्य $\neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ का कोई नियत-बिंदु है; अर्थात् ऐसा वाक्य γ कि

$$\mathbf{T} \vdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\gamma\urcorner) \leftrightarrow \gamma.$$

वह व्युत्पन्न नहीं है, क्योंकि यदि $\mathbf{T} \vdash \gamma$, तो (क) व्युत्पन्नता प्रतिबंध (1) से $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\gamma\urcorner)$, और (ख) $\mathbf{T} \vdash \gamma$ को $\mathbf{T} \vdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\gamma\urcorner) \leftrightarrow \gamma$ के साथ मिलाने पर $\mathbf{T} \vdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ मिलता है; अतः **T** असंगत होगा। अब $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ के किसी नियत-बिंदु की स्थिति के बारे में पूछना स्वाभाविक है; अर्थात् ऐसे वाक्य δ के बारे में कि

$$\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\delta\urcorner) \leftrightarrow \delta.$$

यदि वह व्युत्पन्न होता, तो प्रतिबंध (1) से $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\delta\urcorner)$; किंतु ऊपर की समतुल्यता पर मोडस पोनेन्स लगाने से भी यही निष्कर्ष मिलता है। अतः कम-से-कम ग्योडेल (Gödel) वाक्य वाले तर्क से यह निष्कर्ष नहीं मिलता कि **T** असंगत है। निस्संदेह इससे यह नहीं दिखता कि **T**, δ को व्युत्पन्न *करता* है।

प्रश्न को थोड़ा व्यापक बनाकर हम आगे बढ़ सकते हैं। नियत-बिंदु समतुल्यता की बाएँ-से-दाएँ दिशा $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\delta\urcorner) \to \delta$ एक सामान्य योजना का उदाहरण है, जिसे *प्रतिबिंबन सिद्धांत* कहते हैं: $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$। इसका यह नाम इसलिए है कि एक अर्थ में यह व्यक्त करता है कि **T** अपनी व्युत्पन्न कर सकने वाली बातों पर "प्रतिबिंबित" कर सकता है; मूलतः वह किसी भी φ के लिए कहता है, "यदि **T**, φ को व्युत्पन्न कर सकता है, तो φ सत्य है।" निस्संदेह यह केवल सुदृढ़ सिद्धांतों के लिए सत्य है, और इससे संकेत मिलता है कि सिद्धांत सामान्यतः इसके प्रत्येक उदाहरण को व्युत्पन्न नहीं करेंगे। तो कोई (पर्याप्त प्रबल और व्युत्पन्नता प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला) सिद्धांत कौन-से उदाहरण व्युत्पन्न कर सकता है? निश्चिततः वे सभी जिनमें φ स्वयं व्युत्पन्न है। और बस वही, जैसा अगला परिणाम दिखाता है।

प्रमेय 37.10. **T, Q** *का कोई अभिगृहीतीकरणीय विस्तार हो, और मान लें* $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y)$ *कोई ऐसा सूत्र है जो खंड 37.7 के प्रतिबंध P1–P3 को संतुष्ट करता है। यदि* **T**, $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ *को व्युत्पन्न करता है, तो वास्तव में* **T**, φ *को व्युत्पन्न करता है।*

भिन्न शब्दों में, यदि $\mathbf{T} \nvdash \varphi$, तो $\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$। यह परिणाम लोब (Löb) का प्रमेय कहलाता है।

लोब (Löb) के प्रमेय के प्रमाण की मार्गदर्शक कल्पना सांता क्लॉज़ के अस्तित्व का एक चतुर प्रमाण है। (यदि आपको वह निष्कर्ष पसंद न हो, तो अपनी पसंद का कोई भी दूसरा निष्कर्ष रख सकते हैं।) प्रमाण यह है:

1. X वह वाक्य हो, "यदि X सत्य है, तो सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है।"
2. मान लें X सत्य है।
3. तब उसकी कही हुई बात लागू होती है; अर्थात् हमारे पास है: यदि X सत्य है, तो सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है।
4. चूँकि हम X को सत्य मान रहे हैं, (2) और (3) से मोडस पोनेन्स द्वारा निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है।
5. हम मान्यता (2), "X सत्य है," से (4), "सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है," व्युत्पन्न करने में सफल हुए हैं। सप्रतिबंध प्रमाण से हमने दिखाया: "यदि X सत्य है, तो सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है।"
6. किंतु यह केवल वाक्य X है। अतः हमने दिखाया कि X सत्य है।
7. किंतु तब ऊपर के तर्क (2)–(4) से सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है।

इस विचार को औपचारिक बनाकर, "सत्य है" के स्थान पर "व्युत्पन्न है" और "सांता क्लॉज़ का अस्तित्व है" के स्थान पर φ रखने से लोब (Löb) के प्रमेय का प्रमाण मिलता है। युक्ति है नियत-बिंदु उपपत्ति को सूत्र $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y) \to \varphi$ पर लागू करना। उसका नियत-बिंदु ऊपर की रूपरेखा के वाक्य X के संगत है।

प्रमेय 37.10 का प्रमाण. मान लें φ ऐसा वाक्य है कि $\mathbf{T}$, $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ को व्युत्पन्न करता है। $\psi(y)$ को सूत्र $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y) \to \varphi$ मानें और नियत-बिंदु उपपत्ति का उपयोग करके कोई वाक्य θ ऐसा पाएँ कि $\mathbf{T}$, $\theta \leftrightarrow \psi(\ulcorner\theta\urcorner)$ को व्युत्पन्न करता है। तब निम्न में से प्रत्येक $\mathbf{T}$ में व्युत्पन्न है:

$$\theta \leftrightarrow (\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi) \tag{37.14}$$

θ, $\psi(y)$ का नियत-बिंदु है

$$\theta \to (\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi) \tag{37.15}$$

समीकरण (37.14) से

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta \to (\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi)\urcorner) \tag{37.16}$$

समीकरण (37.15) से, प्रतिबंध P1 द्वारा

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi\urcorner) \tag{37.17}$$

समीकरण (37.16) से, प्रतिबंध P2 द्वारा

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to (\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)) \tag{37.18}$$

समीकरण (37.17) से, फिर P2 का उपयोग करके

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner)\urcorner) \tag{37.19}$$

व्युत्पन्नता प्रतिबंध P3 से

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \tag{37.20}$$

समीकरण (37.18) और समीकरण (37.19) से

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi \tag{37.21}$$

प्रमेय की मान्यता से

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi \tag{37.22}$$

समीकरण (37.20) और समीकरण (37.21) से

$$(\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi) \to \theta \tag{37.23}$$

समीकरण (37.14) से

$$\theta \tag{37.24}$$

समीकरण (37.22) और समीकरण (37.23) से

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\theta\urcorner) \tag{37.25}$$

समीकरण (37.24) से, प्रतिबंध P1 द्वारा

φ समीकरण (37.21) और समीकरण (37.25) से। □

लोब (Löb) का प्रमेय उपलब्ध होने पर द्वितीय अपूर्णता-प्रमेय का छोटा प्रमाण मिलता है (उन सिद्धांतों के लिए जिनमें प्रतिबंध P1–P3 को संतुष्ट करने वाला व्युत्पन्नता विधेय है): यदि $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \bot$, तो $\mathbf{T} \vdash \bot$। यदि $\mathbf{T}$ संगत है, तो $\mathbf{T} \nvdash \bot$। अतः $\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \bot$, अर्थात् $\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$। हम इसे यह दिखाने के लिए भी लागू कर सकते हैं कि $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x)$ का नियत-बिंदु δ, व्युत्पन्न है। क्योंकि

$$\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\delta\urcorner) \leftrightarrow \delta$$

और विशेषतः

$$\mathbf{T} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \delta \urcorner) \to \delta,$$

इसलिए लोब (Löb) के प्रमेय से $\mathbf{T} \vdash \delta$।

37.9 सत्यता की अपरिभाष्यता

परिभाष्यता की धारणा अंकगणित की भाषा के लिए औपचारिक अर्थविज्ञान होने पर निर्भर करती है। हमने अंकगणित की भाषा के सूत्रों और वाक्यों का एक समुच्चय वर्णित किया है। "अभिप्रेत व्याख्या" ऐसे वाक्यों को प्राकृतिक संख्याओं के बारे में दावे मानकर पढ़ती है, और ऐसा दावा सत्य या असत्य हो सकता है। $\mathfrak{N}$ को वह संरचना मानें जिसका प्रांत $\mathbb{N}$ है और जिसमें अंकगणित की भाषा के चिह्नों की मानक व्याख्या है। तब $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ का अर्थ है "φ मानक व्याख्या में सत्य है।"

परिभाषा 37.11. प्राकृतिक संख्याओं का कोई संबंध $R(x_1, \ldots, x_k)$, $\mathfrak{N}$ में *परिभाष्य* तभी और केवल तभी है जब अंकगणित की भाषा में कोई सूत्र $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ ऐसा हो कि प्रत्येक $n_1, \ldots, n_k$ के लिए $R(n_1, \ldots, n_k)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \vDash \varphi(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$।

भिन्न शब्दों में, कोई संबंध $\mathfrak{N}$ में तभी और केवल तभी परिभाष्य है जब वह सिद्धांत **TA** में निरूपणीय हो, जहाँ $\mathbf{TA} = \{\varphi : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$ अंकगणित के सत्य वाक्यों का समुच्चय है। (यदि यह आपको तुरंत स्पष्ट न हो, तो परिभाषाओं पर वापस जाकर जाँचें और स्वयं को आश्वस्त करें कि ऐसा ही है।)

सहायक प्रमेय 37.12. *प्रत्येक संगणनीय संबंध $\mathfrak{N}$ में परिभाष्य है।*

प्रमाण. यह जाँचना सरल है कि **Q** में किसी संबंध का निरूपण करने वाला सूत्र $\mathfrak{N}$ में उसी संबंध को परिभाषित करता है। □

अब पूछा जा सकता है कि क्या विलोम भी सत्य है? अर्थात् क्या $\mathfrak{N}$ में परिभाष्य प्रत्येक संबंध संगणनीय है? उत्तर नहीं है। उदाहरणतः:

सहायक प्रमेय 37.13. *विराम संबंध $\mathfrak{N}$ में परिभाष्य है।*

प्रमाण. याद करें कि क्लेनी सामान्य रूप प्रमेय कहता है कि प्रत्येक आंशिक संगणनीय फलन f का कोई सूचकांक e ऐसा है कि सभी $x \in \mathbb{N}$ के लिए $f(x) = U(\mu s\ T(e, x, s))$, जहाँ U और T आदिम पुनरावर्ती और इसलिए सर्वत्र-परिभाषित हैं। अतः $f(x)$ तभी और केवल तभी परिभाषित है (अर्थात् संगणना रुकती है) जब कोई s ऐसा हो कि $T(e, x, s)$ लागू हो।

अब H को विराम संबंध मानें, अर्थात्

$$H = \{\langle e, x\rangle : \exists s\, T(e, x, s)\}.$$

θ_T, $\mathfrak{N}$ में T को परिभाषित करे। तब

$$H = \{\langle e, x\rangle : \mathfrak{N} \vDash \exists s\, \theta_T(\overline{e}, \overline{x}, s)\},$$

इसलिए $\exists s\, \theta_T(z, x, s)$, $\mathfrak{N}$ में H को परिभाषित करता है। □

स्वयं **TA** के बारे में क्या? क्या वह अंकगणित में परिभाष्य है? अर्थात् क्या समुच्चय $\{{}^{\#}\varphi^{\#} : \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$ अंकगणित में परिभाष्य है? तार्स्की का प्रमेय इसका नकारात्मक उत्तर देता है।

प्रमेय 37.14. *अंकगणित के सत्य वाक्यों का समुच्चय अंकगणित में परिभाष्य नहीं है।*

प्रमाण. मान लें $\theta(x)$ उसे परिभाषित करता है, अर्थात् $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \vDash \theta(\ulcorner\varphi\urcorner)$। नियत-बिंदु उपपत्ति से कोई सूत्र φ ऐसा है कि $\mathbf{Q} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\varphi\urcorner)$, और इसलिए $\mathfrak{N} \vDash \varphi \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\varphi\urcorner)$। किंतु तब $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \vDash \neg\theta(\ulcorner\varphi\urcorner)$, जो इस तथ्य के विरुद्ध है कि $\theta(y)$ को अंकगणित के सत्य कथनों का समुच्चय परिभाषित करना था। $\square$

तार्स्की ने यह विश्लेषण सत्यता की अधिक सामान्य दार्शनिक धारणा पर लागू किया। किसी भी भाषा L के लिए तार्स्की ने तर्क दिया कि L के लिए सत्यता की किसी पर्याप्त धारणा को प्रत्येक वाक्य X के लिए यह संतुष्ट करना होगा:

> 'X' तभी और केवल तभी सत्य है जब X।

अंग्रेज़ी के लिए तार्स्की का प्रायः उद्धृत उदाहरण यह वाक्य है:

> 'बर्फ़ सफ़ेद है' तभी और केवल तभी सत्य है जब बर्फ़ सफ़ेद है।

किंतु विकर्ण फलन का निरूपण करने योग्य प्रत्येक भाषा और प्रत्येक भाषिक विधेय $T(x)$ के लिए हम ऐसा वाक्य X बना सकते हैं जो "X तभी और केवल तभी जब T('X') नहीं" को संतुष्ट करता है। क्योंकि हम नहीं चाहते कि सत्यता-विधेय कुछ वाक्यों को सत्य और असत्य दोनों घोषित करे, तार्स्की ने निष्कर्ष निकाला कि किसी भाषा के सभी वाक्यों के लिए सत्यता-विधेय निर्दिष्ट करने हेतु किसी न किसी ढंग से भाषा की सीमाओं के बाहर जाना आवश्यक है। दूसरे शब्दों में, किसी भाषा का सत्यता-विधेय स्वयं उसी भाषा में परिभाषित नहीं किया जा सकता।

प्रश्न

प्रश्न 37.1. कोई सूत्र $\varphi(x)$ *सत्यता-परिभाषा* है यदि सभी वाक्यों ψ के लिए $\mathbf{Q} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$। नियत-बिंदु उपपत्ति का उपयोग करके दिखाएँ कि कोई सूत्र सत्यता-परिभाषा नहीं है।

प्रश्न 37.2. प्रत्येक ω-संगत सिद्धांत संगत है। दिखाएँ कि विलोम लागू नहीं होता, अर्थात् ऐसे संगत किंतु ω-असंगत सिद्धांत हैं। यह दिखाकर ऐसा करें कि $\mathbf{Q} \cup \{\neg\gamma_{\mathbf{Q}}\}$ संगत किंतु ω-असंगत है।

प्रश्न 37.3. प्राकृतिक संख्याओं के दो समुच्चय A और B *संगणनीयतः अवियोज्य* कहलाते हैं यदि ऐसा कोई निर्णेय समुच्चय X न हो कि $A \subseteq X$ और $B \subseteq \overline{X}$ ($\overline{X}$, X का पूरक $\mathbb{N} \setminus X$ है)। $\mathbf{T}$ को $\mathbf{Q}$ का कोई संगत अभिगृहीतीकरणीय विस्तार मानें। मान लें A उन वाक्यों की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का समुच्चय है जो $\mathbf{T}$ में सिद्ध हैं, और B उन वाक्यों की ग्योडेल (Gödel) संख्याओं का समुच्चय है जो $\mathbf{T}$ में खंडनीय हैं। सिद्ध करें कि A और B संगणनीयतः अवियोज्य हैं।

प्रश्न 37.4. दिखाएँ कि $\mathbf{PA}$, $\gamma_{\mathbf{PA}} \to \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ को व्युत्पन्न करता है।

प्रश्न 37.5. $\mathbf{T}$ कोई संगणनीयतः अभिगृहीतीकृत सिद्धांत हो और $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$, $\mathbf{T}$ का कोई व्युत्पन्नता विधेय हो। निम्न चार कथनों पर विचार करें:

1. यदि $T \vdash \varphi$, तो $T \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$।
2. $T \vdash \varphi \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$।
3. यदि $T \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, तो $T \vdash \varphi$।
4. $T \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$।

इनमें से प्रत्येक कथन किन प्रतिबंधों में सत्य है?

प्रश्न 37.6. दिखाएँ कि $Q(n) \Leftrightarrow n \in \{\#\varphi\# : \mathbf{Q} \vdash \varphi\}$ अंकगणित में परिभाष्य है।

खण्ड VIII

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र

यह द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र पर एक भाग का आरंभिक रूप है।

अध्याय 38

वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान

अब तक द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का मूल वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान समाहित किया गया है। एक अध्याय के रूप में यह अभी बहुत छोटा है। द्वितीय-कोटि चरों के लिए प्रतिस्थापन पर चर्चा आवश्यक है, तभी द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की व्युत्पत्ति प्रणालियों की बात की जा सकेगी; इसमें कुछ सूक्ष्म समस्याएँ भी हैं।

38.1 परिचय

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में हम किसी दी हुई भाषा के अतार्किक चिह्नों, अर्थात् उसके अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न चिह्नों को तार्किक चिह्नों के साथ जोड़कर प्रथम-कोटि संरचना के विषय में बातें व्यक्त करते हैं। यह कार्य संतुष्टि की धारणा से किया जाता है, जो संरचना $\mathfrak{M}$, चर-नियतन s और सूत्र φ को परस्पर संबद्ध करती है: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी लागू होता है जब φ द्वारा व्यक्त वह बात सत्य हो जिसमें उसके अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न चिह्नों की व्याख्या $\mathfrak{M}$ के अनुसार तथा उसके मुक्त चरों की व्याख्या s के अनुसार की गई हो। तादात्म्य $=$ की व्याख्या $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ की परिभाषा में ही अंतर्निहित है; यही बात $\forall$ और $\exists$ की व्याख्या पर भी लागू होती है। पहले की व्याख्या संरचना के प्रांत $|\mathfrak{M}|$ पर सर्वदा तादात्म्य संबंध के रूप में होती है, और परिमाणक सर्वदा पूरे प्रांत पर विचरते हैं। किंतु महत्त्वपूर्ण बात यह है कि परिमाणीकरण केवल प्रांत के अवयवों पर स्वीकृत है; अतः परिमाणक के बाद केवल वस्तु-चर ही आ सकते हैं।

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में भाषा और संतुष्टि की परिभाषा, दोनों का विस्तार इस प्रकार किया जाता है कि उनमें मुक्त और आबद्ध फलन-चर तथा विधेय-चर और उन पर परिमाणीकरण सम्मिलित हो जाएँ। इन चरों का फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न से वही संबंध है जो वस्तु-चरों का अचर से है। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के पदों और सूत्र के निर्माण में ये वही भूमिका निभाते हैं, और इन पर परिमाणीकरण भी इसी प्रकार किया जाता है। *मानक* अर्थविज्ञान में द्वितीय-कोटि परिमाणक उचित प्रकार की सभी संभव वस्तुओं पर विचरते हैं (फलन-चरों के लिए $|\mathfrak{M}|$ से $|\mathfrak{M}|$ में जाने वाले n-स्थानी फलन और विधेय-चरों के लिए n-स्थानी संबंध)। उदाहरणार्थ, $\forall v_0\, (P^1_0(v_0) \lor \neg P^1_0(v_0))$ प्रथम- और द्वितीय-कोटि, दोनों तर्कशास्त्रों में एक सूत्र है; किंतु दूसरे में हम इन पर भी विचार कर सकते हैं: $\forall V^1_0\, \forall v_0\, (V^1_0(v_0) \lor \neg V^1_0(v_0))$ और $\exists V^1_0\, \forall v_0\, (V^1_0(v_0) \lor \neg V^1_0(v_0))$। इनमें कोई मुक्त चर नहीं है, इसलिए ये द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य हैं। यहाँ V^1_0 एक द्वितीय-कोटि 1-स्थानी विधेय-चर है। V^1_0 की स्वीकार्य व्याख्याएँ वही हैं जिन्हें हम P^1_0 जैसे 1-स्थानी विधेय-चिह्न को दे सकते हैं, अर्थात् $|\mathfrak{M}|$ के उपसमुच्चय। तब उन पर परिमाणीकरण का अर्थ यह कहना है कि $\forall v_0\, (V^1_0(v_0) \lor \neg V^1_0(v_0))$ उन सभी विधियों के लिए लागू होता है जिनसे V^1_0 का मान $|\mathfrak{M}|$ का कोई उपसमुच्चय नियत किया जा सकता है, अथवा कम-से-कम एक ऐसी विधि के लिए लागू होता है। चूँकि प्रत्येक समुच्चय में दी हुई वस्तु या तो होती है या नहीं होती, इसलिए दोनों किसी भी संरचना में सत्य हैं।

38.2 पद और सूत्रों

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की भाँति द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की अभिव्यक्तियाँ एक मूल शब्दावली से बनती हैं, जिसमें *चर*, *अचर*, *विधेय-चिह्न* और कभी-कभी *फलन-चिह्न* होते हैं। इनके साथ तार्किक संयोजकों, परिमाणकों और कोष्ठक तथा अल्पविराम जैसे विराम-चिह्नों को लेकर *पद* और *सूत्र* बनाए जाते हैं। अंतर यह है कि वस्तुओं के चरों के अतिरिक्त द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में संबंधों और फलनों के चर भी होते हैं और उन पर परिमाणीकरण किया जा सकता है। अतः द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के तार्किक चिह्न प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के चिह्न हैं, और इनके अतिरिक्त:

1. प्रत्येक n-स्थानिकता के द्वितीय-कोटि संबंध-चर का एक गणनीय अनंत समुच्चय: V_0^n, V_1^n, V_2^n, ...
2. द्वितीय-कोटि फलन-चर का एक गणनीय अनंत समुच्चय: u_0^n, u_1^n, u_2^n, ...

जिस प्रकार हम प्रथम-कोटि चर v_i के लिए x, y, z को अधिचर के रूप में लेते हैं, उसी प्रकार V_i^n के लिए X, Y, Z आदि और u_i^n के लिए u, v आदि को अधिचर के रूप में लेंगे।

द्वितीय-कोटि भाषा के अतार्किक चिह्न उसी प्रकार विनिर्दिष्ट किए जाते हैं जिस प्रकार प्रथम-कोटि भाषा के: उसके अचर, फलन-चिह्न और विधेय-चिह्न चिह्नों की सूची देकर।

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में सामान्यतः तादात्म्य $=$ को सम्मिलित किया जाता है। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में किसी भाषा $\mathcal{L}$ के अतार्किक चिह्न रोचक बातों को व्यक्त करने के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। निस्संदेह ऐसे वाक्य हैं जिनमें कोई अतार्किक चिह्न नहीं आता, किंतु केवल $=$ से कोई रोचक बात कहना कठिन है। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में संबंध-चरों और फलन-चरों की असीमित आपूर्ति होने के कारण हम अतार्किक चिह्नों की विशेष आपूर्ति के बिना भी वह सब कह सकते हैं जो किसी प्रथम-कोटि भाषा में कह सकते हैं।

परिभाषा 38.1 (द्वितीय-कोटि पद). $\mathcal{L}$ के *द्वितीय-कोटि पदों* का समुच्चय $\mathrm{Trm}^2(\mathcal{L})$, परिभाषा 15.4 में निम्न खंड जोड़कर परिभाषित होता है:

1. यदि u एक n-स्थानी फलन-चर है और t_1, ..., t_n पद हैं, तो $u(t_1, \ldots, t_n)$ एक पद है।

अतः द्वितीय-कोटि पद प्रथम-कोटि पद जैसा ही दिखता है; अंतर केवल यह है कि जहाँ प्रथम-कोटि पद में फलन-चिह्न f_i^n आता है, वहाँ द्वितीय-कोटि पद में उसके स्थान पर फलन-चर u_i^n आ सकता है।

परिभाषा 38.2 (द्वितीय-कोटि सूत्र). भाषा $\mathcal{L}$ के *द्वितीय-कोटि सूत्र* का समुच्चय $\mathrm{Frm}^2(\mathcal{L})$, परिभाषा 15.5 में निम्न खंड जोड़कर परिभाषित होता है:

1. यदि X एक n-स्थानी विधेय-चर है और t_1, ..., t_n भाषा $\mathcal{L}$ के द्वितीय-कोटि पद हैं, तो $X(t_1, \ldots, t_n)$ एक परमाणु सूत्र है।
2. यदि φ सूत्र है और u फलन-चर है, तो $\forall u\, \varphi$ सूत्र है।
3. यदि φ सूत्र है और X विधेय-चर है, तो $\forall X\, \varphi$ सूत्र है।
4. यदि φ सूत्र है और u फलन-चर है, तो $\exists u\, \varphi$ सूत्र है।
5. यदि φ सूत्र है और X विधेय-चर है, तो $\exists X\, \varphi$ सूत्र है।

38.3 संतुष्टि

द्वितीय-कोटि सूत्र के लिए संतुष्टि संबंध $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ परिभाषित करने हेतु हमें परिभाषाओं का विस्तार करके द्वितीय-कोटि चर भी समाहित करने होंगे। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में संरचना की धारणा वही है जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में है। अंतर केवल चर-नियतन s में है: अब उसे केवल प्रथम-कोटि चर ही नहीं, बल्कि द्वितीय-कोटि चर के लिए भी मान देने होंगे।

परिभाषा 38.3 (चर-नियतन). संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए *चर-नियतन* s ऐसा फलन है जो प्रत्येक

1. वस्तु-चर v_i को $|\mathfrak{M}|$ के किसी अवयव में, अर्थात् $s(v_i) \in |\mathfrak{M}|$;
2. n-स्थानी संबंध-चर V_i^n को $|\mathfrak{M}|$ पर किसी n-स्थानी संबंध में, अर्थात् $s(V_i^n) \subseteq |\mathfrak{M}|^n$;
3. n-स्थानी फलन-चर u_i^n को $|\mathfrak{M}|$ से $|\mathfrak{M}|$ में जाने वाले किसी n-स्थानी फलन में, अर्थात् $s(u_i^n)\colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$;

संरचना प्रत्येक अचर और फलन-चिह्न को मान देती है, और द्वितीय-कोटि चर-नियतन प्रत्येक वस्तु-चर और फलन-चर को क्रमशः वस्तु और फलन देता है। दोनों मिलकर हमें प्रत्येक पद का मान निर्धारित करने देते हैं।

परिभाषा 38.4 (किसी पद का मान). यदि t भाषा $\mathcal{L}$ का पद है, $\mathfrak{M}$ भाषा $\mathcal{L}$ की संरचना है, और s, $\mathfrak{M}$ के लिए चर नियतन है, तो *मान* $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)$ की परिभाषा प्रथम-कोटि पदों जैसी है, और उसमें निम्न खंड जोड़ा जाता है:

$t \equiv u(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = s(u)(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

परिभाषा 38.5 (x-परिवर्ती). यदि s, संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए चर नियतन है, तो $\mathfrak{M}$ के लिए ऐसा कोई भी चर नियतन s', जो s से अधिक-से-अधिक x को दिए गए मान में भिन्न हो, s का *x-परिवर्ती* कहलाता है। यदि s', s का x-परिवर्ती है, तो हम $s' \sim_x s$ लिखते हैं। (द्वितीय-कोटि चर X या u के लिए भी इसी प्रकार।)

परिभाषा 38.6. यदि s, संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए चर नियतन है और $m \in |\mathfrak{M}|$, तो नियतन $s[m/x]$ निम्न प्रकार परिभाषित चर नियतन है:

$$s[m/y] = \begin{cases} m & \text{यदि } y \equiv x \\ s(y) & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

यदि X एक n-स्थानी संबंध-चर है और $M \subseteq |\mathfrak{M}|^n$, तो $s[M/X]$ निम्न प्रकार परिभाषित चर नियतन है:

$$s[M/y] = \begin{cases} M & \text{यदि } y \equiv X \\ s(y) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

यदि u एक n-स्थानी फलन-चर है और $f\colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$, तो $s[f/u]$ निम्न प्रकार परिभाषित चर नियतन है:

$$s[f/y] = \begin{cases} f & \text{यदि } y \equiv u \\ s(y) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

प्रत्येक स्थिति में y कोई भी प्रथम- या द्वितीय-कोटि चर हो सकता है।

परिभाषा 38.7 (संतुष्टि). द्वितीय-कोटि सूत्र φ के लिए संतुष्टि की परिभाषा परिभाषा 16.11 जैसी है, और उसमें ये खंड जोड़े जाते हैं:

1. $\varphi \equiv X^n(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\langle \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)\rangle \in s(X^n)$।
2. $\varphi \equiv \forall X\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $M \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ के लिए $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash \psi$।
3. $\varphi \equiv \exists X\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कम-से-कम एक $M \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash \psi$।
4. $\varphi \equiv \forall u\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $f\colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M}, s[f/u] \vDash \psi$।

5. $\varphi \equiv \exists u\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब कम-से-कम एक $f\colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}, s[f/u] \vDash \psi$।

उदाहरण 38.8. सूत्र $\forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z))$ पर विचार करें। इसमें कोई द्वितीय-कोटि परिमाणक नहीं है, किंतु द्वितीय-कोटि चर X और Y अवश्य हैं (यहाँ इन्हें एक-स्थानी समझा गया है)। संगत प्रथम-कोटि वाक्य $\forall z\,(P(z) \leftrightarrow \neg R(z))$ कहता है कि जो कुछ P की व्याख्या के अंतर्गत आता है वह R की व्याख्या के अंतर्गत नहीं आता, और इसका विलोम भी। किसी संरचना में विधेय-चिह्न P की व्याख्या $P^{\mathfrak{M}}$ से दी जाती है। किंतु X और Y जैसे द्वितीय-कोटि चर की व्याख्या स्वयं संरचना नहीं, बल्कि चर नियतन देता है। चूँकि द्वितीय-कोटि सूत्र, वाक्य नहीं है (इसमें मुक्त चर X और Y हैं), इसलिए यह केवल संरचना $\mathfrak{M}$ और चर नियतन s के सापेक्ष संतुष्ट होता है।

$\mathfrak{M}, s \vDash \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z))$ तब लागू होता है जब $s(X)$ के अवयव, $s(Y)$ के अवयव न हों और इसका विलोम भी; अर्थात् तभी और केवल तभी जब $s(Y) = |\mathfrak{M}| \setminus s(X)$। उदाहरण के लिए $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$ लें। चूँकि कोई विधेय-चिह्न, फलन-चिह्न या अचर सम्मिलित नहीं है, इसलिए केवल $\mathfrak{M}$ का प्रांत प्रासंगिक है। अब $s_1(X) = \{1, 2\}$ और $s_1(Y) = \{3\}$ के लिए हमारे पास $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z))$.

इसके विपरीत, यदि $s_2(X) = \{1, 2\}$ और $s_2(Y) = \{2, 3\}$ हों, तो $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z))$। इसका कारण यह है कि $\mathfrak{M}, s_2[2/z] \vDash X(z)$ (क्योंकि $2 \in s_2[2/z](X)$), किंतु $\mathfrak{M}, s_2[2/z] \nvDash \neg Y(z)$ (क्योंकि $2 \in s_2[2/z](Y)$ भी है)।

उदाहरण 38.9. $\mathfrak{M}, s \vDash \exists Y\,(\exists y\, Y(y) \land \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z)))$ तब लागू होता है जब कोई $N \subseteq |\mathfrak{M}|$ ऐसा हो कि $\mathfrak{M}, s[N/Y] \vDash (\exists y\, Y(y) \land \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z)))$। यह किसी भी $N \neq \emptyset$ के लिए लागू है (जिससे $\mathfrak{M}, s[N/Y] \vDash \exists y\, Y(y)$), और पिछले उदाहरण की भाँति $N = |\mathfrak{M}| \setminus s(X)$ हो। दूसरे शब्दों में, $\mathfrak{M}, s \vDash \exists Y\,(\exists y\, Y(y) \land \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z)))$ तभी और केवल तभी जब $|\mathfrak{M}| \setminus s(X)$ अरिक्त हो, अर्थात् $s(X) \neq |\mathfrak{M}|$। अतः उदाहरणार्थ, यदि $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$ और $s(X) = \{1, 2\}$ हों तो सूत्र संतुष्ट है, किंतु यदि $s(X) = \{1, 2, 3\} = |\mathfrak{M}|$ हो तो नहीं।

क्योंकि $s(X) = |\mathfrak{M}|$ होने पर सूत्र संतुष्ट नहीं होता, इसलिए वाक्य

$$\forall X\, \exists Y\,(\exists y\, Y(y) \land \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z)))$$

कभी संतुष्ट नहीं होता: किसी भी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए नियतन $s(X) = |\mathfrak{M}|$ उस वाक्य को असत्य कर देगा। दूसरी ओर, वाक्य

$$\exists X\, \exists Y\,(\exists y\, Y(y) \land \forall z\,(X(z) \leftrightarrow \neg Y(z)))$$

किसी भी नियतन s के सापेक्ष संतुष्ट होता है, क्योंकि हम सदैव $M \subseteq |\mathfrak{M}|$ किंतु $M \neq |\mathfrak{M}|$ पा सकते हैं (उदाहरणार्थ $M = \emptyset$)।

उदाहरण 38.10. द्वितीय-कोटि वाक्य $\forall X\, \forall y\, X(y)$ कहता है कि प्रत्येक 1-स्थानी संबंध, अर्थात् प्रत्येक गुण, हर वस्तु पर लागू होता है। यह स्पष्टतः कभी सत्य नहीं है, क्योंकि प्रत्येक $\mathfrak{M}$ में ऐसे चर-नियतन s के लिए जिसमें $s(X) = \emptyset$ और $s(y) = a \in |\mathfrak{M}|$ हों, हमारे पास $\mathfrak{M}, s \nvDash X(y)$ है। इसका अर्थ है कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में $\varphi \to \forall X\, \forall y\, X(y)$, $\neg\varphi$ के समतुल्य है; अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \forall X\, \forall y\, X(y)$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$। दूसरे शब्दों में, द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में हम $\forall$ और $\to$ का उपयोग करके $\neg$ को परिभाषित कर सकते हैं।

38.4 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ

वैधता, अनुगमन और *संतुष्टयता* की केंद्रीय तार्किक धारणाएँ द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए उसी प्रकार परिभाषित होती हैं जैसे प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए; अंतर केवल यह है कि आधारभूत संतुष्टि संबंध अब द्वितीय-कोटि सूत्र का है। निस्संदेह, द्वितीय-कोटि वाक्य ऐसा सूत्र है जिसमें विधेय-चर और फलन-चर सहित सभी चर आबद्ध हैं।

परिभाषा 38.11 (वैधता). वाक्य φ *वैध* है, $\vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$।

परिभाषा 38.12 (अनुगमन). वाक्यों का समुच्चय Γ, वाक्य φ को *अनुगमित करता है*, $\Gamma \vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ वाली प्रत्येक संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$।

परिभाषा 38.13 (संतुष्ट्यता). वाक्यों का समुच्चय Γ *संतुष्ट्य* है यदि किसी संरचना $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$। यदि Γ संतुष्ट्य नहीं है तो वह *असंतुष्ट्य* कहलाता है।

38.5 अभिव्यंजक शक्ति

द्वितीय-कोटि चरों पर परिमाणीकरण भाषा की अभिव्यंजक शक्ति को प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की अपेक्षा अत्यधिक बढ़ा देता है। द्वितीय-कोटि अस्तित्ववाचक परिमाणीकरण हमें यह कहने देता है कि कुछ गुणों वाले फलन या संबंध अस्तित्व में हैं। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में ऐसा करने का एकमात्र उपाय इस प्रयोजन के लिए कोई अतार्किक चिह्न (अर्थात् फलन-चिह्न या विधेय-चिह्न) विनिर्दिष्ट करना है। द्वितीय-कोटि सार्विक परिमाणीकरण हमें यह कहने देता है कि प्रांत के सभी उपसमुच्चयों, उस पर सभी संबंधों अथवा प्रांत से प्रांत में जाने वाले सभी फलनों में कोई गुण है। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में हम केवल यह कह सकते हैं कि भाषा के किसी अतार्किक चिह्न को दिए गए उपसमुच्चय, संबंध या फलन में वह गुण है। और जब हम कहते हैं कि किसी गुण वाले उपसमुच्चय, संबंध या फलन अस्तित्व में हैं, अथवा उन सभी में वह गुण है, तो उस गुण को विनिर्दिष्ट करने में भी द्वितीय-कोटि परिमाणीकरण का उपयोग कर सकते हैं। इससे हम ऐसे संबंधों को परिभाषित कर सकते हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में परिभाषणीय नहीं हैं, और प्रांत के ऐसे गुण व्यक्त कर सकते हैं जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में अभिव्यक्त नहीं होते।

परिभाषा 38.14. यदि $\mathfrak{M}$ भाषा $\mathcal{L}$ की संरचना है, तो संबंध $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$, भाषा $\mathcal{L}$ में *परिभाषणीय* है यदि कोई ऐसा सूत्र $\varphi_R(x, y)$ हो जिसमें केवल x और y मुक्त हों और $R(a, b)$ लागू हो (अर्थात् $\langle a, b\rangle \in R$) तभी और केवल तभी जब $s(x) = a$ और $s(y) = b$ के लिए $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi_R(x, y)$।

उदाहरण 38.15. प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में हम तादात्म्य संबंध $\mathrm{Id}_{|\mathfrak{M}|}$ (अर्थात् $\{\langle a, a\rangle : a \in |\mathfrak{M}|\}$) को सूत्र $x = y$ से परिभाषित कर सकते हैं। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में हम इस संबंध को *बिना* $=$ *के* परिभाषित कर सकते हैं। यदि a और b, $|\mathfrak{M}|$ के वही अवयव हैं, तो वे $|\mathfrak{M}|$ के उन्हीं उपसमुच्चयों के अवयव हैं (क्योंकि समुच्चय अपने अवयव से निर्धारित होते हैं)। इसके विपरीत, यदि a और b भिन्न हों, तो वे उन्हीं उपसमुच्चयों के अवयव नहीं हैं: उदाहरणार्थ, यदि $a \neq b$, तो $a \in \{a\}$ किंतु $b \notin \{a\}$। अतः " $|\mathfrak{M}|$ के उन्हीं उपसमुच्चयों का अवयव होना" ऐसा संबंध है जो a और b पर तभी और केवल तभी लागू होता है जब $a = b$। यह द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में व्यक्त होने वाला संबंध है, क्योंकि हम $|\mathfrak{M}|$ के सभी उपसमुच्चयों पर परिमाणीकरण कर सकते हैं। अतः निम्न सूत्र, $\mathrm{Id}_{|\mathfrak{M}|}$ को परिभाषित करता है:

$$\forall X\, (X(x) \leftrightarrow X(y))$$

उदाहरण 38.16. यदि R द्विस्थानी विधेय-चिह्न है, तो $R^{\mathfrak{M}}$, $|\mathfrak{M}|$ पर द्विस्थानी संबंध है। कुछ भ्रम की संभावना के बावजूद, हम R का प्रयोग R के विधेय-चिह्न और स्वयं संबंध $R^{\mathfrak{M}}$, दोनों के लिए करेंगे। R का *संक्रामक संवरण* R^* वह संबंध है जो a और b के बीच तभी और केवल तभी लागू होता है जब किन्हीं c_1, ..., c_k के लिए $R(a, c_1)$, $R(c_1, c_2)$, ..., $R(c_k, b)$ लागू हों। इसमें $k = 0$ की स्थिति भी आती है, अर्थात् यदि $R(a, b)$ लागू है तो $R^*(a, b)$ भी लागू है। इसका अर्थ है कि $R \subseteq R^*$। वास्तव में R^* वह सबसे छोटा संबंध है जिसमें R सम्मिलित है और जो संक्रामक है। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में हम कह सकते हैं कि X ऐसा संक्रामक संबंध है जिसमें R सम्मिलित है:

$$\psi_R(X) \equiv \forall x\, \forall y\, (R(x, y) \to X(x, y)) \wedge \\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((X(x, y) \wedge X(y, z)) \to X(x, z)).$$

पहला संयोज्य कहता है कि $R \subseteq X$, और दूसरा कि X संक्रामक है।

यह कहना कि X ऐसा सबसे छोटा संबंध है, यह कहना है कि X स्वयं प्रत्येक उस संबंध में सम्मिलित है जिसमें R सम्मिलित है और जो संक्रामक है। अतः हम R के संक्रामक संवरण को निम्न सूत्र से परिभाषित कर सकते हैं:

$$R^*(X) \equiv \psi_R(X) \wedge \forall Y\, (\psi_R(Y) \to \forall x\, \forall y\, (X(x, y) \to Y(x, y))).$$

हमारे पास $\mathfrak{M}, s \vDash R^*(X)$ तभी और केवल तभी जब $s(X) = R^*$। R का संक्रामक संवरण प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

38.6 अनंत और गणनीय प्रांतों का वर्णन

समुच्चय M (डेडेकिंड) अनंत है तभी और केवल तभी जब कोई ऐसा एकैकी फलन $f\colon M \to M$ हो जो आच्छादक न हो, अर्थात् जिसके लिए $\mathrm{ran}(f) \neq M$। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में हम एक-स्थानी फलन-चिह्न f पर विचार कर सकते हैं और कह सकते हैं कि संरचना $\mathfrak{M}$ में उसे दिया गया फलन $f^{\mathfrak{M}}$, एकैकी है और $\mathrm{ran}(f) \neq |\mathfrak{M}|$:

$$\forall x\, \forall y\, (f(x) = f(y) \to x = y) \land \exists y\, \forall x\, y \neq f(x).$$

यदि $\mathfrak{M}$ इस वाक्य को संतुष्ट करता है, तो $f^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$ एकैकी है, अतः $|\mathfrak{M}|$ अनंत होना चाहिए। यदि $|\mathfrak{M}|$ अनंत है और इसलिए ऐसा फलन अस्तित्व में है, तो हम $f^{\mathfrak{M}}$ को वही फलन मान सकते हैं और $\mathfrak{M}$ इस वाक्य को संतुष्ट करेगा। किंतु इसके लिए हमारी भाषा में वह अतार्किक चिह्न f होना चाहिए जिसका हम इस प्रयोजन के लिए उपयोग करते हैं। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में हम सीधे कह सकते हैं कि ऐसा फलन *अस्तित्व में* है। अब इसके लिए f आवश्यक नहीं है, और हमें शुद्ध द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का यह वाक्य मिलता है:

$$\mathrm{Inf} \equiv \exists u\, (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \to x = y) \land \exists y\, \forall x\, y \neq u(x)).$$

$\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Inf}$ तभी और केवल तभी जब $|\mathfrak{M}|$ अनंत है। तब हम $\mathrm{Fin} \equiv \neg\mathrm{Inf}$ परिभाषित कर सकते हैं; $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Fin}$ तभी और केवल तभी जब $|\mathfrak{M}|$ परिमित है। शुद्ध प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र का कोई एक वाक्य यह व्यक्त नहीं कर सकता कि प्रांत अनंत है, यद्यपि ऐसे वाक्यों का कोई अनंत समुच्चय ऐसा कर सकता है। शुद्ध प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के वाक्य का ऐसा कोई समुच्चय नहीं है जो किसी संरचना में तभी और केवल तभी संतुष्ट हो जब उसका प्रांत परिमित हो।

प्रतिज्ञप्ति 38.17. $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Inf}$ *तभी और केवल तभी जब* $|\mathfrak{M}|$ *अनंत है।*

प्रमाण. $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Inf}$ तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \to x = y) \land \exists y\, \forall x\, y \neq u(x)$, किसी s के लिए। यदि ऐसा है, तो $s(u)$ एकैकी फलन है और कोई $y \in |\mathfrak{M}|$, $s(u)$ के परिसर में नहीं है। इसके विपरीत, यदि कोई एकैकी $f\colon |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$ ऐसा है कि $\mathrm{ran}(f) \neq |\mathfrak{M}|$, तो $s(u) = f$ ऐसा ही चर-नियतन है। □

समुच्चय M गणनीय है यदि उसके अवयव का ऐसा परिगणन हो:

$$m_0, m_1, m_2, \ldots$$

(बिना पुनरावृत्ति के, किंतु संभवतः परिमित)। ऐसा परिगणन तभी और केवल तभी अस्तित्व में है जब कोई अवयव $z \in M$ और फलन $f\colon M \to M$ ऐसा हो कि z, $f(z)$, $f(f(z))$, ..., ही M के सभी अवयव हों। यदि परिगणन अस्तित्व में है, तो $z = m_0$ और $f(m_k) = m_{k+1}$ (अथवा यदि m_k परिगणन का अंतिम अवयव है तो $f(m_k) = m_k$) अपेक्षित अवयव और फलन हैं। दूसरी ओर, यदि ऐसे z और f अस्तित्व में हैं, तो z, $f(z)$, $f(f(z))$, ..., M का परिगणन है और M गणनीय है। हम द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में z और f का अस्तित्व व्यक्त करके ऐसा वाक्य बना सकते हैं जो किसी संरचना में तभी और केवल तभी सत्य हो जब वह संरचना, गणनीय हो:

$$\mathrm{Count} \equiv \exists z\, \exists u\, \forall X\, ((X(z) \land \forall x\, (X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x\, X(x))$$

प्रतिज्ञप्ति 38.18. $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Count}$ *तभी और केवल तभी जब* $|\mathfrak{M}|$ *गणनीय है।*

प्रमाण. मान लें $|\mathfrak{M}|$ गणनीय है और m_0, m_1, ..., उसका परिगणन है। पुनरावृत्तियाँ हटाकर हम सुनिश्चित कर सकते हैं कि कोई m_k दो बार न आए। $f(m_k) = m_{k+1}$ परिभाषित करें और $s(z) = m_0$ तथा $s(u) = f$ मानें। हम दिखाते हैं कि

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall X\, ((X(z) \land \forall x\, (X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x\, X(x))$$

मान लें $M \subseteq |\mathfrak{M}|$ स्वेच्छ है। आगे मान लें कि $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash (X(z) \land \forall x\,(X(x) \to X(u(x))))$। तब $s[M/X](z) \in M$, और जब भी $x \in M$ हो, तब $(s[M/X](u))(x) \in M$ भी। दूसरे शब्दों में, चूँकि $s[M/X] \sim_X s$, इसलिए $m_0 \in M$; और यदि $x \in M$ तो $f(x) \in M$। अतः $m_0 \in M$, $m_1 = f(m_0) \in M$, $m_2 = f(f(m_0)) \in M$, आदि। इसलिए $M = |\mathfrak{M}|$ और इस कारण $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash \forall x\, X(x)$। चूँकि $M \subseteq |\mathfrak{M}|$ स्वेच्छ था, प्रमाण पूरा हुआ: $\mathfrak{M} \vDash$ Count.

अब मान लें कि $\mathfrak{M} \vDash$ Count, अर्थात्

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall X\,((X(z) \land \forall x\,(X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x\, X(x))$$

किसी s के लिए। $m = s(z)$ और $f = s(u)$ मानें और $M = \{m, f(m), f(f(m)), \dots\}$ पर विचार करें। इस प्रकार परिभाषित M स्पष्टतः गणनीय है। तब

$$\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash (X(z) \land \forall x\,(X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x\, X(x)$$

परिकल्पना से। साथ ही $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash X(z)$, क्योंकि $M \ni m = s[M/X](z)$; और $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash \forall x\,(X(x) \to X(u(x)))$ भी, क्योंकि जब भी $x \in M$ हो, तब $f(x) \in M$ भी। अतः पूर्वपक्ष और सप्रतिबंध, दोनों संतुष्ट हैं, इसलिए उत्तरपक्ष भी संतुष्ट होना चाहिए: $\mathfrak{M}, s[M/X] \vDash \forall x\, X(x)$। किंतु इसका अर्थ है कि $M = |\mathfrak{M}|$; और चूँकि परिभाषा से M गणनीय है, इसलिए $|\mathfrak{M}|$ भी गणनीय है। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 38.1. दिखाएँ कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में $\forall$ और $\to$ अन्य संयोजकों को परिभाषित कर सकते हैं:

1. सिद्ध करें कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में $\varphi \land \psi$, $\forall X\,(\varphi \to (\psi \to \forall x\, X(x)) \to \forall x\, X(x))$ के समतुल्य है।

2. केवल $\forall$ और $\to$ का उपयोग करने वाला ऐसा द्वितीय-कोटि सूत्र खोजें जो $\varphi \lor \psi$ के समतुल्य हो।

प्रश्न 38.2. दिखाएँ कि $\forall X\,(X(x) \to X(y))$ (ध्यान दें: $\leftrightarrow$ नहीं, बल्कि $\to$!) $\mathrm{Id}_{|\mathfrak{M}|}$ को परिभाषित करता है।

प्रश्न 38.3. वाक्य Inf $\land$ Count उन्हीं और केवल उन्हीं प्रांतों में सत्य है जो गणनीय अनंत हैं। Count की परिभाषा को इस प्रकार बदलें कि वह कोई भिन्न वाक्य बन जाए जो सीधे यह व्यक्त करे कि प्रांत गणनीय अनंत है, और सिद्ध करें कि वह ऐसा करता है।

अध्याय 39

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का अधिसिद्धांत

39.1 परिचय

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में कई उपयोगी गुण हैं। हम जानते हैं कि यह निर्णेय नहीं है, किंतु कम-से-कम यह अभिगृहीती-करणीय है। अर्थात् प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ऐसी प्रमाण-पद्धतियाँ हैं जो ध्वनि और पूर्ण हैं; दूसरे शब्दों में, वे ऐसा व्युत्पन्नता संबंध $\vdash$ देती हैं जिसका गुण यह है कि वाक्य के किसी भी समुच्चय Γ और वाक्य φ के लिए $\Gamma \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \vdash \varphi$। विशेषतः इसका अर्थ है कि प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र की वैधताएँ संगणनीयतः परिगणनीय हैं। कोई संगणनीय फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ ऐसा है कि f के मान ठीक वही और केवल वही वाक्य हैं जो $\mathcal{L}$ में वैध हैं। इसका कारण यह है कि व्युत्पत्ति का परिगणन किया जा सकता है, और जो व्युत्पन्न किसी एक वाक्य को करते हैं उन्हें फिर उसी वाक्य पर प्रतिचित्रित किया जा सकता है। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र से अधिक अभिव्यंजक है, इसलिए सामान्यतः उसकी वैधताओं को निरूपित करना अधिक जटिल है। वास्तव में, हम दिखाएँगे कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र न केवल अनिर्णेय है, बल्कि उसकी वैधताएँ संगणनीयतः परिगणनीय भी नहीं हैं। इसका अर्थ है कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए कोई ध्वनि और पूर्ण प्रमाण-पद्धति नहीं हो सकती (यद्यपि ध्वनि पर अपूर्ण प्रमाण-पद्धतियाँ उपलब्ध हैं और वास्तव में शोध की महत्त्वपूर्ण विषय-वस्तुएँ हैं)।

प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में दो और गुण भी हैं: वह संहत है (यदि वाक्य के किसी समुच्चय Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्ट्य है, तो Γ स्वयं संतुष्ट्य है), और उसके लिए ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय लागू होता है (यदि Γ का कोई अनंत मॉडल है, तो उसका कोई गणनीय अनंत मॉडल भी है)। ये दोनों परिणाम द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए विफल होते हैं। यहाँ भी कारण यही है कि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र प्रांत के आकार के विषय में वे तथ्य व्यक्त कर सकता है जिन्हें प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र व्यक्त नहीं कर सकता।

39.2 द्वितीय-कोटि अंकगणित

स्मरण करें कि पियानो अंकगणित के सिद्धांत **PA** में **Q** के ये आठ अभिगृहीत सम्मिलित हैं,

$$\begin{aligned}
&\forall x\, x' \neq 0\\
&\forall x\, \forall y\, (x' = y' \to x = y)\\
&\forall x\, (x = 0 \lor \exists y\, x = y')\\
&\forall x\, (x + 0) = x\\
&\forall x\, \forall y\, (x + y') = (x + y)'\\
&\forall x\, (x \times 0) = 0\\
&\forall x\, \forall y\, (x \times y') = ((x \times y) + x)\\
&\forall x\, \forall y\, (x < y \leftrightarrow \exists z\, (z' + x) = y)
\end{aligned}$$

और इनके साथ इस रूप के सभी वाक्य भी:

$$(\varphi(\mathsf{o}) \land \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x\,\varphi(x).$$

अंतिम वाला एक "स्कीमा" है, अर्थात् ऐसा प्रतिरूप जो अंकगणित की भाषा में अनंत रूप से अनेक वाक्य बनाता है—प्रत्येक सूत्र $\varphi(x)$ के लिए एक। इस स्कीमा को हम (प्रथम-कोटि) *आगमन-अभिगृहीत स्कीमा* कहते हैं। *द्वितीय-कोटि* पियानो अंकगणित **PA**^{2} में आगमन को एक ही वाक्य के रूप में कहा जा सकता है। **PA**^{2} में ऊपर के पहले आठ अभिगृहीत और यह (द्वितीय-कोटि) *आगमन-अभिगृहीत* होते हैं:

$$\forall X\,((X(\mathsf{o}) \land \forall x\,(X(x) \to X(x'))) \to \forall x\,X(x)).$$

यह कहता है कि यदि प्रांत के किसी उपसमुच्चय X में $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ हो और किसी भी $x \in |\mathfrak{M}|$ के साथ उसमें $\prime^{\mathfrak{M}}(x)$ भी हो (अर्थात् वह "उत्तरवर्ती के अधीन संवृत" हो), तो उसमें प्रांत की प्रत्येक वस्तु होती है (अर्थात् $X = |\mathfrak{M}|$)।

आगमन-अभिगृहीत सुनिश्चित करता है कि उसे संतुष्ट करने वाली किसी भी संरचना के $|\mathfrak{M}|$ में केवल वे अवयव हों जिनका होना अभिगृहीतों द्वारा आवश्यक है, अर्थात् $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\overline{n}$ के मान। **PA**^{2} के किसी मॉडल में कोई अमानक संख्या नहीं होती।

प्रमेय 39.1. *यदि* $\mathfrak{M} \vDash$ **PA**^{2}*, तो* $|\mathfrak{M}| = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

प्रमाण. मान लें $N = \{\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, और मान लें कि $\mathfrak{M} \vDash$ **PA**^{2}। निश्चय ही किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n}) \in |\mathfrak{M}|$, अतः $N \subseteq |\mathfrak{M}|$।

अब दूसरी दिशा के अंतर्वेशन पर विचार करें। ऐसा चर-नियतन s लें कि $s(X) = N$। परिकल्पना से,

$$\mathfrak{M} \vDash \forall X\,((X(\mathsf{o}) \land \forall x\,(X(x) \to X(x'))) \to \forall x\,X(x)), \text{ अतः}$$
$$\mathfrak{M}, s \vDash (X(\mathsf{o}) \land \forall x\,(X(x) \to X(x'))) \to \forall x\,X(x).$$

इस सप्रतिबंध के पूर्वपक्ष पर विचार करें। $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathsf{o}) \in N$, अतः $\mathfrak{M}, s \vDash X(\mathsf{o})$। दूसरा संयोज्य $\forall x\,(X(x) \to X(x'))$ भी संतुष्ट है। मान लें $x \in N$। N की परिभाषा से किसी n के लिए $x = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$। फलतः $\prime^{\mathfrak{M}}(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n+1}) \in N$। अतः $\prime^{\mathfrak{M}}(x) \in N$।

इस प्रकार $\mathfrak{M}, s \vDash X(\mathsf{o}) \land \forall x\,(X(x) \to X(x'))$। फलतः $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\,X(x)$। किंतु इसका अर्थ है कि प्रत्येक $x \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $x \in s(X) = N$। इसलिए $|\mathfrak{M}| \subseteq N$। □

उपप्रमेय 39.2. **PA**^{2} *के कोई भी दो मॉडल समरूप होते हैं।*

प्रमाण. प्रमेय 39.1 से, **PA**^{2} के किसी भी मॉडल का प्रांत $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\overline{n})$ द्वारा पूरा भर जाता है। ऐसा कोई भी मॉडल **Q** का मॉडल भी है। प्रतिज्ञप्ति 26.3 से ऐसा कोई भी मॉडल मानक है, अर्थात् $\mathfrak{N}$ के समरूप है। □

ऊपर हमने **PA**^{2} को उस सिद्धांत के रूप में परिभाषित किया जिसमें पहले आठ अंकगणितीय अभिगृहीत और द्वितीय-कोटि आगमन-अभिगृहीत हैं। वास्तव में, द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र की अभिव्यंजक शक्ति के कारण, द्वितीय-कोटि पियानो अंकगणित के लिए अंकगणितीय अभिगृहीतों में केवल *पहले दो* और आगमन पर्याप्त हैं।

प्रतिज्ञप्ति 39.3. **PA**^{2†} *वह द्वितीय-कोटि सिद्धांत हो जिसमें पहले दो अंकगणितीय अभिगृहीत (उत्तरवर्ती अभिगृहीत) और द्वितीय-कोटि आगमन-अभिगृहीत हैं। तब* $\leq$*,* $+$ *और* $\times$*,* **PA**^{2†} *में परिभाष्य हैं।*

प्रमाण. $\leq$ को परिभाष्य दिखाने के लिए हमें ऐसा सूत्र $\varphi_{\leq}(x, y)$ खोजना है कि $\mathfrak{N} \vDash \varphi_{\leq}(\overline{n}, \overline{m})$ तभी और केवल तभी जब $n \leq m$। इस सूत्र पर विचार करें:

$$\psi(x, Y) \equiv Y(x) \land \forall y\,(Y(y) \to Y(y'))$$

स्पष्टतः कोई समुच्चय $Y \subseteq \mathbb{N}$, $\psi(\overline{n}, Y)$ को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब $\{m : n \leq m\} \subseteq Y$; अतः हम $\varphi_{\leq}(x, y) \equiv \forall Y\, (\psi(x, Y) \to Y(y))$ ले सकते हैं।

यह देखने के लिए कि योग परिभाष्य है, ध्यान दें कि $k + l = m$ तभी और केवल तभी जब कोई ऐसा फलन u हो कि $u(0) = k$, प्रत्येक n के लिए $u(n') = u(n)'$, और $m = u(l)$। इस तुल्यता का उपयोग करके हम निम्न सूत्र द्वारा $\mathbf{PA}^{2\dagger}$ में योग को परिभाषित कर सकते हैं:

$$\varphi_{+}(x, y, z) \equiv \exists u\, (u(\mathsf{o}) = x \wedge \forall w\, u(x') = u(x)' \wedge u(y) = z)$$

यह स्पष्ट होना चाहिए कि $\mathfrak{N} \vDash \varphi_{+}(\overline{k}, \overline{l}, \overline{m})$ तभी और केवल तभी जब $k + l = m$। $\square$

39.3 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र अभिगृहीतीकरणीय नहीं है

प्रमेय 39.4. *द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र अनिर्णेय है।*

प्रमाण. कोई प्रथम-कोटि वाक्य, प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में तभी और केवल तभी वैध है जब वह द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में वैध हो; और प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र अनिर्णेय है। $\square$

प्रमेय 39.5. *द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए कोई ध्वनि और पूर्ण व्युत्पत्ति पद्धति नहीं है।*

प्रमाण. मान लें φ अंकगणित की भाषा का कोई वाक्य है। $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\mathbf{PA}^2 \vDash \varphi$। P, $\mathbf{PA}^2$ के नौ अभिगृहीतों का संयोजन हो। $\mathbf{PA}^2 \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $\vDash P \to \varphi$, अर्थात् $\mathfrak{M} \vDash P \to \varphi$ । अब उस वाक्य पर विचार करें $\forall z\, \forall u\, \forall u'\, \forall u''\, \forall L\, (P' \to \varphi')$, जो o को z से, $'$ को एक-स्थानी फलन-चर u से, $+$ और $\times$ को क्रमशः दो-स्थानी फलन-चरों u' और u'' से तथा $<$ को दो-स्थानी संबंध-चर L से बदलकर, फिर सार्वत्रिक परिमाणीकरण लगाकर प्राप्त होता है। यह शुद्ध द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का वैध वाक्य तभी और केवल तभी है जब मूल वाक्य वैध था, तभी और केवल तभी जब $\mathbf{PA}^2 \vDash \varphi$, और तभी और केवल तभी जब $\mathfrak{N} \vDash \varphi$। अतः यदि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए कोई ध्वनि और पूर्ण प्रमाण-पद्धति होती, तो हम उसका उपयोग $\mathfrak{N}$ में सत्य वाक्य का संगणनीय परिगणन $f \colon \mathbb{N} \to \mathrm{Sent}(\mathcal{L}_A)$ परिभाषित करने के लिए कर सकते थे। यह फलन $\mathbf{Q}$ में किसी प्रथम-कोटि सूत्र $\psi_f(x, y)$ द्वारा निरूपणीय होता। तब सूत्र $\exists x\, \psi_f(x, y)$, $\mathfrak{N}$ के सत्य प्रथम-कोटि वाक्य के समुच्चय को परिभाषित करता, जो टार्स्की के प्रमेय का खंडन है। $\square$

39.4 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र संहत नहीं है

वाक्य के किसी समुच्चय Γ को *परिमिततः संतुष्ट्य* कहें यदि उसका प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्ट्य हो। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र में यह गुण है कि यदि वाक्य का कोई समुच्चय Γ परिमिततः संतुष्ट्य है, तो वह संतुष्ट्य है। इस गुण को *संहतता* कहते हैं। अनुगमन की भाषा में इसका एक तुल्य रूप है: यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए पहले ही $\Gamma_0 \vDash \varphi$। इस रूप में यह पूर्णता प्रमेय का तात्कालिक उपप्रमेय है: यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो पूर्णता से $\Gamma \vdash \varphi$। किंतु कोई व्युत्पत्ति, Γ के केवल परिमित रूप से अनेक वाक्य का ही उपयोग कर सकता है।

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए संहतता सत्य नहीं है। द्वितीय-कोटि वाक्य के ऐसे समुच्चय हैं जो परिमिततः संतुष्ट्य तो हैं, किंतु संतुष्ट्य नहीं; और जो किसी φ का अनुगमन करते हैं, जबकि उनका कोई परिमित उपसमुच्चय उस φ का अनुगमन नहीं करता।

प्रमेय 39.6. *द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र संहत नहीं है।*

प्रमाण. स्मरण करें कि

$$\mathrm{Inf} \equiv \exists u\, (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \to x = y) \wedge \exists y\, \forall x\, y \neq u(x))$$

किसी संरचना में तभी और केवल तभी संतुष्ट होता है जब उसका प्रांत अनंत हो। $\varphi^{\geq n}$ ऐसा वाक्य हो जो कहता है कि प्रांत में कम-से-कम n अवयव हैं; उदाहरणार्थ,

$$\varphi^{\geq n} \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n \, (x_1 \neq x_2 \land x_1 \neq x_3 \land \cdots \land x_{n-1} \neq x_n).$$

वाक्य के इस समुच्चय पर विचार करें:

$$\Gamma = \{\neg\text{Inf}, \varphi^{\geq 1}, \varphi^{\geq 2}, \varphi^{\geq 3}, \ldots\}.$$

यह परिमिततः संतुष्ट्य है, क्योंकि किसी भी परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए कोई ऐसा k है कि $\varphi^{\geq k} \in \Gamma$, पर $n > k$ के लिए कोई $\varphi^{\geq n} \in \Gamma$ नहीं है। यदि $|\mathfrak{M}|$ में k अवयव हों, तो $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_0$। किंतु Γ संतुष्ट्य नहीं है: यदि $\mathfrak{M} \vDash \neg\text{Inf}$, तो $|\mathfrak{M}|$ परिमित होना चाहिए, मान लें उसका आकार k है। तब $\mathfrak{M} \nvDash \varphi^{\geq k+1}$। □

39.5 द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय विफल होता है

(अवरोही) ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय कहता है कि वाक्य के जिस भी समुच्चय का कोई अनंत मॉडल है, उसका कोई गणनीय मॉडल भी है। यह भी पूर्णता प्रमेय का परिणाम है: पूर्णता का प्रमाण वाक्य के किसी भी संगत समुच्चय के लिए एक मॉडल बनाता है, और वह मॉडल गणनीय होता है। एक आरोही ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय भी है, जो आश्वस्त करता है कि यदि वाक्य के किसी समुच्चय का कोई गणनीय अनंत मॉडल है, तो उसका कोई अगणनीय मॉडल भी है। द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में दोनों प्रमेय विफल होते हैं।

प्रमेय 39.7. *द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के लिए ल्योवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय विफल होता है: ऐसे वाक्य हैं जिनके अनंत मॉडल हैं, पर कोई गणनीय मॉडल नहीं है।*

प्रमाण. स्मरण करें कि

$$\text{Count} \equiv \exists z \, \exists u \, \forall X \, ((X(z) \land \forall x \, (X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x \, X(x))$$

संरचना $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $|\mathfrak{M}|$ गणनीय हो; अतः $\neg\text{Count}$, $\mathfrak{M}$ में तभी और केवल तभी सत्य है जब $|\mathfrak{M}|$ अगणनीय हो। ऐसी संरचना अस्तित्व में हैं—किसी भी अगणनीय समुच्चय को प्रांत मान लें, जैसे $\wp(\mathbb{N})$ या $\mathbb{R}$। इसलिए $\neg\text{Count}$ के अनंत मॉडल तो हैं, पर कोई गणनीय मॉडल नहीं है। □

प्रमेय 39.8. *ऐसे वाक्य हैं जिनके गणनीय अनंत मॉडल तो हैं, पर कोई अगणनीय मॉडल नहीं है।*

प्रमाण. $\text{Count} \land \text{Inf}$, $\mathbb{N}$ में सत्य है, पर ऐसी किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में सत्य नहीं है जिसका $|\mathfrak{M}|$ अगणनीय हो। □

प्रश्न

प्रश्न 39.1. प्रतिज्ञप्ति 39.3 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 39.2. ऐसे समुच्चय Γ और वाक्य φ का उदाहरण दें कि $\Gamma \vDash \varphi$, पर प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए $\Gamma_0 \nvDash \varphi$।

अध्याय 40

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र और समुच्चय सिद्धांत

यह खंड द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में घात-समुच्चयों और सातत्य के कूटन पर विचार करता है। परिणाम बताए गए हैं, किंतु प्रमाण अभी जोड़े जाने हैं। अभी कोई प्रश्न नहीं हैं—और संभव है कि परिभाषाओं तथा परिणामों में भी समस्याएँ हों। सावधानी से उपयोग करें और जो कुछ असत्य या अस्पष्ट लगे, उसकी सूचना दें।

40.1 परिचय

चूँकि द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में फलनों के साथ-साथ प्रांत के उपसमुच्चयों पर भी परिमाणीकरण किया जा सकता है, इसलिए यह अपेक्षित है कि कम-से-कम कुछ समुच्चय-सिद्धांत द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में विकसित किया जा सके। "विकसित करने" से हमारा आशय है कि समुच्चय-सैद्धांतिक गुणों और कथनों को द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में व्यक्त किया जा सकता है, और यह समुच्चयों के लिए किसी विशेष अतार्किक शब्दावली (जैसे समुच्चय-सिद्धांत का सदस्यता विधेय-चिह्न) के बिना संभव है। उदाहरणार्थ, हम समुच्चयों के संघ और सर्वनिष्ठ तथा उपसमुच्चय-संबंध को परिभाषित कर सकते हैं; साथ ही समुच्चयों के आकारों की तुलना और कैंटर के प्रमेय जैसे परिणामों का कथन भी कर सकते हैं।

40.2 समुच्चयों की तुलना

प्रतिज्ञप्ति 40.1. *सूत्र* $\forall x\,(X(x) \to Y(x))$ *उपसमुच्चय-संबंध को परिभाषित करता है, अर्थात्* $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\,(X(x) \to Y(x))$ *तभी और केवल तभी जब* $s(X) \subseteq s(Y)$*।*

प्रतिज्ञप्ति 40.2. *सूत्र* $\forall x\,(X(x) \leftrightarrow Y(x))$ *समुच्चयों पर तादात्म्य-संबंध को परिभाषित करता है, अर्थात्* $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\,(X(x) \leftrightarrow Y(x))$ *तभी और केवल तभी जब* $s(X) = s(Y)$*।*

प्रतिज्ञप्ति 40.3. *सूत्र* $\exists x\,X(x)$ *अरिक्त होने के गुण को परिभाषित करता है, अर्थात्* $\mathfrak{M}, s \vDash \exists x\,X(x)$ *तभी और केवल तभी जब* $s(X) \neq \emptyset$*।*

समुच्चय X का आकार समुच्चय Y से अधिक नहीं है, $X \preceq Y$, तभी और केवल तभी जब कोई एकैकी फलन $f\colon X \to Y$ हो। चूँकि हम व्यक्त कर सकते हैं कि कोई फलन अंतःक्षेपी है, और यह भी कि X के अवयवों पर उसके मान Y में हैं, इसलिए हम प्रांत के उपसमुच्चयों पर "आकार में अधिक न होने" के संबंध को भी परिभाषित कर सकते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 40.4. *यह सूत्र*

$$\exists u\,(\forall x\,(X(x) \to Y(u(x))) \land \forall x\,\forall y\,(u(x) = u(y) \to x = y))$$

आकार में अधिक न होने के संबंध को परिभाषित करता है।

दो समुच्चय समान आकार के, अथवा "समसंख्यक", $X \approx Y$, तभी और केवल तभी होते हैं जब कोई एकैकी आच्छादक फलन $f\colon X \to Y$ हो।

प्रतिज्ञप्ति 40.5. *यह सूत्र*

$$\exists u\,(\forall x\,(X(x) \to Y(u(x))) \land \\ \forall x\,\forall y\,(u(x) = u(y) \to x = y) \land \\ \forall y\,(Y(y) \to \exists x\,(X(x) \land y = u(x))))$$

समसंख्यकता के संबंध को परिभाषित करता है।

हम इन सूत्र को क्रमशः $X \subseteq Y$, $X = Y$, $X \neq \emptyset$, $X \preceq Y$ और $X \approx Y$ से संक्षिप्त करेंगे। (यह कुछ भ्रम उत्पन्न कर सकता है, क्योंकि समुच्चयों X और Y की अनौपचारिक चर्चा में भी हम यही संकेत-लिपि उपयोग करते हैं—पर यहाँ यह संकेत-लिपि एक-स्थानी संबंध-चरों X और Y वाले द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र के सूत्र का संक्षिप्त रूप है।)

प्रतिज्ञप्ति 40.6. *वाक्य* $\forall X\,\forall Y\,((X \preceq Y \land Y \preceq X) \to X \approx Y)$ *वैध है।*

प्रमाण. यह वाक्य किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में तब संतुष्ट होता है जब किन्हीं उपसमुच्चयों $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ और $Y \subseteq |\mathfrak{M}|$ के लिए, यदि $X \preceq Y$ और $Y \preceq X$, तो $X \approx Y$। किंतु यह *किन्हीं भी* समुच्चयों X और Y के लिए लागू होता है—यही श्रेडर–बर्नस्टाइन प्रमेय है। □

40.3 समुच्चयों के आकार

जिस प्रकार हम व्यक्त कर सकते हैं कि प्रांत परिमित अथवा अनंत, गणनीय अथवा अगणनीय है, उसी प्रकार हम $|\mathfrak{M}|$ के किसी उपसमुच्चय के परिमित अथवा अनंत, गणनीय अथवा अगणनीय होने के गुण को परिभाषित कर सकते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 40.7. *सूत्र* $\mathrm{Inf}(X) \equiv$

$$\exists u\,(\forall x\,\forall y\,(u(x) = u(y) \to x = y) \land \\ \exists y\,(X(y) \land \forall x\,(X(x) \to y \neq u(x)))$$

किसी चर-नियतन s के सापेक्ष तभी और केवल तभी संतुष्ट होता है जब $s(X)$ अनंत हो।

प्रतिज्ञप्ति 40.8. *सूत्र* $\mathrm{Count}(X) \equiv$

$$\exists z\,\exists u\,(X(z) \land \forall x\,(X(x) \to X(u(x))) \land \\ \forall Y\,((Y(z) \land \forall x\,(Y(x) \to Y(u(x)))) \to X = Y))$$

किसी चर-नियतन s के सापेक्ष तभी और केवल तभी संतुष्ट होता है जब $s(X)$ गणनीय हो।

कैंटर के प्रमेय से हम जानते हैं कि अगणनीय समुच्चय होते हैं, और वास्तव में अनंत आकारों के अनंत रूप से अनेक भिन्न स्तर होते हैं। समुच्चय-सिद्धांत समुच्चयों के आकारों का पूरा अंकगणित विकसित करता है और समुच्चयों को अनंत कार्डिनल संख्याएँ देता है। प्राकृतिक संख्याएँ परिमित समुच्चयों के आकार मापने वाली कार्डिनल संख्याओं का काम करती हैं। गणनीय अनंत समुच्चयों की कार्डिनैलिटी पहली अनंत कार्डिनैलिटी है, जिसे $\aleph_0$ ("अलेफ़-नॉट" अथवा "अलेफ़-शून्य") कहते हैं। अगला अनंत आकार $\aleph_1$ है। यह वह सबसे छोटा आकार है जो किसी समुच्चय का परिगणनीय (अर्थात् आकार $\aleph_0$ का) हुए बिना हो सकता है। "X का आकार $\aleph_0$ है" को हम $\mathrm{Aleph}_0(X) \leftrightarrow \mathrm{Inf}(X) \land \mathrm{Count}(X)$

से परिभाषित कर सकते हैं। X का आकार $\aleph_1$ तभी और केवल तभी है जब उसके सभी उपसमुच्चय परिमित हों या आकार $\aleph_0$ के हों, किंतु वह स्वयं आकार $\aleph_0$ का न हो। अतः इसे सूत्र $\text{Aleph}_1(X) \equiv \forall Y\,(Y \subseteq X \to (\neg\text{Inf}(Y) \vee \text{Aleph}_0(Y))) \wedge \neg\text{Aleph}_0(X)$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। आकार $\aleph_2$ का होना भी इसी प्रकार परिभाषित होता है, इत्यादि।

एक आकार विशेष रुचि का है, जिसे सातत्य की कार्डिनैलिटी कहते हैं। यह $\wp(\mathbb{N})$ का आकार है, अथवा तुल्य रूप से $\mathbb{R}$ का आकार। किसी समुच्चय का आकार सातत्य के बराबर है, यह बात भी द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में व्यक्त की जा सकती है, किंतु इसके लिए कुछ अधिक काम करना पड़ता है।

40.4 सातत्य की शक्ति

द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र में हम प्रांत के उपसमुच्चयों पर परिमाणीकरण कर सकते हैं, पर प्रांत के उपसमुच्चयों के समुच्चयों पर नहीं। सीधे ऐसा करने के लिए हमें *तृतीय-कोटि* तर्कशास्त्र चाहिए होगा। उदाहरणार्थ, यदि हम कैंटर का यह प्रमेय कहना चाहें कि किसी समुच्चय के घात-समुच्चय से उसी समुच्चय में कोई एकैकी फलन नहीं होता, तो हम इसे इस प्रकार निरूपित करने का प्रयास कर सकते हैं: "प्रत्येक समुच्चय X और प्रत्येक समुच्चय P के लिए, यदि P, X का घात-समुच्चय है, तो $P \preceq X$ नहीं।" और यह कहने के लिए कि P, X का घात-समुच्चय है, हमें औपचारिक रूप से व्यक्त करना होगा कि P के अवयव ठीक वही और केवल वही हैं जो X के उपसमुच्चय हैं; अर्थात् $\forall Y\,(P(Y) \leftrightarrow Y \subseteq X)$ जैसा कुछ। समस्या $P(Y)$ में है: यह द्वितीय-कोटि तर्कशास्त्र का सूत्र नहीं है, क्योंकि P जैसे एक-स्थानी संबंध-चरों के तर्क केवल पद हो सकते हैं।

फिर भी, यदि प्रांत पर्याप्त बड़ा हो, तो हम समुच्चयों के समुच्चयों पर परिमाणीकरण का *अनुकरण* कर सकते हैं। विचार इस तथ्य का उपयोग करना है कि दो-स्थानी संबंध R, प्रांत के अवयव को उसी प्रांत के अवयव से संबद्ध करता है। ऐसा R दिए होने पर हम उन सभी अवयव को एकत्र कर सकते हैं जिनसे कोई x, R-संबद्ध है: $\{y \in |\mathfrak{M}| : R(x,y)\}$ वह समुच्चय है जिसे x "कूटित करता है"। उलटे, यदि $Z \subseteq \wp(|\mathfrak{M}|)$, $|\mathfrak{M}|$ के उपसमुच्चयों का कोई संग्रह है, और $|\mathfrak{M}|$ में कम-से-कम उतने अवयव हैं जितने Z में समुच्चय, तो कोई ऐसा संबंध $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$ भी है कि Z का प्रत्येक Y किसी x द्वारा R के माध्यम से कूटित होता है।

परिभाषा 40.9. यदि $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$, तो x, R *के द्वारा* $\{y \in |\mathfrak{M}| : R(x,y)\}$ *को कूटित करता है।*

यदि कोई अवयव $x \in |\mathfrak{M}|$, R के द्वारा किसी समुच्चय $Z \subseteq |\mathfrak{M}|$ को कूटित करता है, तो समुच्चय $Y \subseteq |\mathfrak{M}|$ समुच्चयों के एक समुच्चय को कूटित करता है—अर्थात् उन समुच्चयों को जिन्हें Y के अवयव कूटित करते हैं। इसलिए कोई समुच्चय Y, $\wp(X)$ को R द्वारा कूटित कर सकता है। वह ऐसा तभी और केवल तभी करता है जब प्रत्येक $Z \subseteq X$ को कोई $x \in Y$, R द्वारा कूटित करता हो और प्रत्येक $x \in Y$, किसी $Z \subseteq X$ को R द्वारा कूटित करता हो।

प्रतिज्ञप्ति 40.10. *सूत्र*

$$\text{Codes}(x,R,Z) \equiv \forall y\,(Z(y) \leftrightarrow R(x,y))$$

यह व्यक्त करता है कि $s(x)$, $s(R)$ *के द्वारा* $s(Z)$ *को कूटित करता है। सूत्र*

$$\begin{aligned}\text{Pow}(Y,R,X) \equiv\ & \\ & \forall Z\,(Z \subseteq X \to \exists x\,(Y(x) \wedge \text{Codes}(x,R,Z))) \wedge \\ & \qquad \forall x\,(Y(x) \to \forall Z\,(\text{Codes}(x,R,Z) \to Z \subseteq X)\end{aligned}$$

यह व्यक्त करता है कि $s(Y)$, $s(R)$ *के द्वारा* $s(X)$ *के घात-समुच्चय को कूटित करता है; अर्थात्* $s(Y)$ *के अवयव* $s(R)$ *द्वारा ठीक* $s(X)$ *के उपसमुच्चयों को कूटित करते हैं।*

इस युक्ति से हम स्वयं उपसमुच्चयों के बजाय उनके कूटों पर परिमाणीकरण करके घात-समुच्चय के विषय में कथन व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, अब कैंटर के प्रमेय को यह कहकर व्यक्त किया जा सकता है कि X के घात-समुच्चय को कूटित करने वाले किसी भी संबंध के प्रांत से स्वयं X में कोई एकैकी फलन नहीं है।

प्रतिज्ञप्ति 40.11. *यह वाक्य*

$$\forall X\, \forall Y\, \forall R\, (\mathrm{Pow}(Y, R, X) \to \neg\exists u\, (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \to x = y) \wedge \forall x\, (Y(x) \to X(u(x)))))$$

वैध है।

किसी गणनीय अनंत समुच्चय का घात-समुच्चय अगणनीय होता है, इसलिए उसकी कार्डिनैलिटी किसी भी गणनीय अनंत समुच्चय की कार्डिनैलिटी (जो $\aleph_0$ है) से बड़ी होती है। $\wp(\mathbb{N})$ के आकार को "सातत्य की शक्ति" कहते हैं, क्योंकि वह वास्तविक संख्या-रेखा $\mathbb{R}$ के बिंदुओं के समुच्चय के समान आकार का है। यदि प्रांत इतना बड़ा है कि किसी गणनीय अनंत समुच्चय के घात-समुच्चय को कूटित कर सके, तो हम यह बात इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं कि कोई समुच्चय सातत्य के आकार का है: वह ऐसे किसी समुच्चय Y के समसंख्यक है जो आकार $\aleph_0$ वाले समुच्चय X के घात-समुच्चय को कूटित करता है। (यदि प्रांत पर्याप्त बड़ा नहीं है, अर्थात् उसमें $\mathbb{R}$ के समसंख्यक कोई उपसमुच्चय नहीं है, तो $\wp(X)$ को कूटित करने वाला कोई संबंध भी नहीं हो सकता।)

प्रतिज्ञप्ति 40.12. *यदि $\mathbb{R} \preceq |\mathfrak{M}|$, तो सूत्र*

$$\mathrm{Cont}(Y) \equiv \exists X\, \exists R\, ((\mathrm{Aleph}_0(X) \wedge \mathrm{Pow}(Y, R, X)) \wedge \forall x\, \forall y\, ((Y(x) \wedge Y(y) \wedge \forall z\, R(x, z) \leftrightarrow R(y, z)) \to x = y))$$

यह व्यक्त करता है कि $s(Y) \approx \mathbb{R}$।

प्रमाण. $\mathrm{Pow}(Y, R, X)$ व्यक्त करता है कि $s(Y)$, $s(R)$ के द्वारा $s(X)$ के घात-समुच्चय को कूटित करता है, और $\mathrm{Aleph}_0(X)$ कहता है कि $s(X)$ परिगणनीय है। अतः $s(Y)$ कम-से-कम सातत्य की शक्ति जितना बड़ा है, यद्यपि वह उससे बड़ा भी हो सकता है (यदि $s(Y)$ के अनेक अवयव X के एक ही उपसमुच्चय को कूटित करते हों)। अंतिम संयोज्य इसे निषिद्ध करता है; वह माँग करता है कि $s(R)$ के माध्यम से $s(Y)$ के अवयवों और $s(Z)$ के उपसमुच्चयों के बीच संबंध एकैकी हो। □

प्रतिज्ञप्ति 40.13. $|\mathfrak{M}| \approx \mathbb{R}$ *तभी और केवल तभी जब*

$$\mathfrak{M} \vDash \exists X\, \exists Y\, \exists R\, (\mathrm{Aleph}_0(X) \wedge \mathrm{Pow}(Y, R, X) \wedge \exists u\, (\forall x\, \forall y\, (u(x) = u(y) \to x = y) \wedge \forall y\, (Y(y) \to \exists x\, y = u(x)))).$$

सातत्य परिकल्पना वह कथन है कि सातत्य का आकार पहली अगणनीय कार्डिनैलिटी है, अर्थात् $\wp(\mathbb{N})$ का आकार $\aleph_1$ है।

प्रतिज्ञप्ति 40.14. *सातत्य परिकल्पना तभी और केवल तभी सत्य है जब*

$$\mathrm{CH} \equiv \forall X\, (\mathrm{Aleph}_1(X) \leftrightarrow \mathrm{Cont}(X))$$

वैध हो।

ध्यान दें कि यह सत्य नहीं है कि $\neg$CH तभी और केवल तभी वैध है जब सातत्य परिकल्पना असत्य हो। किसी गणनीय प्रांत में न तो आकार $\aleph_1$ के उपसमुच्चय होते हैं, न सातत्य के आकार के उपसमुच्चय; इसलिए किसी गणनीय प्रांत में CH सर्वदा सत्य है। फिर भी, हम ऐसा भिन्न वाक्य दे सकते हैं जो तभी और केवल तभी वैध है जब सातत्य परिकल्पना असत्य हो:

प्रतिज्ञप्ति 40.15. *सातत्य परिकल्पना तभी और केवल तभी असत्य है जब*

$$\mathrm{NCH} \equiv \forall X\, (\mathrm{Cont}(X) \to \exists Y\, (Y \subseteq X \wedge \neg\mathrm{Count}(Y) \wedge \neg X \approx Y))$$

वैध हो।

खण्ड IX

लैम्ब्डा कलन

यह भाग लैम्ब्डा कलन से संबंधित है। परिचय अध्याय जेरेमी एविगैड की टिप्पणियों पर आधारित है; उसका कुछ अंश अब अनावश्यक पुनरावृत्ति है और बाद के अध्यायों में आ चुका है। वाक्यविन्यास, चर्च–रॉसर गुण और लैम्ब्डा-परिभाष्यता पर अध्याय ज़ेसेन चियान ने अपनी मिटैक्स ग्रीष्मकालीन इंटर्नशिप के दौरान तैयार किए थे। उनका अभी पुनरीक्षण और संशोधन होना शेष है।

अध्याय 41

परिचय

इस अध्याय में लैम्ब्डा कलन पर जेरेमी की मूल संक्षिप्त टिप्पणियाँ हैं। इसके खंडों को संयोजित करने और लैम्ब्डा-परिभाष्यता की सामग्री को उस विषय के अलग, अधिक विस्तृत अध्याय की सामग्री में मिलाने की आवश्यकता है।

41.1 रूपरेखा

लैम्ब्डा कलन मूलतः अलॉन्ज़ो चर्च ने 1930 के दशक के आरंभ में रचनात्मक तर्कशास्त्र के आधार के रूप में बनाया था, संगणनीय फलनों के मॉडल के रूप में *नहीं*। किंतु शीघ्र ही यह दिखा दिया गया कि वह संगणनीयता की अन्य परिभाषाओं, जैसे ट्यूरिंग-संगणनीय फलनों और आंशिक पुनरावर्ती फलनों, के तुल्य है। आरंभ में इस बात का कुछ आश्चर्यजनक होना इस अभिलक्षण को और भी रोचक बनाता है।

किसी फलन के लिए कोई नाम परिभाषित करने के बजाय, उसे परिभाषित करने वाले सांकेतिक व्यंजक से सीधे उसका उल्लेख करने का सुविधाजनक उपाय लैम्ब्डा संकेत-लिपि है। "$f,\ f(x) = x + 3$ द्वारा परिभाषित फलन हो" कहने के बदले हम कह सकते हैं, "f फलन $\lambda x.\,(x + 3)$ हो।" दूसरे शब्दों में, $\lambda x.\,(x + 3)$ उस फलन का केवल एक *नाम* है जो अपने तर्क में तीन जोड़ता है। इस व्यंजक में x एक नाममात्र चर, अथवा स्थानधारक है: उसी फलन को $\lambda y.\,(y + 3)$ से भी उतनी ही अच्छी तरह दर्शाया जा सकता है। यह संकेत-लिपि अन्य प्राचलों की उपस्थिति में भी काम करती है। उदाहरणार्थ, मान लें $g(x, y)$ दो चरों का फलन है और k कोई प्राकृतिक संख्या है। तब $\lambda x.\,g(x, k)$ वह फलन है जो प्रत्येक x को $g(x, k)$ पर प्रतिचित्रित करता है।

किसी सांकेतिक व्यंजक से फलन परिभाषित करने की इस विधि को *लैम्ब्डा अमूर्तन* कहते हैं। लैम्ब्डा अमूर्तन का दूसरा पहलू *अनुप्रयोग* है: मान लें हमारे पास कोई फलन f है (मसलन, प्राकृतिक संख्याओं पर परिभाषित), तो हम उसे 2 जैसे किसी भी मान पर *लागू* कर सकते हैं। प्रचलित संकेत-लिपि में परिणाम को निश्चय ही $f(2)$ लिखते हैं।

लैम्ब्डा अमूर्तन को अनुप्रयोग से जोड़ने पर क्या होता है? तब अमूर्त किए गए चर के स्थान पर लागू किए जा रहे पद को "रखकर" परिणामी व्यंजक को सरल किया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$(\lambda x.\,(x + 3))(2)$$

को सरल करके $2 + 3$ किया जा सकता है।

अब तक हमने प्रचलित धारणाओं के लिए नई संकेत-लिपि प्रस्तुत करने के अतिरिक्त कुछ नहीं किया है। किंतु लैम्ब्डा कलन समुच्चय-सैद्धांतिक दृष्टिकोण से कहीं अधिक मूलभूत विचलन प्रस्तुत करता है। इस ढाँचे में:

1. प्रत्येक वस्तु किसी फलन को दर्शाती है।
2. लैम्ब्डा अमूर्तन से फलन परिभाषित किए जा सकते हैं।

3. किसी भी वस्तु को किसी भी दूसरी वस्तु पर लागू किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, यदि F लैम्ब्डा कलन का कोई पद है, तो $F(F)$ को सर्वदा सार्थक माना जाता है। इस उदार ढाँचे को *टाइपरहित* लैम्ब्डा कलन कहते हैं, जहाँ "टाइपरहित" का अर्थ है, "किसे किस पर लागू किया जा सकता है, इस पर कोई प्रतिबंध नहीं।"

एक *टाइपयुक्त* लैम्ब्डा कलन भी है, जो टाइपरहित रूपांतर का महत्त्वपूर्ण भेद है। यद्यपि कई दृष्टियों से टाइपयुक्त लैम्ब्डा कलन टाइपरहित कलन के समान है, उसे चिरसम्मत समुच्चय-सैद्धांतिक ढाँचे से मिलाना कहीं सरल है और उसके कुछ गुण बहुत भिन्न हैं।

लैम्ब्डा कलन पर शोध सैद्धांतिक कंप्यूटर विज्ञान और प्रोग्रामिंग भाषाओं के अभिकल्प में केंद्रीय सिद्ध हुआ है। 1950 के दशक में जॉन मैकार्थी द्वारा बनाई गई लिस्प ऐसी आरंभिक भाषा का उदाहरण है जिस पर इन विचारों का प्रभाव था।

41.2 लैम्ब्डा कलन का वाक्यविन्यास

हम चरों के अनुक्रम x, y, z, ...और कुछ अचर चिह्नों a, b, c, ...से आरंभ करते हैं। पदों का समुच्चय निम्न प्रकार आगमनतः परिभाषित होता है:

1. प्रत्येक चर एक पद है।
2. प्रत्येक अचर एक पद है।
3. यदि M और N पद हैं, तो (MN) भी पद है।
4. यदि M कोई पद और x कोई चर है, तो $(\lambda x.\, M)$ पद है।

(MN) रूप के पदों को *अनुप्रयोग* और $(\lambda x.\, M)$ रूप के पदों को *अमूर्तन* कहते हैं।

जिस पद्धति में कोई अचर नहीं होता उसे *शुद्ध* लैम्ब्डा कलन कहते हैं। हम मुख्यतः शुद्ध λ-कलन में काम करेंगे, इसलिए सभी छोटे लैटिन अक्षर चरों को दर्शाएँगे। λ-कलन के पदों को दर्शाने के लिए हम बड़े लैटिन अक्षरों (M, N, आदि) का उपयोग करते हैं।

हम संकेत-लिपि के कुछ नियम अपनाएँगे:

परिपाटी 1.

1. जब कोष्ठक छोड़ दिए जाते हैं, तब अनुप्रयोग बाएँ से दाएँ होता है। उदाहरणार्थ, यदि M, N, P और Q पद हैं, तो $MNPQ$, $(((MN)P)Q)$ का संक्षिप्त रूप है।
2. फिर, जब कोष्ठक छोड़ दिए जाते हैं, तब लैम्ब्डा अमूर्तन को संभव अधिकतम व्याप्ति दी जाती है। उदाहरणार्थ, $\lambda x.\, MNP$ को $(\lambda x.\, ((MN)P))$ पढ़ा जाता है।
3. एक लैम्ब्डा से अनेक चरों का अमूर्तन किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, $\lambda xyz.\, M$, $\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, M$ का संक्षिप्त रूप है।

उदाहरणार्थ,

$$\lambda xy.\, xxyx\lambda z.\, xz$$

इसका संक्षिप्त रूप है:

$$\lambda x.\, \lambda y.\, ((((xx)y)x)(\lambda z.\, (xz))).$$

आपको ये नियम याद कर लेने चाहिए। आरंभ में ये आपको चकरा देंगे, किंतु आप इनके अभ्यस्त हो जाएँगे; और कुछ समय बाद ये कोष्ठकों के जंगल से जूझने की अपेक्षा कम परेशान करेंगे।

जो दो पद केवल अपने आबद्ध चरों के नामों में भिन्न हों, उन्हें α-तुल्य कहते हैं; उदाहरणार्थ, $\lambda x.\, x$ और $\lambda y.\, y$। इनको "एक ही" पद मानना सुविधाजनक होगा; दूसरे शब्दों में, जब हम कहते हैं कि M और N समान हैं, तो हमारा अर्थ

"आबद्ध चरों के पुनर्नामकरण तक" भी होता है। जो चर किसी λ की व्याप्ति में हों वे "आबद्ध" और अन्य चर "मुक्त" कहलाते हैं। पिछले उदाहरण में कोई मुक्त चर नहीं है; किंतु

$$(\lambda z.\, yz)x$$

में y और x मुक्त हैं तथा z आबद्ध है।

41.3 लैम्ब्डा पदों का अपचयन

लैम्ब्डा पदों के साथ क्या किया जा सकता है? उन्हें सरल किया जा सकता है। यदि M और N कोई भी लैम्ब्डा पद और x कोई भी चर हो, तो M में x के स्थान पर N प्रतिस्थापित करने से मिलने वाले परिणाम को हम $M[N/x]$ से दर्शा सकते हैं; इससे पहले M के उन आबद्ध चरों का पुनर्नामकरण कर दिया जाता है जो प्रतिस्थापन के बाद N के मुक्त चरों से टकराते। उदाहरणार्थ,

$$(\lambda w.\, xxw)[yyz/x] = \lambda w.\, (yyz)(yyz)w.$$

प्रतिस्थापन की वैकल्पिक संकेत-लिपियाँ $[N/x]M$, $[x/N]M$ और $M[x/N]$ भी हैं। सावधान रहें!

सहज रूप से $(\lambda x.\, M)N$ और $M[N/x]$ का अर्थ एक ही है; पहले पद को दूसरे से बदलने की क्रिया को β-*संकुचन* कहते हैं। $(\lambda x.\, M)N$ को *रिडेक्स* और $M[N/x]$ को उसका *संकुचित रूप* कहते हैं। सामान्यतः, यदि किसी उपपद के β-संकुचन द्वारा पद P को P' में बदला जा सकता है, तो हम कहते हैं कि P *एक चरण में* β-*अपचयित होकर* P' *बनता है*, और $P \to P'$ लिखते हैं। यदि P से एक-चरणीय अपचयनों की किसी संख्या (शून्य भी संभव है) द्वारा P' प्राप्त किया जा सकता है, तो P β-*अपचयित होकर* P' बनता है; संकेतों में, $P \twoheadrightarrow P'$। जिस पद का आगे β-अपचयन न किया जा सके वह β-*अनपचयनीय*, अथवा β-*प्रसामान्य* कहलाता है। प्रसंग स्पष्ट होने पर हम "β-अपचयित होता है" आदि के बदले केवल "अपचयित होता है" कहेंगे।

कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

1. हमारे पास है

$$\begin{aligned}(\lambda x.\, xxy)\lambda z.\, z &\to (\lambda z.\, z)(\lambda z.\, z)y \\ &\to (\lambda z.\, z)y \\ &\to y.\end{aligned}$$

2. किसी पद को "सरल करना" उसे अधिक जटिल बना सकता है:

$$\begin{aligned}(\lambda x.\, xxy)(\lambda x.\, xxy) &\to (\lambda x.\, xxy)(\lambda x.\, xxy)y \\ &\to (\lambda x.\, xxy)(\lambda x.\, xxy)yy \\ &\to \ldots\end{aligned}$$

3. यह किसी पद को अपरिवर्तित भी छोड़ सकता है:

$$(\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx) \to (\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx).$$

4. कुछ पदों को एक से अधिक प्रकार से अपचयित भी किया जा सकता है; उदाहरणार्थ,

$$(\lambda x.\, (\lambda y.\, yx)z)v \to (\lambda y.\, yv)z$$

सबसे बाहरी अनुप्रयोग को संकुचित करने पर; और

$$(\lambda x.\, (\lambda y.\, yx)z)v \to (\lambda x.\, zx)v$$

सबसे भीतरी अनुप्रयोग को संकुचित करने पर। फिर भी ध्यान दें कि इस स्थिति में दोनों पद आगे अपचयित होकर एक ही पद zv बनते हैं।

अंतिम उदाहरण का अंतिम परिणाम संयोग नहीं है; वह लैम्ब्डा कलन के एक गहरे और महत्त्वपूर्ण गुण को दर्शाता है, जिसे "चर्च–रॉसर गुण" कहते हैं।

41.4 चर्च–रॉसर गुण

प्रमेय 41.1. *M, N_1 और N_2 ऐसे पद हों कि $M \twoheadrightarrow N_1$ और $M \twoheadrightarrow N_2$। तब कोई ऐसा पद P है कि $N_1 \twoheadrightarrow P$ और $N_2 \twoheadrightarrow P$।*

उपप्रमेय 41.2. *मान लें M को प्रसामान्य रूप में अपचयित किया जा सकता है। तब यह प्रसामान्य रूप अद्वितीय है।*

प्रमाण. यदि $M \twoheadrightarrow N_1$ और $M \twoheadrightarrow N_2$, तो पिछले प्रमेय से कोई ऐसा पद P है कि N_1 और N_2 दोनों अपचयित होकर P बनते हैं। यदि N_1 और N_2 दोनों प्रसामान्य रूप में हों, तो ऐसा केवल तभी हो सकता है जब $N_1 \equiv P \equiv N_2$।□

अंततः, हम दो पदों M और N को β-*तुल्य*, अथवा केवल *तुल्य*, तब कहेंगे जब वे अपचयित होकर किसी समान पद में पहुँचते हों; दूसरे शब्दों में, जब कोई ऐसा P हो कि $M \twoheadrightarrow P$ और $N \twoheadrightarrow P$। इसे $M \overset{\beta}{=} N$ लिखते हैं। प्रमेय 41.1 का उपयोग करके आप जाँच सकते हैं कि $\overset{\beta}{=}$ एक तुल्यता-संबंध है, और उसमें यह अतिरिक्त गुण है कि प्रत्येक M और N के लिए, यदि $M \twoheadrightarrow N$ अथवा $N \twoheadrightarrow M$, तो $M \overset{\beta}{=} N$। (वास्तव में, यह दिखाया जा सकता है कि $\overset{\beta}{=}$ इस गुण वाला *सबसे छोटा* तुल्यता-संबंध है।)

41.5 करीकरण

कोई λ-अमूर्त $\lambda x.\, M$ एक तर्क वाले फलन को निरूपित करता है; जब हम अनेक तर्क स्वीकार करने वाला फलन परिभाषित करना चाहते हैं, तब यह खासा बड़ा प्रतिबंध है। ऐसा करने का एक उपाय λ-कलन को विस्तारित करके युग्म, त्रिक आदि बनाने की अनुमति देना होगा; तब, मसलन, तीन-स्थानी फलन $\lambda x.\, M$ अपने तर्क के त्रिक होने की अपेक्षा करेगा। किंतु इसे *करीकरण (Currying)* द्वारा करना अधिक सुविधाजनक है।

एक उदाहरण पर विचार करें। क्षण भर के लिए मान लें कि λ-कलन में हमारे पास $+$ संक्रिया है। योग-फलन 2-स्थानी है, अर्थात् वह दो तर्क लेता है। किंतु कोई λ-अमूर्त हमें केवल एक तर्क वाले फलन देता है: वाक्यविन्यास $\lambda(x, y).\, (x + y)$ जैसे व्यंजकों की अनुमति नहीं देता। फिर भी, हम $\lambda y.\, (x + y)$ द्वारा दिए एक-स्थानी फलन $f_x(y)$ पर विचार कर सकते हैं, जो अपने एकमात्र तर्क y में x जोड़ता है। वास्तव में, यह एक अकेला फलन नहीं बल्कि अलग-अलग "x जोड़ो" फलनों का परिवार है—प्रत्येक संख्या x के लिए एक। अब हम दूसरा एक-स्थानी फलन g, $\lambda x.\, f_x$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। तर्क x पर लागू करने पर $g(x)$ फलन f_x लौटाता है—अर्थात् उसके मान स्वयं अन्य फलन हैं। अब यदि हम g को x पर और फिर परिणाम को y पर लागू करें, तो मिलता है: $(g(x))y = f_x(y) = x + y$। इस प्रकार एक-स्थानी फलन g, दो-स्थानी योग-फलन का ही काम कर सकता है। "करीकरण" इसी युक्ति का नाम है, जो दो-स्थानी फलनों को ऐसे एक-स्थानी फलनों में बदलती है जिनके मान स्वयं एक-स्थानी फलन होते हैं।

अब λ-कलन के वाक्यविन्यास में ठीक से लिखा उदाहरण देखें। फलन $f(x, y) = x$ को हम कैसे निरूपित करें? यदि हम ऐसा फलन परिभाषित करना चाहें जो दो तर्क स्वीकार करके पहला लौटाए, तो $\lambda x.\, \lambda y.\, x$ लिख सकते हैं। अक्षरशः यह ऐसा फलन है जो तर्क x स्वीकार करके फलन $\lambda y.\, x$ लौटाता है। फलन $\lambda y.\, x$ दूसरा तर्क y स्वीकार तो करता है, पर उसे छोड़ देता है और सदा x लौटाता है। देखें कि $\lambda x.\, \lambda y.\, x$ को दो तर्कों पर लागू करने से क्या होता है:

$$\begin{aligned}(\lambda x.\, \lambda y.\, x)MN &\xrightarrow{\beta} (\lambda y.\, M)N \\ &\xrightarrow{\beta} M\end{aligned}$$

सामान्यतः, किसी पद N द्वारा परिभाषित प्राचलों x_1, ..., x_n वाला फलन लिखने के लिए हम

$\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, N$ लिख सकते हैं। उस पर n तर्क लागू करने से मिलता है:

$$
\begin{aligned}
(\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, N) M_1 \ldots M_n \xrightarrow{\beta} & \\
& \xrightarrow{\beta} ((\lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, N)[M_1/x_1]) M_2 \ldots M_n \\
& \equiv (\lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, N[M_1/x_1]) M_2 \ldots M_n \\
& \quad \vdots \\
& \xrightarrow{\beta} P[M_1/x_1] \ldots [M_n/x_n]
\end{aligned}
$$

अंतिम पंक्ति का अक्षरशः अर्थ है फलन-परिभाषा के मुख्य भाग में x_i के स्थान पर M_i प्रतिस्थापित करना; किसी फलन पर अनेक तर्क लागू करते समय हम ठीक यही चाहते हैं।

41.6 लैम्ब्डा-परिभाष्य अंकगणितीय फलन

लैम्ब्डा कलन संगणन के मॉडल का काम कैसे कर सकता है? आरंभ में तो यह भी स्पष्ट नहीं कि इस कथन का अर्थ कैसे समझें। प्राकृतिक संख्याओं पर संगणनीयता की बात करने के लिए हमें उन संख्याओं का उपयुक्त निरूपण खोजना होगा। यह एक ऐसा निरूपण है जो आश्चर्यजनक रूप से अच्छा काम करता है।

परिभाषा 41.3. प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए *चर्च अंक* $\overline{n}$ को लैम्ब्डा पद $\lambda x.\, \lambda y.\, (x(x(x(\ldots x(y)))))$ परिभाषित करें, जहाँ कुल n बार x आता है।

पद $\overline{n}$ "पुनरावर्तक" हैं: निवेश f पर $\overline{n}$ वह फलन लौटाता है जो y को $f^n(y)$ पर प्रतिचित्रित करता है। ध्यान दें कि प्रत्येक अंक प्रसामान्य है। अब हम बता सकते हैं कि किसी लैम्ब्डा पद द्वारा प्राकृतिक संख्याओं पर कोई फलन "संगणित करने" का क्या अर्थ है।

परिभाषा 41.4. $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$, $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N}$ में कोई n-स्थानी आंशिक फलन हो। हम कहते हैं कि λ-पद F, f को *लैम्ब्डा-परिभाषित* करता है, तभी और केवल तभी जब प्राकृतिक संख्याओं के प्रत्येक अनुक्रम n_0, ..., n_{k-1} के लिए,

$$F\, \overline{n_0}\, \overline{n_1} \ldots \overline{n_{k-1}} \twoheadrightarrow \overline{f(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})}$$

यदि $f(n_0, \ldots, n_{k-1})$ परिभाषित है; और अन्यथा $F, \overline{n_0}\, \overline{n_1} \ldots \overline{n_{k-1}}$ का कोई प्रसामान्य रूप न हो।

प्रमेय 41.5. *कोई फलन f आंशिक संगणनीय फलन तभी और केवल तभी है जब वह किसी लैम्ब्डा पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित हो।*

यह प्रमेय कुछ चकित करने वाला है। संगणन के मॉडल के रूप में लैम्ब्डा कलन अत्यंत सरल कलन है; इसमें केवल लैम्ब्डा अमूर्तन और अनुप्रयोग संक्रियाएँ हैं! फिर भी इन सीमित साधनों से किसी भी संगणनात्मक प्रक्रिया को कार्यान्वित करना संभव है।

41.7 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संगणनीय हैं

प्रमेय 41.6. *यदि कोई आंशिक फलन f किसी लैम्ब्डा पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है, तो वह संगणनीय है।*

प्रमाण. मान लें फलन f, किसी लैम्ब्डा पद X द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है। f को संगणित करने की एक अनौपचारिक प्रक्रिया बताएँ। निवेश m_0, ..., m_{n-1} पर पद $X\overline{m}_0 \ldots \overline{m}_{n-1}$ लिखें। एक वृक्ष बनाएँ: पहले मूल पद के सभी एक-चरणीय अपचयन लिखें; उनके नीचे उन सबके सभी एक-चरणीय अपचयन (अर्थात् मूल पद के दो-चरणीय अपचयन)

लिखें; और इसी प्रकार आगे बढ़ते रहें। यदि कभी किसी अंक तक पहुँचें, तो उत्तर के रूप में वही लौटाएँ; अन्यथा फलन अपरिभाषित है।

चर्च की प्रस्थापना का आह्वान हमें बताता है कि यह फलन संगणनीय है। प्रमेय को सिद्ध करने का बेहतर उपाय इस खोज-प्रक्रिया का पुनरावर्ती वर्णन देना होगा। उदाहरणार्थ, हम आदिम पुनरावर्ती फलनों और संबंधों का एक अनुक्रम परिभाषित कर सकते हैं: "IsASubterm," "Substitute," "ReducesToInOneStep," "ReductionSequence," "Numeral," आदि। तब $f(m_0, \ldots, m_{n-1})$ की संगणना की आंशिक पुनरावर्ती प्रक्रिया ऐसे एक-चरणीय अपचयनों के अनुक्रम की खोज करना है जो $X\overline{m_0}\ldots\overline{m_{n-1}}$ से आरंभ होकर किसी अंक पर समाप्त हो, और उस अंक के अनुरूप संख्या लौटाना है। विवरण लंबे और नीरस हैं, किंतु अन्यथा नियमित हैं। □

41.8 संगणनीय फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं

प्रमेय 41.7. *प्रत्येक संगणनीय आंशिक फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि प्रत्येक आंशिक संगणनीय फलन f, किसी लैम्ब्डा पद F द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है। क्लिनी के प्रसामान्य-रूप प्रमेय से यह दिखाना पर्याप्त है कि प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन किसी लैम्ब्डा पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है, और फिर यह कि लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन उपयुक्त संयोजनों और अपरिबद्ध खोज के अधीन संवृत हैं। प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन को किसी लैम्ब्डा पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित दिखाने के लिए यह दिखाना पर्याप्त है कि प्रारंभिक फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं और लैम्ब्डा-परिभाष्य आंशिक फलन संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और अपरिबद्ध खोज के अधीन संवृत हैं। □

शेष प्रमाण को अधिक पठनीय बनाने के लिए हम अधिक प्रचलित संकेत-लिपि उपयोग करेंगे। उदाहरणार्थ, $Mxyz$ के बदले $M(x, y, z)$ लिखेंगे। यद्यपि यह अर्थ-सूचक है, आपको याद रखना चाहिए कि टाइपरहित लैम्ब्डा कलन के पदों से कोई नियत स्थानिकता संबद्ध नहीं होती; इसलिए उसी पद M के लिए $M(x, y)$ और $M(x, y, z, w)$ लिखना भी उतना ही सार्थक है। किंतु यह संकेत-लिपि बताती है कि हम M को तीन चरों का फलन मान रहे हैं, और परिभाषाओं के पीछे का आशय अधिक स्पष्ट करती है। इसी प्रकार, "M को $M = \lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, \ldots$ द्वारा परिभाषित करें" के बदले हम कहेंगे, "M को $M(x, y, z) = \ldots$ द्वारा परिभाषित करें।"

41.9 मूल आदिम पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं

सहायक प्रमेय 41.8. *फलन* zero, succ *और* P_i^n *लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं।*

प्रमाण. zero केवल $\lambda x.\, \lambda y.\, y$ है।

उत्तरवर्ती फलन succ को $\mathrm{Succ}(u) = \lambda x.\, \lambda y.\, x(uxy)$ द्वारा परिभाषित करते हैं। आपको विचार करना चाहिए कि यह क्यों काम करता है; पुनरावर्तक माने गए प्रत्येक अंक $\overline{n}$ और प्रत्येक फलन f के लिए $\mathrm{Succ}(\overline{n}, f)$ ऐसा फलन है जो निवेश y पर y से आरंभ करके f को n बार लागू करता है, और फिर एक बार और लागू करता है।

प्रक्षेपों के विषय में कुछ कहने को नहीं है: $\mathrm{Proj}_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$। दूसरे शब्दों में, हमारे नियमों के अनुसार Proj_i^n लैम्ब्डा पद $\lambda x_0.\, \ldots \lambda x_{n-1}.\, x_i$ है। □

41.10 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संयोजन के अधीन संवृत हैं

सहायक प्रमेय 41.9. *लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संयोजन के अधीन संवृत हैं।*

प्रमाण. मान लें f को h, g_0, ..., g_{k-1} से संयोजन द्वारा परिभाषित किया गया है। यदि h, g_0, ..., g_{k-1} क्रमशः H, G_0, ..., G_{k-1} द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित हैं, तो हमें ऐसा पद F खोजना है जो f को लैम्ब्डा-परिभाषित करे। किंतु हम F को सीधे इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$F(x_0, \ldots, x_{l-1}) = H(G_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, G_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

दूसरे शब्दों में, लैम्ब्डा कलन की भाषा संयोजन को निरूपित करने के लिए अत्यंत उपयुक्त है। □

41.11 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत हैं

आदिम पुनरावर्तन के लिए अंततः हमें कुछ काम करना पड़ेगा। हमें चरणों में आगे बढ़ना होगा। पहले की तरह मान लें कि हमारे पास पहले से ऐसे पद G और H हैं जो क्रमशः फलनों g और h को लैम्ब्डा-परिभाषित करते हैं; हम ऐसा पद H चाहते हैं जो निम्न प्रकार परिभाषित फलन f को लैम्ब्डा-परिभाषित करे:

$$f(0, \vec{z}) = g(\vec{z})$$
$$f(x+1, \vec{z}) = h(z, f(x, \vec{z}), \vec{z}).$$

अतः सामान्यतः, लैम्ब्डा पद G' और H' दिए होने पर ऐसा पद F खोजना पर्याप्त है कि

$$F(\overline{0}, \vec{z}) \equiv G(\vec{z})$$
$$F(\overline{n+1}, \vec{z}) \equiv H(\overline{n}, F(\overline{n}, \vec{z}), \vec{z})$$

प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए; G' और H' द्वारा g और h को लैम्ब्डा-परिभाषित करने का अर्थ है कि जब भी हम $\vec{z}$ के स्थान पर अंक $\overline{\vec{m}}$ रखें, तो $F(\overline{n+1}, \overline{\vec{m}})$ प्रसामान्य होकर सही उत्तर बनेगा।

किंतु इसके लिए ऐसा पद F खोजना पर्याप्त है जो

$$F(\overline{0}) \equiv G$$
$$F(\overline{n+1}) \equiv H(\overline{n}, F(\overline{n}))$$

प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए संतुष्ट करे, जहाँ

$$G = \lambda \vec{z}.\, G'(\vec{z}) \text{ और}$$
$$H(u, v) = \lambda \vec{z}.\, H'(u, v(u, \vec{z}), \vec{z}).$$

दूसरे शब्दों में, लैम्ब्डा की इस युक्ति से हम अतिरिक्त प्राचलों $\vec{z}$ की चिंता से बच सकते हैं—वे लैम्ब्डा संकेत-लिपि में समाहित हो जाते हैं।

पद F को परिभाषित करने से पहले हमें क्रमित युग्मों को सँभालने की कोई विधि चाहिए। अगला लेम्मा यही देता है।

सहायक प्रमेय 41.10. *कोई ऐसा लैम्ब्डा पद D है कि लैम्ब्डा पदों M और N के प्रत्येक युग्म के लिए $D(M, N)(\overline{0}) \twoheadrightarrow M$ और $D(M, N)(\overline{1}) \twoheadrightarrow N$।*

प्रमाण. पहले लैम्ब्डा पद K को इस प्रकार परिभाषित करें:

$$K(y) = \lambda x.\, y.$$

दूसरे शब्दों में, K पद $\lambda y.\, \lambda x.\, y$ है। दूसरे ढंग से देखें तो प्रत्येक M के लिए $K(M)$ ऐसा अचर फलन है जो किसी भी निवेश पर M लौटाता है।

अब $D(x, y, z)$ को $D(x, y, z) = z(K(y))x$ द्वारा परिभाषित करें। तब

$$D(M, N, \overline{0}) \twoheadrightarrow \overline{0}(K(N))M \twoheadrightarrow M \text{ और}$$
$$D(M, N, \overline{1}) \twoheadrightarrow \overline{1}(K(N))M \twoheadrightarrow K(N)M \twoheadrightarrow N,$$

जैसा अपेक्षित था। □

विचार यह है कि $D(M, N)$ युग्म $\langle M, N\rangle$ को निरूपित करता है; और यदि P को ऐसा युग्म निरूपित करने वाला माना जाए, तो $P(\overline{0})$ और $P(\overline{1})$ बाएँ और दाएँ प्रक्षेपों $(P)_0$ और $(P)_1$ को निरूपित करते हैं। हम बाद वाली संकेत-लिपि उपयोग करेंगे।

सहायक प्रमेय 41.11. *लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत हैं।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि कोई भी पद G और H दिए होने पर हम ऐसा पद F खोज सकते हैं कि

$$F(\overline{0}) \equiv G$$
$$F(\overline{n+1}) \equiv H(\overline{n}, F(\overline{n}))$$

प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए। मोटे तौर पर विचार यह है कि अंकों को पुनरावर्तक बनाकर *युग्मों* के अनुक्रम

$$\langle \overline{0}, F(\overline{0})\rangle, \langle \overline{1}, F(\overline{1})\rangle, \ldots,$$

की संगणना की जाए। ध्यान दें कि पहला युग्म केवल $\langle \overline{0}, G\rangle$ है। युग्म $\langle \overline{n}, F(\overline{n})\rangle$ दिए होने पर अगला युग्म $\langle \overline{n+1}, F(\overline{n+1})\rangle$, $\langle \overline{n+1}, H(\overline{n}, F(\overline{n}))\rangle$ के तुल्य होना चाहिए। हम ऐसा लैम्ब्डा पद T बनाएँगे जो यह एक-चरणीय संक्रमण करता है।

विवरण इस प्रकार है। $T(u)$ को परिभाषित करें:

$$T(u) = \langle S((u)_0), H((u)_0, (u)_1)\rangle.$$

अब किसी भी संख्या n के लिए यह जाँचना सरल है कि

$$T(\langle \overline{n}, M\rangle) \twoheadrightarrow \langle \overline{n+1}, H(\overline{n}, M)\rangle.$$

ऊपर दिए संकेत के अनुसार, G और H दिए होने पर $F(u)$ को परिभाषित करें:

$$F(u) = (u(T, \langle \overline{0}, G\rangle))_1.$$

दूसरे शब्दों में, निवेश $\overline{n}$ पर F, $\langle \overline{0}, G\rangle$ पर T को n बार पुनरावर्तित करता है और फिर दूसरा घटक लौटाता है। आरंभ में हमारे पास है:

1. $\overline{0}(T, \langle \overline{0}, G\rangle) \equiv \langle \overline{0}, G\rangle$
2. $F(\overline{0}) \equiv G$

n पर आगमन द्वारा हम दिखा सकते हैं कि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या के लिए निम्न बातें लागू होती हैं:

1. $\overline{n+1}(T, \langle \overline{0}, G\rangle) \equiv \langle \overline{n+1}, F(\overline{n+1})\rangle$
2. $F(\overline{n+1}) \equiv H(\overline{n}, F(\overline{n}))$

दूसरे खंड के लिए,

$$\begin{aligned} F(\overline{n+1}) &\twoheadrightarrow (\overline{n+1}(T, \langle \overline{0}, G\rangle))_1 \\ &\equiv (T(\overline{n}(T, \langle \overline{0}, G\rangle)))_1 \\ &\equiv (T(\langle \overline{n}, F(\overline{n})\rangle))_1 \\ &\equiv (\langle \overline{n+1}, H(\overline{n}, F(\overline{n}))\rangle)_1 \\ &\equiv H(\overline{n}, F(\overline{n})). \end{aligned}$$

यहाँ अंतिम से पहले वाली पंक्ति में हमने आगमन-परिकल्पना का उपयोग किया है। पहले खंड के लिए,

$$\begin{aligned} \overline{n+1}(T, \langle \overline{0}, G\rangle) &\equiv T(\overline{n}(T, \langle \overline{0}, G\rangle)) \\ &\equiv T(\langle \overline{n}, F(\overline{n})\rangle) \\ &\equiv \langle \overline{n+1}, H(\overline{n}, F(\overline{n}))\rangle \\ &\equiv \langle \overline{n+1}, F(\overline{n+1})\rangle. \end{aligned}$$

यहाँ अंतिम पंक्ति में हमने दूसरे खंड का उपयोग किया है। इस प्रकार हमने $F(\overline{0}) \equiv G$ और प्रत्येक n के लिए $F(\overline{n+1}) \equiv H(\overline{n}, F(\overline{n}))$ दिखा दिया, और हमें ठीक यही चाहिए था। $\square$

41.12 अचल-बिंदु संयोजक

मान लें आपके पास कोई लैम्ब्डा पद g है और आप ऐसा दूसरा पद k चाहते हैं जिसमें k, gk के β-तुल्य हो। हमारे संकेत-लिपि नियमों का उपयोग करते हुए पद

$$\mathrm{diag}(x) = xx$$

और

$$l(x) = g(\mathrm{diag}(x))$$

परिभाषित करें; दूसरे शब्दों में, l पद $\lambda x.\, g(xx)$ है। k पद ll हो। तब

$$\begin{aligned} k &= (\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx)) \\ &\twoheadrightarrow g((\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx))) \\ &= gk. \end{aligned}$$

यदि हम

$$Y = \lambda g.\, ((\lambda x.\, g(xx))(\lambda x.\, g(xx)))$$

लें, तो Yg और $g(Yg)$ अपचयित होकर किसी समान पद में पहुँचते हैं; अतः $Yg \equiv_\beta g(Yg)$। इसे "करी का संयोजक" कहते हैं। यदि इसके बदले हम

$$Y = (\lambda xg.\, g(xxg))(\lambda xg.\, g(xxg))$$

लें, तो वास्तव में Yg अपचयित होकर $g(Yg)$ बनता है, जो अधिक प्रबल कथन है। Y के इस दूसरे रूप को "ट्यूरिंग का संयोजक" कहते हैं।

41.13 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन न्यूनीकरण के अधीन संवृत हैं

सहायक प्रमेय 41.12. *मान लें $f(x, y)$ लैम्ब्डा-परिभाष्य है। g को इस प्रकार परिभाषित करें:*

$$g(x) \simeq \mu y\ f(x, y).$$

तब g लैम्ब्डा-परिभाष्य है।

प्रमाण. मोटे तौर पर विचार यह है। x दिए होने पर हम अचल-बिंदु लैम्ब्डा पद Y का उपयोग ऐसा फलन $h_x(n)$ परिभाषित करने के लिए करेंगे जो n से आरंभ करके किसी y को खोजता है; तब $g(x)$ केवल $h_x(0)$ है। फलन h_x को किसी अचल-बिंदु समीकरण के हल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$h_x(n) \simeq \begin{cases} n & \text{यदि } f(x, n) = 0 \\ h_x(n+1) & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अब विवरण देखें। चूँकि f आदिम पुनरावर्ती है, वह किसी पद F द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है। स्मरण करें कि हमारे पास ऐसा लैम्ब्डा पद D भी है कि $D(M, N, \overline{0}) \twoheadrightarrow M$ और $D(M, N, \overline{1}) \twoheadrightarrow N$। अभी x को नियत रखते हुए, h_x को लैम्ब्डा-परिभाषित करने के लिए हम x पर निर्भर ऐसा पद H खोजना चाहते हैं जो

$$H(\overline{n}) \equiv D(\overline{n}, H(S(\overline{n})), F(x, \overline{n})).$$

अचल-बिंदु पद Y का उपयोग करके हम ऐसा कर सकते हैं। पहले U यह पद हो:

$$\lambda h.\, \lambda z.\, D(z, (h(Sz)), F(x, z)),$$

और फिर H पद YU हो। ध्यान दें कि H में एकमात्र मुक्त चर x है। हम दिखाएँ कि H ऊपर के समीकरण को संतुष्ट करता है।

Y की परिभाषा से,

$$H = YU \equiv U(YU) = U(H).$$

विशेषतः, प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए,

$$\begin{aligned} H(\overline{n}) &\equiv U(H, \overline{n}) \\ &\twoheadrightarrow D(\overline{n}, H(S(\overline{n})), F(x, \overline{n})), \end{aligned}$$

जैसा अपेक्षित था। ध्यान दें कि अंतिम पंक्ति में x के स्थान पर कोई अंक $\overline{m}$ प्रतिस्थापित करने पर, यदि $F(\overline{m}, \overline{n})$ अपचयित होकर $\overline{0}$ बनता है तो व्यंजक अपचयित होकर $\overline{n}$ बनता है; और यदि $F(\overline{m}, \overline{n})$ अपचयित होकर कोई अन्य अंक बनता है, तो वह अपचयित होकर $H(S(\overline{n}))$ बनता है।

प्रमाण पूरा करने के लिए $G,\ \lambda x.\, H(\overline{0})$ हो। तब $G,\ g$ को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है; दूसरे शब्दों में, प्रत्येक m के लिए यदि $g(m)$ परिभाषित है तो $G(\overline{m})$ अपचयित होकर $\overline{g(m)}$ बनता है, और अन्यथा उसका कोई प्रसामान्य रूप नहीं होता। □

अध्याय 42

वाक्यविन्यास

42.1 पद

लैम्ब्डा कलन के पद चरों v_0, v_1, ... के अनंत भंडार, चिह्न "λ" और कोष्ठकों से आगमनतः बनाए जाते हैं। चरों को दर्शाने के लिए हम x, y, z, ... और पदों को दर्शाने के लिए M, N, P, ... उपयोग करेंगे।

परिभाषा 42.1 (पद). लैम्ब्डा कलन के *पदों* का समुच्चय आगमनतः इस प्रकार परिभाषित होता है:

1. यदि x कोई चर है, तो x पद है।
2. यदि x कोई चर और M कोई पद है, तो $(\lambda x.\, M)$ पद है।
3. यदि M और N दोनों पद हैं, तो (MN) पद है।

यदि पद $(\lambda x.\, M)$ को (2) के अनुसार बनाया गया है, तो हम उसे किसी *अमूर्तन* का परिणाम कहते हैं और λx में x को *प्राचल* कहते हैं। (3) के अनुसार बनाया गया पद (MN) किसी *अनुप्रयोग* का परिणाम है।

ऊपर परिभाषित पदों में सभी कोष्ठक लिखे गए हैं। यह काफी बोझिल हो सकता है, जैसा पद $(\lambda x.\, ((\lambda x.\, x)(\lambda x.\, (xx))))$ दिखाता है। हम कोष्ठकों से बचने के कुछ नियम प्रस्तुत करेंगे। फिर भी, औपचारिक परिभाषा से यह निर्धारित करना सरल है कि परिभाषा 42.1 के अनुसार कोई पद कैसे बना है। उदाहरणार्थ, पद $(\lambda x.\, ((\lambda x.\, x)(\lambda x.\, (xx))))$ को बनाने का अंतिम चरण ऐसा अमूर्तन होना चाहिए जिसका प्राचल x है। यह पद $((\lambda x.\, x)(\lambda x.\, (xx)))$ से अमूर्तन द्वारा मिलता है, और वह दो पदों का अनुप्रयोग है। उन दोनों पदों में से प्रत्येक स्वयं किसी अमूर्तन का परिणाम है, और इसी प्रकार आगे।

42.2 अद्वितीय पठनीयता

हम पूछ सकते हैं कि क्या प्रत्येक पद को बनाने की विधि अद्वितीय है—और वह है। प्रत्येक लैम्ब्डा पद के निर्माण और निर्वचन की केवल एक विधि है। आगे की चर्चा में *निर्माण* से हमारा आशय परिभाषा 42.1 के निर्माण नियमों का एक या अनेक बार उपयोग करके कोई पद बनाने की प्रक्रिया से है।

सहायक प्रमेय 42.2. *कोई पद या तो किसी चर से आरंभ होता है या किसी कोष्ठक से।*

प्रमाण. कोई वस्तु पद तभी मानी जाती है जब उसका निर्माण परिभाषा 42.1 के अनुसार हुआ हो। यदि वह (1) का परिणाम है, तो उसे चर होना चाहिए। यदि वह (2) अथवा (3) का परिणाम है, तो वह कोष्ठक से आरंभ होती है। □

सहायक प्रमेय 42.3. *किसी अनुप्रयोग का परिणाम या तो दो कोष्ठकों से आरंभ होता है, या एक कोष्ठक और एक चर से।*

प्रमाण. यदि M किसी अनुप्रयोग का परिणाम है, तो वह (PQ) रूप का है और इसलिए कोष्ठक से आरंभ होता है। चूँकि P कोई पद है, इसलिए सहायक प्रमेय 42.2 से वह या तो कोष्ठक से अथवा चर से आरंभ होता है। □

सहायक प्रमेय 42.4. *किसी पद का कोई उचित आरंभिक भाग स्वयं पद नहीं होता।*

प्रतिज्ञप्ति 42.5 (अद्वितीय पठनीयता). *प्रत्येक पद का निर्माण अद्वितीय है। दूसरे शब्दों में, यदि पद M किसी निर्माण द्वारा बनाया गया है, तो वही एकमात्र निर्माण है जो इस पद को बना सकता है।*

प्रमाण. हम इसे पदों के निर्माण पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं।

1. M, x रूप का है, जहाँ x कोई चर है। चूँकि अमूर्तनों और अनुप्रयोगों के परिणाम सदा कोष्ठकों से आरंभ होते हैं, इसलिए M के निर्माण में उनका उपयोग नहीं हुआ हो सकता। अतः M का निर्माण परिभाषा 42.1(1) का एक ही चरण होना चाहिए।

2. M, $(\lambda x.\, N)$ रूप का है, जहाँ x कोई चर और N कोई पद है। उसका निर्माण परिभाषा 42.1(1) के अनुसार नहीं हुआ हो सकता, क्योंकि वह अकेला चर नहीं है। सहायक प्रमेय 42.3 से वह किसी अनुप्रयोग का परिणाम भी नहीं है। अतः M केवल N पर अमूर्तन का परिणाम हो सकता है। आगमन-परिकल्पना से हम जानते हैं कि N का निर्माण स्वयं अद्वितीय है।

3. M, (PQ) रूप का है, जहाँ P और Q पद हैं। चूँकि वह कोष्ठक से आरंभ होता है, इसलिए उसका निर्माण परिभाषा 42.1(1) द्वारा भी नहीं हो सकता। सहायक प्रमेय 42.2 से P, λ से आरंभ नहीं हो सकता, अतः (PQ) किसी अमूर्तन का परिणाम नहीं हो सकता। अब मान लें कि अनुप्रयोग द्वारा M बनाने की कोई दूसरी विधि भी होती, जैसे वह $(P'Q')$ रूप का भी होता। तब P, P' का उचित आरंभिक खंड होता (या उलटा), जो सहायक प्रमेय 42.4 से असंभव है। अतः P और Q अद्वितीय रूप से निर्धारित हैं, और आगमन-परिकल्पना से हम जानते हैं कि उनके निर्माण भी अद्वितीय हैं। □

ऊपर के साध्य का अधिक पठनीय पुनर्कथन इस प्रकार है:

प्रतिज्ञप्ति 42.6. *पद M केवल निम्न रूपों में से किसी एक का हो सकता है:*

1. *x, जहाँ x ऐसा चर है जो M से अद्वितीय रूप से निर्धारित है।*

2. *$(\lambda x.\, N)$, जहाँ x कोई चर और N कोई दूसरा पद है; दोनों M से अद्वितीय रूप से निर्धारित हैं।*

3. *(PQ), जहाँ P और Q ऐसे दो पद हैं जो M से अद्वितीय रूप से निर्धारित हैं।*

42.3 संक्षिप्त वाक्यविन्यास

परिभाषा 42.1 में परिभाषित पद कभी-कभी लिखने में बोझिल होते हैं, इसलिए अधिक संक्षिप्त वाक्यविन्यास प्रस्तुत करना उपयोगी है। निश्चय ही हमें यह सुनिश्चित करने में सावधानी रखनी होगी कि संक्षिप्त संकेत-लिपि के पद भी अद्वितीय रूप से पठनीय हों। व्यापक रूप से उपयोग होने वाला एक रूप, जिसे *संक्षिप्त पद* कहते हैं, इस प्रकार है।

1. जब कोष्ठक छोड़ दिए जाएँ, तब अनुप्रयोग बाएँ से दाएँ होता है। उदाहरणार्थ, यदि M, N, P और Q पद हैं, तो $MNPQ$, $(((MN)P)Q)$ का संक्षिप्त रूप है।

2. फिर, जब कोष्ठक छोड़ दिए जाएँ, तब लैम्ब्डा अमूर्तन को संभव अधिकतम व्याप्ति दी जाती है। उदाहरणार्थ, $\lambda x.\, MNP$ को $(\lambda x.\, MNP)$ पढ़ते हैं।

3. एक लैम्ब्डा से अनेक चरों का अमूर्तन किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, $\lambda xyz.\, M$, $\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, M$ का संक्षिप्त रूप है।

उदाहरणार्थ,

$$\lambda xy.\, xxyx\lambda z.\, xz$$

इसका संक्षिप्त रूप है:

$$(\lambda x.\, (\lambda y.\, ((((xx)y)x)(\lambda z.\, (xz))))).$$

42.4 मुक्त चर

लैम्ब्डा कलन फलनों के विषय में है, और लैम्ब्डा अमूर्तन से ही फलन उत्पन्न होते हैं। सहज रूप से, $\lambda x.\, M$ वह फलन है जिसके मान M द्वारा तब दिए जाते हैं जब फलन का तर्क x को नियत किया जाए। किंतु M में x का प्रत्येक आविर्भाव प्रासंगिक नहीं है: यदि M में कोई दूसरा अमूर्त $\lambda x.\, N$ हो, तो N में x के आविर्भाव $\lambda x.\, N$ के लिए प्रासंगिक हैं, $\lambda x.\, M$ के लिए नहीं। अतः $\lambda x.\, M$ के भीतर का लैम्ब्डा अमूर्त $\lambda x,\ M$ में x के उन आविर्भावों को *बाँधता* है जो पहले से किसी अन्य लैम्ब्डा अमूर्त द्वारा आबद्ध नहीं हैं—अर्थात् M में x के *मुक्त* आविर्भावों को।

परिभाषा 42.7 (व्याप्ति). यदि $\lambda x.\, M$ किसी पद N के भीतर आता है, तो उस आविर्भाव के भीतर का M, उस λx की *व्याप्ति* है।

परिभाषा 42.8 (मुक्त और आबद्ध आविर्भाव). किसी पद M में चर x का कोई आविर्भाव *मुक्त* है यदि वह किसी λx की व्याप्ति में नहीं है; अन्यथा वह *आबद्ध* है। $\lambda x.\, M$ में चर x का कोई आविर्भाव आरंभिक λx द्वारा तभी और केवल तभी आबद्ध है जब M में x का वह आविर्भाव मुक्त हो।

उदाहरण 42.9. $\lambda x.\, xy$ में x और y दोनों λx की व्याप्ति में हैं, इसलिए $x,\ \lambda x$ द्वारा आबद्ध है। चूँकि y किसी λy की व्याप्ति में नहीं है, इसलिए वह मुक्त है। $\lambda x.\, xx$ में x के दोनों आविर्भाव λx द्वारा आबद्ध हैं, क्योंकि xx में दोनों मुक्त हैं। $((\lambda x.\, xx)x)$ में x का अंतिम आविर्भाव मुक्त है, क्योंकि वह किसी λx की व्याप्ति में नहीं है। $\lambda x.\, (\lambda x.\, x)x$ में पहले λx की व्याप्ति $(\lambda x.\, x)x$ है और दूसरे λx की व्याप्ति x का अंतिम से पहले वाला आविर्भाव है। $(\lambda x.\, x)x$ में x का अंतिम आविर्भाव मुक्त और अंतिम से पहले वाला आबद्ध है। अतः $\lambda x.\, (\lambda x.\, x)x$ में x का अंतिम से पहले वाला आविर्भाव दूसरे λx द्वारा और अंतिम आविर्भाव पहले λx द्वारा आबद्ध है।

किसी पद P में चरों के सभी आविर्भाव जाँचकर हम मुक्त चरों का समुच्चय पा सकते हैं। इस समुच्चय को $\mathrm{FV}(P)$ से दर्शाते हैं; उसकी स्वाभाविक परिभाषा इस प्रकार है:

परिभाषा 42.10 (किसी पद के मुक्त चर). किसी पद के *मुक्त चरों* का समुच्चय आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\mathrm{FV}(x) = \{x\}$
2. $\mathrm{FV}(\lambda x.\, N) = \mathrm{FV}(N) \setminus \{x\}$
3. $\mathrm{FV}(PQ) = \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q)$

कोई मुक्त चर बाहरी संसार (*परिवेश*) के संदर्भ जैसा है, और मुक्त चर वाले पद को आंशिक रूप से विनिर्दिष्ट पद माना जा सकता है, क्योंकि उसका व्यवहार इस पर निर्भर है कि हम परिवेश कैसे बनाते हैं। उदाहरणार्थ, पद $\lambda x.\, fx$ में चर f मुक्त है; यह पद तर्क x स्वीकार करके उस तर्क पर f का मान लौटाता है। इस पद का मान उस परिवेश पर निर्भर है जिसमें वह है, विशेषतः उस परिवेश में f के मान पर।

यदि हम इस पद पर अमूर्तन लागू करें, तो $\lambda f.\, \lambda x.\, fx$ मिलता है। अब यह पद परिवेश-चर f पर निर्भर नहीं है, क्योंकि अब यह ऐसे फलन को दर्शाता है जो दो तर्क स्वीकार करता और पहले को दूसरे पर लागू करने का परिणाम लौटाता है। परिवेश में f को बदलने से इस पद के व्यवहार पर कोई प्रभाव नहीं होगा, क्योंकि पद केवल तर्क के रूप में दी गई वस्तु का उपयोग करेगा, परिवेश में f के मान का नहीं।

परिभाषा 42.11 (संवृत पद, संयोजक). जिस पद में कोई मुक्त चर न हो उसे *संवृत पद*, अथवा *संयोजक*, कहते हैं।

सहायक प्रमेय 42.12. *1. यदि $y \neq x$, तो $y \in \mathrm{FV}(\lambda x.\, N)$ तभी और केवल तभी जब $y \in \mathrm{FV}(N)$।*

2. $y \in \mathrm{FV}(PQ)$ तभी और केवल तभी जब $y \in \mathrm{FV}(P)$ अथवा $y \in \mathrm{FV}(Q)$।

प्रमाण. अभ्यास। □

42.5 प्रतिस्थापन

मुक्त चर परिवेश-चरों के संदर्भ हैं, इसलिए किसी मुक्त चर के स्थान पर कोई विशिष्ट मान सचमुच रखना सार्थक है। उदाहरणार्थ, हम $\lambda x.\, fx$ में f को तादात्म्य फलन $\lambda y.\, y$ जैसे किसी विशिष्ट पद से बदलना चाह सकते हैं। इससे $\lambda x.\, (\lambda y.\, y)x$ मिलता है। मुक्त चरों को लैम्ब्डा पदों से बदलने की प्रक्रिया को प्रतिस्थापन कहते हैं।

परिभाषा 42.13 (प्रतिस्थापन). किसी पद M में चर x के स्थान पर पद N का *प्रतिस्थापन*, $M[N/x]$, आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. $x[N/x] = N$.
2. $y[N/x] = y$, यदि $x \neq y$।
3. $PQ[N/x] = (P[N/x])(Q[N/x])$.
4. $(\lambda y.\, P)[N/x] = \lambda y.\, P[N/x]$, यदि $x \neq y$ और $y \notin \mathrm{FV}(N)$; अन्यथा अपरिभाषित।

परिभाषा 42.13(4) में हम $x \neq y$ की माँग करते हैं, क्योंकि हम M में चर x के *आबद्ध* आविर्भावों को N से नहीं बदलना चाहते। उदाहरणार्थ, यदि हम प्रतिस्थापन $\lambda x.\, x[y/x]$ की संगणना करें, तो परिणाम $\lambda x.\, y$ नहीं बल्कि केवल $\lambda x.\, x$ होना चाहिए।

$\lambda y.\, P$ में x के स्थान पर N प्रतिस्थापित करते समय हम यह भी माँग करते हैं कि $y \notin \mathrm{FV}(N)$। उदाहरणार्थ, हम $\lambda y.\, x$ में x के स्थान पर y, अर्थात् $\lambda y.\, x[y/x]$, प्रतिस्थापित नहीं कर सकते, क्योंकि इससे $\lambda y.\, y$ मिलेगा—ऐसा पद जो किसी तर्क को स्वीकार करके सीधे वही लौटाने वाले फलन को दर्शाता है। किंतु पद $\lambda y.\, x$ ऐसे फलन को दर्शाता है जो सदा पद x (अथवा वह वस्तु जिसे x संदर्भित करता है) लौटाता है। अतः हमें वास्तव में ऐसा फलन चाहिए जो कोई तर्क स्वीकार करके उसे छोड़ दे और परिवेश-चर y लौटाए। इसे ठीक से करने के लिए पहले हमें आबद्ध चर y का "पुनर्नामकरण" करना होगा।

प्रमेय 42.14. *यदि $x \notin \mathrm{FV}(M)$, तो $\mathrm{FV}(M[N/x]) = \mathrm{FV}(M)$, बशर्ते बायाँ पक्ष परिभाषित हो।*

प्रमाण. M के निर्माण पर आगमन द्वारा।

1. M कोई चर है: अभ्यास।
2. M, (PQ) रूप का है: अभ्यास।
3. M, $\lambda y.\, P$ रूप का है; और चूँकि $\lambda y.\, P[N/x]$ परिभाषित है, इसलिए उसे $\lambda y.\, P[N/x]$ होना चाहिए। तब $P[N/x]$ भी परिभाषित होना चाहिए; साथ ही $x \neq y$ और $x \notin \mathrm{FV}(Q)$। तब:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(\lambda y.\, P[N/x]) = & \\
&= \mathrm{FV}(\lambda y.\, P[N/x]) && \text{(4) से} \\
&= \mathrm{FV}(P[N/x]) \setminus \{y\} && \text{परिभाषा 42.10(2) से} \\
&= \mathrm{FV}(P) \setminus \{y\} && \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
&= \mathrm{FV}(\lambda y.\, P) && \text{परिभाषा 42.10(2) से}
\end{aligned}
$$

□

प्रमेय 42.15. *यदि* $x \in \text{FV}(M))$, *तो* $\text{FV}(M[N/x]) = (\text{FV}(M) \setminus \{x\}) \cup \text{FV}(N)$, *बशर्ते बायाँ पक्ष परिभाषित हो।*

प्रमाण. M के निर्माण पर आगमन द्वारा।

1. M कोई चर है: अभ्यास।

2. M, PQ रूप का है: चूँकि $(PQ)[N/y]$ परिभाषित है, इसलिए उसे $(P[N/x])(Q[N/x])$ होना चाहिए और दोनों प्रतिस्थापन परिभाषित होने चाहिए। साथ ही, चूँकि $x \in \text{FV}(PQ)$, इसलिए या तो $x \in \text{FV}(P)$, या $x \in \text{FV}(Q)$, अथवा दोनों। शेष अभ्यास के लिए छोड़ा गया है।

3. M, $\lambda y.\, P$ रूप का है। चूँकि $\lambda y.\, P[N/x]$ परिभाषित है, इसलिए उसे $\lambda y.\, P[N/x]$ होना चाहिए, जहाँ $P[N/x]$ परिभाषित है, $x \neq y$ और $y \notin \text{FV}(N)$; साथ ही, चूँकि $y \in \text{FV}(\lambda x.\, P)$, इसलिए $y \in \text{FV}(P)$ भी। अब:

$$
\begin{aligned}
\text{FV}((\lambda y.\, P)[N/x]) = & \\
&= \text{FV}(\lambda y.\, P[N/x]) \\
&= \text{FV}(P[N/x]) \setminus \{y\} \\
&= ((\text{FV}(P) \setminus \{y\}) \cup (\text{FV}(N) \setminus \{x\}) && \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
&= (\text{FV}(P) \setminus \{x, y\}) \cup \text{FV}(N) && x \notin \text{FV}(N) \\
&= (\text{FV}(\lambda y.\, P) \setminus \{x\}) \cup \text{FV}(N)
\end{aligned}
$$

□

प्रमेय 42.16. *यदि दायाँ पक्ष परिभाषित है और* $x \notin \text{FV}(N)$, *तो* $x \notin \text{FV}(M[N/x])$ *।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रमेय 42.17. *यदि* $M[y/x]$ *परिभाषित है और* $y \notin \text{FV}(M)$, *तो* $M[y/x][x/y] = M$ *।*

प्रमाण. M के निर्माण पर आगमन द्वारा।

1. M कोई चर z है: अभ्यास।

2. M, (PQ) रूप का है। तब:

$$
\begin{aligned}
(PQ)[y/x][x/y] &= ((P[y/x])(Q[y/x]))[x/y] \\
&= (P[y/x][x/y])(Q[y/x][x/y]) \\
&= (PQ) \text{ आगमन-परिकल्पना से}
\end{aligned}
$$

3. M, $\lambda z.\, N$ रूप का है। चूँकि $\lambda z.\, N[y/x]$ परिभाषित है, इसलिए हम जानते हैं कि $z \neq y$। अतः:

$$
\begin{aligned}
(\lambda z.\, N)[y/x][x/y] & \\
&= (\lambda z.\, N[y/x])[x/y] \\
&= \lambda z.\, N[y/x][x/y] \\
&= \lambda z.\, N \text{ आगमन-परिकल्पना से}
\end{aligned}
$$

□

42.6 α-परिवर्तन

$\lambda x.\, x$ और $\lambda y.\, y$ के बीच क्या संबंध है? दोनों तादात्म्य फलन को निरूपित करते हैं। निश्चय ही, वाक्यविन्यास की दृष्टि से वे भिन्न पद हैं। वे केवल आबद्ध चर के नाम में भिन्न हैं, और एक दूसरे के आबद्ध चर का "पुनर्नामकरण" करने से मिलता है। इसे α-*परिवर्तन* कहते हैं।

परिभाषा 42.18 (आबद्ध चर का परिवर्तन, $\xrightarrow{\alpha}$). यदि किसी पद M में $\lambda x.\, N$ का कोई आविर्भाव है, $y \notin \mathrm{FV}(N)$, और $N[y/x]$ परिभाषित है, तो इस आविर्भाव को

$$\lambda y.\, N[y/x]$$

से बदलकर M' प्राप्त करने को *आबद्ध चर का परिवर्तन* कहते हैं, और इसे $M \xrightarrow{\alpha} M'$ लिखते हैं।

परिभाषा 42.19 (संबंध की संगतता). पदों पर कोई संबंध R *संगत* कहलाता है यदि वह निम्न शर्तें संतुष्ट करे:

1. यदि RNN', तो $R\lambda x.\, N\lambda x.\, N'$।
2. यदि RPP', तो $R(PQ)(P'Q)$।
3. यदि RQQ', तो $R(PQ)(PQ')$।

अतः परिभाषा को फिर से कहें:

परिभाषा 42.20 (आबद्ध चर का परिवर्तन, $\xrightarrow{\alpha}$). *आबद्ध चर का परिवर्तन* ($\xrightarrow{\alpha}$) पदों पर वह सबसे छोटा संगत संबंध है जो निम्न शर्त संतुष्ट करता है:

$$\lambda x.\, N \xrightarrow{\alpha} \lambda y.\, N[y/x] \qquad \text{यदि } x \neq y,\ y \notin \mathrm{FV}(N) \text{ और } N[y/x] \text{ परिभाषित है।}$$

यहाँ "सबसे छोटा" का अर्थ है कि संबंध में केवल वही युग्म हैं जिनकी संगतता और अतिरिक्त शर्त से आवश्यकता पड़ती है, और कोई नहीं। अतः इस संबंध को इस प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है:

परिभाषा 42.21 (आबद्ध चर का परिवर्तन, $\xrightarrow{\alpha}$). *आबद्ध चर का परिवर्तन* ($\xrightarrow{\alpha}$) आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. यदि $N \xrightarrow{\alpha} N'$, तो $\lambda x.\, N \xrightarrow{\alpha} \lambda x.\, N'$।
2. यदि $P \xrightarrow{\alpha} P'$, तो $(PQ) \xrightarrow{\alpha} (P'Q)$।
3. यदि $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$, तो $(PQ) \xrightarrow{\alpha} (PQ')$।
4. यदि $x \neq y$, $y \notin \mathrm{FV}(N)$ और $N[y/x]$ परिभाषित है, तो $\lambda x.\, N \xrightarrow{\alpha} \lambda y.\, N[y/x]$.

ये परिभाषाएँ तुल्य हैं, किंतु प्रमाण अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। अब से हम आगमनात्मक परिभाषा उपयोग करेंगे।

परिभाषा 42.22 (α-परिवर्तन, $\xrightarrow{\alpha}\!\!\!\!\rightarrow$). α-*परिवर्तन* ($\xrightarrow{\alpha}\!\!\!\!\rightarrow$) पदों पर वह सबसे छोटा परावर्ती और संक्रामक संबंध है जिसमें $\xrightarrow{\alpha}$ समाहित है।

ऊपर की तरह, "सबसे छोटा" का अर्थ है कि संबंध में केवल संक्रामकता और $\xrightarrow{\alpha}$ से आवश्यक युग्म हैं। इससे निम्न तुल्य परिभाषा मिलती है:

परिभाषा 42.23 (α-परिवर्तन, $\xrightarrow{\alpha}\!\!\!\!\rightarrow$). α-*परिवर्तन* ($\xrightarrow{\alpha}\!\!\!\!\rightarrow$) आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. यदि $P \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$ और $Q \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} R$, तो $P \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} R$।

2. यदि $P \overset{\alpha}{\to} Q$, तो $P \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$।

3. $P \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} P$.

उदाहरण 42.24. $\lambda x.\, fx$, α-परिवर्तित होकर $\lambda y.\, fy$ बनता है, और उलटा भी। अनौपचारिक रूप से, दोनों ऐसे फलन हैं जो कोई तर्क स्वीकार करके उस तर्क पर f का मान लौटाते हैं और परिवेश-चर f को संदर्भित करते हैं।

$\lambda x.\, fx$, α-परिवर्तित होकर $\lambda x.\, gx$ नहीं बनता। अनौपचारिक रूप से, वे क्रमशः परिवेश-चरों f और g को संदर्भित करते हैं, इसलिए वे भिन्न फलन हैं: जिन परिवेशों में f और g भिन्न हों उनमें उनका व्यवहार भी भिन्न होता है।

सहायक प्रमेय 42.25. *यदि $P \overset{\alpha}{\to} Q$, तो $\mathrm{FV}(P) = \mathrm{FV}(Q)$।*

प्रमाण. $P \overset{\alpha}{\to} Q$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

1. यदि अंतिम नियम (4) है, तो P, $\lambda x.\, N$ रूप का और Q, $\lambda y.\, N[y/x]$ रूप का है, जहाँ $x \neq y$, $y \notin \mathrm{FV}(N)$ और $N[y/x]$ परिभाषित है। हम इस आधार पर स्थितियाँ अलग करते हैं कि $x \in \mathrm{FV}(N)$ है या नहीं:

   a) यदि $x \in FV(N)$, तो:

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}(\lambda y.\, N[y/x]) &= \mathrm{FV}(N[y/x]) \setminus \{y\} \\ &= ((\mathrm{FV}(N) \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \setminus \{y\} && \text{प्रमेय 42.15 से} \\ &= \mathrm{FV}(N) \setminus \{x\} \\ &= \mathrm{FV}(\lambda x.\, N)\end{aligned}$$

   b) यदि $x \notin FV(N)$, तो:

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}(\lambda y.\, N[y/x]) &= FVN[y/x] \setminus \{y\} \\ &= \mathrm{FV}(N) \setminus \{x\} && \text{प्रमेय 42.14 से} \\ &= \mathrm{FV}(\lambda x.\, N).\end{aligned}$$

2. अन्य तीन स्थितियाँ अभ्यास के लिए छोड़ी गई हैं। □

सहायक प्रमेय 42.26. *यदि $P \overset{\alpha}{\to} Q$, तो $Q \overset{\alpha}{\to} P$।*

प्रमाण. $P \overset{\alpha}{\to} Q$ के व्युत्पत्ति पर आगमन।

1. यदि अंतिम नियम (4) है, तो P, $\lambda x.\, N$ रूप का और Q, $\lambda y.\, N[y/x]$ रूप का है, जहाँ $x \neq y$, $y \notin \mathrm{FV}(N)$ और $N[y/x]$ परिभाषित है। पहले, प्रमेय 42.16 से $y \notin \mathrm{FV}(N[y/x])$। प्रमेय 42.17 से $N[y/x][x/y]$ न केवल परिभाषित है, बल्कि N के बराबर भी है। तब (4) से $\lambda y.\, N[y/x] \overset{\alpha}{\to} \lambda x.\, N[y/x][x/y] = \lambda x.\, N$। □

प्रमेय 42.27. *α-परिवर्तन पदों पर तुल्यता-संबंध है, अर्थात् वह परावर्ती, सममित और संक्रामक है।*

प्रमाण. 1. प्रत्येक पद M के लिए आबद्ध चरों में *शून्य* परिवर्तन करके M को M में बदला जा सकता है।

2. यदि आबद्ध चरों में परिवर्तनों के किसी अनुक्रम द्वारा P, α-परिवर्तित होकर Q बनता है, तो सहायक प्रमेय 42.26 से उन परिवर्तनों को उलटे क्रम में प्रतिलोम करके Q से P प्राप्त कर सकते हैं।

3. यदि आबद्ध चरों में परिवर्तनों के किसी अनुक्रम द्वारा P, α-परिवर्तित होकर Q बनता है, और किसी दूसरे अनुक्रम द्वारा Q बदलकर R बनता है, तो पहले पहला और फिर दूसरा अनुक्रम लागू करके P को R में बदल सकते हैं। □

अब से हम कहेंगे कि M और N α-*तुल्य* हैं, $M \stackrel{\alpha}{=} N$, तभी और केवल तभी जब M, α-परिवर्तित होकर N बनता है (और जैसा अभी दिखाया, ऐसा तभी और केवल तभी है जब N, α-परिवर्तित होकर M बनता है)।

प्रमेय 42.28. *यदि $M \stackrel{\alpha}{=} N$, तो $\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(N)$।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 42.25 से तात्कालिक। □

सहायक प्रमेय 42.29. *यदि $R \stackrel{\alpha}{=} R'$ और $M[R/y]$ परिभाषित है, तो $M[R'/y]$ परिभाषित है और $M[R/y]$ के α-तुल्य है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

स्मरण करें कि खंड 42.5 में कुछ स्थितियों में प्रतिस्थापन अपरिभाषित है; फिर भी, पदों पर α-परिवर्तन का उपयोग करके हम आबद्ध चरों का पुनर्नामकरण कर सकते हैं और प्रतिस्थापन को सदा परिभाषित बना सकते हैं। यह परिणाम α-तुल्यता को सुरक्षित रखता है, जैसा अगला प्रमेय दिखाता है:

प्रमेय 42.30. *किन्हीं M, R और y के लिए कोई ऐसा M' है कि $M \stackrel{\alpha}{=} M'$ और $M'[R/y]$ परिभाषित है। इसके अतिरिक्त, यदि कोई दूसरा युग्म $M'' \stackrel{\alpha}{=} M$ और R'' ऐसा है कि $M''[R''/y]$ परिभाषित है और $R'' \stackrel{\alpha}{=} R$, तो $M'[R/y] \stackrel{\alpha}{=} M''[R''/y]$।*

प्रमाण. M के निर्माण पर आगमन द्वारा:

1. M कोई चर z है: अभ्यास।

2. मान लें M, $\lambda x.\, N$ रूप का है। x और y से भिन्न ऐसा चर z चुनें कि $z \notin \mathrm{FV}(N)$ और $z \notin \mathrm{FV}(R)$। आगमन-परिकल्पना से कोई ऐसा N' है कि $N' \stackrel{\alpha}{=} N$ और $N'[z/x]$ परिभाषित है। तब परिभाषा 42.21(1) से $\lambda x.\, N \stackrel{\alpha}{=} \lambda x.\, N'$ भी। अब परिभाषा 42.21(4) से $\lambda x.\, N' \stackrel{\alpha}{=} \lambda z.\, N'[z/x]$। हम ऐसा कर सकते हैं क्योंकि $z \neq x$, $z \notin FV(N')$ और $N'[z/x]$ परिभाषित है। अंततः $\lambda z.\, N'[z/x][R/y]$ परिभाषित है, क्योंकि $z \neq y$ और $z \notin FV(R)$।

   इसके अतिरिक्त, यदि इन्हीं शर्तों को संतुष्ट करने वाले कोई अन्य N'' और R'' हों, तो

$$
\begin{aligned}
(\lambda z.\, N''[z/x])[R''/y] = & \\
& = \lambda z.\, N''[z/x][R''/y] \\
& = \lambda z.\, N''[z/x][R/y] && \text{सहायक प्रमेय 42.29 से} \\
& = \lambda z.\, N'[z/x][R/y] && \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
& = (\lambda z.\, N'[z/x])[R/y]
\end{aligned}
$$

3. M, (PQ) रूप का है: अभ्यास। □

उपप्रमेय 42.31. *किन्हीं M, R और y के लिए M' और R' का कोई ऐसा युग्म है कि $M' \stackrel{\alpha}{=} M$, $R \stackrel{\alpha}{=} R'$ और $M'[R'/y]$ परिभाषित है। इसके अतिरिक्त, यदि कोई दूसरा युग्म $M'' \stackrel{\alpha}{=} M$ और R'' ऐसा है कि $M'[R'/y]$ परिभाषित है, तो $M'[R'/y] \stackrel{\alpha}{=} M''[R''/y]$।*

प्रमाण. प्रमेय 42.30 से तात्कालिक। □

42.7 डे ब्रुइन सूचकांक

α-तुल्यता अत्यंत स्वाभाविक है, क्योंकि α-तुल्य पदों का "अर्थ एक ही" होता है। वास्तव में, लैम्ब्डा पदों का ऐसा वाक्यविन्यास देना संभव है जो परस्पर α-परिवर्तनीय पदों में भेद न करे। सबसे प्रसिद्ध विधि चरों को उनके *डे ब्रुइन सूचकांक* से बदल देती है।

जब हम $\lambda x.\, M$ लिखते हैं, तब स्पष्ट रूप से कहते हैं कि x फलन का प्राचल है, ताकि M में इस प्राचल के संदर्भ के लिए x का उपयोग कर सकें। किंतु डे ब्रुइन सूचकांक में प्राचलों के नाम नहीं होते; फलन के मुख्य भाग में उनका संदर्भ ऐसी संख्या से दर्शाया जाता है जो संदर्भ और प्राचल के बीच अमूर्तन के स्तरों की संख्या बताती है। उदाहरणार्थ, $\lambda x.\, \lambda y.\, yx$ पर विचार करें: बाहरी अमूर्तन चर x को बाँधता है; भीतरी अमूर्तन चर y को बाँधता है; उपपद yx भीतरी अमूर्तन की व्याप्ति में है। y और उसके अमूर्त λy के बीच कोई अमूर्तन नहीं, पर x और उसके अमूर्त λx के बीच एक अमूर्तन है। अतः yx के लिए $0\,1$ और पूरे पद के लिए $\lambda.\, \lambda.\, 01$ लिखते हैं।

परिभाषा 42.32. डे ब्रुइन पद आगमनतः इस प्रकार परिभाषित हैं:

1. n, जहाँ n कोई भी प्राकृतिक संख्या है।
2. PQ, जहाँ P और Q दोनों डे ब्रुइन पद हैं।
3. $\lambda.\, N$, जहाँ N कोई डे ब्रुइन पद है।

साधारण लैम्ब्डा पदों से डे ब्रुइन-सूचकांकित पदों में रूपांतरण को औपचारिक रूप से इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

परिभाषा 42.33.

$$\begin{aligned} F_\Gamma(x) &= \Gamma(x) \\ F_\Gamma(PQ) &= F_\Gamma(P) F_\Gamma(Q) \\ F_\Gamma(\lambda x.\, N) &= \lambda.\, F_{x,\Gamma}(N) \end{aligned}$$

जहाँ Γ शून्य से सूचकांकित चरों की सूची है और $\Gamma(x),\ \Gamma$ में चर x का स्थान दर्शाता है। उदाहरणार्थ, यदि $\Gamma,\ x, y, z$ है, तो $\Gamma(x),\ 0$ और $\Gamma(z),\ 2$ है।

x, Γ उस सूची को दर्शाता है जो x को Γ के आरंभ में जोड़ने से मिलती है; मसलन, पिछले उदाहरण वाला Γ लेते हुए $w, \Gamma,\ w, x, y, z$ है।

किसी डे ब्रुइन पद से मानक लैम्ब्डा पद इस प्रकार पुनः प्राप्त किया जाता है:

परिभाषा 42.34.

$$\begin{aligned} G_\Gamma(n) &= \Gamma[n] \\ G_\Gamma(PQ) &= G_\Gamma(P) G_\Gamma(Q) \\ G_\Gamma(\lambda.\, N) &= \lambda x.\, G_{x,\Gamma}(N) \end{aligned}$$

जहाँ Γ फिर शून्य से सूचकांकित चरों की सूची है और $\Gamma[n]$ स्थान n पर स्थित चर को दर्शाता है। उदाहरणार्थ, यदि Γ, x, y, z है, तो $\Gamma[1],\ y$ है।

अंतिम समीकरण में चर x ऐसा कोई भी चर चुना जाता है जो Γ में न हो।

यहाँ हम कुछ परिणाम बिना प्रमाण के देते हैं:

प्रतिज्ञप्ति 42.35. *यदि $M \xrightarrow{\alpha} M'$ और Γ कोई ऐसी सूची है जिसमें $\mathrm{FV}(M)$ सम्मिलित है, तो $F_\Gamma(M) \equiv F_\Gamma(M')$।*

42.8 α-तुल्यता वर्गों के रूप में पद

अब से हम पदों पर α-तुल्यता तक विचार करेंगे। इसका अर्थ है कि जब हम कोई पद लिखते हैं, तब हमारा आशय उस α-तुल्यता वर्ग से होता है जिसमें वह पद है। उदाहरणार्थ, हम $\lambda a.\, \lambda b.\, ac$ को उसके α-तुल्य सभी पदों के समुच्चय के लिए लिखते हैं, जैसे $\lambda a.\, \lambda b.\, ac$, $\lambda b.\, \lambda a.\, bc$, आदि।

इसके अतिरिक्त, पिछले खंडों में N, Q जैसे अक्षर किसी पद को दर्शाते थे, पर अब से हम उनसे किसी वर्ग को दर्शाएँगे; आगे पदों के बजाय यही वर्ग हमारे अध्ययन की विषय-वस्तु होंगे। x, y जैसे अक्षर अब भी चर को दर्शाते हैं।

हम वर्ग M के किसी स्वेच्छ अवयव को दर्शाने के लिए संकेत-लिपि $\underline{M}$ भी अपनाते हैं; और एक से अधिक की आवश्यकता होने पर $\underline{M}_0$, $\underline{M}_1$, आदि लिखते हैं।

अपनी भाषा सरल रखने के लिए हम पदों वाली संकेत-लिपि फिर उपयोग करेंगे। वर्गों पर हमारी निम्न परिभाषा है:

परिभाषा 42.36.

1. $\lambda x.\, N$ उस वर्ग के रूप में परिभाषित है जिसमें $\lambda x.\, \underline{N}$ है।
2. PQ उस वर्ग के रूप में परिभाषित है जिसमें $\underline{P}\underline{Q}$ है।

यह देखना कठिन नहीं कि ये सुपरिभाषित हैं, क्योंकि α-परिवर्तन संगत है।

परिभाषा 42.37. किसी α-तुल्यता वर्ग M के *मुक्त चर*, अथवा $FV(M)$, को $FV(\underline{M})$ परिभाषित करते हैं।

यह सुपरिभाषित है, क्योंकि प्रमेय 42.28 में दिखाए अनुसार $FV(\underline{M}_0) = FV(\underline{M}_1)$।

वर्गों में प्रतिस्थापन के लिए भी हम वही संकेत-लिपि पुनः उपयोग करते हैं:

परिभाषा 42.38. M में y के स्थान पर R का *प्रतिस्थापन*, अथवा $M[R/y]$, ऐसा कोई भी $\underline{M}$ और $\underline{R}$ लेकर $\underline{M}_{\underline{R}/y}$ परिभाषित है जिसके लिए यह प्रतिस्थापन परिभाषित हो।

उपप्रमेय 42.31 में दिखाए अनुसार यह भी सुपरिभाषित है।

ध्यान दें कि यह परिभाषा हमारे तर्क को कितना सरल करती है। उदाहरणार्थ:

$$\lambda x.\, x[y/x] = \tag{42.1}$$
$$= \lambda z.\, z[y/x] \tag{42.2}$$
$$= \lambda z.\, z[y/x] \tag{42.3}$$
$$= \lambda z.\, z \tag{42.4}$$

यदि हम अब भी इसे पदों पर प्रतिस्थापन मानें, तो समीकरण (42.1) अपरिभाषित है; किंतु पहले बताए अनुसार अब हम इसे वर्गों पर प्रतिस्थापन मानते हैं। इसीलिए समीकरण (42.2) संभव है: हम $\lambda x.\, x$ को $\lambda z.\, z$ से बदल सकते हैं, क्योंकि वे एक ही वर्ग में हैं।

इसी कारण अब से हम मानेंगे कि हमारे चुने प्रतिनिधि प्रतिस्थापन के लिए आवश्यक शर्तों को सदा संतुष्ट करते हैं। उदाहरणार्थ, जब हमें $\lambda x.\, N[R/y]$ दिखेगा, तब हम मानेंगे कि प्रतिनिधि $\lambda x.\, N$ ऐसा चुना गया है कि $x \neq y$ और $x \notin FV(R)$।

चूँकि $\lambda x.\, x$ को "वर्ग" कहना कुछ विचित्र है, इसलिए अब से इन्हें Λ-पद (अथवा इस भाग के शेष अंश में केवल "पद") कहें, ताकि इन्हें हमारे परिचित λ-पदों से अलग किया जा सके।

> अभी हम पदों को पूरी तरह विदा नहीं कर सकते: Λ-पदों की पूरी परिभाषा λ-पदों पर आधारित है, और हमने Λ-पदों पर फलन परिभाषित करने की कोई विधि नहीं दी है। इसका अर्थ है कि ऐसे सभी फलन पहले λ-पदों पर परिभाषित करने और फिर Λ-पदों पर "प्रक्षेपित" करने होंगे, जैसा हमने प्रतिस्थापन के लिए किया था। फिर भी हम मानते हैं कि पाठक सहज रूप से समझ सकता है कि Λ-पदों पर फलन कैसे परिभाषित किए जा सकते हैं।

42.9 β-अपचयन

$(\lambda m.\,(\lambda y.\,y)m)$ को देखकर यह अनुमान स्वाभाविक है कि उसका $\lambda m.\,m$ से कोई संबंध है; अर्थात् दूसरा पद पहले को "सरल करने" का परिणाम होना चाहिए। β-*अपचयन* की धारणा इस अंतर्बोध को सटीक रूप देती है।

परिभाषा 42.39 (β-संकुचन, $\xrightarrow{\beta}$). β-*संकुचन* ($\xrightarrow{\beta}$) पदों पर वह सबसे छोटा संगत संबंध है जो निम्न शर्त संतुष्ट करता है:

$$(\lambda x.\,N)Q \xrightarrow{\beta} N[Q/x]$$

यदि $P \xrightarrow{\beta} Q$, तो हम कहते हैं कि P β-*संकुचित होकर* Q बनता है। $(\lambda x.\,N)Q$ रूप के पद को *रिडेक्स* कहते हैं।

परिभाषा 42.40 (β-अपचयन, $\xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow$). β-*अपचयन* ($\xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow$) पदों पर वह सबसे छोटा परावर्ती, संक्रामक संबंध है जिसमें $\xrightarrow{\beta}$ समाहित है। यदि $P \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow Q$, तो हम कहते हैं कि P, β-अपचयित होकर Q बनता है।

प्रसंग स्पष्ट होने पर हम $\xrightarrow{\beta}$ के बदले $\rightarrow$ और $\xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow$ के बदले $\twoheadrightarrow$ लिखेंगे।

अनौपचारिक रूप से, $M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow N$ तभी और केवल तभी जब β-संकुचन के शून्य या अनेक चरणों द्वारा M को N में बदला जा सके।

परिभाषा 42.41 (β-प्रसामान्य). जिस पद को आगे β-संकुचित न किया जा सके वह β-*प्रसामान्य* कहलाता है।

यदि $M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow N$ और N β-प्रसामान्य है, तो हम N को M का *प्रसामान्य रूप* कहते हैं। पूछा जा सकता है कि क्या किसी पद का प्रसामान्य रूप अद्वितीय है; जैसा हम आगे देखेंगे, उत्तर हाँ है।

कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

1. हमारे पास है

$$\begin{aligned}(\lambda x.\,xxy)\lambda z.\,z &\rightarrow (\lambda z.\,z)(\lambda z.\,z)y\\ &\rightarrow (\lambda z.\,z)y\\ &\rightarrow y\end{aligned}$$

2. किसी पद को "सरल करना" वास्तव में उसे अधिक जटिल बना सकता है:

$$\begin{aligned}(\lambda x.\,xxy)(\lambda x.\,xxy) &\rightarrow (\lambda x.\,xxy)(\lambda x.\,xxy)y\\ &\rightarrow (\lambda x.\,xxy)(\lambda x.\,xxy)yy\\ &\rightarrow \ldots\end{aligned}$$

3. यह किसी पद को अपरिवर्तित भी छोड़ सकता है:

$$(\lambda x.\,xx)(\lambda x.\,xx) \rightarrow (\lambda x.\,xx)(\lambda x.\,xx)$$

4. कुछ पदों को एक से अधिक प्रकार से अपचयित किया जा सकता है; उदाहरणार्थ,

$$(\lambda x.\,(\lambda y.\,yx)z)v \rightarrow (\lambda y.\,yv)z$$

सबसे बाहरी अनुप्रयोग को संकुचित करके; और

$$(\lambda x.\,(\lambda y.\,yx)z)v \rightarrow (\lambda x.\,zx)v$$

सबसे भीतरी अनुप्रयोग को संकुचित करके। फिर भी ध्यान दें कि इस स्थिति में दोनों पद आगे अपचयित होकर एक ही पद zv बनते हैं।

अंतिम उदाहरण का अंतिम परिणाम संयोग नहीं है; वह लैम्ब्डा कलन के एक गहरे और महत्त्वपूर्ण गुण को दर्शाता है, जिसे चर्च–रॉसर गुण कहते हैं।

सामान्यतः किसी पद का β-अपचयन एक से अधिक विधियों से किया जा सकता है; इसलिए अनेक अपचयन रणनीतियाँ बनाई गई हैं, जिनमें सबसे सामान्य *स्वाभाविक रणनीति* है। स्वाभाविक रणनीति सदा *सबसे बायाँ* रिडेक्स संकुचित करती है, जहाँ किसी रिडेक्स की स्थिति पद में उसके आरंभ-बिंदु से परिभाषित होती है। स्वाभाविक रणनीति में यह उपयोगी गुण है कि कोई पद किसी रणनीति द्वारा प्रसामान्य रूप में तभी और केवल तभी अपचयित हो सकता है जब वह स्वाभाविक रणनीति द्वारा प्रसामान्य रूप में अपचयित हो सकता है। आगे अन्यथा निर्दिष्ट न होने पर हम स्वाभाविक रणनीति उपयोग करेंगे।

परिभाषा 42.42 (β-तुल्यता, $=$). *β-तुल्यता* ($=$) वह संबंध है जो आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. $M = M$.
2. यदि $M = N$, तो $N = M$।
3. यदि $M = N$ और $N = O$, तो $M = O$।
4. यदि $M = N$, तो $PM = PN$।
5. यदि $M = N$, तो $MQ = NQ$।
6. यदि $M = N$, तो $\lambda x.\, M = \lambda x.\, N$।
7. $(\lambda x.\, N)Q = N[Q/x]$.

पहले तीन नियम संबंध को तुल्यता-संबंध बनाते हैं; अगले तीन उसे संगत बनाते हैं; अंतिम नियम सुनिश्चित करता है कि उसमें β-संकुचन समाहित है।

अनौपचारिक रूप से, दो पद β-तुल्य तभी और केवल तभी हैं जब उनमें से एक को β-संकुचन अथवा β-संकुचन के "प्रतिलोम" के शून्य या अधिक चरणों द्वारा दूसरे में बदला जा सके। β-संकुचन का प्रतिलोम इस प्रकार परिभाषित है कि M प्रतिलोम-β-संकुचित होकर N तभी और केवल तभी बनता है जब N, β-संकुचित होकर M बनता है।

ऊपर के नियमों के अतिरिक्त हम संबंध को और नियमों से विस्तारित करेंगे और विस्तारित तुल्यता-संबंध को $\overset{X}{=}$ से दर्शाएँगे, जहाँ X विस्तारण नियम है।

42.10 η-परिवर्तन

λ-पदों पर एक और संबंध है। खंड 42.4 में हमने $\lambda x.\, (fx)$ का उदाहरण उपयोग किया था, जो कोई तर्क स्वीकार करके उस पर f लागू करता है। दूसरे शब्दों में, यह f वाला ही फलन है: $\lambda x.\, (fx)N$ और fN दोनों अपचयित होकर fN बनते हैं। इस विचार को निरूपित करने के लिए हम η-अपचयन (और η-विस्तार) उपयोग करते हैं।

परिभाषा 42.43 (η-संकुचन, $\xrightarrow{\eta}$). *η-संकुचन* ($\xrightarrow{\eta}$) पदों पर वह सबसे छोटा संगत संबंध है जो निम्न शर्त संतुष्ट करता है:

$$\lambda x.\, Mx \xrightarrow{\eta} M \text{ बशर्ते } x \notin FV(M)$$

परिभाषा 42.44 ($\beta\eta$-अपचयन, $\xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow$). *$\beta\eta$-अपचयन* ($\xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow$) पदों पर वह सबसे छोटा परावर्ती और संक्रामक संबंध है जिसमें $\xrightarrow{\beta}$ और $\xrightarrow{\eta}$ समाहित हैं; अर्थात् परावर्तिता और संक्रामकता के नियमों के साथ निम्न दो नियम:

1. यदि $M \xrightarrow{\beta} N$, तो $M \xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow N$।
2. यदि $M \xrightarrow{\eta} N$, तो $M \xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow N$।

परिभाषा 42.45. हम तुल्यता-संबंध $=$ को η-परिवर्तन नियम से विस्तारित करते हैं:

$$\lambda x.\, fx = f$$

और विस्तारित संबंध को $\overset{\eta}{=}$ से दर्शाते हैं।

η-तुल्यता महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि वह लैम्ब्डा पदों की विस्तारिकता से संबंधित है:

परिभाषा 42.46 (विस्तारिकता). हम तुल्यता-संबंध $=$ को (ext) नियम से विस्तारित करते हैं:

$$\text{यदि } Mx = Nx, \text{ तो } M = N, \text{ बशर्ते } x \notin FV(MN)।$$

और विस्तारित संबंध को $\overset{ext}{=}$ से दर्शाते हैं।

मोटे तौर पर यह नियम कहता है कि फलनों के रूप में देखे गए दो पद समान माने जाने चाहिए यदि समान तर्क पर उनका व्यवहार समान हो।

अब हम सिद्ध करते हैं कि η नियम ठीक विस्तारिकता देता है, और कुछ नहीं।

प्रमेय 42.47. *$M \overset{ext}{=} N$ तभी और केवल तभी जब $M \overset{\eta}{=} N$।*

प्रमाण. पहले हम सिद्ध करते हैं कि $\overset{\eta}{=}$ विस्तारिकता नियम के अधीन संवृत है। अर्थात् ext नियम $\overset{\eta}{=}$ में कुछ नहीं जोड़ता। तब $\overset{\eta}{=}$ में $\overset{ext}{=}$ समाहित है, और यदि $M \overset{ext}{=} N$, तो $M \overset{\eta}{=} N$।

यह सिद्ध करने के लिए कि $\overset{\eta}{=}$, ext के अधीन संवृत है, ध्यान दें कि ext नियम द्वारा व्युत्पन्न किसी भी $M = N$ के लिए पूर्वाधार $Mx \overset{\eta}{=} Nx$ है। तब $=$ के किसी नियम से $\lambda x.\, Mx \overset{\eta}{=} \lambda x.\, Nx$; दोनों पक्षों पर η लागू करने से $M \overset{\eta}{=} N$ मिलता है।

इसी प्रकार हम सिद्ध करते हैं कि η नियम $\overset{ext}{=}$ में समाहित है। $x \notin FV(M)$ वाले किन्हीं $\lambda x.\, Mx$ और M के लिए $(\lambda x.\, Mx)x \overset{ext}{=} Mx$; अतः ext नियम से $\lambda x.\, Mx \overset{ext}{=} M$। □

प्रश्न

प्रश्न 42.1. $(\lambda g.\, (\lambda x.\, (g(xx)))(\lambda x.\, (g(xx))))$ का निर्माण वर्णित करें।

प्रश्न 42.2. पदों की लंबाई पर आगमन द्वारा सहायक प्रमेय 42.4 सिद्ध करें।

प्रश्न 42.3. संक्षिप्त पद $\lambda g.\, (\lambda x.\, g(xx))\lambda x.\, g(xx)$ को पूर्ण रूप में फैलाएँ।

प्रश्न 42.4.

1. इस पद में λg और दोनों λx की व्याप्तियाँ पहचानें: $\lambda g.\, (\lambda x.\, g(xx))\lambda x.\, g(xx)$।
2. $\lambda g.\, (\lambda x.\, g(xx))\lambda x.\, g(xx)$ में क्या चरों के सभी आविर्भाव आबद्ध हैं? वे क्रमशः किन अमूर्तनों द्वारा आबद्ध हैं?
3. $\mathrm{FV}(\lambda x.\, (\lambda y.\, (\lambda z.\, xy)z)y)$ दें।

प्रश्न 42.5. सहायक प्रमेय 42.12 सिद्ध करें।

प्रश्न 42.6. निम्न प्रतिस्थापनों का परिणाम क्या है?

1. $\lambda y.\, x(\lambda w.\, vwx)[(uv)/x]$
2. $\lambda y.\, x(\lambda x.\, x)[(\lambda y.\, xy)/x]$

3. $y(\lambda v.\, xv)[(\lambda y.\, vy)/x]$

प्रश्न 42.7. प्रमेय 42.14 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.8. प्रमेय 42.15 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.9. प्रमेय 42.16 सिद्ध करें।

प्रश्न 42.10. प्रमेय 42.17 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.11. क्या पदों के निम्न युग्म α-परिवर्तनीय हैं?

1. $\lambda x.\, \lambda y.\, x$ और $\lambda y.\, \lambda x.\, y$
2. $\lambda x.\, \lambda y.\, x$ और $\lambda c.\, \lambda b.\, a$
3. $\lambda x.\, \lambda y.\, x$ और $\lambda c.\, \lambda b.\, a$

प्रश्न 42.12. सहायक प्रमेय 42.25 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.13. सहायक प्रमेय 42.26 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.14. सहायक प्रमेय 42.29 सिद्ध करें।

प्रश्न 42.15. प्रमेय 42.30 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 42.16. β-संकुचन की तुल्य आगमनात्मक परिभाषाएँ स्पष्ट रूप से लिखें, जैसा हमने परिभाषा 42.21 में आबद्ध चर के परिवर्तन के लिए किया था।

अध्याय 43

चर्च–रॉसर गुण

43.1 परिभाषा और गुण

इस अध्याय में हम चर्च–रॉसर गुण की संकल्पना और उसके कुछ सामान्य गुणों का परिचय देते हैं।

परिभाषा 43.1 (चर्च–रॉसर गुण, CR). पदों पर कोई संबंध $\xrightarrow{X}$ *चर्च–रॉसर गुण* को तभी और केवल तभी संतुष्ट करता है जब $M \xrightarrow{X} P$ और $M \xrightarrow{X} Q$ होने पर कोई ऐसा N अस्तित्व में हो कि $P \xrightarrow{X} N$ और $Q \xrightarrow{X} N$।

हम लैम्ब्डा कलन को संगणन के ऐसे मॉडल के रूप में देख सकते हैं जिसमें प्रसामान्य रूप के पद "मान" और पदों पर अपचयनीयता-संबंध "परिकलन नियम" हैं। चर्च–रॉसर गुण कहता है कि जब किसी परिकलन को आगे बढ़ाने की एक से अधिक विधियाँ हों, तब भी व्यंजक का केवल एक ही मान होता है।

प्रारंभिक बीजगणित से उदाहरण लें: $4 \times (1+2) + 3$ की गणना एक से अधिक विधियों से हो सकती है। इसे या तो $4 \times 3 + 3$ में अपचयित किया जा सकता है (यदि पहले $1+2$ को 3 में अपचयित करें), अथवा $4 \times 1 + 4 \times 2 + 3$ में (यदि पहले वितरणशीलता से $4 \times (1+2)$ का अपचयन करें)। किंतु दोनों को आगे $12+3$ में अपचयित किया जा सकता है।

यदि हम $\xrightarrow{X}$ को β-अपचयन मानें, तो सरलता से देखते हैं कि चर्च–रॉसर गुण का एक परिणाम यह है: यदि किसी पद का प्रसामान्य रूप हो, तो वह अद्वितीय है। मान लें M अपचयित होकर P और Q बन सकता है और दोनों प्रसामान्य रूप हैं। चर्च–रॉसर गुण से कोई ऐसा N है जिसमें P और Q दोनों अपचयित होते हैं। चूँकि परिकल्पना से P और Q प्रसामान्य रूप हैं, इसलिए उनका N में अपचयन केवल तुच्छ अपचयन हो सकता है; अर्थात् P, Q और N एक ही हैं। इससे किसी पद के *उस* प्रसामान्य रूप की बात करना उचित है।

अतः लैम्ब्डा कलन को संगणन के मॉडल के रूप में देखने पर किसी पद का प्रसामान्य रूप उस पद से आरंभ होने वाली संगणना का "अंतिम परिणाम" माना जा सकता है। ऊपर के उपप्रमेय का अर्थ है कि किसी संगणना का अंतिम परिणाम, यदि हो, केवल एक होता है; जैसे $4 \times (1+2) + 3$ की गणना का केवल एक परिणाम 15 है।

प्रमेय 43.2. *यदि कोई संबंध $\xrightarrow{X}$ चर्च–रॉसर गुण संतुष्ट करता है और $\xrightarrow{X}\!\!\!\!\rightarrow$ वह सबसे छोटा संक्रामक संबंध है जिसमें $\xrightarrow{X}$ समाहित है, तो $\xrightarrow{X}\!\!\!\!\rightarrow$ भी चर्च–रॉसर गुण संतुष्ट करता है।*

प्रमाण. मान लें

$$M \xrightarrow{X} P_1 \xrightarrow{X} \ldots \xrightarrow{X} P_m \text{ और}$$
$$M \xrightarrow{X} Q_1 \xrightarrow{X} \ldots \xrightarrow{X} Q_n.$$

हम ऊँचाई $m+1$ और चौड़ाई $n+1$ वाले पदों का जालक N बनाकर प्रमेय सिद्ध करेंगे। i-वीं पंक्ति और j-वें स्तंभ के पद को $N_{i,j}$ से दर्शाते हैं।

हम N को इस प्रकार बनाते हैं कि $N_{i,j} \xrightarrow{X} N_{i+1,j}$ और $N_{i,j} \xrightarrow{X} N_{i,j+1}$। इसकी परिभाषा है:

$$\begin{aligned} N_{0,0} &= M \\ N_{i,0} &= P_i && \text{यदि } 1 \leq i \leq m \\ N_{0,j} &= Q_j && \text{यदि } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

और अन्यथा:

$$N_{i,j} = R$$

जहाँ R ऐसा पद है कि $N_{i-1,j} \xrightarrow{X} R$ और $N_{i,j-1} \xrightarrow{X} R$। $\xrightarrow{X}$ के चर्च–रॉसर गुण से ऐसा पद सदा अस्तित्व में है।

अब $N_{m,0} \xrightarrow{X} \ldots \xrightarrow{X} N_{m,n}$ और $N_{0,n} \xrightarrow{X} \ldots \xrightarrow{X} N_{m,n}$। ध्यान दें कि $N_{m,0},\ P$ और $N_{0,n},\ Q$ है। $\xrightarrow{X}\!\!\!\!\rightarrow$ की परिभाषा से प्रमेय सिद्ध होता है। □

43.2 समांतर β-अपचयन

हम *समांतर β-अपचयन* की धारणा प्रस्तुत करते हैं और सिद्ध करते हैं कि उसमें चर्च–रॉसर गुण है।

परिभाषा 43.3 (समांतर β-अपचयन, $\overset{\beta}{\Longrightarrow}$). पदों का समांतर अपचयन ($\overset{\beta}{\Longrightarrow}$) आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. $x \overset{\beta}{\Longrightarrow} x$.
2. यदि $N \overset{\beta}{\rightarrow} N'$, तो $\lambda x.\, N \overset{\beta}{\Longrightarrow} \lambda x.\, N'$।
3. यदि $P \overset{\beta}{\Longrightarrow} P'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$, तो $PQ \overset{\beta}{\Longrightarrow} P'Q'$।
4. यदि $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$, तो $(\lambda x.\, N)Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'[Q'/x]$.

समांतर β-अपचयन हमें किसी पद के कितने भी रिडेक्स एक ही चरण में अपचयित करने देता है। वह β-अपचयन से इस अर्थ में भिन्न है कि हम केवल मूल पद में आने वाले रिडेक्स संकुचित कर सकते हैं, समांतर β-अपचयन से उत्पन्न रिडेक्स नहीं। उदाहरणार्थ, पद $(\lambda f.\, fx)(\lambda y.\, y)$ को समांतर β-अपचयित करके केवल स्वयं उसी में या $(\lambda y.\, y)x$ में बदला जा सकता है, आगे x में नहीं; यद्यपि वह β-अपचयित होकर x बनता है। कारण यह है कि यह रिडेक्स समांतर β-अपचयन के एक चरण के बाद ही उत्पन्न होता है। फिर भी, समांतर β-अपचयन का दूसरा चरण x देता है।

प्रमेय 43.4. $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M$.

प्रमाण. अभ्यास। □

परिभाषा 43.5 (β-पूर्ण विकास). M का *β-पूर्ण विकास* $M^{*\beta}$ आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

$$x^{*\beta} = x \tag{43.1}$$

$$(\lambda x.\, N)^{*\beta} = \lambda x.\, N^{*\beta} \tag{43.2}$$

$$(PQ)^{*\beta} = P^{*\beta}Q^{*\beta} \qquad \text{यदि } P \text{ कोई } \lambda\text{-अमूर्त नहीं है} \tag{43.3}$$

$$((\lambda x.\, N)Q)^{*\beta} = N^{*\beta}[Q^{*\beta}/x] \tag{43.4}$$

किसी पद का β-पूर्ण विकास, जैसा नाम से स्पष्ट है, "पूर्ण समांतर अपचयन" है। समांतर β-अपचयन में हम अब भी किसी रिडेक्स को संकुचित न करने का विकल्प चुन सकते हैं, किंतु पूर्ण विकास में सभी रिडेक्स संकुचित करने ही होते हैं। अतः $(\lambda f.\, fx)(\lambda y.\, y)$ का पूर्ण विकास स्वयं वह पद नहीं, बल्कि $(\lambda y.\, y)x$ है।

> इस परिभाषा में यह समस्या है कि हमने (λ-)पदों पर फलन पुनरावर्ती रूप से परिभाषित करने की विधि प्रस्तुत नहीं की है। भविष्य में इसे ठीक किया जाएगा।

सहायक प्रमेय 43.6. *यदि* $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$ *और* $R \overset{\beta}{\Longrightarrow} R'$, *तो* $M[R/y] \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'[R'/y]$।

प्रमाण. $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

1. अंतिम चरण (1) है: अभ्यास।
2. अंतिम चरण (2) है: तब $M,\ \lambda x.\, N$ और $M',\ \lambda x.\, N'$ है, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $(\lambda x.\, N)[R/y] \overset{\beta}{\Longrightarrow} (\lambda x.\, N')[R'/y]$, i.e., $\lambda x.\, N[R/y] \overset{\beta}{\Longrightarrow} \lambda x.\, N'[R/y]$। यह (2) और आगमन-परिकल्पना से तुरंत मिलता है।
3. अंतिम चरण (3) है: अभ्यास।
4. अंतिम चरण (4) है: $M,\ (\lambda x.\, N)Q$ और $M',\ N'[Q'/x]$ है। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $((\lambda x.\, N)Q)[R/y] \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'[Q'/x][R'/y]$, i.e., $(\lambda x.\, N[R/y])Q[R/y] \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'[R'/y][Q'[R'/y]/x]$। यह (4) और आगमन-परिकल्पना से मिलता है। □

सहायक प्रमेय 43.7. *यदि* $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$, *तो* $M' \overset{\beta}{\Longrightarrow} M^{*\beta}$।

प्रमाण. $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

1. अंतिम नियम (1) है: अभ्यास।
2. अंतिम नियम (2) है: $M,\ \lambda x.\, N$ और $M',\ \lambda x.\, N'$ है, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$। हमें दिखाना है कि $\lambda x.\, N' \overset{\beta}{\Longrightarrow} (\lambda x.\, N)^{*\beta}$, अर्थात् समीकरण (43.2) से $\lambda x.\, N' \overset{\beta}{\Longrightarrow} \lambda x.\, N^{*\beta}$। यह (2) और आगमन-परिकल्पना से मिलता है।
3. अंतिम नियम (3) है: किन्हीं P, Q, P' और Q' के लिए $M,\ PQ$ और $M',\ P'Q'$ है, जहाँ $P \overset{\beta}{\Longrightarrow} P'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$। आगमन-परिकल्पना से $P' \overset{\beta}{\Longrightarrow} P^{*\beta}$ और $Q' \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q^{*\beta}$।
   a) यदि किन्हीं x और N के लिए $P,\ \lambda x.\, N$ है, तो किसी N' के लिए $P',\ \lambda x.\, N'$ होना चाहिए, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$। आगमन-परिकल्पना से $N' \overset{\beta}{\Longrightarrow} N^{*\beta}$ और $Q' \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q^{*\beta}$। तब (4) से $(\lambda x.\, N')Q' \overset{\beta}{\Longrightarrow} N^{*\beta}[Q^{*\beta}/x]$।
   b) यदि P कोई λ-अमूर्त नहीं है, तो (3) से $P'Q' \overset{\beta}{\Longrightarrow} P^{*\beta}Q^{*\beta}$, और समीकरण (43.3) से दायाँ पक्ष $PQ^{*\beta}$ है।
4. अंतिम नियम (4) है: किन्हीं x, N, Q, N' और Q' के लिए $M,\ (\lambda x.\, N)Q$ और $M',\ N'[Q'/x]$ है, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$। आगमन-परिकल्पना से $N' \overset{\beta}{\Longrightarrow} N^{*\beta}$ और $Q' \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q^{*\beta}$। सहायक प्रमेय 43.6 से $N'[Q'/x] \overset{\beta}{\Longrightarrow} N^{*\beta}[Q^{*\beta}/x]$, जिसका दायाँ पक्ष ठीक $((\lambda x.\, N)Q)^{*\beta}$ है। □

प्रमेय 43.8. *$\overset{\beta}{\Longrightarrow}$ में चर्च–रॉसर गुण है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 43.7 से तात्कालिक। $\square$

43.3 β-अपचयन

सहायक प्रमेय 43.9. *यदि $M \overset{\beta}{\to} M'$, तो $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$।*

प्रमाण. यदि $M \overset{\beta}{\to} M'$, तो किन्हीं x, N और Q के लिए M, $(\lambda x.\, N)Q$ और M', $N[Q/x]$ है। चूँकि प्रमेय 43.4 से $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q$, इसलिए परिभाषा 43.3(4) से तुरंत $(\lambda x.\, N)Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} N[Q/x]$। $\square$

सहायक प्रमेय 43.10. *यदि $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$, तो $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$।*

प्रमाण. $M \overset{\beta}{\Longrightarrow} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

1. अंतिम नियम (1) है: तब M और M' केवल x हैं, और $x \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} x$।
2. अंतिम नियम (2) है: किन्हीं x, N, N' के लिए M, $\lambda x.\, N$ और M', $\lambda x.\, N'$ है, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$। आगमन-परिकल्पना से $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$। तब $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$ वाले $\overset{\beta}{\to}$ संकुचनों के उसी अनुक्रम से $\lambda x.\, N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda x.\, N'$।
3. अंतिम नियम (3) है: किन्हीं P, Q, P', Q' के लिए M, PQ और M', $P'Q'$ है, जहाँ $P \overset{\beta}{\Longrightarrow} P'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$। आगमन-परिकल्पना से $P \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P'$ और $Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} Q'$। अतः पहले $P \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P'$ और फिर $Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} Q'$ वाले अपचयन अनुक्रम से $PQ \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P'Q'$।
4. अंतिम नियम (4) है: किन्हीं x, N, M', Q, Q' के लिए M, $(\lambda x.\, N)Q$ और M', $N'[Q'/x]$ है, जहाँ $N \overset{\beta}{\Longrightarrow} N'$ और $Q \overset{\beta}{\Longrightarrow} Q'$। आगमन-परिकल्पना से $Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} Q'$ और $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$। अतः पहले $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$, फिर $Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} Q'$, और अंत में $(\lambda x.\, N')Q'$ को $N'[Q'/x]$ में संकुचित करके $(\lambda x.\, N)Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'[Q'/x]$। $\square$

सहायक प्रमेय 43.11. *$\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ वह सबसे छोटा संक्रामक संबंध है जिसमें $\overset{\beta}{\Longrightarrow}$ समाहित है।*

प्रमाण. $\overset{X}{\twoheadrightarrow}$ वह सबसे छोटा संक्रामक संबंध हो जिसमें $\overset{\beta}{\Longrightarrow}$ समाहित है।

$\overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \subseteq \overset{X}{\twoheadrightarrow}$: मान लें $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$, अर्थात् $M \equiv M_1 \overset{\beta}{\to} \ldots \overset{\beta}{\to} M_k \equiv M'$। सहायक प्रमेय 43.9 से $M \equiv M_1 \overset{\beta}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\beta}{\Longrightarrow} M_k \equiv M'$। चूँकि $\overset{X}{\twoheadrightarrow}$ में $\overset{\beta}{\Longrightarrow}$ समाहित है और वह संक्रामक है, इसलिए $M \overset{X}{\twoheadrightarrow} M'$।

$\overset{X}{\twoheadrightarrow} \subseteq \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$: मान लें $M \overset{X}{\twoheadrightarrow} M'$, अर्थात् $M \equiv M_1 \overset{\beta}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\beta}{\Longrightarrow} M_k \equiv M'$। सहायक प्रमेय 43.10 से $M \equiv M_1 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ldots \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_k \equiv M'$। चूँकि $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ संक्रामक है, इसलिए $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$। $\square$

प्रमेय 43.12. *$\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ चर्च–रॉसर गुण संतुष्ट करता है।*

प्रमाण. प्रमेय 43.2, प्रमेय 43.8 और सहायक प्रमेय 43.11 से तात्कालिक। $\square$

43.4 समांतर $\beta\eta$-अपचयन

इस खंड में हम समांतर $\beta\eta$-अपचयन के लिए चर्च–रॉसर गुण सिद्ध करते हैं; यह $\beta\eta$-अपचयन के अनुरूप समांतर अपचयन की धारणा है।

परिभाषा 43.13 (समांतर $\beta\eta$-अपचयन, $\overset{\beta\eta}{\Longrightarrow}$). पदों पर *समांतर $\beta\eta$-अपचयन* ($\overset{\beta\eta}{\Longrightarrow}$) आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. $x \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} x$.
2. यदि $N \overset{\beta}{\to} N'$, तो $\lambda x.\, N \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} \lambda x.\, N'$।
3. यदि $P \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} P'$ और $Q \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} Q'$, तो $PQ \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} P'Q'$।
4. यदि $N \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'$ और $Q \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} Q'$, तो $(\lambda x.\, N)Q \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'[Q'/x]$.
5. यदि $N \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'$, तो $\lambda x.\, Nx \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'$, बशर्ते $x \notin FV(N)$।

प्रमेय 43.14. $M \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M$.

प्रमाण. अभ्यास। □

परिभाषा 43.15 ($\beta\eta$-पूर्ण विकास). M का *$\beta\eta$-पूर्ण विकास* $M^{*\beta\eta}$ इस प्रकार परिभाषित है:

$$x^{*\beta\eta} = x \tag{43.5}$$

$$(\lambda x.\, N)^{*\beta\eta} = \lambda x.\, N^{*\beta\eta} \tag{43.6}$$

$$(PQ)^{*\beta\eta} = P^{*\beta\eta}Q^{*\beta\eta} \qquad \text{यदि } P \text{ कोई } \lambda\text{-अमूर्त नहीं है} \tag{43.7}$$

$$((\lambda x.\, N)Q)^{*\beta\eta} = N^{*\beta\eta}[Q^{*\beta\eta}/x] \tag{43.8}$$

$$(\lambda x.\, Nx)^{*\beta\eta} = N^{*\beta\eta} \qquad \text{यदि } x \notin FV(N) \tag{43.9}$$

सहायक प्रमेय 43.16. *यदि $M \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M'$ और $R \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} R'$, तो $M[R/y] \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M'[R'/y]$।*

प्रमाण. $M \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

पहली चार स्थितियाँ ठीक सहायक प्रमेय 43.6 वाली हैं। यदि अंतिम नियम (5) है, तो किन्हीं x और N' के लिए $M,\ \lambda x.\, Nx$ और $M',\ N'$ है, जहाँ $x \notin FV(N)$ और $N \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'$। हमें दिखाना है कि $(\lambda x.\, Nx)[R/y] \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'[R'/y]$, अर्थात् $\lambda x.\, N[R/y]x \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'[R'/y]$। यह परिभाषा 43.13(5) और आगमन-परिकल्पना से मिलता है। □

सहायक प्रमेय 43.17. *यदि $M \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M'$, तो $M' \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M^{*\beta\eta}$।*

प्रमाण. $M \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा।

पहली चार स्थितियाँ सहायक प्रमेय 43.7 वाली हैं। यदि अंतिम नियम (5) है, तो किन्हीं $x,\ N,\ N'$ के लिए M, $\lambda x.\, Nx$ और $M',\ N'$ है, जहाँ $x \notin FV(N)$ और $N \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N'$। हमें दिखाना है कि $N' \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} (\lambda x.\, Nx)^{*\beta\eta}$, अर्थात् $N' \overset{\beta\eta}{\Longrightarrow} N^{*\beta\eta}$; यह आगमन-परिकल्पना से तात्कालिक है। □

प्रमेय 43.18. *$\overset{\beta\eta}{\Longrightarrow}$ में चर्च–रॉसर गुण है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 43.17 से तात्कालिक। □

43.5 $\beta\eta$-अपचयन

$\beta\eta$-अपचयन ($\xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow$) के लिए चर्च–रॉसर गुण लागू होता है।

सहायक प्रमेय 43.19. *यदि $M \xrightarrow{\beta\eta} M'$, तो $M \xRightarrow{\beta\eta} M'$।*

प्रमाण. $M \xrightarrow{\beta\eta} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा। यदि $M \xrightarrow{\beta} M'$, η-परिवर्तन द्वारा (अर्थात् परिभाषा 42.43), तो हम प्रमेय 43.14 उपयोग करते हैं। अन्य स्थितियाँ सहायक प्रमेय 43.9 जैसी हैं। □

सहायक प्रमेय 43.20. *यदि $M \xRightarrow{\beta\eta} M'$, तो $M \xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow M'$।*

प्रमाण. $M \xRightarrow{\beta\eta} M'$ के व्युत्पत्ति पर आगमन।

यदि अंतिम नियम (5) है, तो किन्हीं x, N, N' के लिए M, $\lambda x.\, Nx$ और M', N' है, जहाँ $x \notin FV(N)$ और $N \xRightarrow{\beta\eta} N'$। अतः पहले η-परिवर्तन द्वारा $\lambda x.\, Nx$ को N में अपचयित कर सकते हैं, और फिर $\xrightarrow{\beta\eta}$ चरणों का वह अनुक्रम लगा सकते हैं जो $N \xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow N'$ दिखाता है; यह आगमन-परिकल्पना से लागू होता है। □

सहायक प्रमेय 43.21. *$\xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow$ वह सबसे छोटा संक्रामक संबंध है जिसमें $\xRightarrow{\beta\eta}$ समाहित है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 43.11 की तरह। □

प्रमेय 43.22. *$\xrightarrow{\beta\eta}\!\!\!\!\rightarrow$ चर्च–रॉसर गुण संतुष्ट करता है।*

प्रमाण. प्रमेय 43.2, प्रमेय 43.18 और सहायक प्रमेय 43.21 से। □

प्रश्न

प्रश्न 43.1. प्रमेय 43.4 सिद्ध करें।

प्रश्न 43.2. सहायक प्रमेय 43.6 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 43.3. सहायक प्रमेय 43.7 का प्रमाण पूरा करें।

प्रश्न 43.4. प्रमेय 43.14 सिद्ध करें।

अध्याय 44

लैम्ब्डा-परिभाष्यता

यह अध्याय प्रयोगात्मक है। इसमें अधिक स्पष्टीकरण और उदाहरण चाहिए, तथा सामग्री को परिभाषाओं और प्रमाण-सहित साध्यों में बेहतर ढंग से संरचित किया जाना चाहिए।

44.1 परिचय

पहली दृष्टि में लैम्ब्डा कलन केवल ऐसे व्यंजकों का अत्यंत अमूर्त कलन है जो फलनों और अन्य वस्तुओं पर उनके अनुप्रयोगों को निरूपित करते हैं। लैम्ब्डा कलन के वाक्यविन्यास में ऐसा कुछ नहीं जो संकेत करे कि ये किसी विशेष प्रकार की वस्तुओं के फलन हैं; विशेषतः वाक्यविन्यास में प्राकृतिक संख्याओं का कोई उल्लेख नहीं है। उसकी मूल संक्रियाएँ—अनुप्रयोग और लैम्ब्डा अमूर्तन—किसी भी फलन पर लागू होती हैं, केवल प्राकृतिक संख्याओं के फलनों पर नहीं।

फिर भी कुछ चतुराई से लैम्ब्डा कलन में अंकगणितीय फलन, अर्थात् प्राकृतिक संख्याओं पर फलन, परिभाषित करना संभव है। इसके लिए प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n \in \mathbb{N}$ हेतु हम एक विशेष λ-पद $\overline{n}$ परिभाषित करते हैं, जो n का *चर्च अंक* है। (चर्च अंकों का नाम अलॉन्ज़ो चर्च के नाम पर है।)

परिभाषा 44.1. यदि $n \in \mathbb{N}$, तो अनुरूप *चर्च अंक* $\overline{n}$, n को निरूपित करता है:

$$\overline{n} \equiv \lambda f x.\, f^n(x)$$

यहाँ $f^n(x)$, x पर f को n बार लागू करने के परिणाम को दर्शाता है। उदाहरणार्थ, $\overline{0}$, $\lambda f x.\, x$ और $\overline{3}$, $\lambda f x.\, f(f(f\, x))$ है।

चर्च अंक $\overline{n}$ को ऐसे लैम्ब्डा पद के रूप में कूटित किया जाता है जो दो तर्क f और x स्वीकार करके $f^n(x)$ लौटाने वाले फलन को निरूपित करता है। चर्च अंक स्पष्टतः प्रसामान्य रूप में हैं।

लैम्ब्डा कलन में प्राकृतिक संख्याओं का निरूपण निश्चय ही तभी उपयोगी है जब हम उनसे संगणना कर सकें। लैम्ब्डा कलन में चर्च अंकों से संगणना करने का अर्थ है किसी λ-पद F को ऐसे चर्च अंक पर लागू करना और संयुक्त पद $F\,\overline{n}$ को प्रसामान्य रूप में अपचयित करना। यदि वह सदा प्रसामान्य रूप में अपचयित होता है और प्रसामान्य रूप सदा कोई चर्च अंक $\overline{m}$ है, तो संगणना का निर्गम संख्या m माना जा सकता है। तब F को किसी फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को परिभाषित करने वाला मान सकते हैं, अर्थात् ऐसा फलन कि $f(n) = m$ तभी और केवल तभी जब $F\,\overline{n} \twoheadrightarrow \overline{m}$। चर्च–रॉसर गुण के कारण प्रसामान्य रूप, यदि अस्तित्व में हों, अद्वितीय होते हैं। अतः यदि $F\,\overline{n} \twoheadrightarrow \overline{m}$, तो कोई दूसरा प्रसामान्य पद, विशेषतः कोई दूसरा चर्च अंक, ऐसा नहीं हो सकता जिसमें $F\,\overline{n}$ अपचयित होता हो।

उलटे, कोई फलन $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ दिए होने पर हम पूछ सकते हैं कि क्या कोई ऐसा पद F है जो इस प्रकार f को परिभाषित करता है। उस स्थिति में हम कहते हैं कि F, f को *लैम्ब्डा-परिभाषित* करता है और f, लैम्ब्डा-परिभाष्य है। इसे बहु-स्थानी और आंशिक फलनों के लिए व्यापक किया जा सकता है।

परिभाषा 44.2. मान लें $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$। हम कहते हैं कि कोई लैम्ब्डा पद F, f को *लैम्ब्डा-परिभाषित* करता है यदि सभी n_0, ..., n_{k-1} के लिए,

$$F\,\overline{n_0}\,\overline{n_1}\ldots\overline{n_{k-1}} \twoheadrightarrow \overline{f(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})}$$

यदि $f(n_0, \ldots, n_{k-1})$ परिभाषित है; और अन्यथा $F\,\overline{n_0}\,\overline{n_1}\ldots\overline{n_{k-1}}$ का कोई प्रसामान्य रूप न हो।

अत्यंत सरल उदाहरण अचर फलनों का है। पद $C_k \equiv \lambda x.\,\overline{k}$ उस फलन $c_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है जिसके लिए $c(n) = k$; क्योंकि किसी भी n के लिए $C_k\,\overline{n} \equiv (\lambda x.\,\overline{k})\overline{n} \to \overline{k}$। तादात्म्य फलन $\lambda x.\,x$ द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है। अधिक जटिल फलनों को परिभाषित करना निश्चय ही कठिन है और प्रायः बहुत चतुराई माँगता है। इसलिए यह कुछ आश्चर्यजनक है कि प्रत्येक संगणनीय फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य है। इसका विलोम भी सत्य है: यदि कोई फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य है, तो वह संगणनीय है।

44.2 लैम्ब्डा-परिभाष्य अंकगणितीय फलन

प्रतिज्ञप्ति 44.3. *उत्तरवर्ती फलन* succ *लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. उत्तरवर्ती फलन को लैम्ब्डा-परिभाषित करने वाला पद है:

$$\mathsf{Succ} \equiv \lambda a.\,\lambda fx.\,f(afx).$$

हमारे नियमों के अनुसार यह इसका संक्षिप्त रूप है:

$$\mathsf{Succ} \equiv \lambda a.\,\lambda f.\,\lambda x.\,(f((af)x)).$$

Succ ऐसा फलन है जो संख्या a को तर्क के रूप में स्वीकार करता और दूसरे फलन $\lambda fx.\,f(afx)$ में मूल्यांकित होता है। वह फलन स्वयं चर्च अंक नहीं है। किंतु यदि तर्क a चर्च अंक हो, तो वह अपचयित होकर चर्च अंक बनता है। विचार करें:

$$(\lambda a.\,\lambda fx.\,f(afx))\,\overline{n} \to \lambda fx.\,f(\overline{n}fx).$$

अंतर्निहित पद $\overline{n}fx$ रिडेक्स है, क्योंकि $\overline{n},\ \lambda fx.\,f^n x$ है। अतः $\overline{n}fx \to f^n x$ और पूरे पद के लिए

$$\mathsf{Succ}\,\overline{n} \twoheadrightarrow \lambda fx.\,f(f^n(x)),$$

अर्थात् $\overline{n+1}$। □

उदाहरण 44.4. देखें कि Succ को $\overline{0}$, अर्थात् $\lambda fx.\,x$, पर लागू करने से क्या होता है। हम पदों को पूर्ण रूप में लिखेंगे:

$$\begin{aligned}\mathsf{Succ}\,\overline{0} &\equiv (\lambda a.\,\lambda f.\,\lambda x.\,(f((af)x)))(\lambda f.\,\lambda x.\,x)\\ &\to \lambda f.\,\lambda x.\,(f(((\lambda f.\,\lambda x.\,x)f)x))\\ &\to \lambda f.\,\lambda x.\,(f((\lambda x.\,x)x))\\ &\to \lambda f.\,\lambda x.\,(fx) \equiv \overline{1}\end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 44.5. *योग-फलन* add *लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. योग को इन पदों द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित किया जाता है:

$$\mathrm{Add} \equiv \lambda ab.\, \lambda fx.\, af(bfx)$$

अथवा वैकल्पिक रूप से,

$$\mathrm{Add}' \equiv \lambda ab.\, a\, \mathrm{Succ}\, b.$$

पहला योग इस प्रकार काम करता है: Add पहले दो संख्याएँ a और b स्वीकार करता है। परिणाम ऐसा फलन है जो f और x स्वीकार करके $af(bfx)$ लौटाता है। यदि a और b चर्च अंक $\overline{n}$ और $\overline{m}$ हों, तो यह अपचयित होकर $f^{n+m}(x)$ बनता है, जो $f^n(f^m(x))$ के समान है। अथवा धीरे-धीरे:

$$\begin{aligned}(\lambda ab.\, \lambda fx.\, af(bfx))\overline{n}\,\overline{m} &\to \lambda fx.\, \overline{n}\, f(\overline{m}\, fx)\\ &\to \lambda fx.\, \overline{n}\, f(f^m x)\\ &\to \lambda fx.\, f^n(f^m x) \equiv \overline{n+m}.\end{aligned}$$

योग का दूसरा निरूपण Add' अलग ढंग से काम करता है: दो चर्च अंकों $\overline{n}$ और $\overline{m}$ पर लागू करने पर,

$$\mathrm{Add}'\overline{n}\,\overline{m} \to \overline{n}\, \mathrm{Succ}\, \overline{m}.$$

किंतु $\overline{n}fx$ सदा अपचयित होकर $f^n(x)$ बनता है। अतः,

$$\overline{n}\, \mathrm{Succ}\, \overline{m} \twoheadrightarrow \mathrm{Succ}^n(\overline{m}).$$

और चूँकि Succ उत्तरवर्ती फलन को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है तथा m पर उत्तरवर्ती फलन को n बार लागू करने से $n+m$ मिलता है, इसलिए यह बदले में अपचयित होकर $\overline{n+m}$ बनता है। □

प्रतिज्ञप्ति 44.6. *गुणन निम्न पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाष्य है:*

$$\mathrm{Mult} \equiv \lambda ab.\, \lambda fx.\, a(bf)x$$

प्रमाण. यह कैसे काम करता है, देखने के लिए मान लें हम Mult को चर्च अंकों $\overline{n}$ और $\overline{m}$ पर लागू करते हैं: $\mathrm{Mult}\,\overline{n}\,\overline{m}$ अपचयित होकर $\lambda fx.\, \overline{n}(\overline{m}\, f)x$ बनता है। पद $\overline{m}f$ ऐसे फलन को परिभाषित करता है जो अपने तर्क पर f को m बार लागू करता है। फलतः $\overline{n}(\overline{m}f)x$, "$f$ को m बार लागू करो" फलन को स्वयं x पर n बार लागू करता है। दूसरे शब्दों में, हम f को x पर $n \cdot m$ बार लागू करते हैं। परिणामी प्रसामान्य पद केवल चर्च अंक $\overline{nm}$ है। □

> हम वास्तव में इस पद को η-अपचयन से और सरल कर सकते हैं:
>
> $$\mathrm{Mult} \equiv \lambda ab.\, \lambda f.\, a(bf).$$
>
> किंतु तब हमें पहले η-अपचयन समझाना होगा।

घातांक को λ-पद के रूप में परिभाषित करना आश्चर्यजनक रूप से सरल है:

$$\mathrm{Exp} \equiv \lambda be.\, eb.$$

पहला तर्क b आधार और दूसरा e घातांक है। संख्याओं के हमारे कूटन से सहज रूप से ef, f^e है। यदि इसे समझना कठिन लगे, तो घातांक को पुनरावर्तित गुणन द्वारा भी परिभाषित कर सकते हैं:

$$\mathrm{Exp}' \equiv \lambda be.\, e(\mathrm{Mult}\, b)\overline{1}.$$

चर्च अंकों पर पूर्ववर्ती और व्यवकलन उतने सरल नहीं जितना हम सोच सकते हैं: इसके लिए युग्मों का कूटन आवश्यक है।

44.3 युग्म और पूर्ववर्ती

परिभाषा 44.7. M और N का युग्म (जिसे $\langle M, N\rangle$ लिखते हैं) इस प्रकार परिभाषित है:

$$\langle M, N\rangle \equiv \lambda f.\, fMN.$$

सहज रूप से यह ऐसा फलन है जो किसी फलन को स्वीकार करके उसे युग्म के दोनों अवयवों पर लागू करता है। इसी विचार से हमारे पास यह निर्माता है, जो दो पद लेकर उन्हें समाहित करने वाला युग्म लौटाता है:

$$\text{Pair} \equiv \lambda mn.\, \lambda f.\, fmn$$

कोई युग्म दिए होने पर हम उसके अवयव भी पुनः प्राप्त करना चाहते हैं। इसके लिए दो अभिगम फलन चाहिए, जो युग्म को तर्क के रूप में स्वीकार करके उसका पहला या दूसरा अवयव लौटाते हैं:

$$\text{Fst} \equiv \lambda p.\, p(\lambda mn.\, m)$$
$$\text{Snd} \equiv \lambda p.\, p(\lambda mn.\, n)$$

अब युग्मों से हम पूर्ववर्ती फलन को लैम्ब्डा-परिभाषित कर सकते हैं:

$$\text{Pred} \equiv \lambda n.\, \text{Fst}(n(\lambda p.\, \langle \text{Snd}\, p, \text{Succ}(\text{Snd}\, p)\rangle)\langle \overline{0}, \overline{0}\rangle)$$

स्मरण करें कि $\overline{n}\, fx$ अपचयित होकर $f^n(x)$ बनता है; इस स्थिति में f ऐसा फलन है जो कोई युग्म p स्वीकार करके ऐसा नया युग्म लौटाता है जिसमें p का दूसरा घटक और उस दूसरे घटक का उत्तरवर्ती होता है; x युग्म $\langle 0, 0\rangle$ है। अतः $n = 0$ के लिए परिणाम $\langle 0, 0\rangle$ और अन्यथा $\langle \overline{n-1}, \overline{n}\rangle$ है। फिर Pred परिणाम का पहला घटक लौटाता है।

व्यवकलन को a पर Pred को b बार लागू करके परिभाषित किया जा सकता है:

$$\text{Sub} \equiv \lambda ab.\, b\text{Pred}\, a.$$

44.4 सत्य-मान और संबंध

शुद्ध लैम्ब्डा कलन में सत्य-मानों को इस प्रकार कूटित कर सकते हैं:

$$\text{true} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, x$$
$$\text{false} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, y$$

सत्य-मानों को *चयनकों* के रूप में निरूपित किया जाता है, अर्थात् ऐसे फलनों के रूप में जो दो तर्क स्वीकार करके उनमें से एक लौटाते हैं। सत्य-मान true अपना पहला और false अपना दूसरा तर्क चुनता है। उदाहरणार्थ, true MN सदा अपचयित होकर M बनता है, जबकि false MN सदा अपचयित होकर N बनता है।

परिभाषा 44.8. किसी संबंध $R \subseteq \mathbb{N}^n$ को हम लैम्ब्डा-परिभाष्य कहते हैं यदि कोई ऐसा पद R हो कि

$$R\,\overline{n_1} \ldots \overline{n_k} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \text{true}$$

जब भी $R(n_1, \ldots, n_k)$ हो, और

$$R\,\overline{n_1} \ldots \overline{n_k} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \text{false}$$

अन्यथा।

उदाहरणार्थ, संबंध IsZero $= \{0\}$, जो 0 और केवल 0 के लिए लागू होता है, निम्न द्वारा लैम्ब्डा-परिभाष्य है:

$$\text{IsZero} \equiv \lambda n.\, n(\lambda x.\, \text{false})\, \text{true}.$$

यह कैसे काम करता है? चूँकि चर्च अंक पुनरावर्तकों के रूप में परिभाषित हैं (ऐसे फलन जो अपने पहले तर्क को दूसरे पर n बार लागू करते हैं), इसलिए हम आरंभिक मान true रखते हैं और पुनरावर्तन के प्रत्येक चरण में पिछले चरण के परिणाम की परवाह किए बिना false लौटाते हैं। यह चरण आरंभिक मान पर n बार लागू होगा; परिणाम true तभी और केवल तभी होगा जब चरण बिल्कुल लागू न हो, अर्थात् जब $n = 0$।

सत्य-मानों के इस निरूपण के आधार पर हम कुछ सत्य-फलन भी परिभाषित कर सकते हैं। ये दो, निषेध और संयोजन के निरूपण, हैं:

$$\text{Not} \equiv \lambda x.\, x\, \text{false}\, \text{true}$$
$$\text{And} \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, xy\, \text{false}$$

फलन "Not" एक तर्क स्वीकार करता है और तर्क false होने पर true तथा तर्क true होने पर false लौटाता है। फलन "And" दो सत्य-मान तर्कों के रूप में स्वीकार करता है और दोनों तर्क true होने पर ही true लौटाना चाहिए। सत्य-मानों को ऊपर वर्णित चयनकों के रूप में निरूपित किया गया है; अतः जब x कोई सत्य-मान हो और उसे दो तर्कों पर लागू किया जाए, तब x के true होने पर परिणाम पहला तर्क और अन्यथा दूसरा तर्क होगा। अब And अपने दो तर्क x और y लेकर, अपने पहले तर्क x को बदले में y और false देता है। x को सत्य-मान मानें तो x के true होने पर परिणाम y और x के false होने पर false बनेगा; ठीक यही अपेक्षित है।

ध्यान दें कि यहाँ हम मानते हैं कि And को तर्कों के रूप में केवल सत्य-मान दिए जाते हैं। यदि उसे अन्य पद दिए जाएँ, तो परिणाम (अर्थात् प्रसामान्य रूप, यदि वह अस्तित्व में हो) सत्य-मान न भी हो सकता है।

44.5 आदिम पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं

स्मरण करें कि आदिम पुनरावर्ती फलन वे हैं जिन्हें मूल फलनों zero, succ और P_i^n से संयोजन और आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

सहायक प्रमेय 44.9. *मूल आदिम पुनरावर्ती फलन* zero, succ *और प्रक्षेप* P_i^n *लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं।*

प्रमाण. उन्हें निम्न पदों द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित किया जाता है:

$$\text{Zero} \equiv \lambda a.\, \lambda fx.\, x$$
$$\text{Succ} \equiv \lambda a.\, \lambda fx.\, f(afx)$$
$$\text{Proj}_i^n \equiv \lambda x_0 \ldots x_{n-1}.\, x_i$$

□

सहायक प्रमेय 44.10. *मान लें* k*-स्थानी फलन* f *और* n*-स्थानी फलन* g_0, ..., g_{k-1} *पदों* F, G_0, ..., G_k *द्वारा लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं और* h *को उनसे संयोजन द्वारा परिभाषित किया गया है। तब* H *लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. h को इस पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित किया जा सकता है:

$$H \equiv \lambda x_0 \ldots x_{n-1}.\, F\,(G_0 x_0 \ldots x_{n-1}) \ldots (G_{k-1} x_0 \ldots x_{n-1})$$

इस तथ्य का सत्यापन अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

ध्यान दें कि सहायक प्रमेय 44.10 ने f और g_0, ..., g_{k-1} के आदिम पुनरावर्ती होने की माँग नहीं की; केवल उनका संपूर्ण और लैम्ब्डा-परिभाष्य होना आवश्यक है।

सहायक प्रमेय 44.11. *मान लें f कोई n-स्थानी फलन और g कोई $n+2$-स्थानी फलन है, वे पदों F और G द्वारा लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं, और फलन h को f और g से आदिम पुनरावर्तन द्वारा परिभाषित किया गया है। तब h भी लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. स्मरण करें कि h इस प्रकार परिभाषित है:

$$\begin{aligned} h(x_1,\ldots,x_n,0) &= f(x_1,\ldots,x_n) \\ h(x_1,\ldots,x_n,y+1) &= h(x_1,\ldots,x_n,y,h(x_1,\ldots,x_n,y)). \end{aligned}$$

अनौपचारिक रूप से, आदिम पुनरावर्ती परिभाषा फलन h के अनुप्रयोग को y बार पुनरावर्तित करके उसे $f(x_1,\ldots,x_n)$ पर लागू करती है। यह चर्च अंकों की परिभाषा की याद दिलाता है, जो स्वयं पुनरावर्तक के रूप में परिभाषित हैं।

सरलता के लिए हम एक अतिरिक्त तर्क x वाली स्थिति की परिभाषा और प्रमाण देते हैं। फलन h को इस प्रकार लैम्ब्डा-परिभाषित किया जाता है:

$$H \equiv \lambda x.\, \lambda y.\, \mathsf{Snd}(yD\langle\overline{0}, Fx\rangle)$$

जहाँ

$$D \equiv \lambda p.\, \langle \mathsf{Succ}(\mathsf{Fst}\, p), (Gx(\mathsf{Fst}\, p)(\mathsf{Snd}\, p))\rangle$$

हमारे द्वारा रखी गई पुनरावर्तन-अवस्था एक युग्म है, जिसका पहला घटक वर्तमान y और दूसरा h का अनुरूप मान है। पुनरावर्तन के प्रत्येक चरण में हम y और h के नए मानों का युग्म बनाते हैं; पुनरावर्तन पूरा होने पर युग्म का दूसरा भाग लौटाते हैं, जो h का अंतिम मान है। अब हम सिद्ध करते हैं कि यह सचमुच आदिम पुनरावर्तन का निरूपण है।

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि किन्हीं n और m के लिए $H\,\overline{n}\,\overline{m} \twoheadrightarrow \overline{h(n,m)}$। इसके लिए पहले दिखाते हैं कि यदि $D_n \equiv D[\overline{n}/x]$, तो $D_n^m\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle \twoheadrightarrow \langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle$। हम m पर आगमन करते हैं।

यदि $m=0$, तो हमें $D_n^0\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle \twoheadrightarrow \langle\overline{0}, \overline{h(n,0)}\rangle$ चाहिए। किंतु $D_n^0\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle$ केवल $\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle$ है। चूँकि F, f को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है, इसलिए यह अपचयित होकर $\langle\overline{0}, \overline{f(n)}\rangle$ बनता है; और चूँकि $f(n) = h(n,0)$, इसलिए यह $\langle\overline{0}, \overline{h(n,0)}\rangle$ है।

अब मान लें $D_n^m\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle \twoheadrightarrow \langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle$। हम दिखाना चाहते हैं कि $D_n^{m+1}\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle \twoheadrightarrow \langle\overline{m+1}, \overline{h(n,m+1)}\rangle$।

$$\begin{aligned} D_n^{m+1}\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle &\equiv D_n(D_n^m\langle\overline{0}, F\,\overline{n}\rangle) \\ &\twoheadrightarrow D_n\,\langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle \qquad \text{(आगमन-परिकल्पना से)} \\ &\equiv (\lambda p.\, \langle \mathsf{Succ}(\mathsf{Fst}\, p), (G\,\overline{n}(\mathsf{Fst}\, p)(\mathsf{Snd}\, p))\rangle)\langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle \\ &\to \langle \mathsf{Succ}(\mathsf{Fst}\,\langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle), \\ &\qquad (G\,\overline{n}(\mathsf{Fst}\,\langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle)(\mathsf{Snd}\,\langle\overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle))\rangle \\ &\twoheadrightarrow \langle \mathsf{Succ}\,\overline{m}, (G\,\overline{n}\,\overline{m}\,\overline{h(n,m)})\rangle \\ &\twoheadrightarrow \langle\overline{m+1}, \overline{g(n,m,h(n,m))}\rangle \end{aligned}$$

चूँकि $g(n,m,h(n,m)) = h(n,m+1)$, प्रमाण पूरा हुआ।

अंततः, विचार करें:

$$
\begin{aligned}
H\,\overline{n}\,\overline{m} &\equiv \lambda x.\,\lambda y.\,\mathsf{Snd}(y(\lambda p.\langle \mathsf{Succ}(\mathsf{Fst}\,p), (G\,x\,(\mathsf{Fst}\,p)\,(\mathsf{Snd}\,p))\rangle)\langle \overline{0}, Fx\rangle) \\
&\quad \overline{n}\,\overline{m} \\
&\twoheadrightarrow \mathsf{Snd}(\overline{m}\ \underbrace{(\lambda p.\langle \mathsf{Succ}(\mathsf{Fst}\,p), (G\,\overline{n}\,(\mathsf{Fst}\,p)(\mathsf{Snd}\,p))\rangle)}_{D_n}\langle \overline{0}, F\overline{n}\rangle) \\
&\equiv \mathsf{Snd}(\overline{m}\,D_n\,\langle \overline{0}, F\overline{n}\rangle) \\
&\twoheadrightarrow \mathsf{Snd}\,(D_n^m\langle \overline{0}, F\overline{n}\rangle) \\
&\twoheadrightarrow \mathsf{Snd}\,\langle \overline{m}, \overline{h(n,m)}\rangle \\
&\twoheadrightarrow \overline{h(n,m)}.
\end{aligned}
$$

□

प्रतिज्ञप्ति 44.12. *प्रत्येक आदिम पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 44.9 से सभी मूल फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं; और सहायक प्रमेय 44.10 तथा सहायक प्रमेय 44.11 से लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संयोजन और आदिम पुनरावर्तन के अधीन संवृत हैं। □

44.6 अचल-बिंदु

मान लें हम क्रमगुणित फलन को पुनरावर्तन द्वारा ऐसे पद Fac के रूप में परिभाषित करना चाहें जिसमें निम्न गुण हो:

$$\mathsf{Fac} \equiv \lambda n.\,\mathsf{IsZero}\,n\,\overline{1}(\mathsf{Mult}\,n(\mathsf{Fac}(\mathsf{Pred}\,n)))$$

अर्थात् $n = 0$ होने पर n का क्रमगुणित 1 है, और अन्यथा $n-1$ के क्रमगुणित का n गुना। निश्चय ही हम पद Fac को इस प्रकार परिभाषित नहीं कर सकते, क्योंकि दाएँ पक्ष में स्वयं Fac आता है। स्वसंदर्भ वाली ऐसी पुनरावर्ती परिभाषाएँ लैम्ब्डा कलन का भाग नहीं हैं। उदाहरणार्थ, किसी पद को

$$\mathsf{Mult} \equiv \lambda ab.\,a(\mathsf{Add}\,a)0$$

द्वारा परिभाषित करने में दाएँ पक्ष पर केवल Add जैसे पहले से परिभाषित पद आते हैं। Add को उसके परिभाषक पद से बदलकर हम उसे सदा हटा सकते हैं। इससे पद Mult शुद्ध लैम्ब्डा पद के रूप में मिलेगा; यदि Add में स्वयं परिभाषित पद आते हों (जैसे Add′ में), तो हम इस प्रक्रिया को जारी रखकर अंततः शुद्ध लैम्ब्डा पद तक पहुँच सकते हैं।

किंतु ऊपर की Fac जैसी पुनरावर्ती परिभाषाओं के लिए यह सत्य नहीं है। यदि दाएँ पक्ष पर Fac के आविर्भाव को स्वयं Fac की परिभाषा से बदलें, तो मिलता है:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Fac} \equiv \lambda n.\,&\mathsf{IsZero}\,n\,\overline{1} \\
&(\mathsf{Mult}\,n((\lambda n.\,\mathsf{IsZero}\,n\,\overline{1}\,(\mathsf{Mult}\,n\,(\mathsf{Fac}(\mathsf{Pred}\,n))))(\mathsf{Pred}\,n)))
\end{aligned}
$$

और हमने अब भी दाएँ पक्ष से Fac नहीं हटाया है। स्पष्टतः, इस प्रक्रिया को दोहराने पर परिभाषा लंबी होती जाती है और कभी शुद्ध लैम्ब्डा पद नहीं मिलता। अतः क्रमगुणित (या सामान्यतः पुनरावर्ती फलनों) को परिभाषित करने की यह विधि व्यावहारिक नहीं है।

फिर भी पुनरावर्ती परिभाषा हमें कुछ बताती है: यदि f क्रमगुणित फलन को निरूपित करने वाला पद होता, तो पद

$$\mathsf{Fac}' \equiv \lambda g.\,\lambda n.\,\mathsf{IsZero}\,n\,\overline{1}\,(\mathsf{Mult}\,n\,(g(\mathsf{Pred}n)))$$

पद f पर लागू होने पर, अर्थात् $\mathrm{Fac}'\, f$, क्रमगुणित फलन को भी निरूपित करता है। अर्थात् यदि Fac' को ऐसा फलन मानें जो कोई फलन स्वीकार करके फलन लौटाता है, तो f के क्रमगुणित होने की दशा में $\mathrm{Fac}'\, f$ का मान केवल f है। जिस फलन f में $\mathrm{Fac}'\, f \stackrel{\beta}{=} f$ गुण हो, उसे Fac' का *अचल-बिंदु* कहते हैं। अतः क्रमगुणित Fac' का अचल-बिंदु है।

लैम्ब्डा कलन में ऐसे पद हैं जो किसी दिए पद के अचल-बिंदुओं की संगणना करते हैं; फिर इन पदों का उपयोग Fac' जैसे पद को क्रमगुणित की परिभाषा में बदलने के लिए किया जा सकता है।

परिभाषा 44.13. *Y-संयोजक* यह पद है:

$$Y \equiv (\lambda ux.\, x(uux))(\lambda ux.\, x(uux)).$$

प्रमेय 44.14. *Y में यह गुण है कि किसी भी पद g के लिए $Yg \twoheadrightarrow g(Yg)$। अतः Yg सदा g का अचल-बिंदु है।*

प्रमाण. $(\lambda ux.\, x(uux))$ को U से संक्षिप्त करें, ताकि $Y \equiv UU$। तब

$$\begin{aligned} Yg &\equiv (\lambda ux.\, x(uux))U\, g \\ &\twoheadrightarrow (\lambda x.\, x(UUx))g \\ &\twoheadrightarrow g(UUg) \equiv g(Yg). \end{aligned}$$

चूँकि $g(Yg)$ और Yg दोनों अपचयित होकर $g(Yg)$ बनते हैं, इसलिए $g(Yg) \stackrel{\beta}{=} Yg$; अतः Yg, g का अचल-बिंदु है। □

निश्चय ही, चूँकि Yg रिडेक्स है, इसलिए अपचयन अनिश्चित काल तक चल सकता है:

$$\begin{aligned} Yg &\twoheadrightarrow g(Yg) \\ &\twoheadrightarrow g(g(Yg)) \\ &\twoheadrightarrow g(g(g(Yg))) \\ &\ldots \end{aligned}$$

अतः हम Yg को स्वयं पर अनंत बार लागू g मान सकते हैं। यदि उस पर g एक बार और लागू करें, तो कहने को हम कुछ अतिरिक्त नहीं कर रहे; Yg पर अनंत बार लागू g पर फिर लागू g, अब भी Yg पर अनंत बार लागू g ही है।

ध्यान दें कि Yg से आरंभ होने वाला ऊपर का β-अपचयन चरणों का अनुक्रम अनंत है। अतः यदि हम Yg को किसी पद पर लागू करें, अर्थात् $(Yg)N$ पर विचार करें, तो वह पद भी अपचयित होकर अनंत रूप से अनेक भिन्न पद बनाएगा: $(g(Yg))N$, $(g(g(Yg)))N$, ...। फिर भी संभव है कि अपचयन चरणों का कोई *अन्य* अनुक्रम किसी प्रसामान्य रूप पर समाप्त हो।

उदाहरण के लिए क्रमगुणित लें। Fac को $Y\,\mathrm{Fac}'$ (अर्थात् Fac' के किसी अचल-बिंदु) के रूप में परिभाषित करें। तब:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fac}\,\overline{3} &\twoheadrightarrow Y\,\mathrm{Fac}'\,\overline{3} \\ &\twoheadrightarrow \mathrm{Fac}'(Y\,\mathrm{Fac}')\,\overline{3} \\ &\equiv (\lambda x.\, \lambda n.\, \mathrm{IsZero}\, n\, \overline{1}\, (\mathrm{Mult}\, n\, (x(\mathrm{Pred}\, n))))\, \mathrm{Fac}\,\overline{3} \\ &\twoheadrightarrow \mathrm{IsZero}\,\overline{3}\,\overline{1}\,(\mathrm{Mult}\,\overline{3}\,(\mathrm{Fac}(\mathrm{Pred}\,\overline{3}))) \\ &\twoheadrightarrow \mathrm{Mult}\,\overline{3}\,(\mathrm{Fac}\,\overline{2}). \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fac}\,\overline{2} &\twoheadrightarrow \mathrm{Mult}\,\overline{2}\,(\mathrm{Fac}\,\overline{1}) \\ \mathrm{Fac}\,\overline{1} &\twoheadrightarrow \mathrm{Mult}\,\overline{1}\,(\mathrm{Fac}\,\overline{0}) \end{aligned}$$

किंतु

$$\begin{aligned}
\mathsf{Fac}\,\overline{0} &\twoheadrightarrow \mathsf{Fac}'(Y\,\mathsf{Fac}')\,\overline{0} \\
&\equiv (\lambda x.\,\lambda n.\,\mathsf{IsZero}\,n\,\overline{1}\,(\mathsf{Mult}\,n\,(x(\mathsf{Pred}\,n))))\,\mathsf{Fac}\,\overline{0} \\
&\twoheadrightarrow \mathsf{IsZero}\,\overline{0}\,\overline{1}\,(\mathsf{Mult}\,\overline{0}\,(\mathsf{Fac}(\mathsf{Pred}\,\overline{0}))). \\
&\twoheadrightarrow \overline{1}.
\end{aligned}$$

अतः सब मिलाकर

$$\mathsf{Fac}\,\overline{3} \twoheadrightarrow \mathsf{Mult}\,\overline{3}\,(\mathsf{Mult}\,\overline{2}\,(\mathsf{Mult}\,\overline{1}\,\overline{1})).$$

Fac' के लिए जो लागू होता है, वह किसी भी पुनरावर्ती परिभाषा के लिए लागू होता है। मान लें हमारे पास पुनरावर्ती समीकरण है:

$$g\,x_1 \ldots x_n \stackrel{\beta}{=} N$$

जहाँ N में g और x_1, ..., x_n आ सकते हैं। तब सदा कोई ऐसा पद $G \equiv (Y\,\lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N)$ है कि

$$G\,x_1 \ldots x_n \stackrel{\beta}{=} N[G/g].$$

क्योंकि अचल-बिंदु प्रमेय से,

$$\begin{aligned}
G \equiv (Y\,\lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N) &\twoheadrightarrow \lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N(Y\,\lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N) \\
&\equiv (\lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N)\,G
\end{aligned}$$

और फलतः

$$\begin{aligned}
G\,x_1 \ldots x_n &\twoheadrightarrow (\lambda g.\,\lambda x_1 \ldots x_n.\,N)\,G\,x_1 \ldots x_n \\
&\twoheadrightarrow (\lambda x_1 \ldots x_n.\,N[G/g])\,x_1 \ldots x_n \\
&\twoheadrightarrow N[G/g].
\end{aligned}$$

परिभाषा 44.13 का Y संयोजक एलन ट्यूरिंग का है। अलॉन्ज़ो चर्च ने एक भिन्न रूप प्रस्तावित किया था, जिसे हम Y_C कहेंगे:

$$Y_C \equiv \lambda g.\,(\lambda x.\,g(xx))(\lambda x.\,g(xx)).$$

चर्च का संयोजक ट्यूरिंग के संयोजक से कुछ दुर्बल है: $Y\,g \stackrel{\beta}{=} g(Y\,g)$, किंतु $Y\,g \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} g(Y\,g)$ नहीं। V पद $\lambda x.\,g(xx)$ हो, ताकि $Y_C \equiv \lambda g.\,VV$। तब

$$\begin{aligned}
VV &\equiv (\lambda x.\,g(xx))V \twoheadrightarrow g(VV) \text{ और अतः} \\
Y_C g &\equiv (\lambda g.\,VV)g \twoheadrightarrow VV \twoheadrightarrow g(VV), \text{ किंतु साथ ही} \\
g(Y_C g) &\equiv g((\lambda g.\,VV)g) \twoheadrightarrow g(VV).
\end{aligned}$$

दूसरे शब्दों में, $Y_C g$ और $g(Y_C g)$ अपचयित होकर समान पद $g(VV)$ में पहुँचते हैं; अतः $Y_C g \stackrel{\beta}{=} g(Y_C g)$। अनुप्रयोगों के लिए यह प्रायः पर्याप्त है।

44.7 न्यूनीकरण

सामान्य पुनरावर्ती फलन वे हैं जिन्हें मूल फलनों zero, succ, P_i^n से संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और नियमित न्यूनीकरण द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। सभी सामान्य पुनरावर्ती फलनों को लैम्ब्डा-परिभाष्य दिखाने के लिए हमें दिखाना होगा कि किसी लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन से नियमित न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित कोई भी फलन स्वयं लैम्ब्डा-परिभाष्य है।

सहायक प्रमेय 44.15. *यदि $f(x_1, \ldots, x_k, y)$ नियमित और लैम्ब्डा-परिभाष्य है, तो निम्न द्वारा परिभाषित g*

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \mu y\ f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$$

भी लैम्ब्डा-परिभाष्य है।

प्रमाण. मान लें लैम्ब्डा पद F नियमित फलन $f(\vec{x}, y)$ को λ-परिभाषित करता है। h को लैम्ब्डा-परिभाषित करने के लिए हम खोज-फलन और अचल-बिंदु संयोजक उपयोग करते हैं:

$$\begin{aligned} \text{Search} &\equiv \lambda g.\, \lambda f\, \vec{x}\, y.\, \text{IsZero}(f\, \vec{x}\, y)\, y\, (g\, \vec{x}(\text{Succ}\, y) \\ H &\equiv \lambda \vec{x}.\, (Y\, \text{Search}) F\, \vec{x}\, \overline{0}, \end{aligned}$$

जहाँ Y कोई भी अचल-बिंदु संयोजक है। अनौपचारिक रूप से Search स्वसंदर्भी फलन है: y से आरंभ करके जाँचता है कि $f\, \vec{x}\, y$ शून्य है या नहीं; यदि हाँ तो y लौटाता है, अन्यथा Succ y के साथ स्वयं को पुकारता है। अतः $(Y\, \text{Search}) F \overline{n_1} \ldots \overline{n_k}\, \overline{0}$ वह न्यूनतम m लौटाता है जिसके लिए $f(n_1, \ldots, n_k, m) = 0$।

विशेषतः ध्यान दें कि

$$(Y\, \text{Search}) F \overline{n_1} \ldots \overline{n_k}\, \overline{m} \twoheadrightarrow \overline{m}$$

यदि $f(n_1, \ldots, n_k, m) = 0$, अथवा

$$\twoheadrightarrow (Y\, \text{Search}) F\, \overline{n_1} \ldots \overline{n_k}\, \overline{m+1}$$

अन्यथा। चूँकि f नियमित है, किसी y के लिए $f(n_1, \ldots, n_k, y) = 0$, और इसलिए

$$(Y\, \text{Search}) F \overline{n_1} \ldots \overline{n_k}\, \overline{0} \twoheadrightarrow \overline{h(n_1, \ldots, n_k)}.$$ □

प्रतिज्ञप्ति 44.16. *प्रत्येक सामान्य पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 44.9 से सभी मूल फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं; और सहायक प्रमेय 44.10, सहायक प्रमेय 44.11 तथा सहायक प्रमेय 44.15 से लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और नियमित न्यूनीकरण के अधीन संवृत हैं। □

44.8 आंशिक पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं

आंशिक पुनरावर्ती फलन वे हैं जो मूल फलनों से संयोजन, आदिम पुनरावर्तन और अपरिबद्ध न्यूनीकरण द्वारा प्राप्त होते हैं। वे सामान्य पुनरावर्ती फलनों से इस बात में भिन्न हैं कि अपरिबद्ध खोज में उपयोग होने वाले फलनों का नियमित होना आवश्यक नहीं। नियमितता की माँग न करने का अर्थ है कि न्यूनीकरण द्वारा परिभाषित फलन कभी-कभी अपरिभाषित हो सकते हैं।

पहली दृष्टि में लग सकता है कि जिन विधियों से दिखाया गया कि सभी (संपूर्ण) सामान्य पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं, उन्हीं से सभी आंशिक पुनरावर्ती फलनों को लैम्ब्डा-परिभाष्य सिद्ध किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि f और g क्रमशः पदों F और G द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित हैं, तो f का g के साथ संयोजन $\lambda x.\, F(Gx)$ द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित है। किंतु फलन आंशिक हों तो यह समस्याजनक है। जब $g(x)$ अपरिभाषित हो, तब Gx का कोई प्रसामान्य रूप नहीं होता। अधिकांश स्थितियों में इसका अर्थ है कि $F(Gx)$ का भी कोई प्रसामान्य रूप नहीं, और हम यही चाहते हैं। किंतु उस स्थिति पर विचार करें जब $F,\ \lambda x.\, \lambda y.\, y$ हो; तब $F(Gx)$ का प्रसामान्य रूप ($\lambda y.\, y$) होता है।

यह समस्या दुस्तर नहीं है, और सभी आंशिक पुनरावर्ती फलनों को इस प्रकार लैम्ब्डा-परिभाषित करने की विधियाँ हैं कि अपरिभाषित मानों को प्रसामान्य रूप रहित पदों से निरूपित किया जाए। फिर भी, ये विधियाँ सामान्य पुनरावर्ती फलनों के लिए अपनाए हमारे दृष्टिकोण से कुछ अधिक जटिल और कम सहज हैं। यहाँ हम प्रमेय को बिना प्रमाण के दर्ज करते हैं:

प्रमेय 44.17. *सभी आंशिक पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं।*

44.9 लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन पुनरावर्ती हैं

न केवल सभी आंशिक पुनरावर्ती फलन लैम्ब्डा-परिभाष्य हैं, बल्कि विलोम भी सत्य है। अर्थात् सभी लैम्ब्डा-परिभाष्य फलन आंशिक पुनरावर्ती हैं।

प्रमेय 44.18. *यदि कोई आंशिक फलन f लैम्ब्डा-परिभाष्य है, तो वह आंशिक पुनरावर्ती है।*

प्रमाण. हम प्रमाण की केवल रूपरेखा देते हैं। पहले λ-पदों का अंकगणितीकरण करते हैं, अर्थात् अनुक्रमों के प्रचलित अभाज्य-घात कूटन से λ-पदों को व्यवस्थित रूप से गोडेल संख्याएँ देते हैं। फिर आंशिक पुनरावर्ती फलन $\mathrm{normalize}(t)$ परिभाषित करते हैं, जो किसी लैम्ब्डा पद की गोडेल संख्या t को तर्क के रूप में लेकर, यदि उसका प्रसामान्य रूप हो तो उसकी गोडेल संख्या लौटाता है, और अन्यथा अपरिभाषित रहता है। फिर दो आंशिक पुनरावर्ती फलन toChurch और fromChurch परिभाषित करते हैं, जो प्राकृतिक संख्याओं को अनुरूप चर्च अंक की गोडेल संख्याओं में और उनसे वापस प्रतिचित्रित करते हैं।

इन पुनरावर्ती फलनों से हम फलन f को आंशिक पुनरावर्ती फलन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। कोई λ-पद F, f को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है। $f(n_1, \ldots, n_k)$ संगणित करने के लिए पहले $\mathrm{toChurch}(n_i)$ से अनुरूप चर्च अंकों की गोडेल संख्याएँ प्राप्त करें और उन्हें ${}^{\sharp}F^{\#}$ में जोड़कर पद $F\overline{n_1} \ldots \overline{n_k}$ की गोडेल संख्या पाएँ। अब इस गोडेल संख्या पर normalize उपयोग करें। यदि $f(n_1, \ldots, n_k)$ परिभाषित है, तो $F\overline{n_1} \ldots \overline{n_k}$ का प्रसामान्य रूप है (जो चर्च अंक ही होना चाहिए); अन्यथा उसका कोई प्रसामान्य रूप नहीं है (और इसलिए

$$\mathrm{normalize}({}^{\sharp}F\overline{n_1} \ldots \overline{n_k}^{\#})$$

अपरिभाषित है)। अंत में प्रसामान्य किए गए पद की गोडेल संख्या पर fromChurch उपयोग करें। □

प्रश्न

प्रश्न 44.1. पद

$$\mathrm{Succ}' \equiv \lambda n.\, \lambda fx.\, nf(fx)$$

उत्तरवर्ती फलन को लैम्ब्डा-परिभाषित करता है। समझाएँ कि क्यों।

प्रश्न 44.2. गुणन को इस पद द्वारा लैम्ब्डा-परिभाषित किया जा सकता है:

$$\mathrm{Mult}' \equiv \lambda ab.\, a(\mathrm{Add}\, a)\overline{0}.$$

समझाएँ कि यह क्यों काम करता है।

प्रश्न 44.3. समझाएँ कि अभिगम फलन Fst और Snd क्यों काम करते हैं।

प्रश्न 44.4. सत्य-मानों को λ-पदों के रूप में कूटित करके समावेशी और अपवर्जी वियोजन के सत्य-फलनों को निरूपित करने वाले फलन Or और Xor परिभाषित करें।

प्रश्न 44.5. यह दिखाकर सहायक प्रमेय 44.10 का प्रमाण पूरा करें कि $H\overline{n_0}\ldots\overline{n_{n-1}} \twoheadrightarrow \overline{h(n_0,\ldots,n_{n-1})}$।

खण्ड X

बहुमूल्य तर्कशास्त्र

इस भाग में प्रतिज्ञप्तिपरक बहुमूल्य तर्कशास्त्रों पर प्रारूप सामग्री है।

अध्याय 45

वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान

45.1 परिचय

चिरसम्मत तर्कशास्त्र में हम उन सूत्र से काम करते हैं जो प्रतिज्ञप्तिपरक संयोजकों $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ और $\leftrightarrow$ द्वारा प्रतिज्ञप्ति चर से बनाए जाते हैं। चिरसम्मत तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान परिभाषित करते समय हम दो सत्य-मान $\mathbb{T}$ और $\mathbb{F}$ उपयोग करते हैं। हम प्रतिज्ञप्ति चर की व्याख्या किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ में करते हैं, जो इन चरों को सत्य-मान $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$ नियत करता है। तब कोई भी सत्य-मूल्यांकन, प्रत्येक सूत्र φ का सत्य-मान $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi)$ निर्धारित करता है, और सूत्र किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ में संतुष्ट है, $\mathfrak{v} \vDash \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$।

बहुमूल्य तर्कशास्त्र, केवल $\mathbb{T}$ और $\mathbb{F}$ से अधिक सत्य-मानों की अनुमति देकर चिरसम्मत द्विमूल्य तर्कशास्त्र का व्यापकीकरण करते हैं। अतः बहुमूल्य तर्कशास्त्र में सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को संभव सत्य-मानों की किसी श्रेणी का एक मान नियत करता है। सामान्यतः हम अनुमत सत्य-मानों के समुच्चय को V कहेंगे। चिरसम्मत तर्कशास्त्र ऐसा बहुमूल्य तर्कशास्त्र है जिसमें $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$; और सत्य-मान $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi)$ की संगणना संयोजकों की परिचित अभिलाक्षणिक सत्य-सारणियों से होती है।

अतिरिक्त सत्य-मान जोड़ने पर "और", "या", "नहीं" और "यदि—तो" पढ़े जाने वाले संयोजकों के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi)$ संगणित करने का एक से अधिक स्वाभाविक विकल्प होता है। इसलिए कोई बहुमूल्य तर्कशास्त्र केवल सत्य-मानों के समुच्चय से नहीं, बल्कि प्रत्येक संयोजक के लिए चुने गए *सत्य-फलनों* से भी निर्धारित होता है। किंतु किसी बहुमूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ के लिए इनके चुन लिए जाने पर, चिरसम्मत तर्कशास्त्र की तरह सत्य-मान $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi)$ मूल्यांकन से अद्वितीय रूप से निर्धारित होता है। चिरसम्मत तर्कशास्त्र की तरह बहुमूल्य तर्कशास्त्र भी *सत्य-फलनीय* हैं।

इन अर्थवैज्ञानिक आधार-घटकों से हम सर्वसत्यता, अनुगमन और संतुष्टयता की अर्थवैज्ञानिक संकल्पनाओं के अनुरूप रूप परिभाषित कर सकते हैं। चिरसम्मत तर्कशास्त्र में कोई सूत्र सर्वसत्य है यदि प्रत्येक $\mathfrak{v}$ के लिए उसका सत्य-मान $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ हो। बहुमूल्य तर्कशास्त्र में इसे भी कुछ व्यापक करना पड़ता है। पहली बात, यह आवश्यक नहीं कि सत्य-मानों के समुच्चय V में $\mathbb{T}$ हो। उदाहरणार्थ, कुछ बहुमूल्य तर्कशास्त्र 0 और 1 के बीच की सभी परिमेय संख्याओं जैसे अंकों को अपने सत्य-मानों का समुच्चय बनाते हैं। ऐसी स्थिति में 1 सामान्यतः $\mathbb{T}$ की भूमिका निभाता है। अन्य तर्कशास्त्रों में केवल एक नहीं, अनेक सत्य-मान यह भूमिका निभाते हैं। अतः हम माँग करते हैं कि प्रत्येक बहुमूल्य तर्कशास्त्र में *निर्दिष्ट मानों* का समुच्चय V^+ हो। तब हम कह सकते हैं कि सूत्र किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ में संतुष्ट है, $\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) \in V^+$। सूत्र φ उस तर्कशास्त्र की सर्वसत्यता है, $\vDash_{\mathbf{L}} \varphi$, तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $\mathfrak{v}$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) \in V^+$। अंततः, हम कहते हैं कि सूत्र के किसी समुच्चय द्वारा φ का अनुगमन होता है, $\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$, यदि Γ के सभी सूत्र को संतुष्ट करने वाला प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन, φ को भी संतुष्ट करे।

45.2 भाषाएँ और संयोजक

चिरसम्मत प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र और अनेक अन्य तर्कशास्त्र *प्रतिज्ञप्तिपरक अचरों* तथा *संयोजकों* के नियत भंडार का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, हम निम्न को आदिम मानते हैं:

1. असत्यता के लिए प्रतिज्ञप्तिपरक अचर $\perp$।

2. सत्यता के लिए प्रतिज्ञप्तिपरक अचर $\top$।

3. तार्किक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)

यही संयोजक बहुमूल्य तर्कशास्त्रों में भी उपयोग होते हैं। किंतु एक ही तर्कशास्त्र में, मसलन, संयोजन के भिन्न रूप सम्मिलित करना प्रायः उपयोगी होता है; उन्हें अलग रखने के लिए भिन्न चिह्न चाहिए होंगे। कुछ बहुमूल्य तर्कशास्त्रों में ऐसे संयोजक भी होते हैं जिनका चिरसम्मत तर्कशास्त्र में कोई तुल्य नहीं। अतः हम सामान्य से कुछ अधिक व्यापक होंगे।

परिभाषा 45.1. किसी *प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा* में *संयोजकों* का समुच्चय $\mathcal{L}$ होता है। प्रत्येक संयोजक $\star$ की कोई *स्थानिकता* होती है; स्थानिकता n वाला संयोजक n-*स्थानी* कहलाता है। स्थानिकता 0 के संयोजक *अचर*, स्थानिकता 1 के संयोजक *एक-स्थानी*, और स्थानिकता 2 के संयोजक *दो-स्थानी* भी कहलाते हैं।

उदाहरण 45.2. प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की मानक भाषा $\mathcal{L}_0$ में निम्न संयोजक (उनकी स्थानिकताओं सहित) हैं: $\perp$ (0) $\neg$ (1), $\wedge$ (2), $\vee$ (2), $\rightarrow$ (2)। हमारे विचाराधीन अधिकांश तर्कशास्त्र इस भाषा का उपयोग करेंगे। कुछ तर्कशास्त्र परंपरा और रूढ़ि के कारण कुछ संयोजकों के लिए भिन्न चिह्न उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, गुणनफल तर्कशास्त्र में संयोजन का चिह्न प्रायः $\wedge$ के बदले $\odot$ होता है। कभी-कभी नया संक्रियक जोड़ना सुविधाजनक होता है, जैसे निर्धार्यता संक्रियक $\triangle$ (1-स्थानी)।

45.3 सूत्रों

परिभाषा 45.3 (सूत्र). किसी प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा $\mathcal{L}$ के *सूत्र* का समुच्चय $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ आगमनतः इस प्रकार परिभाषित है:

1. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p_i परमाण्विक सूत्र है।

2. $\mathcal{L}$ का प्रत्येक 0-स्थानी संयोजक (प्रतिज्ञप्तिपरक अचर) परमाण्विक सूत्र है।

3. यदि $\star$, $\mathcal{L}$ का n-स्थानी संयोजक है और φ_1, ..., φ_n सूत्र हैं, तो $\star(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ सूत्र है।

4. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

यदि $\star$ 1-स्थानी है, तो $\star(\varphi_1)$ को प्रायः केवल $\star\varphi_1$ लिखेंगे। यदि $\star$ 2-स्थानी है, तो $\star(\varphi_1, \varphi_2)$ को प्रायः $(\varphi_1 \star \varphi_2)$ लिखेंगे।

सामान्य रीति से हम प्रायः सबसे बाहरी कोष्ठक बिना बताए छोड़ देंगे।

उदाहरण 45.4. मानक भाषा $\mathcal{L}_0$ में $p_1 \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$ कोई सूत्र है। गुणनफल तर्कशास्त्र की भाषा में उसे इसके बदले $p_1 \rightarrow (p_1 \odot \neg p_2)$ लिखा जाएगा। यदि भाषा में 1-स्थानी $\triangle$ जोड़ें, तो हमारे पास $\triangle(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\triangle p_1 \wedge \triangle p_2)$ जैसे सूत्र भी होंगे।

45.4 आव्यूह

कोई बहुमूल्य तर्कशास्त्र अपनी भाषा, सत्य-मानों के समुच्चय V, निर्दिष्ट सत्य-मानों के उपसमुच्चय और अपने संयोजकों के सत्य-फलनों से परिभाषित होता है। इन अवयवों को एक साथ *आव्यूह* कहते हैं।

परिभाषा 45.5 (आव्यूह). तर्कशास्त्र L के किसी *आव्यूह* में ये होते हैं:

1. भाषा $\mathcal{L}$ बनाने वाला संयोजकों का समुच्चय;

$\widetilde{\neg}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{\wedge}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\vee}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\rightarrow}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

चित्र 45.1: चिरसम्मत तर्कशास्त्र **C** के सत्य-फलन।

2. सत्य-मानों का समुच्चय $V \neq \emptyset$;
3. निर्दिष्ट सत्य-मानों का समुच्चय $V^+ \subseteq V$;
4. $\mathcal{L}$ के प्रत्येक n-स्थानी संयोजक $\star$ के लिए सत्य-फलन $\widetilde{\star} : V^n \to V$। यदि $n = 0$, तो $\widetilde{\star}$ केवल V का कोई अवयव है।

उदाहरण 45.6. चिरसम्मत तर्कशास्त्र **C** के आव्यूह में ये होते हैं:

1. मानक प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा $\mathcal{L}_0$, जिसमें $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
2. सत्य-मानों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ एकमात्र निर्दिष्ट मान है, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}\}$।
4. $\bot$ के लिए $\widetilde{\bot} = \mathbb{F}$। अन्य सत्य-फलन प्रचलित सत्य-सारणियों से दिए जाते हैं (आकृति 45.1 देखें)।

45.5 सत्य-मूल्यांकनों और संतुष्टि

परिभाषा 45.7 (सत्य-मूल्यांकनों). V सत्य-मानों का कोई समुच्चय हो। $\mathcal{L}$ से V में कोई *सत्य-मूल्यांकन* ऐसा फलन $\mathfrak{v}$ है जो भाषा के प्रतिज्ञप्ति चर को V का अवयव नियत करता है, अर्थात् $\mathfrak{v} \colon \mathrm{At}_0 \to V$।

परिभाषा 45.8. किसी बहुमूल्य तर्कशास्त्र **L** के सत्य-मानों के समुच्चय V में सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ दिए होने पर मूल्यांकन-फलन $\overline{\mathfrak{v}} \colon \mathrm{Frm}(\mathcal{L}) \to V$ को आगमनतः इस प्रकार परिभाषित करें:

1. $\overline{\mathfrak{v}}(p_n) = \mathfrak{v}(p_n)$;
2. यदि $\star$ कोई 0-स्थानी संयोजक है, तो $\overline{\mathfrak{v}}(\star) = \widetilde{\star}_{\mathbf{L}}$;
3. यदि $\star$ कोई n-स्थानी संयोजक है, तो

$$\overline{\mathfrak{v}}(\star(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \widetilde{\star}_{\mathbf{L}}(\overline{\mathfrak{v}}(\varphi_1), \ldots, \overline{\mathfrak{v}}(\varphi_n)).$$

परिभाषा 45.9 (संतुष्टि). सूत्र φ किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ द्वारा *संतुष्ट* है, $\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$, तभी और केवल तभी जब $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) \in V^+$, जहाँ V^+, **L** के निर्दिष्ट सत्य-मानों का समुच्चय है।

"$\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$ नहीं" के अर्थ में हम $\mathfrak{v} \nvDash_{\mathbf{L}} \varphi$ लिखते हैं। यदि Γ सूत्र का कोई समुच्चय है, तो $\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \Gamma$ तभी और केवल तभी जब प्रत्येक $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$।

45.6 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ

मान लें बहुमूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ किसी आव्यूह द्वारा दिया गया है। तब हम $\mathbf{L}$ के लिए प्रचलित अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 45.10.

1. सूत्र φ *संतुष्ट्य* है यदि किसी $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$; और *असंतुष्ट्य* है यदि किसी भी $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ न हो;
2. सूत्र φ *सर्वसत्यता* है यदि सभी सत्य-मूल्यांकन v के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$;
3. यदि Γ सूत्र का कोई समुच्चय है, तो $\Gamma \vDash \varphi$ ("Γ से φ का अनुगमन होता है") तभी और केवल तभी जब प्रत्येक ऐसे सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ जिसके लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$।
4. यदि Γ सूत्र का कोई समुच्चय है, तो Γ *संतुष्ट्य* है यदि कोई ऐसा सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ हो जिसके लिए $\mathfrak{v} \vDash \Gamma$; अन्यथा Γ *असंतुष्ट्य* है।

इन धारणाओं के लिए हमारे पास चिरसम्मत तर्कशास्त्र वाली स्थिति के कुछ समान तथ्य हैं:

प्रतिज्ञप्ति 45.11.

1. *φ सर्वसत्यता तभी और केवल तभी है जब $\emptyset \vDash \varphi$;*
2. *यदि Γ संतुष्ट्य है, तो Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय भी संतुष्ट्य है;*
3. *एकदिष्टता: यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Delta \vDash \varphi$ भी;*
4. *संक्रामकता: यदि $\Gamma \vDash \varphi$ और $\Delta \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vDash \psi$;*

प्रमाण. अभ्यास। □

चिरसम्मत तर्कशास्त्र में हम अनुगमन और सप्रतिबंध को जोड़ सकते हैं। उदाहरणार्थ, *मोदुस पोनेन्स* की वैधता है: यदि $\Gamma \vDash \varphi$ और $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, तो $\Gamma \vDash \psi$। चिरसम्मत तर्कशास्त्र में $\vDash$ और $\to$ का दूसरा महत्त्वपूर्ण संबंध अर्थवैज्ञानिक निगमन प्रमेय है: $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$ तभी और केवल तभी जब $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$। ये परिणाम बहुमूल्य तर्कशास्त्रों में सदा लागू *नहीं* होते। उनका लागू होना सत्य-फलन $\widetilde{\to}$ पर निर्भर है।

45.7 C के उपतर्कशास्त्रों के रूप में बहुमूल्य तर्कशास्त्र

सभी प्रचलित बहुमूल्य तर्कशास्त्र ऐसे आव्यूहों से परिभाषित होते हैं जिनमें $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ के तर्कों पर सत्य-फलन का मान चिरसम्मत सत्य-फलनों से मेल खाता है। विशेषतः, इन तर्कशास्त्रों में यदि $x \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, तो $\widetilde{\neg}_{\mathbf{L}}(x) = \widetilde{\neg}_{\mathbf{C}}(x)$; और $\star$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ में से कोई भी हो, यदि $x, y \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, तो $\widetilde{\star}_{\mathbf{L}}(x, y) = \widetilde{\star}_{\mathbf{C}}(x, y)$। दूसरे शब्दों में, $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ तक प्रतिबंधित $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ के सत्य-फलन ठीक चिरसम्मत सत्य-फलन हैं।

प्रतिज्ञप्ति 45.12. *मान लें किसी बहुमूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ की भाषा में संयोजक $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ हैं, $\mathbb{T}, \mathbb{F} \in V$, और उसके सत्य-फलन निम्न को संतुष्ट करते हैं:*

1. *$\widetilde{\neg}_{\mathbf{L}}(x) = \widetilde{\neg}_{\mathbf{C}}(x)$ यदि $x = \mathbb{T}$ अथवा $x = \mathbb{F}$;*
2. *$\widetilde{\wedge}_{\mathbf{L}}(x, y) = \widetilde{\wedge}_{\mathbf{C}}(x, y)$,*
3. *$\widetilde{\vee}_{\mathbf{L}}(x, y) = \widetilde{\vee}_{\mathbf{C}}(x, y)$,*
4. *$\widetilde{\to}_{\mathbf{L}}(x, y) = \widetilde{\to}_{\mathbf{C}}(x, y)$, यदि $x, y \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$।*

तब V में ऐसे किसी भी मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए कि $\mathfrak{v}(p) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) = \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\varphi)$।

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा।

1. यदि $\varphi \equiv p$ परमाण्विक है, तो $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) = \mathfrak{v}(p) = \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\varphi)$.

2. यदि $\varphi \equiv \neg B$, तो

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) &= \widetilde{\neg}_{\mathbf{L}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\psi)) && \text{परिभाषा 45.8 से} \\
&= \widetilde{\neg}_{\mathbf{L}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi)) && \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
&= \widetilde{\neg}_{\mathbf{C}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi)) && \text{परिकल्पना (1) से,} \\
& && \text{क्योंकि } \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}, \\
&= \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\varphi) && \text{परिभाषा 45.8 से।}
\end{aligned}$$

3. यदि $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, तो

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) &= \widetilde{\wedge}_{\mathbf{L}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\psi), \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\chi)) && \text{परिभाषा 45.8 से} \\
&= \widetilde{\wedge}_{\mathbf{L}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi), \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\chi)) && \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
&= \widetilde{\wedge}_{\mathbf{C}}(\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi), \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\chi)) && \text{परिकल्पना (2) से,} \\
& && \text{क्योंकि } \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi), \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\chi) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}, \\
&= \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\varphi) && \text{परिभाषा 45.8 से।}
\end{aligned}$$

$\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ और $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ वाली स्थितियाँ समान हैं। □

उपप्रमेय 45.13. *यदि कोई बहुमूल्य तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्ति 45.12 की शर्तें संतुष्ट करता है, $\mathbb{T} \in V^+$ और $\mathbb{F} \notin V^+$, तो $\vDash_{\mathbf{L}} \subseteq \vDash_{\mathbf{C}}$, अर्थात् यदि $\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} \psi$, तो $\Gamma \vDash_{\mathbf{C}} \psi$। विशेषतः, $\mathbf{L}$ की प्रत्येक सर्वसत्यता चिरसम्मत सर्वसत्यता भी है।*

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करते हैं। मान लें $\Gamma \nvDash_{\mathbf{C}} \psi$। तब कोई ऐसा सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v} \colon \mathrm{At}_0 \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ है कि सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{T}$ और $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{C}}(\psi) = \mathbb{F}$। चूँकि $\mathbb{T}, \mathbb{F} \in V$, इसलिए सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$, $\mathbf{L}$ के लिए भी सत्य-मूल्यांकन है। प्रतिज्ञप्ति 45.12 से सभी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\varphi) = \mathbb{T}$ और $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{L}}(\psi) = \mathbb{F}$। चूँकि $\mathbb{T} \in V^+$ और $\mathbb{F} \notin V^+$, इसका अर्थ है $\mathfrak{v} \vDash_{\mathbf{L}} \Gamma$ और $\mathfrak{v} \nvDash_{\mathbf{L}} \psi$, अर्थात् $\Gamma \nvDash_{\mathbf{L}} \psi$। □

प्रश्न

प्रश्न 45.1. प्रतिज्ञप्ति 45.11 सिद्ध करें।

अध्याय 46

त्रिमूल्य तर्कशास्त्र

46.1 परिचय

$\mathbb{T}$ और $\mathbb{F}$ में केवल एक और मान $\mathbb{U}$ जोड़ने पर हमें त्रिमूल्य तर्कशास्त्र मिलता है। यद्यपि केवल एक अतिरिक्त सत्य-मान है, फिर भी $\neg$, $\wedge$, $\vee$ और $\rightarrow$ के सत्य-फलन परिभाषित करने की संभावनाएँ काफी अधिक हैं। तब कोई तर्कशास्त्र इन सत्य-फलनों का कोई भी संयोजन उपयोग कर सकता है; और केवल $\mathbb{T}$ को निर्दिष्ट बनाने अथवा $\mathbb{T}$ तथा $\mathbb{U}$ दोनों को निर्दिष्ट बनाने का विकल्प भी है।

यहाँ हम सबसे प्रसिद्ध त्रिमूल्य तर्कशास्त्रों का चयन, उनकी प्रेरणाएँ और उनके कुछ गुण प्रस्तुत करते हैं।

46.2 लुकासिएविच तर्कशास्त्र

बहुमूल्य तर्कशास्त्र के आरंभिक प्रकाशित और सुविकसित प्रस्तावों में से एक पोलिश दार्शनिक यान लुकासिएविच ने 1921 में प्रस्तुत किया था। लुकासिएविच को अरस्तू की समुद्री युद्ध की समस्या ने प्रेरित किया था: ऐसा लगता है कि *आज* यह वाक्य, "कल समुद्री युद्ध होगा", न तो सत्य है और न असत्य: उसका सत्य-मूल्य अभी निर्धारित नहीं हुआ है। लुकासिएविच ने ऐसे "भविष्यगत आपातिक" वाक्यों के लिए एक तीसरा सत्य-मूल्य जोड़ने का प्रस्ताव रखा।

> मैं बिना किसी विरोधाभास के यह मान सकता हूँ कि अगले वर्ष के किसी निश्चित क्षण में, उदाहरणार्थ 21 दिसंबर को दोपहर के समय, वारसा में मेरी उपस्थिति वर्तमान समय में न तो सकारात्मक रूप से और न नकारात्मक रूप से निर्धारित है। अतः यह संभव है, किंतु आवश्यक नहीं, कि मैं दिए हुए समय पर वारसा में उपस्थित रहूँगा। इस धारणा पर यह प्रतिज्ञप्ति, "मैं अगले वर्ष 21 दिसंबर को दोपहर में वारसा में रहूँगा", वर्तमान समय में न तो सत्य हो सकती है और न असत्य। क्योंकि यदि वह अभी सत्य होती, तो वारसा में मेरी भावी उपस्थिति आवश्यक होनी चाहिए थी, जो धारणा के विरुद्ध है। दूसरी ओर, यदि वह अभी असत्य होती, तो वारसा में मेरी भावी उपस्थिति असंभव होनी चाहिए थी, जो भी धारणा के विरुद्ध है। अतः विचाराधीन प्रतिज्ञप्ति इस समय न सत्य है न असत्य और उसका कोई तीसरा मूल्य होना चाहिए, जो "0" अर्थात् असत्यता और "1" अर्थात् सत्यता से भिन्न हो। इस मूल्य को हम "$\frac{1}{2}$" से निर्दिष्ट कर सकते हैं। यह "संभव" को निरूपित करता है और तीसरे मूल्य के रूप में "सत्य" तथा "असत्य" के साथ जुड़ता है।

लुकासिएविच के तीसरे सत्य-मूल्य के लिए हम $\mathbb{U}$ का प्रयोग करेंगे। [1]

इस व्याख्या पर संयोजकों $\neg$, $\wedge$ और $\vee$ के सत्य-फलन आसानी से निर्धारित किए जा सकते हैं: किसी भविष्यगत आपातिक वाक्य का निषेध भी भविष्यगत आपातिक वाक्य होता है, अतः $\tilde{\neg}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$। यदि किसी संयोजन का एक संयोज्य अनिर्धारित और दूसरा सत्य हो, तो संयोजन भी अनिर्धारित होता है—अंततः, भविष्यगत आपातिक संयोज्य का

[1] यहाँ लुकासिएविच "संभव" शब्द का प्रयोग आज के प्रचलित अर्थ से भिन्न अर्थ में करते हैं, अर्थात् संभव किंतु आवश्यक नहीं।

परिणाम कैसा निकलता है, उसके अनुसार संयोजन सत्य भी निकल सकता है और असत्य भी। अतः

$$\widetilde{\wedge}(\mathbb{T}, \mathbb{U}) = \widetilde{\wedge}(\mathbb{U}, \mathbb{T}) = \mathbb{U}.$$

परंतु यदि दूसरा संयोज्य असत्य हो, तो संयोजन सत्य नहीं निकल सकता, अतः

$$\widetilde{\wedge}(\mathbb{F}, \mathbb{U}) = \widetilde{\wedge}(\mathbb{F}, \mathbb{U}) = \mathbb{F}.$$

अन्य मानों के लिए (जब तर्क निर्धारित सत्य-मूल्य, $\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$, हों) परिणाम शास्त्रीय तर्कशास्त्र जैसे होते हैं।

सशर्त के मामले में स्थिति कुछ अधिक जटिल है। मान लें कि q एक भविष्यगत आपातिक कथन है। यदि p असत्य है, तो q का परिणाम चाहे जो हो, $p \to q$ सत्य होगा, अतः हमें $\widetilde{\to}(\mathbb{F}, \mathbb{U}) = \mathbb{T}$ रखना चाहिए। और यदि p सत्य है, तो q का परिणाम चाहे जो हो, $q \to p$ सत्य होगा, अतः $\widetilde{\to}(\mathbb{U}, \mathbb{T}) = \mathbb{T}$। यदि p सत्य है, तो $p \to q$ सत्य या असत्य निकल सकता है, अतः $\widetilde{\to}(\mathbb{T}, \mathbb{U}) = \mathbb{U}$। इसी तरह, यदि p असत्य है, तो $q \to p$ सत्य या असत्य निकल सकता है, अतः $\widetilde{\to}(\mathbb{U}, \mathbb{F}) = \mathbb{U}$। अब वह स्थिति बचती है जिसमें p और q दोनों भविष्यगत आपातिक हैं। प्रेरक विचार के आधार पर हमें इस स्थिति में वास्तव में $\mathbb{U}$ देना चाहिए। किंतु इससे $\varphi \to \varphi$ सर्वसत्यता *नहीं* रहेगा। लुकासिएविच को $\varphi \vee \neg\varphi$ और $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ छोड़ने में कठिनाई नहीं हुई, पर $\varphi \to \varphi$ छोड़ने पर वे हिचक गए। इसलिए उन्होंने निर्धारित किया कि $\widetilde{\to}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \mathbb{T}$।

परिभाषा 46.1. त्रिमूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।
2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ एकमात्र निर्दिष्ट मूल्य है, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}\}$।
4. सत्य-फलन निम्नलिखित सारणियों से दिए जाते हैं:

$\widetilde{\neg}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{\wedge}_{Ł_3}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\vee}_{Ł_3}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\to}_{Ł_3}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

आसानी से देखा जा सकता है कि केवल $\neg$, $\wedge$ और $\vee$ वाली कोई भी सूत्र φ, यदि उसके सभी प्रतिज्ञप्ति चरों को $\mathbb{U}$ दिया गया हो, तो सत्य-मूल्य $\mathbb{U}$ लेगी। इसलिए, उदाहरण के लिए, शास्त्रीय सर्वसत्यताएँ $p \vee \neg p$ और $\neg(p \wedge \neg p)$ $Ł_3$ में सर्वसत्यताएँ नहीं हैं, क्योंकि $\mathfrak{v}(p) = \mathbb{U}$ होने पर $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{U}$ होता है।

जिन सत्य-मूल्यांकन में $\mathfrak{v}(p) = \mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$ हो, उनमें $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi)$ अपने शास्त्रीय सत्य-मूल्य के समान होगा।

प्रतिज्ञप्ति 46.2. *यदि φ में आने वाले प्रत्येक p के लिए $\mathfrak{v}(p) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, तो $\overline{\mathfrak{v}}_{Ł_3}(\varphi) = \overline{\mathfrak{v}}_{\mathsf{C}}(\varphi)$।*

बहुत-सी शास्त्रीय सर्वसत्यताएँ $Ł_3$ में भी सर्वसत्यताएँ हैं, जैसे $\neg p \to (p \to q)$। शास्त्रीय तर्कशास्त्र की ही तरह, हम सत्य-सारणी से इसकी जाँच कर सकते हैं:

p	q	$\neg$	p	$\to$	$(p$	$\to$	$q)$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$

इसलिए शायद यह सोचा जा सकता है कि यद्यपि सभी शास्त्रीय सर्वसत्यताएँ $\mathbf{Ł}_3$ में सर्वसत्यताएँ नहीं हैं, फिर भी प्रत्येक सत्य-मूल्यांकन पर उन्हें कम-से-कम $\mathbb{T}$ या $\mathbb{U}$ मूल्य लेना चाहिए। किंतु ऐसा नहीं है। इसका एक प्रतिदृष्टांत है

$$\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p),$$

जो p का मूल्य $\mathbb{U}$ होने पर $\mathbb{F}$ है।

लुकासिएविच ने अपनी त्रिमूल्य प्रणाली के आधार पर संभावना का तर्कशास्त्र बनाने की आशा की थी। इसके लिए उन्होंने एक-स्थानिक संयोजक $\Diamond\varphi$ (जिसका अर्थ है "φ संभव है") और संगत $\Box\varphi$ (जिसका अर्थ है "φ आवश्यक है") प्रस्तुत किए:

$\widetilde{\Diamond}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\Box}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

दूसरे शब्दों में, p तभी संभव है जब वह पहले से असत्य के रूप में निर्धारित न हो; और p तभी आवश्यक है जब वह पहले से सत्य के रूप में निर्धारित हो।

किंतु इस प्रस्तावित मोडल तर्कशास्त्र की कमियाँ शीघ्र ही स्पष्ट हो गईं: परिस्थितियाँ चाहे जैसी निकलें, $p \wedge \neg p$ कभी सत्य नहीं निकल सकता। इसलिए, भले ही अभी उसका निश्चय न हुआ हो (और इस कारण वह अनिर्धारित हो), उसे असंभव माना जाना चाहिए; अर्थात् $\neg\Diamond(p \wedge \neg p)$ एक सर्वसत्यता होनी चाहिए। किंतु यदि $\mathfrak{v}(p) = \mathbb{U}$, तो $\overline{\mathfrak{v}}(\neg\Diamond(p \wedge \neg p)) = \mathbb{U}$। लुकासिएविच का यह कहना सही था कि संभावना और आवश्यकता जैसे मोडल भेदों को समायोजित करने के लिए दो सत्य-मूल्य पर्याप्त नहीं होंगे, पर तीसरा सत्य-मूल्य जोड़ना भी पर्याप्त नहीं है।

46.3 क्लिनी तर्कशास्त्र

स्टीफन क्लिनी ने ऐसे दृष्टिकोण से प्रेरित दो त्रिमूल्य तर्कशास्त्र प्रस्तुत किए जिसमें सत्य-मानों को संगणनात्मक प्रक्रियाओं के परिणाम माना जाता है: कोई प्रक्रिया $\mathbb{T}$ अथवा $\mathbb{F}$ दे सकती है, पर समाप्त होने में विफल भी हो सकती है। उस स्थिति में अनुरूप सत्य-मान अपरिभाषित है, जिसे सत्य-मान $\mathbb{U}$ से दर्शाते हैं।

किसी प्रतिज्ञप्ति φ का निषेध संगणित करने के लिए पहले φ का मान संगणित करके परिणाम का विपरीत लौटाएँगे। यदि φ की संगणना समाप्त नहीं होती, तो पूरी प्रक्रिया भी समाप्त नहीं होती; अतः $\mathbb{U}$ का निषेध $\mathbb{U}$ है।

संयोजन $\varphi \wedge \psi$ संगणित करने के दो विकल्प हैं: पहले φ, फिर ψ संगणित करें; दोनों का परिणाम $\mathbb{T}$ होने पर परिणाम $\mathbb{T}$, और अन्यथा $\mathbb{F}$ होगा। यदि कोई एक संगणना रुकने में विफल हो, तो पूरी प्रक्रिया भी विफल होती है। अतः इस स्थिति में यदि कोई एक संयोज्य अपरिभाषित है, तो संयोजन भी अपरिभाषित है। वियोजन के लिए भी यही बात लागू होती है।

किंतु यदि हम φ और ψ का मूल्यांकन समांतर रूप से कर सकें, तो बेहतर कर सकते हैं। तब यदि दोनों प्रक्रियाओं में से कोई रुककर $\mathbb{F}$ लौटाए, तो हम रुक सकते हैं, क्योंकि उत्तर असत्य ही होगा। अतः उस स्थिति में एक असत्य संयोज्य

वाला संयोजन असत्य है, चाहे दूसरा संयोज्य अपरिभाषित हो। इसी प्रकार, वियोजन को समांतर संगणित करते समय किसी एक वियोज्य की प्रक्रिया के सत्य लौटाते ही हम रुक सकते हैं; तब वियोजन सत्य ही होगा। अतः इस स्थिति में कोई घटक अपरिभाषित होने पर भी हम संयुक्त कथन का परिणाम जान सकते हैं। इस निर्वचन में $\mathbb{U}$ को "अपरिभाषित" के बदले "अज्ञात" पढ़ सकते हैं।

दोनों निर्वचनों से क्लिनी के प्रबल और दुर्बल तर्कशास्त्र मिलते हैं। सप्रतिबंध को $\neg\varphi \vee \psi$ के तुल्य परिभाषित किया जाता है।

परिभाषा 46.3. *प्रबल क्लिनी तर्कशास्त्र* **Ks** इस आव्यूह से परिभाषित है:

1. मानक प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा $\mathcal{L}_0$, जिसमें $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
2. सत्य-मानों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ एकमात्र निर्दिष्ट मान है, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}\}$।
4. सत्य-फलन निम्न सारणियों से दिए जाते हैं:

$\widetilde{\neg}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{\wedge}_{\mathbf{Ks}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\vee}_{\mathbf{Ks}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\rightarrow}_{\mathbf{Ks}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

परिभाषा 46.4. *दुर्बल क्लिनी तर्कशास्त्र* **Kw** इस आव्यूह से परिभाषित है:

1. मानक प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा $\mathcal{L}_0$, जिसमें $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
2. सत्य-मानों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ एकमात्र निर्दिष्ट मान है, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}\}$।
4. सत्य-फलन निम्न सारणियों से दिए जाते हैं:

$\widetilde{\neg}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{\wedge}_{\mathbf{Kw}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\vee}_{\mathbf{Kw}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\rightarrow}_{\mathbf{Kw}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$

प्रतिज्ञप्ति 46.5. **Ks** *और* **Kw** *की कोई सर्वसत्यता नहीं है।*

प्रमाण. यदि सभी प्रतिज्ञप्ति चर p के लिए $\mathfrak{v}(p) = \mathbb{U}$, तो किसी भी सूत्र φ का सत्य-मान $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{U}$ होगा, क्योंकि

$$\widetilde{\neg}(\mathbb{U}) = \widetilde{\vee}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \widetilde{\wedge}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \widetilde{\rightarrow}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \mathbb{U}$$

दोनों तर्कशास्त्रों में। चूँकि **Ks** और **Kw** दोनों के लिए $\mathbb{U} \notin V^+$, इसलिए इस सत्य-मूल्यांकन में φ निर्दिष्ट नहीं होगा।□

यद्यपि दुर्बल और प्रबल दोनों क्लिनी तर्कशास्त्रों की कोई सर्वसत्यता नहीं, उनके परिणाम-संबंध अतुच्छ हैं।

दिमित्री बोचवार ने $\mathbb{U}$ का निर्वचन "अर्थहीन" के रूप में किया और यह नियम रखकर मिथ्यावादी विरोधाभास जैसे विरोधाभासों को हल करने का प्रयास किया कि विरोधाभासी वाक्य $\mathbb{U}$ मान लें। उन्होंने ऐसा तर्कशास्त्र प्रस्तुत किया जो मूलतः अतिरिक्त संयोजकों से विस्तारित दुर्बल क्लिनी तर्कशास्त्र है; इनमें दो हैं "बाह्य निषेध" और "अपरिभाषित है" संक्रियक:

$\widetilde{\sim}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{+}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

46.4 गोडेल तर्कशास्त्र

कुर्ट गोडेल ने n-मूल्य तर्कशास्त्रों का ऐसा अनुक्रम प्रस्तुत किया जिनमें से प्रत्येक में अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में वैध सभी सूत्र समाहित हैं और जो चिरसम्मत तर्कशास्त्र में समाहित हैं। यह पहला रोचक उदाहरण है:

परिभाषा 46.6. *3-मूल्य गोडेल तर्कशास्त्र* **G** इस आव्यूह से परिभाषित है:

1. मानक प्रतिज्ञप्तिपरक भाषा $\mathcal{L}_0$, जिसमें $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
2. सत्य-मानों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ एकमात्र निर्दिष्ट मान है, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}\}$।
4. $\bot$ के लिए $\widetilde{\bot} = \mathbb{F}$। शेष संयोजकों के सत्य-फलन निम्न सारणियों से दिए जाते हैं:

$\widetilde{\neg}_{\mathbf{G}}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\widetilde{\wedge}_{\mathbf{G}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\vee}_{\mathbf{G}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{U}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$

$\widetilde{\rightarrow}_{\mathbf{G}}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

आप देखेंगे कि $\wedge$ और $\vee$ की सत्य-सारणियाँ लुकासिएविच तथा प्रबल क्लिनी तर्कशास्त्र जैसी ही हैं, किंतु $\neg$ और $\rightarrow$ की सत्य-सारणियाँ तीनों में भिन्न हैं। गोडेल तर्कशास्त्र में $\widetilde{\neg}(\mathbb{U}) = \mathbb{F}$। लुकासिएविच और क्लिनी तर्कशास्त्र के विपरीत $\widetilde{\rightarrow}(\mathbb{U}, \mathbb{F}) = \mathbb{F}$; और क्लिनी तर्कशास्त्र के विपरीत (पर लुकासिएविच तर्कशास्त्र की तरह), $\widetilde{\rightarrow}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \mathbb{T}$।

ऊपर संकेतित अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र से संबंध के अनुसार $\mathbf{G}_3$ अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के निकट है। सभी अंतः-प्रज्ञावादी सत्य $\mathbf{G}_3$ में सर्वसत्यताएँ हैं; और जो अनेक चिरसम्मत सर्वसत्यताएँ अंतःप्रज्ञावादी रूप से वैध नहीं हैं, वे $\mathbf{G}_3$ में भी सर्वसत्यताएँ नहीं हैं। उदाहरणार्थ, निम्न सर्वसत्यताएँ नहीं हैं:

$p \vee \neg p$	$(p \to q) \to (\neg p \vee q)$
$\neg\neg p \to p$	$\neg(\neg p \wedge \neg q) \to (p \vee q)$
$((p \to q) \to p) \to p$	$\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$

किंतु $\mathbf{G}_3$ की प्रत्येक सर्वसत्यता अंतःप्रज्ञावादी रूप से वैध भी नहीं है; जैसे $\neg\neg p \vee \neg p$ अथवा $(p \to q) \vee (q \to p)$।

46.5 केवल $\mathbb{T}$ को निर्दिष्ट न करना

अब तक हमने जितने तर्कशास्त्र देखे हैं, उन सभी में निर्दिष्ट सत्य-मूल्यों का समुच्चय $V^+ = \{\mathbb{T}\}$ था; अर्थात् कोई चीज तभी सत्य मानी जाती है जब उसका सत्य-मूल्य $\mathbb{T}$ हो। किंतु किसी चीज को केवल $\mathbb{F}$ न होने पर भी सत्य माना जा सकता है। तब, उदाहरणार्थ, आव्यूह में $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ निर्धारित करके एक तर्कशास्त्र प्राप्त होगा।

परिभाषा 46.7. *विरोधाभास का तर्कशास्त्र* **LP** निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\neg, \wedge, \vee, \to$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।
2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ और $\mathbb{U}$ निर्दिष्ट हैं, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$।
4. सत्य-फलन प्रबल क्लिनी तर्कशास्त्र के समान हैं।

परिभाषा 46.8. हॉल्डेन का *निरर्थकता का तर्कशास्त्र* **Hal** निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\neg, \wedge, \vee, \to$ और एक 1-स्थानिक संयोजक $+$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।
2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ और $\mathbb{U}$ निर्दिष्ट हैं, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$।
4. सत्य-फलन दुर्बल क्लिनी तर्कशास्त्र के समान हैं, और इनके साथ "निरर्थक है" संकारक भी है:

$\widetilde{+}$	
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

जिन क्लिनी तर्कशास्त्रों के साथ इनकी सत्य-सारणियाँ समान हैं, उनके विपरीत इनमें सर्वसत्यताएँ *होती हैं*।

प्रतिज्ञप्ति 46.9. **LP** *की सर्वसत्यताएँ वही हैं जो शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र की सर्वसत्यताएँ हैं।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 45.12 के अनुसार, यदि $\vDash_{\mathbf{LP}} \varphi$ तो $\vDash_{\mathbf{C}} \varphi$। विलोम दिखाने के लिए हम सिद्ध करते हैं कि यदि कोई सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}\colon \mathrm{At}_0 \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ ऐसा है कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\varphi) = \mathbb{F}$, तो कोई सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}'\colon \mathrm{At}_0 \to \{\mathbb{F}, \mathbb{T}\}$ ऐसा है कि $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{F}$। इससे **LP** के लिए परिणाम स्थापित हो जाता है, क्योंकि **Ks** और **LP** के अभिलाक्षणिक सत्य-फलन समान हैं और $\mathbb{F}$, **LP** का एकमात्र अनिर्दिष्ट सत्य-मूल्य है (**LP** और **Ks** में केवल यही अंतर है)। अतः यदि

$\nvDash_{\mathbf{LP}} \varphi$, तो किसी सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{LP}}(\varphi) = \overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\varphi) = \mathbb{F}$। हमारे दावे के अनुसार $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{F}$, अर्थात् $\nvDash_{\mathbf{C}} \varphi$।

दावा स्थापित करने के लिए पहले $\mathfrak{v}'$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\mathfrak{v}'(p) = \begin{cases} \mathbb{T} & \text{यदि } \mathfrak{v}(p) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\} \\ \mathbb{F} & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

अब हम φ पर आगमन से दिखाते हैं कि (a) यदि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\varphi) = \mathbb{F}$, तो $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{F}$, और (b) यदि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\varphi) = \mathbb{T}$, तो $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{T}$।

1. आगमन-आधार: $\varphi \equiv p$। परिभाषा 45.8 के अनुसार, $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\varphi) = \mathfrak{v}(p) = \overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi)$, जिससे (a) और (b) दोनों निष्कर्ष निकलते हैं।

   आगमन-चरण के लिए निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करें:

2. $\varphi \equiv \neg\psi$।

   a) मान लें कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\neg\psi) = \mathbb{F}$। $\widetilde{\neg}_{\mathbf{Ks}}$ की परिभाषा से $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{T}$। आगमन-परिकल्पना के (b) मामले से $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi) = \mathbb{T}$ मिलता है, अतः $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\neg\psi) = \mathbb{F}$।

   b) मान लें कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\neg\psi) = \mathbb{T}$। $\widetilde{\neg}_{\mathbf{Ks}}$ की परिभाषा से $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{F}$। आगमन-परिकल्पना के (a) मामले से $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi) = \mathbb{F}$ मिलता है, अतः $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\neg\psi) = \mathbb{T}$।

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$।

   a) मान लें कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi \wedge \chi) = \mathbb{F}$। $\widetilde{\wedge}_{\mathbf{Ks}}$ की परिभाषा से $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{F}$ या $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{F}$। आगमन-परिकल्पना के (a) मामले से $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi) = \mathbb{F}$ या $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\chi) = \mathbb{F}$ मिलता है, अतः $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi \wedge \chi) = \mathbb{F}$।

   b) मान लें कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi \wedge \chi) = \mathbb{T}$। $\widetilde{\wedge}_{\mathbf{Ks}}$ की परिभाषा से $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{T}$ और $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{Ks}}(\psi) = \mathbb{T}$। आगमन-परिकल्पना के (b) मामले से $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi) = \mathbb{T}$ और $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\chi) = \mathbb{T}$ मिलता है, अतः $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\psi \wedge \chi) = \mathbb{T}$।

अन्य दो मामले इसी प्रकार हैं और अभ्यास के लिए छोड़े गए हैं। वैकल्पिक रूप से, ऊपर का प्रमाण केवल $\neg$ और $\wedge$ वाली सभी सूत्रों के लिए परिणाम स्थापित करता है। अब इस तथ्य का उपयोग किया जा सकता है कि **Ks** और **C** दोनों में, प्रत्येक $\mathfrak{v}$ के लिए, $\overline{\mathfrak{v}}(\psi \vee \chi) = \overline{\mathfrak{v}}(\neg(\neg\psi \wedge \neg\chi))$ और $\overline{\mathfrak{v}}(\psi \to \chi) = \overline{\mathfrak{v}}(\neg(\psi \wedge \neg\chi))$। □

यद्यपि इनकी सर्वसत्यताएँ शास्त्रीय तर्कशास्त्र जैसी ही हैं, इनके परिणाम संबंध भिन्न हैं। उदाहरणार्थ, **LP** इस अर्थ में *परासंगत* है कि $\neg p, p \nvDash q$; अतः विस्फोट सिद्धांत $\neg\varphi, \varphi \vDash \psi$ सामान्यतः मान्य नहीं है। (यह φ और ψ के कुछ मामलों में मान्य है, जैसे जब ψ सर्वसत्यता हो।)

यदि $\mathbf{Ł}_3$ में $\mathbb{U}$ को निर्दिष्ट कर दिया जाए तो क्या होगा?

परिभाषा 46.10. *त्रिमूल्य आर-मिंगल* $\mathbf{RM}_3$ निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\bot, \neg, \wedge, \vee, \to$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।
2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय $V = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{F}\}$।
3. $\mathbb{T}$ और $\mathbb{U}$ निर्दिष्ट हैं, अर्थात् $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$।
4. सत्य-फलन लुकासिएविच तर्कशास्त्र $\mathbf{Ł}_3$ के समान हैं।

कभी-कभी केवल निर्दिष्ट मूल्यों को बदलने से भिन्न सत्य-सारणियाँ एक ही तर्कशास्त्र (परिणाम संबंध) उत्पन्न कर सकती हैं। उदाहरणार्थ, गोडेल तर्कशास्त्र में $V^+ = \{\mathbb{T}\}$ के स्थान पर $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ लेने पर ऐसा होता है।

प्रतिज्ञप्ति 46.11. $V = \{\mathbb{F}, \mathbb{U}, \mathbb{T}\}$, $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ *और त्रिमूल्य गोडेल तर्कशास्त्र के सत्य-फलनों वाला आव्यूह शास्त्रीय तर्कशास्त्र को परिभाषित करता है।*

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रश्न

प्रश्न 46.1. मान लें कि हम $Ł_3$ में $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{\mathfrak{v}}((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ परिभाषित करते हैं। तब $\leftrightarrow$ की सत्य-सारणी क्या होगी?

प्रश्न 46.2. दिखाइए कि निम्नलिखित $Ł_3$ में सर्वसत्यताएँ हैं:

1. $p \to (q \to p)$
2. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
3. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

((2) और (3) में $\varphi \leftrightarrow \psi$ को $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ का संक्षिप्त रूप मानें, या प्रश्न 46.1 के अपने हल का उपयोग करें।)

प्रश्न 46.3. दिखाइए कि निम्नलिखित शास्त्रीय सर्वसत्यताएँ $Ł_3$ में सर्वसत्यताएँ नहीं हैं:

1. $(\neg p \wedge p) \to q)$
2. $((p \to q) \to p) \to p$
3. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$

प्रश्न 46.4. निम्नलिखित में से कौन-से संबंध लुकासिएविच तर्कशास्त्र में मान्य हैं? प्रत्येक के लिए सत्य-सारणी दीजिए।

1. $p, p \to q \vDash q$
2. $\neg\neg p \vDash p$
3. $p \wedge q \vDash p$
4. $p \vDash p \wedge p$
5. $p \vDash p \vee q$

प्रश्न 46.5. दिखाइए कि $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$ और $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$, $\Box$ और $\Diamond$ की सत्य-सारणियों से विस्तारित $Ł_3$ में सर्वसत्यताएँ हैं।

प्रश्न 46.6. निम्न में से कौन-से संबंध (क) प्रबल और (ख) दुर्बल क्लिनी तर्कशास्त्र में लागू होते हैं? प्रत्येक के लिए सत्य-सारणी दें।

1. $p, p \to q \vDash q$
2. $p \vee q, \neg p \vDash q$
3. $p \wedge q \vDash p$
4. $p \vDash p \wedge p$
5. $p \vDash p \vee q$

प्रश्न 46.7. क्या आप बोचवार के तर्कशास्त्र में $\sim$ को $\neg$ और $+$ के पदों में परिभाषित कर सकते हैं? अर्थात् केवल प्रतिज्ञप्ति चर p वाला, $\sim$ रहित ऐसा सूत्र खोजें जो सदा $\sim p$ वाला ही सत्य-मान ले। अपनी बात दिखाने के लिए सत्य-सारणी दें।

प्रश्न 46.8. यह दिखाने के लिए सत्य-सारणियाँ दें कि निम्न $\mathbf{G}_3$ की सर्वसत्यताएँ हैं:

$$\neg\neg p \vee \neg p$$
$$(p \to q) \vee (q \to p)$$
$$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$$
$$(p \to q) \vee (q \to r) \vee (r \to s)$$

प्रश्न 46.9. यह दिखाने वाली सत्य-सारणियाँ दें कि निम्न $\mathbf{G}_3$ की सर्वसत्यताएँ नहीं हैं:

$$(p \to q) \to (\neg p \vee q)$$
$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \to (p \vee q)$$
$$((p \to q) \to p) \to p$$
$$\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$$

प्रश्न 46.10. निम्न में से कौन-से संबंध गोडेल तर्कशास्त्र में लागू होते हैं? प्रत्येक के लिए सत्य-सारणी दें।

1. $p, p \to q \vDash q$
2. $p \vee q, \neg p \vDash q$
3. $p \wedge q \vDash p$
4. $p \vDash p \wedge p$
5. $p \vDash p \vee q$

प्रश्न 46.11. प्रतिज्ञप्ति 46.9 का प्रमाण पूरा कीजिए; अर्थात् उन मामलों में (a) और (b) स्थापित कीजिए जिनमें $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ और $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$।

प्रश्न 46.12. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक शास्त्रीय सर्वसत्यता **Hal** में सर्वसत्यता है।

प्रश्न 46.13. निम्नलिखित में से कौन-से संबंध (a) **LP** में और (b) **Hal** में मान्य हैं? प्रत्येक के लिए सत्य-सारणी दीजिए।

1. $p, p \to q \vDash q$
2. $\neg q, p \to q \vDash \neg p$
3. $p \vee q, \neg p \vDash q$
4. $\neg p, p \vDash q$
5. $p \vDash p \vee q$
6. $p \to q, q \to r \vDash p \to r$

प्रश्न 46.14. निम्नलिखित में से कौन-से संबंध $\mathbf{RM}_3$ में मान्य हैं?

1. $p, p \to q \vDash q$
2. $p \vee q, \neg p \vDash q$
3. $\neg p, p \vDash q$
4. $p \vDash p \vee q$

प्रश्न 46.15. प्रतिज्ञप्ति 46.11 को इस प्रकार सिद्ध कीजिए: गोडेल तर्कशास्त्र की तरह, पर $V^+ = \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ के साथ परिभाषित तर्कशास्त्र **L** के लिए यदि $\Gamma \nvDash_{\mathbf{L}} \psi$, तो $\Gamma \nvDash_{\mathbf{C}} \psi$। प्रतिज्ञप्ति 46.9 के विचारों का उपयोग कीजिए, किंतु गुण (a) और (b) सिद्ध करने के स्थान पर दिखाइए कि $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{G}}(\varphi) = \mathbb{F}$ तभी जब $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{F}$ (और इसलिए $\overline{\mathfrak{v}}_{\mathbf{G}}(\varphi) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{U}\}$ तभी जब $\overline{\mathfrak{v}'}_{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbb{T}$)। समझाइए कि इससे प्रतिज्ञप्ति क्यों स्थापित होती है।

अध्याय 47

अनंत-मूल्य तर्कशास्त्र

47.1 परिचय

किसी आव्यूह के सत्य-मूल्यों की संख्या परिमित होना आवश्यक नहीं है। अनंत रूप से अनेक सत्य-मूल्यों के समुच्चय के लिए एक स्वाभाविक विकल्प 0 और 1 के बीच की परिमेय संख्याओं का समुच्चय $V_\infty = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ है, अर्थात्

$$V_\infty = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \text{ और } n \leq m\}.$$

इस अनंत सत्य-मूल्य समुच्चय पर विचार करते समय निम्न उपसमुच्चयों पर भी विचार करना प्रायः उपयोगी होता है:

$$V_m = \{\frac{n}{m-1} : n \in \mathbb{N} \text{ और } n \leq m\}.$$

उदाहरणार्थ, V_5 समान अंतराल पर स्थित 5 सत्य-मूल्यों का समुच्चय है:

$$V_5 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}.$$

इन सत्य-मूल्य समुच्चयों पर आधारित तर्कशास्त्रों में सामान्यतः केवल 1 निर्दिष्ट होता है, अर्थात् $V^+ = \{1\}$। दूसरे शब्दों में, हम 1 को (निरपेक्ष) सत्यता और 0 को निरपेक्ष असत्यता की भूमिका देते हैं, किंतु सूत्रें V का कोई भी मध्यवर्ती मूल्य ले सकती हैं।

इसके अतिरिक्त, 0 और 1 के बीच की सभी *वास्तविक* संख्याओं के समुच्चय $V_{[0,1]} = [0,1]$, या $[0,1]$ के अन्य अनंत उपसमुच्चयों पर भी विचार किया जा सकता है। इस सत्य-मूल्य समुच्चय वाले तर्कशास्त्र प्रायः *फ़ज़ी* कहलाते हैं।

47.2 लुकासिएविच तर्कशास्त्र

यह अनंत-मूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र पर एक संक्षिप्त, आरंभिक खंड है।

परिभाषा 47.1. अनंत-मूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र $\mathbf{Ł}_\infty$ निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।
2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय V_∞।

3. 1 एकमात्र निर्दिष्ट मूल्य है, अर्थात् $V^+ = \{1\}$।

4. सत्य-फलन निम्नलिखित फलनों से दिए जाते हैं:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\neg}_{Ł}(x) &= 1 - x \\
\widetilde{\wedge}_{Ł}(x, y) &= \min(x, y) \\
\widetilde{\vee}_{Ł}(x, y) &= \max(x, y) \\
\widetilde{\rightarrow}_{Ł}(x, y) &= \min(1, 1 - (x - y)) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \leq y \\ 1 - (x - y) & \text{अन्यथा।} \end{cases}
\end{aligned}$$

m-मूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र भी इसी प्रकार परिभाषित होता है, केवल $V = V_m$ लिया जाता है।

प्रतिज्ञप्ति 47.2. *परिभाषा 46.1 से परिभाषित तर्कशास्त्र $Ł_3$ वही है जो परिभाषा 47.1 से परिभाषित $Ł_3$ है।*

प्रमाण. इसे परिभाषा 46.1 में संयोजकों के लिए दी गई सत्य-सारणियों की तुलना परिभाषा 47.1 के समीकरणों से निर्धारित सत्य-सारणियों के साथ करके देखा जा सकता है:

$\widetilde{\neg}$	
1	0
1/2	1/2
0	1

$\widetilde{\wedge}_{Ł_3}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\widetilde{\vee}_{Ł_3}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\widetilde{\rightarrow}_{Ł_3}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

□

प्रतिज्ञप्ति 47.3. *यदि $\Gamma \vDash_{Ł_\infty} \psi$, तो प्रत्येक $m \geq 2$ के लिए $\Gamma \vDash_{Ł_m} \psi$।*

प्रमाण. अभ्यास। □

वास्तव में विलोम भी मान्य है।

अनंत-मूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र सर्वाधिक लोकप्रिय फ़ज़ी तर्कशास्त्र है। फ़ज़ी तर्कशास्त्र के साहित्य में सशर्त को प्रायः $\neg\varphi \vee \psi$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। इससे अनंत-मूल्य प्रबल क्लिनी तर्कशास्त्र प्राप्त होगा।

47.3 गोडेल तर्कशास्त्र

यह अनंत-मूल्य गोडेल तर्कशास्त्र पर एक संक्षिप्त, आरंभिक खंड है।

परिभाषा 47.4. अनंत-मूल्य गोडेल तर्कशास्त्र $\mathbf{G}_\infty$ निम्नलिखित आव्यूह से परिभाषित होता है:

1. $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ वाली मानक प्रतिज्ञप्तिक भाषा $\mathcal{L}_0$।

2. सत्य-मूल्यों का समुच्चय V_∞।

3. 1 एकमात्र निर्दिष्ट मूल्य है, अर्थात् $V^+ = \{1\}$।

4. सत्य-फलन निम्नलिखित फलनों से दिए जाते हैं:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\bot} &= 0 \\
\widetilde{\neg}_{\mathbf{G}}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{यदि } x = 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases} \\
\widetilde{\wedge}_{\mathbf{G}}(x, y) &= \min(x, y) \\
\widetilde{\vee}_{\mathbf{G}}(x, y) &= \max(x, y) \\
\widetilde{\rightarrow}_{\mathbf{G}}(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \leq y \\ y & \text{अन्यथा।} \end{cases}
\end{aligned}$$

m-मूल्य गोडेल तर्कशास्त्र भी इसी प्रकार परिभाषित होता है, केवल $V = V_m$ लिया जाता है।

प्रतिज्ञप्ति 47.5. *परिभाषा 46.6 से परिभाषित तर्कशास्त्र* $\mathbf{G}_3$ *वही है जो परिभाषा 47.4 से परिभाषित* $\mathbf{G}_3$ *है।*

प्रमाण. इसे परिभाषा 46.6 में संयोजकों के लिए दी गई सत्य-सारणियों की तुलना परिभाषा 47.4 के समीकरणों से निर्धारित सत्य-सारणियों के साथ करके देखा जा सकता है:

$\widetilde{\neg}_{\mathbf{G}_3}$	
1	0
1/2	0
0	1

$\widetilde{\wedge}_{\mathbf{G}}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\widetilde{\vee}_{\mathbf{G}}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\widetilde{\rightarrow}_{\mathbf{G}}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

□

प्रतिज्ञप्ति 47.6. *यदि* $\Gamma \vDash_{\mathbf{G}_\infty} \psi$*, तो प्रत्येक* $m \geq 2$ *के लिए* $\Gamma \vDash_{\mathbf{G}_m} \psi$*।*

प्रमाण. अभ्यास। □

वास्तव में विलोम भी मान्य है।

$\mathbf{G}_3$ की तरह $\mathbf{G}_\infty$ में सभी अंतःप्रज्ञावादी रूप से मान्य सूत्र सर्वसत्यताएँ हैं, और गैर-सर्वसत्यताओं के वही उदाहरण $\mathbf{G}_\infty$ की भी गैर-सर्वसत्यताएँ हैं:

$$\begin{aligned}
&p \vee \neg p && (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q) \\
&\neg\neg p \rightarrow p && \neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q) \\
&((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p && \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

किसी ऐसे अंतःप्रज्ञावादी रूप से अमान्य सूत्र का उदाहरण जो फिर भी $\mathbf{G}_3$ की सर्वसत्यता है, $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, $\mathbf{G}_\infty$ में भी सर्वसत्यता है। वास्तव में $\mathbf{G}_\infty$ को उस अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के रूप में निरूपित किया जा सकता है जिसमें स्कीमा $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ जोड़ी गई हो। यह माइकल डमेट ने दिखाया था, इसलिए $\mathbf{G}_\infty$ को प्रायः गोडेल–डमेट तर्कशास्त्र **LC** कहा जाता है।

प्रश्न

प्रश्न 47.1. प्रतिज्ञप्ति 47.3 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 47.2. दिखाइए कि $(p \to q) \vee (q \to p)$, $\mathbf{Ł}_\infty$ की सर्वसत्यता है।

प्रश्न 47.3. प्रतिज्ञप्ति 47.6 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 47.4. दिखाइए कि $(p \to q) \vee (q \to p)$, $\mathbf{G}_\infty$ की सर्वसत्यता है।

प्रश्न 47.5. दिखाइए कि $(p \to q) \vee (q \to r) \vee (r \to s)$, जो $\mathbf{G}_3$ की सर्वसत्यता है, $\mathbf{G}_\infty$ की सर्वसत्यता नहीं है।

अध्याय 48

सीक्वेंट कलन

48.1 परिचय

शास्त्रीय तर्कशास्त्र का सीक्वेंट कलन एक दक्ष और सरल व्युत्पत्ति-तंत्र है। यदि कोई बहुमूल्य तर्कशास्त्र परिमित संख्या में सत्य-मूल्यों वाले आव्यूह से परिभाषित हो, अर्थात् V परिमित हो, तो उसके लिए सीक्वेंट कलन दिया जा सकता है। इसे करने का विचार शास्त्रीय मामले में सीक्वेंटों के अर्थ और अनुमान-नियमों के रूप पर विचार करने से मिलता है।

अब स्मरण करें कि एक सीक्वेंट

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_n$$

की व्याख्या इस सूत्र के रूप में की जा सकती है:

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) \to (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n).$$

दूसरे शब्दों में, कोई सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ किसी सीक्वेंट $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को तभी *संतुष्ट करता है* जब या तो किसी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F}$ हो, या किसी $\varphi \in \Delta$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ हो। इस व्याख्या पर आरंभिक सीक्वेंट $\varphi \Rightarrow \varphi$ सदैव संतुष्ट होते हैं, क्योंकि या तो $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ या $\overline{(\varphi)} = \mathbb{F}$।

यहाँ पार्श्व सूत्रों Γ, Δ को हटाकर **LK** में सशर्त के अनुमान-नियम दिए गए हैं:

$$\frac{\Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow}{\varphi \to \psi \Rightarrow} \to\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\Rightarrow \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

यदि हम ऊपर दी गई सीक्वेंट की आर्थी व्याख्या लागू करें, तो $\to$L नियम कहता है कि यदि $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ और $\overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{F}$, तो $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \to \psi) = \mathbb{F}$। इसी तरह $\to$R नियम कहता है कि यदि या तो $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F}$ या $\overline{\mathfrak{v}}(\psi) = \mathbb{T}$, तो $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi \to \psi) = \mathbb{T}$। और वास्तव में ये सशर्त कथन द्विसशर्त कथन हैं। $\wedge$L और $\vee$R नियमों के मानक सूत्रीकरण में संगत सशर्त कथन द्विसशर्त नहीं होंगे। किंतु इन नियमों के ऐसे वैकल्पिक रूप हैं जिनमें वे द्विसशर्त होते हैं:

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{R}$$

जब इस मूल विचार को किसी n-मूल्य तर्कशास्त्र पर लागू किया जाता है, तो दो के स्थान पर n स्थानों वाला सीक्वेंट कलन प्राप्त होता है—प्रत्येक सत्य-मूल्य के लिए एक स्थान। $V = \{\mathbb{F}, \mathbb{U}, \mathbb{T}\}$ वाले किसी त्रिमूल्य तर्कशास्त्र में सीक्वेंट $\Gamma \mid \Pi \mid \Delta$ रूप का व्यंजक होता है। कोई सत्य-मूल्यांकन $\mathfrak{v}$ इसे तभी संतुष्ट करता है जब या तो किसी $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{F}$, या किसी $\varphi \in \Delta$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$, या किसी $\varphi \in \Pi$ के लिए $\overline{\mathfrak{v}}(\varphi) = \mathbb{U}$ हो। फलतः आरंभिक सीक्वेंट $\varphi \mid \varphi \mid \varphi$ सदैव संतुष्ट होते हैं।

48.2 नियम और व्युत्पत्तियाँ

आगे $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ को वाक्यों के परिमित अनुक्रम मानें।

परिभाषा 48.1 (सीक्वेंट). *n-पक्षीय सीक्वेंट* इस रूप का व्यंजक है:

$$\Gamma_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n,$$

जहाँ प्रत्येक Γ_1, भाषा $\mathcal{L}$ के वाक्यों का कोई परिमित (संभवतः रिक्त) अनुक्रम है।

परिभाषा 48.2 (आरंभिक सीक्वेंट). किसी भी वाक्य φ के लिए $\varphi \mid \ldots \mid \varphi$ रूप का n-पक्षीय सीक्वेंट *n-पक्षीय आरंभिक सीक्वेंट* कहलाता है।

यदि भाषा में कोई 0-स्थानिक संयोजक $\star$, अर्थात् कोई प्रतिज्ञप्तिक अचर, हो, तो हम सीक्वेंट $\ldots \mid \star \mid \ldots$ को भी आरंभिक मानते हैं। इसमें $\star$ उस सत्य-मूल्य से जुड़े स्थान में आता है जो $\widetilde{\star} \in V$ के संगत है, और अन्य स्थान रिक्त रहते हैं।

किसी n-मूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ के प्रत्येक संयोजक के लिए उस संयोजक द्वारा $\mathbf{L}$ में लिए जा सकने वाले प्रत्येक सत्य-मूल्य का एक तार्किक नियम होता है। $\mathbf{L}$ के n-पक्षीय सीक्वेंट कलन में व्युत्पत्तियाँ सीक्वेंटों के वृक्ष होती हैं। इनके सबसे ऊपर के सीक्वेंट आरंभिक सीक्वेंट होते हैं; और यदि कोई सीक्वेंट एक या अधिक अन्य सीक्वेंटों के नीचे आता है, तो उसे $\mathbf{L}$ के संयोजकों के किसी अनुमान-नियम से सही ढंग से निकलना चाहिए।

परिभाषा 48.3 (प्रमेय). कोई वाक्य φ, n-मूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ का *प्रमेय* है, यदि उस n-सीक्वेंट की कोई व्युत्पत्ति हो जिसमें $\mathbf{L}$ के प्रत्येक निर्दिष्ट सत्य-मूल्य के संगत स्थान पर φ आता हो। यदि φ प्रमेय है तो हम $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ लिखते हैं, और यदि नहीं है तो $\nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$।

परिभाषा 48.4 (व्युत्पन्नता). कोई वाक्य φ, n-मूल्य तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ में वाक्यों के समुच्चय Γ से *व्युत्पन्न* है, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$, तभी जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और Γ_0 के वाक्यों का कोई अनुक्रम Γ_0' ऐसा हो कि निम्न सीक्वेंट की कोई व्युत्पत्ति हो:

$$\Lambda_1 \mid \ldots \mid \Lambda_n,$$

जहाँ स्थान i किसी निर्दिष्ट सत्य-मूल्य के संगत हो तो Λ_i, φ है, और अन्यथा Γ_0' है। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है, तो हम $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

उदाहरणार्थ, त्रिमूल्य लुकासिएविच तर्कशास्त्र का 3-पक्षीय सीक्वेंट कलन होता है। किसी 3-पक्षीय सीक्वेंट $\Gamma \mid \Pi \mid \Delta$ में Γ, $\mathbb{F}$ के; Δ, $\mathbb{T}$ के; और Π, $\mathbb{U}$ के संगत होता है। अभिगृहीत $\varphi \mid \varphi \mid \varphi$ हैं। चूँकि केवल $\mathbb{T}$ निर्दिष्ट है, $\Gamma \vdash_{\text{Ł}_3} \varphi$ तभी जब सीक्वेंट $\Gamma \mid \Gamma \mid \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। (यदि $\mathbb{U}$ भी निर्दिष्ट होता, तो हमें $\Gamma \mid \varphi \mid \varphi$ की व्युत्पत्ति चाहिए होती।)

48.3 संरचनात्मक नियम

n-पक्षीय सीक्वेंट कलन के संरचनात्मक नियम शास्त्रीय मामले की तरह ही काम करते हैं, केवल प्रत्येक स्थान i के लिए अलग नियम होता है।

$$\frac{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \quad \Gamma_i \mid \ldots \mid \Gamma_n}{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \varphi, \Gamma_i \mid \ldots \mid \Gamma_n}\ \mathsf{W}i$$

$$\frac{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \varphi, \varphi, \Gamma_i \mid \ldots \mid \Gamma_n}{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \quad \varphi, \Gamma_i \mid \ldots \mid \Gamma_n}\ \mathsf{C}i$$

$$\frac{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \Gamma_i, \varphi, \psi, \Gamma_i' \mid \ldots \mid \Gamma_n}{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \Gamma_i, \psi, \varphi, \Gamma_i' \mid \ldots \mid \Gamma_n}\ \mathsf{X}i$$

दुर्बलीकरण, संकुचन और विनिमय अनुमानों की किसी शृंखला को प्रायः दोहरी अनुमान रेखाओं से दर्शाया जाएगा। Cut नियम के कई रूप होते हैं—सीक्वेंट में भिन्न स्थानों $i \neq j$ के प्रत्येक संयोजन के लिए एक:

$$\frac{\Gamma_1 \mid \ldots \mid \varphi, \Gamma_i \mid \ldots \mid \Gamma_n \qquad \Delta_1 \mid \ldots \mid \varphi, \Delta_j \mid \ldots \mid \Delta_n}{\Gamma_1, \Delta_1 \mid \ldots \mid \Gamma_n, \Delta_n}\ \mathsf{Cut}i, j$$

48.4 चयनित तर्कशास्त्रों के प्रतिज्ञप्तिक नियम

किसी n-पक्षीय सीक्वेंट कलन में किसी संयोजक के अनुमान-नियम केवल उस संयोजक के अभिलाक्षणिक सत्य-फलन पर निर्भर करते हैं। अतः यदि विभिन्न तर्कशास्त्रों में कोई संयोजक एक ही सत्य-फलन से परिभाषित हो, तो उस संयोजक के ये n-पक्षीय सीक्वेंट नियम उन तर्कशास्त्रों में समान होते हैं।

$\neg$ के नियम

$\neg$ के निम्नलिखित नियम लुकासिएविच और क्लिनी तर्कशास्त्रों तथा उनके रूपांतरों पर लागू होते हैं।

$$\frac{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}\ \neg\mathbb{F}$$

$$\frac{\Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta}{\Gamma \mid \neg\varphi, \Pi \mid \Delta}\ \neg\mathbb{U}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \neg\varphi}\ \neg\mathbb{T}$$

$\neg$ के निम्नलिखित नियम गोडेल तर्कशास्त्र पर लागू होते हैं।

$$\frac{\Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}\ \neg_{\mathbf{G}}\mathbb{F} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \neg\varphi}\ \neg_{\mathbf{G}}\mathbb{T}$$

(गोडेल तर्कशास्त्र में $\neg\varphi$ कभी $\mathbb{U}$ मूल्य नहीं ले सकता, इसलिए मध्य स्थान के लिए कोई नियम नहीं है।)

$\wedge$ के नियम

ये लुकासिएविच, प्रबल क्लिनी और गोडेल तर्कशास्त्र में $\wedge$ के नियम हैं।

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta} \wedge\mathbb{F}$$

$$\frac{\Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \varphi, \Delta \qquad \Gamma \mid \psi, \Pi \mid \psi, \Delta \qquad \Gamma \mid \varphi, \psi, \Pi \mid \Delta}{\Gamma \mid \varphi \wedge \psi, \Pi \mid \Delta} \wedge\mathbb{U}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \qquad \Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \psi}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge\mathbb{T}$$

$\vee$ के नियम

ये लुकासिएविच, प्रबल क्लिनी और गोडेल तर्कशास्त्र में $\vee$ के नियम हैं।

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta \qquad \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta} \vee\mathbb{F}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta \qquad \psi, \Gamma \mid \psi, \Pi \mid \Delta \qquad \Gamma \mid \varphi, \psi, \Pi \mid \Delta}{\Gamma \mid \varphi \vee \psi, \Pi \mid \Delta} \vee\mathbb{U}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \vee \psi} \vee\mathbb{T}$$

$\rightarrow$ के नियम

ये लुकासिएविच तर्कशास्त्र में $\rightarrow$ के नियम हैं।

$$\frac{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\text{Ł}_3}\mathbb{F}$$

$$\frac{\Gamma \mid \varphi, \psi, \Pi \mid \Delta \qquad \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi}{\Gamma \mid \varphi \rightarrow \psi, \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\text{Ł}_3}\mathbb{U}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \psi, \Pi \mid \Delta, \psi \qquad \varphi, \Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta, \psi}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_{\text{Ł}_3}\mathbb{T}$$

ये प्रबल क्लिनी तर्कशास्त्र में $\rightarrow$ के नियम हैं।

$$\frac{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\mathbf{Ks}}\mathbb{F}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \mid \psi, \Pi \mid \Delta \qquad \Gamma \mid \varphi, \psi, \Pi \mid \Delta \qquad \Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta, \varphi}{\Gamma \mid \varphi \rightarrow \psi, \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\mathbf{Ks}}\mathbb{U}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \psi}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_{\mathbf{Ks}}\mathbb{T}$$

ये गोडेल तर्कशास्त्र में $\rightarrow$ के नियम हैं।

$$\frac{\Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \mid \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\mathbf{G}_3}\mathbb{F}$$

$$\frac{\Gamma \mid \psi, \Pi \mid \Delta \qquad \Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi}{\Gamma \mid \varphi \rightarrow \psi, \Pi \mid \Delta} \rightarrow_{\mathbf{G}_3}\mathbb{U}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \mid \psi, \Pi \mid \Delta, \psi \qquad \varphi, \Gamma \mid \varphi, \Pi \mid \Delta, \psi}{\Gamma \mid \Pi \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_{\mathbf{G}_3}\mathbb{T}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \mid A \mid A}{A \mid A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{T}}{A \mid B, A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{U}}{A \mid A, B, A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{U} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \mid A \mid A}{A \mid A \mid A, A}\,\mathsf{W}\mathbb{T}}{A \mid A \mid B, A, A}\,\mathsf{W}\mathbb{T}}{B, A \mid A \mid B, A, A}\,\mathsf{W}\mathbb{F}}{A \mid A \to B, A \mid B, A}\,{\to}\mathbb{U} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \mid B \mid B}{B \mid A, B \mid B}\,\mathsf{W}\mathbb{U}}{B \mid B, A \mid B}\,\mathsf{X}\mathbb{U}}{B \mid A, B, A \mid B}\,\mathsf{W}\mathbb{U}}{A, B \mid A, B, A \mid B}\,\mathsf{W}\mathbb{F}}{B, A \mid A, B, A \mid B}\,\mathsf{X}\mathbb{F} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \mid A \mid A}{A \mid A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{T}}{B, A \mid A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{F}}{B, B, A \mid A \mid B, A}\,\mathsf{W}\mathbb{F}}{B, A \mid A \to B, A \mid B}\,{\to}\mathbb{U}}{A \to B, A \mid A \to B, A \mid B}\,{\to}\mathbb{F}
$$

चित्र 48.1: Ł_3 में व्युत्पत्ति का उदाहरण

खण्ड XI

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र

इस भाग में सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों के अधिसिद्धांत का विवेचन है। अभी इसमें मूल मोडल तर्कशास्त्र के शास्त्रीय अनुरूपता सिद्धांत पर आल्डो अंतोनेल्ली की टिप्पणियाँ सम्मिलित हैं।

अध्याय 49

वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान

49.1 परिचय

मोडल तर्कशास्त्र *मोडल प्रतिज्ञप्तियों* और उनके बीच के परिणाम संबंधों का अध्ययन करता है। मोडल प्रतिज्ञप्तियों के उदाहरण ये हैं:

1. यह आवश्यक है कि $2 + 2 = 4$।
2. यह आवश्यक रूप से संभव है कि कल वर्षा होगी।
3. यदि यह आवश्यक रूप से संभव है कि φ, तो यह संभव है कि φ।

संभावना और आवश्यकता ही एकमात्र मोडलताएँ नहीं हैं: अन्य एकपदी संयोजकों को भी मोडलता माना जाता है, जैसे "ऐसा होना चाहिए कि φ", "ऐसा होगा कि φ", "डाना जानती है कि φ", या "डाना मानती है कि φ"।

मोडल तर्कशास्त्र सबसे पहले अरस्तू की *De Interpretatione* में दिखाई देता है। उन्होंने पहली बार ध्यान दिया कि आवश्यकता से संभावना निकलती है, पर इसका विलोम नहीं; संभावना और आवश्यकता को एक-दूसरे से परिभाषित किया जा सकता है; यदि $\varphi \wedge \psi$ का सत्य होना संभव है, तो φ का सत्य होना संभव है और ψ का सत्य होना संभव है, पर इसका विलोम नहीं; और यदि $\varphi \to \psi$ आवश्यक है, तो φ आवश्यक होने पर ψ भी आवश्यक है।

मोडल तर्कशास्त्र का पहला आधुनिक दृष्टिकोण सी. आई. लुईस का कार्य था, जिसकी परिणति लुईस और लैंगफ़र्ड की *Symbolic Logic* (1932) में हुई। लुईस और लैंगफ़र्ड भौतिक सशर्त द्वारा निहितार्थ के निरूपण से संतुष्ट नहीं थे: $\varphi \to \psi$, "φ से ψ निकलता है" का खराब विकल्प है। इसके स्थान पर उन्होंने निहितार्थ को "आवश्यक रूप से, यदि φ तो ψ" के रूप में अभिलक्षित करने का प्रस्ताव रखा, जिसे $\varphi \prec \psi$ से चिह्नित किया। भिन्न गुणों को व्यवस्थित करने के प्रयास में लुईस ने पाँच भिन्न मोडल तंत्र, **S1**, . . . , **S4**, **S5**, पहचाने; इनमें अंतिम दो आज भी प्रयुक्त होते हैं।

लुईस और लैंगफ़र्ड का दृष्टिकोण पूर्णतः *वाक्यविन्यासगत* था: उन्होंने युक्तिसंगत अभिगृहीत और नियम पहचाने और जाँचा कि उन साधनों से क्या सिद्ध किया जा सकता है। अर्थगत दृष्टिकोण बहुत समय तक हाथ नहीं आया। अंततः रुडोल्फ़ कार्नाप ने *Meaning and Necessity* (1947) में *अवस्था-वर्णन* की धारणा का प्रयोग करके पहला प्रयास किया। अवस्था-वर्णन परमाण्विक वाक्यों का एक संग्रह है (वे वाक्य जो उस अवस्था-वर्णन में "सत्य" हैं)। सत्य की परिभाषा को स्वेच्छ वाक्यों φ तक विस्तृत करने के बाद कार्नाप φ को *आवश्यक रूप से सत्य* तब परिभाषित करते हैं जब वह सभी अवस्था-वर्णनों में सत्य हो। कार्नाप का दृष्टिकोण *पुनरावृत्त* मोडलताओं को नहीं सँभाल सकता था, क्योंकि "संभवतः आवश्यक रूप से ...संभवतः φ" रूप के वाक्य सदैव सबसे भीतरी मोडलता तक घट जाते हैं।

मोडल अर्थविज्ञान में बड़ी सफलता सॉल क्रिप्के के लेख "A Completeness Theorem in Modal Logic" (JSL 1959) से मिली। क्रिप्के ने अपना कार्य लाइब्निट्स के इस विचार पर आधारित किया कि कोई कथन आवश्यक रूप से सत्य है यदि वह "सभी संभव जगतों में" सत्य हो। किंतु यह विचार कार्नाप के विचार जैसी ही कमी से ग्रस्त है, क्योंकि किसी जगत w (या अवस्था-वर्णन s) में कथन की सत्यता w पर बिल्कुल निर्भर नहीं होती। इसलिए क्रिप्के ने माना कि जगत एक *अभिगम्यता संबंध* R से जुड़े होते हैं और "आवश्यक रूप से φ" रूप का कथन किसी जगत

w में तभी सत्य है जब φ, w से *अभिगम्य* सभी जगतों w' में सत्य हो। इस दृष्टिकोण का कोई रूप देने वाले अर्थविज्ञान को क्रिप्के अर्थविज्ञान कहते हैं; उसने मोडल तर्कशास्त्रों (बहुवचन में) के तीव्र विकास को संभव बनाया।

क्रिप्के अर्थविज्ञान से व्याख्यायित होने पर मोडल तर्कशास्त्र हमें दिखाता है कि *संबंधात्मक संरचनाएँ* "भीतर से" कैसी दिखती हैं। संबंधात्मक संरचना केवल एक द्विपदी संबंध से युक्त समुच्चय है (उदाहरणार्थ, सामाजिक सुरक्षा संख्या के क्रम में रखे गए कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय एक संबंधात्मक संरचना है)। वास्तव में संबंधात्मक संरचनाओं के प्रक्षेत्र अनेक प्रकार के होते हैं: जगत की अवस्थाओं की सापेक्ष संभावना के अतिरिक्त किसी अभिकर्ता की ज्ञानमीमांसात्मक संभावना से जुड़ी ज्ञानमीमांसात्मक अवस्थाएँ, या अवस्था- संक्रमणों से जुड़ी किसी गतिक तंत्र की अवस्थाएँ आदि हो सकती हैं। इन सभी का प्रतिरूपण मोडल तर्कशास्त्र से किया जा सकता है: पहला हमें साधारण एलेथिक मोडल तर्कशास्त्र देता है; अन्य हमें ज्ञानमीमांसात्मक तर्कशास्त्र, गतिक तर्कशास्त्र आदि देते हैं।

हम एक विशेष दृष्टिकोण पर ध्यान देंगे, जिसे मोडल तर्कशास्त्री "अनुरूपता सिद्धांत" कहते हैं। क्रिप्के की सबसे महत्त्वपूर्ण आरंभिक खोजों में से एक यह थी कि अभिगम्यता संबंध R के अनेक गुणों (जैसे उसका संक्रमणशील या सममित होना) को उपयुक्त "मोडल स्कीमाओं" द्वारा स्वयं *मोडल भाषा में* अभिलक्षित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, मोडल तर्कशास्त्री कहते हैं कि R की स्वपरावर्तकता इस स्कीमा के "अनुरूप" है: "यदि आवश्यक रूप से φ, तो φ"। हम मुख्यतः मोडल तर्कशास्त्र के उन शास्त्रीय तंत्रों (जैसे **S4** और **S5**) के अनुरूपता सिद्धांत का अध्ययन करेंगे जो स्कीमाओं D, T, B, 4 और 5 के संयोजन से प्राप्त होते हैं।

49.2 मूल मोडल तर्कशास्त्र की भाषा

परिभाषा 49.1. मोडल तर्कशास्त्र की मूल भाषा में निम्नलिखित होते हैं:

1. असत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$।
2. सत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\top$।
3. प्रतिज्ञप्ति चरों का गणनीय अनंत समुच्चय: p_0, p_1, p_2, ...
4. प्रतिज्ञप्तिक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)।
5. मोडल संकारक $\Box$।
6. मोडल संकारक $\Diamond$।

परिभाषा 49.2. मूल मोडल भाषा की *सूत्रें* आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित होती हैं:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।
2. $\top$ एक परमाण्विक सूत्र है।
3. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p_i एक (परमाण्विक) सूत्र है।
4. यदि φ एक सूत्र है, तो $\neg\varphi$ एक सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ एक सूत्र है।
6. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ एक सूत्र है।
7. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \rightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
8. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
9. यदि φ एक सूत्र है, तो $\Box\varphi$ एक सूत्र है।

10. यदि φ एक सूत्र है, तो $\Diamond\varphi$ एक सूत्र है।

11. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

यदि किसी सूत्र φ में $\Box$ या $\Diamond$ नहीं आता, तो हम उसे *मोडल-मुक्त* कहते हैं।

49.3 युगपत प्रतिस्थापन

किसी सूत्र φ का *दृष्टांत*, φ में किसी प्रतिज्ञप्ति चर के सभी आविर्भावों को किसी अन्य सूत्र से बदलने का परिणाम है। मान्यता और व्युत्पन्नता दोनों की चर्चा में हम सूत्रों के दृष्टांतों का बार-बार उल्लेख करेंगे। इसलिए इस धारणा को यथार्थतः परिभाषित करना उपयोगी है।

परिभाषा 49.3. मान लें कि φ एक ऐसा मोडल सूत्र है जिसके सभी प्रतिज्ञप्ति चर p_1, ..., p_n में हैं, और θ_1, ..., θ_n भी मोडल सूत्र हैं। तब हम $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ को φ में प्रत्येक p_i के स्थान पर θ_i का युगपत प्रतिस्थापन करने का परिणाम परिभाषित करते हैं। औपचारिक रूप से यह φ पर आगमन द्वारा परिभाषा है:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, $\bot$ है।

2. $\varphi \equiv \top$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, $\top$ है।

3. $\varphi \equiv q$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, q है, बशर्ते $i = 1$, ..., n के लिए $q \not\equiv p_i$।

4. $\varphi \equiv p_i$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, θ_i है।

5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ $\neg\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ है।

6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ यह है:

$$(\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \wedge \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]).$$

7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ यह है:

$$(\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \vee \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]).$$

8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ यह है:

$$(\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \to \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]).$$

9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ यह है:

$$(\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \leftrightarrow \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]).$$

10. $\varphi \equiv \Box\psi$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ $\Box\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ है।

11. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ $\Diamond\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ है।

सूत्र $\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, φ का *प्रतिस्थापन-दृष्टांत* कहलाता है।

उदाहरण 49.4. मान लें कि φ, $p_1 \to \Box(p_1 \wedge p_2)$ है, θ_1, $\Diamond(p_2 \to p_3)$ है और θ_2, $\neg\Box p_1$ है। तब $\varphi[\theta_1/p_1, \theta_2/p_2]$ यह है:

$$\Diamond(p_2 \to p_3) \to \Box(\Diamond(p_2 \to p_3) \wedge \neg\Box p_1)$$

जबकि $\varphi[\theta_2/p_1, \theta_1/p_2]$ यह है:

$$\neg\Box p_1 \to \Box(\neg\Box p_1 \wedge \Diamond(p_2 \to p_3))$$

ध्यान दें कि युगपत प्रतिस्थापन सामान्यतः पुनरावृत्त प्रतिस्थापन के समान नहीं होता। उदाहरणार्थ, ऊपर के $\varphi[\theta_1/p_1, \theta_2/p_2]$ above with $(\varphi[\theta_1/p_1])[\theta_2/p_2]$ से तुलना करें, जो यह है:

$$\Diamond(p_2 \to p_3) \to \Box(\Diamond(p_2 \to p_3) \wedge p_2)[\neg\Box p_1/p_2], \text{ अर्थात्,}$$
$$\Diamond(\neg\Box p_1 \to p_3) \to \Box(\Diamond(\neg\Box p_1 \to p_3) \wedge \neg\Box p_1)$$

और इसकी तुलना $(\varphi[\theta_2/p_2])[\theta_1/p_1]$ से करें:

$$p_1 \to \Box(p_1 \wedge \neg\Box p_1)[\Diamond(p_2 \to p_3)/p_1], \text{ अर्थात्,}$$
$$\Diamond(p_2 \to p_3) \to \Box(\Diamond(p_2 \to p_3) \wedge \neg\Box\Diamond(p_2 \to p_3)).$$

49.4 संबंधात्मक प्रतिरूप

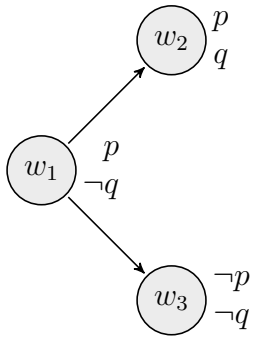
सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों के अर्थविज्ञान की मूल धारणा *संबंधात्मक प्रतिरूप* है। इसमें द्विपदी "अभिगम्यता संबंध" से जुड़े जगतों का एक समुच्चय और एक ऐसा नियतन होता है जो निर्धारित करता है कि कौन-से प्रतिज्ञप्ति चर किन जगतों में "सत्य" माने जाते हैं।

परिभाषा 49.5. मूल मोडल भाषा का *प्रतिरूप* एक त्रिक $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ है, जहाँ

1. W "जगतों" का अरिक्त समुच्चय है,
2. R, W पर द्विपदी अभिगम्यता संबंध है, और
3. V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को संभव जगतों का समुच्चय $V(p)$ देता है।

जब Rww' मान्य हो, तो हम कहते हैं कि w', w से *अभिगम्य* है। जब $w \in V(p)$ हो, तो हम कहते हैं कि p, w पर *सत्य* है।

संबंधात्मक अर्थविज्ञान का बड़ा लाभ यह है कि प्रतिरूपों को आकृति 49.1 जैसे सरल आरेखों से निरूपित किया जा सकता है। जगतों को नोडों से निरूपित किया जाता है, और जगत w', w से ठीक तभी अभिगम्य है जब w से w' की ओर कोई तीर हो। इसके अतिरिक्त, $w \in V(p)$ होने पर हम किसी नोड (जगत) पर p और अन्यथा $\neg p$ अंकित करते हैं। आकृति 49.1 उस प्रतिरूप को निरूपित करता है जिसमें $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle\}$, $V(p) = \{w_1, w_2\}$ और $V(q) = \{w_2\}$।



चित्र 49.1: एक सरल प्रतिरूप।

49.5 किसी जगत पर सत्यता

प्रत्येक मोडल प्रतिरूप निर्धारित करता है कि उसमें कौन-से मोडल सूत्र किन जगतों पर सत्य माने जाते हैं। "प्रतिरूप $\mathfrak{M}$, सूत्र φ को जगत w पर सत्य बनाता है" संबंध, संबंधात्मक अर्थविज्ञान की मूल धारणा है। यह संबंध आगमनात्मक रूप से परिभाषित होता है और गैर-मोडल संकारकों के लिए सत्य-सारणियों से मिलने वाले सामान्य अभिलक्षण से मेल खाता है।

परिभाषा 49.6. किसी $\mathfrak{M}$ में *सूत्र φ की w पर सत्यता,* जिसे $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ से लिखते हैं, आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ कभी नहीं।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \top$ सदैव।
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ तभी जब $w \in V(p)$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$।
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ (या दोनों)।
7. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ दोनों, या न $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ न $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
9. $\varphi \equiv \Box\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब Rww' वाले प्रत्येक $w' \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$।
10. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब Rww' वाले कम-से-कम एक $w' \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$।

ध्यान दें कि उपवाक्य (9) के अनुसार, जब Rww' वाला कोई w' न हो, तब सूत्र $\Box\psi$, w पर सत्य होता है। ऐसे मामले में $\Box\psi$, w पर *रिक्ततः* सत्य है। इसके अतिरिक्त, ψ के w पर संतुष्ट न होने पर भी $\Box\psi$ वहाँ संतुष्ट हो सकता है। ψ की w पर सत्यता, $\Diamond\psi$ की w पर सत्यता सुनिश्चित नहीं करती। किंतु Rww होने पर, जैसे R स्वपरावर्ती हो, यह सत्यता सुनिश्चित होती है। यदि Rww' वाला कोई w' नहीं है, तो प्रत्येक φ के लिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\varphi$।

प्रतिज्ञप्ति 49.7. *1. $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi$.*

2. $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Box\neg\varphi$.

प्रमाण. 1. $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\neg\varphi$, जैसा $\mathfrak{M}, w \Vdash$ की परिभाषा से मिलता है। $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले किसी w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \neg\varphi$। अतः $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले प्रत्येक w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \nVdash \neg\varphi$। हमारे पास $\mathfrak{M}, w' \nVdash \neg\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$ भी है। इन दोनों से $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले प्रत्येक w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$। $\mathfrak{M}, w \Vdash$ की परिभाषा से यह ठीक तभी है जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$।

2. $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Box\neg\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M} \nVdash \Box\neg\varphi$। $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले प्रत्येक w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \neg\varphi$। अतः $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले किसी w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \nVdash \neg\varphi$। हमारे पास $\mathfrak{M}, w' \nVdash \neg\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$ भी है। इन दोनों से $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Box\neg\varphi$ तभी जब Rww' वाले किसी w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$। $\mathfrak{M}, w \Vdash$ की परिभाषा से यह ठीक तभी है जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$। $\Box$

49.6 किसी प्रतिरूप में सत्यता

कभी-कभी हमारी रुचि यह जानने में होती है कि किसी दिए हुए प्रतिरूप के प्रत्येक जगत पर कौन-से सूत्र सत्य हैं। इसके लिए एक संकेत-पद्धति प्रस्तुत करें।

परिभाषा 49.8. कोई सूत्र φ, प्रतिरूप $M = \langle W, R, V\rangle$ में *सत्य* है, जिसे $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ से लिखते हैं, तभी जब प्रत्येक $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

प्रतिज्ञप्ति 49.9. *1. यदि $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M} \nVdash \neg\varphi$, किंतु इसका* विलोम नहीं*।*

2. यदि $\mathfrak{M} \Vdash \varphi \to \psi$, तो $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ केवल तभी जब $\mathfrak{M} \Vdash \psi$, किंतु इसका विलोम नहीं*।*

प्रमाण. 1. यदि $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$, तो φ, W के सभी जगतों पर सत्य है। चूँकि $W \neq \emptyset$, $\mathfrak{M} \Vdash \neg\varphi$ नहीं हो सकता, अन्यथा φ को किसी जगत पर सत्य और असत्य दोनों होना पड़ता।

दूसरी ओर, यदि $\mathfrak{M} \nVdash \neg\varphi$, तो φ किसी जगत $w \in W$ पर सत्य है। इससे यह नहीं निकलता कि *प्रत्येक* $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। उदाहरणार्थ, आकृति 49.1 के प्रतिरूप में $\mathfrak{M} \nVdash \neg p$ और $\mathfrak{M} \nVdash p$ दोनों।

2. मान लें $\mathfrak{M} \Vdash \varphi \to \psi$ और $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$। $\mathfrak{M} \Vdash \psi$ दिखाने के लिए $w \in W$ कोई स्वेच्छ जगत लें। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \to \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। चूँकि w स्वेच्छ था, $\mathfrak{M} \Vdash \psi$।

विलोम की विफलता दिखाने के लिए हमें ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ खोजना है जिसमें $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ केवल तभी जब $\mathfrak{M} \Vdash \psi$, पर $\mathfrak{M} \nVdash \varphi \to \psi$। फिर आकृति 49.1 के प्रतिरूप पर विचार करें: $\mathfrak{M} \nVdash p$, अतः (रिक्ततः) $\mathfrak{M} \Vdash p$ केवल तभी जब $\mathfrak{M} \Vdash q$। किंतु w_1 पर p सत्य और q असत्य होने के कारण $\mathfrak{M} \nVdash p \to q$। $\Box$

49.7 मान्यता

सभी प्रतिरूपों में, अर्थात् प्रत्येक प्रतिरूप के प्रत्येक जगत पर, सत्य सूत्र विशेष रूप से रोचक हैं। वे उन मोडल प्रतिज्ञप्तियों को निरूपित करते हैं जो $\Box$ और $\Diamond$ की व्याख्या चाहे जैसे की जाए, सत्य रहती हैं, बशर्ते व्याख्या इस अर्थ में "सामान्य" हो कि वह संभव जगतों पर किसी अभिगम्यता संबंध से उत्पन्न होती हो। ऐसे सूत्रों को हम *मान्य* कहते हैं। उदाहरणार्थ, $\Box(p \wedge q) \to \Box p$ मान्य है। किंतु $\Box$ की एलेथिक व्याख्या के आधार पर जिन कुछ सूत्रों के मान्य होने की आशा की जा सकती है, जैसे $\Box p \to p$, वे मान्य नहीं हैं। संबंधात्मक प्रतिरूपों की रुचिकर विशेषता यह है कि $\Box$ और $\Diamond$ की भिन्न व्याख्याओं को भिन्न प्रकार के अभिगम्यता संबंधों से ग्रहण किया जा सकता है। इससे संकेत मिलता है कि मान्यता को केवल *सभी* प्रतिरूपों के सापेक्ष ही नहीं, बल्कि *किसी निश्चित प्रकार के* सभी प्रतिरूपों के सापेक्ष भी परिभाषित करना चाहिए। उदाहरणार्थ, यह निकलेगा कि $\Box p \to p$ उन सभी प्रतिरूपों में सत्य है जिनमें प्रत्येक जगत स्वयं से अभिगम्य है, अर्थात् R स्वपरावर्ती है। प्रतिरूपों के वर्गों के सापेक्ष मान्यता की परिभाषा हमें इसे संक्षेप में कहने देती है: $\Box p \to p$ स्वपरावर्ती प्रतिरूपों के वर्ग में मान्य है।

परिभाषा 49.10. कोई सूत्र φ, प्रतिरूपों के वर्ग $\mathcal{C}$ में *मान्य* है, यदि वह $\mathcal{C}$ के प्रत्येक प्रतिरूप में (अर्थात् प्रत्येक प्रतिरूप के प्रत्येक जगत पर) सत्य हो। यदि φ, $\mathcal{C}$ में मान्य है, तो हम $\mathcal{C} \vDash \varphi$ लिखते हैं; और यदि φ, *सभी* प्रतिरूपों के वर्ग में मान्य है, तो $\vDash \varphi$ लिखते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 49.11. *यदि φ, $\mathcal{C}$ में मान्य है, तो वह प्रत्येक वर्ग $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ में भी मान्य है।*

प्रतिज्ञप्ति 49.12. *यदि φ मान्य है, तो $\Box\varphi$ भी मान्य है।*

प्रमाण. मान लें $\vDash \varphi$। $\vDash \Box\varphi$ दिखाने के लिए कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और $w \in W$ लें। यदि Rww', तो φ की मान्यता से $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ भी। चूँकि $\mathfrak{M}$ और w स्वेच्छ थे, $\vDash \Box\varphi$। $\Box$

49.8 सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत

कोई मोडल-मुक्त सूत्र तब सर्वसत्यता है जब वह प्रत्येक सत्य-मूल्य नियतन के अधीन सत्य हो। स्पष्ट है कि प्रत्येक सर्वसत्यता प्रत्येक प्रतिरूप के प्रत्येक जगत पर सत्य है। किंतु $\Box$ और $\Diamond$ वाले सूत्रों के लिए सर्वसत्यता की धारणा परिभाषित नहीं है। उदाहरणार्थ, क्या $\Box p \vee \neg\Box p$—अपवर्जित मध्य सिद्धांत का एक दृष्टांत—मान्य है? *सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत* की धारणा यहाँ सहायक है: ऐसा सूत्र जो किसी (गैर-मोडल) सर्वसत्यता का प्रतिस्थापन-दृष्टांत हो। यह आश्चर्यजनक नहीं, पर फिर भी प्रमाण माँगता है, कि प्रत्येक सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत मान्य है।

परिभाषा 49.13. कोई मोडल सूत्र ψ *सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत* तभी है जब प्रतिज्ञप्ति चरों p_1, ..., p_n वाली कोई मोडल-मुक्त सर्वसत्यता φ और सूत्र θ_1, ..., θ_n ऐसे हों कि $\psi \equiv \varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$।

सहायक प्रमेय 49.14. *मान लें φ ऐसा मोडल-मुक्त सूत्र है जिसके प्रतिज्ञप्ति चर p_1, ..., p_n हैं, और θ_1, ..., θ_n मोडल सूत्र हैं। तब प्रत्येक ऐसे नियतन $\mathfrak{v}$, प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और $w \in W$ के लिए, जिसमें $\mathfrak{v}(p_i) = \mathbb{T}$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta_i$, हमारे पास $\mathfrak{v} \vDash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$.*

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा।

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{v} \nvDash \bot$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ दोनों।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{v} \vDash \top$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \top$ दोनों।
3. $\varphi \equiv p_i$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash p_i &\Leftrightarrow \mathfrak{v}(p_i) = \mathbb{T} \\
&\qquad \mathfrak{v} \vDash p_i \text{ की परिभाषा से} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \theta_i \\
&\qquad \text{धारणा से} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash p_i[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
&\qquad \text{क्योंकि } p_i[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \equiv \theta_i.
\end{aligned}$$

4. $\varphi \equiv \neg\psi$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash \neg\psi &\Leftrightarrow \mathfrak{v} \nvDash \psi \\
&\qquad \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से;} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
&\qquad \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
&\qquad \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से.}
\end{aligned}$$

5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash \psi \wedge \chi \Leftrightarrow\ & \mathfrak{v} \vDash \psi \text{ और } \mathfrak{v} \vDash \chi \\
& \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \text{ और} \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash (\psi \wedge \chi)[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \text{ की परिभाषा से.}
\end{aligned}$$

6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash \psi \vee \chi \Leftrightarrow\ & \mathfrak{v} \vDash \psi \text{ या } \mathfrak{v} \vDash \chi \\
& \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से;} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \text{ या} \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash (\psi \vee \chi)[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \text{ की परिभाषा से.}
\end{aligned}$$

7. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash \psi \rightarrow \chi \Leftrightarrow\ & \mathfrak{v} \nvDash \psi \text{ या } \mathfrak{v} \vDash \chi \\
& \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \nVdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \text{ या} \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash (\psi \rightarrow \chi)[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \text{ की परिभाषा से.}
\end{aligned}$$

8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} \vDash \psi \rightarrow \chi \Leftrightarrow\ & \text{या तो } \mathfrak{v} \vDash \psi \text{ और } \mathfrak{v} \vDash \chi \\
& \text{या } \mathfrak{v} \nvDash \psi \text{ और } \mathfrak{v} \nvDash \chi \\
& \mathfrak{v} \vDash \text{ की परिभाषा से} \\
\Leftrightarrow\ & \text{या तो } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \text{ और} \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \text{या } \mathfrak{M}, w \nVdash \psi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \text{ और} \\
& \mathfrak{M}, w \nVdash \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \text{आगमन-परिकल्पना से} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{M}, w \Vdash (\psi \leftrightarrow \chi)[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \\
& \mathfrak{M}, w \Vdash \text{ की परिभाषा से.}
\end{aligned}$$

□

प्रतिज्ञप्ति 49.15. *सभी सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत मान्य हैं।*

प्रमाण. प्रतिधनात्मक रूप से, मान लें φ ऐसा है कि $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$, किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और जगत w के लिए। ऐसा नियतन $\mathfrak{v}$ परिभाषित करें कि $\mathfrak{v}(p_i) = \mathbb{T}$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta_i$ (और $q \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ को $\mathfrak{v}$ स्वेच्छ मूल्य देता है)। तब सहायक प्रमेय 49.14 से $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$, अतः φ सर्वसत्यता नहीं है। □

49.9 स्कीमाएँ और मान्यता

परिभाषा 49.16. *स्कीमा* सूत्रों का ऐसा समुच्चय है जिसमें किसी मोडल सूत्र χ के सभी और केवल प्रतिस्थापन-दृष्टांत होते हैं, अर्थात्

$$\{\psi : \exists\theta_1, \ldots, \exists\theta_n\, (\psi = \chi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n])\}.$$

सूत्र χ स्कीमा का *अभिलाक्षणिक* सूत्र कहलाता है और प्रतिज्ञप्ति चरों के पुनर्नामकरण तक अद्वितीय है। कोई सूत्र φ किसी स्कीमा का *दृष्टांत* है यदि वह उस समुच्चय का सदस्य हो।

χ के परमाण्विक अवयवों के स्थान पर 'φ', 'ψ', ..., रखकर मिलने वाले अधिभाषिक व्यंजक से किसी स्कीमा को निरूपित करना सुविधाजनक है। उदाहरणार्थ, ये स्कीमाओं को निरूपित करते हैं: 'φ', '$\varphi \to \Box\varphi$', '$\varphi \to (\psi \to \varphi)$'। इनके संगत अभिलाक्षणिक सूत्र p, $p \to \Box p$, $p \to (q \to p)$ हैं। स्कीमा 'φ' *सभी* सूत्रों के समुच्चय को निरूपित करती है।

परिभाषा 49.17. कोई स्कीमा किसी प्रतिरूप में *सत्य* तभी है जब उसके सभी दृष्टांत सत्य हों; और कोई स्कीमा *मान्य* तभी है जब वह प्रत्येक प्रतिरूप में सत्य हो।

प्रतिज्ञप्ति 49.18. *निम्न स्कीमा* K *मान्य है:*

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi). \tag{K}$$

प्रमाण. हमें दिखाना है कि स्कीमा के सभी दृष्टांत प्रत्येक प्रतिरूप के प्रत्येक जगत पर सत्य हैं। इसलिए $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और $w \in W$ को स्वेच्छ मानें। किसी जगत पर सशर्त की सत्यता दिखाने के लिए हम पूर्ववर्ती को सत्य मानकर दिखाते हैं कि अनुवर्ती भी सत्य है। इस मामले में मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(\varphi \to \psi)$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$। हमें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$ दिखाना है। अतः कोई Rww' वाला स्वेच्छ w' लें। पहली धारणा से $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi \to \psi$ और दूसरी धारणा से $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$। इससे $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ मिलता है। चूँकि w' स्वेच्छ था, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$। □

प्रतिज्ञप्ति 49.19. *निम्न स्कीमा* dual *मान्य है:*

$$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi. \tag{dual}$$

प्रमाण. अभ्यास। □

प्रतिज्ञप्ति 49.20. *यदि किसी प्रतिरूप के किसी जगत पर φ और $\varphi \to \psi$ सत्य हैं, तो ψ भी सत्य है। अतः मान्य सूत्र मोडस पोनेन्स के अधीन संवृत हैं।*

प्रतिज्ञप्ति 49.21. *कोई सूत्र φ तभी मान्य है जब उसके सभी प्रतिस्थापन-दृष्टांत मान्य हों। दूसरे शब्दों में, कोई स्कीमा तभी मान्य है जब उसका अभिलाक्षणिक सूत्र मान्य हो।*

प्रमाण. "यदि" दिशा स्पष्ट है, क्योंकि φ स्वयं अपना प्रतिस्थापन-दृष्टांत है।

"केवल यदि" दिशा सिद्ध करने के लिए हम यह दिखाते हैं। मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ कोई मोडल प्रतिरूप है, और $\psi \equiv \varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n]$ φ का प्रतिस्थापन-दृष्टांत है। $V'(p_i) = \{w : \mathfrak{M}, w \Vdash \theta_i\}$ द्वारा $\mathfrak{M}' = \langle W, R, V'\rangle$ परिभाषित करें। तब प्रत्येक $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$। (प्रमाण अभ्यास के लिए छोड़ा गया है।) अब मान लें कि φ मान्य था, पर φ का कोई प्रतिस्थापन-दृष्टांत ψ मान्य नहीं था। तब किसी $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और किसी $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। किंतु दावे से $\mathfrak{M}', w \nVdash \varphi$, अतः φ मान्य नहीं है, जो विरोधाभास है। □

मान्य स्कीमाएँ	*अमान्य स्कीमाएँ*
$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$	$\Box(\varphi \vee \psi) \to (\Box\varphi \vee \Box\psi)$
$\Diamond(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Diamond\psi)$	$(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$
$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	$\varphi \to \Box\varphi$
$\Box\varphi \to \Box(\psi \to \varphi)$	$\Box\Diamond\varphi \to \psi$
$\neg\Diamond\varphi \to \Box(\varphi \to \psi)$	$\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$
$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$	$\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$.

तालिका 49.1: मान्य और (या?) अमान्य स्कीमाएँ।

किंतु ध्यान दें कि यह सत्य नहीं कि कोई स्कीमा किसी प्रतिरूप में तभी सत्य है जब उसका अभिलाक्षणिक सूत्र सत्य हो। निस्संदेह "केवल यदि" दिशा मान्य है: यदि φ का प्रत्येक दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में सत्य है, तो φ स्वयं भी $\mathfrak{M}$ में सत्य है। पर ऐसा हो सकता है कि φ, $\mathfrak{M}$ में सत्य हो, फिर भी φ का कोई दृष्टांत $\mathfrak{M}$ के किसी जगत पर असत्य हो। एक बहुत सरल प्रतिदृष्टांत के लिए केवल एक जगत w और $V(p) = \{w\}$ वाले प्रतिरूप में p पर विचार करें; तब p, w पर सत्य है। किंतु $\bot$, p का एक दृष्टांत है और w पर सत्य नहीं है।

49.10 परिणाम

किसी जगत पर सत्यता की परिभाषा से हम सूत्रों के बीच परिणाम संबंध परिभाषित कर सकते हैं। कोई सूत्र ψ, φ को तभी परिणामतः देता है जब ψ के सत्य होने पर φ भी सत्य हो। यहाँ "जब भी" का अर्थ है "हम चाहे जिस प्रतिरूप पर विचार करें" और "उस प्रतिरूप के चाहे जिस जगत पर विचार करें" दोनों।

परिभाषा 49.22. यदि Γ सूत्रों का समुच्चय और φ कोई सूत्र है, तो Γ से φ *परिणामतः मिलता है*, संकेत में $\Gamma \vDash \varphi$, तभी जब प्रत्येक प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और जगत $w \in W$ के लिए, यदि प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$, तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। यदि Γ में केवल एक सूत्र ψ है, तो हम $\psi \vDash \varphi$ लिखते हैं।

उदाहरण 49.23. यह दिखाने के लिए कि किसी सूत्र से दूसरा परिणामतः मिलता है, हमें $\mathfrak{M}, w \Vdash$ की परिभाषा का उपयोग करके सभी प्रतिरूपों के विषय में तर्क करना होता है। उदाहरणार्थ, $p \to \Diamond p \vDash \Box\neg p \to \neg p$ दिखाने के लिए हम इस प्रकार तर्क कर सकते हैं: कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ और $w \in W$ लें और मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash p \to \Diamond p$। हमें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\neg p \to \neg p$ दिखाना है। मान लें ऐसा नहीं है। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\neg p$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \neg p$। चूँकि $\mathfrak{M}, w \nVdash \neg p$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash p$। धारणा से $\mathfrak{M}, w \Vdash p \to \Diamond p$, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond p$। $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond p$ की परिभाषा से कोई Rww' वाला w' ऐसा है कि $\mathfrak{M}, w' \Vdash p$। चूँकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\neg p$ भी है, इसलिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \neg p$, जो विरोधाभास है।

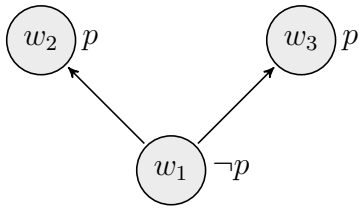
यह दिखाने के लिए कि किसी सूत्र ψ से दूसरा φ परिणामतः नहीं मिलता, हमें प्रतिदृष्टांत देना होता है: ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ जिसमें किसी जगत $w \in W$ पर $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ पर $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$ हो। आइए दिखाएँ कि $p \to \Diamond p \nvDash \Box p \to p$। आकृति 49.2 के प्रतिरूप पर विचार करें। हमारे पास $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Diamond p$, अतः $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash p \to \Diamond p$। किंतु $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Box p$ पर $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash p$ होने के कारण $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash \Box p \to p$।

बहुत सरल प्रतिदृष्टांत प्रायः पर्याप्त होते हैं। $W' = \{w\}$, $R' = \emptyset$ और $V'(p) = \emptyset$ वाला प्रतिरूप $\mathfrak{M}' = \{W', R', V'\}$ भी प्रतिदृष्टांत है: चूँकि $\mathfrak{M}', w \nVdash p$, इसलिए $\mathfrak{M}', w \Vdash p \to \Diamond p$। w से कोई जगत अभिगम्य न होने के कारण $\mathfrak{M}', w \Vdash \Box p$, अतः $\mathfrak{M}', w \nVdash \Box p \to p$।

प्रश्न

प्रश्न 49.1. आकृति 49.1 के प्रतिरूप पर विचार कीजिए। निम्नलिखित में से कौन-से कथन मान्य हैं?

1. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash q$;



चित्र 49.2: $p \to \Diamond p \vDash \Box p \to p$ का प्रतिदृष्टांत।

2. $\mathfrak{M}, w_3 \Vdash \neg q$;
3. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash p \vee q$;
4. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Box(p \vee q)$;
5. $\mathfrak{M}, w_3 \Vdash \Box q$;
6. $\mathfrak{M}, w_3 \Vdash \Box\bot$;
7. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Diamond q$;
8. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \Box q$;
9. $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \neg\Box\Box\neg q$।

प्रश्न 49.2. प्रतिज्ञप्ति 49.7 का प्रमाण पूरा कीजिए।

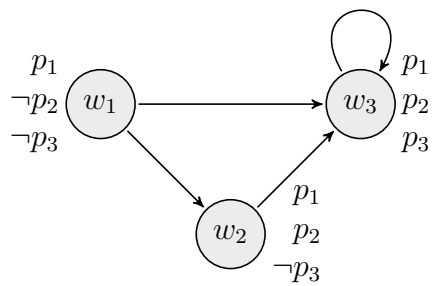
प्रश्न 49.3. मान लें कि $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ एक प्रतिरूप है और $w_1, w_2 \in W$ इस प्रकार हैं कि:

1. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p के लिए $w_1 \in V(p)$ तभी जब $w_2 \in V(p)$; और
2. प्रत्येक $w \in W$ के लिए Rw_1w तभी जब Rw_2w।

सूत्रों पर आगमन का प्रयोग करके दिखाइए कि प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w_2 \Vdash \varphi$।

प्रश्न 49.4. मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$। दिखाइए कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\neg\varphi$।

प्रश्न 49.5. उस भाषा के लिए निम्न प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ पर विचार कीजिए जिसमें केवल p_1, p_2, p_3 प्रतिज्ञप्ति चर हैं:



क्या निम्न सूत्र और स्कीमाएँ प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ में, अर्थात् $\mathfrak{M}$ के प्रत्येक जगत पर, सत्य हैं? समझाइए।

1. $p \to \Diamond p$ (p परमाण्विक है);

2. $\varphi \to \Diamond\varphi$ (φ स्वेच्छ है);

3. $\Box p \to p$ (p परमाण्विक है);

4. $\neg p \to \Diamond\Box p$ (p परमाण्विक है);

5. $\Diamond\Box\varphi$ (φ स्वेच्छ है);

6. $\Box\Diamond p$ (p परमाण्विक है)।

प्रश्न 49.6. दिखाइए कि निम्नलिखित मान्य हैं:

1. $\Box p \to \Box(q \to p)$;

2. $\Box\neg\bot$;

3. $\Box p \to (\Box q \to \Box p)$।

प्रश्न 49.7. दिखाइए कि $\varphi \to \Box\varphi$, उन प्रतिरूपों $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ के वर्ग $\mathcal{C}$ में मान्य है जिनमें $W = \{w\}$। इसी तरह दिखाइए कि $\psi \to \Box\varphi$ और $\Diamond\varphi \to \psi$, उन प्रतिरूपों $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ के वर्ग में मान्य हैं जिनमें $R = \emptyset$।

प्रश्न 49.8. प्रतिज्ञप्ति 49.19 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 49.9. प्रतिज्ञप्ति 49.21 के प्रमाण की "केवल यदि" दिशा में किया गया दावा सिद्ध कीजिए। (संकेत: φ पर आगमन का प्रयोग कीजिए।)

प्रश्न 49.10. दिखाइए कि निम्नलिखित सूत्रों में से कोई मान्य नहीं है:

D: $\Box p \to \Diamond p$;

T: $\Box p \to p$;

B: $p \to \Box\Diamond p$;

4: $\Box p \to \Box\Box p$;

5: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$.

प्रश्न 49.11. सिद्ध कीजिए कि सारणी 49.1 के पहले स्तंभ की स्कीमाएँ मान्य हैं और दूसरे स्तंभ की स्कीमाएँ मान्य नहीं हैं।

प्रश्न 49.12. निर्धारित कीजिए कि निम्न स्कीमाएँ मान्य हैं या अमान्य:

1. $(\Diamond\varphi \to \Box\psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

2. $\Diamond(\varphi \to \psi) \vee \Box(\psi \to \varphi)$.

प्रश्न 49.13. निम्न प्रत्येक स्कीमा के लिए ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ खोजिए जिसमें सूत्र का प्रत्येक दृष्टांत सत्य हो:

1. $p \to \Diamond\Diamond p$;

2. $\Diamond p \to \Box p$.

प्रश्न 49.14. दिखाइए कि $\Box(\varphi \wedge \psi) \vDash \Box\varphi$।

प्रश्न 49.15. दिखाइए कि $\Box(p \to q) \nvDash p \to \Box q$ और $p \to \Box q \nvDash \Box(p \to q)$।

अध्याय 50

फ़्रेम-परिभाष्यता

50.1 परिचय

मोडल तर्कशास्त्रियों की रुचि के प्रश्नों में एक है अभिगम्यता संबंध और उस अभिगम्यता संबंध वाले प्रतिरूपों में कुछ सूत्रों की सत्यता के बीच का संबंध। उदाहरणार्थ, मान लें अभिगम्यता संबंध स्वपरावर्ती है, अर्थात् प्रत्येक $w \in W$ के लिए Rww। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक जगत स्वयं से अभिगम्य है। इसका अर्थ है कि जब $\Box\varphi$ किसी जगत w पर सत्य हो, तो स्वयं w उन अभिगम्य जगतों में है जिन पर φ को सत्य होना चाहिए। अतः यदि $\mathfrak{M}$ का अभिगम्यता संबंध R स्वपरावर्ती है, तो हम चाहे जो जगत w और सूत्र φ लें, $\Box\varphi \to \varphi$ वहाँ सत्य होगा (दूसरे शब्दों में, स्कीमा $\Box p \to p$ और उसके सभी प्रतिस्थापन-दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में सत्य हैं)।

किंतु विलोम असत्य है। उदाहरणार्थ, ऐसा नहीं है कि यदि $\Box p \to p$, $\mathfrak{M}$ में सत्य हो, तो R स्वपरावर्ती हो। हम आसानी से ऐसा अस्वपरावर्ती प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ पा सकते हैं जिसमें $\Box p \to p$ सभी जगतों पर सत्य हो: केवल एक जगत w वाला प्रतिरूप लें, जिसमें w स्वयं से अभिगम्य नहीं है, पर $w \in V(p)$। p का सत्य-मूल्य उपयुक्त रूप से चुनकर हम $\Box\varphi \to \varphi$ को ऐसे प्रतिरूप में सत्य बना सकते हैं जो स्वपरावर्ती नहीं है।

समाधान यह है कि चर-नियतन V को समीकरण से हटा दिया जाए। यदि हम अपेक्षा करें कि $V(p)$ में चाहे जो जगत हों, $\Box p \to p$, $\mathfrak{M}$ के सभी जगतों पर सत्य हो, तो R का स्वपरावर्ती होना आवश्यक है। क्योंकि किसी भी अस्वपरावर्ती प्रतिरूप में कम-से-कम एक जगत w ऐसा होगा कि Rww नहीं। यदि हम $V(p) = W \setminus \{w\}$ रखें, तो p, w के अतिरिक्त सभी जगतों पर और इसलिए w से अभिगम्य सभी जगतों पर सत्य होगा (क्योंकि w स्वयं से अभिगम्य नहीं है और केवल w पर p असत्य है)। दूसरी ओर, p, w पर असत्य है, अतः $\Box p \to p$, w पर असत्य है।

इससे संकेत मिलता है कि मूल्यांकन रहित प्रतिरूप-संरचनाओं के लिए संकेत-पद्धति प्रस्तुत करनी चाहिए; इन्हें हम *फ़्रेम* कहते हैं। फ़्रेम $\mathfrak{F}$ केवल युग्म $\langle W, R\rangle$ है, जिसमें अभिगम्यता संबंध सहित जगतों का समुच्चय होता है। तब प्रत्येक प्रतिरूप $\langle W, R, V\rangle$ को हम फ़्रेम $\langle W, R\rangle$ पर *आधारित* कहते हैं। इसके विपरीत, कोई फ़्रेम उस पर आधारित प्रतिरूपों के वर्ग को निर्धारित करता है; और फ़्रेमों का कोई वर्ग, उस वर्ग के किसी फ़्रेम पर आधारित प्रतिरूपों का वर्ग निर्धारित करता है। हम $\mathfrak{F} \vDash \varphi$, किसी सूत्र के फ़्रेम में *मान्य* होने की धारणा, इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं: $\mathfrak{F}$ पर आधारित प्रत्येक $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$।

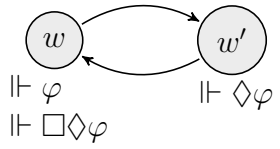
इस संकेत-पद्धति से हम सूत्रों और फ़्रेमों के वर्गों के बीच अनुरूपता संबंध स्थापित कर सकते हैं: उदाहरणार्थ, $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to p$ तभी जब $\mathfrak{F}$ स्वपरावर्ती है।

50.2 अभिगम्यता संबंधों के गुण

अनेक मोडल सूत्र अभिगम्यता संबंध के सरल, यहाँ तक कि परिचित, गुणों के अभिलाक्षणिक निकलते हैं। एक दिशा में इसका अर्थ है कि कोई दिया हुआ गुण रखने वाला प्रत्येक प्रतिरूप किसी संगत सूत्र (और उसके सभी प्रतिस्थापन-दृष्टांतों) को सत्य बनाता है। हम अभिगम्यता संबंधों के पाँच शास्त्रीय प्रकारों और उन सूत्रों के उदाहरणों से आरंभ करते हैं जिनकी सत्यता वे सुनिश्चित करते हैं।

यदि R ...है	*तो ...$\mathfrak{M}$ में सत्य है:*	
सीरियल: $\forall u \exists v Ruv$	$\Box p \to \Diamond p$	(D)
स्वपरावर्ती: $\forall w Rww$	$\Box p \to p$	(T)
सममित: $\forall u \forall v (Ruv \to Rvu)$	$p \to \Box\Diamond p$	(B)
संक्रमणशील: $\forall u \forall v \forall w ((Ruv \wedge Rvw) \to Ruw)$	$\Box p \to \Box\Box p$	(4)
यूक्लिडीय: $\forall w \forall u \forall v ((Rwu \wedge Rwv) \to Ruv)$	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(5)

तालिका 50.1: अनुरूपता के पाँच तथ्य।



चित्र 50.1: सममिति से तर्क।

प्रमेय 50.1. *मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ एक प्रतिरूप है। यदि R में सारणी 50.1 के बाएँ पक्ष का गुण है, तो दाएँ पक्ष के सूत्र का प्रत्येक दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में सत्य है।*

प्रमाण. B का मामला यह है: स्कीमा की किसी प्रतिरूप में सत्यता दिखाने के लिए हमें दिखाना है कि उसके सभी दृष्टांत प्रतिरूप के सभी जगतों पर सत्य हैं। अतः $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ को B का कोई दृष्टांत और $w \in W$ को स्वेच्छ जगत मानें। $\Box\Diamond\varphi$ की w पर सत्यता दिखाने के लिए मान लें कि पूर्ववर्ती φ, w पर सत्य है। हमें दिखाना है कि $\Diamond\varphi$, w से अभिगम्य सभी w' पर सत्य है। अब किसी भी Rww' वाले w' के लिए सममिति की परिकल्पना से $Rw'w$ भी (देखें आकृति 50.1)। चूँकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\varphi$। चूँकि w' कोई स्वेच्छ Rww' वाला जगत था, हमारे पास $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\Diamond\varphi$ है।

अन्य मामले अभ्यास के लिए छोड़े गए हैं। $\Box$

ध्यान दें कि प्रमेय 50.1 के विलोम निहितार्थ मान्य नहीं हैं: यह सत्य नहीं कि यदि कोई प्रतिरूप किसी स्कीमा को सत्य बनाता है, तो उस प्रतिरूप के अभिगम्यता संबंध में संगत गुण होता है। T और स्वपरावर्ती प्रतिरूपों के मामले में ऐसे प्रतिरूप का उदाहरण देना आसान है जिसमें स्वयं T विफल हो: $W = \{w\}$ और $V(p) = \emptyset$ लें। तब R स्वपरावर्ती नहीं है, पर $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash p$। किंतु यहाँ T का केवल एक दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में विफल है; अन्य दृष्टांत, जैसे $\Box\neg p \to \neg p$, सत्य हैं। ऐसे उदाहरण देना कठिन है जिनमें T का *प्रत्येक प्रतिस्थापन-दृष्टांत* $\mathfrak{M}$ में सत्य हो और $\mathfrak{M}$ स्वपरावर्ती न हो। किंतु ऐसे प्रतिरूप भी हैं:

प्रतिज्ञप्ति 50.2. *मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ ऐसा प्रतिरूप है कि $W = \{u, v\}$, जहाँ जगत u और v, R से जुड़े हैं: अर्थात् Ruv और Rvu दोनों। मान लें कि प्रत्येक p के लिए $u \in V(p) \Leftrightarrow v \in V(p)$। तब:*

1. *प्रत्येक φ के लिए $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ (φ पर आगमन का प्रयोग करें)।*
2. *T का प्रत्येक दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में सत्य है।*

चूँकि $\mathfrak{M}$ स्वपरावर्ती नहीं है (वास्तव में वह अस्वपरावर्ती है), T के मामले में प्रमेय 50.1 का विलोम विफल होता है (प्रमेय 50.1 में उल्लिखित कुछ—पर सभी नहीं—अन्य स्कीमाओं के लिए भी ऐसे तर्क दिए जा सकते हैं)।

यदि R ...है	*तो ...$\mathfrak{M}$ में सत्य है:*
आंशिक फलनीय: $\forall w \forall u \forall v((Rwu \wedge Rwv) \to u = v)$	$\Diamond p \to \Box p$
फलनीय: $\forall w \exists v \forall u(Rwu \leftrightarrow u = v)$	$\Diamond p \leftrightarrow \Box p$
दुर्बलतः सघन: $\forall u \forall v(Ruv \to \exists w(Ruw \wedge Rwv))$	$\Box\Box p \to \Box p$
दुर्बलतः संबद्ध: $\forall w \forall u \forall v((Rwu \wedge Rwv) \to (Ruv \vee u = v \vee Rvu))$	$\Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$ (L)
दुर्बलतः दिष्ट: $\forall w \forall u \forall v((Rwu \wedge Rwv) \to \exists t(Rut \wedge Rvt))$	$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ (G)

तालिका 50.2: अनुरूपता के पाँच और तथ्य।

यद्यपि हम पाँच शास्त्रीय सूत्रों D, T, B, 4 और 5 पर ध्यान देंगे, फिर भी सारणी 50.2 में अभिगम्यता संबंधों के कुछ और गुण दर्ज हैं। यदि प्रत्येक जगत से अधिकतम एक जगत अभिगम्य हो, तो अभिगम्यता संबंध R आंशिक फलनीय है। यदि प्रत्येक जगत से ठीक एक जगत अभिगम्य हो, तो हम उसे फलनीय कहते हैं। (अतः फलनीय संबंध ठीक वे हैं जो सीरियल और आंशिक फलनीय दोनों हों।) इन्हें "फलनीय" इसलिए कहते हैं कि अभिगम्यता संबंध किसी (आंशिक) फलन की तरह काम करता है। कोई संबंध दुर्बलतः सघन है यदि जब भी Ruv, तब u और v के "बीच" कोई w हो। इसलिए दुर्बलतः सघन संबंध एक अर्थ में संक्रमणशील संबंधों के विपरीत हैं: संक्रमणशील संबंध में जब भी आप w से घूमकर u से v तक पहुँच सकते हैं, तब u से v तक सीधे भी पहुँच सकते हैं; दुर्बलतः सघन संबंध में जब भी आप u से v तक सीधे पहुँच सकते हैं, तब किसी w से घूमकर भी पहुँच सकते हैं। कोई संबंध दुर्बलतः दिष्ट है यदि जब भी किसी जगत w से जगतों u और v तक पहुँचा जा सके, तब u और v दोनों से किसी एक जगत t तक पहुँचा जा सके—इसे कभी-कभी "हीरक गुण" या "संगमन" कहते हैं।

50.3 फ़्रेम

परिभाषा 50.3. *फ़्रेम* एक युग्म $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ है, जहाँ W जगतों का अरिक्त समुच्चय और R, W पर द्विपदी संबंध है। कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ फ़्रेम $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ पर *आधारित* है, तभी जब किसी मूल्यांकन V के लिए $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$।

परिभाषा 50.4. यदि $\mathfrak{F}$ कोई फ़्रेम है, तो हम कहते हैं कि φ, $\mathfrak{F}$ में *मान्य* है, $\mathfrak{F} \vDash \varphi$, यदि $\mathfrak{F}$ पर आधारित प्रत्येक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ के लिए $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$।

यदि $\mathcal{F}$ फ़्रेमों का वर्ग है, तो हम कहते हैं कि φ, $\mathcal{F}$ में *मान्य* है, $\mathcal{F} \vDash \varphi$, तभी जब प्रत्येक फ़्रेम $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ के लिए $\mathfrak{F} \vDash \varphi$।

फ़्रेम इसलिए रोचक हैं कि स्कीमाओं और अभिगम्यता संबंध R के गुणों के बीच अनुरूपता फ़्रेमों के स्तर पर होती है, *प्रतिरूपों के स्तर पर नहीं*। उदाहरणार्थ, यद्यपि T सभी स्वपरावर्ती प्रतिरूपों में सत्य है, प्रत्येक ऐसा प्रतिरूप जिसमें T सत्य है स्वपरावर्ती नहीं होता। किंतु यह *सत्य* है कि न केवल T सभी स्वपरावर्ती *फ़्रेमों* पर *मान्य* है, बल्कि प्रत्येक ऐसा फ़्रेम जिसमें T मान्य है, स्वपरावर्ती भी है।

टिप्पणी 6. फ़्रेमों के किसी वर्ग में मान्यता, प्रतिरूपों के किसी वर्ग में मान्यता की धारणा का विशेष मामला है: $\mathcal{F} \vDash \varphi$ तभी जब $\mathcal{C} \vDash \varphi$, जहाँ $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ के किसी फ़्रेम पर आधारित सभी प्रतिरूपों का वर्ग है।

स्पष्ट है कि यदि कोई सूत्र या स्कीमा मान्य है, अर्थात् *सभी* प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष मान्य है, तो वह फ़्रेमों के किसी भी वर्ग $\mathcal{F}$ के सापेक्ष भी मान्य है।

50.4 फ़्रेम-परिभाष्यता

यद्यपि प्रमेय 50.1 के विलोम निहितार्थ विफल होते हैं, "प्रतिरूप" को "फ़्रेम" से बदलने पर वे मान्य होते हैं: प्रमेय 50.1 में विचार किए गए गुणों के लिए यह *सत्य* है कि यदि कोई सूत्र किसी *फ़्रेम* में मान्य है, तो उस फ़्रेम के अभिगम्यता संबंध में संगत गुण होता है। अतः विचाराधीन सूत्र, संगत गुण वाले फ़्रेमों के वर्गों को *परिभाषित करते हैं*।

परिभाषा 50.5. यदि $\mathcal{F}$ फ़्रेमों का वर्ग है, तो हम कहते हैं कि φ, $\mathcal{F}$ को *परिभाषित करता है*, तभी जब सभी और केवल $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ फ़्रेमों के लिए $\mathfrak{F} \vDash \varphi$।

अब हम फ़्रेमों के लिए पूर्ण परिभाष्यता परिणाम स्थापित करेंगे।

प्रमेय 50.6. *यदि सारणी 50.1 के दाएँ पक्ष का सूत्र किसी फ़्रेम $\mathfrak{F}$ में मान्य है, तो $\mathfrak{F}$ में बाएँ पक्ष का गुण है।*

प्रमाण.

1. मान लें D, $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ में मान्य है, अर्थात् $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to \Diamond p$। $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ को $\mathfrak{F}$ पर आधारित प्रतिरूप और $w \in W$ लें। हमें ऐसा v दिखाना है कि Rwv। मान लें ऐसा नहीं है: तब प्रत्येक φ, जिसमें p भी है, के लिए $\mathfrak{M} \Vdash \Box\varphi$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\varphi$ दोनों। किंतु तब $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box p \to \Diamond p$, जो $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to \Diamond p$ के विरुद्ध है।

2. मान लें T, $\mathfrak{F}$ में मान्य है, अर्थात् $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to p$। कोई स्वेच्छ जगत $w \in W$ लें; हमें Rww दिखाना है। $u \in V(p)$ तभी रखें जब Rwu (जब q, p से भिन्न हो, तब $V(q)$ स्वेच्छ है, जैसे $V(q) = \emptyset$)। $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ लें। निर्माण से प्रत्येक Rwu वाले u के लिए $\mathfrak{M}, u \Vdash p$, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$। पर परिकल्पना से $\Box p \to p$, w पर सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash p$; और V की परिभाषा से यह केवल Rww होने पर संभव है।

3. हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करते हैं। मान लें $\mathfrak{F}$ सममित नहीं है; हम दिखाते हैं कि B, अर्थात् $p \to \Box\Diamond p$, $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ में मान्य नहीं है। तब ऐसे $u, v \in W$ हैं कि Ruv पर Rvu नहीं। V इस प्रकार परिभाषित करें कि $w \in V(p)$ तभी जब Rvw नहीं (अन्यथा V स्वेच्छ है)। $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ लें। V की परिभाषा से प्रत्येक ऐसे w के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ जिसके लिए Rvw नहीं; विशेषतः Rvu न होने से $\mathfrak{M}, u \Vdash p$। चूँकि Rvw तभी जब $w \notin V(p)$, ऐसा कोई w नहीं कि Rvw और $\mathfrak{M}, w \Vdash p$; अतः $\mathfrak{M}, v \nVdash \Diamond p$। चूँकि Ruv, इसलिए $\mathfrak{M}, u \nVdash \Box\Diamond p$ भी। फलतः $\mathfrak{M}, u \nVdash p \to \Box\Diamond p$, अतः B, $\mathfrak{F}$ में मान्य नहीं है।

4. मान लें 4, $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ में मान्य है, अर्थात् $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to \Box\Box p$। कोई ऐसे स्वेच्छ जगत $u, v, w \in W$ लें कि Ruv और Rvw; हमें Ruw दिखाना है। V इस प्रकार परिभाषित करें कि $z \in V(p)$ तभी जब Ruz (अन्यथा V स्वेच्छ है)। $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ लें। V की परिभाषा से प्रत्येक Ruz वाले z के लिए $\mathfrak{M}, z \Vdash p$, अतः $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box p$। पर परिकल्पना से 4, $\Box p \to \Box\Box p$, u पर सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\Box p$। Ruv और Rvw से $\mathfrak{M}, w \Vdash p$, और V की परिभाषा से यह केवल Ruw होने पर संभव है।

5. प्रतिधनात्मक रूप से, मान लें फ़्रेम $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ यूक्लिडीय नहीं है और दिखाएँ कि वह 5 को असत्य बनाता है, अर्थात् $\mathfrak{F} \nvDash \Diamond p \to \Box\Diamond p$। मान लें ऐसे जगत $u, v, w \in W$ हैं कि Rwu और Rwv पर Ruv नहीं। प्रत्येक जगत z के लिए V इस प्रकार परिभाषित करें कि $z \in V(p)$ तभी जब Ruz *नहीं*। $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ लें। तब परिकल्पना से $\mathfrak{M}, v \Vdash p$ और Rwv से $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond p$ भी। किंतु ऐसा कोई जगत y नहीं कि Ruy और $\mathfrak{M}, y \Vdash p$, अतः $\mathfrak{M}, u \nVdash \Diamond p$। Rwu से $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\Diamond p$, अतः 5, $\Diamond p \to \Box\Diamond p$, w पर विफल है। $\Box$

D के प्रमाण और अन्य मामलों के बीच अंतर पर ध्यान दें: मूल्यांकन V का कोई उल्लेख नहीं हुआ। वस्तुतः हमने सिद्ध किया कि यदि $\mathfrak{M} \Vdash$ D, तो $\mathfrak{M}$ सीरियल है। अतः D केवल फ़्रेमों का नहीं, सीरियल *प्रतिरूपों* का वर्ग परिभाषित करता है।

उपप्रमेय 50.7. *प्रत्येक प्रतिरूप जिसमें* D *सत्य है, सीरियल है।*

उपप्रमेय 50.8. *सारणी 50.1 के दाएँ पक्ष का प्रत्येक सूत्र, बाएँ पक्ष का गुण रखने वाले फ़्रेमों के वर्ग को परिभाषित करता है।*

प्रमाण. प्रमेय 50.1 में हमने सिद्ध किया कि यदि किसी प्रतिरूप में बाएँ पक्ष का गुण है, तो दाएँ पक्ष का सूत्र उसमें सत्य है। अतः यदि किसी फ़्रेम $\mathfrak{F}$ में बाएँ पक्ष का गुण है, तो दाएँ पक्ष का सूत्र $\mathfrak{F}$ में मान्य है। प्रमेय 50.6 में हमने विलोम निहितार्थ सिद्ध किए: यदि दाएँ पक्ष का कोई सूत्र $\mathfrak{F}$ में मान्य है, तो $\mathfrak{F}$ में बाएँ पक्ष का गुण है। □

प्रमेय 50.6 यह भी दिखाता है कि गुणों को संयोजित किया जा सकता है: उदाहरणार्थ, यदि B और 4 दोनों $\mathfrak{F}$ में मान्य हैं, तो फ़्रेम सममित और संक्रमणशील दोनों है। अनेक महत्त्वपूर्ण मोडल तर्कशास्त्र कुछ फ़्रेम-गुणों को संयोजित करने वाले सभी फ़्रेमों में मान्य सूत्रों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित होते हैं। अतः हम उन्हें उन सभी फ़्रेमों में मान्य सूत्रों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित कर सकते हैं जिनमें संगत परिभाषक सूत्र मान्य हैं। उदाहरणार्थ, शास्त्रीय तंत्र **S4**, सभी स्वपरावर्ती और संक्रमणशील फ़्रेमों में मान्य सूत्रों का समुच्चय है, अर्थात् उन सभी में जहाँ T और 4 दोनों मान्य हैं। **S5**, सभी स्वपरावर्ती, सममित और यूक्लिडीय फ़्रेमों में मान्य सूत्रों का समुच्चय है, अर्थात् उन सभी में जहाँ T, B और 5 सभी मान्य हैं।

R के गुणों के बीच तार्किक संबंध सामान्यतः उनके संगत परिभाषक सूत्रों के बीच संबंधों के अनुरूप होते हैं। उदाहरणार्थ, प्रत्येक स्वपरावर्ती संबंध सीरियल है; अतः जब भी T किसी फ़्रेम में मान्य है, D भी मान्य है। (ध्यान दें कि यह संबंध परिणाम का संबंध *नहीं* है। ऐसा नहीं कि जब भी $\mathfrak{M}, w \Vdash$ T, तब $\mathfrak{M}, w \Vdash$ D।) हम ऐसे कुछ संबंध दर्ज करते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 50.9. *मान लें R किसी समुच्चय W पर द्विपदी संबंध है; तब:*

1. *यदि R स्वपरावर्ती है, तो वह सीरियल है।*
2. *यदि R सममित है, तो वह संक्रमणशील तभी है जब वह यूक्लिडीय है।*
3. *यदि R सममित या यूक्लिडीय है, तो वह दुर्बलतः दिष्ट है (उसमें "हीरक गुण" है)।*
4. *यदि R यूक्लिडीय है, तो वह दुर्बलतः संबद्ध है।*
5. *यदि R फलनीय है, तो वह सीरियल है।*

50.5 प्रथम-कोटि परिभाष्यता

हमने देखा है कि फ़्रेमों के अभिगम्यता संबंधों के अनेक गुण मोडल सूत्रों से परिभाषित किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, फ़्रेमों की सममिति को सूत्र B, $p \to \Box\Diamond p$, से परिभाषित किया जा सकता है। अब तक मिले सभी प्रतिबंधों को केवल एक द्विस्थानिक विधेय-चिह्न वाली भाषा के प्रथम-कोटि सूत्रों से व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, सममिति को $\forall x \forall y\, (Q(x,y) \to Q(y,x))$ से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि $|\mathfrak{M}| = W$ और $Q^{\mathfrak{M}} = R$ वाली प्रथम-कोटि संरचना $\mathfrak{M}$ पूर्ववर्ती सूत्र को तभी संतुष्ट करती है जब R सममित हो। इससे निम्न परिभाषा सुझती है:

परिभाषा 50.10. फ़्रेमों का वर्ग $\mathcal{F}$ *प्रथम-कोटि परिभाष्य* है, यदि केवल एक द्विस्थानिक विधेय-चिह्न Q वाली प्रथम-कोटि भाषा में कोई वाक्य φ ऐसा हो कि $|\mathfrak{M}| = W$ और $Q^{\mathfrak{M}} = R$ वाली प्रथम-कोटि संरचना $\mathfrak{M}$ में $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle \in \mathcal{F}$।

यह निकलता है कि अब तक विचार किए गए गुण और उन्हें परिभाषित करने वाले मोडल सूत्र अपवादात्मक हैं। प्रत्येक सूत्र फ़्रेमों के प्रथम-कोटि परिभाष्य वर्ग को परिभाषित नहीं करता, और फ़्रेमों का प्रत्येक प्रथम-कोटि परिभाष्य वर्ग किसी मोडल सूत्र से परिभाष्य नहीं है।

पहले दावे का प्रतिदृष्टांत लोब सूत्र देता है:

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p. \tag{W}$$

W संक्रमणशील और विलोमतः सुस्थापित फ़्रेमों के वर्ग को परिभाषित करता है। कोई संबंध सुस्थापित है यदि कोई ऐसा अनंत अनुक्रम w_1, w_2, ... न हो जिसमें Rw_2w_1, Rw_3w_2, ...। उदाहरणार्थ, $\mathbb{N}$ पर संबंध $<$ सुस्थापित है, जबकि $\mathbb{Z}$ पर संबंध $<$ नहीं। कोई संबंध विलोमतः सुस्थापित तभी है जब उसका विलोम सुस्थापित हो। अतः विलोमतः सुस्थापित संबंध वे हैं जिनमें कोई ऐसा अनंत अनुक्रम w_1, w_2, ... नहीं होता कि Rw_1w_2, Rw_2w_3, ...।

किंतु संक्रमणशील विलोमतः सुस्थापित संबंधों को परिभाषित करने वाला कोई प्रथम-कोटि सूत्र नहीं है। मान लें $\mathfrak{M} \vDash \beta$ तभी जब $R = Q^{\mathfrak{M}}$ संक्रमणशील और विलोमतः सुस्थापित हो। φ_n को यह सूत्र मानें:

$$(Q(a_1, a_2) \wedge \cdots \wedge Q(a_{n-1}, a_n)).$$

अब सूत्रों के समुच्चय पर विचार करें:

$$\Gamma = \{\beta, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}.$$

Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतुष्टनीय है: ऐसा सबसे बड़ा k लें कि φ_k उपसमुच्चय में हो, $|\mathfrak{M}_k| = \{1, \dots, k\}$, $a_i^{\mathfrak{M}_k} = i$ और $Q^{\mathfrak{M}_k} =<$ रखें। चूँकि $\{1, \dots, k\}$ पर $<$ संक्रमणशील और विलोमतः सुस्थापित है, $\mathfrak{M}_k \vDash \beta$। निर्माण से प्रत्येक $i \leq k$ के लिए $\mathfrak{M}_k \vDash \varphi_i$। प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के संहतता प्रमेय से Γ किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में संतुष्टनीय है। परिकल्पना से, चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \beta$, संबंध $Q^{\mathfrak{M}}$ विलोमतः सुस्थापित है। किंतु स्पष्टतः $a_1^{\mathfrak{M}}$, $a_2^{\mathfrak{M}}$, ... ऐसा अनंत अनुक्रम बनाएँगे जिसे विलोमतः सुस्थापित होना निषिद्ध करता है।

दूसरे दावे का प्रतिदृष्टांत सार्विकता का गुण देता है: प्रत्येक u और v के लिए Ruv। सार्विक फ़्रेम सूत्र $\forall x \forall y\, Q(x, y)$ से प्रथम-कोटि परिभाष्य हैं। किंतु कोई मोडल सूत्र सभी और केवल सार्विक फ़्रेमों में मान्य नहीं है। यह स्वयं रोचक एक परिणाम का निष्कर्ष है: सार्विक फ़्रेमों में मान्य सूत्र ठीक वही हैं जो स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील फ़्रेमों में मान्य हैं। ऐसे स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील फ़्रेम हैं जो सार्विक नहीं हैं; अतः सभी सार्विक फ़्रेमों में मान्य प्रत्येक सूत्र कुछ गैर-सार्विक फ़्रेमों में भी मान्य है।

50.6 तुल्यता संबंध और S5

मोडल तर्कशास्त्र **S5** को सभी सार्विक फ़्रेमों पर मान्य सूत्रों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जाता है; अर्थात् प्रत्येक जगत प्रत्येक जगत से, स्वयं से भी, अभिगम्य है। ऐसी स्थिति में $\Box$ आवश्यकता और $\Diamond$ संभावना के संगत हैं: यदि φ *प्रत्येक* जगत पर सत्य है तो $\Box\varphi$ सत्य है, और यदि φ *किसी* जगत पर सत्य है तो $\Diamond\varphi$ सत्य है। यह निकलता है कि **S5** को सभी स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील फ़्रेमों, अर्थात् सभी *तुल्यता संबंधों*, पर मान्य सूत्रों के रूप में भी अभिलक्षित किया जा सकता है।

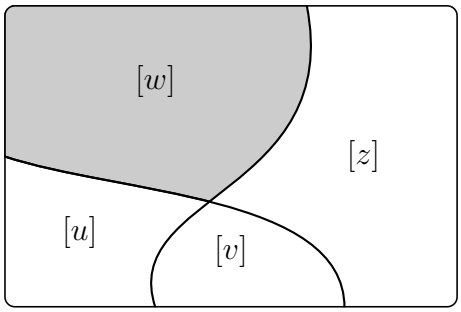
परिभाषा 50.11. W पर कोई द्विपदी संबंध R *तुल्यता संबंध* है, तभी जब वह स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील हो। W पर संबंध R *सार्विक* है, तभी जब प्रत्येक $u, v \in W$ के लिए Ruv।

चूँकि T, B और 4 क्रमशः स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील फ़्रेमों को अभिलक्षित करते हैं, इसलिए जिन फ़्रेमों में अभिगम्यता संबंध तुल्यता संबंध है वे ठीक वही हैं जिनमें ये तीनों सूत्र मान्य हैं। यह भी निकलता है कि तुल्यता संबंधों को सूत्रों के अन्य संयोजनों से अभिलक्षित किया जा सकता है, क्योंकि जिन प्रतिबंधों से हमने तुल्यता संबंध परिभाषित किए हैं वे R पर अन्य परिचित प्रतिबंधों के संयोजनों के तुल्य हैं।

प्रतिज्ञप्ति 50.12. *निम्नलिखित तुल्य हैं:*

1. *R एक तुल्यता संबंध है;*
2. *R स्वपरावर्ती और यूक्लिडीय है;*
3. *R सीरियल, सममित और यूक्लिडीय है;*
4. *R सीरियल, सममित और संक्रमणशील है।*

प्रमाण. अभ्यास। $\Box$



चित्र 50.2: W का तुल्यता वर्गों में विभाजन।

प्रतिज्ञप्ति 50.12, प्रतिज्ञप्ति 51.30 का अर्थगत समकक्ष है, क्योंकि यह उन फ्रेमों के मोडल तर्कशास्त्र का तुल्य अभिलक्षण देता है जिन पर R तुल्यता संबंध है (परंपरागत रूप से **S5** कहलाने वाला तर्कशास्त्र)।

सार्विक और तुल्यता संबंधों के बीच क्या संबंध है? यद्यपि प्रत्येक सार्विक संबंध तुल्यता संबंध है, स्पष्टतः प्रत्येक तुल्यता संबंध सार्विक नहीं है। किंतु सभी सार्विक संबंधों पर मान्य सूत्र ठीक वही हैं जो सभी तुल्यता संबंधों पर मान्य हैं।

प्रतिज्ञप्ति 50.13. *मान लें R कोई तुल्यता संबंध है और प्रत्येक $w \in W$ के लिए w का तुल्यता वर्ग समुच्चय $[w] = \{w' \in W : Rww'\}$ से परिभाषित करें। तब:*

1. *$w \in [w]$;*
2. *R प्रत्येक तुल्यता वर्ग $[w]$ पर सार्विक है;*
3. *तुल्यता वर्गों का संग्रह W को परस्पर अपवर्जी और संयुक्त रूप से सर्वसमावेशी उपसमुच्चयों में विभाजित करता है।*

प्रतिज्ञप्ति 50.14. *कोई सूत्र φ उन सभी फ्रेमों $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ में मान्य है जहाँ R तुल्यता संबंध है, तभी जब वह उन सभी फ्रेमों $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ में मान्य है जहाँ R सार्विक है। अतः सार्विक फ्रेमों का तर्कशास्त्र ठीक* **S5** *है।*

प्रमाण. यह तत्काल जाँचा जा सकता है कि W पर सार्विक संबंध R तुल्यता संबंध है। अतः यदि φ उन सभी फ्रेमों में मान्य है जहाँ R तुल्यता संबंध है, तो वह सभी सार्विक फ्रेमों में मान्य है। दूसरी दिशा के लिए प्रतिधनात्मक तर्क करें: मान लें ψ ऐसा सूत्र है जो तुल्यता संबंध R वाले फ्रेम $\langle W, R\rangle$ पर आधारित किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ के जगत w पर विफल है। अतः $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। प्रतिरूप $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ इस प्रकार परिभाषित करें:

1. $W' = [w]$;
2. R', W' पर सार्विक है;
3. $V'(p) = V(p) \cap W'$।

(अतः $\mathfrak{M}'$ के जगतों का समुच्चय W', आकृति 50.2 में छायांकित क्षेत्र से निरूपित है।) आसानी से देखा जा सकता है कि R और R', W' पर सहमत हैं। तब सूत्रों पर आगमन से दिखाया जा सकता है कि प्रत्येक φ और प्रत्येक $w' \in W'$ के लिए $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$ (यह सार्थक है क्योंकि $W' \subseteq W$)। विशेषतः $\mathfrak{M}', w \nVdash \psi$, और ψ सार्विक फ्रेम पर आधारित किसी प्रतिरूप में विफल है। $\square$

50.7 द्वितीय-कोटि परिभाष्यता

मोडल सूत्रों से परिभाष्य प्रत्येक फ़्रेम-गुण प्रथम-कोटि परिभाष्य नहीं है। किंतु यदि हम एकस्थानिक विधेयों पर परिमाणीकरण (अर्थात् एकपदी द्वितीय-कोटि परिमाणीकरण) की अनुमति दें, तो सभी मोडलतः परिभाष्य फ़्रेम-गुणों को परिभाषित कर सकते हैं। युक्ति उस व्यवस्थित ढंग का उपयोग करना है जिसमें किसी मोडल सूत्र के किसी जगत पर सत्य होने के प्रतिबंध प्रथम-कोटि सूत्रों से संबंधित होते हैं। यह मोडल सूत्रों का तथाकथित मानक अनुवाद है, ऐसी प्रथम-कोटि भाषा में जिसमें अभिगम्यता संबंध के लिए केवल द्विस्थानिक विधेय-चिह्न Q ही नहीं, बल्कि φ में आने वाले प्रतिज्ञप्ति चरों p_i के लिए एकस्थानिक विधेय-चिह्न P_i भी होता है।

परिभाषा 50.15. *मानक अनुवाद* $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = \bot$.
2. $\varphi \equiv \bot$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = \top$.
3. $\varphi \equiv p_i$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = P_i(x)$.
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = \neg\mathrm{ST}_x(\psi)$.
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = (\mathrm{ST}_x(\psi) \wedge \mathrm{ST}_x(\chi))$.
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = (\mathrm{ST}_x(\psi) \vee \mathrm{ST}_x(\chi))$.
7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = (\mathrm{ST}_x(\psi) \to \mathrm{ST}_x(\chi))$.
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = (\mathrm{ST}_x(\psi) \leftrightarrow \mathrm{ST}_x(\chi))$.
9. $\varphi \equiv \Box\psi$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = \forall y\,(Q(x,y) \to \mathrm{ST}_y(\psi))$.
10. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: $\mathrm{ST}_x(\varphi) = \exists y\,(Q(x,y) \wedge \mathrm{ST}_y(\psi))$.

उदाहरणार्थ, $\mathrm{ST}_x(\Box p \to p)$, $\forall y\,(Q(x,y) \to P(y)) \to P(x)$ है। $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ की भाषा की किसी संरचना के लिए एक प्रक्षेत्र, Q को दिया गया द्विस्थानिक संबंध, और एकस्थानिक विधेय-चिह्नों P_i को दिए गए प्रक्षेत्र के उपसमुच्चय चाहिए। दूसरे शब्दों में, ऐसी संरचना के अवयव ठीक φ के प्रतिरूप के अवयव हैं: प्रक्षेत्र जगतों का समुच्चय है, Q को दिया द्विस्थानिक संबंध अभिगम्यता संबंध है, और P_i को दिए उपसमुच्चय ठीक नियतन $V(p_i)$ हैं। इसलिए यह आश्चर्यजनक नहीं कि किसी मोडल प्रतिरूप में φ की संतुष्टि और संगत संरचना में $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ की संतुष्टि सहमत होती हैं:

प्रतिज्ञप्ति 50.16. *मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$; $\mathfrak{M}'$ वह प्रथम-कोटि संरचना है जिसमें $|\mathfrak{M}'| = W$, $Q^{\mathfrak{M}'} = R$ और $P_i^{\mathfrak{M}'} = V(p_i)$; तथा $s(x) = w$। तब*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ तभी जब } \mathfrak{M}', s \vDash \mathrm{ST}_x(\varphi)$$

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा। □

प्रतिज्ञप्ति 50.17. *मान लें φ कोई मोडल सूत्र और $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ कोई फ़्रेम है। $\mathfrak{F}'$ वह प्रथम-कोटि संरचना हो जिसमें $|\mathfrak{F}'| = W$ और $Q^{\mathfrak{F}'} = R$, तथा φ' यह द्वितीय-कोटि सूत्र हो:*

$$\forall X_1 \ldots \forall X_n\, \forall x\, \mathrm{ST}_x(\varphi)[X_1/P_1, \ldots, X_n/P_n],$$

जहाँ P_1, ..., P_n, $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ के सभी एकस्थानिक विधेय-चिह्न हैं। तब

$$\mathfrak{F} \vDash \varphi \text{ तभी जब } \mathfrak{F}' \vDash \varphi'$$

प्रमाण. $\mathfrak{F}' \vDash \varphi'$ तभी जब प्रत्येक ऐसी संरचना $\mathfrak{M}'$ में जहाँ $i = 1, \ldots, n$ के लिए $P_i^{\mathfrak{M}'} \subseteq W$, और प्रत्येक ऐसे s के लिए जिसमें $s(x) \in W$, $\mathfrak{M}', s \vDash \mathrm{ST}_x(\varphi)$। प्रतिज्ञप्ति 50.16 से यह तभी है जब $\mathfrak{F}$ पर आधारित सभी प्रतिरूपों $\mathfrak{M}$ और प्रत्येक जगत $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, अर्थात् $\mathfrak{F} \vDash \varphi$। □

परिभाषा 50.18. फ़्रेमों का वर्ग $\mathcal{F}$ *द्वितीय-कोटि परिभाष्य* है, यदि केवल एक द्विस्थानिक विधेय-चिह्न P और केवल एकपदी समुच्चय चरों पर परिमाणकों वाली द्वितीय-कोटि भाषा में कोई वाक्य φ ऐसा हो कि $|\mathfrak{M}| = W$ और $P^{\mathfrak{M}} = R$ वाली संरचना $\mathfrak{M}$ में $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle \in \mathcal{F}$।

उपप्रमेय 50.19. *यदि फ़्रेमों का कोई वर्ग किसी सूत्र φ से परिभाष्य है, तो अभिगम्यता संबंधों का संगत वर्ग किसी एकपदी द्वितीय-कोटि वाक्य से परिभाष्य है।*

प्रमाण. पूर्ववर्ती प्रमाण के एकपदी द्वितीय-कोटि वाक्य φ' में अपेक्षित गुण है। □

उदाहरण के लिए फिर सूत्र $\Box p \to p$ पर विचार करें। यह स्वपरावर्तकता को परिभाषित करता है। निस्संदेह स्वपरावर्तकता वाक्य $\forall x\, Q(x, x)$ से प्रथम-कोटि परिभाष्य है। पर यह इस एकपदी द्वितीय-कोटि वाक्य से भी परिभाष्य है:

$$\forall X\, \forall x\, (\forall y\, (Q(x, y) \to X(y)) \to X(x)).$$

इसका निस्संदेह अर्थ है कि दोनों वाक्य तुल्य हैं। इसे सीधे इस प्रकार समझा जा सकता है। पहले मान लें द्वितीय-कोटि वाक्य किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में सत्य है। चूँकि x और X सार्विकतः परिमाणित हैं, शेष भाग किसी भी $x \in W$ और समुच्चय $X \subseteq W$ के लिए मान्य होना चाहिए, जैसे उस समुच्चय $\{z : Rxz\}$ के लिए जहाँ $R = Q^{\mathfrak{M}}$। अतः किसी भी ऐसे s के लिए जिसमें $s(x) \in W$ और $s(X) = \{z : Rxz\}$, हमारे पास $\mathfrak{M} \vDash \forall y\, (Q(x, y) \to X(y)) \to X(x)$। किंतु $s(X)$ के चुनाव से इसका अर्थ है $\mathfrak{M}, s \vDash \forall y\, (Q(x, y) \to Q(x, y)) \to Q(x, x)$, जो $Q(x, x)$ के तुल्य है क्योंकि पूर्ववर्ती मान्य है। चूँकि $s(x)$ स्वेच्छ है, $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, Q(x, x)$।

अब मान लें $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, Q(x, x)$ और दिखाएँ कि $\mathfrak{M} \vDash \forall X\, \forall x\, (\forall y\, (Q(x, y) \to X(y)) \to X(x))$। कोई नियतन s चुनें और मान लें $\mathfrak{M}, s \vDash \forall y\, (Q(x, y) \to X(y))$। s' को s का ऐसा y-रूपांतर मानें जिसमें $s'(y) = s(x)$; तब $\mathfrak{M}, s' \vDash Q(x, y) \to X(y)$, अर्थात् $\mathfrak{M}, s \vDash Q(x, x) \to X(x)$। चूँकि $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, Q(x, x)$, पूर्ववर्ती सत्य है और हमारे पास $\mathfrak{M}, s \vDash X(x)$ है, जो हमें दिखाना था।

चूँकि फ़्रेमों के कुछ परिभाष्य वर्ग प्रथम-कोटि परिभाष्य नहीं हैं, इसलिए φ' रूप का प्रत्येक एकपदी द्वितीय-कोटि वाक्य किसी प्रथम-कोटि वाक्य के तुल्य नहीं है। यह तय करने की कोई प्रभावी विधि नहीं कि कौन-से तुल्य हैं।

प्रश्न

प्रश्न 50.1. प्रमेय 50.1 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 50.2. प्रतिज्ञप्ति 50.2 के दावे सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 50.3. मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ एक प्रतिरूप है। दिखाइए कि यदि R, सारणी 50.2 के बाएँ पक्ष के गुणों को संतुष्ट करता है, तो दाएँ पक्ष के संगत सूत्र का प्रत्येक दृष्टांत $\mathfrak{M}$ में सत्य है।

प्रश्न 50.4. दिखाइए कि यदि सारणी 50.2 के दाएँ पक्ष का सूत्र किसी फ़्रेम $\mathfrak{F}$ में मान्य है, तो $\mathfrak{F}$ में बाएँ पक्ष का गुण है। इसके लिए ऐसे फ़्रेम पर विचार करें जो बाएँ पक्ष का गुण *संतुष्ट नहीं करता*, और उपयुक्त V परिभाषित करें जिससे दाएँ पक्ष का सूत्र किसी जगत पर असत्य हो।

प्रश्न 50.5. प्रतिज्ञप्ति 50.9 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 50.6. निम्नलिखित दिखाकर प्रतिज्ञप्ति 50.12 सिद्ध कीजिए:

1. यदि R सममित और संक्रमणशील है, तो वह यूक्लिडीय है।

2. यदि R स्वपरावर्ती है, तो वह सीरियल है।
3. यदि R स्वपरावर्ती और यूक्लिडीय है, तो वह सममित है।
4. यदि R सममित और यूक्लिडीय है, तो वह संक्रमणशील है।
5. यदि R सीरियल, सममित और संक्रमणशील है, तो वह स्वपरावर्ती है।

समझाइए कि प्रतिबंधों की तुल्यता के प्रमाण के लिए यह पर्याप्त क्यों है।

अध्याय 51

अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

51.1 परिचय

हमारे पास मोडल प्रतिरूपों के आधार पर मूल मोडल भाषा का अर्थविज्ञान और किसी सूत्र के मान्य होने की धारणा है—सभी प्रतिरूपों के सभी जगतों पर सत्य— या प्रतिरूपों अथवा फ्रेमों के किसी वर्ग के सापेक्ष मान्य होने की धारणा—वर्ग के सभी प्रतिरूपों, या फ्रेम पर आधारित सभी प्रतिरूपों, के सभी जगतों पर सत्य। तर्कशास्त्र सामान्यतः मान्यता के ऐसे अर्थगत अभिलक्षणों को व्युत्पन्नता की प्रमाण-सैद्धांतिक धारणा से जोड़ता है। लक्ष्य किसी तंत्र में व्युत्पन्नता की ऐसी धारणा परिभाषित करना है कि कोई सूत्र तभी व्युत्पन्न हो जब वह मान्य हो।

सबसे सरल और ऐतिहासिक रूप से सबसे पुराने व्युत्पत्ति-तंत्र तथाकथित हिल्बर्ट-प्रकार या अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-तंत्र हैं। अनेक मोडल तर्कशास्त्रों के लिए हिल्बर्ट-प्रकार व्युत्पत्ति-तंत्र बनाना अपेक्षाकृत आसान है: अधिसैद्धांतिक अध्ययन की वस्तुओं के रूप में वे सरल हैं (जैसे यथार्थता और पूर्णता सिद्ध करने के लिए)। किंतु उनमें सूत्र सिद्ध करना, उदाहरणार्थ प्राकृतिक निगमन तंत्रों की तुलना में, कहीं कठिन है।

हिल्बर्ट-प्रकार व्युत्पत्ति-तंत्र में किसी सूत्र की व्युत्पत्ति, कुछ अभिगृहीतों से कुछ अनुमान-नियमों के माध्यम से उस सूत्र तक ले जाने वाला सूत्रों का अनुक्रम है। चूँकि हम चाहते हैं कि व्युत्पत्ति-तंत्र अर्थविज्ञान से मेल खाए, हमें सुनिश्चित करना है कि व्युत्पन्न सूत्रों का समुच्चय सभी प्रतिरूपों में सत्य हो (या उन सभी प्रतिरूपों में सत्य हो जिनमें सभी अभिगृहीत सत्य हैं)। पहले हम मोडल तर्कशास्त्रों के वे गुण अलग करेंगे जो इसके लिए आवश्यक हैं: "सामान्य" मोडल तर्कशास्त्र। सामान्य मोडल तर्कशास्त्र के लिए केवल दो अनुमान-नियम मानने होते हैं: मोडस पोनेन्स और आवश्यकीकरण। अभिगृहीतों के रूप में हम सर्वसत्यताओं के सभी प्रतिस्थापन-दृष्टांत और संबंधित मोडल तर्कशास्त्र के अनुसार कुछ मोडल अभिगृहीत लेते हैं। केवल सभी प्रतिरूपों के वर्ग में रुचि होने पर भी हमें K और Dual के सभी प्रतिस्थापन-दृष्टांत अभिगृहीत मानने होते हैं। इतने से ही न्यूनतम सामान्य मोडल तर्कशास्त्र **K** उत्पन्न होता है।

परिभाषा 51.1. *मोडस पोनेन्स* का नियम यह अनुमान-स्कीमा है:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\,\mathrm{mp}$$

हम कहते हैं कि सूत्र ψ, मोडस पोनेन्स से सूत्रों φ, χ से *निकलता* है, तभी जब $\chi \equiv \varphi \to \psi$।

परिभाषा 51.2. *आवश्यकीकरण* का नियम यह अनुमान-स्कीमा है:

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}\,\mathrm{nec}$$

हम कहते हैं कि सूत्र ψ, आवश्यकीकरण से सूत्र φ से निकलता है, तभी जब $\psi \equiv \Box\varphi$।

परिभाषा 51.3. अभिगृहीतों के समुच्चय Σ से *व्युत्पत्ति*, सूत्रों ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n का ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक ψ_i निम्न में से कोई है:

1. किसी सर्वसत्यता का प्रतिस्थापन-दृष्टांत; या
2. Σ के किसी सूत्र का प्रतिस्थापन-दृष्टांत; या
3. $j, k < i$ वाले दो सूत्रों ψ_j, ψ_k से मोडस पोनेन्स द्वारा निकलता है; या
4. $j < i$ वाले किसी सूत्र ψ_j से आवश्यकीकरण द्वारा निकलता है।

यदि $\psi_n \equiv \varphi$ वाली ऐसी कोई व्युत्पत्ति हो, तो हम कहते हैं कि φ, Σ से *व्युत्पन्न* है; संकेत में $\Sigma \vdash \varphi$।

इस परिभाषा से यह निकलेगा कि व्युत्पन्न सूत्रों का समुच्चय सामान्य मोडल तर्कशास्त्र बनाता है और प्रत्येक व्युत्पन्न सूत्र उस प्रत्येक प्रतिरूप में सत्य है जिसमें प्रत्येक अभिगृहीत सत्य हो। व्युत्पत्तियों का यह गुण *यथार्थता* कहलाता है। इसका विलोम, *पूर्णता*, सिद्ध करना अधिक कठिन है।

51.2 सामान्य मोडल तर्कशास्त्र

मोडल सूत्रों के प्रत्येक समुच्चय को अभिगृहीतों के किसी समुच्चय से व्युत्पाद्य सूत्रों के रूप में आसानी से अभिलक्षित नहीं किया जा सकता। हम चाहते हैं कि मोडल तर्कशास्त्र सुव्यवस्थित हों। सबसे पहले, शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र में जो कुछ हम व्युत्पन्न वह अब भी व्युत्पन्न होना चाहिए, यह ध्यान रखते हुए कि सूत्रों में अब $\Box$ और $\Diamond$ भी आ सकते हैं। इसके लिए हम अपेक्षा करते हैं कि मोडल तर्कशास्त्र सभी सर्वसत्यतात्मक दृष्टांतों को समाहित करे और मोडस पोनेन्स के अधीन संवृत हो।

परिभाषा 51.4. *मोडल तर्कशास्त्र* मोडल सूत्रों का ऐसा समुच्चय Σ है जो

1. सभी सर्वसत्यताओं को समाहित करता है, और
2. प्रतिस्थापन के अधीन संवृत है; अर्थात् यदि $\varphi \in \Sigma$ और θ_1, ..., θ_n सूत्र हैं, तो
$$\varphi[\theta_1/p_1, \ldots, \theta_n/p_n] \in \Sigma,$$
3. *मोडस पोनेन्स* के अधीन संवृत है; अर्थात् यदि φ और $\varphi \to \psi \in \Sigma$, तो $\psi \in \Sigma$।

मोडल तर्कशास्त्र के संबंधात्मक अर्थविज्ञान का उपयोग करने के लिए हमें यह भी अपेक्षा करनी होती है कि सभी मोडल प्रतिरूपों में मान्य सभी सूत्र समाहित हों। यह अपेक्षा तब पूरी हो जाती है जब K और dual के सभी दृष्टांत व्युत्पन्न हों और जब भी कोई सूत्र φ व्युत्पन्न हो, $\Box\varphi$ भी हो। इन प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला मोडल तर्कशास्त्र *सामान्य* कहलाता है। (निस्संदेह गैर-सामान्य मोडल तर्कशास्त्र भी हैं, पर सामान्य संबंधात्मक प्रतिरूप उनके लिए पर्याप्त नहीं।)

परिभाषा 51.5. कोई मोडल तर्कशास्त्र Σ *सामान्य* है यदि उसमें

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q), \tag{K}$$
$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \tag{dual}$$

हों और वह *आवश्यकीकरण* के अधीन संवृत हो; अर्थात् यदि $\varphi \in \Sigma$, तो $\Box\varphi \in \Sigma$।

ध्यान दें कि सर्वसत्यतात्मक निहितार्थ *किसी जगत पर सत्यता* को संरक्षित रखने जितना "सूक्ष्म" है, जबकि नियम nec केवल *किसी प्रतिरूप में सत्यता* को संरक्षित रखता है (और इसलिए किसी फ़्रेम या फ़्रेमों के वर्ग में मान्यता को भी)।

प्रतिज्ञप्ति 51.6. *प्रत्येक सामान्य मोडल तर्कशास्त्र नियम* rk *के अधीन संवृत है:*

$$\frac{\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots)}{\Box\varphi_1 \to (\Box\varphi_2 \to \cdots (\Box\varphi_{n-1} \to \Box\varphi_n) \cdots).} \text{ rk}$$

प्रमाण. n पर आगमन से: यदि $n = 1$, तो नियम केवल nec है और प्रत्येक सामान्य मोडल तर्कशास्त्र nec के अधीन संवृत है।

अब मान लें परिणाम $n - 1$ के लिए मान्य है; हम इसे n के लिए दिखाते हैं।

मान लें

$$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots) \in \Sigma$$

आगमन-परिकल्पना से हमारे पास है:

$$\Box\varphi_1 \to (\Box\varphi_2 \to \cdots \Box(\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots) \in \Sigma$$

चूँकि Σ सामान्य मोडल तर्कशास्त्र है, उसमें K के सभी दृष्टांत हैं, विशेषतः:

$$\Box(\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \to (\Box\varphi_{n-1} \to \Box\varphi_n) \in \Sigma$$

मोडस पोनेन्स और उपयुक्त सर्वसत्यतात्मक दृष्टांतों से हमें मिलता है:

$$\Box\varphi_1 \to (\Box\varphi_2 \to \cdots (\Box\varphi_{n-1} \to \Box\varphi_n) \cdots) \in \Sigma. \qquad \Box$$

प्रतिज्ञप्ति 51.7. *प्रत्येक सामान्य मोडल तर्कशास्त्र Σ में $\neg\Diamond\bot$ है।*

प्रतिज्ञप्ति 51.8. *मान लें φ_1, ..., φ_n सूत्र हैं। तब φ_1, ..., φ_n के सभी दृष्टांतों को समाहित करने वाला एक सबसे छोटा मोडल तर्कशास्त्र Σ है।*

प्रमाण. φ_1, ..., φ_n दिए होने पर Σ को उन सभी सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों का सर्वनिष्ठ परिभाषित करें जिनमें φ_1, ..., φ_n के सभी दृष्टांत हैं। सर्वनिष्ठ अरिक्त है, क्योंकि सभी सूत्रों का समुच्चय $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ ऐसा मोडल तर्कशास्त्र है।□

परिभाषा 51.9. φ_1, ..., φ_n को समाहित करने वाला सबसे छोटा सामान्य मोडल तर्कशास्त्र *मोडल तंत्र* कहलाता है और $\mathbf{K}\varphi_1 \ldots \varphi_n$ से निरूपित होता है। सबसे छोटा सामान्य मोडल तर्कशास्त्र **K** से निरूपित होता है।

51.3 व्युत्पत्तियाँ और मोडल तंत्र

पहले हम परिभाषित करते हैं कि सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों के लिए व्युत्पत्ति क्या है। मोटे तौर पर, व्युत्पत्ति सूत्रों का ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक अवयव या तो अनेक *अभिगृहीतों* में से किसी एक का (प्रतिस्थापन-दृष्टांत) है, या कुछ अनुमान-नियमों में से किसी नियम से पूर्ववर्ती अवयवों से निकलता है। सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों के लिए सर्वसत्यताओं, K और dual के सभी दृष्टांत अभिगृहीत माने जाते हैं। इससे सबसे छोटा सामान्य मोडल तर्कशास्त्र, मोडल तंत्र **K**, मिलता है। अन्य तंत्र पाने के लिए हम अतिरिक्त अभिगृहीत जोड़ सकते हैं। नियम सदैव मोडस पोनेन्स mp और आवश्यकीकरण nec हैं।

परिभाषा 51.10. कोई मोडल तंत्र $\mathbf{K}\varphi_1 \ldots \varphi_n$ और सूत्र ψ दिए होने पर हम कहते हैं कि ψ, $\mathbf{K}\varphi_1 \ldots \varphi_n$ में *व्युत्पन्न* है, जिसे $\mathbf{K}\varphi_1 \ldots \varphi_n \vdash \psi$ लिखते हैं, तभी जब ऐसे सूत्र χ_1, ..., χ_k हों कि $\chi_k = \psi$ और प्रत्येक χ_i या तो कोई सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत हो, या K, dual, φ_1, ..., φ_n में से किसी का दृष्टांत हो, या नियम mp अथवा nec से पूर्ववर्ती सूत्रों से निकले।

निम्न प्रतिज्ञप्ति हमें ψ की कोई Σ-व्युत्पत्ति प्रस्तुत करके $\psi \in \Sigma$ दिखाने देती है।

प्रतिज्ञप्ति 51.11. $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n = \{\psi : \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi\}$.

प्रमाण. हम व्युत्पत्तियों की लंबाई पर आगमन से दिखाते हैं कि $\{\psi : \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi\} \subseteq \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$.

यदि ψ की व्युत्पत्ति की लंबाई 1 है, तो उसमें एक ही सूत्र है। वह सूत्र mp या nec से पूर्ववर्ती सूत्रों से नहीं निकल सकता, इसलिए वह कोई सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत, K, dual, या φ_1, ..., φ_n में से किसी का दृष्टांत होना चाहिए। $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$ में ये भी हैं, अतः $\psi \in \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$।

यदि ψ की व्युत्पत्ति की लंबाई > 1 है, तो ψ इसके अतिरिक्त व्युत्पत्ति की अंतिम पंक्ति से पहले आने वाले सूत्रों से mp या nec द्वारा मिल सकता है। यदि ψ, χ और $\chi \to \psi$ से (mp द्वारा) निकलता है, तो आगमन-परिकल्पना से χ और $\chi \to \psi \in \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$। प्रत्येक मोडल तर्कशास्त्र मोडस पोनेन्स के अधीन संवृत है, अतः $\psi \in \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$। यदि $\psi \equiv \Box\chi$, χ से nec द्वारा निकलता है, तो आगमन-परिकल्पना से $\chi \in \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$। प्रत्येक सामान्य मोडल तर्कशास्त्र nec के अधीन संवृत है, अतः $\psi \in \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$।

विलोम समावेशन यह दिखाने से मिलता है कि $\Sigma = \{\psi : \mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi\}$ ऐसा सामान्य मोडल तर्कशास्त्र है जिसमें φ_1, ..., φ_n के सभी दृष्टांत हैं, और यह देखने से कि परिभाषा से $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n$ ऐसा सबसे छोटा तर्कशास्त्र है।

1. प्रत्येक सर्वसत्यता ψ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, अतः $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$; फलतः Σ में सभी सर्वसत्यताएँ हैं।

2. यदि $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \chi$ और $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \chi \to \psi$, तो $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$: χ की व्युत्पत्ति को $\chi \to \psi$ की व्युत्पत्ति से मिलाएँ और पंक्ति ψ जोड़ें। अंतिम पंक्ति mp से उचित है। अतः Σ मोडस पोनेन्स के अधीन संवृत है।

3. यदि ψ की कोई व्युत्पत्ति है, तो ψ के प्रत्येक प्रतिस्थापन-दृष्टांत की भी व्युत्पत्ति है: प्रतिस्थापन को व्युत्पत्ति के प्रत्येक सूत्र पर लागू करें। (अभ्यास: व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन से सिद्ध करें कि परिणाम भी सही व्युत्पत्ति है।) अतः Σ एकरूप प्रतिस्थापन के अधीन संवृत है। (अब हमने स्थापित किया है कि Σ मोडल तर्कशास्त्र की सभी शर्तें संतुष्ट करता है।)

4. हमारे पास $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ K, अतः $K \in \Sigma$।

5. हमारे पास $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ dual, अतः dual $\in \Sigma$।

6. यदि $\mathbf{K}\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \chi$, तो अतिरिक्त पंक्ति $\Box\chi$, nec से उचित है। फलतः Σ, nec के अधीन संवृत है। अतः Σ सामान्य है। $\Box$

51.4 K में प्रमाण

सबसे छोटे मोडल तंत्र में प्रमाणों का अभ्यास करने के लिए हम दिखाते हैं कि सारणी 49.1 के बाएँ पक्ष के सभी मान्य सूत्रों के **K**-प्रमाण दिए जा सकते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 51.12. $\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to \Box(\psi \to \varphi)$

प्रमाण.

1.	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	taut
2.	$\Box(\varphi \to (\psi \to \varphi))$	nec, 1
3.	$\Box(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\Box\varphi \to \Box(\psi \to \varphi))$	K
4.	$\Box\varphi \to \Box(\psi \to \varphi)$	mp, 2, 3

$\Box$

प्रतिज्ञप्ति 51.13. $\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

प्रमाण.

1.	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	taut
2.	$\Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$	nec
3.	$\Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi)$	K
4.	$\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi$	mp, 2, 3
5.	$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$	taut
6.	$\Box((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$	nec
7.	$\Box((\varphi \wedge \psi) \to \psi) \to (\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi)$	K
8.	$\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi$	mp, 6, 7
9.	$(\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi) \to$ $((\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi) \to$ $(\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)))$	taut
10.	$(\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi) \to$ $(\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi))$	mp, 4, 9
11.	$\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	mp, 8, 10.

ध्यान दें कि पंक्ति 9 का सूत्र इस सर्वसत्यता का दृष्टांत है:

$$(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r))).$$

□

प्रतिज्ञप्ति 51.14. $\mathbf{K} \vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$

प्रमाण.

1.	$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	taut
2.	$\Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$	nec, 1
3.	$\Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to (\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$	K
4.	$\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	mp, 2, 3
5.	$\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	K
6.	$(\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to$ $(\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))) \to$ $(\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))))$	taut
7.	$(\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))) \to$ $(\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$	mp, 4, 6
8.	$\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$	mp, 5, 7
9.	$(\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))) \to$ $((\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	taut
10.	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$	mp, 8, 9

पंक्तियों 6 और 9 के सूत्र इन सर्वसत्यताओं के दृष्टांत हैं:

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$
$$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$$

□

प्रतिज्ञप्ति 51.15. $\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \to \Diamond\neg p$

प्रमाण.

1.	$\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg p$	dual
2.	$(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg p) \to$ $(\neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p)$	taut
3.	$\neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p$	mp, 1, 2
4.	$\neg\neg p \to p$	taut
5.	$\Box(\neg\neg p \to p)$	nec, 4
6.	$\Box(\neg\neg p \to p) \to (\Box\neg\neg p \to \Box p)$	K
7.	$(\Box\neg\neg p \to \Box p)$	mp, 5, 6
8.	$(\Box\neg\neg p \to \Box p) \to (\neg\Box p \to \neg\Box\neg\neg p)$	taut
9.	$\neg\Box p \to \neg\Box\neg\neg p$	mp, 7, 8
10.	$(\neg\Box p \to \neg\Box\neg\neg p) \to$ $((\neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p) \to (\neg\Box p \to \Diamond\neg p))$	taut
11.	$(\neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p) \to (\neg\Box p \to \Diamond\neg p)$	mp, 9, 10
12.	$\neg\Box p \to \Diamond\neg p$	mp, 3, 11

पंक्तियों 8 और 10 के सूत्र इन सर्वसत्यताओं के दृष्टांत हैं:

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$
$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)).$$

□

51.5 व्युत्पन्न नियम

व्युत्पत्तियाँ खोजना और लिखना स्पष्टतः कठिन, बोझिल और पुनरावृत्तिपूर्ण है। उदाहरणार्थ, हम बहुत बार $\varphi \to \psi$ से $\Box\varphi \to \Box\psi$ तक जाना, अर्थात् नियम rk लागू करना चाहते हैं। इसके लिए पहले nec का अनुप्रयोग, फिर K का उचित दृष्टांत दर्ज करना, फिर mp लागू करना पड़ता है। $\varphi \to \psi$ और $\psi \to \chi$ से $\varphi \to \chi$ तक जाने के लिए यह (लंबा) सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत दर्ज करना पड़ता है:

$$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$

और mp दो बार लागू करना पड़ता है। हम प्रायः किसी उप-सूत्र को ऐसे सूत्र से बदलना चाहते हैं जिसे हम उसके तुल्य जानते हैं, जैसे $\Diamond\varphi$ को $\neg\Box\neg\varphi$ से, या $\neg\neg\varphi$ को φ से। इसलिए वास्तविक व्युत्पत्ति लिखने के स्थान पर केवल यह दर्ज करना अधिक सुविधाजनक है कि मध्यवर्ती चरण क्यों व्युत्पन्न हैं। इस उद्देश्य से व्युत्पन्नता के कुछ तथ्य एकत्र करें।

प्रतिज्ञप्ति 51.16. *यदि* $\mathbf{K} \vdash \varphi_1$, ..., $\mathbf{K} \vdash \varphi_n$, *और* ψ, φ_1, ..., φ_n *से प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र द्वारा निकलता है, तो* $\mathbf{K} \vdash \psi$ *।*

प्रमाण. यदि ψ, φ_1, ..., φ_n से प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र द्वारा निकलता है, तो

$$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_n \to \psi) \ldots)$$

एक सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है। mp को n बार लागू करने से ψ की व्युत्पत्ति मिलती है। □

इस प्रतिज्ञप्ति के उपयोग को हम pl से दर्शाएँगे।

प्रतिज्ञप्ति 51.17. *यदि* $\mathbf{K} \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \ldots)$, *तो* $\mathbf{K} \vdash \Box\varphi_1 \to (\Box\varphi_2 \to \cdots (\Box\varphi_{n-1} \to \Box\varphi_n) \ldots)$ *।*

प्रमाण. n पर आगमन से, ठीक प्रतिज्ञप्ति 51.6 के प्रमाण की तरह। □

इस प्रतिज्ञप्ति के उपयोग को हम rk से दर्शाएँगे। देखें कि ये परिणाम व्युत्पन्नता के परिणाम अधिक आसानी से स्थापित करने में कैसे सहायक हैं।

प्रतिज्ञप्ति 51.18. $\mathbf{K} \vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	taut
2.	$\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$	rk, 1
3.	$\mathbf{K} \vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$	pl, 2

□

प्रतिज्ञप्ति 51.19. *यदि* $\mathbf{K} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *और* $\mathbf{K} \vdash \chi[\varphi/q]$, *तो* $\mathbf{K} \vdash \chi[B/q]$

प्रमाण. अभ्यास। □

यह प्रतिज्ञप्ति विशेष रूप से तब उपयोगी है जब हम $\Diamond$ को $\Box$ में (या इसके विपरीत) बदलना, या किसी सूत्र के भीतर द्विनिषेध हटाना चाहते हैं। आगे जब भी हम सूत्र $\chi(\varphi)$ को $\chi(\psi)$ के रूप में पुनर्लिखेंगे, प्रतिज्ञप्ति 51.19 के अनुप्रयोग को "ψ के स्थान पर φ" से चिह्नित करेंगे। दूसरे शब्दों में, "ψ के स्थान पर φ" इसका संक्षिप्त रूप है:

$\vdash \chi(\varphi)$	
$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	
$\vdash \chi(\psi)$	प्रतिज्ञप्ति 51.19 से

उदाहरणार्थ:

प्रतिज्ञप्ति 51.20. $\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \to \Diamond\neg p$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash \Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg p$	dual
2.	$\mathbf{K} \vdash \neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p$	pl, 1
3.	$\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \to \Diamond\neg p$	$\neg\neg p$ के स्थान पर p

□

ऊपर की व्युत्पत्ति में अंतिम चरण "$\neg\neg p$ के स्थान पर p" इसका संक्षिप्त रूप है:

$\mathbf{K} \vdash \neg\Box\neg\neg p \to \Diamond\neg p$	
$\mathbf{K} \vdash \neg\neg p \leftrightarrow p$	taut
$\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \to \Diamond\neg p$	प्रतिज्ञप्ति 51.19 से

प्रतिज्ञप्ति 51.19 के $\chi(q)$, φ और ψ की भूमिकाएँ यहाँ क्रमशः $\neg\Box q \to \Diamond\neg p$, $\neg\neg p$ और p निभाते हैं।

जब किसी सूत्र में उप-सूत्र $\neg\Diamond\varphi$ हो, तो हम प्रतिज्ञप्ति 51.19 से उसे $\Box\neg\varphi$ द्वारा बदल सकते हैं, क्योंकि $\mathbf{K} \vdash \neg\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$। इसे और ऐसे ही प्रतिस्थापनों को हम केवल "$\neg\Diamond$ के स्थान पर $\Box\neg$" से दर्शाएँगे।

निम्न प्रतिज्ञप्ति यह उचित ठहराती है कि हम व्युत्पन्नता के परिणाम स्कीमागत रूप से स्थापित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, पूर्ववर्ती प्रतिज्ञप्ति केवल $\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \to \Diamond\neg p$ नहीं, बल्कि स्वेच्छ φ के लिए $\mathbf{K} \vdash \neg\Box\varphi \to \Diamond\neg\varphi$ स्थापित करती है।

प्रतिज्ञप्ति 51.21. *यदि* φ, ψ *का प्रतिस्थापन-दृष्टांत है और* $\mathbf{K} \vdash \psi$, *तो* $\mathbf{K} \vdash \varphi$।

प्रमाण. यह जाँचना श्रमसाध्य पर नियमित है (ψ की व्युत्पत्ति की लंबाई पर आगमन से) कि पूरी व्युत्पत्ति पर प्रतिस्थापन लागू करने से भी सही व्युत्पत्ति मिलती है। विशेषतः, सर्वसत्यतात्मक दृष्टांतों के प्रतिस्थापन-दृष्टांत स्वयं सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत हैं; dual और K के दृष्टांतों के प्रतिस्थापन-दृष्टांत स्वयं dual और K के दृष्टांत हैं; और आधारवाक्य(यों) तथा निष्कर्ष दोनों में प्रतिज्ञप्ति चरों के स्थान पर सूत्र रखने पर mp और nec के अनुप्रयोग सही रहते हैं। □

51.6 K में कुछ और प्रमाण

अब खंड 51.5 में प्रस्तुत सरल विधि का उपयोग करके **K** में व्युत्पन्नता के कुछ और उदाहरण देखें।

प्रतिज्ञप्ति 51.22. $\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	pl
2.	$\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi)$	rk, 1
3.	$\mathbf{K} \vdash (\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi) \to (\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi)$	taut
4.	$\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi)$	pl, 2, 3
5.	$\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$	$\neg\Box\neg$ के स्थान पर $\Diamond$।

□

प्रतिज्ञप्ति 51.23. $\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to (\Diamond(\varphi \to \psi) \to \Diamond\psi)$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	taut
2.	$\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to (\Box\neg\psi \to \Box\neg(\varphi \to \psi))$	rk, 1
3.	$\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to (\neg\Box\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\Box\neg\psi)$	pl, 2
4.	$\mathbf{K} \vdash \Box\varphi \to (\Diamond(\varphi \to \psi) \to \Diamond\psi)$	$\neg\Box\neg$ के स्थान पर $\Diamond$।

□

प्रतिज्ञप्ति 51.24. $\mathbf{K} \vdash (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \vee \psi)$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$	taut
2.	$\mathbf{K} \vdash \Box\neg(\varphi \vee \psi) \to \Box\neg\varphi$	rk, 1
3.	$\mathbf{K} \vdash \neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg(\varphi \vee \psi)$	pl, 2
4.	$\mathbf{K} \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond(\varphi \vee \psi)$	$\neg\Box\neg$ के स्थान पर $\Diamond$
5.	$\mathbf{K} \vdash \Diamond\psi \to \Diamond(\varphi \vee \psi)$	इसी प्रकार
6.	$\mathbf{K} \vdash (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \vee \psi)$	pl, 4, 5.

□

प्रतिज्ञप्ति 51.25. $\mathbf{K} \vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

प्रमाण.

1.	$\mathbf{K} \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi))$	taut
2.	$\mathbf{K} \vdash \Box\neg\varphi \to (\Box\neg\psi \to \Box\neg(\varphi \vee \psi))$	rk
3.	$\mathbf{K} \vdash \Box\neg\varphi \to (\neg\Box\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\Box\neg\psi)$	pl, 2
4.	$\mathbf{K} \vdash \neg\Box\neg(\varphi \vee \psi) \to (\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi)$	pl, 3
5.	$\mathbf{K} \vdash \neg\Box\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\neg\Box\neg\psi \to \neg\Box\neg\varphi)$	pl, 4
6.	$\mathbf{K} \vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\neg\Diamond\psi \to \Diamond\varphi)$	$\neg\Box\neg$ के स्थान पर $\Diamond$
7.	$\mathbf{K} \vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\psi \vee \Diamond\varphi)$	pl, 6.

□

51.7 द्वैत सूत्रों

परिभाषा 51.26. सूत्रों T, B, 4 और 5 में से प्रत्येक का एक *द्वैत* है, जिसे अधोलिखित हीरक से इस प्रकार निरूपित करते हैं:

$$p \to \Diamond p \tag{$\mathrm{T}_\Diamond$}$$
$$\Diamond\Box p \to p \tag{$\mathrm{B}_\Diamond$}$$
$$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p \tag{$4_\Diamond$}$$
$$\Diamond\Box p \to \Box p \tag{$5_\Diamond$}$$

ऊपर का प्रत्येक द्वैत सूत्र, संगत सूत्र में p के स्थान पर $\neg p$ रखकर, प्रतिधनात्मक करके, $\neg\Box\neg$ को $\Diamond$ से और $\neg\Diamond\neg$ को $\Box$ से बदलकर मिलता है। इस अर्थ में D, अर्थात् $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$, स्वयं अपना द्वैत है।

प्रतिज्ञप्ति 51.27. *परिभाषा 51.26 के प्रत्येक सूत्र φ के लिए:* $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}\varphi_\Diamond$.

प्रमाण. अभ्यास। □

51.8 मोडल तंत्रों में प्रमाण

अब हम **K** के अतिरिक्त अन्य मोडल तर्कशास्त्रीय तंत्रों के प्रमाणों पर आते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 51.28. *निम्न प्रमाण्यता-परिणाम मान्य हैं:*

1. **KT5** $\vdash$ B;
2. **KT5** $\vdash$ 4;
3. **KDB4** $\vdash$ T;
4. **KB4** $\vdash$ 5;
5. **KB5** $\vdash$ 4;
6. **KT** $\vdash$ D.

प्रमाण. हम प्रत्येक का प्रमाण प्रस्तुत करते हैं।

1. **KT5** $\vdash$ B:

1.	**KT5** $\vdash \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	5
2.	**KT5** $\vdash \varphi \to \Diamond\varphi$	$\mathrm{T}_\Diamond$
3.	**KT5** $\vdash \varphi \to \Box\Diamond\varphi$	pl, 2, 1.

2. **KT5** $\vdash$ 4:

1.	**KT5** $\vdash \Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\Box\varphi$	5 जिसमें p के स्थान पर $\Box\varphi$ है
2.	**KT5** $\vdash \Box\varphi \to \Diamond\Box\varphi$	$\mathrm{T}_\Diamond$ जिसमें p के स्थान पर $\Box\varphi$ है
3.	**KT5** $\vdash \Box\varphi \to \Box\Diamond\Box\varphi$	pl, 2, 1
4.	**KT5** $\vdash \Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$	$5_\Diamond$
5.	**KT5** $\vdash \Box\Diamond\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	rk, 4
6.	**KT5** $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	pl, 3, 5.

3. **KDB4** $\vdash$ T:

1.	**KDB4** $\vdash \Diamond\Box\varphi \to \varphi$	$B_\Diamond$
2.	**KDB4** $\vdash \Box\Box\varphi \to \Diamond\Box\varphi$	D जिसमें p के स्थान पर $\Box\varphi$ है
3.	**KDB4** $\vdash \Box\Box\varphi \to \varphi$	pl, 1, 2
4.	**KDB4** $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	4
5.	**KDB4** $\vdash \Box\varphi \to \varphi$	pl, 4, 3.

4. **KB4** $\vdash$ 5:

1.	**KB4** $\vdash \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\Diamond\varphi$	B जिसमें p के स्थान पर $\Diamond\varphi$ है
2.	**KB4** $\vdash \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	$4_\Diamond$
3.	**KB4** $\vdash \Box\Diamond\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	rk, 2
4.	**KB4** $\vdash \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	pl, 1, 3.

5. **KB5** $\vdash$ 4:

1.	**KB5** $\vdash \Box\varphi \to \Box\Diamond\Box\varphi$	B, जिसमें p के स्थान पर $\Box\varphi$ है
2.	**KB5** $\vdash \Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$	$5_\Diamond$
3.	**KB5** $\vdash \Box\Diamond\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	rk, 2
4.	**KB5** $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	pl, 1, 3.

6. **KT** $\vdash$ D:

1.	**KT** $\vdash \Box\varphi \to \varphi$	T
2.	**KT** $\vdash \varphi \to \Diamond\varphi$	$T_\Diamond$
3.	**KT** $\vdash \Box\varphi \to \Diamond\varphi$	pl, 1, 2

□

परिभाषा 51.29. परंपरा के अनुसार हम **S4** को तंत्र **KT4** और **S5** को तंत्र **KTB4** परिभाषित करते हैं।

निम्न प्रतिज्ञप्ति दिखाती है कि शास्त्रीय तंत्र **S5** के अनेक तुल्य अभिगृहीतीकरण हैं। यह आश्चर्यजनक नहीं, क्योंकि अभिगृहीतों के विभिन्न संयोजन सभी तुल्यता संबंधों को अभिलक्षित करते हैं (देखें प्रतिज्ञप्ति 50.12)।

प्रतिज्ञप्ति 51.30. **KTB4** $=$ **KT5** $=$ **KDB4** $=$ **KDB5**.

प्रमाण. अभ्यास। □

51.9 यथार्थता

कोई व्युत्पत्ति-तंत्र यथार्थ कहलाता है यदि उसमें व्युत्पन्न सब कुछ मान्य हो। मोडल तंत्रों पर विचार करते समय, अर्थात् ऐसी व्युत्पत्तियों में जहाँ K के अतिरिक्त कुछ सूत्रों $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ के दृष्टांत उपयोग किए जा सकते हैं, हम चाहते हैं कि प्रत्येक व्युत्पन्न सूत्र उस हर प्रतिरूप में सत्य हो जिसमें $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ सत्य हैं।

प्रमेय 51.31 (यथार्थता प्रमेय). *यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ का प्रत्येक दृष्टांत क्रमशः प्रतिरूपों के वर्गों $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ में मान्य है, तो* **K**$\varphi_1 \ldots \varphi_n \vdash \psi$ *से मिलता है कि ψ, प्रतिरूपों के वर्ग $\mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_n$ में मान्य है।*

प्रमाण. प्रमाणों की लंबाई पर आगमन से। संक्षेप के लिए $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_n$ रखें।

1. आगमन-आधार: यदि ψ का प्रमाण लंबाई 1 का है, तो वह या तो कोई सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत, K या dual का दृष्टांत, अथवा φ_1, ..., φ_n में से किसी का दृष्टांत है। पहले मामले में प्रतिज्ञप्ति 49.15 से ψ, $\mathcal{C}$ में मान्य है, क्योंकि सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत प्रतिरूपों के *किसी भी* वर्ग में मान्य हैं। दूसरे मामले में भी प्रतिज्ञप्ति 49.18 और प्रतिज्ञप्ति 49.19 से यही मिलता है। अंततः तीसरे मामले में, चूँकि ψ, $\mathcal{C}_i$ में मान्य और $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_i$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 49.11 से ψ, $\mathcal{C}$ में भी मान्य है।

2. आगमन-चरण: मान लें ψ का प्रमाण लंबाई $k > 1$ का है। यदि ψ कोई सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत या φ_1, ..., φ_n में से किसी का दृष्टांत है, तो पूर्ववर्ती चरण जैसा तर्क करें। अब मान लें ψ, पूर्ववर्ती सूत्रों $\chi \to \psi$ और χ से mp द्वारा मिलता है। इन दोनों के प्रमाणों की लंबाई $< k$ है और आगमन-परिकल्पना से वे $\mathcal{C}$ में मान्य हैं। प्रतिज्ञप्ति 49.20 से ψ भी $\mathcal{C}$ में मान्य है। अंततः मान लें ψ, χ से nec द्वारा मिलता है (अतः $\psi = \Box\chi$)। आगमन-परिकल्पना से χ, $\mathcal{C}$ में मान्य है और प्रतिज्ञप्ति 49.12 से ψ भी। $\Box$

51.10 तंत्रों की भिन्नता दिखाना

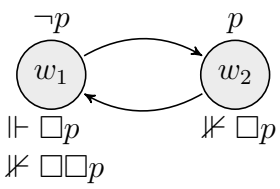
खंड 51.8 में हमने देखा कि कैसे सिद्ध किया जाए कि मोडल तर्कशास्त्र के दो तंत्र वास्तव में एक ही तंत्र हैं। प्रमेय 51.31 हमें यह दिखाने देता है कि दो मोडल तंत्र Σ और Σ' भिन्न हैं: ऐसा सूत्र φ खोजकर जिसके लिए $\Sigma' \vdash \varphi$ हो, किंतु जो Σ के किसी प्रतिरूप में असत्य हो।

प्रतिज्ञप्ति 51.32. **KD** $\subsetneq$ **KT**

प्रमाण. यह इस अर्थवैज्ञानिक तथ्य का वाक्यविन्यासगत समकक्ष है कि सभी स्वपरावर्ती संबंध सीरियल होते हैं। **KD** $\subseteq$ **KT** दिखाने के लिए हमें देखना है कि **KD** $\vdash \psi$ से **KT** $\vdash \psi$ निकलता है। यह **KT** $\vdash$ **D** से मिलता है, जैसा प्रतिज्ञप्ति 51.28(6) में दिखाया गया है। समावेशन उचित है, यह दिखाने के लिए यथार्थता (प्रमेय 51.31) के अनुसार इतना पर्याप्त है कि **KD** का ऐसा प्रतिरूप प्रस्तुत किया जाए जिसमें T, अर्थात् $\Box p \to p$, असत्य हो (यह सरल कार्य अभ्यास के लिए छोड़ा गया है), क्योंकि तब यथार्थता से **KD** $\nvdash \Box p \to p$। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 51.33. **KB** $\neq$ **K4**.

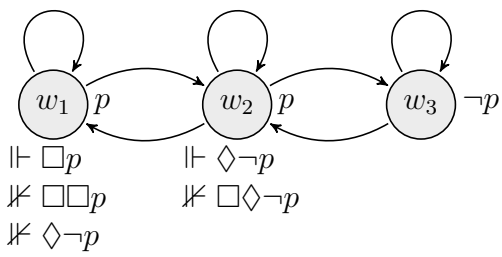
प्रमाण. हम ऐसा सममित प्रतिरूप बनाते हैं जिसमें 4 का कोई दृष्टांत असत्य हो; क्योंकि वह दृष्टांत स्पष्टतः **K4** में व्युत्पन्न है किंतु **KB** में नहीं, इससे **K4** $\not\subseteq$ **KB** निकलेगा। आकृति 51.1 के सममित प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ पर विचार करें। चूँकि प्रतिरूप सममित है, K और B, $\mathfrak{M}$ में सत्य हैं (क्रमशः प्रतिज्ञप्ति 49.18 और प्रमेय 50.1 के अनुसार)। किंतु $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash \Box p \to \Box\Box p$। $\Box$



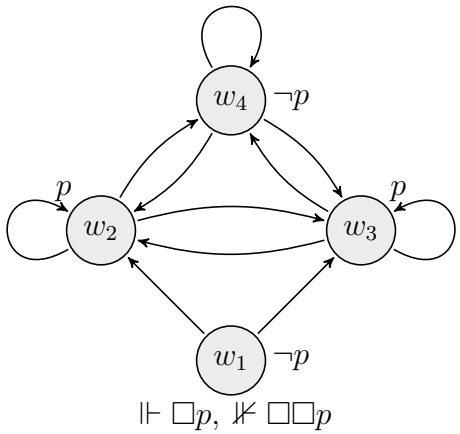
चित्र 51.1: 4 के किसी दृष्टांत को असत्य बनाने वाला सममित प्रतिरूप।

प्रमेय 51.34. **KTB** $\nvdash$ **4** *और* **KTB** $\nvdash$ **5** *।*

प्रमाण. प्रमेय 50.1 से हम जानते हैं कि T और B के सभी दृष्टांत (क्रमशः) प्रत्येक स्वपरावर्ती सममित प्रतिरूप में सत्य हैं। अतः यथार्थता के अनुसार ऐसा स्वपरावर्ती सममित प्रतिरूप खोजना पर्याप्त है जिसमें कोई ऐसा जगत हो जहाँ 4 का कोई दृष्टांत असत्य हो; और इसी प्रकार 5 के लिए भी। दोनों दावों के लिए हम एक ही प्रतिरूप लेते हैं। आकृति 51.2 के सममित, स्वपरावर्ती प्रतिरूप पर विचार करें। तब $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash \Box p \to \Box\Box p$, अतः 4, w_1 पर असत्य है। इसी प्रकार $\mathfrak{M}, w_2 \nVdash \Diamond\neg p \to \Box\Diamond\neg p$, अतः $\varphi = \neg p$ वाला 5 का दृष्टांत w_2 पर असत्य है। $\Box$



चित्र 51.2: प्रमेय 51.34 का प्रतिरूप।



चित्र 51.3: प्रमेय 51.35 का प्रतिरूप।

प्रमेय 51.35. **KD5 $\neq$ KT4 $=$ S4.**

प्रमाण. प्रमेय 50.1 से हम जानते हैं कि D और 5 के सभी दृष्टांत सभी सीरियल यूक्लिडीय प्रतिरूपों में सत्य हैं। इसलिए ऐसा सीरियल यूक्लिडीय प्रतिरूप खोजना पर्याप्त है जिसमें कोई ऐसा जगत हो जहाँ 4 का कोई दृष्टांत असत्य हो। आकृति 51.3 के प्रतिरूप पर विचार करें और ध्यान दें कि $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash \Box p \to \Box\Box p$। $\Box$

51.11 सूत्रों के समुच्चय से व्युत्पन्नता

खंड 51.8 में हमने किसी तंत्र Σ में सूत्र की प्रमाण्यता की धारणा परिभाषित की थी। अब हम इसे समुच्चय Γ के सूत्रों से Σ में प्रमाण्यता तक विस्तृत करते हैं।

परिभाषा 51.36. कोई सूत्र φ, तंत्र Σ में सूत्रों के समुच्चय Γ से व्युत्पन्न है, जिसे $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ लिखते हैं, तभी जब ऐसे $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ हों कि $\Sigma \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$.

51.12 व्युत्पन्नता के गुण

प्रतिज्ञप्ति 51.37. *मान लें Σ कोई मोडल तंत्र और Γ मोडल सूत्रों का समुच्चय है। निम्न गुण मान्य हैं:*

1. एकदिष्टता: *यदि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ और $\Gamma \subseteq \Delta$, तो $\Delta \vdash_\Sigma \varphi$;*
2. स्वपरावर्तन: *यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$;*

3. छेदन: *यदि* $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ *और* $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash_\Sigma \psi$ *तो* $\Gamma \cup \Delta \vdash_\Sigma \psi$;

4. निगमन प्रमेय: $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_\Sigma \varphi$ *तभी जब* $\Gamma \vdash_\Sigma \psi \to \varphi$;

5. $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi_1$ *और ...और* $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi_n$, *और* $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_n \to \psi) \cdots)$ *सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, तो* $\Gamma \vdash_\Sigma \psi$.

प्रमाण एक सरल अभ्यास है। (5) of प्रतिज्ञप्ति 51.37 से, उदाहरणार्थ, यह मिलता है कि यदि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi \vee \psi$ और $\Gamma \vdash_\Sigma \neg\varphi$, तो $\Gamma \vdash_\Sigma \psi$। इसके अतिरिक्त, आगे हम $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_\Sigma \psi$ के स्थान पर $\Gamma, \varphi \vdash_\Sigma \psi$ लिखेंगे।

परिभाषा 51.38. कोई समुच्चय Γ, तंत्र Σ के सापेक्ष *निगमनतः संवृत* है, तभी जब $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ से $\varphi \in \Gamma$ मिलता हो।

51.13 संगति

संगति सूत्रों के समुच्चयों का महत्त्वपूर्ण गुण है। सूत्रों का कोई समुच्चय असंगत है यदि उससे $\perp$ जैसा कोई विरोधाभास व्युत्पन्न हो; अन्यथा वह संगत है। यदि कोई समुच्चय असंगत है, तो उसके सभी सूत्र किसी प्रतिरूप के किसी जगत पर एक साथ सत्य नहीं हो सकते। पूर्णता प्रमेय के लिए हम विलोम सिद्ध करते हैं: प्रत्येक संगत समुच्चय किसी प्रतिरूप, अर्थात् "विहित प्रतिरूप", के किसी जगत पर सत्य है।

परिभाषा 51.39. कोई समुच्चय Γ, तंत्र Σ के सापेक्ष *संगत*, या जैसा हम कहेंगे Σ-संगत, है, तभी जब $\Gamma \nvdash_\Sigma \perp$.

उदाहरणार्थ, समुच्चय $\{\Box(p \to q), \Box p, \neg\Box q\}$ प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के सापेक्ष संगत है, पर **K**-संगत नहीं। इसी तरह समुच्चय $\{\Diamond p, \Box\Diamond p \to q, \neg q\}$, **K5**-संगत नहीं है।

प्रतिज्ञप्ति 51.40. *मान लें* Γ *सूत्रों का समुच्चय है। तब:*

1. Γ, Σ*-संगत तभी है जब कोई सूत्र* φ *ऐसा हो कि* $\Gamma \nvdash_\Sigma \varphi$.

2. $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ *तभी जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Σ*-संगत नहीं है।*

3. *यदि* Γ, Σ*-संगत है, तो प्रत्येक सूत्र* φ *के लिए या तो* $\Gamma \cup \{\varphi\}$, Σ*-संगत है या* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, Σ*-संगत है।*

प्रमाण. ये तथ्य शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र से आसानी से मिलते हैं। हम (3) का तर्क देते हैं। प्रतिधनात्मक रूप से मान लें कि न $\Gamma \cup \{\varphi\}$, न $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, Σ-संगत है। तब (2) से $\Gamma, \varphi \vdash_\Sigma \perp$ और $\Gamma, \neg\varphi \vdash_\Sigma \perp$ दोनों। निगमन प्रमेय से $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi \to \perp$ और $\Gamma \vdash_\Sigma \neg\varphi \to \perp$। किंतु $(\varphi \to \perp) \to ((\neg\varphi \to \perp) \to \perp)$ एक सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, अतः प्रतिज्ञप्ति 51.37(5), $\Gamma \vdash_\Sigma \perp$। $\Box$

प्रश्न

प्रश्न 51.1. प्रतिज्ञप्ति 51.7 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 51.2. निम्न सूत्रों के लिए **K** में व्युत्पत्तियाँ खोजिए:

1. $\Box\neg p \to \Box(p \to q)$

2. $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$

3. $\Diamond p \to \Diamond(p \vee q)$

प्रश्न 51.3. χ की जटिलता पर आगमन से यह सिद्ध करके प्रतिज्ञप्ति 51.19 सिद्ध कीजिए कि यदि $\mathbf{K} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, तो $\mathbf{K} \vdash \chi[\varphi/q] \leftrightarrow \chi[\psi/q]$।

प्रश्न 51.4. दिखाइए कि निम्न व्युत्पन्नता-दावे मान्य हैं:

1. $\mathbf{K} \vdash \Diamond\neg\bot \to (\Box\varphi \to \Diamond\varphi)$;
2. $\mathbf{K} \vdash \Box(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$;
3. $\mathbf{K} \vdash (\Diamond\varphi \to \Box\psi) \to \Box(\varphi \to \psi)$.

प्रश्न 51.5. प्रतिज्ञप्ति 51.27 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 51.6. प्रतिज्ञप्ति 51.30 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 51.7. 3 जगतों वाले किसी प्रतिरूप का उपयोग करके प्रमेय 51.35 का कोई वैकल्पिक प्रमाण दीजिए।

प्रश्न 51.8. ऐसा एक स्वपरावर्ती संक्रमणशील प्रतिरूप दीजिए जो दोनों $\mathbf{KT4} \nvdash \mathrm{B}$ और $\mathbf{KT4} \nvdash 5$ दिखाए।

अध्याय 52

पूर्णता और विहित प्रतिरूप

52.1 परिचय

यदि Σ कोई मोडल तंत्र है, तो यथार्थता प्रमेय स्थापित करता है कि यदि $\Sigma \vdash \varphi$, तो φ प्रतिरूपों के ऐसे किसी भी वर्ग $\mathcal{C}$ में मान्य है जिसमें Σ के सभी सूत्रों के सभी दृष्टांत मान्य हैं। विशेषतः इसका अर्थ है कि यदि $\mathbf{K} \vdash \varphi$, तो φ सभी प्रतिरूपों में सत्य है; यदि $\mathbf{KT} \vdash \varphi$, तो φ सभी स्वपरावर्ती प्रतिरूपों में सत्य है; यदि $\mathbf{KD} \vdash \varphi$, तो φ सभी सीरियल प्रतिरूपों में सत्य है; इत्यादि।

पूर्णता, यथार्थता का विलोम है: उदाहरणार्थ, $\mathbf{K}$ के पूर्ण होने का अर्थ है कि यदि कोई सूत्र φ मान्य है, तो $\vdash \varphi$। पूर्णता सिद्ध करना यथार्थता सिद्ध करने से कहीं कठिन है। पहले प्रतिधनात्मक रूप पर विचार करना उपयोगी है: $\mathbf{K}$ तभी पूर्ण है जब $\nvdash \varphi$ होने पर कोई प्रतिप्रतिरूप, अर्थात् ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ हो कि $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$। तुल्यतः ($\varphi$ का निषेध लेकर), हम सिद्ध कर सकते हैं कि जब भी $\nvdash \neg\varphi$, तब φ का कोई प्रतिरूप है। ऐसा प्रतिरूप बनाते समय हम φ में निहित सूचना का उपयोग कर सकते हैं। विशिष्ट सूत्रों के लिए प्रतिरूप खोजते समय हम प्रायः यही करते हैं: जैसे, यदि हमें $p \to \Box q$ का प्रतिप्रतिरूप खोजना है, तो हम जानते हैं कि उसमें ऐसा जगत होना चाहिए जहाँ p सत्य और $\Box q$ असत्य हो। और जिस जगत पर $\Box q$ असत्य है, उससे अभिगम्य ऐसा जगत होना चाहिए जहाँ q असत्य हो। हमें बस इतना ही जानना है: कौन-से जगत प्रतिज्ञप्ति चरों को सत्य बनाते हैं और कौन-से जगत किन जगतों से अभिगम्य हैं।

किंतु पूर्णता सिद्ध करते समय हमारे पास ऐसा कोई विशिष्ट सूत्र φ नहीं है जिसके लिए हम प्रतिरूप बना रहे हों। हम स्थापित करना चाहते हैं कि हर ऐसे φ के लिए प्रतिरूप विद्यमान है जिसके लिए $\nvdash_\Sigma \neg\varphi$। यह न्यूनतम अपेक्षा है, क्योंकि *यदि* $\vdash_\Sigma \neg\varphi$, तो यथार्थता के अनुसार φ का कोई ऐसा प्रतिरूप नहीं है जिसमें Σ सत्य हो। अब ध्यान दें कि $\nvdash_\Sigma \neg\varphi$ तभी जब φ, Σ-संगत है। (स्मरण रहे कि $\Sigma \nvdash_\Sigma \neg\varphi$ और $\varphi \nvdash_\Sigma \bot$ तुल्य हैं।) अतः हमारा कार्य प्रत्येक Σ-संगत सूत्र के लिए प्रतिरूप बनाना है।

हम जिस युक्ति का उपयोग करेंगे, वह सूत्रों का ऐसा Σ-संगत समुच्चय खोजना है जिसमें φ के साथ वे अन्य सूत्र भी हों जो हमें बताएँ कि φ को सत्य बनाने वाला जगत कैसा होना चाहिए। ऐसे समुच्चय *पूर्ण* Σ-संगत समुच्चय हैं। φ को सत्य बनाने के लिए केवल एक जगत वाला प्रतिरूप बनाना पर्याप्त नहीं; उसमें अनेक जगत और एक अभिगम्यता संबंध होना आवश्यक होगा। φ वाला पूर्ण Σ-संगत समुच्चय $\Box\psi$ और $\Diamond\chi$ रूप के अन्य सूत्र भी रखेगा। सभी अभिगम्य जगतों में ψ सत्य होना चाहिए; कम-से-कम एक में χ सत्य होना चाहिए। इसे पूरा करने के लिए हम जगतों के समुच्चय के आधार के रूप में सभी संभावित पूर्ण Σ-संगत समुच्चय ले लेंगे। कठिन बात यह तय करना होगी कि हमारे प्रतिरूप में एक पूर्ण Σ-संगत समुच्चय कब दूसरे से अभिगम्य माना जाए।

हम दिखाएँगे कि इस प्रकार परिभाषित प्रतिरूप में φ किसी जगत पर—जो स्वयं भी पूर्ण Σ-संगत समुच्चय है—तभी सत्य है जब φ उस समुच्चय का अवयव हो। यदि φ, Σ-संगत है, तो वह कम-से-कम एक पूर्ण Σ-संगत समुच्चय का अवयव होगा (यह तथ्य हम सिद्ध करेंगे), और इसलिए कोई ऐसा जगत होगा जहाँ φ सत्य है। अतः हमारे पास ऐसा एक प्रतिरूप होगा जिसमें प्रत्येक Σ-संगत सूत्र φ किसी जगत पर सत्य है। यही एक प्रतिरूप Σ का *विहित* प्रतिरूप है।

52.2 पूर्ण Σ-संगत समुच्चय

मान लें कि Σ मोडल सूत्रों का समुच्चय है—इन्हें किसी सामान्य मोडल तर्कशास्त्र के अभिगृहीत या परिभाषक सिद्धांत समझें। कोई समुच्चय Γ, Σ-संगत तभी है जब $\Gamma \nvdash_\Sigma \bot$, अर्थात् जब Σ से $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_n \to \bot) \ldots)$ की कोई व्युत्पत्ति न हो, जहाँ प्रत्येक $\varphi_i \in \Gamma$। हम ऐसा "विहित" प्रतिरूप बनाएँगे जिसमें हर जगत एक विशेष प्रकार का Σ-संगत समुच्चय होगा: ऐसा समुच्चय जो केवल Σ-संगत ही नहीं, बल्कि इस अर्थ में अधिकतम भी हो कि वह प्रत्येक मोडल सूत्र का सत्यता-मूल्य निर्धारित करता है—हर φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$, या $\neg\varphi \in \Gamma$:

परिभाषा 52.1. कोई समुच्चय Γ *पूर्ण Σ-संगत* तभी है जब वह Σ-संगत हो और प्रत्येक φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$, या $\neg\varphi \in \Gamma$ हो।

पूर्ण Σ-संगत समुच्चयों Γ के अनेक उपयोगी गुण हैं। एक तो वे निगमनतः संवृत हैं, अर्थात् यदि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$। विशेषतः इसका अर्थ है कि किसी सूत्र $\varphi \in \Sigma$ का हर दृष्टांत Γ में भी है। इसके अतिरिक्त, Γ में सदस्यता प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों की सत्यता-शर्तों को प्रतिबिंबित करती है। "विहित प्रतिरूप" परिभाषित करते समय यह महत्त्वपूर्ण होगा।

प्रतिज्ञप्ति 52.2. *मान लें कि Γ पूर्ण Σ-संगत है। तब:*

1. *Γ, Σ में निगमनतः संवृत है।*
2. $\Sigma \subseteq \Gamma$.
3. $\bot \notin \Gamma$
4. $\top \in \Gamma$
5. $\neg\varphi \in \Gamma$ *तभी जब* $\varphi \notin \Gamma$।
6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *तभी जब* $\varphi \in \Gamma$ *और* $\psi \in \Gamma$
7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ *तभी जब* $\varphi \in \Gamma$ *या* $\psi \in \Gamma$
8. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *तभी जब* $\varphi \notin \Gamma$ *या* $\psi \in \Gamma$
9. $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Gamma$ *तभी जब या तो* $\varphi \in \Gamma$ *और* $\psi \in \Gamma$, *या* $\varphi \notin \Gamma$ *और* $\psi \notin \Gamma$

प्रमाण. 1. मान लें कि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, किंतु $\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण Σ-संगत है, $\neg\varphi \in \Gamma$। इससे Γ असंगत होगा, क्योंकि $\varphi, \neg\varphi \vdash_\Sigma \bot$।

2. यदि $\varphi \in \Sigma$, तो $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, और निगमनात्मक संवृत्ति, अर्थात् स्थिति (1), से $\varphi \in \Gamma$।

3. यदि $\bot \in \Gamma$, तो $\Gamma \vdash_\Sigma \bot$, इसलिए Γ, Σ-असंगत होगा।

4. $\Gamma \vdash_\Sigma \top$, अतः निगमनात्मक संवृत्ति, अर्थात् स्थिति (1), से $\top \in \Gamma$।

5. यदि $\neg\varphi \in \Gamma$, तो संगति से $\varphi \notin \Gamma$; और यदि $\varphi \notin \Gamma$, तो $\varphi \in \Gamma$, क्योंकि Γ पूर्ण Σ-संगत है।

6. मान लें $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$। चूँकि $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, निगमनात्मक संवृत्ति, अर्थात् स्थिति (1), से $\varphi \in \Gamma$। इसी प्रकार $\psi \in \Gamma$। दूसरी ओर, मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$, दोनों। तब निगमनात्मक संवृत्ति से $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, क्योंकि $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है।

7. मान लें $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, तथा $\varphi \notin \Gamma$ और $\psi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण Σ-संगत है, $\neg\varphi \in \Gamma$ और $\neg\psi \in \Gamma$। तब $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, क्योंकि $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi))$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है। इसका अर्थ होगा कि Γ, Σ-असंगत है, जो विरोधाभास है।

8. मान लें $\varphi \to \psi \in \Gamma$ और $\varphi \in \Gamma$; तब $\Gamma \vdash_\Sigma \psi$, और इसलिए निगमनात्मक संवृत्ति से $\psi \in \Gamma$। विलोमतः, यदि $\varphi \to \psi \notin \Gamma$, तो Γ के पूर्ण Σ-संगत होने से $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma$। चूँकि $\neg(\varphi \to \psi) \to \varphi$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, निगमनात्मक संवृत्ति से $\varphi \in \Gamma$। चूँकि $\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, $\neg\psi \in \Gamma$। तब Γ के Σ-संगत होने से $\psi \notin \Gamma$।

9. मान लें $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Gamma$। यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\psi \in \Gamma$, क्योंकि $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है। इसी प्रकार, यदि $\psi \in \Gamma$, तो $\varphi \in \Gamma$। अतः या तो $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$, दोनों, अथवा न $\varphi \in \Gamma$ और न $\psi \in \Gamma$।

   विलोमतः, मान लें $\varphi \to \psi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण Σ-संगत है, $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \Gamma$। चूँकि $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$ सर्वसत्यतात्मक दृष्टांत है, यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\neg\psi \in \Gamma$; और Γ के Σ-संगत होने से $\psi \notin \Gamma$। इसी प्रकार, यदि $\psi \in \Gamma$, तो $\varphi \notin \Gamma$। अतः न तो $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$, और न ही $\varphi \notin \Gamma$ और $\psi \notin \Gamma$। □

52.3 लिंडेनबाउम का लेम्मा

लिंडेनबाउम का लेम्मा स्थापित करता है कि सूत्रों का प्रत्येक Σ-संगत समुच्चय कम-से-कम एक *पूर्ण* Σ-संगत समुच्चय में समाहित होता है। विहित प्रतिरूप का हमारा निर्माण दिखाएगा कि प्रत्येक पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ के लिए विहित प्रतिरूप में ऐसा जगत है जहाँ ठीक Δ के सभी सूत्र सत्य हैं। अतः लिंडेनबाउम का लेम्मा प्रत्याभूत करता है कि प्रत्येक Σ-संगत समुच्चय विहित प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य है।

प्रमेय 52.3 (लिंडेनबाउम का लेम्मा). *यदि Γ, Σ-संगत है, तो Γ को विस्तृत करने वाला कोई पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ है।*

प्रमाण. मान लें कि φ_0, φ_1, ... भाषा के सभी सूत्रों की समग्र सूची है (पुनरावृत्तियाँ अनुमत हैं)। उदाहरणार्थ, सूची को p_0 से आरंभ करें, और प्रत्येक चरण $n \geq 1$ पर केवल p_0, ..., p_n में से चरों का उपयोग करने वाले लंबाई n के परिमिततः अनेक सूत्र सूचीबद्ध करें। हम n पर आगमन से सूत्रों के समुच्चय Δ_n परिभाषित करते हैं और फिर $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$ रखते हैं। पहले $\Delta_0 = \Gamma$ रखें। मान लें कि Δ_n परिभाषित हो चुका है; तब Δ_{n+1} को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{यदि } \Delta_n \cup \{\varphi_n\} \ \Sigma\text{-संगत है;} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अब $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ रखें।

हमें दिखाना है कि यह परिभाषा वास्तव में अपेक्षित गुणों वाला समुच्चय Δ देती है, अर्थात् $\Gamma \subseteq \Delta$ और Δ पूर्ण Σ-संगत है।

स्पष्ट है कि $\Gamma \subseteq \Delta$, क्योंकि निर्माण से $\Delta_0 \subseteq \Delta$, और $\Delta_0 = \Gamma$। वास्तव में प्रत्येक n के लिए $\Delta_n \subseteq \Delta$, क्योंकि Δ सभी Δ_n का सम्मिलन है। (निर्माण के प्रत्येक चरण में हम पहले से बने समुच्चय में सूत्र जोड़ते हैं, इसलिए $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$; और $\subseteq$ के संक्रमणशील होने से जब भी $n \leq m$, तब $\Delta_n \subseteq \Delta_m$।) निर्माण के प्रत्येक चरण में हम φ_n या $\neg\varphi_n$ में से एक जोड़ते हैं, और प्रत्येक सूत्र सभी φ_n की सूची में (कम-से-कम एक बार) आता है। अतः प्रत्येक φ के लिए या तो $\varphi \in \Delta$, या $\neg\varphi \in \Delta$; इसलिए परिभाषा से Δ पूर्ण है।

अंततः हमें दिखाना है कि Δ, Σ-संगत है। इसके लिए हम दिखाते हैं कि (क) यदि Δ, Σ-असंगत होता, तो कोई Δ_n भी Σ-असंगत होता, और (ख) सभी Δ_n, Σ-संगत हैं।

मान लें कि Δ, Σ-असंगत है। तब $\Delta \vdash_\Sigma \bot$, अर्थात् ऐसे φ_1, ..., $\varphi_k \in \Delta$ हैं कि $\Sigma \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots (\varphi_k \to \bot) \ldots)$। चूँकि $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$, प्रत्येक φ_i किसी n_i के लिए Δ_{n_i} में है। इन n_i में सबसे बड़े को n

मानें। चूँकि $n_i \leq n$, इसलिए $\Delta_{n_i} \subseteq \Delta_n$। अतः सभी φ_i किसी एक Δ_n में हैं। इसका अर्थ होगा $\Delta_n \vdash_\Sigma \bot$, अर्थात् Δ_n, Σ-असंगत है।

प्रत्येक Δ_n की Σ-संगति दिखाने के लिए हम n पर सरल आगमन का उपयोग करते हैं। $\Delta_0 = \Gamma$, और हमने माना था कि Γ, Σ-संगत है। अतः दावा $n = 0$ के लिए सत्य है। अब मान लें कि वह n के लिए सत्य है, अर्थात् Δ_n, Σ-संगत है। यदि $\Delta_n \cup \{\varphi_n\}$, Σ-संगत है तो Δ_{n+1} यही है; अन्यथा वह $\Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ है। पहली स्थिति में Δ_{n+1} स्पष्टतः Σ-संगत है। किंतु प्रतिज्ञप्ति 51.40(3) के अनुसार $\Delta_n \cup \{\varphi_n\}$ और $\Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ में से कोई एक संगत है, इसलिए दूसरी स्थिति में भी Δ_{n+1} संगत है। □

उपप्रमेय 52.4. *$\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ तभी जब Γ को विस्तृत करने वाले प्रत्येक पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ के लिए $\varphi \in \Delta$ (इसमें $\Gamma = \emptyset$ की स्थिति भी है, जिसमें हमें मोडल तंत्र Σ का एक और अभिलक्षण मिलता है)।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, और Δ, Γ को विस्तृत करने वाला कोई पूर्ण Σ-संगत समुच्चय हो। यदि $\varphi \notin \Delta$, तो अधिकतमता से $\neg\varphi \in \Delta$; और इसलिए $\Delta \vdash_\Sigma \varphi$ (एकदिष्टता से) तथा $\Delta \vdash_\Sigma \neg\varphi$ (स्वपरावर्तिता से), अतः Δ असंगत है। विलोमतः, यदि $\Gamma \nvdash_\Sigma \varphi$, तो $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, Σ-संगत है; और लिंडेनबाउम के लेम्मा से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ को विस्तृत करने वाला कोई पूर्ण संगत समुच्चय Δ है। संगति से $\varphi \notin \Delta$। □

52.4 मोडलताएँ और पूर्ण संगत समुच्चय

जब हम ऐसा प्रतिरूप $\mathfrak{M}^\Sigma$ बनाते हैं जिसके जगतों का समुच्चय किसी सामान्य मोडल तर्कशास्त्र Σ के पूर्ण Σ-संगत समुच्चयों Δ से मिलता है, तब हमें ऐसे "जगतों" के बीच अभिगम्यता संबंध R^Σ भी परिभाषित करना होगा। हम चाहते हैं कि अभिगम्यता संबंध (और नियतन V^Σ) इस प्रकार परिभाषित हों कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Delta$। यह कैसे करें?

अभिगम्यता संबंध परिभाषित हो जाने पर किसी जगत पर सत्यता की परिभाषा सुनिश्चित करती है कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Box\varphi$ तभी जब ऐसे प्रत्येक Δ' के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta' \Vdash \varphi$ कि $R^\Sigma\Delta\Delta'$। यह सिद्ध करने के लिए कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Delta$, इसका मोडल संकारक से आरंभ होने वाले सूत्रों के लिए विशेषतः सत्य होना आवश्यक है, अर्थात् $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Box\varphi$ तभी जब $\Box\varphi \in \Delta$। इस अपेक्षा को $\Box\varphi$ के लिए जगत पर सत्यता की परिभाषा से मिलाने पर मिलता है:

$$\Box\varphi \in \Delta \text{ तभी जब } \varphi \in \Delta' \text{ ऐसे प्रत्येक } \Delta' \text{ के लिए कि } R^\Sigma\Delta\Delta'$$

बाएँ-से-दाएँ दिशा पर विचार करें: वह कहती है कि यदि $\Box\varphi \in \Delta$, तो ऐसे किसी भी φ और Δ' के लिए $\varphi \in \Delta'$ जिनके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। यदि हम यह अनुबंध करें कि $R^\Sigma\Delta\Delta'$ तभी जब प्रत्येक $\Box\varphi \in \Delta$ के लिए $\varphi \in \Delta'$, तो यह सत्य होता है। "तभी जब" के दाईं ओर की शर्त को अधिक संक्षेप में इस प्रकार लिख सकते हैं: $\{\varphi : \Box\varphi \in \Delta\} \subseteq \Delta'$।

तो प्रश्न यह है: क्या R^Σ की यह परिभाषा वास्तव में प्रत्याभूत करती है कि $\Box\varphi \in \Delta$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Box\varphi$? क्या वह यह भी प्रत्याभूत करती है कि $\Diamond\varphi \in \Delta$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Diamond\varphi$? अगले कुछ परिणाम इसे स्थापित करेंगे।

परिभाषा 52.5. यदि Γ, सूत्रों का समुच्चय है, तो रखें

$$\Box\Gamma = \{\Box\psi : \psi \in \Gamma\}$$
$$\Diamond\Gamma = \{\Diamond\psi : \psi \in \Gamma\}$$

और

$$\Box^{-1}\Gamma = \{\psi : \Box\psi \in \Gamma\}$$
$$\Diamond^{-1}\Gamma = \{\psi : \Diamond\psi \in \Gamma\}$$

दूसरे शब्दों में, $\Box\Gamma$ वह Γ है जिसके प्रत्येक सूत्र के आगे $\Box$ लगा है; $\Box^{-1}\Gamma$, Γ के वे सभी $\Box$-युक्त सूत्र हैं जिनसे आरंभिक $\Box$ हटा दिए गए हैं। अपने-आप में यह परिभाषा बहुत महत्त्वपूर्ण नहीं है, किंतु यह संकेत-पद्धति को बहुत सरल बनाएगी।

ध्यान दें कि $\Box\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Gamma$:

$$\Box\Box^{-1}\Gamma = \{\Box\psi : \Box\psi \in \Gamma\}$$

अर्थात् यह Γ के ठीक उन सभी सूत्रों का समुच्चय है जो $\Box$ से आरंभ होते हैं।

सहायक प्रमेय 52.6. *यदि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, तो $\Box\Gamma \vdash_\Sigma \Box\varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, तो ऐसे $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ हैं कि $\Sigma \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$। चूँकि Σ सामान्य है, नियम rk से $\Sigma \vdash \Box\psi_1 \to (\Box\psi_2 \to \cdots (\Box\psi_n \to \Box\varphi) \cdots)$, जहाँ स्पष्टतः $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_k \in \Box\Gamma$। अतः परिभाषा से $\Box\Gamma \vdash_\Sigma \Box\varphi$। $\Box$

सहायक प्रमेय 52.7. *यदि $\Box^{-1}\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, तो $\Gamma \vdash_\Sigma \Box\varphi$।*

प्रमाण. मान लें $\Box^{-1}\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$; तब सहायक प्रमेय 52.6 से $\Box\Box^{-1}\Gamma \vdash \Box\varphi$। किंतु $\Box\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Gamma$ होने से एकदिष्टता के अनुसार $\Gamma \vdash_\Sigma \Box\varphi$ भी। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 52.8. *यदि Γ पूर्ण Σ-संगत है, तो $\Box\varphi \in \Gamma$ तभी जब प्रत्येक ऐसे पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\varphi \in \Delta$ हो जिसके लिए $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$।*

प्रमाण. मान लें कि Γ पूर्ण Σ-संगत है। "केवल तभी" दिशा सरल है: मान लें $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$। चूँकि $\Box\varphi \in \Gamma$, इसलिए $\varphi \in \Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$, अतः $\varphi \in \Delta$।

"यदि" दिशा के लिए हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करते हैं: मान लें $\Box\varphi \notin \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण Σ-संगत है, वह निगमनतः संवृत है, अतः $\Gamma \nvdash_\Sigma \Box\varphi$। सहायक प्रमेय 52.7 से $\Box^{-1}\Gamma \nvdash_\Sigma \varphi$। प्रतिज्ञप्ति 51.40(2) से $\Box^{-1}\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, Σ-संगत है। लिंडेनबाउम के लेम्मा से ऐसा पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ है कि $\Box^{-1}\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Delta$। संगति से $\varphi \notin \Delta$। $\Box$

सहायक प्रमेय 52.9. *मान लें कि Γ और Δ पूर्ण Σ-संगत हैं। तब $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ तभी जब $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$।*

प्रमाण. "केवल तभी" दिशा: मान लें $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Diamond\varphi \in \Diamond\Delta$ (अर्थात् $\varphi \in \Delta$)। $\Diamond\varphi \in \Gamma$ दिखाने के लिए $\Box\neg\varphi \notin \Gamma$ दिखाना पर्याप्त है, क्योंकि तब अधिकतमता से $\neg\Box\neg\varphi \in \Gamma$। अब यदि $\Box\neg\varphi \in \Gamma$, तो परिकल्पना से $\neg\varphi \in \Delta$, जो Δ की संगति के विरुद्ध है (क्योंकि $\varphi \in \Delta$)। अतः अपेक्षानुसार $\Box\neg\varphi \notin \Gamma$।

"यदि" दिशा: मान लें $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$। हम प्रतिधनात्मक तर्क देते हैं: $\Box\varphi \notin \Gamma$ दिखाने के लिए मान लें $\varphi \notin \Delta$। यदि $\varphi \notin \Delta$, तो अधिकतमता से $\neg\varphi \in \Delta$, और इसलिए परिकल्पना से $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$। किंतु सामान्य मोडल तर्कशास्त्र में $\Diamond\neg\varphi$, $\neg\Box\varphi$ के तुल्य है; और यदि बाद वाला Γ में है, तो संगति से अपेक्षानुसार $\Box\varphi \notin \Gamma$। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 52.10. *यदि Γ पूर्ण Σ-संगत है, तो $\Diamond\varphi \in \Gamma$ तभी जब किसी ऐसे पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\varphi \in \Delta$ हो जिसके लिए $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$।*

प्रमाण. मान लें कि Γ पूर्ण Σ-संगत है। dual और संवृत्ति से $\Diamond\varphi \in \Gamma$ तभी जब $\neg\Box\neg\varphi \in \Gamma$। चूँकि Γ पूर्ण Σ-संगत है, प्रतिज्ञप्ति 52.2(5) से $\neg\Box\neg\varphi \in \Gamma$ तभी जब $\Box\neg\varphi \notin \Gamma$। प्रतिज्ञप्ति 52.8 से $\Box\neg\varphi \notin \Gamma$ तभी जब किसी ऐसे पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\neg\varphi \notin \Delta$ हो जिसके लिए $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$। अब ऐसे किसी Δ पर विचार करें। सहायक प्रमेय 52.9 से $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ तभी जब $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$। साथ ही, प्रतिज्ञप्ति 52.2(5) से $\neg\varphi \notin \Delta$ तभी जब $\varphi \in \Delta$। अतः $\Diamond\varphi \in \Gamma$ तभी जब किसी ऐसे पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\varphi \in \Delta$ हो जिसके लिए $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$। $\Box$

52.5 विहित प्रतिरूप

किसी मोडल तंत्र Σ का *विहित प्रतिरूप* एक विशिष्ट प्रतिरूप $\mathfrak{M}^\Sigma$ है जिसमें सभी जगत पूर्ण Σ-संगत समुच्चय हैं। उसका अभिगम्यता संबंध R^Σ और मूल्यांकन V^Σ इस प्रकार परिभाषित होते हैं कि किसी जगत Δ पर सत्य सूत्र ठीक वही सूत्र हों जिनसे Δ बना है।

परिभाषा 52.11. मान लें कि Σ कोई सामान्य मोडल तर्कशास्त्र है। Σ का *विहित प्रतिरूप* $\mathfrak{M}^\Sigma = \langle W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma\rangle$ है, जहाँ:

1. $W^\Sigma = \{\Delta : \Delta$ पूर्ण Σ-संगत है$\}$।
2. $R^\Sigma\Delta\Delta'$ तभी सत्य है जब $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$.
3. $V^\Sigma(p) = \{\Delta : p \in \Delta\}$।

52.6 सत्यता लेम्मा

विहित प्रतिरूप $\mathfrak{M}^\Sigma$ इस प्रकार परिभाषित है कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Delta$। प्रतिज्ञप्ति चरों के लिए V^Σ की परिभाषा इसे सीधे देती है। किंतु हमें सत्यापित करना है कि यह तुल्यता सभी सूत्रों के लिए सत्य है। हम इसे आगमन से करते हैं। आगमनात्मक चरण में प्रतिज्ञप्तिक संकारकों वाले सूत्रों के लिए (जहाँ हमें प्रतिज्ञप्ति 52.2 का उपयोग करना है) और मोडल संकारकों के लिए (जहाँ हम खंड 52.4 के परिणाम लगाते हैं) तुल्यता सिद्ध करनी होती है।

प्रतिज्ञप्ति 52.12 (सत्यता लेम्मा). *प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$ तभी जब $\varphi \in \Delta$।*

प्रमाण. φ पर आगमन से।

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \nVdash \bot$ परिभाषा 49.6 से, और $\bot \notin \Delta$ इस परिणाम से: प्रतिज्ञप्ति 52.2(3).
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \top$ परिभाषा 49.6 से, और $\top \in \Delta$ इस परिणाम से: प्रतिज्ञप्ति 52.2(4).
3. $\varphi \equiv p$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash p$ तभी जब $\Delta \in V^\Sigma(p)$, परिभाषा 49.6 से। साथ ही, V^Σ की परिभाषा से $\Delta \in V^\Sigma(p)$ तभी जब $p \in \Delta$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \neg\psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \nVdash \psi$ (परिभाषा 49.6), तभी जब $\psi \notin \Delta$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\neg\psi \in \Delta$ (इससे: प्रतिज्ञप्ति 52.2(5)).
5. $\varphi \equiv \psi\wedge\chi$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi\wedge\chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \chi$ (परिभाषा 49.6 से), तभी जब $\psi \in \Delta$ और $\chi \in \Delta$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\psi \wedge \chi \in \Delta$ (इससे: प्रतिज्ञप्ति 52.2(6)).
6. $\varphi \equiv \psi\vee\chi$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi\vee\chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \chi$ (परिभाषा 49.6 से), तभी जब $\psi \in \Delta$ या $\chi \in \Delta$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\psi \vee \chi \in \Delta$ (इससे: प्रतिज्ञप्ति 52.2(7)).
7. $\varphi \equiv \psi\to\chi$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi\to\chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \chi$ (परिभाषा 49.6 से), तभी जब $\psi \notin \Delta$ या $\chi \in \Delta$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\psi \to \chi \in \Delta$ (इससे: प्रतिज्ञप्ति 52.2(8)).
8. $\varphi \equiv \psi \leftrightarrow \chi$: $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi \leftrightarrow \chi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \chi$, या $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \nVdash \psi$ और $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \nVdash \chi$ (परिभाषा 49.6 से), तभी जब या तो $\psi \in \Delta$ और $\chi \in \Delta$, या $\psi \notin \Delta$ और $\chi \notin \Delta$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\psi \leftrightarrow \chi \in \Delta$ (इससे: प्रतिज्ञप्ति 52.2(9)).

9. $\varphi \equiv \Box\psi$: पहले मान लें कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Box\psi$। परिभाषा 49.6 से ऐसे प्रत्येक Δ' के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta' \Vdash \psi$ जिसके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। आगमनात्मक परिकल्पना से ऐसे प्रत्येक Δ' के लिए $\psi \in \Delta'$ जिसके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। R^Σ की परिभाषा से ऐसे प्रत्येक Δ' के लिए $\psi \in \Delta'$ जिसके लिए $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$। प्रतिज्ञप्ति 52.8 से $\Box\psi \in \Delta$।

   अब मान लें $\Box\psi \in \Delta$। $\Delta' \in W^\Sigma$ ऐसा हो कि $R^\Sigma\Delta\Delta'$, अर्थात् $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$। चूँकि $\Box\psi \in \Delta$, इसलिए $\psi \in \Box^{-1}\Delta$। फलतः $\psi \in \Delta'$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta' \Vdash \psi$। चूँकि Δ', $R^\Sigma\Delta\Delta'$ वाले जगतों में मनमाना है, इसलिए ऐसे सभी $\Delta' \in W^\Sigma$ के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta' \Vdash \psi$ जिनके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। परिभाषा 49.6 से $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Box\psi$।

10. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: पहले मान लें कि $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Diamond\psi$। परिभाषा 49.6 से किसी ऐसे Δ' के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta' \Vdash \psi$ जिसके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। आगमनात्मक परिकल्पना से किसी ऐसे Δ' के लिए $\psi \in \Delta'$ जिसके लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। R^Σ की परिभाषा से, किसी ऐसे Δ' के लिए $\psi \in \Delta'$ जिसके लिए $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$। प्रतिज्ञप्ति 52.10 से, किसी ऐसे Δ' के लिए $\psi \in \Delta'$ जिसके लिए $\Diamond\Delta' \subseteq \Delta$। चूँकि $\psi \in \Delta'$, इसलिए $\Diamond\psi \in \Diamond\Delta'$, अतः $\Diamond\psi \in \Delta$।

    अब मान लें $\Diamond\psi \in \Delta$। प्रतिज्ञप्ति 52.10 से ऐसा पूर्ण Σ-संगत $\Delta' \in W^\Sigma$ है कि $\Diamond\Delta' \subseteq \Delta$ और $\psi \in \Delta'$। सहायक प्रमेय 52.9 से ऐसा $\Delta' \in W^\Sigma$ है कि $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$ और $\psi \in \Delta'$। R^Σ की परिभाषा से $R^\Sigma\Delta\Delta'$; इसलिए ऐसा $\Delta' \in W^\Sigma$ है कि $R^\Sigma\Delta\Delta'$ और $\psi \in \Delta'$। परिभाषा 49.6 से $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \Diamond\psi$। $\Box$

52.7 K के लिए निर्धारण और पूर्णता

अब हम पूर्णता स्थापित करने के लिए विहित प्रतिरूप का उपयोग करने को तैयार हैं। पूर्णता इस तथ्य से निकलती है कि Σ के विहित प्रतिरूप में सत्य सूत्र ठीक वही हैं जो Σ में व्युत्पन्न हैं। इस गुण वाले प्रतिरूपों को Σ को *निर्धारित करने वाला* कहा जाता है।

परिभाषा 52.13. कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ किसी सामान्य मोडल तर्कशास्त्र Σ को ठीक तभी *निर्धारित करता है* जब प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ तभी जब $\Sigma \vdash \varphi$।

प्रमेय 52.14 (निर्धारण). *$\mathfrak{M}^\Sigma \Vdash \varphi$ तभी जब $\Sigma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\mathfrak{M}^\Sigma \Vdash \varphi$, तो प्रत्येक पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$। अतः सत्यता लेम्मा से प्रत्येक पूर्ण Σ-संगत Δ के लिए $\varphi \in \Delta$; और इसलिए उपप्रमेय 52.4 ($\Gamma = \emptyset$ रखकर) से $\Sigma \vdash \varphi$।

विलोमतः, यदि $\Sigma \vdash \varphi$, तो प्रतिज्ञप्ति 52.2(1) से प्रत्येक पूर्ण Σ-संगत Δ में φ है; और इसलिए सत्यता लेम्मा से प्रत्येक $\Delta \in W^\Sigma$ के लिए $\mathfrak{M}^\Sigma, \Delta \Vdash \varphi$, अर्थात् $\mathfrak{M}^\Sigma \Vdash \varphi$। $\Box$

चूँकि **K** का विहित प्रतिरूप **K** को निर्धारित करता है, हमें तुरंत उपप्रमेय के रूप में **K** की पूर्णता मिलती है:

उपप्रमेय 52.15. *आधारभूत मोडल तर्कशास्त्र* **K**, *सभी प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष पूर्ण है; अर्थात् यदि $\vDash \varphi$, तो* $\mathbf{K} \vdash \varphi$।

प्रमाण. प्रतिधनात्मक रूप से, यदि $\mathbf{K} \nvdash \varphi$, तो निर्धारण से $\mathfrak{M}^{\mathbf{K}} \nVdash \varphi$, अतः φ मान्य नहीं है। $\Box$

प्रतिरूपों के किसी वर्ग के सापेक्ष किसी तंत्र Σ की पूर्णता की सामान्य स्थिति में—जैसे स्वपरावर्ती, सममित, संक्रमणशील प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष **KTB4** की पूर्णता—केवल निर्धारण पर्याप्त नहीं है। हमें यह भी दिखाना होगा कि तंत्र Σ का विहित प्रतिरूप उस वर्ग का सदस्य है। यह विहित प्रतिरूप के निर्माण से स्पष्टतः नहीं निकलता—और सदा सत्य भी नहीं है!

52.8 फ़्रेम-पूर्णता

किसी दिए गए तर्कशास्त्र के विहित प्रतिरूप में संबद्ध फ़्रेम-गुण दिखा देने पर **K** के पूर्णता प्रमेय को अन्य मोडल तंत्रों तक विस्तृत किया जा सकता है।

प्रमेय 52.16. *यदि कोई सामान्य मोडल तर्कशास्त्र Σ, सारणी 52.1 के बाईं ओर के सूत्रों में से किसी को रखता है, तो Σ के विहित प्रतिरूप में दाईं ओर का संबद्ध गुण होता है।*

यदि Σ में ...है	*...तो Σ का विहित प्रतिरूप है:*
D: $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	सीरियल;
T: $\Box\varphi \to \varphi$	स्वपरावर्ती;
B: $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	सममित;
4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	संक्रमणशील;
5: $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	यूक्लिडीय।

तालिका 52.1: आधारभूत अनुरूपता तथ्य।

प्रमाण. हम इनमें से प्रत्येक पर क्रमशः विचार करते हैं।

मान लें कि Σ में D है, और $\Delta \in W^\Sigma$ हो; हमें दिखाना है कि ऐसा Δ' है कि $R^\Sigma\Delta\Delta'$। यह दिखाना पर्याप्त है कि $\Box^{-1}\Delta$, Σ-संगत है, क्योंकि तब लिंडेनबाउम के लेम्मा से ऐसा पूर्ण Σ-संगत समुच्चय $\Delta' \supseteq \Box^{-1}\Delta$ है, और R^Σ की परिभाषा से $R^\Sigma\Delta\Delta'$। अतः विरोधाभास के लिए मान लें कि $\Box^{-1}\Delta$ Σ-संगत *नहीं* है, अर्थात् $\Box^{-1}\Delta \vdash_\Sigma \bot$। सहायक प्रमेय 52.7 से $\Delta \vdash_\Sigma \Box\bot$; और चूँकि Σ में D है, $\Delta \vdash_\Sigma \Diamond\bot$ भी। किंतु Σ सामान्य है, अतः $\Sigma \vdash \neg\Diamond\bot$ (प्रतिज्ञप्ति 51.7); इसलिए $\Delta \vdash_\Sigma \neg\Diamond\bot$ भी, जो Δ की संगति के विरुद्ध है।

अब मान लें कि Σ में T है और $\Delta \in W^\Sigma$ हो। हम $R^\Sigma\Delta\Delta$, अर्थात् $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta$ दिखाना चाहते हैं। किंतु यदि $\Box\varphi \in \Delta$, तो T से $\varphi \in \Delta$ भी, जैसा अपेक्षित था।

अब मान लें कि Σ में B है, और $\Delta, \Delta' \in W^\Sigma$ के लिए $R^\Sigma\Delta\Delta'$। हमें $R^\Sigma\Delta'\Delta$, अर्थात् $\Box^{-1}\Delta' \subseteq \Delta$ दिखाना है। सहायक प्रमेय 52.9 से यह इसके तुल्य है: $\Diamond\Delta \subseteq \Delta'$। अतः मान लें $\varphi \in \Delta$। B से $\Box\Diamond\varphi \in \Delta$ भी। परिकल्पना $R^\Sigma\Delta\Delta'$ से $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$, और इसलिए अपेक्षानुसार $\Diamond\varphi \in \Delta'$।

अब मान लें कि Σ में 4 है, तथा $R^\Sigma\Delta_1\Delta_2$ और $R^\Sigma\Delta_2\Delta_3$। हमें $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ दिखाना है। परिकल्पना से $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ तथा $\Box^{-1}\Delta_2 \subseteq \Delta_3$, दोनों मिलते हैं। $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ दिखाने के लिए $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_3$ दिखाना पर्याप्त है। अतः $\psi \in \Box^{-1}\Delta_1$, अर्थात् $\Box\psi \in \Delta_1$, मान लें। 4 से $\Box\Box\psi \in \Delta_1$ भी; और परिकल्पना से पहले $\Box\psi \in \Delta_2$, फिर अपेक्षानुसार $\psi \in \Delta_3$ मिलता है।

अब मान लें कि Σ में 5 है, तथा $R^\Sigma\Delta_1\Delta_2$ और $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$। हमें $R^\Sigma\Delta_2\Delta_3$ दिखाना है। पहली परिकल्पना से $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, और दूसरी परिकल्पना $\Diamond\Delta_3 \subseteq \Delta_1$ के तुल्य है, सहायक प्रमेय 52.9 के अनुसार। $R^\Sigma\Delta_2\Delta_3$ दिखाने के लिए, सहायक प्रमेय 52.9 से, इतना पर्याप्त है कि $\Diamond\Delta_3 \subseteq \Delta_2$ दिखाना है। अतः $\Diamond\varphi \in \Diamond\Delta_3$, अर्थात् $\varphi \in \Delta_3$, मान लें। दूसरी परिकल्पना से $\Diamond\varphi \in \Delta_1$, और 5 से $\Box\Diamond\varphi \in \Delta_1$ भी। अब पहली परिकल्पना से अपेक्षानुसार $\Diamond\varphi \in \Delta_2$। $\Box$

उपप्रमेय के रूप में हमें अनेक तंत्रों के लिए पूर्णता-परिणाम मिलते हैं। उदाहरणार्थ, हम जानते हैं कि **S5** = **KT5** = **KTB4** सभी स्वपरावर्ती यूक्लिडीय प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष पूर्ण है; यह वर्ग सभी स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील प्रतिरूपों के वर्ग के समान है।

प्रमेय 52.17. *$\mathcal{C}_{\mathrm{D}}, \mathcal{C}_{\mathrm{T}}, \mathcal{C}_{\mathrm{B}}, \mathcal{C}_4$, और $\mathcal{C}_5$ क्रमशः सभी सीरियल, स्वपरावर्ती, सममित, संक्रमणशील और यूक्लिडीय प्रतिरूपों के वर्ग हों। तब* D, T, B, 4, *और* 5 *में से किन्हीं स्कीमाओं $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ के लिए, प्रतिरूपों का वर्ग $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\varphi_1} \cap \cdots \cap \mathcal{C}_{\varphi_n}$ तंत्र* **K**$\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *को निर्धारित करता है।*

प्रतिज्ञप्ति 52.18. *मान लें कि Σ कोई सामान्य मोडल तर्कशास्त्र है; तब:*

1. *यदि Σ में स्कीमा $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ है, तो Σ का विहित प्रतिरूप आंशिक फलनीय है।*

2. *यदि Σ में स्कीमा $\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$ है, तो Σ का विहित प्रतिरूप फलनीय है।*

3. *यदि Σ में स्कीमा $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ है, तो Σ का विहित प्रतिरूप दुर्बलतः सघन है।*

(इन फ्रेम-गुणों की परिभाषाओं के लिए सारणी 50.2 देखें)।

प्रमाण. 1. मान लें कि Σ में स्कीमा $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ है। R^Σ को आंशिक फलनीय दिखाने के लिए हमें सिद्ध करना है कि किन्हीं $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in W^\Sigma$ के लिए, यदि $R^\Sigma\Delta_1\Delta_2$ और $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$, तो $\Delta_2 = \Delta_3$। $R^\Sigma\Delta_1\Delta_2$ से $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, और $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ से $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_3$ भी। यदि हम दोनों समावेशन $\Delta_2 \subseteq \Delta_3$ और $\Delta_3 \subseteq \Delta_2$ स्थापित कर सकें, तो $\Delta_2 = \Delta_3$ निकलेगा। पहले समावेशन के लिए $\varphi \in \Delta_2$ मान लें; तब $\Diamond\varphi \in \Delta_1$, और स्कीमा तथा Δ_1 की निगमनात्मक संवृत्ति से $\Box\varphi \in \Delta_1$ भी; अतः परिकल्पना $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ से $\varphi \in \Delta_3$। दूसरा समावेशन इसी प्रकार मिलता है।

2. यह भाग (1) और प्रमेय 52.16 में सीरियलता के प्रमाण से तुरंत निकलता है।

3. मान लें कि Σ में स्कीमा $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ है, और R^Σ को दुर्बलतः सघन दिखाने के लिए $R^\Sigma\Delta_1\Delta_2$ मान लें। हमें दिखाना है कि ऐसा पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ_3 है कि $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ और $R^\Sigma\Delta_3\Delta_2$। रखें:

$$\Gamma = \Box^{-1}\Delta_1 \cup \Diamond\Delta_2.$$

यह दिखाना पर्याप्त है कि Γ, Σ-संगत है, क्योंकि तब लिंडेनबाउम के लेम्मा से इसे ऐसे पूर्ण Σ-संगत समुच्चय Δ_3 तक विस्तृत किया जा सकता है कि $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_3$ और $\Diamond\Delta_2 \subseteq \Delta_3$, अर्थात् $R^\Sigma\Delta_1\Delta_3$ और $R^\Sigma\Delta_3\Delta_2$ (सहायक प्रमेय 52.9 से)।

विरोधाभास के लिए मान लें कि Γ संगत नहीं है। तब ऐसे सूत्र $\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \in \Delta_1$ और $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Delta_2$ हैं कि

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_m \vdash_\Sigma \bot.$$

चूँकि $\Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m) \to (\Diamond\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond\psi_m)$ प्रत्येक सामान्य मोडल तर्कशास्त्र में व्युत्पन्न है, हम

निम्न प्रकार तर्क करते हैं, जिससे Δ_2 की संगति के साथ विरोधाभास मिलता है:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_m \vdash_\Sigma \bot$$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\Sigma (\Diamond\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond\psi_m) \to \bot$$

निगमन प्रमेय से

प्रतिज्ञप्ति 51.37(4), और taut

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\Sigma \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m) \to \bot$$

क्योंकि Σ सामान्य है

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\Sigma \neg\Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$$

pl से

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\Sigma \Box\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$$

$\neg\Diamond$ के स्थान पर $\Box\neg$

$$\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \vdash_\Sigma \Box\Box\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$$

सहायक प्रमेय 52.6 से

$$\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \vdash_\Sigma \Box\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$$

स्कीमा $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ से

$$\Delta_1 \vdash_\Sigma \Box\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$$

एकदिष्टता से, प्रतिज्ञप्ति 51.37(1)

$$\Box\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m) \in \Delta_1$$

निगमनात्मक संवृत्ति से;

$$\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m) \in \Delta_2$$

क्योंकि $R^\Sigma \Delta_1 \Delta_2$. $\Box$

इन उदाहरणों के आधार पर कोई सोच सकता है कि मोडल तर्कशास्त्र का प्रत्येक तंत्र Σ इस अर्थ में *पूर्ण* है कि वह हर ऐसे सूत्र को सिद्ध करता है जो उन सभी फ़्रेमों में मान्य है जिनमें Σ का प्रत्येक प्रमेय मान्य है। दुर्भाग्य से अनेक तंत्र इस अर्थ में पूर्ण नहीं हैं।

प्रश्न

प्रश्न 52.1. प्रतिज्ञप्ति 52.2 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 52.2. दिखाइए कि यदि Γ पूर्ण Σ-संगत है, तो $\Diamond\varphi \in \Gamma$ तभी जब ऐसा कोई पूर्ण Σ-संगत Δ हो कि $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ और $\varphi \in \Delta$। *इसे सहायक प्रमेय 52.9 का उपयोग किए बिना कीजिए।*

प्रश्न 52.3. प्रतिज्ञप्ति 52.12 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 53

निस्यंदन और निर्णेयता

53.1 परिचय

किसी तर्कशास्त्र के बारे में एक महत्त्वपूर्ण प्रश्न सदा यह होता है कि क्या वह निर्णेय है, अर्थात् क्या ऐसी प्रभावी प्रक्रिया है जो इस प्रश्न का उत्तर देगी: "क्या यह सूत्र मान्य है?" प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र निर्णेय है: हम सत्यता-सारणी बनाकर प्रभावी ढंग से जाँच सकते हैं कि कोई सूत्र सर्वसत्य है या नहीं, और किसी दिए गए सूत्र की सत्यता-सारणी परिमित होती है। किंतु हम सीधे यह जाँच नहीं सकते कि कोई मोडल सूत्र सभी प्रतिरूपों में सत्य है या नहीं, क्योंकि प्रतिरूप अपरिमिततः अनेक हैं। हम किसी दिए गए सूत्र से संबद्ध सभी परिमित प्रतिरूपों को सूचीबद्ध कर सकते हैं, क्योंकि केवल उन प्रतिज्ञप्ति चरों को जगतों के उपसमुच्चय नियत करना प्रासंगिक है जो वास्तव में सूत्र में आते हैं। यदि अभिगम्यता संबंध नियत है, तो संभावित भिन्न नियतन $V(p)$ केवल W के सभी उपसमुच्चय हैं; और यदि $|W| = n$, तो ऐसे 2^n नियतन हैं। यदि हमारे सूत्र φ में m प्रतिज्ञप्ति चर हैं, तो n जगतों वाले 2^{nm} भिन्न प्रतिरूप हैं। प्रत्येक प्रतिरूप के लिए हम हर जगत पर φ का सत्यता-मूल्य गणित करके जाँच सकते हैं कि φ सभी जगतों पर सत्य है या नहीं। निस्संदेह हमें सभी संभावित अभिगम्यता संबंधों को भी जाँचना है, किंतु n जगतों पर भी परिमिततः अनेक संबंध ही होते हैं (विशेषतः $W \times W$ के उपसमुच्चयों की संख्या, अर्थात् 2^{n^2}।

यदि हमारी रुचि तर्कशास्त्र **K** में नहीं, बल्कि प्रतिरूपों के किसी वर्ग (जैसे स्वपरावर्ती संक्रमणशील प्रतिरूपों) द्वारा परिभाषित तर्कशास्त्र में है, तो हमें यह भी जाँच सकना चाहिए कि अभिगम्यता संबंध सही प्रकार का है या नहीं। जब भी हमारी रुचि के फ़्रेम मोडल सूत्रों द्वारा परिभाष्य हों, हम ऐसा कर सकते हैं (जैसे यह जाँचकर कि T और 4 फ़्रेम में मान्य हैं या नहीं)। अतः विचार यह होगा कि सभी परिमित फ़्रेमों को क्रमशः लें, हर एक के लिए जाँचें कि वह हमारी रुचि के वर्ग का फ़्रेम है या नहीं, फिर उस फ़्रेम पर सभी संभावित प्रतिरूप सूचीबद्ध करें और जाँचें कि प्रत्येक में φ सत्य है या नहीं। यदि नहीं, तो रुकें: φ रुचिकर प्रतिरूप-वर्ग में मान्य नहीं है।

इस विचार में एक समस्या है: हम नहीं जानते कि हम खोजना कब रोक सकते हैं, यदि कभी रोक भी सकें। यदि सूत्र का कोई परिमित प्रतिप्रतिरूप है, तो हमारी प्रक्रिया उसे खोज लेगी। किंतु यदि उसका कोई परिमित प्रतिप्रतिरूप नहीं है, तो हमें उत्तर नहीं मिलेगा। सूत्र मान्य हो सकता है (कोई प्रतिप्रतिरूप ही न हो), या उसका केवल अपरिमित प्रतिप्रतिरूप हो सकता है, जिसे हम कभी देखेंगे ही नहीं। यदि हम दिखा सकें कि प्रतिप्रतिरूप वाले हर सूत्र का कोई परिमित प्रतिप्रतिरूप भी होता है, तो इस समस्या को दूर किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि तर्कशास्त्र में *परिमित प्रतिरूप गुण* है।

पर हम कैसे दिखाएँ कि किसी तर्कशास्त्र में परिमित प्रतिरूप गुण है? इसका एक उपाय φ के किसी अपरिमित (प्रति)प्रतिरूप को परिमित प्रतिरूप में बदलने की विधि खोजना होगा। यदि ऐसा हो सके, तो जब भी कोई ऐसा प्रतिरूप हो जिसमें φ सत्य नहीं है, उससे मिला परिमित प्रतिरूप भी φ को असत्य बनाएगा। वह परिमित प्रतिरूप हमारी सभी परिमित प्रतिरूपों की सूची में आएगा और अंततः हम हर अमान्य सूत्र के लिए निर्धारित कर लेंगे कि वह अमान्य है। यदि सूत्र मान्य है, तो हमारी प्रक्रिया समाप्त नहीं होगी। यदि इसके अतिरिक्त हम दिखा सकें कि हमारी प्रक्रिया से मिलने वाले परिमित प्रतिरूप के आकार की कोई अधिकतम सीमा है, और यह अधिकतम आकार केवल सूत्र φ पर निर्भर करता है, तो हमें वह आकार मिल जाएगा जहाँ तक प्रतिप्रतिरूप खोजते हुए परिमित प्रतिरूपों को जाँचना है। यदि तब तक प्रतिप्रतिरूप न मिला, तो कोई है ही नहीं। तब हमारी प्रक्रिया वास्तव में हर सूत्र φ के लिए "क्या φ मान्य है?" प्रश्न को

निर्णीत करेगी।

अपरिमित संरचनाओं को परिमित संरचनाओं में बदलने के लिए प्रायः सफल होने वाली एक रणनीति संरचना के उन अवयवों की "पहचान" करना है जो प्रासंगिक पहलुओं में समान व्यवहार करते हैं। यदि $\mathfrak{M}$ में अपरिमिततः अनेक जगत प्रासंगिक पहलुओं में समान व्यवहार करते हैं, तो संभव है कि हम *सभी* जगतों को ऐसे जगतों के परिमिततः अनेक (संभवतः अपरिमित) "वर्गों" में समेट सकें। दूसरे शब्दों में, हमें जगतों के समुच्चय का उचित ढंग से विभाजन करना चाहिए: ऐसा कि हर विभाजन में अपरिमिततः अनेक जगत हों, किंतु विभाजन केवल परिमिततः अनेक हों। फिर हम नया प्रतिरूप $\mathfrak{M}^*$ परिभाषित करते हैं जिसमें ये विभाजन ही जगत हैं। पुराने प्रतिरूप के परिमिततः अनेक विभाजन हमें नए प्रतिरूप में परिमिततः अनेक जगत देते हैं, अर्थात् परिमित प्रतिरूप। जिस विभाजन में जगत w है, उसे $[w]$ कहें। हम चाहेंगे कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$, क्योंकि यदि पुराना प्रतिरूप φ का प्रतिप्रतिरूप था, तो हम नए प्रतिरूप को भी उसका प्रतिप्रतिरूप चाहते हैं। इसके लिए विभाजन और $\mathfrak{M}^*$ के अभिगम्यता संबंध, दोनों को उचित ढंग से परिभाषित करना होगा।

यह कैसे चलेगा, इसे देखने के लिए पहले कल्पना करें कि हमारे पास कोई अभिगम्यता संबंध नहीं है। $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$ तभी जब किसी $v \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\psi$; और $\mathfrak{M}^*$ के लिए भी यही, बस w और v के स्थान पर $[w]$ और $[v]$। पहले विचार के रूप में कहें कि दो जगत u और v तुल्य हैं (एक ही विभाजन में हैं) यदि वे $\mathfrak{M}$ के सभी प्रतिज्ञप्ति चरों पर सहमत हों, अर्थात् $\mathfrak{M}, u \Vdash p$ तभी जब $\mathfrak{M}, v \Vdash p$। $V^*(p) = \{[w] : \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$ रखें। हमारा लक्ष्य दिखाना है कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$। स्पष्टतः हम इसे आगमन से सिद्ध करेंगे: आधार स्थिति $\varphi \equiv p$ होगी। पहले मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash p$। तब परिभाषा से $[w] \in V^*$, अतः $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash p$। अब मान लें कि $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash p$। इसका अर्थ है कि $[w] \in V^*(p)$, अर्थात् w के तुल्य किसी v के लिए $\mathfrak{M}, v \Vdash p$। किंतु "w, v के तुल्य है" का अर्थ है "w और v ठीक उन्हीं प्रतिज्ञप्ति चरों को सत्य बनाते हैं," अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash p$। अब आगमनात्मक चरण के लिए, जैसे $\varphi \equiv \neg\psi$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \psi$ (आगमनात्मक परिकल्पना से), तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \neg\psi$। अन्य गैर-मोडल संकारकों के लिए भी इसी प्रकार। यह $\Box$ के लिए भी चलता है: मान लें $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \Box\psi$। इसका अर्थ है कि प्रत्येक $[u]$ के लिए $\mathfrak{M}^*, [u] \Vdash \psi$। आगमनात्मक परिकल्पना से प्रत्येक u के लिए $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$। फलतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$।

सामान्य स्थिति में, जहाँ हमें $\mathfrak{M}^*$ का अभिगम्यता संबंध भी परिभाषित करना है, बात अधिक जटिल है। हम किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M}^*$ को *निस्यंदन* कहेंगे यदि उसका अभिगम्यता संबंध R^* ऊपर का आगमनात्मक प्रमाण चलाने के लिए आवश्यक शर्तें संतुष्ट करता हो। तब कोई भी निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$, $[w]$ पर φ को तभी सत्य बनाएगा जब $\mathfrak{M}$, w पर φ को सत्य बनाता है। किंतु अब हमें यह भी दिखाना है कि निस्यंदन *होते हैं*, अर्थात् हम R^* को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि वह आवश्यक शर्तें संतुष्ट करे। इसके चलने के लिए हमें यह अपेक्षा करनी होगी कि जगत u, v केवल सभी प्रतिज्ञप्ति चरों पर सहमत होने पर ही नहीं, बल्कि φ के सभी उप-सूत्रों पर सहमत होने पर तुल्य गिने जाएँ। चूँकि φ के केवल परिमिततः अनेक उप-सूत्र हैं, इससे अब भी प्रत्याभूत होगा कि निस्यंदन परिमित है। निस्यंदन परिभाषित करने का केवल एक ही ढंग नहीं है; और यह सुनिश्चित करने के लिए कि निस्यंदन का अभिगम्यता संबंध अपेक्षित गुण (जैसे स्वपरावर्तिता, संक्रमणशीलता, इत्यादि) संतुष्ट करे, हमें R^* की परिभाषा में कल्पनाशील होना होगा।

53.2 प्रारंभिक बातें

निस्यंदन हमें यह दिखाकर अपने मोडल तर्कशास्त्रीय तंत्रों की निर्णेयता स्थापित करने देते हैं कि उनमें *परिमित प्रतिरूप गुण* है, अर्थात् किसी प्रतिरूप में सत्य (असत्य) हर सूत्र किसी *परिमित* प्रतिरूप में भी सत्य (असत्य) है। निस्यंदन, सूत्रों के ऐसे समुच्चयों के सापेक्ष परिभाषित होते हैं जो उपसूत्रों के अधीन संवृत हैं।

परिभाषा 53.1. सूत्रों का कोई समुच्चय Γ *उपसूत्रों के अधीन संवृत* है यदि उसमें Γ के प्रत्येक सूत्र का प्रत्येक उपसूत्र हो। इसके अतिरिक्त, Γ *मोडलतः संवृत* है यदि वह उपसूत्रों के अधीन संवृत हो और $\varphi \in \Gamma$ से $\Box\varphi, \Diamond\varphi \in \Gamma$ भी निकलता हो।

उदाहरणार्थ, कोई सूत्र φ दिए होने पर उसके सभी उप-सूत्रों का समुच्चय उप-सूत्रों के अधीन संवृत है। जब हम φ के उप-सूत्रों के समुच्चय के माध्यम से किसी प्रतिरूप का निस्यंदन परिभाषित करते हैं, तो उसमें हमारा अपेक्षित गुण होगा: वह φ को तभी सत्य (असत्य) बनाता है जब मूल प्रतिरूप ऐसा करता है।

Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ के निस्यंदन के जगतों का समुच्चय निम्न तुल्यता संबंध के सभी तुल्यता-वर्गों के समुच्चय के रूप में परिभाषित होता है।

परिभाषा 53.2. मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ और Γ उप-सूत्रों के अधीन संवृत है। W पर संबंध $\equiv$ को उन किन्हीं दो जगतों के बीच सत्य परिभाषित करें जो Γ के उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाते हैं, अर्थात्:

$$u \equiv v \quad \text{तभी जब} \quad \forall \varphi \in \Gamma : \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi.$$

किसी जगत w का तुल्यता-वर्ग $[w]_{\equiv}$, या संक्षेप में $[w]$, उन सभी जगतों का समुच्चय है जो w के $\equiv$-तुल्य हैं:

$$[w] = \{v : v \equiv w\}.$$

प्रतिज्ञप्ति 53.3. *$\mathfrak{M}$ और Γ दिए होने पर, ऊपर परिभाषित $\equiv$ एक तुल्यता संबंध है, अर्थात् वह स्वपरावर्ती, सममित और संक्रमणशील है।*

प्रमाण. संबंध $\equiv$ स्वपरावर्ती है, क्योंकि w, Γ के ठीक उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाता है जिन्हें वह स्वयं सत्य बनाता है। वह सममित है, क्योंकि यदि u, Γ के उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाता है जिन्हें v, तो v और u के लिए भी यही सत्य है। वह संक्रमणशील भी है, क्योंकि यदि u, Γ के उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाता है जिन्हें v, और v उन्हीं को जिन्हें w, तो u भी उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाता है जिन्हें w। $\square$

हर तुल्यता संबंध की तरह संबंध $\equiv$, W को *विभाजनों* में बाँटता है, अर्थात् W के ऐसे उपसमुच्चयों में जो युग्मतः असंयुक्त हैं और मिलकर पूरे W को आच्छादित करते हैं। प्रत्येक $w \in W$ किसी एक विभाजन, अर्थात् $[w]$, का अवयव है, क्योंकि $w \equiv w$। अतः विभाजन $[w]$ पूरे W को आच्छादित करते हैं। वे युग्मतः असंयुक्त हैं, क्योंकि यदि $u \in [w]$ और $u \in [v]$, तो $u \equiv w$ और $u \equiv v$; और सममिति तथा संक्रमणशीलता से $w \equiv v$, अतः $[w] = [v]$।

53.3 निस्यंदन

Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ का "वह" निस्यंदन परिभाषित करने के स्थान पर हम यह परिभाषित करते हैं कि कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}$ का निस्यंदन कब माना जाता है। सभी निस्यंदनों में जगतों का समुच्चय W^* और मूल्यांकन V^* समान हैं। किंतु भिन्न निस्यंदनों के अभिगम्यता संबंध R^* भिन्न हो सकते हैं। फिर भी निस्यंदन माने जाने के लिए R^* को कुछ शर्तें संतुष्ट करनी होती हैं। ये ठीक वे शर्तें हैं जिनकी हमें मुख्य परिणाम सिद्ध करने के लिए आवश्यकता होगी: यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$।

परिभाषा 53.4. मान लें कि Γ उपसूत्रों के अधीन संवृत है और $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$। *$\Gamma$ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ का निस्यंदन* ऐसा कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ है, जहाँ:

1. $W^* = \{[w] : w \in W\}$;
2. किन्हीं $u, v \in W$ के लिए:
   a) यदि Ruv, तो $R^*[u][v]$;
   b) यदि $R^*[u][v]$, तो किसी भी $\Box\varphi \in \Gamma$ के लिए, यदि $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$;
   c) यदि $R^*[u][v]$, तो किसी भी $\Diamond\varphi \in \Gamma$ के लिए, यदि $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$।
3. $V^*(p) = \{[u] : u \in V(p)\}$.

$V^*(p)$ क्या है, इस पर विचार करना उपयोगी है: वह उन सभी जगतों w के तुल्यता-वर्गों $[w]$ का समुच्चय है जहाँ p, $\mathfrak{M}$ में सत्य है। एक ओर, यदि $w \in V(p)$, तो इस परिभाषा से $[w] \in V^*(p)$। किंतु यह आवश्यक नहीं कि यदि $[w] \in V^*(p)$, तो $w \in V(p)$। यदि $[w] \in V^*(p)$, तो केवल यह प्रत्याभूत है कि किसी $u \in V(p)$ के लिए $[w] = [u]$। निस्संदेह $[w] = [u]$ का अर्थ $w \equiv u$ है। अतः जब $[w] \in V^*(p)$, तब हम (केवल) यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी $u \in V(p)$ के लिए $w \equiv u$।

प्रमेय 53.5. *यदि $\mathfrak{M}^*$, Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ का निस्यंदन है, तो प्रत्येक $\varphi \in \Gamma$ और $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$।*

प्रमाण. φ पर आगमन से, इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि Γ उपसूत्रों के अधीन संवृत है। चूँकि $\varphi \in \Gamma$ और Γ उप-सूत्रों के अधीन संवृत है, φ के सभी उप-सूत्र भी Γ में हैं। अतः प्रत्येक आगमनात्मक चरण में आगमनात्मक परिकल्पना φ के उप-सूत्रों पर लागू होती है।

1. $\varphi \equiv \bot$: न $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, न $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$।

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ और $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$, दोनों।

3. $\varphi \equiv p$: बाएँ-से-दाएँ दिशा तुरंत मिलती है, क्योंकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ केवल तभी जब $w \in V(p)$; इससे $[w] \in V^*(p)$, अर्थात् $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$। विलोमतः, मान लें $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$, अर्थात् $[w] \in V^*(p)$। तब किसी $v \in V(p)$ के लिए $w \equiv v$। निस्संदेह तब $\mathfrak{M}, v \Vdash p$ भी। चूँकि $w \equiv v$, w और v, Γ के उन्हीं सूत्रों को सत्य बनाते हैं। परिकल्पना से $p \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash p$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \psi$। अंततः, $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$।

5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$, और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$। तथा $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$।

6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$, और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$। तथा $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$।

7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$, और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$। तथा $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$।

8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$, या $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \chi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$, और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ तभी जब $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$। तथा $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \chi$, या $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \psi$ और $\mathfrak{M}^*, [w] \nVdash \chi$।

9. $\varphi \equiv \Box\psi$: मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$; यह दिखाने के लिए कि $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$, v ऐसा मानें कि $R^*[w][v]$। परिभाषा 53.4(2b) से $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$, और आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}^*, [v] \Vdash \psi$। चूँकि v मनमाना था, $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$ निकलता है।

   विलोमतः, मान लें $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$, और v ऐसा मनमाना हो कि Rwv। परिभाषा 53.4(2a) से $R^*[w][v]$, अतः $\mathfrak{M}^*, [v] \Vdash \psi$; आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$, और v के मनमाना होने से $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

10. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। तब किसी $v \in W$ के लिए Rwv और $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}^*, [v] \Vdash \psi$, और परिभाषा 53.4(2a) से $R^*[w][v]$। अतः $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$।

    अब मान लें $\mathfrak{M}^*, [w] \Vdash \varphi$। तब $R^*[w][v]$ वाले किसी $[v] \in W^*$ के लिए $\mathfrak{M}^*, [v] \Vdash \psi$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$। परिभाषा 53.4(2c) से $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। $\Box$

किसी प्रतिरूप के जगतों पर सत्यता के लिए जो सत्य है, वह प्रतिरूप में सत्यता और प्रतिरूपों के वर्ग में मान्यता के लिए भी सत्य है।

उपप्रमेय 53.6. *मान लें कि Γ उपसूत्रों के अधीन संवृत है। तब:*

1. *यदि $\mathfrak{M}^*$, Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ का निस्यंदन है, तो किसी भी $\varphi \in \Gamma$ के लिए: $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}^* \Vdash \varphi$।*

2. *यदि $\mathcal{C}$ प्रतिरूपों का वर्ग है और $\Gamma(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ के प्रतिरूपों के Γ-निस्यंदनों का वर्ग है, तो कोई भी सूत्र $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{C}$ में तभी मान्य है जब वह $\Gamma(\mathcal{C})$ में मान्य है।*

53.4 निस्यंदनों के उदाहरण

हमने अभी यह नहीं दिखाया है कि कोई निस्यंदन होता भी है। किंतु वास्तव में, किसी भी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ के लिए Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ के अनेक निस्यंदन होते हैं। हम विशेषतः दो की पहचान करते हैं: सूक्ष्मतम और स्थूलतम निस्यंदन। एक ही प्रतिरूप के निस्यंदन अपने अभिगम्यता संबंध में भिन्न होंगे (क्योंकि परिभाषा 53.4 सीधे अनुबंध करता है कि W^* और V^* क्या होने चाहिए)। सूक्ष्मतम निस्यंदन में यथासंभव कम जगत संबंधित होंगे, जबकि स्थूलतम में यथासंभव अधिक।

परिभाषा 53.7. जहाँ Γ उपसूत्रों के अधीन संवृत है, वहाँ किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ का *सूक्ष्मतम* निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$ यह रखकर परिभाषित होता है:

$$R^*[u][v] \quad \text{तभी जब} \quad \exists u' \in [u]\ \exists v' \in [v] : Ru'v'.$$

प्रतिज्ञप्ति 53.8. *सूक्ष्मतम निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$ वास्तव में एक निस्यंदन है।*

प्रमाण. हमें जाँचना है कि इस प्रकार परिभाषित R^*, परिभाषा 53.4(2) को संतुष्ट करता है। हम तीनों शर्तें क्रमशः जाँचते हैं।

यदि Ruv, तो $u \in [u]$ और $v \in [v]$ होने से $R^*[u][v]$ भी, अतः (2a) संतुष्ट है।

(2b) के लिए मान लें $\Box\varphi \in \Gamma$, $R^*[u][v]$, और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$। R^* की परिभाषा से ऐसे $u' \equiv u$ और $v' \equiv v$ हैं कि $Ru'v'$। चूँकि u और u', Γ पर सहमत हैं, $\mathfrak{M}, u' \Vdash \Box\varphi$ भी, अतः $\mathfrak{M}, v' \Vdash \varphi$। Γ के उप-सूत्रों के अधीन संवृत होने से v और v', φ पर सहमत हैं, अतः अपेक्षानुसार $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$।

(2c) सत्यापित करने के लिए मान लें $\Diamond\varphi \in \Gamma$, $R^*[u][v]$, और $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$। R^* की परिभाषा से ऐसे $u' \equiv u$ और $v' \equiv v$ हैं कि $Ru'v'$। चूँकि v और v', Γ पर सहमत हैं और Γ उप-सूत्रों के अधीन संवृत है, $\mathfrak{M}, v' \Vdash \varphi$ भी; अतः $\mathfrak{M}, u' \Vdash \Diamond\varphi$। चूँकि u और u' भी Γ पर सहमत हैं, $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$। $\Box$

परिभाषा 53.9. जहाँ Γ उपसूत्रों के अधीन संवृत है, वहाँ किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ का *स्थूलतम* निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$, $R^*[u][v]$ तभी जब निम्न *दोनों* शर्तें संतुष्ट हों: रखकर परिभाषित होता है।

1. यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$;

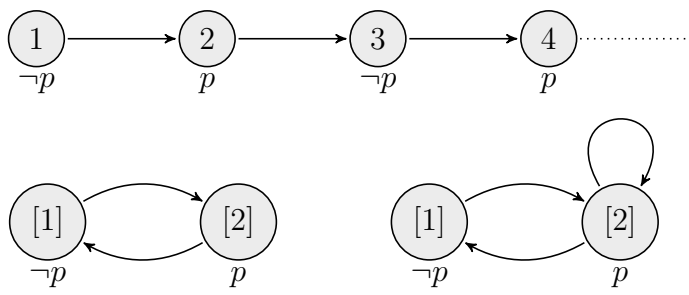
2. यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$.

प्रतिज्ञप्ति 53.10. *स्थूलतम निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$ वास्तव में एक निस्यंदन है।*

प्रमाण. R^* की परिभाषा दिए होने पर सत्यापित करने के लिए केवल Ruv से $R^*[u][v]$ का निहितार्थ बचता है। अतः Ruv मान लें। मान लें $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$; तब स्पष्टतः $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, और (1) संतुष्ट है। मान लें $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$। तब Ruv के कारण $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$, और (2) संतुष्ट है। $\Box$

उदाहरण 53.11. $W = \mathbb{Z}^+$, Rnm तभी जब $m = n + 1$, और $V(p) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ रखें। प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ को आकृति 53.1 में दर्शाया गया है। जगत 1, 2, इत्यादि हैं; हर जगत ठीक एक अन्य जगत—अपने उत्तरवर्ती—तक अभिगम रखता है, और p ठीक सभी सम संख्याओं पर सत्य है।

अब Γ, $\Box p \to p$ के उप-सूत्रों का समुच्चय, अर्थात् $\{p, \Box p, \Box p \to p\}$ हो। p ठीक सभी सम संख्याओं पर सत्य है, $\Box p$ ठीक सभी विषम संख्याओं पर सत्य है, अतः $\Box p \to p$ ठीक सभी सम संख्याओं पर सत्य है। दूसरे शब्दों में,



चित्र 53.1: एक अपरिमित प्रतिरूप और उसके निस्यंदन।

हर विषम संख्या $\Box p$ को सत्य, किंतु p और $\Box p \to p$ को असत्य बनाती है; हर सम संख्या p और $\Box p \to p$ को सत्य, किंतु $\Box p$ को असत्य बनाती है। अतः $W^* = \{[1], [2]\}$, जहाँ $[1] = \{1, 3, 5, \dots\}$ और $[2] = \{2, 4, 6, \dots\}$। चूँकि $2 \in V(p)$, इसलिए $[2] \in V^*(p)$; चूँकि $1 \notin V(p)$, इसलिए $[1] \notin V^*(p)$। अतः $V^*(p) = \{[2]\}$।

W^* पर आधारित किसी भी निस्यंदन का अभिगम्यता संबंध $\langle [1], [2] \rangle, \langle [2], [1] \rangle$ को रखेगा: चूँकि $R12$, परिभाषा 53.4(2a) से $R^*[1][2]$ होना चाहिए; और चूँकि $R23$, इसलिए $R^*[2][3]$ होना चाहिए, तथा $[3] = [1]$। वह $\langle [1], [1] \rangle$ को नहीं रख सकता: यदि रखता, तो $R^*[1][1]$, $\mathfrak{M}, 1 \Vdash \Box p$ किंतु $\mathfrak{M}, 1 \nVdash p$ होता, जो (2b) के विरुद्ध है। $R^*[2][2]$ को न कोई बात अपेक्षित करती है, न निषिद्ध। अतः $\mathfrak{M}$ के दो संभावित निस्यंदन हैं, जो इन दो अभिगम्यता संबंधों के अनुरूप हैं:

$$\{\langle [1], [2] \rangle, \langle [2], [1] \rangle\} \text{ और } \{\langle [1], [2] \rangle, \langle [2], [1] \rangle, \langle [2], [2] \rangle\}.$$

दोनों स्थितियों में $[1]$ पर p और $\Box p \to p$ असत्य तथा $\Box p$ सत्य हैं; $[2]$ पर p और $\Box p \to p$ सत्य तथा $\Box p$ असत्य हैं।

53.5 निस्यंदन परिमित होते हैं

हमने उप-सूत्रों के अधीन संवृत किसी भी समुच्चय Γ के लिए निस्यंदन परिभाषित किए हैं। परिभाषा में स्वयं कुछ भी यह प्रत्याभूत नहीं करता कि निस्यंदन परिमित हैं। वास्तव में जब Γ अपरिमित हो (जैसे सभी सूत्रों का समुच्चय), तो निस्यंदन भी अपरिमित हो सकता है। किंतु यदि Γ परिमित है (जैसे किसी दिए गए सूत्र φ के उप-सूत्रों का समुच्चय), तो Γ के माध्यम से प्रत्येक निस्यंदन भी परिमित है।

प्रतिज्ञप्ति 53.12. *यदि Γ परिमित है, तो Γ के माध्यम से किसी प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ का प्रत्येक निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$ भी परिमित है।*

प्रमाण. W^* का आकार तुल्यता संबंध $\equiv$ के अधीन भिन्न वर्गों $[w]$ की संख्या है। ऐसे किसी वर्ग के कोई दो जगत u, v—अर्थात् ऐसे u और v कि $u \equiv v$—Γ के सभी सूत्रों φ पर सहमत होते हैं: $\varphi \in \Gamma$ या तो u और v, दोनों पर सत्य है, या किसी पर नहीं। अतः प्रत्येक वर्ग $[w]$, Γ के किसी उपसमुच्चय के अनुरूप है, अर्थात् उन सभी $\varphi \in \Gamma$ के समुच्चय के, जो $[w]$ के जगतों पर सत्य हैं। कोई दो भिन्न वर्ग $[u]$ और $[v]$, Γ के एक ही उपसमुच्चय के अनुरूप नहीं हैं। क्योंकि यदि u पर सत्य सूत्रों का समुच्चय और v पर सत्य सूत्रों का समुच्चय समान हों, तो u और v, Γ के सभी सूत्रों पर सहमत हैं, अर्थात् $u \equiv v$। किंतु तब $[u] = [v]$। अतः W^* से $\wp(\Gamma)$ में कोई एकैकी फलन है, और इसलिए $|W^*| \leq |\wp(\Gamma)|$। अतः यदि Γ में n वाक्य हैं, तो W^* की गणनीयता 2^n से अधिक नहीं है। $\Box$

53.6 K और S5 में परिमित प्रतिरूप गुण

परिभाषा 53.13. मोडल तर्कशास्त्र के किसी तंत्र Σ में *परिमित प्रतिरूप गुण* है यदि जब भी कोई सूत्र φ, Σ के किसी प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य हो, तब φ, Σ के किसी *परिमित* प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य हो।

प्रतिज्ञप्ति 53.14. K *में परिमित प्रतिरूप गुण है।*

प्रमाण. **K** मान्य सूत्रों का समुच्चय है, अर्थात् हर प्रतिरूप **K** का प्रतिरूप है। प्रमेय 53.5 से, यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, तो φ के उप-सूत्रों के समुच्चय Γ के माध्यम से $\mathfrak{M}$ के किसी भी निस्यंदन के लिए $\mathfrak{M}^*, w \Vdash \varphi$। किसी भी सूत्र के केवल परिमिततः अनेक उप-सूत्र होते हैं, अतः Γ परिमित है। प्रतिज्ञप्ति 53.12 से $|W^*| \leq 2^n$, जहाँ n, Γ के सूत्रों की संख्या है। और चूँकि **K** प्रतिरूपों पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाता, $\mathfrak{M}^*$ एक **K**-प्रतिरूप है। □

निस्यंदनों द्वारा यह दिखाने के लिए कि किसी तर्कशास्त्र **L** में परिमित प्रतिरूप गुण है, यह आवश्यक है कि किसी **L**-प्रतिरूप का निस्यंदन स्वयं **L**-प्रतिरूप हो। प्रायः इसके लिए पर्याप्त काम करना पड़ता है और हर निस्यंदन **L**-प्रतिरूप नहीं देता। किंतु सार्विक प्रतिरूपों के लिए यह सत्य रहता है।

प्रतिज्ञप्ति 53.15. *$\mathcal{U}$ सार्विक प्रतिरूपों का वर्ग हो (प्रतिज्ञप्ति 50.14 देखें), और $\mathcal{U}_{\text{Fin}}$ सभी परिमित सार्विक प्रतिरूपों का वर्ग हो। तब कोई भी सूत्र φ, $\mathcal{U}$ में तभी मान्य है जब वह $\mathcal{U}_{\text{Fin}}$ में मान्य है।*

प्रमाण. परिमित सार्विक प्रतिरूप सार्विक प्रतिरूप हैं, अतः बाएँ-से-दाएँ दिशा तुच्छ है। दाएँ-से-बाएँ दिशा के लिए मान लें कि φ किसी सार्विक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ के किसी जगत w पर असत्य है। Γ में φ और उसके सभी उपसूत्र रखें; स्पष्टतः Γ परिमित है। $\mathfrak{M}$ का कोई निस्यंदन $\mathfrak{M}^*$ लें; तब प्रतिज्ञप्ति 53.12 से $\mathfrak{M}^*$ परिमित है, और प्रमेय 53.5 से φ, $\mathfrak{M}^*$ में $[w]$ पर असत्य है। केवल यह देखना शेष है कि $\mathfrak{M}^*$ भी सार्विक है: u और v दिए होने पर परिकल्पना से Ruv, और परिभाषा 53.4(2) से $R^*[u][v]$ भी। □

उपप्रमेय 53.16. **S5** *में परिमित प्रतिरूप गुण है।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 50.14 से, यदि φ किसी स्वपरावर्ती और यूक्लिडीय प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य है, तो वह किसी सार्विक प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य है। प्रतिज्ञप्ति 53.15 से वह किसी परिमित सार्विक प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य है (अर्थात् φ के उप-सूत्रों के समुच्चय के माध्यम से प्रतिरूप के निस्यंदन में)। प्रत्येक सार्विक प्रतिरूप स्वपरावर्ती और यूक्लिडीय भी है; अतः φ किसी परिमित स्वपरावर्ती यूक्लिडीय प्रतिरूप के किसी जगत पर सत्य है। □

53.7 S5 निर्णेय है

परिमित प्रतिरूप गुण हमें यह दिखाने का सरल उपाय देता है कि स्कीमाओं द्वारा दिए गए मोडल तर्कशास्त्रीय तंत्र *निर्णेय* हैं (अर्थात् यह निर्धारित करने की कोई संगणनीय प्रक्रिया है कि कोई सूत्र तंत्र में व्युत्पन्न है या नहीं)।

प्रमेय 53.17. **S5** *निर्णेय है।*

प्रमाण. φ दिया हो, और मान लें कि φ में आने वाले प्रतिज्ञप्ति चर p_1, ..., p_k में से हैं। चूँकि प्रत्येक n के लिए n जगतों वाले और p_1, ..., p_k को मूल्य देने वाले केवल परिमिततः अनेक प्रतिरूप हैं, हम किसी व्यवस्थित ढंग से प्रमाण उत्पन्न करके **S5** के सभी प्रमेयों को *समांतर रूप से* प्रगणित कर सकते हैं; साथ ही 1, 2, ... जगतों वाले सभी प्रतिरूपों को प्रगणित करके जाँच सकते हैं कि क्या φ ऐसे किसी प्रतिरूप के किसी जगत पर असत्य है। अंततः दोनों समांतर प्रक्रियाओं में से कोई एक उत्तर देगी, क्योंकि प्रमेय 52.17 और उपप्रमेय 53.16 से या तो φ व्युत्पन्न है, या किसी परिमित सार्विक प्रतिरूप में असत्य है। □

ऊपर का प्रमाण **S5** के लिए चलता है, क्योंकि सार्विक प्रतिरूपों के निस्यंदन स्वतः सार्विक होते हैं। स्वपरावर्तिता और सीरियलता के लिए भी यही सत्य है, किंतु अन्य गुणों के लिए अधिक कार्य आवश्यक है।

53.8 निस्यंदन और अभिगम्यता के गुण

जैसा कहा गया, सार्विक, सीरियल और स्वपरावर्ती प्रतिरूपों के निस्यंदन सदा क्रमशः सार्विक, सीरियल या स्वपरावर्ती भी होते हैं। किंतु किसी सममित या संक्रमणशील प्रतिरूप का हर निस्यंदन क्रमशः सममित या संक्रमणशील नहीं होता। फिर भी कुछ स्थितियों में निस्यंदन इस प्रकार परिभाषित करना संभव है कि यह सत्य हो। ऐसा करने के लिए हम स्थूलतम

निस्यंदन की परिभाषा की तरह आगे बढ़ते हैं, किंतु R^* की परिभाषा में अतिरिक्त शर्तें जोड़ते हैं। मान लें कि Γ उप-सूत्रों के अधीन संवृत है। प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ के जगतों u, v के बीच सारणी 53.1 के संबंधों $C_i(u, v)$ पर विचार करें। हम इन शर्तों के संयोजनों के आधार पर $R^*[u][v]$ परिभाषित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम अनुबंध करें कि $R^*[u][v]$ तभी जब शर्त $C_1(u, v)$ सत्य हो, तो ठीक स्थूलतम निस्यंदन मिलता है। यदि हम अनुबंध करें कि $R^*[u][v]$ तभी जब $C_1(u, v)$ और $C_2(u, v)$, दोनों सत्य हों, तो भिन्न निस्यंदन मिलता है। वह स्थूलतम से "सूक्ष्मतर" है, क्योंकि केवल $C_1(u, v)$ की अपेक्षा $C_1(u, v)$ और $C_2(u, v)$ को जगतों के कम युग्म संतुष्ट करते हैं।

$C_1(u, v)$:	यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$; और यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$;
$C_2(u, v)$:	यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$; और यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$;
$C_3(u, v)$:	यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\varphi$; और यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$;
$C_4(u, v)$:	यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$; और यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$;

तालिका 53.1: निस्यंदन परिभाषित करने के लिए संभव जगतों पर शर्तें।

प्रमेय 53.18. *$\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ कोई प्रतिरूप हो और Γ उप-सूत्रों के अधीन संवृत हो। W^* और V^* को परिभाषा 53.4 की तरह परिभाषित करें। तब:*

1. *मान लें $R^*[u][v]$ तभी जब $C_1(u, v) \wedge C_2(u, v)$। तब R^* सममित है; और यदि $\mathfrak{M}$ सममित है, तो $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ एक निस्यंदन है।*

2. *मान लें $R^*[u][v]$ तभी जब $C_1(u, v) \wedge C_3(u, v)$। तब R^* संक्रमणशील है; और यदि $\mathfrak{M}$ संक्रमणशील है, तो $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ एक निस्यंदन है।*

3. *मान लें $R^*[u][v]$ तभी जब $C_1(u, v) \wedge C_2(u, v) \wedge C_3(u, v) \wedge C_4(u, v)$। तब R^* सममित और संक्रमणशील है; और यदि $\mathfrak{M}$ सममित और संक्रमणशील है, तो $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ एक निस्यंदन है।*

4. *मान लें R^* को इस प्रकार परिभाषित किया गया है: $R^*[u][v]$ तभी जब $C_1(u, v) \wedge C_3(u, v) \wedge C_4(u, v)$। तब R^* संक्रमणशील और यूक्लिडीय है; और यदि $\mathfrak{M}$ संक्रमणशील और यूक्लिडीय है, तो $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ एक निस्यंदन है।*

प्रमाण. 1. R^* का सममित होना तुरंत मिलता है, क्योंकि $C_1(u, v) \Leftrightarrow C_2(v, u)$ और $C_2(u, v) \Leftrightarrow C_1(v, u)$। अतः यह दिखाना शेष है कि यदि $\mathfrak{M}$ सममित है, तो $\mathfrak{M}^*$, Γ के माध्यम से एक निस्यंदन है। शर्त $C_1(u, v)$ प्रत्याभूत करती है कि (2b) और (2c) of परिभाषा 53.4 संतुष्ट हैं। अतः हमें केवल परिभाषा 53.4(2a), अर्थात् Ruv से $R^*[u][v]$, सत्यापित करना है।

अतः Ruv मान लें। $R^*[u][v]$ दिखाने के लिए हमें $C_1(u, v)$ और $C_2(u, v)$ स्थापित करने हैं। C_1 के लिए: यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ भी (क्योंकि Ruv)। इसी प्रकार, यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, तो Ruv के कारण $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$। C_2 के लिए: यदि $\Box\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\varphi$, तो Ruv से सममिति द्वारा Rvu, अतः $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$। इसी प्रकार, यदि $\Diamond\varphi \in \Gamma$ और $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$, तो $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$ (क्योंकि सममिति से Rvu)।

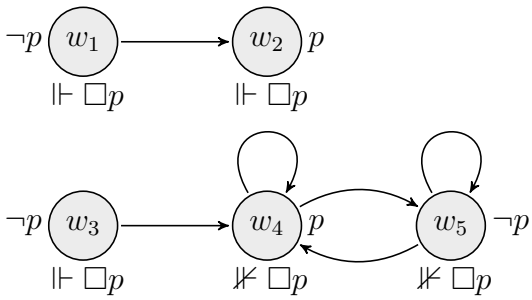
2. अभ्यास।

3. अभ्यास।

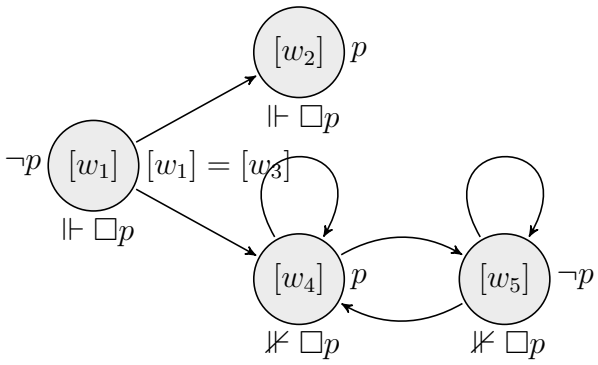
4. अभ्यास। $\Box$

53.9 यूक्लिडीय प्रतिरूपों के निस्यंदन

खंड 53.8 का दृष्टिकोण उन प्रतिरूपों के लिए काम नहीं करता जो यूक्लिडीय, या सीरियल और यूक्लिडीय हैं। आकृति 53.2 के ऊपर वाले प्रतिरूप पर विचार करें, जो यूक्लिडीय और सीरियल, दोनों है। $\Gamma = \{p, \Box p\}$ रखें। Γ के माध्यम से निस्यंदन लेते समय $[w_1] = [w_3]$, क्योंकि w_1 और w_3 ही वे जगत हैं जो Γ पर सहमत हैं। प्रत्येक निस्यंदन में $\mathfrak{M}$ से उत्तराधिकार में मिला तीर भी होगा, जैसा आकृति 53.3 में दर्शाया गया है। वह प्रतिरूप यूक्लिडीय नहीं है। इसके अतिरिक्त, हम उसे यूक्लिडीय बनाने के लिए उसमें तीर नहीं जोड़ सकते। हमें $[w_2]$ और $[w_4]$ के बीच दोनों दिशाओं में तीर जोड़ने होंगे, और फिर w_2 और w_5 के बीच भी। किंतु $\Box p$, w_2 पर सत्य होना चाहिए, जबकि p, w_5 पर असत्य है।



चित्र 53.2: एक सीरियल और यूक्लिडीय प्रतिरूप।



चित्र 53.3: आकृति 53.2 के प्रतिरूप का निस्यंदन।

विशेषतः, यूक्लिडीय निस्यंदन पाने के लिए उप-सूत्रों के अधीन संवृत मनमाने Γ के माध्यम से निस्यंदनों पर विचार करना पर्याप्त नहीं है। इसके स्थान पर हमें ऐसे समुच्चयों Γ पर विचार करना होगा जो *मोडलतः संवृत* हैं (परिभाषा 53.1 देखें)। वाक्यों के ऐसे समुच्चय अपरिमित होते हैं, इसलिए वे तुरंत परिमित प्रतिरूप गुण या संबद्ध तंत्र की निर्णेयता नहीं देते।

प्रमेय 53.19. *मान लें कि Γ मोडलतः संवृत है, $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$, और $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$, $\mathfrak{M}$ का स्थूलतम निस्यंदन है।*

1. *यदि $\mathfrak{M}$ सममित है, तो $\mathfrak{M}^*$ भी।*
2. *यदि $\mathfrak{M}$ संक्रमणशील है, तो $\mathfrak{M}^*$ भी।*
3. *यदि $\mathfrak{M}$ यूक्लिडीय है, तो $\mathfrak{M}^*$ भी।*

प्रमाण. 1. यदि $\mathfrak{M}^*$ स्थूलतम निस्यंदन है, तो परिभाषा से $R^*[u][v]$ तभी सत्य है जब $C_1(u, v)$। संक्रमणशीलता के लिए $C_1(u, v)$ और $C_1(v, w)$ मान लें; हमें $C_1(u, w)$ दिखाना है। मान लें $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\varphi$; तब $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box\Box\varphi$, क्योंकि 4 सभी संक्रमणशील प्रतिरूपों में मान्य है; संवृत्ति से $\Box\Box\varphi \in \Gamma$, अतः $C_1(u, v)$ से $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\varphi$ भी, और $C_1(v, w)$ से $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ भी। मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$; तब $C_1(v, w)$ से $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$, क्योंकि

मोडल संवृत्ति से $\Diamond\varphi \in \Gamma$। $C_1(u, v)$ से $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\Diamond\varphi$ मिलता है, क्योंकि मोडल संवृत्ति से $\Diamond\Diamond\varphi \in \Gamma$। चूँकि $4_\Diamond$ सभी संक्रमणशील प्रतिरूपों में मान्य है, $\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$।

2. अभ्यास। इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि 5 और $5_\Diamond$, दोनों सभी यूक्लिडीय प्रतिरूपों में मान्य हैं।

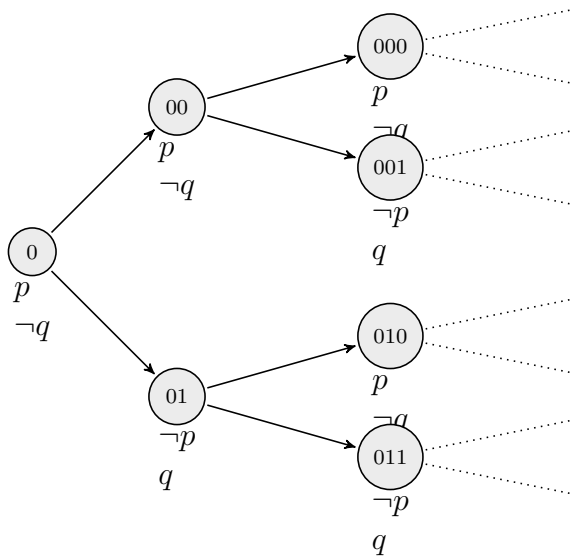
3. अभ्यास। इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि B और $B_\Diamond$, सभी सममित प्रतिरूपों में मान्य हैं। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 53.1. प्रमेय 53.5 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 53.2. प्रतिज्ञप्ति 53.8 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 53.3. निम्न प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ पर विचार करें, जहाँ $W = \{0\sigma : \sigma \in \mathbb{B}^*\}$, अर्थात् 0 से आरंभ होने वाले 0 और 1 के अनुक्रमों का समुच्चय; $R\sigma\sigma'$ तभी जब $\sigma' = \sigma 0$ या $\sigma' = \sigma 1$; और $V(p) = \{\sigma 0 : \sigma \in \mathbb{B}^*\}$ तथा $V(q) = \{\sigma 1 : \sigma \in \mathbb{B}^* \setminus \{1\}\}$। इसका चित्र यह है:



प्रत्येक w के लिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$।

$\Gamma, \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ के उप-सूत्रों का समुच्चय हो। W^* और V^* क्या हैं? $\mathfrak{M}$ के सूक्ष्मतम निस्यंदन का अभिगम्यता संबंध क्या है? स्थूलतम का?

प्रश्न 53.4. दिखाइए कि किसी सीरियल या स्वपरावर्ती प्रतिरूप का प्रत्येक निस्यंदन भी क्रमशः सीरियल या स्वपरावर्ती है।

प्रश्न 53.5. किसी सममित (संक्रमणशील, यूक्लिडीय) प्रतिरूप का असममित (असंक्रमणशील, गैर-यूक्लिडीय) निस्यंदन खोजिए।

प्रश्न 53.6. प्रमेय 53.18 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 53.7. प्रमेय 53.19 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 54

मोडल सत्य-वृक्ष

मोडल तर्कशास्त्र के उपसर्गयुक्त टैब्लो पर प्रारूप अध्याय। इसमें और उदाहरण, पूर्णता-प्रमाण, तथा संवृत टैब्लो की असफल खोजों से प्रतिप्रतिरूप खोजने की विधि पर चर्चा आवश्यक है।

54.1 परिचय

सत्य-वृक्ष, चिह्नित सूत्रों के कुछ (नीचे की ओर शाखित) वृक्ष हैं; अर्थात् सत्यता-मूल्य चिह्न ($\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$) और किसी वाक्य से बने युग्म

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ या } \mathbb{F}\,\varphi.$$

सत्य-वृक्ष कुछ *मान्यताओं* से आरंभ होता है। प्रत्येक अगला चिह्नित सूत्र किसी अनुमान-नियम को लगाकर उत्पन्न होता है। कुछ अनुमान-नियम वृक्ष के किसी सिरे पर एक या अधिक चिह्नित सूत्र जोड़ते हैं; अन्य दो नए सिरे जोड़ते हैं, जिससे दो शाखाएँ बनती हैं। नियम ऐसे चिह्नित सूत्र देते हैं जिनका सूत्र उस चिह्नित सूत्र के सूत्र से कम जटिल होता है जिस पर नियम लगाया गया था। जब किसी शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$, दोनों हों, तो हम उस शाखा को *संवृत* कहते हैं। यदि किसी सत्य-वृक्ष की हर शाखा संवृत हो, तो पूरा सत्य-वृक्ष संवृत है। कोई संवृत सत्य-वृक्ष ऐसी व्युत्पत्ति बनाता है जो दिखाती है कि टैब्लो आरंभ करने के लिए प्रयुक्त चिह्नित सूत्रों का समुच्चय असंतोषणीय है। इससे $\vdash$ संबंध परिभाषित किया जा सकता है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ हो ऐसा कि इन मान्यताओं के लिए कोई संवृत सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

मोडल तर्कशास्त्रों के लिए हमें चिह्नित सूत्र की धारणा का विस्तार भी करना है और ऐसे नियम भी जोड़ने हैं जो $\Box$ और $\Diamond$ो समेटें। किसी चिह्न ($\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$) के अतिरिक्त, मोडल सत्य-वृक्ष के सूत्रों में *उपसर्ग* σ भी होते हैं। उपसर्ग धन पूर्णांकों के अशून्य अनुक्रम हैं, अर्थात् $\sigma \in (\mathbb{Z}^+)^* \setminus \{\Lambda\}$। हम ऐसे उपसर्गों को आसपास के $\langle\ \rangle$ के बिना लिखते हैं और अलग-अलग अवयवों को अल्पविराम के स्थान पर बिंदुओं से अलग करते हैं। यदि σ कोई उपसर्ग है, तो $\sigma.n$, $\sigma \frown \langle n \rangle$ है; जैसे यदि $\sigma = 1.2.1$, तो $\sigma.3$, $1.2.1.3$ है। अतः उदाहरणार्थ,

$$1.2\,\mathbb{T}\,\Box\varphi \to \varphi$$

एक *उपसर्गयुक्त चिह्नित सूत्र* है (या संक्षेप में केवल *उपसर्गयुक्त सूत्र*)।

सहजतः, उपसर्ग किसी प्रतिरूप में ऐसे जगत को नाम देता है जो किसी सत्य-वृक्ष की शाखा के सूत्रों को संतुष्ट कर सकता है; और यदि σ किसी जगत को नाम देता है, तो $\sigma.n$, σ द्वारा नामित जगत से अभिगम्य किसी जगत को नाम देता है।

$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi}\ \neg\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi}\ \neg\mathbb{F}$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\\ \sigma\,\mathbb{T}\,\psi\end{array}}\ \wedge\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\wedge\psi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \quad \mid \quad \sigma\,\mathbb{F}\,\psi}\ \wedge\mathbb{F}$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\vee\psi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \quad \mid \quad \sigma\,\mathbb{T}\,\psi}\ \vee\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\\ \sigma\,\mathbb{F}\,\psi\end{array}}\ \vee\mathbb{F}$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\to\psi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \quad \mid \quad \sigma\,\mathbb{T}\,\psi}\ \to\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\to\psi}{\begin{array}{c}\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\\ \sigma\,\mathbb{F}\,\psi\end{array}}\ \to\mathbb{F}$

तालिका 54.1: प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों के उपसर्गयुक्त सत्य-वृक्ष नियम

54.2 K के नियम

सामान्य प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों के नियम सामान्य प्रतिज्ञप्तिक चिह्नित सत्य-वृक्ष के नियमों जैसे ही हैं, बस उनमें उपसर्ग जोड़े गए हैं। प्रत्येक स्थिति में किसी चिह्नित सूत्र $\sigma\,S\,\varphi$ पर लगाया गया नियम ऐसे नए सूत्र उत्पन्न करता है जिनका उपसर्ग भी σ है। यह सहजतः स्पष्ट होना चाहिए: जैसे यदि $\varphi\wedge\psi$, σ (द्वारा नामित जगत) पर सत्य है, तो φ और ψ, σ पर सत्य हैं (किसी अन्य जगत पर नहीं)। हम प्रतिज्ञप्तिक नियमों को सारणी 54.1 में एकत्र करते हैं।

संवृत्ति-शर्त सामान्य सत्य-वृक्ष जैसी ही है, यद्यपि हम अपेक्षा करते हैं कि केवल सूत्र ही नहीं, उपसर्ग भी मेल खाएँ। अतः कोई शाखा संवृत है यदि उसमें

$$\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \quad \text{और} \quad \sigma\,\mathbb{F}\,\varphi$$

किसी उपसर्ग σ और सूत्र φ के लिए, दोनों हों।

मान्यताएँ स्थापित करने के नियम भी सामान्य सत्य-वृक्ष जैसे हैं, बस मान्यताओं के लिए हम सदा उपसर्ग 1 का उपयोग करते हैं। (हम कौन-सा उपसर्ग लेते हैं, इससे अंतर नहीं पड़ता, बशर्ते सभी मान्यताओं के लिए वही हो।) अतः, उदाहरणार्थ, हम कहते हैं कि

$$\psi_1,\ldots,\psi_n \vdash \varphi$$

तभी जब इन मान्यताओं के लिए कोई संवृत टैब्लो हो:

$$1\,\mathbb{T}\,\psi_1,\ldots,1\,\mathbb{T}\,\psi_n,1\,\mathbb{F}\,\varphi.$$

मोडल संकारकों $\Box$ और $\Diamond$ के लिए, उपसर्ग σ वाले किसी सूत्र पर लगाए गए नियम के निष्कर्ष का उपसर्ग $\sigma.n$ है। किंतु कौन-सा n अनुमत है, यह इस पर निर्भर करता है कि चिह्न $\mathbb{T}$ है या $\mathbb{F}$।

$\Box\mathbb{T}$ नियम, $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi$ वाली शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi$ से बढ़ाता है। इसी प्रकार, $\Diamond\mathbb{F}$ नियम, $\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi$ वाली शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\varphi$ से बढ़ाता है। इन्हें केवल ऐसे उपसर्ग $\sigma.n$ के लिए लगाया जा सकता है जो उस शाखा पर *पहले से* आता है जहाँ नियम लगाया जा रहा है। ऐसे उपसर्ग को (उस शाखा पर) "प्रयुक्त" कहें।

$\Box\mathbb{F}$ नियम, $\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\varphi$ वाली शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\varphi$ से बढ़ाता है। इसी प्रकार, $\Diamond\mathbb{T}$ नियम, $\sigma\,\mathbb{T}\,\Diamond\varphi$ वाली शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi$ से बढ़ाता है। किंतु इन नियमों को केवल ऐसे उपसर्ग $\sigma.n$ के लिए लगाया जा सकता है जो उस शाखा पर पहले से *नहीं* आता जहाँ नियम लगाया जा रहा है। ऐसे उपसर्गों को (उस शाखा के लिए) "नया" कहते हैं।

$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi}\,\Box\mathbb{T}$ $\sigma.n$ प्रयुक्त है	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\varphi}\,\Box\mathbb{F}$ $\sigma.n$ नया है
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\Diamond\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi}\,\Diamond\mathbb{T}$ $\sigma.n$ नया है	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\varphi}\,\Diamond\mathbb{F}$ $\sigma.n$ प्रयुक्त है

तालिका 54.2: K के मोडल नियम।

नियम सारणी 54.2 में दिए गए हैं।

$\Box\mathbb{T}$ का उपसर्ग प्रयुक्त होना चाहिए—इस प्रतिबंध की अपेक्षा आवश्यक है, क्योंकि अन्यथा हम निम्न को संवृत सत्य-वृक्ष गिनेंगे:

1.	$1\,\mathbb{T}\;\;\Box\varphi$	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{F}\;\;\Diamond\varphi$	मान्यता
3.	$1.1\,\mathbb{T}\;\;\varphi$	$\Box\mathbb{T}\,1$
4.	$1.1\,\mathbb{F}\;\;\varphi$	$\Diamond\mathbb{F}\,2$
	$\otimes$	

किंतु $\Box\varphi \not\models \Diamond\varphi$, इसलिए हमारा प्रमाण-तंत्र अयथार्थ होगा। इसी प्रकार $\Diamond\varphi \not\models \Box\varphi$, किंतु इस प्रतिबंध के बिना कि $\Box\mathbb{F}$ का उपसर्ग नया होना चाहिए, यह संवृत टैब्लो होगा:

1.	$1\,\mathbb{T}\;\;\Diamond\varphi$	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{F}\;\;\Box\varphi$	मान्यता
3.	$1.1\,\mathbb{T}\;\;\varphi$	$\Diamond\mathbb{T}\,1$
4.	$1.1\,\mathbb{F}\;\;\varphi$	$\Box\mathbb{F}\,2$
	$\otimes$	

54.3 K के लिए सत्य-वृक्ष

उदाहरण 54.1. हम ऐसा संवृत टैब्लो देते हैं जो $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ दिखाता है।

1.	$1\,\mathbb{F}\ \ (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$		मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\ \ \Box\varphi \wedge \Box\psi$		$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Box(\varphi \wedge \psi)$		$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1\,\mathbb{T}\ \ \Box\varphi$		$\wedge\mathbb{T}\,2$
5.	$1\,\mathbb{T}\ \ \Box\psi$		$\wedge\mathbb{T}\,2$
6.	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \varphi \wedge \psi$		$\Box\mathbb{F}\,3$
7.	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \varphi$	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \psi$	$\wedge\mathbb{F}\,6$
8.	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \varphi$	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \psi$	$\Box\mathbb{T}\,4$; $\Box\mathbb{T}\,5$
	$\otimes$	$\otimes$	

उदाहरण 54.2. हम ऐसा संवृत टैब्लो देते हैं जो $\vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ दिखाता है:

1.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$		मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\ \ \Diamond(\varphi \vee \psi)$		$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$		$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond\varphi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond\psi$		$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \varphi \vee \psi$		$\Diamond\mathbb{T}\,2$
7.	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \varphi$	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \psi$	$\vee\mathbb{T}\,6$
8.	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \varphi$	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \psi$	$\Diamond\mathbb{F}\,4$; $\Diamond\mathbb{F}\,5$
	$\otimes$	$\otimes$	

54.4 K के लिए यथार्थता

> यह यथार्थता-प्रमाण शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के यथार्थता-प्रमाण का पुनः उपयोग करता है, अर्थात् सब कुछ आरंभ से सिद्ध करता है। यदि आपको स्वयंपूर्ण यथार्थता-प्रमाण चाहिए, तो यह उचित है। यदि आप सामान्य टैब्लो के लिए यथार्थता पहले देख चुके हैं, तो यह पुनरावृत्तिपूर्ण होगा। योजना है कि स्वयंपूर्ण संस्करण और गैर-मोडल स्थिति पर आधारित संस्करण के बीच चयन संभव बनाया जाए।

उपसर्गयुक्त सत्य-वृक्ष की यथार्थता दिखाने के लिए हमें दिखाना है कि यदि

$$1\,\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, 1\,\mathbb{T}\,\psi_n, 1\,\mathbb{F}\,\varphi$$

का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है, तो $\psi_1, \ldots, \psi_n \vDash \varphi$। प्रतिधनात्मक सिद्ध करना सरल है: यदि किसी $\mathfrak{M}$ और जगत w के लिए सभी $i = 1$, ..., n हेतु $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi_i$, किंतु $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, तो कोई सत्य-वृक्ष संवृत नहीं हो सकता। ऐसा प्रतिप्रतिरूप दिखाता है कि सत्य-वृक्ष की आरंभिक मान्यताएँ संतोषणीय हैं। प्रमाण की रणनीति यह दिखाना है कि जब भी किसी सत्य-वृक्ष की शाखा के सभी उपसर्गयुक्त सूत्र संतोषणीय हों, तब नियम का कोई भी अनुप्रयोग कम-से-कम एक ऐसी विस्तृत शाखा देता है जो संतोषणीय भी है। चूँकि संवृत शाखाएँ असंतोषणीय हैं, उपसर्गयुक्त सूत्रों के किसी संतोषणीय समुच्चय के हर सत्य-वृक्ष में कम-से-कम एक खुली शाखा होनी चाहिए।

इस रणनीति को मोडल स्थिति में लगाने के लिए हमें "संतोषणीय" की अपनी परिभाषा को मोडल प्रतिरूपों और उपसर्गों तक विस्तृत करना होगा। ऐसा कर लेने पर प्रमाण सीधा है।

परिभाषा 54.3. P उपसर्गों का कोई समुच्चय हो, अर्थात् $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^* \setminus \{\Lambda\}$, और $\mathfrak{M}$ कोई प्रतिरूप हो। कोई फलन $f\colon P \to W$, $\mathfrak{M}$ में P की *व्याख्या* है यदि जब भी σ और $\sigma.n$, दोनों P में हों, तब $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$।

उपसर्गों P की किसी व्याख्या के सापेक्ष हम परिभाषित कर सकते हैं:

1. $\mathfrak{M}$, $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi$ को तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$.

2. $\mathfrak{M}$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi$ को तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \varphi$.

परिभाषा 54.4. Γ उपसर्गयुक्त सूत्रों का समुच्चय हो और $P(\Gamma)$ उसमें आने वाले उपसर्गों का समुच्चय हो। यदि f, $\mathfrak{M}$ में $P(\Gamma)$ की कोई व्याख्या है, तो हम कहते हैं कि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Γ को संतुष्ट करता है, $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, यदि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Γ के प्रत्येक उपसर्गयुक्त सूत्र को संतुष्ट करता हो। Γ *संतोषणीय* तभी है जब ऐसा कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की व्याख्या f हो कि $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$।

प्रतिज्ञप्ति 54.5. *यदि Γ में किसी सूत्र φ और उपसर्ग σ के लिए $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi$, दोनों हैं, तो Γ असंतोषणीय है।*

प्रमाण. ऐसा कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की व्याख्या f नहीं हो सकते कि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$ और $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \varphi$, दोनों हों। □

प्रमेय 54.6 (यथार्थता). *यदि Γ का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है, तो Γ असंतोषणीय है।*

प्रमाण. हम किसी सत्य-वृक्ष की शाखा को संतोषणीय तभी कहते हैं जब उस पर स्थित चिह्नित सूत्रों का समुच्चय संतोषणीय हो; और किसी सत्य-वृक्ष को संतोषणीय कहें यदि उसमें कम-से-कम एक संतोषणीय शाखा हो।

हम निम्न दिखाते हैं: किसी संतोषणीय सत्य-वृक्ष को अनुमान-नियमों में से किसी एक से विस्तृत करने पर सदा संतोषणीय सत्य-वृक्ष मिलता है। इससे प्रमेय सिद्ध होगा: कोई भी संवृत सत्य-वृक्ष, केवल Γ की मान्यताओं वाले सत्य-वृक्ष पर अनुमान-नियम लगाकर मिलता है। अतः यदि Γ संतोषणीय होता, तो उसका हर सत्य-वृक्ष संतोषणीय होता। किंतु कोई संवृत सत्य-वृक्ष स्पष्टतः संतोषणीय नहीं है, क्योंकि उसकी सभी शाखाएँ संवृत हैं और संवृत शाखाएँ असंतोषणीय हैं।

मान लें हमारे पास कोई संतोषणीय सत्य-वृक्ष है, अर्थात् कम-से-कम एक संतोषणीय शाखा वाला सत्य-वृक्ष। अनुमान-नियम लगाने पर या तो किसी शाखा में चिह्नित सूत्र जुड़ते हैं, या शाखा दो भागों में विभक्त होती है। यदि सत्य-वृक्ष में ऐसी संतोषणीय शाखा है जिसे विचाराधीन नियम-अनुप्रयोग विस्तृत नहीं करता, तो वह विस्तृत सत्य-वृक्ष में संतोषणीय शाखा बनी रहती है, अतः विस्तृत टैब्लो संतोषणीय है। इसलिए हमें केवल उस स्थिति पर विचार करना है जहाँ नियम किसी संतोषणीय शाखा पर लगाया जाता है।

उस शाखा के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ हो, और $\sigma\,S\,\varphi \in \Gamma$ वह चिह्नित सूत्र हो जिस पर नियम लगाया जाता है। यदि नियम शाखा को विभक्त नहीं करता, तो हमें दिखाना है कि विस्तृत शाखा, अर्थात् नियम के निष्कर्षों सहित Γ, अब भी संतोषणीय है। यदि नियम शाखा को विभक्त करता है, तो हमें दिखाना है कि उससे मिली दो शाखाओं में कम-से-कम एक संतोषणीय है। पहले हम केवल एक आधार-वाक्य वाले संभावित अनुमानों पर विचार करते हैं।

1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। तब विस्तृत शाखा में चिह्नित सूत्र $\Gamma \cup \{\sigma\,\mathbb{F}\,\psi\}$ हैं। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$। विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \neg\psi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi$, अर्थात् $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर $\neg\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर $\wedge\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है, जिससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्र, $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$, मिलते हैं। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$, दोनों को संतुष्ट करता है।

4. शाखा को $\mathbb{F}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर $\vee\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

5. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \to \chi \in \Gamma$ पर $\to\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। इससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्र, $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$, मिलते हैं। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi \to \chi$। तब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$, दोनों को संतुष्ट करते हैं।

6. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर $\Box\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर किसी $\sigma.n \in P(\Gamma)$ के लिए नया चिह्नित सूत्र $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\psi$ मिलता है (क्योंकि $\sigma.n$ प्रयुक्त होना चाहिए)। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$। चूँकि f उपसर्गों की व्याख्या है और σ, $\sigma.n$, दोनों $P(\Gamma)$ में हैं, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \Vdash \psi$, अर्थात् $\mathfrak{M}, f$, $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

7. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर $\Box\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे नया चिह्नित सूत्र $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\varphi$ मिलता है, जहाँ $\sigma.n$ शाखा पर नया उपसर्ग है, अर्थात् $\sigma.n \notin P(\Gamma)$। चूँकि Γ संतोषणीय है, ऐसी कोई $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की व्याख्या f है कि $\mathfrak{M}, f \vDash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Box\psi$। हमें दिखाना है कि $\Gamma \cup \{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi\}$ संतोषणीय है। इसके लिए हम $P(\Gamma) \cup \{\sigma.n\}$ की व्याख्या इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

   चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Box\psi$, ऐसा $w \in W$ है कि $Rf(\sigma)w$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। f' को f जैसा रखें, बस $f'(\sigma.n) = w$। चूँकि $f'(\sigma) = f(\sigma)$ और $Rf(\sigma)w$, इसलिए $Rf'(\sigma)f'(\sigma.n)$; अतः f', $P(\Gamma) \cup \{\sigma.n\}$ की व्याख्या है। स्पष्टतः $\mathfrak{M}, f'(\sigma.n) \nVdash \psi$। सभी उपसर्गों $\sigma' \in P(\Gamma)$ के लिए $f(\sigma') = f'(\sigma')$ होने से $\mathfrak{M}, f' \Vdash \Gamma$। अतः $\mathfrak{M}, f'$, $\Gamma \cup \{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi\}$ को संतुष्ट करते हैं।

अब दो आधार-वाक्यों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें।

1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर $\wedge\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ से आगे जाने वाली बाईं शाखा और $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$ से आगे जाने वाली दाईं शाखा। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \chi$। पहली स्थिति में $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं, अर्थात् बाईं शाखा संतोषणीय है। दूसरी स्थिति में $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$ को संतुष्ट करते हैं, अर्थात् दाईं शाखा संतोषणीय है।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर $\vee\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \to \chi \in \Gamma$ पर $\to\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास। $\Box$

उपप्रमेय 54.7. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किन्हीं ψ_1, ..., $\psi_n \in \Gamma$ के लिए $\Delta = \{1\,\mathbb{F}\,\varphi, 1\,\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, 1\,\mathbb{T}\,\psi_n\}$ का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है। हम दिखाना चाहते हैं कि $\Gamma \vDash \varphi$। मान लें ऐसा नहीं है; तब किसी $\mathfrak{M}$ और w के लिए $i = 1$, ..., n हेतु $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi_i$, किंतु $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$। $f(1) = w$ रखें; तब f, $\mathfrak{M}$ में $P(\Delta)$ की व्याख्या है, और $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Δ को संतुष्ट करता है। किंतु प्रमेय 54.6 से Δ असंतोषणीय है, क्योंकि उसका संवृत सत्य-वृक्ष है; यह विरोधाभास है। अतः अंततः $\Gamma \vdash \varphi$ होना ही चाहिए। $\Box$

उपप्रमेय 54.8. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सभी प्रतिरूपों में सत्य है।*

54.5 अन्य अभिगम्यता संबंधों के नियम

विशेष अभिगम्यता संबंधों द्वारा निर्धारित तर्कशास्त्रों पर विचार करने के लिए हम सारणी 54.3 के अतिरिक्त नियम लेते हैं।

इन नियमों को जोड़ने से ऐसे तंत्र मिलते हैं जो सारणी 54.4 में दिए तर्कशास्त्रों के लिए यथार्थ और पूर्ण हैं।

उदाहरण 54.9. हम ऐसा संवृत टैब्लो देते हैं जो **S5** $\vdash 5$, अर्थात् $\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, दिखाता है।

$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi}$ T$\Box$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi}$ T$\Diamond$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\Diamond\varphi}$ D$\Box$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\varphi}$ D$\Diamond$
$\dfrac{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi}$ B$\Box$	$\dfrac{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi}$ B$\Diamond$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}$ 4$\Box$ $\sigma.n$ प्रयुक्त है	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}$ 4$\Diamond$ $\sigma.n$ प्रयुक्त है
$\dfrac{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}$ 4r$\Box$	$\dfrac{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}$ 4r$\Diamond$

तालिका 54.3: और मोडल नियम।

तर्कशास्त्र	R है ...	नियम
T = **KT**	स्वपरावर्ती	T$\Box$, T$\Diamond$
D = **KD**	सीरियल	D$\Box$, D$\Diamond$
K4	संक्रमणशील	4$\Box$, 4$\Diamond$
B = **KTB**	स्वपरावर्ती, सममित	T$\Box$, T$\Diamond$ B$\Box$, B$\Diamond$
S4 = **KT4**	स्वपरावर्ती, संक्रमणशील	T$\Box$, T$\Diamond$, 4$\Box$, 4$\Diamond$
S5 = **KT4B**	स्वपरावर्ती, संक्रमणशील, यूक्लिडीय	T$\Box$, T$\Diamond$, 4$\Box$, 4$\Diamond$, 4r$\Box$, 4r$\Diamond$

तालिका 54.4: विभिन्न मोडल तर्कशास्त्रों के सत्य-वृक्ष नियम।

1.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\ \ \Box\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Box\Diamond\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond\varphi$	$\Box\mathbb{F}\,3$
5.	$1\,\mathbb{F}\ \ \Diamond\varphi$	$4\mathrm{r}\Diamond\ 4$
6.	$1.1\,\mathbb{F}\ \ \varphi$	$\Diamond\mathbb{F}\,5$
7.	$1.1\,\mathbb{T}\ \ \varphi$	$\Box\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

54.6 अतिरिक्त नियमों के लिए यथार्थता

हम किसी नियम को प्रतिरूपों के किसी वर्ग के लिए यथार्थ कहते हैं यदि, जब भी किसी सत्य-वृक्ष की कोई शाखा उस वर्ग के किसी प्रतिरूप में संतोषणीय हो, तब नियम लगाने से मिली शाखा भी उस वर्ग के किसी प्रतिरूप में संतोषणीय हो।

प्रतिज्ञप्ति 54.10. T$\Box$ *और* T$\Diamond$ *स्वपरावर्ती प्रतिरूपों के लिए यथार्थ हैं।*

प्रमाण. 1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर T$\Box$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$। चूँकि R स्वपरावर्ती है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma)$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi$, अर्थात् $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi \in \Gamma$ पर T$\Diamond$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Diamond\psi$। चूँकि R स्वपरावर्ती है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma)$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi$, अर्थात् $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 54.11. D$\Box$ *और* D$\Diamond$ *सीरियल प्रतिरूपों के लिए यथार्थ हैं।*

प्रमाण. 1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर D$\Box$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\Diamond\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$। चूँकि R सीरियल है, ऐसा $w \in W$ है कि $Rf(\sigma)w$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$, अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Diamond\psi$। इसलिए $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{T}\,\Diamond\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi \in \Gamma$ पर D$\Diamond$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Diamond\psi$। चूँकि R सीरियल है, ऐसा $w \in W$ है कि $Rf(\sigma)w$। तब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Box\psi$। इसलिए $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\Box\psi$ को संतुष्ट करते हैं। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 54.12. B$\Box$ *और* B$\Diamond$ *सममित प्रतिरूपों के लिए यथार्थ हैं।*

प्रमाण. 1. शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर B$\Box$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \Vdash \Box\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। चूँकि R सममित है, $Rf(\sigma.n)f(\sigma)$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \Vdash \Box\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

2. शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi \in \Gamma$ पर B$\Diamond$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \nVdash \Diamond\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। चूँकि R सममित है, $Rf(\sigma.n)f(\sigma)$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \nVdash \Diamond\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करते हैं। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 54.13. *$4\Box$ और $4\Diamond$ संक्रमणशील प्रतिरूपों के लिए यथार्थ हैं।*

प्रमाण. 1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर $4\Box$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है और $\sigma.n$ प्रयुक्त होना चाहिए, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। अब w कोई ऐसा जगत हो कि $Rf(\sigma.n)w$। चूँकि R संक्रमणशील है, $Rf(\sigma)w$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \Vdash \Box\psi$, और $\mathfrak{M}, f, \sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi \in \Gamma$ पर $4\Diamond$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Diamond\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है और $\sigma.n$ प्रयुक्त होना चाहिए, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। अब w कोई ऐसा जगत हो कि $Rf(\sigma.n)w$। चूँकि R संक्रमणशील है, $Rf(\sigma)w$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Diamond\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \nVdash \Diamond\psi$, और $\mathfrak{M}, f, \sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi$ को संतुष्ट करते हैं। $\Box$

प्रतिज्ञप्ति 54.14. *$4\mathrm{r}\Box$ और $4\mathrm{r}\Diamond$ यूक्लिडीय प्रतिरूपों के लिए यथार्थ हैं।*

प्रमाण. 1. शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box\psi \in \Gamma$ पर $4\mathrm{r}\Box$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \Vdash \Box\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। अब w कोई ऐसा जगत हो कि $Rf(\sigma)w$। चूँकि R यूक्लिडीय है, $Rf(\sigma.n)w$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma).n \Vdash \Box\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \Box\psi$, और $\mathfrak{M}, f, \sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi$ को संतुष्ट करते हैं।

2. शाखा को $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi \in \Gamma$ पर $4\mathrm{r}\Diamond$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: इससे शाखा पर नया चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box\psi$ मिलता है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma.n) \nVdash \Diamond\psi$। चूँकि f, शाखा के उपसर्गों की $\mathfrak{M}$ में व्याख्या है, हम जानते हैं कि $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$। अब w कोई ऐसा जगत हो कि $Rf(\sigma)w$। चूँकि R यूक्लिडीय है, $Rf(\sigma.n)w$। चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma).n \nVdash \Diamond\psi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \Diamond\psi$, और $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\Diamond\psi$ को संतुष्ट करते हैं। $\Box$

उपप्रमेय 54.15. *सारणी 54.4 में दिए सत्य-वृक्ष तंत्र अपने-अपने प्रतिरूप-वर्गों के लिए यथार्थ हैं।*

54.7 S5 के लिए सरल सत्य-वृक्ष

S5 सार्विक प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष यथार्थ और पूर्ण है, अर्थात् ऐसे प्रतिरूपों के वर्ग के सापेक्ष जिनमें प्रत्येक जगत प्रत्येक जगत से अभिगम्य है। सार्विक प्रतिरूपों में अभिगम्यता संबंध से अंतर नहीं पड़ता: "ऐसा जगत w है जहाँ $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$" तभी सत्य है जब ऐसा w है जो u से अभिगम्य है। अतः **S5** में हम प्रतिरूप को केवल जगतों के समुच्चय और मूल्यांकन V के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। इससे संकेत मिलता है कि हम सत्य-वृक्ष नियमों को भी सरल कर सकते हैं। सामान्य स्थिति में हम धन पूर्णांकों के अनुक्रमों को उपसर्ग लेते हैं, ताकि हिसाब रख सकें कि कौन-से उपसर्ग ऐसे जगतों को नाम देते हैं जो दूसरों से अभिगम्य हैं: $\sigma.n$, σ से अभिगम्य जगत को नाम देता है। किंतु **S5** में कोई भी जगत किसी भी जगत से अभिगम्य है, अतः ऐसा हिसाब रखने की आवश्यकता नहीं। इसके स्थान पर हम धन पूर्णांकों को उपसर्ग बना सकते हैं। सरल किए गए नियम सारणी 54.5 में दिए गए हैं।

उदाहरण 54.16. हम ऐसा सरल किया गया संवृत टैब्लो देते हैं जो **S5** $\vdash 5$, अर्थात् $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, दिखाता है।

$\dfrac{n\,\mathbb{T}\,\Box\varphi}{m\,\mathbb{T}\,\varphi}\,\Box\mathbb{T}$ m प्रयुक्त है	$\dfrac{n\,\mathbb{F}\,\Box\varphi}{m\,\mathbb{F}\,\varphi}\,\Box\mathbb{F}$ m नया है
$\dfrac{n\,\mathbb{T}\,\Diamond\varphi}{m\,\mathbb{T}\,\varphi}\,\Diamond\mathbb{T}$ m नया है	$\dfrac{n\,\mathbb{F}\,\Diamond\varphi}{m\,\mathbb{F}\,\varphi}\,\Diamond\mathbb{F}$ m प्रयुक्त है

तालिका 54.5: **S5** के सरल किए गए नियम।

1.	$1\,\mathbb{F}\quad \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\quad \Diamond\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\quad \Box\Diamond\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$2\,\mathbb{F}\quad \Diamond\varphi$	$\Box\mathbb{F}\,3$
5.	$3\,\mathbb{T}\quad \varphi$	$\Diamond\mathbb{T}\,2$
6.	$3\,\mathbb{F}\quad \varphi$	$\Diamond\mathbb{F}\,4$
	$\otimes$	

54.8 K के लिए पूर्णता

सत्य-वृक्ष की विधि की पूर्णता दिखाने के लिए हमें दिखाना है कि जब भी $\Gamma \vdash \varphi$ दिखाने वाला कोई संवृत सत्य-वृक्ष न हो, तब $\Gamma \nvDash \varphi$, अर्थात् कोई प्रतिप्रतिरूप हो। किंतु "कोई संवृत सत्य-वृक्ष नहीं है" का अर्थ है कि उसे बनाने का हर संभावित प्रयास संवृत होने में विफल होना चाहिए। युक्ति यह देखना है कि यदि ऐसा हर ढंग संवृत होने में विफल हो, तो कोई विशिष्ट, *व्यवस्थित और समग्र* ढंग भी विफल होगा। और यदि कोई संवृत सत्य-वृक्ष विद्यमान हो, तो यह व्यवस्थित और समग्र ढंग संवृत हो जाएगा। एक ही टैब्लो की खुली शाखाओं में प्रतिप्रतिरूप परिभाषित करने के लिए आवश्यक सारी सूचना होगी। इस टैब्लो की किसी खुली शाखा से मिला प्रतिप्रतिरूप उस शाखा पर प्रयुक्त सभी उपसर्गों को जगत बनाएगा, और कोई प्रतिज्ञप्ति चर p, σ पर तभी सत्य होगा जब $\sigma\,\mathbb{T}\,p$ शाखा पर आता हो।

परिभाषा 54.17. किसी सत्य-वृक्ष की शाखा *पूर्ण* कहलाती है यदि जब भी उसमें ऐसा उपसर्गयुक्त सूत्र $\sigma\,S\,\varphi$ हो जिस पर कोई नियम लगाया जा सकता है, तब उसमें यह भी हो:

1. प्रतिज्ञप्तिक स्तंभन-नियमों की स्थिति में नियम के संबद्ध निष्कर्ष बने उपसर्गयुक्त सूत्र;
2. प्रतिज्ञप्तिक शाखन-नियमों की स्थिति में संबद्ध निष्कर्ष सूत्रों में से कोई एक;
3. नया उपसर्ग अपेक्षित करने वाले मोडल नियमों की स्थिति में कम-से-कम एक संभावित निष्कर्ष;
4. प्रयुक्त उपसर्ग अपेक्षित करने वाले मोडल नियमों की स्थिति में शाखा पर आने वाले प्रत्येक उपसर्ग के लिए संबद्ध निष्कर्ष।

उदाहरणार्थ, किसी पूर्ण शाखा में जब भी $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ हो, तब $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$, दोनों होते हैं। यदि उसमें $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \vee \chi$ हो, तो उसमें $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$ में से कम-से-कम एक होता है। यदि उसमें $\sigma\,\mathbb{F}\,\Box$ हो, तो उसमें कम-से-कम एक n के लिए $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\Box$ भी होता है। और जब भी उसमें $\sigma\,\mathbb{T}\,\Box$ हो, तब शाखा पर $\sigma.n$ प्रयुक्त होने वाले प्रत्येक n के लिए उसमें $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\Box$ भी होता है।

प्रतिज्ञप्ति 54.18. *प्रत्येक परिमित Γ का ऐसा सत्य-वृक्ष है जिसमें हर शाखा पूर्ण है।*

प्रमाण. Γ के किसी सत्य-वृक्ष की खुली शाखा पर विचार करें। शाखा में ऐसे परिमिततः अनेक उपसर्गयुक्त सूत्र हैं जिन पर कोई नियम लगाया जा सकता है। किसी नियत क्रम (जैसे ऊपर से नीचे) में, इन उपसर्गयुक्त सूत्रों में से प्रत्येक ऐसे सूत्र के लिए जिस पर शर्तें (1)–(4) पहले से सत्य नहीं हैं, शाखा बढ़ाने हेतु उस पर लागू हो सकने वाले नियम लगाएँ। कुछ स्थितियों में इससे शाखन होगा; बच गए सभी उपसर्गयुक्त सूत्रों के लिए प्रत्येक परिणामी शाखा के सिरे पर नियम लगाएँ। चूँकि उपसर्गयुक्त सूत्रों की संख्या परिमित है और शाखा पर प्रयुक्त उपसर्गों की संख्या परिमित है, यह प्रक्रिया अंततः मूल शाखा को विस्तृत करने वाली (संभवतः अनेक) शाखाएँ देती है। प्रत्येक पर यह प्रक्रिया लगाएँ और दोहराएँ। किंतु निर्माण से हर शाखा संवृत है। $\Box$

प्रमेय 54.19 (पूर्णता). *यदि Γ का कोई संवृत सत्य-वृक्ष नहीं है, तो Γ संतोषणीय है।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति से Γ का ऐसा सत्य-वृक्ष है जिसमें हर शाखा पूर्ण है। चूँकि उसका कोई संवृत सत्य-वृक्ष नहीं है, उसका ऐसा सत्य-वृक्ष है जिसमें कम-से-कम एक शाखा खुली और पूर्ण है। Δ उस शाखा के उपसर्गयुक्त सूत्रों का समुच्चय हो और $P(\Delta)$ उसमें आने वाले उपसर्गों का समुच्चय हो।

हम प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Delta) = \langle P(\Delta), R, V\rangle$ परिभाषित करते हैं, जहाँ जगत Δ में आने वाले उपसर्ग हैं और अभिगम्यता संबंध यह है:

$$R\sigma\sigma' \quad \text{तभी जब} \quad \sigma' = \sigma.n \quad \text{किसी } n \text{ के लिए}$$

और

$$V(p) = \{\sigma : \sigma\,\mathbb{T}\,p \in \Delta\}.$$

हम φ पर आगमन से दिखाते हैं कि यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$; और यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

1. $\varphi \equiv p$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो V की परिभाषा से $\sigma \in V(p)$, और इसलिए $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \notin \Delta$, क्योंकि अन्यथा शाखा संवृत होती। अतः $\sigma \notin V(p)$ और इसलिए $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

2. $\varphi \equiv \neg\psi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$, अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \psi$, अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

3. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi \in \Delta$, दोनों। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \chi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से या तो $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$, या $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से या तो $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$, या $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

4. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से या तो $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$, या $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से या तो $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \psi$, या $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \chi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi \in \Delta$, दोनों। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$ और $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$, दोनों। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

5. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से या तो $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$, या $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से या तो $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$, या $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \chi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi \in \Delta$, दोनों। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \psi$, दोनों। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

6. $\varphi \equiv \Box\psi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से शाखा पर प्रयुक्त प्रत्येक $\sigma.n$ के लिए $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$, अर्थात् प्रत्येक ऐसे $\sigma' \in P(\Delta)$ के लिए जिसके लिए $R\sigma\sigma'$। आगमनात्मक परिकल्पना से प्रत्येक ऐसे σ' के लिए $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma' \Vdash \psi$ जिसके लिए $R\sigma\sigma'$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से किसी $\sigma.n$ के लिए $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma.n \nVdash \psi$। चूँकि $R\sigma(\sigma.n)$, ऐसा कोई σ' है कि $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma' \nVdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

7. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: यदि $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से किसी $\sigma.n$ के लिए $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\psi \in \Delta$। आगमनात्मक परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma.n \Vdash \psi$। चूँकि $R\sigma(\sigma.n)$, ऐसा कोई σ' है कि $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma' \Vdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \Vdash \varphi$।

   यदि $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \in \Delta$, तो शाखा के पूर्ण होने से शाखा पर प्रयुक्त प्रत्येक $\sigma.n$ के लिए $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi \in \Delta$, अर्थात् प्रत्येक ऐसे $\sigma' \in P(\Delta)$ के लिए जिसके लिए $R\sigma\sigma'$। आगमनात्मक परिकल्पना से प्रत्येक ऐसे σ' के लिए $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma' \nVdash \psi$ जिसके लिए $R\sigma\sigma'$। अतः $\mathfrak{M}(\Delta), \sigma \nVdash \varphi$।

चूँकि $\Gamma \subseteq \Delta$, इसलिए $\mathfrak{M}(\Delta) \Vdash \Gamma$। $\Box$

उपप्रमेय 54.20. *यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

उपप्रमेय 54.21. *यदि φ सभी प्रतिरूपों में सत्य है, तो $\vdash \varphi$।*

54.9 सत्य-वृक्ष से प्रतिप्रतिरूप

पूर्णता प्रमेय का प्रमाण केवल यह नहीं दिखाता कि यदि $\vDash \varphi$, तो $\vdash \varphi$; यदि $\nvDash A$, तो वह हमें φ के प्रतिप्रतिरूप बनाने की विधि भी देता है। **K** की स्थिति में यह विधि एक *निर्णय प्रक्रिया* बनाती है। मान लें $\nvDash \varphi$। तब प्रतिज्ञप्ति 54.18 का प्रमाण पूर्ण सत्य-वृक्ष बनाने की विधि देता है। वास्तव में यह विधि सदा समाप्त होती है। **K** के प्रतिज्ञप्तिक नियम केवल कम जटिलता वाले उपसर्गयुक्त सूत्र जोड़ते हैं, अर्थात् किसी भी चिह्नित सूत्र $\sigma\,S\,\varphi$ के लिए प्रत्येक प्रतिज्ञप्तिक नियम किसी शाखा पर केवल एक बार लगाना आवश्यक है। नए उपसर्ग केवल $\Box\mathbb{F}$ और $\Diamond\mathbb{T}$ नियमों से उत्पन्न होते हैं; और उन्हें भी केवल एक बार लगाना होता है (और एक ही नया उपसर्ग उत्पन्न होता है)। $\Box\mathbb{T}$ और $\Diamond\mathbb{F}$ को संभवतः अनेक बार लगाना होता है, किंतु प्रत्येक उपसर्ग के लिए केवल एक बार; और केवल परिमिततः अनेक नए उपसर्ग उत्पन्न होते हैं। अतः निर्माण परिमिततः अनेक चरणों के बाद या तो संवृत शाखा देता है, या पूर्ण शाखा।

खुली पूर्ण शाखा वाला टैब्लो बन जाने पर प्रमेय 54.19 का प्रमाण हमें ऐसा स्पष्ट प्रतिरूप देता है जो उपसर्गयुक्त सूत्रों के मूल समुच्चय को संतुष्ट करता है। अतः केवल यही नहीं कि यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो कोई संवृत सत्य-वृक्ष है और $\Gamma \vdash \varphi$; यदि हम संवृत सत्य-वृक्ष उचित ढंग से खोजें और अंत में कोई "पूर्ण" सत्य-वृक्ष पाएँ, तो हमें केवल $\Gamma \nvDash \varphi$ का ज्ञान ही नहीं होगा, बल्कि हम वास्तव में प्रतिप्रतिरूप बना सकेंगे।

उदाहरण 54.22. हम जानते हैं कि $\nVdash \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$। टैब्लो का निर्माण इस प्रकार आरंभ होता है:

1.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ ✓	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\;\; \Box(p \vee q)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p \vee \Box q$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box q$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$1.1\,\mathbb{F}\;\; p$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,4$
7.	$1.2\,\mathbb{F}\;\; q$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,5$

निस्संदेह सत्य-वृक्ष अभी पूरा नहीं हुआ है। अगले चरण में हम बिना सही-चिह्न वाली एकमात्र पंक्ति पर विचार करते हैं: पंक्ति 2 का उपसर्गयुक्त सूत्र $1\,\mathbb{T}\,\Box(p \vee q)$। संवृत टैब्लो का निर्माण कहता है कि शाखा पर प्रयुक्त प्रत्येक उपसर्ग, अर्थात् 1.1 और 1.2 दोनों, के लिए $\Box\mathbb{T}$ नियम लगाएँ:

1.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ ✓	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\;\; \Box(p \vee q)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p \vee \Box q$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box q$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$1.1\,\mathbb{F}\;\; p$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,4$
7.	$1.2\,\mathbb{F}\;\; q$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,5$
8.	$1.1\,\mathbb{T}\;\; p \vee q$	$\Box\mathbb{T}\,2$
9.	$1.2\,\mathbb{T}\;\; p \vee q$	$\Box\mathbb{T}\,2$

अब पंक्तियों 2, 8 और 9 पर सही-चिह्न नहीं हैं। किंतु कोई नया उपसर्ग नहीं जोड़ा गया है, इसलिए हम सभी परिणामी शाखाओं पर (जब तक वे संवृत न हों) पंक्तियों 8 और 9 को $\vee\mathbb{T}$ लगाते हैं:

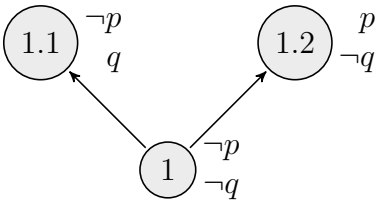
1.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ ✓	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{T}\;\; \Box(p \vee q)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p \vee \Box q$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box p$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
5.	$1\,\mathbb{F}\;\; \Box q$ ✓	$\vee\mathbb{F}\,3$
6.	$1.1\,\mathbb{F}\;\; p$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,4$
7.	$1.2\,\mathbb{F}\;\; q$ ✓	$\Box\mathbb{F}\,5$
8.	$1.1\,\mathbb{T}\;\; p \vee q$ ✓	$\Box\mathbb{T}\,2$
9.	$1.2\,\mathbb{T}\;\; p \vee q$ ✓	$\Box\mathbb{T}\,2$
10.	$1.1\,\mathbb{T}\;\; p$ ✓ $\otimes$ $\qquad$ $1.1\,\mathbb{T}\;\; q$ ✓	$\vee\mathbb{T}\,8$
11.	$1.2\,\mathbb{T}\;\; p$ ✓ $\qquad$ $1.2\,\mathbb{T}\;\; q$ ✓ $\otimes$	$\vee\mathbb{T}\,9$

एक खुली शाखा शेष है और वह पूर्ण है। उससे हम ऐसा प्रतिरूप परिभाषित करते हैं जिसके जगत $W = \{1, 1.1, 1.2\}$ (खुली शाखा पर आने वाले एकमात्र उपसर्ग), अभिगम्यता संबंध $R = \{\langle 1, 1.1\rangle, \langle 1, 1.2\rangle\}$, तथा नियतन $V(p) = \{1.2\}$ (क्योंकि पंक्ति 11 में $1.2\,\mathbb{T}\,p$ है) और $V(q) = \{1.1\}$ (क्योंकि पंक्ति 10 में $1.1\,\mathbb{T}\,q$ है) हैं। प्रतिरूप को आकृति 54.1 में चित्रित किया गया है, और आप सत्यापित कर सकते हैं कि वह $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ का प्रतिप्रतिरूप है।

प्रश्न

प्रश्न 54.1. निम्न सूत्रों के लिए **K** में संवृत सत्य-वृक्ष खोजिए:

1. $\Box\neg p \to \Box(p \to q)$
2. $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$
3. $\Diamond p \to \Diamond(p \vee q)$



चित्र 54.1: $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ का प्रतिप्रतिरूप।

4. $\Box(p \wedge q) \to \Box p$

प्रश्न 54.2. प्रमेय 54.6 का प्रमाण पूरा कीजिए।

प्रश्न 54.3. ऐसे संवृत सत्य-वृक्ष दीजिए जो निम्न दिखाएँ:

1. **KT5** $\vdash$ B;
2. **KT5** $\vdash$ 4;
3. **KDB4** $\vdash$ T;
4. **KB4** $\vdash$ 5;
5. **KB5** $\vdash$ 4;
6. **KT** $\vdash$ D.

प्रश्न 54.4. प्रमेय 54.19 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 55

मोडल सीक्वेंट कलन

मोडल तर्कशास्त्र के सीक्वेंट कलनों पर प्रारूप अध्याय। इसमें और उदाहरण, यथार्थता-प्रमाण और पूर्णता-प्रमाण आवश्यक हैं।

55.1 परिचय

प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के सीक्वेंट कलन को ऐसे अतिरिक्त नियमों से विस्तृत किया जा सकता है जो $\Box$ और $\Diamond$ पर कार्य करते हैं। उदाहरणार्थ, **K** के लिए हमारे पास **LK** के साथ ये नियम हैं:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta, \Box\varphi}\,\Box \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond\varphi, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\Diamond$$

K के विस्तारों के लिए और अतिरिक्त नियम भी जोड़ने होते हैं।

हर मोडल तर्कशास्त्र का ऐसा सीक्वेंट कलन नहीं होता। यहाँ तक कि **S5**, जो अर्थवैज्ञानिक रूप से सरल है (उसे अभिगम्यता संबंधों का तनिक भी उपयोग किए बिना परिभाषित किया जा सकता है), के लिए भी **LK** से मिलने वाला ऐसा सीक्वेंट कलन ज्ञात नहीं है जो नियम Cut के बिना पूर्ण हो। किंतु उसका एक कर्तन-मुक्त पूर्ण *हाइपरसीक्वेंट* कलन है।

55.2 K के नियम

सामान्य प्रतिज्ञप्तिक संयोजकों के नियम सामान्य सीक्वेंट कलन **LK** जैसे ही हैं। अभिगृहीत भी वही हैं: $\varphi \Rightarrow \varphi$ रूप का प्रत्येक सीक्वेंट अभिगृहीत माना जाता है।

मोडल संकारकों $\Box$ और $\Diamond$ के लिए हमारे पास निम्न अतिरिक्त नियम हैं:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta, \Box\varphi}\,\Box \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond\varphi, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\Diamond$$

यहाँ $\Box\Gamma$ से आशय Γ के प्रत्येक सूत्र के आगे $\Box$ लगाने से मिले सूत्रों का अनुक्रम है और $\Diamond\Delta$, Δ के प्रत्येक सूत्र के आगे $\Diamond$ लगाने से मिले सूत्रों का अनुक्रम है। Γ और Δ रिक्त हो सकते हैं; उस स्थिति में निष्कर्ष-सीक्वेंट का संबद्ध भाग $\Box\Gamma$ और $\Diamond\Delta$ भी रिक्त है।

किसी एक सूत्र φ पर दाईं ओर $\Box$ और बाईं ओर $\Diamond$ जोड़ने का प्रतिबंध आवश्यक है। यदि हम दाईं ओर किन्हीं भी अनेक सूत्रों पर $\Box$ जोड़ना, या बाईं ओर किन्हीं भी अनेक सूत्रों पर $\Diamond$ जोड़ना अनुमत करते, तो हम इसे व्युत्पन्न कर

सकते:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \Box\varphi, \Box\neg\varphi}\,\Box*}{\Rightarrow \Box\varphi \vee \Box\neg\varphi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\Diamond\neg\varphi, \Diamond\varphi \Rightarrow}\,\Diamond*}{\Diamond\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \Diamond\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi}\,\to\mathrm{R}$$

किंतु $\Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$ और $\Diamond\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi$, **K** में मान्य नहीं हैं।

यदि हम आधार-वाक्य में φ के साथ पार्श्व-सूत्र भी अनुमत करते, और $\Box$ नियम को दाईं ओर केवल φ पर $\Box$ जोड़ने देते, या $\Diamond$ नियम को बाईं ओर केवल φ पर $\Diamond$ जोड़ने देते (किंतु पार्श्व-सूत्रों पर कुछ न करते), तो हम इसे व्युत्पन्न कर सकते:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\,\mathrm{XR}}{\Rightarrow \neg\varphi, \Box\varphi}\,\Box*}{\Rightarrow \neg\varphi \vee \Box\varphi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\Diamond\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\Diamond*}{\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi}\,\to\mathrm{R}$$

किंतु $\neg\varphi \vee \Box\varphi$ (जो $\varphi \to \Box\varphi$ के तुल्य है) और $\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi$, **K** में मान्य नहीं हैं।

55.3 K के लिए सीक्वेंट व्युत्पत्तियाँ

उदाहरण 55.1. हम ऐसी सीक्वेंट-कलन व्युत्पत्ति देते हैं जो $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ दिखाती है।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi} \quad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}}{\Box\psi, \Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\Box}{\Box\varphi \wedge \Box\psi, \Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\wedge\mathrm{L}}{\Box\varphi, \Box\varphi \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\mathrm{XL}}{\Box\varphi \wedge \Box\psi, \Box\varphi \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\wedge\mathrm{L}}{\Box\varphi \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\mathrm{CL}}{\Rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)}\,\to\mathrm{R}$$

उदाहरण 55.2. हम ऐसी सीक्वेंट-कलन व्युत्पत्ति देते हैं जो $\vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ दिखाती है।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi} \quad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi}\,\vee\mathrm{L}}{\Diamond(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi, \Diamond\psi}\,\Diamond}{\Diamond(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi, \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi}\,\vee\mathrm{R}}{\Diamond(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi, \Diamond\varphi}\,\mathrm{XR}}{\Diamond(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi, \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi}\,\vee\mathrm{R}}{\Diamond(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi}\,\mathrm{CR}}{\Rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)}\,\to\mathrm{R}$$

यह dual की व्युत्पत्ति है।

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{T}\Box \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\varphi}\ \mathrm{T}\Diamond$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\ \mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Diamond\Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Lambda, \varphi}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Diamond\Lambda, \Box\varphi}\ \mathrm{B}\Box \qquad \frac{\varphi, \Diamond\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box\Lambda, \Delta}{\Diamond\varphi, \Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Lambda, \Diamond\Delta}\ \mathrm{B}\Diamond$$

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta, \Box\varphi}\ 4\Box \qquad \frac{\varphi, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}{\Diamond\varphi, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\ 4\Diamond$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Diamond\Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Diamond\Lambda, \varphi}{\Box\Gamma, \Diamond\Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Diamond\Lambda, \Box\varphi}\ 5\Box \qquad \frac{\varphi, \Diamond\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Diamond\Delta, \Box\Lambda}{\Diamond\varphi, \Diamond\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Diamond\Delta, \Box\Lambda}\ 5\Diamond$$

तालिका 55.1: और मोडल नियम।

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\ \neg\mathrm{R}}{\Diamond\neg\varphi, \Box\varphi \Rightarrow}\ \Diamond}{\Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi}\ \neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \Box\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi}\ \to\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\ \neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\ \mathrm{XR}}{\Rightarrow \Diamond\neg\varphi, \Box\varphi}\ \Box}{\Rightarrow \Box\varphi, \Diamond\neg\varphi}\ \mathrm{XR}}{\neg\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \Box\varphi}\ \neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi \to \Box\varphi}\ \to\mathrm{R}}{\Rightarrow \Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

55.4 अन्य अभिगम्यता संबंधों के नियम

विशेष अभिगम्यता संबंधों द्वारा निर्धारित तर्कशास्त्रों पर विचार करने के लिए हम सारणी 55.1 के अतिरिक्त नियम लेते हैं।

इन नियमों को जोड़ने से ऐसे तंत्र मिलते हैं जो सारणी 55.2 में दिए तर्कशास्त्रों के लिए यथार्थ और पूर्ण हैं।

उदाहरण 55.3. हम ऐसी सीक्वेंट व्युत्पत्ति देते हैं जो **K4** $\vdash 4$, अर्थात् $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, दिखाती है।

$$\dfrac{\dfrac{\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi}{\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi}\ 4\Box}{\Rightarrow \Box\varphi \to \Box\Box\varphi}\ \to\mathrm{R}$$

उदाहरण 55.4. हम ऐसी सीक्वेंट व्युत्पत्ति देते हैं जो **S5** $\vdash 5$, अर्थात् $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, दिखाती है।

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi}{\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi}\ 5\Box}{\Rightarrow \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi}\ \to\mathrm{R}$$

तर्कशास्त्र	R है ...	नियम
T $=$ **KT**	स्वपरावर्ती	$\Box$, T$\Box$, T$\Diamond$
D $=$ **KD**	सीरियल	$\Box$, D
K4	संक्रमणशील	$\Box$, 4$\Box$, 4$\Diamond$
B $=$ **KTB**	स्वपरावर्ती, सममित	$\Box$, T$\Box$, T$\Diamond$ B$\Box$, B$\Diamond$
S4 $=$ **KT4**	स्वपरावर्ती, संक्रमणशील	$\Box$, T$\Box$, T$\Diamond$ 4$\Box$, 4$\Diamond$
S5 $=$ **KT5**	स्वपरावर्ती, संक्रमणशील, यूक्लिडीय	$\Box$, T$\Box$, T$\Diamond$ 5$\Box$, 5$\Diamond$

तालिका 55.2: विभिन्न मोडल तर्कशास्त्रों के सीक्वेंट नियम।

उदाहरण 55.5. **S5** का सीक्वेंट कलन Cut नियम के बिना पूर्ण नहीं है; उदाहरणार्थ, $\Diamond\Box\varphi \to \varphi$, जो **S5** में मान्य है, का Cut के बिना कोई प्रमाण नहीं है। यह Cut का उपयोग करने वाली व्युत्पत्ति है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi}{\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi}\,5\Diamond \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Box\varphi \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{T}\Box}{\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}}{\Rightarrow \Diamond\Box\varphi \to \varphi}\,{\to}\mathrm{R}$$

प्रश्न

प्रश्न 55.1. निम्न सूत्रों के लिए **K** में सीक्वेंट-कलन प्रमाण खोजिए:

1. $\Box\neg p \to \Box(p \to q)$
2. $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$
3. $\Diamond p \to \Diamond(p \vee q)$
4. $\Box(p \wedge q) \to \Box p$

प्रश्न 55.2. ऐसी सीक्वेंट व्युत्पत्तियाँ दीजिए जो निम्न दिखाएँ:

1. **KT5** $\vdash$ B;
2. **KT5** $\vdash$ 4;
3. **KDB4** $\vdash$ T;
4. **KB4** $\vdash$ 5;
5. **KB5** $\vdash$ 4;
6. **KT** $\vdash$ D.

खण्ड XII

अनुप्रयुक्त मोडल तर्कशास्त्र

इस भाग में मोडल तर्कशास्त्र के कुछ अनुप्रयोगों, जैसे कालिक और ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों, पर प्रयोगात्मक प्रारूप सामग्री है।

अध्याय 56

कालिक तर्कशास्त्र

यह अध्याय कालिक तर्कशास्त्रों पर है।

56.1 परिचय

कालिक तर्कशास्त्र उन दावों से संबंधित हैं जो बताते हैं कि कोई बात भविष्य में होगी या अतीत में रही है। आर्थर प्रायर को कालिक तर्कशास्त्र का प्रवर्तक माना जाता है; उन्होंने इसे *काल-तर्कशास्त्र* कहा। यहाँ हमारा विवेचन मुख्यतः प्रायर के मूल मोडल दृष्टिकोण का अनुसरण करेगा, जिसमें कालिक संकारकों को प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के आधारभूत ढाँचे में जोड़ा जाता है; प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र दावों को सामान्यतः काल-रहित मानता है।

उदाहरण के लिए, प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र में मैं बीज़ी नामक एक कुत्ते की बात कर सकता हूँ, जो कभी बैठता है और कभी नहीं बैठता—जैसा कि कुत्ते प्रायः करते हैं। शास्त्रीय तर्कशास्त्र में यह दावा करना विरोधाभासी होगा कि बीज़ी बैठा है और यह भी कि बीज़ी बैठा नहीं है। किंतु स्पष्टतः दोनों बातें सत्य हो सकती हैं, बस एक ही समय पर नहीं; भाषा में कालिक संकारक जोड़ने से हम इस दावे को अपेक्षाकृत आसानी से व्यक्त कर सकते हैं। कालिक संकारकों को जोड़ने से हम ऐसे अनुमान की मान्यता भी समझा सकते हैं जो "बीज़ी को खाने का इनाम या गेंद मिलेगी" से "बीज़ी को खाने का इनाम मिलेगा या बीज़ी को गेंद मिलेगी" तक जाता है।

फिर भी, कालिक तर्कशास्त्र अनेक दार्शनिक प्रश्न उठाता है, जिनके कारण हम उसके एक ढाँचे को दूसरे ढाँचे के स्थान पर अपना सकते हैं। उदाहरण के लिए, *भावी आकस्मिक कथन* भविष्य के बारे में ऐसा कथन है जो न तो आवश्यक है और न असंभव। यदि हम कहते हैं, "रिचर्ड कल किराने की दुकान जाएगा," तो हम ऐसी घटना के बारे में दावा कर रहे हैं जो अभी हुई नहीं है और जिसके सत्य-मूल्य पर विवाद हो सकता है। वास्तव में, यह भी विवादास्पद है कि उस दावे को सबसे पहले कोई सत्य-मूल्य *दिया* भी जा सकता है या नहीं। यदि हम कठोर नियतिवादी हैं, तो शायद हम यह मानने में सहज होंगे कि यह वाक्य वास्तव में सत्य या असत्य है, उस घटना के घटित होने के निर्धारित समय से भी पहले—बस संभव है कि हमें अभी उसका सत्य-मूल्य ज्ञात न हो। इसके विपरीत, हम भविष्य को सचमुच खुला मान सकते हैं, जिसमें भावी आकस्मिक कथनों के सत्य-मूल्य अनिर्धारित रहते हैं।

वस्तुतः समय की संरचना और प्रकृति के बारे में ऐसी बहुत-सी प्रतिबद्धताएँ हमारे कालिक प्रतिरूपों और तर्कशास्त्रीय ढाँचों के चुनाव में ही समाहित होती हैं। उदाहरण के लिए, हम पूछ सकते हैं कि क्या हमें ऐसे प्रतिरूप बनाने चाहिए जिनमें समय रैखिक, शाखित या चक्रीय भी हो। हमें यह भी तय करना पड़ सकता है कि हमारे कालिक प्रतिरूपों में आरंभिक और अंतिम बिंदु होंगे या नहीं, और समय को पृथक काल-क्षणों के द्वारा निरूपित किया जाएगा या एक सातत्य के रूप में।

56.2 कालिक तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान

परिभाषा 56.1. कालिक तर्कशास्त्र की मूल भाषा में निम्नलिखित होते हैं:

1. असत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$।
2. सत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\top$।
3. प्रतिज्ञप्ति चरों का गणनीय अनंत समुच्चय: p_0, p_1, p_2, ...
4. प्रतिज्ञप्तिक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)।
5. अतीत के संकारक P और H।
6. भविष्य के संकारक F और G।

आगे हम अन्य प्रकार के मोडल संकारक जोड़ने की संभावना पर चर्चा करेंगे।

परिभाषा 56.2. कालिक भाषा की *सूत्रें* आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित होती हैं:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।
2. $\top$ एक परमाण्विक सूत्र है।
3. प्रत्येक प्रतिज्ञप्तिक चर p_i एक (परमाण्विक) सूत्र है।
4. यदि φ एक सूत्र है, तो $\neg\varphi$ एक सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ एक सूत्र है।
6. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ एक सूत्र है।
7. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \rightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
8. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
9. यदि φ एक सूत्र है, तो $\mathrm{P}\varphi$, $\mathrm{H}\varphi$, $F\varphi$ और $\mathrm{G}\varphi$ सभी सूत्र हैं।
10. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

अन्य प्रकार के आशयात्मक तर्कशास्त्रों की तरह कालिक तर्कशास्त्रों का अर्थविज्ञान भी संबंधात्मक प्रतिरूपों के द्वारा दिया जाता है।

परिभाषा 56.3. कालिक भाषा का *प्रतिरूप* एक त्रिक $\mathfrak{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ है, जहाँ

1. T एक अरिक्त समुच्चय है, जिसके अवयव समय-बिंदु माने जाते हैं।
2. $\prec$, T पर एक द्विपदी संबंध है।
3. V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को समय-बिंदुओं का समुच्चय $V(p)$ देता है।

जब $t \prec t'$ हो, तो हम कहते हैं कि t, t' से *पहले* है। जब $t \in V(p)$ हो, तो हम कहते हैं कि p, t पर *सत्य* है।

फिलहाल हम अपने पूर्वता-संबंध $\prec$ पर कोई शर्त नहीं लगाते। इसका अर्थ है कि अभी हमारे कालिक प्रतिरूपों की संरचना पर कोई प्रतिबंध नहीं है; अतः हमारे पास ऐसे प्रतिरूप हो सकते हैं जिनमें समय रैखिक, शाखित, चक्रीय अथवा किसी भी अन्य संरचना वाला हो।

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र की ही तरह प्रत्येक कालिक प्रतिरूप निर्धारित करता है कि उसमें कौन-से सूत्र किन बिंदुओं पर सत्य माने जाते हैं। संबंधात्मक अर्थविज्ञान की मूल धारणा के लिए हम वही संकेत-पद्धति—"प्रतिरूप $\mathfrak{M}$, सूत्र φ को बिंदु t पर सत्य बनाता है"—अपनाते हैं। यह संबंध आगमनात्मक रूप से परिभाषित होता है और सभी गैर-मोडल संकारकों के लिए सामान्य मोडल मामले के समान है।

परिभाषा 56.4. किसी $\mathfrak{M}$ में *सूत्र* φ *की* t *पर सत्यता,* जिसे $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ से लिखते हैं, आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \bot$ कभी नहीं।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \top$ सदैव।
3. $\mathfrak{M}, t \Vdash p$ तभी जब $t \in V(p)$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, t \nVdash \psi$।
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, t \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, t \Vdash \chi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, t \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, t \Vdash \chi$ (या दोनों)।
7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, t \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, t \Vdash \chi$।
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}, t \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, t \Vdash \chi$ दोनों, या न $\mathfrak{M}, t \Vdash \psi$ न $\mathfrak{M}, t \Vdash \chi$।
9. $\varphi \equiv \mathrm{P}\psi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $t' \prec t$ वाले किसी $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$।
10. $\varphi \equiv \mathrm{H}\psi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $t' \prec t$ वाले प्रत्येक $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$।
11. $\varphi \equiv \mathrm{F}\psi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $t \prec t'$ वाले किसी $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$।
12. $\varphi \equiv \mathrm{G}\psi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी जब $t \prec t'$ वाले प्रत्येक $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$।

अर्थविज्ञान से देखा जा सकता है कि संकारक P और H एक-दूसरे के द्वैत हैं, और इसी प्रकार F तथा G भी। अतः हम $\mathrm{H}\varphi$ को $\neg\mathrm{P}\neg\varphi$ से परिभाषित कर सकते थे, और G को भी F के द्वारा इसी तरह परिभाषित कर सकते थे।

56.3 कालिक फ़्रेमों के गुण

चूँकि हमारे कालिक प्रतिरूप संबंध $\prec$ पर कोई शर्त नहीं लगाते, इसलिए हमारे परिचित अभिगृहीतों में केवल K, अथवा उसके अनुरूप K_{G} और K_{H}, ही सभी प्रतिरूपों में मान्य हैं:

$$\mathrm{G}(p \to q) \to (\mathrm{G}p \to \mathrm{G}q) \qquad (K_{\mathrm{G}})$$
$$\mathrm{H}(p \to q) \to (\mathrm{H}p \to \mathrm{H}q) \qquad (K_{\mathrm{H}})$$

परंतु यदि हम चाहते हैं कि हमारे प्रतिरूप समय के निरूपण पर अधिक कठोर शर्तें लगाएँ—मसलन यह सुनिश्चित करके कि $\prec$ एक रैखिक क्रम हो—तो हमारे प्रतिरूपों में अन्य सूत्र भी मान्य होंगे।

सारणी 56.1 में दिए गए कई गुण समय का निरूपण करने वाले प्रतिरूप के लिए वांछनीय विशेषताएँ लग सकते हैं। किंतु ध्यान देना चाहिए कि यद्यपि हम $\prec$ संबंध पर अपनी इच्छानुसार शर्तें लगा सकते हैं, फिर भी प्रत्येक शर्त ऐसे सूत्र के अनुरूप नहीं होती जिसे कालिक तर्कशास्त्र की भाषा में व्यक्त किया जा सके। उदाहरण के लिए, अप्रतिवर्तिता—अर्थात $\forall w \neg(w \prec w)$—के अनुरूप कालिक तर्कशास्त्र में कोई सूत्र नहीं है।

यदि $\prec$ ...है	*तो ... $\mathfrak{M}$ में सत्य है:*
संक्रमणशील: $\forall u \forall v \forall w((u \prec v \wedge v \prec w) \rightarrow u \prec w)$	$\mathrm{FF}p \rightarrow \mathrm{F}p$
रैखिक: $\forall w \forall v(w \prec v \vee w = v \vee v \prec w)$	$(\mathrm{FP}p \vee \mathrm{PF}p) \rightarrow (\mathrm{P}p \vee p \vee \mathrm{F}p)$
सघन: $\forall w \forall v(w \prec v \rightarrow \exists u(w \prec u \wedge u \prec v))$	$\mathrm{F}p \rightarrow \mathrm{FF}p$
अपरिबद्ध (अतीत की ओर): $\forall w \exists v(v \prec w)$	$\mathrm{H}p \rightarrow \mathrm{P}p$
अपरिबद्ध (भविष्य की ओर): $\forall w \exists v(w \prec v)$	$\mathrm{G}p \rightarrow \mathrm{F}p$

तालिका 56.1: कुछ कालिक फ्रेम-अनुरूपता गुण।

56.4 कालिक तर्कशास्त्र के अतिरिक्त संकारक

अतीत और भविष्य के एकस्थानी संकारकों के अतिरिक्त, कालिक तर्कशास्त्रों में कभी-कभी द्विस्थानी संकारक S और U भी होते हैं, जिनका आशय क्रमशः "जब से" और "जब तक" को व्यक्त करना है। इसके लिए कालिक तर्कशास्त्र की भाषा में S और U को जोड़ना तथा कालिक सूत्र की परिभाषा में निम्नलिखित उपवाक्य सम्मिलित करना पड़ता है:

> यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\mathrm{S}\varphi\psi)$ और $(\mathrm{U}\varphi\psi)$ भी सूत्र हैं।

इन संकारकों का अर्थविज्ञान इस प्रकार दिया जाता है:

परिभाषा 56.5. *प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ में t पर किसी सूत्र φ की सत्यता*:

1. $\varphi \equiv \mathrm{S}\psi\chi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब किसी ऐसे $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$ हो जिसके लिए $t' \prec t$, और प्रत्येक ऐसे s के लिए जिसके लिए $t' \prec s \prec t$ हो, $\mathfrak{M}, s \Vdash \chi$ हो

2. $\varphi \equiv \mathrm{U}\psi\chi$: $\mathfrak{M}, t \Vdash \varphi$ तभी और केवल तभी, जब किसी ऐसे $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t' \Vdash \psi$ हो जिसके लिए $t \prec t'$, और प्रत्येक ऐसे s के लिए जिसके लिए $t \prec s \prec t'$ हो, $\mathfrak{M}, s \Vdash \chi$ हो

$\mathrm{S}\psi\chi$ का सहज पठन है, "जब से ψ सत्य था, तब से χ सत्य रहा है।" और $\mathrm{U}\psi\chi$ का सहज पठन है, "ψ के सत्य होने तक χ सत्य रहेगा।"

56.5 संभावित इतिहास

अब तक प्रयुक्त कालिक तर्कशास्त्र के संबंधात्मक प्रतिरूप अत्यंत लचीले हैं, क्योंकि अभिगम्यता संबंध पर कोई प्रतिबंध लगाना आवश्यक नहीं है। इसका अर्थ है कि कालिक प्रतिरूप अतीत और भविष्य दोनों में शाखित हो सकते हैं; किंतु हम शाखन की अधिक "मोडल" अवधारणा पर विचार करना चाह सकते हैं, जिसमें घटनाओं के अनुक्रमों को संभावित इतिहास माना जाता है। इसके लिए हमारी भाषा बदलना अनिवार्य नहीं है, यद्यपि हम अपने "सामान्य" मोडल संकारक $\Box$ और $\Diamond$ भी जोड़ सकते हैं। समय के साथ कर्ताओं के ज्ञान में होने वाले परिवर्तनों को निरूपित करने के लिए हम ज्ञानात्मक अभिगम्यता संबंध जोड़ने पर भी विचार कर सकते हैं।

परिभाषा 56.6. कालिक भाषा का *संभावित-इतिहास प्रतिरूप* एक त्रिक $\mathfrak{M} = \langle T, C, V \rangle$ है, जहाँ

1. T एक अरिक्त समुच्चय है, जिसके अवयव कालिक अवस्थाएँ माने जाते हैं।

2. C किसी तंत्र के संगणनात्मक पथों, अथवा *संभावित इतिहासों*, का समुच्चय है। दूसरे शब्दों में, C अवस्थाओं s_1, s_2, s_3, ...के अनुक्रमों σ का समुच्चय है, जहाँ प्रत्येक $s_i \in T$।

3. V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को समय-बिंदुओं का समुच्चय $V(p)$ देता है।

बात को सरल रखने के लिए हम सामान्यतः यह भी मानेंगे कि जब कोई इतिहास C में हो, तब उसके सभी उत्तरांश भी C में हों। उदाहरण के लिए, यदि s_1, s_2, s_3 कोई अनुक्रम C में है, तो s_2, s_3 तथा केवल s_3 वाले अनुक्रम भी C में हैं। साथ ही, जब दो अवस्थाएँ s_i और s_j किसी अनुक्रम σ में आती हैं, तब $i < j$ होने पर हम कहते हैं कि $s_i \prec_\sigma s_j$। जब $t \in V(p)$ हो, तब हम कहते हैं कि p, t पर *सत्य* है।

एक प्रासंगिक परिवर्तन यह है कि प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ में किसी समय-बिंदु t पर किसी सूत्र की सत्यता का मूल्यांकन अब हम ऐसे इतिहास σ के सापेक्ष करते हैं जिसमें t एक अवस्था के रूप में आता है। फिर भी प्रतिज्ञप्ति चरों या सत्यता-फलनीय संयोजकों के अर्थविज्ञान में कोई परिवर्तन आवश्यक नहीं है। वे सभी ठीक वैसे ही हैं जैसे परिभाषा 56.4 में थे, क्योंकि उनमें से कोई भी σ का उल्लेख नहीं करता। किंतु अब हम इन इतिहासों के सापेक्ष अपने भविष्य-संकारक F को पुनः परिभाषित करते हैं और संकारक $\Diamond$ जोड़ते हैं।

परिभाषा 56.7. $\mathfrak{M}$ में *सूत्र* φ *की* t, σ *पर सत्यता*, जिसे $\mathfrak{M}, t, \sigma \Vdash \varphi$ से लिखते हैं:

1. $\varphi \equiv \mathrm{F}\psi$: $\mathfrak{M}, t, \sigma \Vdash \varphi$ तभी जब $t \prec_\sigma t'$ वाले किसी $t' \in T$ के लिए $\mathfrak{M}, t', \sigma \Vdash \psi$।

2. $\varphi \equiv \Diamond\psi$: $\mathfrak{M}, t, \sigma \Vdash \varphi$ तभी जब किसी ऐसे $\sigma' \in C$ के लिए $\mathfrak{M}, t, \sigma' \Vdash \psi$ हो जिसमें t आता है।

अन्य कालिक और मोडल संकारकों को भी इसी प्रकार परिभाषित किया जा सकता है। अब हम ऐसे दावों को निरूपित कर सकते हैं जिनमें काल और मोडलता दोनों सम्मिलित हों। उदाहरण के लिए, "p घटित नहीं होगा, किंतु वह घटित हो सकता था" को हम $\neg\mathrm{F}p \wedge \Diamond\mathrm{F}p$ सूत्र से संकेतित कर सकते हैं। यह सूत्र ऐसे बिंदु और इतिहास पर सत्य होगा जहाँ p किसी उत्तरवर्ती अवस्था पर सत्य नहीं होता, किंतु कोई वैकल्पिक इतिहास ऐसा है जहाँ p भविष्य में सत्य हो जाता है।

अध्याय 57

ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र

यह अध्याय ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों के अधिसिद्धांत का विवेचन करता है। इसकी संरचना शास्त्रीय मूल मोडल तर्कशास्त्र पर आल्डो एंटोनेली की टिप्पणियों के समान है, किंतु द्विसिमुलेशन और गतिक ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की सामग्री जोड़ने के लिए ऑड्री याप ने इसे पुनर्लिखित किया है।

57.1 परिचय

जिस प्रकार मोडल तर्कशास्त्र *मोडल प्रतिज्ञप्तियों* और उनके बीच के निष्कर्षण-संबंधों का अध्ययन करता है, उसी प्रकार ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र *ज्ञानात्मक प्रतिज्ञप्तियों* और उनके बीच के निष्कर्षण-संबंधों का अध्ययन करता है। यहाँ एकस्थानी संयोजकों की व्याख्या संभावना और आवश्यकता को निरूपित करने वाले मोडल संकारकों के रूप में नहीं, बल्कि ज्ञान या विश्वास का प्रतिरूपण करने वाले ज्ञानात्मक अथवा विश्वासात्मक संकारकों के रूप में की जाती है। उदाहरण के लिए, हम निम्न दावे व्यक्त करना चाह सकते हैं:

1. रिचर्ड जानता है कि कैलगरी अल्बर्टा में है।
2. ऑड्री मानती है कि संभवतः कोई कुत्ता सोफ़े पर है।
3. रिचर्ड जानता है कि ऑड्री जानती है कि उसकी कक्षा मंगलवार को होती है।
4. हर कोई जानता है कि एक वर्ष में 12 महीने होते हैं।

समकालीन ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र का आरंभ प्रायः याको हिंटिक्का की 1962 की पुस्तक *Knowledge and Belief* (ज्ञान और विश्वास) से माना जाता है। यह उस समय लिखी गई थी जब तर्कशास्त्र में संभव-जगत अर्थविज्ञान का प्रयोग बढ़ रहा था। वास्तव में ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र अन्य मोडल तर्कशास्त्रों के अधिकांश अर्थवैज्ञानिक साधनों का ही उपयोग करते हैं, किंतु उनकी व्याख्या अलग ढंग से करते हैं। मुख्य परिवर्तन इस बात में है कि हम *अभिगम्यता संबंध* को किसका निरूपण मानते हैं। ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों में ये संबंध किसी प्रकार की *ज्ञानात्मक संभावना* को निरूपित करते हैं। हम देखेंगे कि जिस ज्ञानात्मक धारणा का प्रतिरूपण किया जा रहा है, वह अभिगम्यता संबंध पर लगाई जाने वाली शर्तों को प्रभावित करती है। हम यह भी देखेंगे कि अनुरूपता सिद्धांत को ज्ञानात्मक व्याख्या देने पर क्या होता है। ऊपर के उदाहरणों में दो कर्ताओं, रिचर्ड और ऑड्री, तथा दोनों के ज्ञान के बीच के संबंध का उल्लेख है। जिन ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों पर हम विचार करेंगे वे बहु-कर्ता तर्कशास्त्र होंगे, जिनमें ऐसी बातें व्यक्त की जा सकती हैं। इसके विपरीत, एकल-कर्ता ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र केवल इस बारे में बात करेगा कि कोई एक व्यक्ति क्या जानता या मानता है।

57.2 ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की भाषा

परिभाषा 57.1. मान लें कि G कर्ता-संकेतों का समुच्चय है। बहु-कर्ता ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की मूल भाषा में निम्नलिखित होते हैं:

1. असत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$।
2. सत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\top$।
3. प्रतिज्ञप्ति चरों का गणनीय अनंत समुच्चय: p_0, p_1, p_2, ...
4. प्रतिज्ञप्तिक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन), $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)।
5. प्रत्येक $a \in G$ के लिए ज्ञान-संकारक K_a।

यदि हमारी रुचि अपने तंत्र में केवल एक कर्ता के ज्ञान में है, तो हम समुच्चय G और अलग-अलग कर्ताओं का उल्लेख छोड़ सकते हैं। उस स्थिति में हमारे पास केवल मूल संकारक K होता है।

परिभाषा 57.2. ज्ञानात्मक भाषा की *सूत्रें* आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित होती हैं:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।
2. $\top$ एक परमाण्विक सूत्र है।
3. प्रत्येक प्रतिज्ञप्तिक चर p_i एक (परमाण्विक) सूत्र है।
4. यदि φ एक सूत्र है, तो $\neg\varphi$ एक सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ एक सूत्र है।
6. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ एक सूत्र है।
7. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \rightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
8. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
9. यदि φ एक सूत्र और $a \in G$ है, तो $\mathrm{K}_a\varphi$ एक सूत्र है।
10. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

यदि किसी सूत्र φ में K_a नहीं आता, तो हम उसे *मोडल-मुक्त* कहते हैं।

परिभाषा 57.3. संकारक K का उद्देश्य व्यक्तिगत ज्ञान को संकेतित करना है, जबकि E, जिसे प्रायः "हर कोई जानता है" पढ़ते हैं, सामूहिक ज्ञान को संकेतित करता है। जहाँ $G' \subseteq G$, वहाँ हम $\mathrm{E}_{G'}\varphi$ को निम्न का संक्षिप्त रूप मानते हैं:

$$\bigwedge_{b \in G'} \mathrm{K}_b\varphi.$$

हम ज्ञान की एक और भी प्रबल धारणा, अर्थात कर्ताओं के समूह G में *सार्वज्ञान*, भी परिभाषित कर सकते हैं। जब कोई सूचना कर्ताओं के समूह में सार्वज्ञान होती है, तो इसका अर्थ है कि उस समूह के कर्ताओं के प्रत्येक संयोजन के लिए वे सभी जानते हैं कि दूसरे जानते हैं कि दूसरे जानते हैं ...और यह क्रम अनंत तक चलता है। यह सामूहिक ज्ञान से बहुत अधिक प्रबल है, और ऐसे संबंधात्मक प्रतिरूप आसानी से बनाए जा सकते हैं जिनमें कोई सूत्र सामूहिक ज्ञान तो हो, किंतु सार्वज्ञान न हो। "समूह G में यह सार्वज्ञान है कि φ" को हम $\mathrm{C}_G\varphi$ से संकेतित करेंगे।

57.3 संबंधात्मक प्रतिरूप

ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों की मूल अर्थवैज्ञानिक धारणा सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों जैसी ही है। संबंधात्मक प्रतिरूप में अब भी जगतों का एक समुच्चय और ऐसा नियतन होता है जो निर्धारित करता है कि कौन-से प्रतिज्ञप्ति चर किन जगतों पर "सत्य" माने जाते हैं। यदि हम केवल एक कर्ता से संबंधित हैं, तो सामान्यतः हमारे पास एक ही अभिगम्यता संबंध होता है। किंतु बहु-कर्ता ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र में वह एक संबंध अभिगम्यता संबंधों का समुच्चय बन जाता है—कर्ता-संकेतों के हमारे समुच्चय G के प्रत्येक a के लिए एक संबंध।

किसी *संबंधात्मक प्रतिरूप* में जगतों का एक समुच्चय होता है जो द्विपदी अभिगम्यता संबंधों—प्रत्येक कर्ता के लिए एक—से जुड़े होते हैं; साथ ही ऐसा नियतन होता है जो निर्धारित करता है कि कौन-से प्रतिज्ञप्ति चर किन जगतों पर सत्य हैं।

परिभाषा 57.4. बहु-कर्ता ज्ञानात्मक भाषा का *प्रतिरूप* एक त्रिक $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ है, जहाँ

1. W "जगतों" का अरिक्त समुच्चय है,
2. प्रत्येक $a \in G$ के लिए R_a, W पर एक द्विपदी अभिगम्यता संबंध है, और
3. V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को संभव जगतों का समुच्चय $V(p)$ देता है।

जब $R_a ww'$ हो, तो हम कहते हैं कि w', w से a *के लिए अभिगम्य* है। जब $w \in V(p)$ हो, तो हम कहते हैं कि p, w पर *सत्य* है।

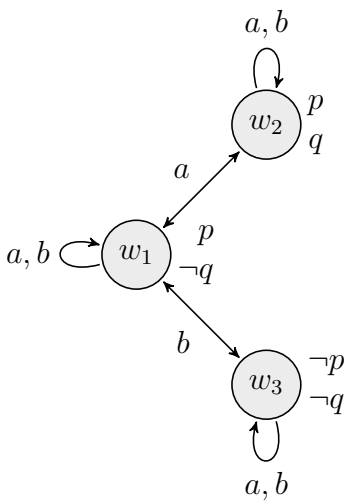
इसकी कार्यप्रणाली सामान्य मोडल तर्कशास्त्र जैसी ही है; केवल अधिक अभिगम्यता संबंध जोड़ दिए गए हैं। किसी दिए हुए कर्ता के अभिगम्यता संबंध की व्याख्या हम सामान्यतः उसकी सूचना-अवस्था के किसी पक्ष को निरूपित करने वाले संबंध के रूप में करेंगे। उदाहरण के लिए, हम प्रायः $R_a ww'$ को यह व्यक्त करने वाला मानते हैं कि w' जगत, w पर कर्ता a की सूचना के संगत है। दूसरे शब्दों में, w पर वह कर्ता जगत w और जगत w' में अंतर नहीं कर सकता।

57.4 किसी जगत पर सत्यता

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र की ही तरह प्रत्येक ज्ञानात्मक प्रतिरूप निर्धारित करता है कि उसमें कौन-से सूत्र किन जगतों पर सत्य माने जाते हैं। संबंधात्मक अर्थविज्ञान की मूल धारणा के लिए हम वही संकेत-पद्धति—"प्रतिरूप $\mathfrak{M}$, सूत्र φ को जगत w पर सत्य बनाता है"—अपनाते हैं। यह संबंध आगमनात्मक रूप से परिभाषित होता है और सभी गैर-मोडल संकारकों के लिए सामान्य मोडल मामले के समान है।

परिभाषा 57.5. किसी $\mathfrak{M}$ में *सूत्र φ की w पर सत्यता,* जिसे $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ से लिखते हैं, आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ कभी नहीं।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \top$ सदैव।
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ तभी जब $w \in V(p)$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$।
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ (या दोनों)।
7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।



चित्र 57.1: एक सरल ज्ञानात्मक प्रतिरूप।

8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ दोनों, या न $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ न $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।

9. $\varphi \equiv \mathrm{K}_a\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $R_a ww'$ वाले प्रत्येक $w' \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$।

पर अब हमें अपने अभिगम्यता संबंधों पर लगे प्रतिबंधों के बारे में विचार करना होगा। उपवाक्य (9) के अनुसार, जब $R_a ww'$ वाला कोई w' न हो, तब सूत्र $\mathrm{K}_a\psi$, w पर सत्य है। यह सामान्य मोडल तर्कशास्त्र वाला ही उपवाक्य है: जब किसी जगत का कोई उत्तरवर्ती न हो, तब सभी $\Box$-सूत्र वहाँ रिक्ततः सत्य होते हैं। यदि हम K को *ज्ञान* का निरूपण मानें, तो यह अत्यंत असहज लगता है। आखिर हम सामान्यतः मानते हैं कि ऐसी *कोई* परिस्थिति नहीं हो सकती जिसमें कोई कर्ता φ और $\neg\varphi$ दोनों को एक ही समय जानता हो।

एक समाधान यह सुनिश्चित करना है कि ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र में हमारा अभिगम्यता संबंध सदैव *स्वपरावर्ती* हो। मोटे तौर पर यह इस विचार के अनुरूप है कि वास्तविक जगत किसी कर्ता की सूचना के संगत है। वास्तव में ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र सामान्यतः S5 का उपयोग करते हैं, किंतु K_a संबंध से ठीक क्या निरूपित करना है, इसके अनुसार कुछ तर्कशास्त्र दुर्बलतर तंत्रों का उपयोग कर सकते हैं।

अब जबकि हमने किसी जगत पर सत्यता की मूल परिभाषा दे दी है, सामान्य मोडल तर्कशास्त्र की अन्य अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ—जैसे मोडल मान्यता और निष्कर्षण—मोडल संकारकों की इस नई व्याख्या पर सीधे लागू हो जाती हैं।

अब हम सार्वज्ञान संकारक C_G की सत्यता-शर्तें भी दे सकते हैं। खंड 2.8 से स्मरण करें कि किसी संबंध R का *संक्रमणशील संवरण* R^+ इस प्रकार परिभाषित है:

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n,$$

जहाँ

$$R^0 = R \text{ और}$$
$$R^{n+1} = \{\langle x, z\rangle : \exists y(R^n xy \wedge Ryz)\}.$$

तब, जहाँ G कर्ताओं का समूह है, हम $R_G = (\bigcup_{b \in G} R_b)^+$ को सभी कर्ताओं के अभिगम्यता संबंधों के संघ का संक्रमणशील संवरण परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 57.6. यदि $G' \subseteq G$, तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathrm{C}_{G'}\varphi$ तभी जब $R_{G'} ww'$ वाले प्रत्येक w' के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$।

यदि R ...है	*तो ... $\mathfrak{M}$ में सत्य है:*
	$\mathrm{K}(p \to q) \to (\mathrm{K}p \to \mathrm{K}q)$ (संवृतता)
स्वपरावर्ती: $\forall w Rww$	$\mathrm{K}p \to p$ (सत्यपरकता)
संक्रमणशील: $\forall u \forall v \forall w((Ruv \wedge Rvw) \to Ruw)$	$\mathrm{K}p \to \mathrm{KK}p$ (सकारात्मक आत्मनिरीक्षण)
यूक्लिडीय: $\forall w \forall u \forall v((Rwu \wedge Rwv) \to Ruv)$	$\neg\mathrm{K}p \to \mathrm{K}\neg\mathrm{K}p$ (नकारात्मक आत्मनिरीक्षण)

तालिका 57.1: चार ज्ञानात्मक सिद्धांत।

57.5 अभिगम्यता संबंध और ज्ञानात्मक सिद्धांत

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र में फ़्रेम-अनुरूपता के बारे में हम जो जानते हैं, उसके आधार पर यह देखना उपयोगी होगा कि ज्ञानात्मक व्याख्या देने पर अभिलाक्षणिक सूत्र कैसे दिखते हैं। हम पहले ही कह चुके हैं कि ज्ञानात्मक तर्कशास्त्रों की व्याख्या सामान्यतः S5 में की जाती है। अतः अब देखें कि विभिन्न ज्ञानात्मक सिद्धांत किस प्रकार निरूपित होते हैं और वे अलग-अलग फ़्रेम-शर्तों के अनुरूप कैसे हैं।

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र से स्मरण करें कि भिन्न मोडल सूत्र अभिगम्यता संबंधों के भिन्न गुणों को अभिलक्षित करते थे। निम्न सारणी उनमें से कुछ को चुनती है जो विशिष्ट ज्ञानात्मक सिद्धांतों के अनुरूप हैं।

T अभिगृहीत के अनुरूप सत्यपरकता को प्रायः इन सिद्धांतों में सबसे कम विवादास्पद माना जाता है, क्योंकि वह यह दावा व्यक्त करती है कि यदि कोई सूत्र ज्ञात है, तो उसे सत्य होना चाहिए। संवृतता और सकारात्मक तथा नकारात्मक आत्मनिरीक्षण कहीं अधिक विवादास्पद हैं।

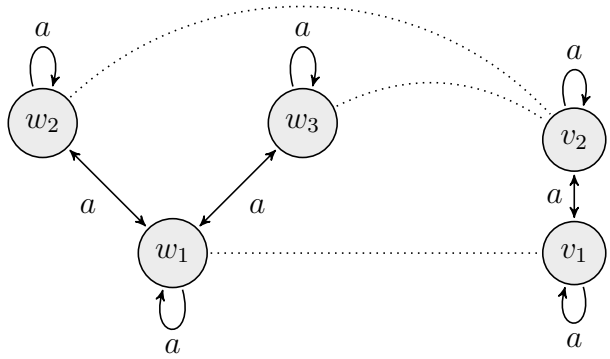
K अभिगृहीत के अनुरूप संवृतता यह विचार व्यक्त करती है कि किसी कर्ता का ज्ञान निहितार्थ के अधीन संवृत है। कुछ मामलों में यह विश्वसनीय लग सकता है। मसलन, मुझे पता हो सकता है कि यदि मैं विक्टोरिया में हूँ तो मैं वैंकूवर द्वीप पर हूँ। विचित्र संशयवादी परिदृश्यों को छोड़कर, मैं यह जानता हूँ कि मैं विक्टोरिया में हूँ; इससे यह भी निकलना चाहिए कि मैं जानता हूँ कि मैं वैंकूवर द्वीप पर हूँ। इस मामले में मेरे ज्ञान का तार्किक संवरण अपेक्षाकृत सहज लग सकता है। दूसरी ओर, हम अपने ज्ञान के सभी परिणामों पर सदैव विचार नहीं करते; अतः दूसरे मामलों में इससे कम सहज निष्कर्ष मिल सकते हैं।

सकारात्मक आत्मनिरीक्षण, जिसे कभी-कभी KK-सिद्धांत कहते हैं, प्रायः इस कथन के रूप में व्यक्त किया जाता है कि यदि मैं कुछ जानता हूँ, तो मैं यह भी जानता हूँ कि मैं उसे जानता हूँ। यह अभिगृहीत 4 का ज्ञानात्मक प्रतिरूप है। इसी के अनुरूप नकारात्मक आत्मनिरीक्षण इस कथन के रूप में व्यक्त किया जाता है कि यदि मैं कोई बात *नहीं* जानता, तो मैं जानता हूँ कि मैं उसे नहीं जानता; यह अभिगृहीत 5 का प्रतिरूप है। इन दोनों के अपेक्षाकृत सामान्य प्रतिदृष्टांत दिखते हैं, जिनमें मुझे इस बात का निश्चय नहीं होता कि मैं कोई ऐसी बात जानता हूँ या नहीं जिसे वास्तव में मैं जानता हूँ।

57.6 द्विसिमुलेशन

हमारी ज्ञानात्मक भाषा की अभिव्यक्ति-शक्ति के बारे में एक शेष प्रश्न प्रतिरूपों और उनमें सत्य सूत्रों के बीच के संबंध से जुड़ा है। फ़्रेम-अनुरूपता के परिणामों से हमने देखा है कि जब कुछ सूत्र किसी फ़्रेम में मान्य होते हैं, तो वे यह भी सुनिश्चित करते हैं कि वह फ़्रेम कुछ निश्चित गुणों को संतुष्ट करे। किंतु क्या हमारी मोडल भाषा, उदाहरणार्थ, ऐसे जगत जिसमें एक स्वपरावर्ती तीर है और जगतों की ऐसी अनंत शृंखला जिसमें प्रत्येक जगत अगले तक जाता है, के बीच अंतर कर सकती है? अर्थात क्या कोई ऐसा सूत्र A है जो इन दोनों में से केवल एक जगत पर सत्य हो?

द्विसिमुलेशन संबंधात्मक प्रतिरूपों के बीच परिभाषित किया जाने वाला ऐसा संबंध है जो बताता है कि उनकी संरचना प्रभावतः एक ही है। जैसा हम देखेंगे, यह प्रतिरूपों के बीच समतुल्यता की उस धारणा को ग्रहण करता है जिसे हमारी ज्ञानात्मक भाषा में व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 57.2: दो द्विसिमुलेशन-समान प्रतिरूप।

परिभाषा 57.7 (द्विसिमुलेशन). मान लें कि $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ और $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ दो संबंधात्मक प्रतिरूप हैं, और $\mathcal{R} \subseteq W_1 \times W_2$ एक द्विपदी संबंध है। हम $\mathcal{R}$ को *द्विसिमुलेशन* कहते हैं, यदि प्रत्येक $\langle w_1, w_2 \rangle \in \mathcal{R}$ के लिए निम्न शर्तें पूरी हों:

1. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p के लिए $w_1 \in V_1(p)$ तभी जब $w_2 \in V_2(p)$।
2. सभी कर्ताओं $a \in A$ और जगतों $v_1 \in W_1$ के लिए, यदि $R_{1_a} w_1 v_1$, तो कोई $v_2 \in W_2$ ऐसा है कि $R_{2_a} w_2 v_2$ और $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathcal{R}$।
3. सभी कर्ताओं $a \in A$ और जगतों $v_2 \in W_2$ के लिए, यदि $R_{2_a} w_2 v_2$, तो कोई $v_1 \in W_1$ ऐसा है कि $R_{1_a} w_1 v_1$ और $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathcal{R}$।

जब M_1 और M_2 के बीच कोई द्विसिमुलेशन जगतों w_1 और w_2 को जोड़ता है, तब हम $\langle M_1, w_1 \rangle \leftrightarrows \langle M_2, w_2 \rangle$ भी लिखते हैं और $\langle M_1, w_1 \rangle$ तथा $\langle M_2, w_2 \rangle$ को *द्विसिमुलेशन-समान* कहते हैं।

द्विसिमुलेशन संबंध के अलग-अलग उपवाक्य अलग बातें सुनिश्चित करते हैं। उपवाक्य 1 यह सुनिश्चित करता है कि द्विसिमुलेशन-समान जगत समान मोडल-मुक्त सूत्रों को संतुष्ट करेंगे, क्योंकि वह सभी प्रतिज्ञप्ति चरों पर सहमति सुनिश्चित करता है। अन्य दो उपवाक्य, जिन्हें क्रमशः "आगे" और "पीछे" कहते हैं, सुनिश्चित करते हैं कि अभिगम्यता संबंधों की संरचना समान होगी।

प्रमेय 57.8. *यदि $\langle M_1, w_1 \rangle \leftrightarrows \langle M_2, w_2 \rangle$, तो प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\mathfrak{M}_1, w_1 \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}_2, w_2 \Vdash \varphi$।*

यद्यपि आकृति 57.2 में चित्रित दोनों प्रतिरूप एक-दूसरे के बिल्कुल समान नहीं हैं, फिर भी जगतों w_1 और v_1 को जोड़ने वाला द्विसिमुलेशन है। यह द्विसिमुलेशन w_2 और w_3 दोनों को v_2 से भी जोड़ेगा। आशय यह है कि हमारी मोडल भाषा में ऐसा कुछ व्यक्त नहीं किया जा सकता जो वास्तव में उनके बीच अंतर करे। किंतु यदि w_2 और w_3 भिन्न प्रतिज्ञप्ति चरों को संतुष्ट करते, तो स्थिति अलग होती।

57.7 सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्र

गतिक ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र हमें उन विधियों को निरूपित करने देते हैं जिनसे समय के साथ, अथवा नई सूचना मिलने पर, कर्ताओं का ज्ञान बदलता है। इनमें से कई तर्कशास्त्र ज्ञान के परिवर्तनों को सूचनात्मक *घटनाओं* या *अद्यतनों* के द्वारा निरूपित करते हैं। अद्यतन का सबसे मूल प्रकार सार्वजनिक घोषणा है, जिसमें कोई सूत्र सत्यतापूर्वक घोषित किया जाता है और सभी कर्ता उस घटना को एक साथ देखते हैं। इसके लिए हम भाषा को निम्न प्रकार विस्तृत करते हैं।

परिभाषा 57.9. मान लें कि G कर्ता-संकेतों का समुच्चय है। सार्वजनिक घोषणाओं वाले बहु-कर्ता ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की मूल भाषा में निम्नलिखित होते हैं:

1. असत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$।
2. सत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\top$।
3. प्रतिज्ञप्ति चरों का गणनीय अनंत समुच्चय: p_0, p_1, p_2, ...
4. प्रतिज्ञप्तिक संयोजक: $\neg$ (निषेध), $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\rightarrow$ (आपादन)
5. प्रत्येक $a \in G$ के लिए ज्ञान-संकारक K_a।
6. प्रत्येक सूत्र ψ के लिए सार्वजनिक-घोषणा संकारक $[\psi]$।

सार्वजनिक-घोषणा संकारक बॉक्स संकारक की तरह कार्य करता है, अतः भाषा की हमारी आगमनात्मक परिभाषा इसी के अनुरूप दी जाती है:

परिभाषा 57.10. ज्ञानात्मक भाषा की *सूत्रें* आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित होती हैं:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।
2. $\top$ एक परमाण्विक सूत्र है।
3. प्रत्येक प्रतिज्ञप्तिक चर p_i एक (परमाण्विक) सूत्र है।
4. यदि φ एक सूत्र है, तो $\neg\varphi$ एक सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ एक सूत्र है।
6. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ एक सूत्र है।
7. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \rightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
8. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ एक सूत्र है।
9. यदि φ एक सूत्र और $a \in G$ है, तो $\mathrm{K}_a\varphi$ एक सूत्र है।
10. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $[\varphi]\psi$ एक सूत्र है।
11. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

सूत्र $[\varphi]\psi$ का अभिप्रेत पठन है, "φ को सत्यतापूर्वक घोषित किए जाने के बाद ψ सत्य है।" सार्वजनिक घोषणाओं के संदर्भ में कभी-कभी सार्वज्ञान की बात करना भी उपयोगी होगा, अतः भाषा में सार्वज्ञान संकारक $\mathrm{C}_G\varphi$ भी सम्मिलित हो सकता है।

57.8 सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान

सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्र के संबंधात्मक प्रतिरूप वही हैं जो ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र में थे। किंतु सार्वजनिक-घोषणा संकारक का अर्थविज्ञान नया है।

परिभाषा 57.11. किसी $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ में *सूत्र φ की w पर सत्यता,* जिसे $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ से लिखते हैं, आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

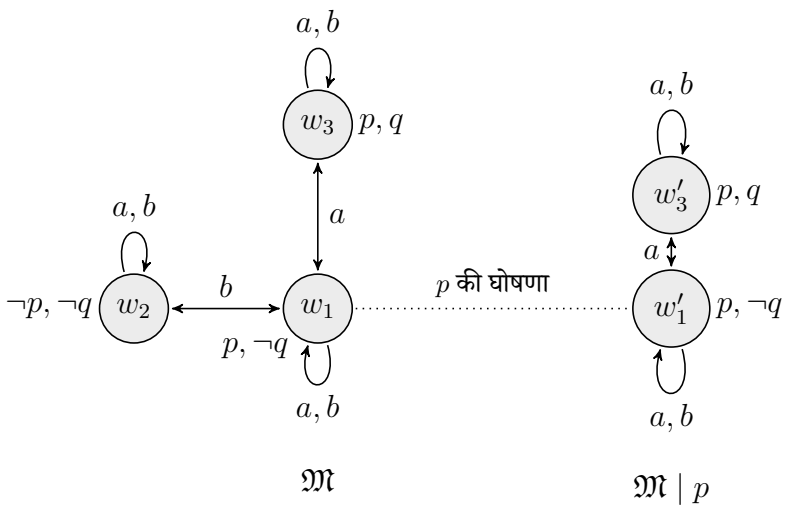
1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ कभी नहीं।
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \top$ सदैव।
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ तभी जब $w \in V(p)$।
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$।
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ (या दोनों)।
7. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब या तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ दोनों, या न $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ न $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
9. $\varphi \equiv \mathrm{K}_a\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $R_a ww'$ वाले प्रत्येक $w' \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$।
10. $\varphi \equiv [\psi]\chi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ से $\mathfrak{M} \mid \psi, w \Vdash \chi$ निष्कर्षित हो।
    जहाँ $\mathfrak{M} \mid \psi = \langle W', R', V' \rangle$ इस प्रकार परिभाषित है:
    a) $W' = \{u \in W : \mathfrak{M}, u \Vdash \psi\}$। अतः $\mathfrak{M} \mid \psi$ के जगत, प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ के वे जगत हैं जिन पर ψ सत्य है।
    b) $R'_a = R_a \cap (W' \times W')$। प्रत्येक कर्ता का अभिगम्यता संबंध केवल उन जगतों तक सीमित कर दिया जाता है जो W' में शेष रहते हैं।
    c) $V'(p) = \{u \in W' : u \in V(p)\}$। इसी प्रकार जगतों पर प्रतिज्ञप्तिक मूल्य-नियतन अपरिवर्तित रहते हैं। यह इस विचार को निरूपित करता है कि सूचनात्मक घटनाएँ प्रतिज्ञप्तिक चरों के सत्य-मूल्य नहीं बदलेंगी।

इस प्रकार सार्वजनिक घोषणा तर्कशास्त्रों की विशिष्टता यह है कि $\mathfrak{M}$ पर किसी सूत्र की सत्यता का निर्णय कभी-कभी स्वयं $\mathfrak{M}$ से भिन्न किसी प्रतिरूप का उल्लेख करके ही किया जा सकता है।

यह भी ध्यान दें कि हमारा अर्थविज्ञान घोषणा-संकारक को $\Box$ संकारक मानता है। अतः यदि किसी सूत्र φ को किसी जगत पर सत्यतापूर्वक घोषित नहीं किया जा सकता, तो $[\varphi]B$ वहाँ सहजतः सत्य होगा, ठीक वैसे ही जैसे सभी $\Box$-सूत्र अंतिम बिंदुओं पर सत्य होते हैं।

हम किसी सूत्र की सार्वजनिक घोषणा को प्रतिरूप को छोटा करने, अथवा उसे केवल उन जगतों तक सीमित करने, के रूप में देख सकते हैं जिन पर वह सूत्र सत्य था। आकृति 57.3 में p की सार्वजनिक घोषणा के प्रभाव का उदाहरण दिया गया है। उस प्रतिरूप की एक उल्लेखनीय बात यह है कि घोषणा के परिणामस्वरूप कर्ता b जान लेता है कि p, जबकि कर्ता a कुछ नया नहीं सीखता (क्योंकि a पहले से जानता था कि p सत्य है)।

अधिक औपचारिक रूप से, हमारे पास $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash \neg\mathrm{K}_b p$ है, किंतु $\mathfrak{M} \mid p, w'_1 \Vdash \mathrm{K}_b p$। इससे $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash [p]\mathrm{K}_b p$ निकलता है। पर घोषणा के परिणाम के बारे में हम इससे भी प्रबल दावे कर सकते हैं। वास्तव में $\mathfrak{M}, w_1 \Vdash [p]\mathrm{C}_{\{a,b\}}p$। दूसरे शब्दों में, p घोषित होने के बाद वह *सार्वज्ञान* बन जाता है।



चित्र 57.3: p की सार्वजनिक घोषणा से पहले और बाद में।

फिर भी हम पूछ सकते हैं कि क्या सामान्य स्थिति में भी ऐसा होता है और क्या φ की सत्य घोषणा से वह *सदैव* सार्वज्ञान बन जाता है। शायद आश्चर्यजनक रूप से उत्तर नहीं है। वास्तव में ऐसे सूत्रों को सत्यतापूर्वक घोषित करना संभव है जो घोषणा के बाद सत्य नहीं रहते। उदाहरण के लिए, आकृति 57.3 में w_1 पर $p \wedge \neg \mathrm{K}_b p$ घोषित करने के प्रभाव पर विचार करें। वस्तुतः $\mathfrak{M} \mid p$ और $\mathfrak{M} \mid (p \wedge \neg \mathrm{K}_b p)$ एक ही प्रतिरूप हैं। किंतु, जैसा हम देख चुके हैं, $\mathfrak{M} \mid p, w'_1 \Vdash \mathrm{K}_b p$। अतः $\mathfrak{M} \mid (p \wedge \neg \mathrm{K}_b p), w'_1 \Vdash \neg(p \wedge \neg \mathrm{K}_b p)$; इसलिए यह ऐसा सूत्र है जो घोषित होते ही असत्य हो जाता है।

खण्ड XIII

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र

अध्याय 58

परिचय

58.1 रचनात्मक तर्क-विचार

मोडल संकारकों या द्वितीय-कोटि परिमाणकों द्वारा शास्त्रीय तर्कशास्त्र का विस्तार करने के विपरीत, अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र इस अर्थ में "गैर-शास्त्रीय" है कि वह शास्त्रीय तर्कशास्त्र को सीमित करता है। शास्त्रीय तर्कशास्त्र अनेक प्रकार से *अरचनात्मक* है। अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का उद्देश्य उस अधिक "रचनात्मक" तर्क-विचार को ग्रहण करना है जो एक प्रकार के रचनात्मक गणित की विशेषता है। निम्न उदाहरण इसके कुछ आधारभूत प्रेरकों को स्पष्ट कर सकते हैं।

मान लें कि कोई व्यक्ति दावा करता है कि उसने ऐसा प्राकृतिक संख्या n निर्धारित कर लिया है कि यदि n सम है तो रीमान परिकल्पना सत्य है, और यदि n विषम है तो रीमान परिकल्पना असत्य है। यह तो बड़ी अच्छी खबर है! रीमान परिकल्पना सत्य है या नहीं, गणित के बड़े खुले प्रश्नों में से एक है; और लगता है कि उसने समस्या को मात्र एक गणना में बदल दिया है—अर्थात यह निर्धारित करने में कि कोई विशेष संख्या सम है या नहीं।

तो n का वह जादुई मान क्या है? वह इसे इस प्रकार बताता है: n वह प्राकृतिक संख्या है जो रीमान परिकल्पना सत्य होने पर 2, और अन्यथा 3 के बराबर है।

क्रोधित होकर आप अपने पैसे वापस माँगते हैं। शास्त्रीय दृष्टिकोण से ऊपर का वर्णन वास्तव में n का एक अद्वितीय मान निर्धारित करता है; किंतु आप सचमुच n का ऐसा मान चाहते हैं जो *स्पष्टतः* दिया गया हो।

एक और, शायद कम कृत्रिम, उदाहरण के लिए निम्न प्रश्न पर विचार करें। हम जानते हैं कि किसी अपरिमेय संख्या को परिमेय घात तक उठाकर परिमेय परिणाम पाना संभव है; उदाहरणार्थ $\sqrt{2}^2 = 2$। यह कम स्पष्ट है कि क्या किसी अपरिमेय संख्या को *अपरिमेय* घात तक उठाकर परिमेय परिणाम पाना संभव है। निम्न प्रमेय इसका उत्तर हाँ में देता है:

प्रमेय 58.1. *ऐसी अपरिमेय संख्याएँ a और b हैं कि a^b परिमेय है।*

प्रमाण. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ पर विचार करें। यदि यह परिमेय है, तो काम पूरा हुआ: हम $a = b = \sqrt{2}$ ले सकते हैं। अन्यथा यह अपरिमेय है। तब हमारे पास

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

है, जो परिमेय है। अतः इस स्थिति में a को $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ और b को $\sqrt{2}$ लें। □

क्या यह एक वैध प्रमाण है? अधिकांश गणितज्ञ मानते हैं कि हाँ। किंतु यहाँ फिर कुछ असंतोषजनक है: हमने किसी निश्चित गुण वाले वास्तविक संख्याओं के युग्म का अस्तित्व सिद्ध किया, पर यह नहीं बता सके कि वह *कौन-सा* युग्म है। उसी परिणाम को ऐसे भी सिद्ध किया जा सकता है कि प्रमाण में युग्म a, b *दिया* जाए: $a = \sqrt{3}$ और $b = \log_3 4$ लें। तब

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{1/2\cdot\log_3 4} = (3^{\log_3 4})^{1/2} = 4^{1/2} = 2,$$

क्योंकि $3^{\log_3 x} = x$।

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र उस प्रकार के तर्क-विचार को ग्रहण करने के लिए बनाया गया है जिसमें पहले प्रमाण जैसी चालों की अनुमति नहीं होती। $\varphi(x)$ को संतुष्ट करने वाले किसी x का अस्तित्व सिद्ध करने का अर्थ है कि आपको कोई

विशिष्ट x और उसके द्वारा φ को संतुष्ट करने का प्रमाण देना होगा, जैसा दूसरे प्रमाण में हुआ। φ या ψ सत्य है, यह सिद्ध करने के लिए आपको उन दोनों में से किसी एक को सिद्ध कर सकना होगा।

औपचारिक रूप से कहें तो अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र, शास्त्रीय तर्कशास्त्र की किसी व्युत्पत्ति-प्रणाली को एक निश्चित प्रकार से सीमित करने पर मिलता है। गणितीय दृष्टि से ये केवल औपचारिक निगमनात्मक प्रणालियाँ हैं, किंतु जैसा पहले कहा गया, उनका उद्देश्य एक प्रकार के गणितीय तर्क-विचार को ग्रहण करना है। इसे हम गणित के किसी दार्शनिक दृष्टिकोण (जैसे ब्राउवर के अंतःप्रज्ञावाद) पर उचित ठहरने वाला तर्क-विचार मान सकते हैं; इसे अधिक "मूर्त" और संतोषजनक गणितीय तर्क-विचार (बिशप के रचनावाद की दिशा में) मान सकते हैं; और इस पर बहस कर सकते हैं कि औपचारिक वर्णन अनौपचारिक प्रेरणा को ग्रहण करता है या नहीं। किंतु हमारे दार्शनिक मत जो भी हों, हम अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का अध्ययन औपचारिक रूप से प्रस्तुत तर्कशास्त्र के रूप में कर सकते हैं; और कारण जो भी हों, अनेक गणितीय तर्कशास्त्री ऐसा करना रोचक मानते हैं।

58.2 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की वाक्यरचना

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की वाक्यरचना प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र जैसी ही है। शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र में कुछ संयोजकों को अन्य संयोजकों के द्वारा परिभाषित किया जा सकता है; मसलन $\varphi \to \psi$ को $\neg\varphi \vee \psi$ से, अथवा $\varphi \vee \psi$ को $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ से परिभाषित किया जा सकता है। अतः शास्त्रीय तर्कशास्त्र की प्रस्तुतियाँ प्रायः कुछ संयोजकों को इन परिभाषाओं के संक्षिप्त रूप के रूप में प्रस्तुत करती हैं। अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में ऐसा नहीं है, केवल दो अपवाद हैं: $\neg\varphi$ को $\varphi \to \bot$ का संक्षिप्त रूप परिभाषित किया जा सकता है—और प्रायः किया जाता है। तब निश्चय ही $\bot$ को स्वयं परिभाषित नहीं करना चाहिए! साथ ही, शास्त्रीय तर्कशास्त्र की तरह $\varphi \leftrightarrow \psi$ को $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ से परिभाषित किया जा सकता है।

प्रतिज्ञप्तिक अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के सूत्र, *प्रतिज्ञप्ति चरों* और प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$ से *तार्किक संयोजकों* का प्रयोग करके बनाए जाते हैं। हमारे पास हैं:

1. प्रतिज्ञप्ति चरों p_0, p_1, ...का गणनीय अनंत समुच्चय At_0।
2. असत्यता का प्रतिज्ञप्तिक अचर $\bot$।
3. तार्किक संयोजक: $\wedge$ (संयोजन), $\vee$ (वियोजन), $\to$ (सशर्त)।
4. विराम-चिह्न: (,), और अल्पविराम।

परिभाषा 58.2 (सूत्र). प्रतिज्ञप्तिक अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के *सूत्रों* का समुच्चय $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$ आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\bot$ एक परमाण्विक सूत्र है।
2. प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p_i एक परमाण्विक सूत्र है।
3. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \wedge \psi)$ एक सूत्र है।
4. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \vee \psi)$ एक सूत्र है।
5. यदि φ और ψ सूत्र हैं, तो $(\varphi \to \psi)$ एक सूत्र है।
6. इसके अतिरिक्त कुछ भी सूत्र नहीं है।

ऊपर प्रस्तुत आदिम संयोजकों के अतिरिक्त हम निम्न *परिभाषित* संकेतों का भी उपयोग करते हैं: $\neg$ (निषेध) और $\leftrightarrow$ (द्विशर्त)। परिभाषित संकारकों से निर्मित सूत्रों को इस प्रकार समझना है:

1. $\neg\varphi$, $\varphi \to \bot$ का संक्षिप्त रूप है।

2. $\varphi \leftrightarrow \psi$, $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ का संक्षिप्त रूप है।

यद्यपि औपचारिक रूप से $\neg$ को संक्षिप्त रूप माना जाता है, फिर भी कभी-कभी हम परिभाषाओं में $\neg$ के लिए स्पष्ट नियम और उपवाक्य ऐसे देंगे मानो वह आदिम हो। इसका मुख्य उद्देश्य अभ्यास-प्रश्नों को प्रस्तुत करना है।

58.3 ब्राउवर–हाइटिंग–कोल्मोगोरोव व्याख्या

BHK व्याख्या का उपयोग करके अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तियों की मान्यता के प्रमाण उलझाऊ हैं; उन्हें अधिक स्पष्ट ढंग से समझाना आवश्यक है।

अंतःप्रज्ञावादी संयोजकों की एक अनौपचारिक रचनात्मक व्याख्या है, जिसे सामान्यतः ब्राउवर–हाइटिंग–कोल्मोगोरोव व्याख्या कहते हैं। इसमें "रचना" की धारणा का उपयोग होता है, जिसे आप रचनात्मक प्रमाण समझ सकते हैं। (BHK व्याख्या में हम "प्रमाण" शब्द का उपयोग नहीं करते, ताकि उसे किसी औपचारिक व्युत्पत्ति-प्रणाली की व्युत्पत्ति की धारणा से भ्रमित न किया जाए।) इस सहज धारणा के आधार पर BHK व्याख्या अंतःप्रज्ञावादी संयोजकों के अर्थ समझाती है।

1. हम मानते हैं कि हमें ज्ञात है कि परमाण्विक कथन की रचना किसे माना जाता है।
2. $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ की रचना ऐसा युग्म $\langle M_1, M_2 \rangle$ है जिसमें M_1, φ_1 की और M_2, φ_2 की रचना है।
3. $\varphi_1 \vee \varphi_2$ की रचना ऐसा युग्म $\langle s, M \rangle$ है जिसमें या तो s का मान 1 और M, φ_1 की रचना है, अथवा s का मान 2 और M, φ_2 की रचना है।
4. $\varphi \to \psi$ की रचना ऐसा फलन है जो φ की किसी रचना को ψ की रचना में बदल देता है।
5. $\perp$ (असंगति) की कोई रचना नहीं है।
6. $\neg\varphi$ को $\varphi \to \perp$ का पर्याय परिभाषित किया जाता है। अर्थात $\neg\varphi$ की रचना ऐसा फलन है जो φ की रचना को $\perp$ की रचना में बदल देता है।

उदाहरण 58.3. उदाहरण के लिए $\neg\perp$ लें। उसकी रचना ऐसा फलन है जो आगत के रूप में $\perp$ की कोई भी रचना दिए जाने पर निर्गत में $\perp$ की रचना देता है। स्पष्टतः तत्समक फलन Id ऐसी रचना है: $\perp$ की कोई रचना M दिए जाने पर $\mathrm{Id}(M) = M$, $\perp$ की रचना देता है।

सामान्यतः $\neg\varphi$ का अर्थ है, "φ की रचना असंभव है।"

उदाहरण 58.4. किसी भी प्रतिज्ञप्ति φ के लिए $\varphi \to \neg\neg\varphi$, अर्थात $\varphi \to ((\varphi \to \perp) \to \perp)$, सिद्ध करें। इसकी रचना ऐसा फलन f होना चाहिए जो φ की कोई रचना M दिए जाने पर $(\varphi \to \perp) \to \perp$ की रचना $f(M)$ लौटाए। f इस रचना को इस प्रकार बनाता है: हमें ऐसा फलन g परिभाषित करना है जो आगत में $\varphi \to \perp$ की कोई रचना h मिलने पर निर्गत में $\perp$ की रचना दे। हम g को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं: आगत h को φ की उस रचना M पर लागू करें जो हमें पहले मिली थी। चूँकि h का निर्गत $h(M)$, $\perp$ की रचना है, इसलिए यदि M, φ की रचना है तो $f(M)(h) = h(M)$, $\perp$ की रचना है।

उदाहरण 58.5. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, अर्थात $(\varphi \wedge (\varphi \to \perp)) \to \perp$, की रचना दें। यह ऐसा फलन f है जो आगत में $\varphi \wedge (\varphi \to \perp)$ की कोई रचना M मिलने पर $\perp$ की रचना देता है। किसी संयोजन $\psi_1 \wedge \psi_2$ की रचना ऐसा युग्म

$\langle N_1, N_2\rangle$ है जिसमें N_1, ψ_1 की और N_2, ψ_2 की रचना है। हम ऐसे फलन p_1 और p_2 परिभाषित कर सकते हैं जो $\psi_1 \wedge \psi_2$ की किसी रचना से क्रमशः ψ_1 और ψ_2 की रचनाएँ प्राप्त करते हैं:

$$p_1(\langle N_1, N_2\rangle) = N_1$$
$$p_2(\langle N_1, N_2\rangle) = N_2$$

f इस प्रकार कार्य करता है: पहले वह अपने आगत M पर p_1 लगाता है। इससे φ की रचना मिलती है। फिर वह M पर p_2 लगाता है, जिससे $\varphi \to \bot$ की रचना मिलती है। ऐसी रचना स्वयं एक फलन $p_2(M)$ है, जो आगत में φ की कोई रचना मिलने पर $\bot$ की रचना देता है। दूसरे शब्दों में, $p_2(M)$ को $p_1(M)$ पर लगाने से हमें $\bot$ की रचना मिलती है। अतः हम $f(M) = p_2(M)(p_1(M))$ परिभाषित कर सकते हैं।

उदाहरण 58.6. $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$ की रचना दें; अर्थात ऐसा फलन f जो $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$ की किसी रचना g को $(\varphi \to (\psi \to \chi))$ की रचना में बदल दे। रचना g स्वयं एक फलन है ($\varphi \wedge \psi$ की रचनाओं से C की रचनाओं तक)। और निर्गत $f(g)$ ऐसा फलन h_g है जो φ की रचनाओं को उन फलनों में भेजता है जो ψ की रचनाओं को χ की रचनाओं में भेजते हैं।

ठीक है, यह उलझाऊ है। हमें कोई निश्चित फलन h_g बनाना है, जो आगत g के लिए f का निर्गत होगा। h_g का आगत φ की कोई रचना M है। $h_g(M)$ का निर्गत ऐसा फलन k_M होना चाहिए जो ψ की रचनाओं N को χ की रचनाओं में भेजता है। $k_{g,M}(N) = g(\langle M, N\rangle)$ लें। स्मरण रखें कि $\langle M, N\rangle$, $\varphi \wedge \psi$ की रचना है। अतः $k_{g,M}$, $\psi \to \chi$ की रचना है: वह ψ की रचनाओं N को χ की रचनाओं में भेजता है। अब $h_g(M) = k_{g,M}$ लें। यह ऐसा फलन है जो φ की रचनाओं M को $\psi \to \chi$ की रचनाओं $k_{g,M}$ में भेजता है। अब $f(g) = h_g$ लें। यह ऐसा फलन है जो $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$ की रचनाओं g को $\varphi \to (\psi \to \chi)$ की रचनाओं में भेजता है। उफ़!

$\varphi \vee \neg\varphi$ कथन को *बहिष्कृत मध्य का नियम* कहते हैं। इसे हम कुछ विशिष्ट φ के लिए सिद्ध कर सकते हैं (जैसे $\bot \vee \neg\bot$), किंतु सामान्यतः नहीं। कारण यह है कि अंतःप्रज्ञावादी वियोजन के लिए किसी एक वियोज्य की रचना आवश्यक होती है, पर कुछ कथन ऐसे हैं जिन्हें अभी न सिद्ध किया जा सकता है, न खंडित (मसलन गोल्डबाख परिकल्पना)। फिर भी बहिष्कृत मध्य के नियम का खंडन भी नहीं किया जा सकता; अर्थात $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ सत्य है।

उदाहरण 58.7. $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ सिद्ध करने के लिए हमें ऐसा फलन f चाहिए जो $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$, अर्थात $(\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot$, की किसी रचना को $\bot$ की रचना में बदल दे। दूसरे शब्दों में, हमें ऐसा फलन f चाहिए कि यदि g, $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ की रचना है, तो $f(g)$, $\bot$ की रचना हो।

मान लें कि g, $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ की रचना है; अर्थात ऐसा फलन जो $\varphi \vee \neg\varphi$ की किसी रचना को $\bot$ की रचना में बदलता है। $\varphi \vee \neg\varphi$ की रचना ऐसा युग्म $\langle s, M\rangle$ है जिसमें या तो $s = 1$ और M, φ की रचना है, अथवा $s = 2$ और M, $\neg\varphi$ की रचना है। h_1 वह फलन हो जो φ की किसी रचना M_1 को $\varphi \vee \neg\varphi$ की रचना में भेजता है: वह M_1 को $\langle 1, M_2\rangle$ में भेजता है। और h_2 वह फलन हो जो $\neg\varphi$ की किसी रचना M_2 को $\varphi \vee \neg\varphi$ की रचना में भेजता है: वह M_2 को $\langle 2, M_2\rangle$ में भेजता है।

k को $g \circ h_1$ लें: यह ऐसा फलन है जो φ की कोई रचना दिए जाने पर $\bot$ की रचना लौटाता है; अर्थात यह $\varphi \to \bot$ अथवा $\neg\varphi$ की रचना है। अब l को $g \circ h_2$ लें। यह ऐसा फलन है जो $\neg\varphi$ की कोई रचना दिए जाने पर $\bot$ की रचना देता है। चूँकि k, $\neg\varphi$ की रचना है, इसलिए $l(k)$, $\bot$ की रचना है।

समग्रतः हमने यह बताया है कि $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ की किसी रचना g को $\bot$ की रचना में कैसे बदला जा सकता है; अर्थात वह फलन f जो $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ की रचना g को $\bot$ की रचना $l(k)$ में भेजता है, $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ की रचना है।

जैसा आप देख सकते हैं, सूत्रों की अंतःप्रज्ञावादी मान्यता दिखाने के लिए BHK व्याख्या का उपयोग शीघ्र ही बोझिल और उलझाऊ हो जाता है। सौभाग्य से अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के लिए बेहतर व्युत्पत्ति-प्रणालियाँ और अधिक सटीक अर्थवैज्ञानिक व्याख्याएँ उपलब्ध हैं।

58.4 प्राकृतिक निगमन

$\perp_C$ नियमों के बिना प्राकृतिक निगमन, अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की एक मानक व्युत्पत्ति-प्रणाली है। हम नियमों को यहाँ दोहराते हैं और BHK व्याख्या के द्वारा उनकी प्रेरणा बताते हैं। प्रत्येक मामले में नियम हमें यह निष्कर्ष निकालने देता है कि यदि पूर्वाधारों की रचनाएँ हैं, तो निष्कर्ष की भी रचना है।

चूँकि प्राकृतिक निगमन की व्युत्पत्तियों में अविमोचित मान्यताएँ होती हैं, इसलिए ऐसी किसी व्युत्पत्ति को—मसलन Γ की अमुक्त मान्यताओं से φ की व्युत्पत्ति को—ऐसा फलन मानना चाहिए जो सभी $\psi \in \Gamma$ की रचनाओं को φ की रचना में बदलता है। यदि किसी भी अमुक्त मान्यता के बिना φ की कोई व्युत्पत्ति है, तो BHK व्याख्या के अर्थ में φ की रचना है। किंतु चर्चा के लिए, जहाँ आवश्यकता न हो वहाँ हम Γ को नहीं लिखेंगे।

मान्यता φ स्वयं, अमुक्त मान्यता φ से φ की एक व्युत्पत्ति है। यह BHK व्याख्या से मेल खाता है: रचनाओं पर तत्समक फलन φ की किसी भी रचना को φ की रचना में बदलता है।

संयोजन

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro} \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\text{Elim} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\text{Elim}$$

मान लें कि हमारे पास क्रमशः φ_1 और φ_2 की रचनाएँ N_1, N_2 हैं। तब हमारे पास $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ की रचना भी है, अर्थात युग्म $\langle N_1, N_2 \rangle$।

BHK व्याख्या में $\varphi_1 \wedge \varphi_1$ की रचना एक युग्म $\langle N_1, N_2 \rangle$ है। अतः मान लें कि हमारे पास ऐसा युग्म है। तब हमारे पास प्रत्येक संयोज्य की रचना भी है: N_1, φ_1 की और N_2, φ_2 की रचना है।

सशर्त

$$u\,\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad\qquad \frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

यदि हमारे पास अमुक्त मान्यता φ से ψ की कोई व्युत्पत्ति है, तो ऐसा फलन f है जो φ की रचनाओं को ψ की रचनाओं में बदलता है। वही फलन $\varphi \to \psi$ की रचना है। अतः यदि $\to$Intro के पूर्वाधार की रचना, φ की किसी रचना पर आश्रित है, तो निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ की रचना है।

दूसरी ओर मान लें कि φ की रचना N और $\varphi \to \psi$ की रचना f है। $\varphi \to \psi$ की रचना ऐसा फलन है जो φ की रचनाओं को ψ की रचनाओं में बदलता है। अतः $f(N)$, ψ की रचना है; अर्थात $\to$Elim के निष्कर्ष की रचना है।

वियोजन

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\text{Intro} \qquad {}_{n}\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]^n\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ \vee\text{Elim}$$

यदि हमारे पास φ_i की कोई रचना N_i है, तो उसे हम $\varphi_1 \vee \varphi_2$ की रचना $\langle i, N_i \rangle$ में बदल सकते हैं। दूसरी ओर, मान लें कि हमारे पास $\varphi_1 \vee \varphi_2$ की कोई रचना, अर्थात ऐसा युग्म $\langle i, N_i \rangle$ है जहाँ N_i, φ_i की रचना है; और ऐसे फलन f_1, f_2 भी हैं जो क्रमशः φ_1, φ_2 की रचनाओं को χ की रचनाओं में बदलते हैं। तब $f_i(N_i)$, $\vee$Elim के निष्कर्ष χ की रचना है।

असंगति

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot_I$$

यदि हमारे पास अमुक्त मान्यताओं ψ_1, ..., ψ_n से $\bot$ की कोई व्युत्पत्ति है, तो ऐसा फलन $f(M_1, \ldots, M_n)$ है जो ψ_1, ..., ψ_n की रचनाओं को $\bot$ की रचना में बदलता है। चूँकि $\bot$ की कोई रचना नहीं है, इसलिए ψ_1, ..., ψ_n सभी की रचनाएँ भी नहीं हो सकतीं। अतः f में यह गुण भी है कि *यदि* M_1, ..., M_n क्रमशः ψ_1, ..., ψ_n की रचनाएँ हैं, *तो* $f(M_1, \ldots, M_n)$, φ की रचना है।

$\neg$ के नियम

चूँकि $\neg\varphi$ को $\varphi \to \bot$ से परिभाषित किया जाता है, इसलिए ठीक कहें तो हमें $\neg$ के नियमों की आवश्यकता नहीं है। फिर भी यदि हम उन्हें दें, तो वे इस प्रकार दिखेंगे:

$${}_{n}\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro} \qquad \dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

व्युत्पत्तियाँ के उदाहरण

1. $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$, i.e., $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)$

$$\dfrac{{}_{2}\dfrac{{}_{1}\dfrac{[\varphi]^2 \quad [\varphi \to \bot]^1}{\bot}\ \to\text{Elim}}{(\varphi \to \bot) \to \bot}\ \to\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \to \bot) \to \bot}\ \to\text{Intro}$$

2. $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \wedge \psi) \to \chi]^3 \qquad \dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\psi]^1}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}}{\chi}\,\to\text{Elim}}{\psi \to \chi}\,{}^{1}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to (\psi \to \chi)}\,{}^{2}\,\to\text{Intro}}{((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))}\,{}^{3}\,\to\text{Intro}$$

3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, i.e., $\vdash (\varphi \wedge (\varphi \to \bot)) \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge (\varphi \to \bot)]^1}{\varphi \to \bot}\,\wedge\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi \wedge (\varphi \to \bot)]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{\bot}\,\to\text{Elim}}{(\varphi \wedge (\varphi \to \bot)) \to \bot}\,{}^{1}\,\to\text{Intro}$$

4. $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$, i.e., $\vdash ((\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot) \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot]^2 \qquad \dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee (\varphi \to \bot)}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\to\text{Elim}}{\varphi \to \bot}\,{}^{1}\,\to\text{Intro}}{\varphi \vee (\varphi \to \bot)}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\to\text{Elim}}{((\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot) \to \bot}\,{}^{2}\,\to\text{Intro}$$

प्रतिज्ञप्ति 58.8. *यदि अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के प्राकृतिक निगमन में $\Gamma \vdash \varphi$, तो शास्त्रीय तर्कशास्त्र में भी $\Gamma \vdash \varphi$। विशेषतः, यदि φ अंतःप्रज्ञावादी प्रमेय है, तो वह शास्त्रीय प्रमेय भी है।*

प्रमाण. प्रत्येक प्राकृतिक निगमन नियम शास्त्रीय प्राकृतिक निगमन का भी नियम है; अतः अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की प्रत्येक व्युत्पत्ति, शास्त्रीय तर्कशास्त्र की भी व्युत्पत्ति है। □

58.5 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ

अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र की अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ संकल्पनात्मक रूप से सबसे सरल और ऐतिहासिक रूप से सबसे पहली व्युत्पत्ति-प्रणालियाँ हैं। वे ठीक शास्त्रीय प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र की तरह कार्य करती हैं।

परिभाषा 58.9 (व्युत्पन्नता). यदि Γ, $\mathcal{L}$ के सूत्रों का समुच्चय है, तो Γ से कोई *व्युत्पत्ति*, सूत्रों का ऐसा परिमित अनुक्रम φ_1, ..., φ_n है जिसमें प्रत्येक $i \leq n$ के लिए निम्न में से कोई एक शर्त पूरी होती है:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; अथवा
2. φ_i कोई अभिगृहीत है; अथवा
3. φ_i, किन्हीं φ_j और φ_k से, जहाँ $j < i$ और $k < i$, मोडस पोनेन्स द्वारा मिलता है; अर्थात $\varphi_k \equiv \varphi_j \to \varphi_i$।

परिभाषा 58.10 (अभिगृहीत). अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र के *अभिगृहीतों* का समुच्चय Ax_0, निम्न रूपों वाले सभी सूत्रों से बनता है:

$$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \tag{58.1}$$
$$(\varphi \wedge \psi) \to \psi \tag{58.2}$$
$$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \tag{58.3}$$
$$\varphi \to (\varphi \vee \psi) \tag{58.4}$$
$$\varphi \to (\psi \vee \varphi) \tag{58.5}$$
$$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)) \tag{58.6}$$
$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{58.7}$$
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{58.8}$$
$$\bot \to \varphi \tag{58.9}$$

परिभाषा 58.11 (व्युत्पन्नता). कोई सूत्र φ, Γ से *व्युत्पन्न* है, जिसे $\Gamma \vdash \varphi$ लिखते हैं, यदि Γ से ऐसी कोई व्युत्पत्ति है जो φ पर समाप्त होती है।

परिभाषा 58.12 (प्रमेय). कोई सूत्र φ *प्रमेय* है, यदि रिक्त समुच्चय से φ की कोई व्युत्पत्ति है। यदि φ प्रमेय है तो हम $\vdash \varphi$, और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$ लिखते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 58.13. *यदि अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति-प्रणाली में $\Gamma \vdash \varphi$, तो शास्त्रीय तर्कशास्त्र में भी $\Gamma \vdash \varphi$। विशेषतः, यदि φ अंतःप्रज्ञावादी प्रमेय है, तो वह शास्त्रीय प्रमेय भी है।*

प्रमाण. प्रत्येक अंतःप्रज्ञावादी अभिगृहीत शास्त्रीय अभिगृहीत भी है; अतः अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र की प्रत्येक व्युत्पत्ति, शास्त्रीय तर्कशास्त्र की भी व्युत्पत्ति है। □

प्रश्न

प्रश्न 58.1. निम्न सूत्रों की अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में व्युत्पत्तियाँ दीजिए:

1. $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$
2. $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$
3. $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$
4. $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
5. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$
6. $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi)$

अध्याय 59

अर्थविज्ञान

यह अध्याय अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के अर्थविज्ञान की परिभाषाएँ संकलित करता है। अभी केवल क्रिप्के और सांस्थितिक अर्थविज्ञान का विवेचन है। अभी न तो इस बात के उदाहरण हैं कि प्रतिरूप सूत्रों को कैसे सत्य बनाते हैं, न सूत्रों की मान्यता के प्रमाण।

59.1 परिचय

अर्थविज्ञान के बिना किसी तर्कशास्त्र का संतोषजनक वर्णन नहीं होता, और अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र भी इसका अपवाद नहीं है। शास्त्रीय तर्कशास्त्र के लिए सत्य-मूल्यांकनों पर आधारित अर्थविज्ञान विहित है, जबकि अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के लिए अनेक प्रतिस्पर्धी अर्थविज्ञान हैं। उनमें से कोई भी इस अर्थ में पूर्णतः संतोषजनक नहीं है कि वह संयोजकों के अर्थों का अंतःप्रज्ञावादी रूप से स्वीकार्य विवरण देता हो।

मोडल तर्कशास्त्रों के अर्थविज्ञान के समान, संबंधपरक निदर्शों पर आधारित अर्थविज्ञान शायद सबसे लोकप्रिय है। इसमें प्रतिज्ञप्ति चर जगतों को नियत किए जाते हैं और ये जगत किसी अभिगम्यता संबंध से जुड़े होते हैं। वह संबंध सदैव आंशिक क्रम होता है; अर्थात वह स्वपरावर्ती, प्रतिसममित और संक्रमणशील है।

सहज रूप से इन जगतों को ज्ञान-अवस्थाएँ या "साक्ष्यगत स्थितियाँ" समझा जा सकता है। कोई अवस्था w', w से तभी अभिगम्य है जब हमारी समस्त जानकारी के अनुसार w' ज्ञान की एक संभव (भावी) अवस्था हो; अर्थात वह w पर ज्ञात बातों के संगत हो। कोई प्रतिज्ञप्ति एक बार ज्ञात हो जाए तो फिर अज्ञात नहीं बन सकती; अर्थात जब भी w पर φ ज्ञात हो और Rww', तब w' पर भी φ ज्ञात है। इसलिए "ज्ञान" अभिगम्यता संबंध के सापेक्ष एकदिष्ट है।

यदि ज्ञानात्मक तर्कशास्त्र की तरह "φ ज्ञात है" को "सभी ज्ञानात्मक विकल्पों में सत्य" परिभाषित करें, तो w पर $\varphi \wedge \psi$ ज्ञात है यदि सभी ज्ञानात्मक विकल्पों में φ और ψ दोनों ज्ञात हों। किंतु ज्ञान एकदिष्ट और R स्वपरावर्ती है, इसलिए इसका अर्थ है कि w पर $\varphi \wedge \psi$ तभी ज्ञात है जब w पर φ और ψ दोनों ज्ञात हों। इसी कारण w पर $\varphi \vee \psi$ तभी ज्ञात है जब उनमें से कम-से-कम एक ज्ञात हो। अतः $\wedge$ और $\vee$ के लिए संयोजकों की सत्यता-शर्तें शास्त्रीय तर्कशास्त्र की शर्तों से मिलती हैं।

परंतु सशर्त की सत्यता-शर्तें शास्त्रीय तर्कशास्त्र से भिन्न हैं। w पर $\varphi \to \psi$ तभी ज्ञात है जब Rww' वाला कोई ऐसा w' न हो जहाँ φ तो ज्ञात हो पर ψ ज्ञात न हो। यह इस शर्त के समान नहीं है कि w पर φ अज्ञात हो या ψ ज्ञात हो। क्योंकि यदि w पर न φ ज्ञात हो न ψ, तो कोई ऐसी भावी ज्ञानात्मक अवस्था w' हो सकती है जहाँ Rww' और जहाँ φ तो ज्ञात हो जाए, पर ψ ज्ञात न हो।

हम $\neg\varphi$ तभी जानते हैं जब ऐसी कोई संभव भावी ज्ञानात्मक अवस्था न हो जिसमें हम φ को जानते हों। यहाँ विचार यह है कि यदि φ ज्ञेय होता, तो किसी संभव भावी ज्ञानात्मक अवस्था में φ ज्ञात हो जाता। चूँकि हम $\perp$ को नहीं जान सकते, उस भावी ज्ञानात्मक अवस्था में हम φ को जानते पर $\perp$ को नहीं जानते।

इस व्याख्या में बहिष्कृत मध्य का सिद्धांत विफल होता है। कुछ ऐसे φ हैं जिन्हें हम अभी नहीं जानते, पर भविष्य में जान सकते हैं। ऐसे सूत्र φ के लिए φ और $\neg\varphi$ दोनों अज्ञात हैं; अतः $\varphi \vee \neg\varphi$ ज्ञात नहीं है। किंतु हम, उदाहरणार्थ,

$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ जानते हैं। क्योंकि ऐसी कोई भावी अवस्था संभव नहीं है जिसमें हम φ और $\neg\varphi$ दोनों को जानते हों; और यह हम इस बात से स्वतंत्र रूप से जानते हैं कि हमें φ या $\neg\varphi$ ज्ञात है या नहीं।

संबंधपरक निदर्श अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का एकमात्र उपलब्ध अर्थविज्ञान नहीं हैं। सांस्थितिक अर्थविज्ञान एक अन्य विकल्प है: इसमें प्रतिज्ञप्तियों की व्याख्या किसी सांस्थितिक समष्टि के विवृत समुच्चयों के रूप में और संयोजकों की व्याख्या इन समुच्चयों पर संक्रियाओं के रूप में की जाती है (मसलन $\wedge$ सर्वनिष्ठ के अनुरूप है)।

59.2 संबंधपरक निदर्श

अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र का सटीक अर्थविज्ञान देने के लिए हमें यह परिभाषित करना होगा कि ऐसा प्रतिरूप किसे माना जाए जिसके सापेक्ष हम सूत्रों का मूल्यांकन कर सकें। ऐसी परिभाषा के आधार पर मान्यता और निष्कर्षण जैसी अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ भी परिभाषित की जा सकती हैं। ऐसा एक अर्थविज्ञान संबंधपरक निदर्शों द्वारा दिया जाता है।

परिभाषा 59.1. अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र का संबंधपरक निदर्श एक त्रिक $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ है, जहाँ

1. W एक अरिक्त समुच्चय है,
2. R, W पर आंशिक क्रम (अर्थात स्वपरावर्ती, प्रतिसममित और संक्रमणशील द्विपदी संबंध) है, और
3. V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति चर p को W का कोई उपसमुच्चय देता है, इस प्रकार कि
4. V, R के सापेक्ष एकदिष्ट है; अर्थात यदि $w \in V(p)$ और Rww', तो $w' \in V(p)$।

परिभाषा 59.2. हम $\mathfrak{M}$ *में* w *पर* φ *के सत्य होने* की धारणा $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ को आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

1. $\varphi \equiv p$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $w \in V(p)$।
2. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ नहीं।
3. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब Rww' वाला कोई w' ऐसा न हो कि $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$।
4. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$।
5. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$ (या दोनों)।
6. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब Rww' वाले प्रत्येक w' के लिए या तो $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ नहीं अथवा $\mathfrak{M}, w' \Vdash \chi$ (या दोनों)।

यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ नहीं, तो हम $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$ लिखते हैं। यदि Γ सूत्रों का समुच्चय है, तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ का अर्थ है कि प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 59.3. *जगतों पर सत्यता* R *के सापेक्ष एकदिष्ट है; अर्थात यदि* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *और* Rww'*, तो* $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$*।*

प्रमाण. अभ्यास। □

59.3 अर्थवैज्ञानिक धारणाएँ

परिभाषा 59.4. हम कहते हैं कि φ *प्रतिरूप* $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ *में सत्य है*, $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$, तभी जब प्रत्येक $w \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। φ *मान्य* है, $\vDash \varphi$, तभी जब वह सभी प्रतिरूपों में सत्य हो। हम कहते हैं कि सूत्रों के समुच्चय Γ से φ *निष्पन्न होता है*, $\Gamma \vDash \varphi$, तभी जब प्रत्येक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और प्रत्येक ऐसे w के लिए जिसके लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$, हमारे पास $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ हो।

प्रतिज्ञप्ति 59.5. *1. यदि* $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ *और* $\Gamma \vDash \varphi$, *तो* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

2. यदि $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$ *और* $\Gamma \vDash \varphi$, *तो* $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$।

प्रमाण. 1. मान लें $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$। चूँकि $\Gamma \vDash \varphi$, हम जानते हैं कि यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$, तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। चूँकि प्रत्येक $u \in W$ के लिए $\mathfrak{M}, u \Vdash \Gamma$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

2. (1) से तत्काल मिलता है। □

परिभाषा 59.6. मान लें कि $\mathfrak{M}$ कोई संबंधात्मक प्रतिरूप और $w \in W$ है। $\mathfrak{M}$ का w तक *प्रतिबंध* $\mathfrak{M}_w = \langle W_w, R_w, V_w \rangle$ इस प्रकार दिया जाता है:

$$\begin{aligned} W_w &= \{u \in W : Rwu\}, \\ R_w &= R \cap (W_w)^2, \text{ और} \\ V_w(p) &= V(p) \cap W_w. \end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 59.7. $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}_w \Vdash \varphi$.

प्रतिज्ञप्ति 59.8. *मान लें कि प्रत्येक ऐसे प्रतिरूप* $\mathfrak{M}$ *के लिए जिसके लिए* $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$, *हमारे पास* $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ *है। तब* $\Gamma \vDash \varphi$।

प्रमाण. मान लें कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ पर प्रतिज्ञप्ति 59.7 लागू करने से $\mathfrak{M}_w \Vdash \Gamma$। मान्यता से $\mathfrak{M}_w \Vdash \varphi$। पुनः प्रतिज्ञप्ति 59.7 से $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ मिलता है। □

59.4 सांस्थितिक अर्थविज्ञान

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का अर्थविज्ञान देने का एक अन्य ढंग संस्थिति की गणितीय धारणा का उपयोग करना है।

परिभाषा 59.9. मान लें कि X एक समुच्चय है। X पर *संस्थिति* ऐसा समुच्चय $\mathcal{O} \subseteq \wp(X)$ है जो नीचे के गुणों को संतुष्ट करता है। $\mathcal{O}$ के अवयव संस्थिति के *विवृत समुच्चय* कहलाते हैं। समुच्चय X और $\mathcal{O}$ को मिलाकर *सांस्थितिक समष्टि* कहते हैं।

1. रिक्त समुच्चय और पूरी समष्टि विवृत हैं: $\emptyset, X \in \mathcal{O}$।
2. विवृत समुच्चय परिमित सर्वनिष्ठों के अधीन संवृत हैं: यदि $U, V \in \mathcal{O}$, तो $U \cap V \in \mathcal{O}$।
3. विवृत समुच्चय स्वेच्छ संघों के अधीन संवृत हैं: यदि प्रत्येक $i \in I$ के लिए $U_i \in \mathcal{O}$, तो $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \mathcal{O}$।

यदि विवृत समुच्चयों का संग्रह संदर्भ से समझा जा सके, तो हम किसी संस्थिति के लिए केवल X लिख सकते हैं। फिर भी ध्यान दें कि X को विवृत समुच्चय प्रदान किए जाने के बाद ही उसे संस्थिति कहा जा सकता है।

परिभाषा 59.10. अंतःप्रज्ञावादी प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र का *सांस्थितिक प्रतिरूप* एक त्रिक $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}, V \rangle$ है, जहाँ $\mathcal{O}$, X पर कोई संस्थिति और V ऐसा फलन है जो प्रत्येक प्रतिज्ञप्तिक चर को $\mathcal{O}$ का कोई विवृत समुच्चय देता है।

कोई सांस्थितिक प्रतिरूप $\mathfrak{X}$ दिए जाने पर हम $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}}$ को आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

1. $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{X}} = \emptyset$
2. $[\![p]\!]_{\mathfrak{X}} = V(p)$
3. $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{X}} = [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}} \cap [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$
4. $[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{X}} = [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}} \cup [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$
5. $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\mathfrak{X}} = \mathrm{Int}((X \setminus [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}}) \cup [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}})$

यहाँ $\mathrm{Int}(V)$ वह फलन है जो किसी समुच्चय $V \subseteq X$ को उसके *अभ्यंतर*, अर्थात उसमें समाविष्ट सभी विवृत समुच्चयों के संघ, में भेजता है। दूसरे शब्दों में,

$$\mathrm{Int}(V) = \bigcup \{U : U \subseteq V \text{ और } U \in \mathcal{O}\}.$$

ध्यान दें कि किसी समुच्चय का अभ्यंतर सदैव विवृत होता है, क्योंकि वह विवृत समुच्चयों का संघ है। अतः $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}}$ सदैव विवृत समुच्चय है।

यद्यपि सांस्थितिक अर्थविज्ञान अत्यंत अमूर्त है, फिर भी उसे प्रेरित करने वाले ढंग से समझा जा सकता है। मान लें कि X के अवयव, अथवा "बिंदु", वे बिंदु हैं जिन पर कथनों का मूल्यांकन किया जा सकता है। जिन सभी बिंदुओं पर φ सत्य है उनका समुच्चय, φ द्वारा व्यक्त प्रतिज्ञप्ति है। बिंदुओं का हर समुच्चय संभाव्य प्रतिज्ञप्ति नहीं है; केवल $\mathcal{O}$ के अवयव ऐसे हैं। प्रत्येक X के लिए $\varphi \vDash \psi$ तभी जब प्रत्येक ऐसे बिंदु पर ψ सत्य हो जहाँ φ सत्य है; अर्थात $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}} \subseteq [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$। असंगत कथन $\bot$ कभी सत्य नहीं होता, अतः $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{X}} = \emptyset$।

अंतःप्रज्ञावादी रूप से मान्य नियमों के सत्य होने के लिए $\psi \wedge \chi$, $\psi \vee \chi$ और $\psi \to \chi$ द्वारा व्यक्त प्रतिज्ञप्तियों का ψ और χ द्वारा व्यक्त प्रतिज्ञप्तियों से क्या संबंध होना चाहिए; अर्थात $\varphi \vdash \psi$ तभी जब $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}} \subset [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$? प्रत्येक φ के लिए हमें $\bot \vdash \varphi$ चाहिए, जो इसलिए संतुष्ट है कि प्रत्येक U के लिए $\emptyset \subseteq U$। चूँकि $\psi \wedge \chi \vdash \psi$, हमें $[\![\psi \wedge \chi]\!]_{\mathfrak{X}} \subseteq [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$ चाहिए, और इसी तरह $[\![\psi \wedge \chi]\!]_{\mathfrak{X}} \subseteq [\![\chi]\!]_{\mathfrak{X}}$। $W \subseteq U$ और $W \subseteq V$ को संतुष्ट करने वाला सबसे बड़ा समुच्चय $U \cap V$ है। विलोमतः $\psi \vdash \psi \vee \chi$ और $\chi \vdash \psi \vee \chi$, अतः हमें $[\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}} \subseteq [\![\psi \vee \chi]\!]_{\mathfrak{X}}$ और $[\![\chi]\!]_{\mathfrak{X}} \subseteq [\![\psi \vee \chi]\!]_{\mathfrak{X}}$ चाहिए। ऐसा सबसे छोटा समुच्चय W जिसमें $U \subseteq W$ और $V \subseteq W$, $U \cup V$ है।

$\to$ की परिभाषा कठिन है: $\varphi \to \psi$ उस सबसे दुर्बल प्रतिज्ञप्ति को व्यक्त करता है जो φ के साथ मिलकर ψ को निष्पन्न करती है। $(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \vdash \psi$ से स्पष्ट है कि $\varphi \to \psi$, φ के साथ मिलकर ψ को निष्पन्न करता है। अतः $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\mathfrak{X}}$ ऐसा सबसे बड़ा विवृत समुच्चय होना चाहिए कि $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\mathfrak{X}} \cap [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{X}} \subset [\![\psi]\!]_{\mathfrak{X}}$; इससे हमारी परिभाषा मिलती है।

प्रश्न

प्रश्न 59.1. परिभाषा 59.2 के अनुसार दिखाइए कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \to \bot$।

प्रश्न 59.2. प्रतिज्ञप्ति 59.3 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 59.3. प्रतिज्ञप्ति 59.7 सिद्ध कीजिए।

अध्याय 60

यथार्थता और पूर्णता

यह अध्याय प्रतिज्ञप्तिक अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के यथार्थता और पूर्णता परिणामों को संकलित करता है। इसे परिचय की आवश्यकता है। पूर्णता-प्रमाण सिद्धता के कुछ ऐसे तथ्यों का उपयोग करता है जिन्हें कहीं स्पष्टतः कथित और सिद्ध किया जाना चाहिए।

60.1 अभिगृहीतीय व्युत्पत्तियाँ की यथार्थता

यथार्थता-प्रमाण इस तथ्य पर निर्भर है कि सभी अभिगृहीत अंतःप्रज्ञावादी रूप से मान्य हैं; इसे अभी सिद्ध करना शेष है, उदाहरणार्थ अर्थविज्ञान अध्याय में।

प्रमेय 60.1 (यथार्थता). *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$*, तो* $\Gamma \vDash \varphi$*।*

प्रमाण. हम सिद्ध करते हैं कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$। प्रमाण, Γ से φ की व्युत्पत्ति में सूत्रों की संख्या n पर आगमन द्वारा है। हम दिखाते हैं कि यदि φ_1, ..., $\varphi_n = \varphi$, Γ से कोई व्युत्पत्ति है, तो $\Gamma \vDash \varphi_n$। ध्यान दें कि यदि φ_1, ..., φ_n कोई व्युत्पत्ति है, तो प्रत्येक $k < n$ के लिए φ_1, ..., φ_k भी व्युत्पत्ति है।

लंबाई 0 की कोई व्युत्पत्ति नहीं है, अतः $n = 0$ के लिए दावा रिक्ततः सत्य है। मान लें कि दावा लंबाई $< n$ वाली सभी व्युत्पत्तियों के लिए सत्य है। हम φ_n के औचित्य के अनुसार मामलों में भेद करते हैं।

1. φ_n कोई अभिगृहीत है। सभी अभिगृहीत मान्य हैं, अतः किसी भी Γ के लिए $\Gamma \vDash \varphi_n$।

2. $\varphi_n \in \Gamma$। तब किसी भी $\mathfrak{M}$ और w के लिए, यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$, तो स्पष्टतः $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma\varphi_n[w]$; अर्थात $\Gamma \vDash \varphi$।

3. φ_n, φ_i और $\varphi_j \equiv \varphi_i \to \varphi_n$ से mp द्वारा मिलता है। φ_1, ..., φ_i और φ_1, ..., φ_j, Γ से व्युत्पत्तियाँ हैं, इसलिए आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \varphi_i$ और $\Gamma \vDash \varphi_i \to \varphi_n$।

   मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। चूँकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ और $\Gamma \vDash \varphi_i \to \varphi_n$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_i \to \varphi_n$। परिभाषा से इसका अर्थ है कि Rww' वाले सभी w' के लिए, यदि $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi_i$ तो $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi_n$। चूँकि R स्वपरावर्ती है, w भी उन w' में है जिनके लिए Rww'; अर्थात यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_i$ तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_n$। चूँकि $\Gamma \vDash \varphi_i$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_i$। अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_n$, जैसा हमें दिखाना था। $\square$

60.2 प्राकृतिक निगमन की यथार्थता

अब हम संबंधात्मक अर्थविज्ञान के सापेक्ष प्राकृतिक निगमन की यथार्थता सिद्ध करेंगे; अर्थात दिखाएँगे कि यदि कोई सूत्र मान्यताओं के किसी समुच्चय से व्युत्पन्न है, तो उस मान्यता-समुच्चय से वह सूत्र निष्पन्न होता है।

प्रमेय 60.2 (यथार्थता). *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$, *तो* $\Gamma \vDash \varphi$।

प्रमाण. हम सिद्ध करते हैं कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$। प्रमाण Γ से φ की व्युत्पत्ति पर आगमन द्वारा है।

1. यदि व्युत्पत्ति केवल मान्यता φ से बनी है, तो $\varphi \vdash \varphi$, और हमें $\varphi \vDash \varphi$ दिखाना है। मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$। तब तुच्छतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$।

2. व्युत्पत्ति $\wedge$Intro पर समाप्त होती है: अमुक्त मान्यताओं Γ से पूर्वाधार ψ की और अमुक्त मान्यताओं Δ से χ की व्युत्पत्तियाँ दिखाती हैं कि $\Gamma \vdash \psi$ और $\Delta \vdash \chi$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi$ और $\Delta \vDash \chi$। हमें $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi \wedge \psi$ दिखाना है, क्योंकि पूरी व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ Γ और Δ साथ मिलकर हैं। अतः मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma \cup \Delta$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ भी। चूँकि $\Gamma \vDash \psi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। इसी प्रकार $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \wedge \chi$।

3. व्युत्पत्ति $\wedge$Elim पर समाप्त होती है: अमुक्त मान्यताओं Γ से पूर्वाधार $\psi \wedge \chi$ की व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\Gamma \vdash \psi \wedge \chi$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi \wedge \chi$। हमें $\Gamma \vDash \psi$ दिखाना है। अतः मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। चूँकि $\Gamma \vDash \psi \wedge \chi$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ भी। इसी प्रकार यदि $\wedge$Elim का निष्कर्ष χ है, तो $\Gamma \vDash \chi$।

4. व्युत्पत्ति $\vee$Intro पर समाप्त होती है: मान लें कि पूर्वाधार ψ है और ψ पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ Γ हैं। तब $\Gamma \vdash \psi$, और आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi$। हमें $\Gamma \vDash \psi \vee \chi$ दिखाना है। मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। चूँकि $\Gamma \vDash \psi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \chi$ भी। इसी प्रकार यदि पूर्वाधार χ है, तो $\Gamma \vDash \chi$।

5. व्युत्पत्ति $\vee$Elim पर समाप्त होती है: पूर्वाधारों पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्तियाँ: अमुक्त मान्यताओं Γ से $\psi \vee \chi$ की, अमुक्त मान्यताओं $\Delta_1 \cup \{\psi\}$ से θ की, और अमुक्त मान्यताओं $\Delta_2 \cup \{\chi\}$ से θ की हैं। अतः $\Gamma \vdash \psi \vee \chi$, $\Delta_1 \cup \{\psi\} \vdash \theta$ और $\Delta_2 \cup \{\chi\} \vdash \theta$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi \vee \chi$, $\Delta_1 \cup \{\psi\} \vDash \theta$ और $\Delta_2 \cup \{\chi\} \vDash \theta$। हमें $\Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \vDash \theta$ सिद्ध करना है।

   मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$; और चूँकि $\Gamma \vDash \psi \vee \chi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \chi$। $\mathfrak{M} \Vdash$ की परिभाषा से या तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ या $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। अतः मामलों में भेद करें: (a) $\mathfrak{M} \Vdash \psi$[w]। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta_1 \cup \{\psi\}$। चूँकि $\Delta_1 \cup \psi \vDash \theta$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta$। (b) $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। तब $\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta_2 \cup \{\chi\}$। चूँकि $\Delta_2 \cup \chi \vDash \theta$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta$। अतः दोनों मामलों में $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta$, जैसा हमें दिखाना था।

6. व्युत्पत्ति $\rightarrow$Intro पर समाप्त होकर $\psi \rightarrow \chi$ निष्कर्ष देती है। तब पूर्वाधार χ है और उस पूर्वाधार पर समाप्त होने वाली व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ $\Gamma \cup \{\psi\}$ हैं। अतः $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \chi$, और आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \cup \{\psi\} \vDash \chi$। हमें $\Gamma \vDash \psi \rightarrow \chi$ दिखाना है।

   मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$। हमें दिखाना है कि Rww' वाले सभी w' के लिए, यदि $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ तो $\mathfrak{M}, w' \Vdash \chi$। अतः मान लें Rww' और $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$। प्रतिज्ञप्ति 59.3 से $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Gamma$। चूँकि $\Gamma \cup \{\psi\} \vDash \chi$, $\mathfrak{M}, w' \Vdash \chi$, जैसा हमें दिखाना था।

7. व्युत्पत्ति $\rightarrow$Elim पर समाप्त होती है और निष्कर्ष χ है। पूर्वाधार $\psi \rightarrow \chi$ और ψ हैं, जिनकी व्युत्पत्तियाँ क्रमशः अमुक्त मान्यताओं Γ, Δ से हैं। अतः $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ और $\Delta \vdash \psi$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \psi \rightarrow \chi$ और $\Delta \vDash \psi$। हमें $\Gamma \cup \Delta \vDash \chi$ दिखाना है।

   मान लें $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma \cup \Delta$। चूँकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ और $\Gamma \vDash \psi \rightarrow \chi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \rightarrow \chi$। परिभाषा से इसका अर्थ है कि Rww' वाले सभी w' के लिए, यदि $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ तो $\mathfrak{M}, w' \Vdash \chi$। चूँकि R स्वपरावर्ती है, w भी उन

w' में है जिनके लिए Rww'; अर्थात यदि $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ तो $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$। चूँकि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta$ और $\Delta \vDash \psi$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$। अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$, जैसा हमें दिखाना था।

8. व्युत्पत्ति $\bot_I$ पर समाप्त होकर φ निष्कर्ष देती है। पूर्वाधार $\bot$ है और पूर्वाधार की व्युत्पत्ति की अमुक्त मान्यताएँ Γ हैं। तब $\Gamma \vdash \bot$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vDash \bot$। हमें $\Gamma \vDash \varphi$ दिखाना है।

   हम अप्रत्यक्ष विधि अपनाते हैं। यदि $\Gamma \nvDash \varphi$, तो कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और जगत w ऐसा है कि $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$। चूँकि $\Gamma \vDash \bot$, इसलिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$। किंतु यह असंभव है, क्योंकि परिभाषा से $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$। अतः $\Gamma \vDash \varphi$।

9. व्युत्पत्ति $\neg$Intro पर समाप्त होती है: अभ्यास।

10. व्युत्पत्ति $\neg$Elim पर समाप्त होती है: अभ्यास। $\square$

60.3 लिंडेनबाउम का लेम्मा

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र का पूर्णता प्रमेय $\Gamma \nvdash \varphi$ मानकर और ऐसा प्रतिरूप बनाकर सिद्ध किया जाता है जिसमें $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$ तथा $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$।

शास्त्रीय तर्कशास्त्र में व्युत्पन्नता के संबंध को संगतता की धारणा तक घटाया जा सकता है, क्योंकि कोई सूत्र φ, सूत्रों के किसी समुच्चय से तभी व्युत्पन्न है जब वह समुच्चय φ के निषेध के साथ असंगत हो। अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में ऐसा संभव नहीं है। यहाँ यदि $\neg\varphi$ असंगत है, तो हमें केवल $\vdash \neg\neg\varphi$ मिलता है। चूँकि $\neg\neg\varphi \to \varphi$ सामान्यतः अंतःप्रज्ञावादी रूप से मान्य नहीं है, हम $\vdash \varphi$ का निष्कर्ष नहीं निकाल सकते।

अतः प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ बनाते समय हमें सूत्र φ की अ-व्युत्पन्नता का लेखा रखना होगा। इसलिए प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ बनाने के लिए हम पूर्ण समुच्चय $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ का उपयोग नहीं कर सकते, क्योंकि प्रत्येक पूर्ण समुच्चय Γ^* में $\Gamma^* \vdash \varphi \vee \neg\varphi$।

पूर्ण समुच्चय Γ^* के स्थान पर हम सूत्रों के अभाज्य समुच्चय की धारणा का उपयोग करेंगे:

परिभाषा 60.3. सूत्रों का समुच्चय Γ *अभाज्य* है, तभी जब

1. Γ संगत है; अर्थात $\Gamma \nvdash \bot$;

2. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$; और

3. यदि $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$।

सहायक प्रमेय 60.4 (लिंडेनबाउम का लेम्मा). *यदि $\Gamma \nvdash \varphi$, तो कोई $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ ऐसा है कि Γ^* अभाज्य और $\Gamma^* \nvdash \varphi$।*

प्रमाण. मान लें कि $\psi_1 \vee \chi_1, \psi_2 \vee \chi_2, \ldots, \psi \vee \chi$ रूप वाले सभी सूत्रों का परिगणन है। हम सूत्रों के समुच्चयों का वर्धमान अनुक्रम Γ_n परिभाषित करेंगे, जहाँ प्रत्येक Γ_{n+1} को Γ_n में एक नया सूत्र जोड़कर परिभाषित किया जाएगा। Γ^* सभी Γ_n का संघ होगा। नए सूत्र इस प्रकार चुने जाते हैं कि Γ^* अभाज्य रहे और फिर भी $\Gamma^* \nvdash \varphi$। इसका अर्थ है कि प्रत्येक चरण पर हमें ऐसा पहला वियोजन $\psi_i \vee \chi_i$ खोजना चाहिए कि:

1. $\Gamma_n \vdash \psi_i \vee \chi_i$

2. $\psi_i \notin \Gamma_n$ और $\chi_i \notin \Gamma_n$

यदि $\Gamma_n \cup \{\psi_i\} \nvdash \varphi$, तो हम Γ_n में ψ_i जोड़ते हैं; अन्यथा χ_i। हमें दिखाना होगा कि यह विधि काम करती है। अभी $i(n)$ को वह न्यूनतम i परिभाषित करें जिसके लिए (1) और (2) सत्य हैं।

$\Gamma_0 = \Gamma$ परिभाषित करें और

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_{i(n)}\} & \text{यदि } \Gamma_n \cup \{\psi_{i(n)}\} \nvdash \varphi \\ \Gamma_n \cup \{\chi_{i(n)}\} & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यदि $i(n)$ अपरिभाषित है—अर्थात जब भी $\Gamma_n \vdash \psi \vee \chi$, तब या तो $\psi \in \Gamma_n$ या $\chi \in \Gamma_n$—तो हम $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ लेते हैं। अब $\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ लें।

पहले हम दिखाते हैं कि प्रत्येक n के लिए $\Gamma_n \nvdash \varphi$। हम n पर आगमन करते हैं। $n = 0$ के लिए दावा प्रमेय की परिकल्पना, अर्थात $\Gamma \nvdash \varphi$, से सत्य है। $n > 0$ के लिए हमें दिखाना है कि यदि $\Gamma_n \nvdash \varphi$, तो $\Gamma_{n+1} \nvdash \varphi$। यदि $i(n)$ अपरिभाषित है, तो $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ और सिद्ध करने को कुछ नहीं। अतः मान लें कि $i(n)$ परिभाषित है। सरलता के लिए $i = i(n)$ लें।

हम दावे का प्रतिधनात्मक रूप सिद्ध करेंगे। मान लें $\Gamma_{n+1} \vdash \varphi$। रचना के अनुसार, यदि $\Gamma_n \cup \{\psi_i\} \nvdash \varphi$, तो $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_i\}$; अन्यथा $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\chi_i\}$। स्पष्टतः पहला मामला नहीं हो सकता, क्योंकि तब $\Gamma_{n+1} \nvdash \varphi$ होता। अतः $\Gamma_n \cup \{\psi_i\} \vdash \varphi$ और $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\chi_i\}$। $i(n)$ की परिभाषा से $\Gamma_n \vdash \psi_i \vee \chi_i$। हमारे पास $\Gamma_n \cup \{\psi_i\} \vdash \varphi$ है। साथ ही $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\chi_i\} \vdash \varphi$। अतः $\Gamma_n \vdash \varphi$, जैसा हमें दिखाना था।

यदि $\Gamma^* \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ ऐसा होता कि $\Gamma' \vdash \varphi$। प्रत्येक $\theta \in \Gamma'$ किसी i के लिए Γ_i में होना चाहिए। इनमें सबसे बड़ा सूचकांक n लें। चूँकि $i \leq n$ होने पर $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$, इसलिए $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$। तब $\Gamma_n \vdash \varphi$, जो ऊपर सिद्ध $\Gamma_n \nvdash \varphi$ के विरुद्ध है।

अंत में हम दिखाते हैं कि Γ^* अभाज्य है; अर्थात वह परिभाषा 60.3 की शर्तें (1), (2) और (3) संतुष्ट करता है।

पहले, $\Gamma^* \nvdash \varphi$, अतः Γ^* संगत है; इसलिए (1) सत्य है।

अब हम दिखाते हैं कि यदि $\Gamma^* \vdash \psi \vee \chi$, तो या तो $\psi \in \Gamma^*$ या $\chi \in \Gamma^*$। इससे (3) सिद्ध होता है, क्योंकि यदि $\psi \vee \chi \in \Gamma^*$, तो $\Gamma^* \vdash \psi \vee \chi$ भी। अतः मान लें $\Gamma^* \vdash \psi \vee \chi$, किंतु $\psi \notin \Gamma^*$ और $\chi \notin \Gamma^*$। चूँकि $\Gamma^* \vdash \psi \vee \chi$, किसी n के लिए $\Gamma_n \vdash \psi \vee \chi$। सभी वियोजनों के परिगणन में $\psi \vee \chi$, मान लें, $\psi_j \vee \chi_j$ के रूप में आता है। $\psi_j \vee \chi_j$, $i(n)$ की परिभाषा के गुणों को संतुष्ट करता है: $\Gamma_n \vdash \psi_j \vee \chi_j$, जबकि $\psi_j \notin \Gamma_n$ और $\chi_j \notin \Gamma_n$। प्रत्येक चरण पर शर्तें संतुष्ट करने वाला कम-से-कम एक वियोजन $\psi_i \vee \chi_i$ घट जाता है (क्योंकि प्रत्येक चरण पर हम ψ_i या χ_i जोड़ते हैं); अतः किसी चरण m पर $j = i(m)$ होगा। किंतु तब या तो $\psi \in \Gamma_{m+1}$ या $\chi \in \Gamma_{m+1}$, जो $\psi \notin \Gamma^*$ और $\chi \notin \Gamma^*$ की मान्यता के विरुद्ध है।

अब मान लें $\Gamma^* \vdash \psi$। तब $\Gamma^* \vdash \psi \vee \psi$। किंतु हमने अभी सिद्ध किया कि यदि $\Gamma^* \vdash \psi \vee \psi$, तो $\psi \in \Gamma^*$। अतः Γ^*, परिभाषा 60.3 की शर्त (2) संतुष्ट करता है। $\square$

60.4 विहित प्रतिरूप

हमारे प्रतिरूप के जगत प्राकृतिक संख्याओं के परिमित अनुक्रम σ होंगे; अर्थात $\sigma \in \mathbb{N}^*$। ध्यान दें कि $\mathbb{N}^*$ आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. $\Lambda \in \mathbb{N}^*$.
2. यदि $\sigma \in \mathbb{N}^*$ और $n \in \mathbb{N}$, तो $\sigma.n \in \mathbb{N}^*$ (जहाँ $\sigma.n$, $\sigma \frown \langle n \rangle$ है, और $\sigma \frown \sigma'$, σ तथा σ' का सन्निवेशन है)।
3. इसके अतिरिक्त कुछ भी $\mathbb{N}^*$ में नहीं है।

अतः हम आगमनात्मक परिभाषाएँ देने के लिए $\mathbb{N}^*$ का उपयोग कर सकते हैं।

मान लें कि $\langle \psi_1, \chi_1 \rangle$, $\langle \psi_2, \chi_2 \rangle$, ..., सूत्रों के सभी युग्मों का परिगणन है। सूत्रों का समुच्चय Δ दिए जाने पर $\Delta(\sigma)$ को आगमन द्वारा इस प्रकार परिभाषित करें:

1. $\Delta(\Lambda) = \Delta$
2. $\Delta(\sigma.n) =$

$$\begin{cases} (\Delta(\sigma) \cup \{\psi_n\})^* & \text{यदि } \Delta(\sigma) \cup \{\psi_n\} \nvdash \chi_n \\ \Delta(\sigma) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यहाँ $(\Delta(\sigma)\cup\{\psi_n\})^*$ से हमारा आशय सूत्रों के उस अभाज्य समुच्चय से है जिसका अस्तित्व समुच्चय $\Delta(\sigma)\cup\{\psi_n\}$ और सूत्र χ_n पर सहायक प्रमेय 60.4 लगाने से मिलता है। ध्यान दें कि इस परिभाषा से, यदि $\Delta(\sigma)\cup\{\psi_n\}\nvdash\chi_n$, तो $\Delta(\sigma.n)\vdash\psi_n$ और $\Delta(\sigma.n)\nvdash\chi_n$। यह भी ध्यान दें कि किसी भी n के लिए $\Delta(\sigma)\subseteq\Delta(\sigma.n)$। यदि Δ अभाज्य है, तो प्रत्येक σ के लिए $\Delta(\sigma)$ अभाज्य है।

परिभाषा 60.5. मान लें कि Δ अभाज्य है। तब Δ का *विहित प्रतिरूप* $\mathfrak{M}(\Delta)$ इस प्रकार परिभाषित है:

1. $W=\mathbb{N}^*$, प्राकृतिक संख्याओं के परिमित अनुक्रमों का समुच्चय।
2. R वह आंशिक क्रम है जिसके अनुसार $R\sigma\sigma'$ तभी जब σ, σ' का आरंभिक खंड हो (अर्थात किसी अनुक्रम σ'' के लिए $\sigma'=\sigma\frown\sigma''$)।
3. $V(p)=\{\sigma:p\in\Delta(\sigma)\}$.

यह सत्यापित करना सरल है कि R वास्तव में आंशिक क्रम है। V पर एकदिष्टता की शर्त भी संतुष्ट होती है। चूँकि $\Delta(\sigma)\subseteq\Delta(\sigma.n)$, इसलिए σ पर आगमन द्वारा जब भी $R\sigma\sigma'$, तब $\Delta(\sigma)\subseteq\Delta(\sigma')$ मिलता है।

60.5 सत्यता लेम्मा

निम्न लेम्मा विहित प्रतिरूप में संतुष्टि को इस बात से जोड़ता है कि कौन-से सूत्र अभाज्य समुच्चय Δ के अवयव हैं।

सहायक प्रमेय 60.6. *यदि Δ अभाज्य है, तो $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\varphi$ तभी जब $\Delta(\sigma)\vdash\varphi$।*

प्रमाण. φ पर आगमन द्वारा।

1. $\varphi\equiv\bot$: चूँकि $\Delta(\sigma)$ अभाज्य है, वह संगत है; अतः $\Delta(\sigma)\nvdash\varphi$। परिभाषा से $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\nVdash\varphi$।
2. $\varphi\equiv p$: $\Vdash$ की परिभाषा से $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\varphi$ तभी जब $\sigma\in V(p)$; अर्थात $\Delta(\sigma)\vdash\varphi$।
3. $\varphi\equiv\neg\psi$: अभ्यास।
4. $\varphi\equiv\psi\wedge\chi$: $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\psi$ और $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\chi$। आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\psi$ तभी जब $\Delta(\sigma)\vdash\psi$, और χ के लिए भी इसी प्रकार। किंतु $\Delta(\sigma)\vdash\psi$ और $\Delta(\sigma)\vdash\chi$ तभी जब $\Delta(\sigma)\vdash\varphi$।
5. $\varphi\equiv\psi\vee\chi$: $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\psi$ या $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\chi$। आगमन-परिकल्पना से यह तभी जब $\Delta(\sigma)\vdash\psi$ या $\Delta(\sigma)\vdash\chi$। अब दिखाना है कि यह तभी जब $\Delta(\sigma)\vdash\varphi$। बाएँ से दाएँ दिशा स्पष्ट है। दाएँ से बाएँ दिशा इस तथ्य से मिलती है कि $\Delta(\sigma)$ अभाज्य है।
6. $\varphi\equiv\psi\to\chi$: पहले बाएँ से दाएँ दिशा का प्रतिधनात्मक रूप लें। मान लें $\Delta(\sigma)\nvdash\psi\to\chi$। तब $\Delta(\sigma)\cup\{\psi\}\nvdash\chi$ भी। चूँकि किसी n के लिए $\langle\psi,\chi\rangle$, $\langle\psi_n,\chi_n\rangle$ है, इसलिए $\Delta(\sigma.n)=(\Delta(\sigma)\cup\{\psi\})^*$; और $\Delta(\sigma.n)\vdash\psi$, पर $\Delta(\sigma.n)\nvdash\chi$। आगमन-परिकल्पना से $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma.n\Vdash\psi$ और $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma.n\nVdash\chi$। चूँकि $R\sigma(\sigma.n)$, इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\nVdash\varphi$।

   अब मान लें $\Delta(\sigma)\vdash\psi\to\chi$, और $R\sigma\sigma'$ हो। चूँकि $\Delta(\sigma)\subseteq\Delta(\sigma')$, इसलिए यदि $\Delta(\sigma')\vdash\psi$, तो $\Delta(\sigma')\vdash\chi$। दूसरे शब्दों में, $R\sigma\sigma'$ वाले प्रत्येक σ' के लिए या तो $\Delta(\sigma')\nvdash\psi$ अथवा $\Delta(\sigma')\vdash\chi$। आगमन-परिकल्पना से इसका अर्थ है कि जब भी $R\sigma\sigma'$, तब या तो $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma'\nVdash\psi$ अथवा $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma'\Vdash\chi$; अर्थात $\mathfrak{M}(\Delta),\sigma\Vdash\varphi$। □

60.6 पूर्णता प्रमेय

प्रमेय 60.7. *यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक रूप सिद्ध करते हैं। मान लें $\Gamma \nvdash \varphi$। तब सहायक प्रमेय 60.4 से कोई अभाज्य समुच्चय $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma^* \nvdash \varphi$। परिभाषा 60.5 में परिभाषित Γ^* के विहित प्रतिरूप $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ पर विचार करें। किसी भी $\psi \in \Gamma$ के लिए $\Gamma^* \vdash \psi$। ध्यान दें कि $\Gamma^*(\Lambda) = \Gamma^*$। सत्यता लेम्मा (सहायक प्रमेय 60.6) से प्रत्येक $\psi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M}(\Gamma^*), \Lambda \Vdash \psi$, और $\mathfrak{M}(\Gamma^*), \Lambda \nVdash \varphi$। इससे $\Gamma \nvDash \varphi$ सिद्ध होता है। □

60.7 निर्णेयता

ध्यान दें कि पूर्णता प्रमेय का प्रमाण प्रत्येक $\Gamma \nvdash \varphi$ के लिए अनंत जगतों वाला ऐसा प्रतिरूप देता है जो $\Gamma \nvDash \varphi$ का साक्षी है। निम्न प्रतिज्ञप्ति दिखाती है कि $\vDash \varphi$ सिद्ध करने के लिए सभी परिमित प्रतिरूपों (अर्थात जगतों के परिमित समुच्चय वाले प्रतिरूपों) के लिए $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ सिद्ध करना पर्याप्त है।

प्रमेय 60.8. *यदि $\nvDash \varphi$, तो कोई परिमित प्रतिरूप ऐसा है कि $\mathfrak{M}' \nVdash \varphi$।*

प्रमाण. मान लें $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ ऐसा है कि $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$, और P, φ में आने वाले प्रतिज्ञप्ति चरों का समुच्चय है। $W' = \{[w] : w \in W\}$, जहाँ $[w] = \{p \in P : w \in V(p)\}$, लेकर; R' को उपसमुच्चय संबंध; और $V'(p) = \{[w] : p \in [w]\}$ लेकर $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ परिभाषित करें। स्पष्ट होना चाहिए कि W' परिमित समुच्चय और $\mathfrak{M}'$ कोई संबंधपरक निदर्श है।

φ पर आगमन द्वारा दिखाया जा सकता है कि

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ तभी जब } \mathfrak{M}', [w] \Vdash \varphi$$

ऐसे सभी सूत्रों φ के लिए जिनमें केवल P के प्रतिज्ञप्ति चर आते हैं। इसे पाठक के लिए अभ्यास के रूप में छोड़ा गया है। □

प्रमेय 60.8 से निकलता है कि यह निर्णय करने के लिए कोई कलनविधि है कि $\vDash \varphi$ है या नहीं।

प्रश्न

प्रश्न 60.1. प्रमेय 60.2 का प्रमाण पूरा कीजिए। $\neg$Intro और $\neg$Elim के मामलों के लिए परिभाषा 59.2 में $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ की परिभाषा का उपयोग कीजिए; अर्थात $\neg\varphi$ को $\varphi \to \bot$ द्वारा परिभाषित न मानिए।

प्रश्न 60.2. दिखाइए कि निम्न सूत्र अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में व्युत्पन्न नहीं हैं:

1. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
2. $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$
3. $(\varphi \to \psi \vee \chi) \to \big((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)\big)$

प्रश्न 60.3. दिखाइए कि यदि $\Gamma \nvdash \bot$, तो Γ शास्त्रीय तर्कशास्त्र में संगत है; अर्थात कोई ऐसा मूल्यांकन है जो Γ के सभी सूत्रों को सत्य बनाता है।

प्रश्न 60.4. दिखाइए कि यदि φ में केवल प्रतिज्ञप्ति चर, $\vee$ और $\wedge$ आते हैं, तो $\nvDash \varphi$। इससे निष्कर्ष निकालिए कि अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र में $\to$ को $\vee$ और $\wedge$ से परिभाषित नहीं किया जा सकता।

प्रश्न 60.5. पूर्णता प्रमेय का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि यदि $\vdash \varphi \lor \psi$, तो $\vdash \varphi$ या $\vdash \psi$। (संकेत: मान लें $\mathfrak{M}_1 \nVdash \varphi$ और $\mathfrak{M}_2 \nVdash \psi$, और ऐसा नया प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ बनाइए कि $\mathfrak{M} \nVdash \varphi \lor \psi$।)

प्रश्न 60.6. दिखाइए कि यदि $\mathfrak{M}$ रैखिक क्रम वाला संबंधात्मक प्रतिरूप है, तो $\mathfrak{M} \Vdash (\varphi \to \psi) \lor (\psi \to \varphi)$।

प्रश्न 60.7. यह दिखाकर प्रमेय 60.8 का प्रमाण पूरा कीजिए कि केवल P के प्रतिज्ञप्तिक चर वाले सभी सूत्रों φ के लिए $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी जब $\mathfrak{M}', [w] \Vdash \varphi$।

अध्याय 61

अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के उपसर्गयुक्त टैब्लो पर प्रारूप अध्याय। इसे अधिक उदाहरणों, पूर्णता-प्रमाणों, और संवृत टैब्लो की असफल खोजों से प्रतिप्रतिरूप पाने की विधि पर चर्चा की आवश्यकता है।

61.1 परिचय

सत्य-वृक्ष, चिह्नित सूत्रों के कुछ (नीचे की ओर शाखित) वृक्ष हैं; अर्थात ऐसे युग्म जिनमें सत्य-मूल्य चिह्न ($\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$) और कोई वाक्य होता है:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ अथवा } \mathbb{F}\,\varphi.$$

कोई सत्य-वृक्ष कुछ *मान्यताओं* से आरंभ होता है। प्रत्येक अगला चिह्नित सूत्र किसी अनुमान-नियम को लगाकर उत्पन्न किया जाता है। कुछ अनुमान-नियम वृक्ष के किसी सिरे पर एक या अधिक चिह्नित सूत्र जोड़ते हैं; अन्य दो नए सिरे जोड़कर दो शाखाएँ बनाते हैं। नियम ऐसे चिह्नित सूत्र देते हैं जिनका सूत्र, उस चिह्नित सूत्र के सूत्र से कम जटिल होता है जिस पर नियम लगाया गया था। जब किसी शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों, तो हम शाखा को *संवृत* कहते हैं। यदि किसी सत्य-वृक्ष की प्रत्येक शाखा संवृत हो, तो पूरा सत्य-वृक्ष संवृत है। कोई संवृत सत्य-वृक्ष ऐसी व्युत्पत्ति बनाता है जो दिखाती है कि टैब्लो आरंभ करने के लिए प्रयुक्त चिह्नित सूत्रों का समुच्चय असंतोषणीय है। इससे $\vdash$ संबंध परिभाषित किया जा सकता है: $\Gamma \vdash \varphi$ तभी जब कोई परिमित समुच्चय $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि निम्न मान्यताओं के लिए कोई संवृत सत्य-वृक्ष हो:

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के लिए हमें चिह्नित सूत्र की धारणा को विस्तृत करना और संयोजकों के नियमों को समायोजित करना होगा। किसी चिह्न ($\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$) के अतिरिक्त, मोडल सत्य-वृक्ष के सूत्रों में *उपसर्ग* σ भी होते हैं। उपसर्ग धन पूर्णांकों के अरिक्त अनुक्रम हैं; अर्थात $\sigma \in (\mathbb{Z}^+)^* \setminus \{\Lambda\}$। ऐसे उपसर्गों को हम आसपास के $\langle\,\rangle$ के बिना लिखते हैं और अलग-अलग अवयवों को अल्पविराम के स्थान पर . से अलग करते हैं। यदि σ कोई उपसर्ग है, तो $\sigma.n$, $\sigma \frown \langle n \rangle$ है; उदाहरणार्थ यदि $\sigma = 1.2.1$, तो $\sigma.3$, $1.2.1.3$ है। अतः, मसलन,

$$1.2\,\mathbb{T}\,\varphi \to (\psi \to \chi)$$

एक *उपसर्गयुक्त चिह्नित सूत्र* (या संक्षेप में केवल *उपसर्गयुक्त सूत्र*) है।

सहज रूप से उपसर्ग किसी प्रतिरूप के उस जगत का नाम देता है जो किसी सत्य-वृक्ष की शाखा के सूत्रों को संतुष्ट कर सकता है। यदि σ किसी जगत का नाम है, तो $\sigma.n$, σ द्वारा नामित जगत से अभिगम्य किसी जगत का नाम है।

अंतःप्रज्ञावादी प्रतिरूपों में अभिगम्यता संबंध स्वपरावर्ती और संक्रमणशील होता है। उपसर्गों के पदों में इसका अर्थ है कि σ स्वयं σ से अभिगम्य है, और σ को विस्तृत करने वाला प्रत्येक उपसर्ग भी; अर्थात $\sigma.n_1.\cdots.n_k$ रूप वाला कोई भी उपसर्ग। स्वयं σ और उसके किसी भी विस्तार को दर्शाने के लिए $\sigma.*$ संकेत प्रस्तुत करें। दूसरे शब्दों में, $\sigma.*$ उपसर्ग ठीक वे सभी उपसर्ग हैं जो σ से अभिगम्य हैं।

$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\\ \sigma\,\mathbb{T}\,\psi\end{array}}\wedge\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\wedge\psi}{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \quad\mid\quad \sigma\,\mathbb{F}\,\psi}\wedge\mathbb{F}$
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\vee\psi}{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \quad\mid\quad \sigma\,\mathbb{T}\,\psi}\vee\mathbb{T}$	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\\ \sigma\,\mathbb{F}\,\psi\end{array}}\vee\mathbb{F}$

तालिका 61.1: $\wedge$ और $\vee$ के उपसर्गयुक्त सत्य-वृक्ष नियम

61.2 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के नियम

संयोजकों $\wedge$ और $\vee$ के नियम सामान्य प्रतिज्ञप्तिक चिह्नित सत्य-वृक्ष जैसे ही हैं, केवल उपसर्ग जोड़ दिए गए हैं। प्रत्येक मामले में, किसी चिह्नित सूत्र $\sigma\,S\,\varphi$ पर लगाया गया नियम ऐसे नए सूत्र उत्पन्न करता है जिन पर भी σ उपसर्ग लगा है। यह सहजतः स्पष्ट होना चाहिए: उदाहरणार्थ यदि $\varphi\wedge\psi$, σ (द्वारा नामित जगत) पर सत्य है, तो φ और ψ, σ पर सत्य हैं (किसी अन्य जगत पर नहीं)। $\wedge$ और $\vee$ के नियम सारणी 61.1 में संकलित हैं।

संवरण-शर्त सामान्य सत्य-वृक्ष की शर्त जैसी है, यद्यपि हम यह अपेक्षा करते हैं कि केवल सूत्र ही नहीं, उपसर्ग भी मेल खाएँ। वास्तव में हम कुछ अधिक उदार हो सकते हैं: चूँकि अंतःप्रज्ञावादी प्रतिरूपों में सूत्र एक बार सत्य होने पर सत्य रहते हैं, इसलिए यह असंभव है कि φ, σ पर सत्य पर किसी अभिगम्य उपसर्ग $\sigma.*$ पर असत्य हो। अतः कोई शाखा संवृत है यदि उसमें दोनों

$$\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi \quad \text{और} \quad \sigma.*\,\mathbb{F}\,\varphi$$

किसी उपसर्ग σ और सूत्र φ के लिए हों। ध्यान दें कि यदि चिह्न उलट दिए जाएँ, अर्थात उसमें

$$\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi \quad \text{और} \quad \sigma.*\,\mathbb{T}\,\varphi$$

हों, तो शाखा केवल तभी संवृत है जब $*$ रिक्त अनुक्रम हो।

इसके अतिरिक्त, यदि किसी शाखा में $\sigma\,\mathbb{T}\,\bot$ हो, तो वह संवृत है।

मान्यताएँ स्थापित करने के नियम भी सामान्य सत्य-वृक्ष जैसे हैं, सिवाय इसके कि मान्यताओं के लिए हम सदैव उपसर्ग 1 का उपयोग करते हैं। (कौन-सा उपसर्ग लेते हैं इससे अंतर नहीं पड़ता, बशर्ते सभी मान्यताओं के लिए वही हो।) अतः, उदाहरणार्थ, हम कहते हैं कि

$$\psi_1,\ldots,\psi_n\vdash\varphi$$

तभी जब निम्न मान्यताओं के लिए कोई संवृत टैब्लो हो:

$$1\,\mathbb{T}\,\psi_1,\ldots,1\,\mathbb{T}\,\psi_n,1\,\mathbb{F}\,\varphi.$$

सशर्त $\to$ के नियम शास्त्रीय और मोडल मामलों से भिन्न हैं। $\mathbb{T}\to$ नियम, $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\to\psi$ वाली शाखा को दो अलग शाखाओं पर $\sigma.*\,\mathbb{T}\,\varphi$ और $\sigma.*\,\mathbb{F}\,\psi$ जोड़कर विस्तृत करता है। इसे केवल ऐसे उपसर्ग $\sigma.*$ के लिए लगाया जा सकता है जो उस शाखा पर *पहले से* आता हो। ऐसे उपसर्ग को शाखा पर "प्रयुक्त" कहें। (चूँकि $\sigma.*$ में स्वयं σ भी आता है, नियम को अलग शाखाओं पर उपसर्गयुक्त चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi$ और $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ जोड़कर सदैव लगाया जा सकता है।)

$\mathbb{F}\to$ नियम, $\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\to\psi$ वाली शाखा को उसी शाखा पर $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi$ और $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi$ दोनों जोड़कर विस्तृत करता है, जहाँ $\sigma.n$ उस शाखा के लिए नया उपसर्ग है।

$\neg$ के नियम इसी के अनुरूप परिभाषित हैं ($\neg\varphi$ की $\varphi\to\bot$ वाली परिभाषा का उपयोग करके)।

नियम सारणी 61.2 में दिए गए हैं।

$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\sigma.*\,\mathbb{F}\,\varphi}\;\neg\mathbb{T}$ $\sigma.*$ प्रयुक्त है	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi}\;\neg\mathbb{F}$ $\sigma.n$ नया है
$\dfrac{\sigma\,\mathbb{T}\,\varphi\to\psi}{\sigma.*\,\mathbb{F}\,\varphi \quad \mid \quad \sigma.*\,\mathbb{T}\,\psi}\;\to\mathbb{T}$ $\sigma.*$ प्रयुक्त है	$\dfrac{\sigma\,\mathbb{F}\,\varphi\to\psi}{\begin{array}{c}\sigma.n\,\mathbb{T}\,\varphi\\ \sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi\end{array}}\;\to\mathbb{F}$ $\sigma.n$ नया है

तालिका 61.2: $\neg$ और $\to$ के उपसर्गयुक्त सत्य-वृक्ष नियम

61.3 अंतःप्रज्ञावादी तर्कशास्त्र के लिए सत्य-वृक्ष

उदाहरण 61.1. हम ऐसा संवृत टैब्लो देते हैं जो दिखाता है कि $(\varphi\wedge\psi)\to\chi \vdash \varphi\to(\psi\to\chi)$।

1.	$1\,\mathbb{T}\;\;(\varphi\wedge\psi)\to\chi$	मान्यता
2.	$1\,\mathbb{F}\;\;\varphi\to(\psi\to\chi)$	मान्यता
3.	$1.1\,\mathbb{T}\;\;\varphi$	$\to\mathbb{F}\,2$
4.	$1.1\,\mathbb{F}\;\;\psi\to\chi$	$\to\mathbb{F}\,2$
5.	$1.1.1\,\mathbb{T}\;\;\psi$	$\to\mathbb{F}\,4$
6.	$1.1.1\,\mathbb{F}\;\;\chi$	$\to\mathbb{F}\,4$
7.	$1.1.1\,\mathbb{F}\;\;\varphi\wedge\psi$ $\qquad$ $1.1.1\,\mathbb{T}\;\;\chi$ $\otimes$	$\to\mathbb{T}\,1$
8.	$1.1.1\,\mathbb{F}\;\;\varphi$ $\qquad$ $1.1.1\,\mathbb{F}\;\;\psi$ $\otimes$ $\qquad$ $\otimes$	$\wedge\mathbb{F}\,4$

61.4 अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष की यथार्थता

अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष को यथार्थ दिखाने के लिए हमें दिखाना होगा कि यदि

$$1\,\mathbb{T}\,\psi_1,\ldots,1\,\mathbb{T}\,\psi_n,1\,\mathbb{F}\,\varphi$$

का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है, तो $\psi_1,\ldots,\psi_n\vDash\varphi$। इसका प्रतिधनात्मक रूप सिद्ध करना सरल है: यदि किसी $\mathfrak{M}$ और जगत w के लिए सभी $i=1$, ..., n हेतु $\mathfrak{M},w\Vdash\psi_i$, किंतु $\mathfrak{M},w\Vdash\varphi$, तो कोई सत्य-वृक्ष संवृत नहीं हो सकता। ऐसा प्रतिप्रतिरूप दिखाता है कि सत्य-वृक्ष की आरंभिक मान्यताएँ संतोषणीय हैं। प्रमाण की रणनीति यह दिखाना है कि जब भी किसी सत्य-वृक्ष शाखा के सभी उपसर्गयुक्त सूत्र संतोषणीय हों, तब किसी नियम का प्रयोग कम-से-कम एक

ऐसी विस्तृत शाखा देता है जो संतोषणीय भी है। चूँकि संवृत शाखाएँ असंतोषणीय हैं, उपसर्गयुक्त सूत्रों के संतोषणीय समुच्चय के किसी भी सत्य-वृक्ष में कम-से-कम एक खुली शाखा अवश्य होगी।

मोडल मामले में इस रणनीति को लागू करने के लिए हमें "संतोषणीय" की अपनी परिभाषा को संबंधों और उपसर्गों तक विस्तृत करना होगा। ऐसा कर लेने पर प्रमाण सीधा है।

परिभाषा 61.2. मान लें P उपसर्गों का कोई समुच्चय है; अर्थात $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^* \setminus \{\Lambda\}$, और $\mathfrak{M}$ कोई प्रतिरूप है। कोई फलन $f\colon P \to W$, $\mathfrak{M}$ में P की *व्याख्या* है, यदि जब भी σ और $\sigma.n$ दोनों P में हों, तब $Rf(\sigma)f(\sigma.n)$।

उपसर्गों P की किसी व्याख्या के सापेक्ष हम परिभाषित कर सकते हैं:

1. $\mathfrak{M}, \sigma\, \mathbb{T}\, \varphi$ को तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$।

2. $\mathfrak{M}, \sigma\, \mathbb{F}\, \varphi$ को तभी संतुष्ट करता है जब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \varphi$।

ध्यान दें कि चूँकि R स्वपरावर्ती और संक्रमणशील है तथा $\sigma.*$, σ, $\sigma.n_1$, $\sigma.n_1.n_2$, ...को दर्शाता है, इसलिए $Rf(\sigma)f(\sigma.*)$ भी।

परिभाषा 61.3. मान लें कि Γ उपसर्गयुक्त सूत्रों का समुच्चय है और $P(\Gamma)$ उसमें आने वाले उपसर्गों का समुच्चय है। यदि f, $\mathfrak{M}$ में $P(\Gamma)$ की व्याख्या है, तो हम कहते हैं कि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Γ को संतुष्ट करता है, $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, यदि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Γ के प्रत्येक उपसर्गयुक्त सूत्र को संतुष्ट करता है। Γ *संतोषणीय* है, तभी जब कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की कोई व्याख्या f ऐसी हो कि $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$।

प्रतिज्ञप्ति 61.4. *यदि Γ में किसी सूत्र φ और उपसर्ग σ के लिए $\sigma\, \mathbb{T}\, \varphi$ तथा $\sigma.*\, \mathbb{F}\, \varphi$ दोनों हों, अथवा उसमें $\sigma\, \mathbb{T}\, \bot$ हो, तो Γ असंतोषणीय है।*

प्रमाण. चूँकि सदैव $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \bot$, इसलिए $\mathbb{T}\, \bot$ वाला कोई Γ असंतोषणीय है।

ऐसा कोई प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की व्याख्या f भी नहीं हो सकती कि दोनों सत्य हों। यदि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$, तो प्रतिज्ञप्ति 59.3 से, चूँकि $Rf(\sigma)(\sigma.*)$, $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$। अतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \varphi$ और $\mathfrak{M}, f(\sigma.*) \nVdash \varphi$ दोनों नहीं हो सकते। □

प्रमेय 61.5 (यथार्थता). *यदि Γ का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है, तो Γ असंतोषणीय है।*

प्रमाण. हम किसी सत्य-वृक्ष की शाखा को संतोषणीय तभी कहते हैं जब उस पर स्थित चिह्नित सूत्रों का समुच्चय संतोषणीय हो; और किसी सत्य-वृक्ष को संतोषणीय तब कहते हैं जब उसमें कम-से-कम एक संतोषणीय शाखा हो।

हम निम्न बात दिखाते हैं: किसी संतोषणीय सत्य-वृक्ष को अनुमान के किसी नियम से विस्तृत करने पर सदैव संतोषणीय सत्य-वृक्ष मिलता है। इससे प्रमेय सिद्ध होगा: कोई भी संवृत सत्य-वृक्ष, केवल Γ की मान्यताओं वाले सत्य-वृक्ष पर अनुमान-नियम लगाकर मिलता है। अतः यदि Γ संतोषणीय होता, तो उसका प्रत्येक सत्य-वृक्ष संतोषणीय होता। किंतु संवृत सत्य-वृक्ष स्पष्टतः संतोषणीय नहीं है, क्योंकि उसकी सभी शाखाएँ संवृत हैं और संवृत शाखाएँ असंतोषणीय हैं।

मान लें हमारे पास कोई संतोषणीय सत्य-वृक्ष, अर्थात कम-से-कम एक संतोषणीय शाखा वाला सत्य-वृक्ष, है। अनुमान-नियम लगाने पर या तो किसी शाखा में चिह्नित सूत्र जुड़ते हैं, अथवा शाखा दो भागों में विभक्त होती है। यदि सत्य-वृक्ष में कोई संतोषणीय शाखा ऐसी है जिसे संबंधित नियम-प्रयोग विस्तृत नहीं करता, तो वह विस्तृत सत्य-वृक्ष में संतोषणीय बनी रहती है; अतः विस्तृत टैब्लो संतोषणीय है। इसलिए हमें केवल उस मामले पर विचार करना है जिसमें नियम किसी संतोषणीय शाखा पर लगाया जाता है।

उस शाखा के चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ और जिस चिह्नित सूत्र पर नियम लगाया जाता है उसे $\sigma\, S\, \varphi \in \Gamma$ मानें। यदि नियम शाखा को विभक्त नहीं करता, तो हमें दिखाना है कि विस्तृत शाखा—अर्थात Γ के साथ नियम के निष्कर्ष—अब भी संतोषणीय है। यदि नियम शाखा को विभक्त करता है, तो हमें दिखाना है कि परिणामी दोनों शाखाओं में कम-से-कम एक संतोषणीय है।

1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\neg\psi \in \Gamma$ पर $\neg\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। तब विस्तृत शाखा में चिह्नित सूत्र $\Gamma \cup \{\sigma.*\,\mathbb{F}\,\psi\}$ हैं। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$। विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \neg\psi$। अतः $Rf(\sigma)w$ वाले किसी भी w के लिए $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, और इसमें $f(\sigma.*)$ भी आता है। इसलिए $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष $\sigma.*\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\neg\psi \in \Gamma$ पर $\neg\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर $\wedge\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है, जिससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्र $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$ मिलते हैं। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, f(\sigma) \Vdash \chi$। इसका अर्थ है कि $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi$ तथा $\sigma\,\mathbb{T}\,\chi$ दोनों को संतुष्ट करता है।

4. शाखा को $\mathbb{F}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर $\vee\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

5. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \to \chi \in \Gamma$ पर $\to\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। इससे शाखा पर दो नए चिह्नित सूत्र $\sigma.n\,\mathbb{T}\,\psi$ और $\sigma.n\,\mathbb{F}\,\chi$ मिलते हैं, जहाँ $\sigma.n$ शाखा पर नया उपसर्ग है; अर्थात $\sigma.n \notin P(\Gamma)$।

   चूँकि Γ संतोषणीय है, कोई $\mathfrak{M}$ और $P(\Gamma)$ की व्याख्या f ऐसी है कि $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi \to \chi$। हमें दिखाना है कि $\Gamma \cup \{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi \to \chi\}$ संतोषणीय है। इसके लिए हम $P(\Gamma) \cup \{\sigma.n\}$ की व्याख्या इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

   चूँकि $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi \to \chi$, कोई $w \in W$ ऐसा है कि $Rf(\sigma)w$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, w \nVdash \chi$। f' को f जैसा लें, केवल $f'(\sigma.n) = w$। चूँकि $f'(\sigma) = f(\sigma)$ और $Rf(\sigma)w$, इसलिए $Rf'(\sigma)f'(\sigma.n)$; अतः f', $P(\Gamma) \cup \{\sigma.n\}$ की व्याख्या है। स्पष्टतः $\mathfrak{M}, f'(\sigma.n) \Vdash \psi$ और $\mathfrak{M}, f'(\sigma.n) \nVdash \chi$। सभी उपसर्गों $\sigma' \in P(\Gamma)$ के लिए $f(\sigma') = f'(\sigma')$, अतः $\mathfrak{M}, f' \Vdash \Gamma$। इसलिए $\mathfrak{M}, f'$, $\Gamma \cup \{\sigma.n\,\mathbb{F}\,\psi \to \chi\}$ को संतुष्ट करता है।

अब दो पूर्वाधारों वाले संभावित अनुमानों पर विचार करें।

1. शाखा को $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$ पर $\wedge\mathbb{F}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है। इससे दो शाखाएँ मिलती हैं: बायीं शाखा $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ से और दायीं शाखा $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$ से आगे बढ़ती है। मान लें $\mathfrak{M}, f \Vdash \Gamma$, विशेषतः $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi \wedge \chi$। तब $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, f(\sigma) \nVdash \chi$। पहले मामले में $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\psi$ को संतुष्ट करता है; अर्थात बायीं शाखा संतोषणीय है। दूसरे में $\mathfrak{M}, f$, $\sigma\,\mathbb{F}\,\chi$ को संतुष्ट करता है; अर्थात दायीं शाखा संतोषणीय है।

2. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$ पर $\vee\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास।

3. शाखा को $\sigma\,\mathbb{T}\,\psi \to \chi \in \Gamma$ पर $\to\mathbb{T}$ लगाकर विस्तृत किया जाता है: अभ्यास। □

उपप्रमेय 61.6. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो किन्हीं $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ के लिए $\Delta = \{1\,\mathbb{F}\,\varphi, 1\,\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, 1\,\mathbb{T}\,\psi_n\}$ का कोई संवृत सत्य-वृक्ष है। हमें $\Gamma \vDash \varphi$ दिखाना है। विपरीत मान लें; तब किसी $\mathfrak{M}$ और w के लिए $i = 1, \ldots, n$ हेतु $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi_i$, किंतु $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$। $f(1) = w$ लें; तब f, $\mathfrak{M}$ में $P(\Delta)$ की व्याख्या है और $\mathfrak{M}$, f के सापेक्ष Δ को संतुष्ट करता है। किंतु प्रमेय 61.5 से Δ असंतोषणीय है, क्योंकि उसका संवृत सत्य-वृक्ष है—एक विरोधाभास। अतः अंततः $\Gamma \vdash \varphi$ होना चाहिए। □

उपप्रमेय 61.7. *यदि $\vdash \varphi$, तो φ सभी प्रतिरूपों में सत्य है।*

प्रश्न

प्रश्न 61.1. निम्न को दिखाने वाले संवृत अंतःप्रज्ञावादी सत्य-वृक्ष खोजिए:

1. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$
4. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

प्रश्न 61.2. प्रमेय 61.5 का प्रमाण पूरा कीजिए।

खण्ड XIV

प्रतितथ्यात्मक सशर्त

अध्याय 62

परिचय

62.1 भौतिक सशर्त

अंग्रेज़ी में सशर्त का सबसे सरल रूप "यदि ...तो ..." आकार का वाक्य है, जहाँ ... के स्थानों पर स्वयं वाक्य होते हैं; जैसे, "यदि यह काम खानसामे ने किया, तो माली निर्दोष है।" आरंभिक तर्कशास्त्र पाठ्यक्रमों में हम $\rightarrow$ संयोजक से सशर्तों को संकेतित करना सीखते हैं: ...से सूचित भागों को, मसलन सूत्रों φ और ψ से, संकेतित करें; तब पूरे सशर्त को $\varphi \rightarrow \psi$ से संकेतित किया जाता है।

संयोजक $\rightarrow$ *सत्य-फलनीय* है; अर्थात $\varphi \rightarrow \psi$ का सत्य-मूल्य—$\mathbb{T}$ या $\mathbb{F}$—φ और ψ के सत्य-मूल्यों से निर्धारित होता है: $\varphi \rightarrow \psi$ तभी सत्य है जब φ असत्य या ψ सत्य हो, और अन्यथा असत्य। सत्य-मूल्य नियतन $\mathfrak{v}$ के सापेक्ष हम $\mathfrak{v} \vDash \varphi \rightarrow \psi$ तभी परिभाषित करते हैं जब $\mathfrak{v} \nvDash \varphi$ या $\mathfrak{v} \vDash \psi$। इस अर्थविज्ञान वाले संयोजक $\rightarrow$ को *भौतिक सशर्त* कहते हैं।

इस परिभाषा से अनेक प्रारंभिक तार्किक तथ्य मिलते हैं। सबसे पहले, भौतिक सशर्त के लिए निगमन प्रमेय सत्य है:

$$\text{यदि } \Gamma, \varphi \vDash \psi \text{ तो } \Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi \tag{62.1}$$

यह सत्य-फलनीय है: $\varphi \rightarrow \psi$ और $\neg\varphi \vee \psi$ समतुल्य हैं:

$$\varphi \rightarrow \psi \vDash \neg\varphi \vee \psi \tag{62.2}$$
$$\neg\varphi \vee \psi \vDash \varphi \rightarrow \psi \tag{62.3}$$

भौतिक सशर्त अपने परिणामांश और अपने पूर्ववर्ती के निषेध, दोनों से निष्पन्न होता है:

$$\psi \vDash \varphi \rightarrow \psi \tag{62.4}$$
$$\neg\varphi \vDash \varphi \rightarrow \psi \tag{62.5}$$

असत्य भौतिक सशर्त अपने पूर्ववर्ती और परिणामांश के निषेध के संयोजन के समतुल्य है: यदि $\varphi \rightarrow \psi$ असत्य है, तो $\varphi \wedge \neg\psi$ सत्य है, और विलोमतः:

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vDash \varphi \wedge \neg\psi \tag{62.6}$$
$$\varphi \wedge \neg\psi \vDash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \tag{62.7}$$

भौतिक सशर्त मोडस पोनेन्स को मान्य करता है:

$$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vDash \psi \tag{62.8}$$

भौतिक सशर्त समुच्चित होता है:

$$\varphi \to \psi, \varphi \to \chi \vDash \varphi \to (\psi \wedge \chi) \tag{62.9}$$

हम पूर्ववर्ती को सदैव प्रबल कर सकते हैं; अर्थात सशर्त *एकदिष्ट* है:

$$\varphi \to \psi \vDash (\varphi \wedge \chi) \to \psi \tag{62.10}$$

भौतिक सशर्त संक्रमणशील है; अर्थात शृंखला-नियम मान्य है:

$$\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vDash \varphi \to \chi \tag{62.11}$$

भौतिक सशर्त अपने प्रतिधनात्मक के समतुल्य है:

$$\varphi \to \psi \vDash \neg\psi \to \neg\varphi \tag{62.12}$$

$$\neg\psi \to \neg\varphi \vDash \varphi \to \psi \tag{62.13}$$

ये सभी गणितीय तर्क-विचार में उपयोगी और निर्विवाद अनुमान हैं। किंतु दार्शनिक और भाषावैज्ञानिक साहित्य में गैर-गणितीय संदर्भों के समकक्ष अनुमानों के कथित प्रतिदृष्टांत भरे पड़े हैं। वे संकेत करते हैं कि अंग्रेज़ी के "यदि ...तो ..." कथनों को संकेतित करने के लिए भौतिक सशर्त $\to$ उपयुक्त संयोजक नहीं है—या कम-से-कम सदैव नहीं है।

62.2 भौतिक सशर्त के विरोधाभास

अंग्रेज़ी के "यदि ...तो ..." कथनों को संकेतित करने के लिए $\varphi \to \psi$ के प्रयोग की आलोचना करने वालों में सी. आई. लुईस सबसे पहले लोगों में थे। लुईस व्हाइटहेड और रसेल की *प्रिंसिपिया मैथमेटिका* में भौतिक सशर्त के प्रयोग की आलोचना कर रहे थे, जहाँ $\to$ को "निहित करता है" पढ़ा गया था। लुईस ने उचित ही शिकायत की कि यदि $\to$ का अर्थ "निहित करता है" है, तो कोई भी असत्य प्रतिज्ञप्ति p यह निहित करती है कि p, q को निहित करता है, क्योंकि p के असत्य होने पर $p \to (p \to q)$ सत्य है; और कोई भी सत्य प्रतिज्ञप्ति q यह निहित करती है कि p, q को निहित करता है, क्योंकि q के सत्य होने पर $q \to (p \to q)$ सत्य है।

तर्कशास्त्री निश्चय ही जानते हैं कि *निहितार्थ*, अर्थात तार्किक निष्कर्षण, कोई संयोजक नहीं बल्कि सूत्रों या कथनों के बीच संबंध है। अतः भ्रम से बचने के लिए हमें $\to$ को "निहित करता है" नहीं पढ़ना चाहिए।[1] जब तक हम ऐसा नहीं पढ़ते, लुईस की विशेष चिंता उत्पन्न ही नहीं होती: भले ही p को किसी ऐसे अंग्रेज़ी वाक्य का संकेत मानें जो संयोगतः असत्य है, फिर भी p, q को "निहित" नहीं करता। $p \vDash q$ है या नहीं यह निर्धारित करने के लिए हमें *सभी* सत्य-मूल्यांकनों पर विचार करना होगा; और किसी संयोगतः असत्य वाक्य को संकेतित करने के लिए p का उपयोग करने पर भी $p \nvDash q$।

फिर भी लुईस के निम्न जैसे "यदि ...तो ..." कथनों में कुछ विचित्र है:

> यदि चंद्रमा हरे पनीर का बना है, तो $2 + 2 = 4$।

और निम्न अनुमानों में भी:

> चंद्रमा हरे पनीर का बना नहीं है। अतः यदि चंद्रमा हरे पनीर का बना है, तो $2 + 2 = 4$।
>
> $2 + 2 = 4$। अतः यदि चंद्रमा हरे पनीर का बना है, तो $2 + 2 = 4$।

फिर भी यदि "यदि ...तो ..." केवल $\to$ होता, तो वाक्य निर्विवाद रूप से सत्य और अनुमान निर्विवाद रूप से मान्य होते।

एक अन्य उदाहरण सर्वसत्यता $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ से संबंधित है। इससे संकेत मिलता है कि यदि समाचारपत्र से दो विधानवाचक वाक्य S और T यादृच्छिक रूप से लें, तो "यदि S तो T, या यदि T तो S" वाक्य सत्य होना चाहिए।

[1] गणितज्ञ और कंप्यूटर वैज्ञानिक अब भी "$\to$" को "निहित करता है" व्यापक रूप से पढ़ते हैं, यद्यपि दार्शनिक उसे "केवल तभी" पढ़कर लुईस द्वारा रेखांकित भ्रमों से बचने का प्रयास करते हैं।

62.3 कठोर सशर्त

लुईस ने *कठोर सशर्त* $\strictif$ प्रस्तुत किया और तर्क दिया कि निहितार्थ के अनुरूप भौतिक सशर्त नहीं, बल्कि यही है। सत्यात्मक मोडल तर्कशास्त्र में $\varphi \strictif \psi$ को $\Box(\varphi \to \psi)$ से परिभाषित किया जा सकता है। अतः कोई कठोर सशर्त (किसी जगत पर) तभी सत्य है जब संगत भौतिक सशर्त आवश्यक हो।

भौतिक सशर्त के विरोधाभासों की तुलना में कठोर सशर्त कैसा रहता है? असत्य पूर्ववर्ती वाला कठोर सशर्त, और सत्य परिणामांश वाला कठोर सशर्त, सत्य भी हो सकता है और असत्य भी। इसके अतिरिक्त $(\varphi \strictif \psi) \vee (\psi \strictif \varphi)$ मान्य नहीं है। कठोर सशर्त $\varphi \strictif \psi$, $\neg\varphi \vee \psi$ के समतुल्य भी नहीं है, अतः वह सत्य-फलनीय नहीं है।

हमारे पास है:

$$\varphi \strictif \psi \vDash \neg\varphi \vee \psi \text{ किंतु:} \tag{62.14}$$
$$\neg\varphi \vee \psi \nvDash \varphi \strictif \psi \tag{62.15}$$
$$\psi \nvDash \varphi \strictif \psi \tag{62.16}$$
$$\neg\varphi \nvDash \varphi \strictif \psi \tag{62.17}$$
$$\neg(\varphi \to \psi) \nvDash \varphi \wedge \neg\psi \text{ किंतु:} \tag{62.18}$$
$$\varphi \wedge \neg\psi \vDash \neg(\varphi \strictif \psi) \tag{62.19}$$

फिर भी कठोर सशर्त मोडस पोनेन्स को मान्य करता है:

$$\varphi, \varphi \strictif \psi \vDash \psi \tag{62.20}$$

कठोर सशर्त समुच्चित होता है:

$$\varphi \strictif \psi, \varphi \strictif \chi \vDash \varphi \strictif (\psi \wedge \chi) \tag{62.21}$$

कठोर सशर्त के लिए पूर्ववर्ती का प्रबलीकरण मान्य है:

$$\varphi \strictif \psi \vDash (\varphi \wedge \chi) \strictif \psi \tag{62.22}$$

कठोर सशर्त संक्रमणशील भी है:

$$\varphi \strictif \psi, \psi \strictif \chi \vDash \varphi \strictif \chi \tag{62.23}$$

अंततः कठोर सशर्त अपने प्रतिधनात्मक के समतुल्य है:

$$\varphi \strictif \psi \vDash \neg\psi \strictif \neg\varphi \tag{62.24}$$
$$\neg\psi \strictif \neg\varphi \vDash \varphi \strictif \psi \tag{62.25}$$

फिर भी कठोर सशर्त के अपने "विरोधाभास" हैं। जिस प्रकार असत्य पूर्ववर्ती या सत्य परिणामांश वाला भौतिक सशर्त सत्य होता है, उसी प्रकार *आवश्यकतः* असत्य पूर्ववर्ती या आवश्यकतः सत्य परिणामांश वाला कठोर सशर्त सत्य होता है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक सत्य कठोर सशर्त आवश्यकतः सत्य, और प्रत्येक असत्य कठोर सशर्त आवश्यकतः असत्य है। दूसरे शब्दों में, हमारे पास है:

$$\Box\neg\varphi \vDash \varphi \strictif \psi \tag{62.26}$$
$$\Box\psi \vDash \varphi \strictif \psi \tag{62.27}$$
$$\varphi \strictif \psi \vDash \Box(\varphi \strictif \psi) \tag{62.28}$$
$$\neg(\varphi \strictif \psi) \vDash \Box\neg(\varphi \strictif \psi) \tag{62.29}$$

यदि $\supset$ को "निहित करता है" समझें, तो ये समस्याएँ नहीं हैं। आखिर तार्किक निष्कर्षण-संबंध गणितीय तथ्य हैं, अतः आकस्मिक नहीं हो सकते। किंतु यदि $\supset$ को "यदि ...तो ..." ग्रहण करने वाला तार्किक संयोजक बनाना हो, तो ये, विशेषतः अंतिम दो, समस्याएँ उठाते हैं। निश्चय ही "यदि ...तो ..." के कुछ कथन आकस्मिकतः सत्य या आकस्मिकतः असत्य होते हैं—वास्तव में वे सामान्यतः न आवश्यक होते हैं, न असंभव।

62.4 प्रतितथ्यात्मक सशर्त

अंग्रेज़ी में "यदि ...तो ..." रचनाओं का एक अत्यंत सामान्य और महत्त्वपूर्ण रूप *to be* के भूतकालीन संभावनार्थक रूप से बनाया जाता है: "यदि ऐसा होता कि ...तो ऐसा होता कि ...।" चूँकि ऐसे सशर्त का पूर्ववर्ती सामान्यतः असत्य, अर्थात तथ्य के विपरीत, होता है, इन्हें *प्रतितथ्यात्मक सशर्त* कहते हैं (और *to be* के संभावनार्थक रूप के प्रयोग के कारण *संभावनार्थक सशर्त* भी)। इन्हें उन *विधानवाचक* सशर्तों से अलग किया जाता है जिनका रूप "यदि ऐसा है कि ...तो ऐसा है कि ..." होता है। प्रतितथ्यात्मक और विधानवाचक सशर्तों की सत्यता-शर्तें भिन्न हैं। एडम्स के प्रसिद्ध उदाहरण पर विचार करें:

> यदि ऑज़वाल्ड ने केनेडी को नहीं मारा, तो किसी और ने मारा।
>
> यदि ऑज़वाल्ड ने केनेडी को न मारा होता, तो किसी और ने मारा होता।

पहला विधानवाचक और दूसरा प्रतितथ्यात्मक है। पहला स्पष्टतः सत्य है: हम जानते हैं कि राष्ट्रपति जॉन एफ. केनेडी को *किसी* ने मारा था; और यदि वह व्यक्ति (वॉरेन रिपोर्ट के विपरीत) ली हार्वी ऑज़वाल्ड नहीं था, तो किसी अन्य ने केनेडी को मारा। दूसरा कुछ अलग कहता है। वह दावा करता है कि यदि ऑज़वाल्ड ने केनेडी को न मारा होता—अर्थात डैलस की गोलीबारी टल गई होती या असफल रही होती—तो बाद का इतिहास इस प्रकार घटित होता कि हत्या का कोई दूसरा प्रयास सफल हो जाता। उसके सत्य होने के लिए शक्तिशाली तत्वों ने JFK की मृत्यु सुनिश्चित करने का षड्यंत्र किया होना चाहिए (जैसा अनेक JFK षड्यंत्र-सिद्धांतकार मानते हैं)।

इस पर सक्रिय बहस है कि क्या *विधानवाचक* सशर्त को भौतिक सशर्त ठीक से ग्रहण करता है; विशेषतः क्या भौतिक सशर्त के विरोधाभासों को इस प्रकार "समझाया" जा सकता है जो अंग्रेज़ी विधानवाचक सशर्तों की सत्यता-शर्तें देने के उसके दावे से संगत हो। इसके विपरीत यह निर्विवाद है कि प्रतितथ्यात्मक सशर्तों को भौतिक सशर्त द्वारा ठीक से संकेतित नहीं किया जा सकता। कारण स्पष्ट है: यद्यपि प्रतितथ्यात्मक सशर्तों के पूर्ववर्ती सामान्यतः असत्य होते हैं, असत्य पूर्ववर्ती वाला हर प्रतितथ्यात्मक सशर्त सत्य नहीं होता। उदाहरणार्थ, यदि आप वॉरेन रिपोर्ट मानते हैं और JFK की हत्या का कोई षड्यंत्र नहीं था, तो एडम्स का प्रतितथ्यात्मक सशर्त इसका उदाहरण है।

कारणात्मक तर्क-विचार में प्रतितथ्यात्मक सशर्त महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं: प्रतितथ्यात्मक के उपयोग का प्रमुख उदाहरण कारणात्मक संबंध व्यक्त करना है। मसलन, माचिस की तीली रगड़ने से वह जलती है; इसे हम कह सकते हैं, "यदि इस तीली को रगड़ा जाता, तो वह जलती।" भौतिक सशर्त और सामान्यतः विधानवाचक सशर्त इसे व्यक्त नहीं कर सकते: "तीली रगड़ी जाती है $\rightarrow$ तीली जलती है" तब सत्य है जब तीली कभी रगड़ी ही न जाए, चाहे रगड़े जाने पर कुछ भी होता। इससे भी बुरा, "तीली रगड़ी जाती है $\rightarrow$ तीली फूलों का गुलदस्ता बन जाती है" भी तब सत्य है जब उसे कभी न रगड़ा जाए; किंतु रगड़े जाने पर तीली निश्चित रूप से फूलों का गुलदस्ता नहीं बनेगी।

प्रतितथ्यात्मक का सही तर्कशास्त्र ठीक क्या है, इस पर अभी बहस है। स्टालनेकर और लुईस ने प्रतितथ्यात्मक का प्रभावशाली विश्लेषण दिया। उनके अनुसार कोई प्रतितथ्यात्मक "यदि S होता, तो T होता" तभी सत्य है जब T उस प्रतितथ्यात्मक स्थिति ("संभव जगत") में सत्य हो जो वास्तविक जगत की स्थिति के सबसे निकट है और जहाँ S सत्य है। इसे "सत्तामीमांसात्मक" विश्लेषण कहते हैं, क्योंकि यह संभव जगतों की सत्तामीमांसा का उल्लेख करता है। अन्य विश्लेषण सशर्त प्रायिकताओं या विश्वास-संशोधन के सिद्धांतों का उपयोग करते हैं। प्रतितथ्यात्मक के अनेक भिन्न प्रस्तावित तर्कशास्त्र हैं। प्रतितथ्यात्मक का कोई एक लुईस–स्टालनेकर तर्कशास्त्र तक नहीं है: यद्यपि स्टालनेकर और लुईस ने निकटतम संभव जगतों के संदर्भ में समान दिशा के विवरण प्रस्तावित किए, उनकी मान्यताएँ अलग-अलग मान्य अनुमान देती हैं।

प्रश्न

प्रश्न 62.1. कठोर सशर्त के लिए अमान्य निष्कर्षण-संबंधों के S5-प्रतिदृष्टांत दीजिए; अर्थात निम्न के लिए:

1. $\neg p \nvDash \Box(p \to q)$
2. $q \nvDash \Box(p \to q)$
3. $\neg\Box(p \to q) \nvDash p \wedge \neg q$
4. $\nvDash \Box(p \to q) \vee \Box(q \to p)$

प्रश्न 62.2. निम्न के S5-प्रमाण देकर दिखाइए कि मान्य निष्कर्षण-संबंध कठोर सशर्त के लिए सत्य हैं:

1. $\Box(\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi \vee \psi$
2. $\varphi \wedge \neg\psi \vDash \neg\Box(\varphi \to \psi)$
3. $\varphi, \Box(\varphi \to \psi) \vDash \psi$
4. $\Box(\varphi \to \psi), \Box(\varphi \to \chi) \vDash \Box(\varphi \to (\psi \wedge \chi))$
5. $\Box(\varphi \to \psi) \vDash \Box((\varphi \wedge \chi) \to \psi)$
6. $\Box(\varphi \to \psi), \Box(\psi \to \chi) \vDash \Box(\varphi \to \chi)$
7. $\Box(\varphi \to \psi) \vDash \Box(\neg\psi \to \neg\varphi)$
8. $\Box(\neg\psi \to \neg\varphi) \vDash \Box(\varphi \to \psi)$

प्रश्न 62.3. S5 में निम्न के प्रमाण दीजिए:

1. $\Box\neg\varphi \vDash \varphi \mathrel{-\!\!\!\supset} \psi$
2. $\varphi \mathrel{-\!\!\!\supset} \psi \vDash \Box(\varphi \mathrel{-\!\!\!\supset} \psi)$
3. $\neg(\varphi \mathrel{-\!\!\!\supset} \psi) \vDash \Box\neg(\varphi \mathrel{-\!\!\!\supset} \psi)$

इसके लिए $\mathrel{-\!\!\!\supset}$ की परिभाषा का उपयोग कीजिए।

अध्याय 63

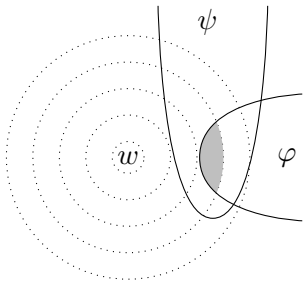
न्यूनतम परिवर्तन अर्थविज्ञान

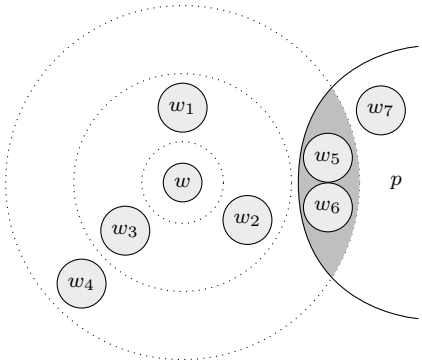
63.1 परिचय

स्टालनेकर और लुईस ने "यदि माचिस की तीली रगड़ी जाती, तो वह जलती" जैसे प्रतितथ्यात्मक सशर्तों के विवरण प्रस्तावित किए। उनके विवरण ऐसे वाक्यों की सत्यता-शर्तों को ठीक से समझने के प्रस्ताव थे। दोनों प्रस्तावों का मूल विचार यह है: कोई प्रतितथ्यात्मक सशर्त सत्य है या नहीं, इसका मूल्यांकन करने के लिए हमें उन संभव जगतों पर विचार करना होगा जो पूर्ववर्ती को सत्य बनाने के लिए वास्तविक जगत से न्यूनतम रूप से भिन्न हों। यदि इन संभव जगतों में परिणामांश सत्य है, तो प्रतितथ्यात्मक सत्य है। मसलन, मान लें मेरे हाथ में माचिस की तीली और माचिस की डिबिया है। वास्तविक जगत में मैं केवल उन्हें देखता और सोचता हूँ कि तीली रगड़ने पर क्या होगा। वास्तविक जगत से वह न्यूनतम परिवर्तन, जिसमें मैं तीली रगड़ता हूँ, ऐसा है जहाँ मैं कार्य करने का निर्णय लेकर तीली रगड़ता हूँ। वह न्यूनतम इसलिए है कि और कुछ नहीं बदलता: मैं साथ ही हवा में नहीं कूदता, तीली रगड़ने से मेरे बाल भी नहीं जल उठते, मेरी उँगलियों की सारी शक्ति अचानक समाप्त नहीं होती, उसी क्षण सुपर-सोकर से घात लगाकर मुझ पर पानी नहीं डाला जाता, इत्यादि। उस वैकल्पिक संभावना में तीली जलती है। अतः यह सत्य है कि यदि मैं तीली रगड़ता, तो वह जलती।

इस सहज विवरण को प्रतितथ्यात्मक तर्कशास्त्र के औपचारिक अर्थविज्ञान के साथ जोड़ा जा सकता है। लुईस ने प्रतितथ्यात्मक के लिए "$\Box\!\!\rightarrow$" संकेत और स्टालनेकर ने "$>$" संकेत प्रस्तुत किया। हम $\Box\!\!\rightarrow$ का उपयोग करेंगे और उसे प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र में द्विस्थानी संयोजक के रूप में जोड़ेंगे। अतः $\varphi \rightarrow \psi$ रूप वाले सूत्रों के अतिरिक्त हमारे पास $\varphi \Box\!\!\rightarrow \psi$ रूप वाले सूत्र भी हैं। मोडल तर्कशास्त्र के संबंधात्मक अर्थविज्ञान की तरह औपचारिक अर्थविज्ञान ऐसे प्रतिरूपों पर आधारित है जिनमें जगतों पर सूत्रों का मूल्यांकन होता है; और $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \Box\!\!\rightarrow \psi$ को परिभाषित करने वाली संतुष्टि-शर्त कुछ (अन्य) जगतों w' पर $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$ और $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$ के पदों में दी जाती है। कौन-से w'? सहज रूप से w के वे निकटतम जगत जिनके लिए $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$। इसके लिए "निकटता" का संबंध भी प्रतिरूप में सम्मिलित करना होगा।

लुईस ने प्रतितथ्यात्मक स्थितियों को आलेखीय रूप से निरूपित करने की उपयोगी विधि प्रस्तुत की। प्रत्येक संभव जगत अन्य जगतों वाले अंतर्निविष्ट गोलकों के एक समुच्चय के केंद्र में होता है—हम इन गोलकों को संकेंद्रित वृत्तों के रूप में खींचते हैं। दो गोलकों के बीच के जगत केंद्र वाले जगत से समान दूरी पर हैं; भीतरी गोलक में आने वाले जगत अधिक निकट और बाहरी गोलक में आने वाले अधिक दूर हैं।





चित्र 63.1: गोलक प्रतिरूप का आरेख

निकटतम φ-जगत वे जगत w' हैं जहाँ φ संतुष्ट होता है और जो केंद्रीय जगत w के चारों ओर सबसे छोटे गोलक (धूसर क्षेत्र) में स्थित हैं। सहज रूप से, w पर $\varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \psi$ तभी संतुष्ट होता है जब सभी निकटतम φ-जगतों पर ψ सत्य हो।

63.2 गोलक प्रतिरूप

प्रतितथ्यात्मक का औपचारिक अर्थविज्ञान देने का एक ढंग लुईस के अनौपचारिक विवरण को गणितीय संरचना में बदलना है। तब किसी जगत w के चारों ओर के गोलक, जगतों के समुच्चय हैं। चूँकि गोलक अंतर्निविष्ट हैं, w के चारों ओर जगतों के समुच्चयों को उपसमुच्चय संबंध द्वारा रैखिक रूप से क्रमित होना चाहिए।

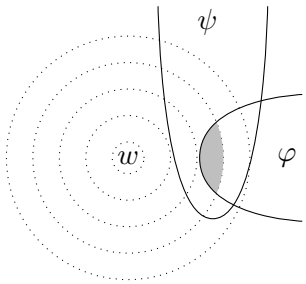
परिभाषा 63.1. कोई *गोलक प्रतिरूप* त्रिक $\mathfrak{M} = \langle W, O, V \rangle$ है, जहाँ W जगतों का अरिक्त समुच्चय, $V\colon \mathrm{At}_0 \to \wp(W)$ कोई मूल्यांकन, और $O\colon W \to \wp(\wp(W))$ ऐसा फलन है जो प्रत्येक जगत w को *गोलक-तंत्र* O_w देता है। प्रत्येक w के लिए O_w, जगतों के समुच्चयों का समुच्चय है और उसे निम्न शर्तें संतुष्ट करनी चाहिए:

1. O_w, w पर *केंद्रित* है: $\{w\} \in O_w$।
2. O_w *अंतर्निविष्ट* है: जब भी $S_1, S_2 \in O_w$, तब $S_1 \subseteq S_2$ या $S_2 \subseteq S_1$; अर्थात O_w, $\subseteq$ द्वारा रैखिक रूप से क्रमित है।
3. O_w अरिक्त संघों के अधीन संवृत है।
4. O_w अरिक्त सर्वनिष्ठों के अधीन संवृत है।

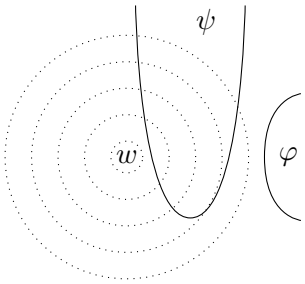
O_w के पीछे की सहज धारणा यह है कि w के "चारों ओर" के जगतों को w से उनकी दूरी के अनुसार स्तरों में रखा गया है। सबसे भीतरी गोलक में केवल स्वयं w, अर्थात समुच्चय $\{w\}$, है: किसी अन्य गोलक के जगतों की अपेक्षा w स्वयं w के अधिक निकट है। यदि $S \subsetneq S'$, तो $S' \setminus S$ के जगत S के जगतों की अपेक्षा w से अधिक दूर हैं: $S' \setminus S$, S और S' के बाहर के जगतों के बीच की "परत" है। विशेषतः गोलकों को उनकी बाहरी सतह के भीतर के सभी जगतों को समाविष्ट करने वाला समझना चाहिए; वे केवल अलग-अलग परतें नहीं हैं।

आकृति 63.1 का आरेख उस गोलक प्रतिरूप के अनुरूप है जिसमें $W = \{w, w_1, \ldots, w_7\}$ और $V(p) = \{w_5, w_6, w_7\}$। सबसे भीतरी गोलक $S_1 = \{w\}$ है। w के निकटतम जगत w_1, w_2, w_3 हैं, अतः अगला बड़ा गोलक $S_2 = \{w, w_1, w_2, w_3\}$ है। अधिक बाहर के जगत w_4, w_5, w_6 हैं, अतः सबसे बाहरी गोलक $S_3 = \{w, w_1, \ldots, w_6\}$ है। w के चारों ओर गोलक-तंत्र $O_w = \{S_1, S_2, S_3\}$ है। जगत w_7, w के चारों ओर किसी गोलक में नहीं है। वे निकटतम जगत जिनमें p सत्य है w_5 और w_6 हैं, अतः सबसे छोटा p-स्वीकारी गोलक S_3 है।

किसी गोलक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ में जगत w पर सूत्र φ की संतुष्टि, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, परिभाषित करने के लिए हम मोडल सूत्रों की परिभाषा में $\psi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \chi$ का उपवाक्य जोड़ते हैं:



चित्र 63.2: गैर-रिक्ततः सत्य प्रतितथ्यात्मक



चित्र 63.3: रिक्ततः सत्य प्रतितथ्यात्मक

परिभाषा 63.2. $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \chi$ तभी जब निम्न में से कोई एक हो:

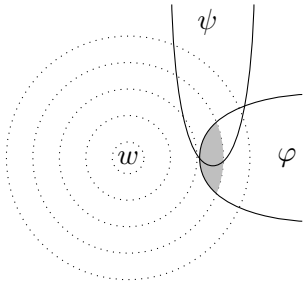
1. प्रत्येक $u \in \bigcup O_w$ के लिए $\mathfrak{M}, u \nVdash \psi$; अथवा
2. किसी $S \in O_w$ के लिए,
   a) किसी $u \in S$ के लिए $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$; और
   b) प्रत्येक $v \in S$ के लिए या तो $\mathfrak{M}, v \nVdash \psi$ या $\mathfrak{M}, v \Vdash \chi$।

इस परिभाषा के अनुसार $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \chi$ तभी जब या तो पूर्ववर्ती ψ, w के चारों ओर के गोलकों में सर्वत्र असत्य है, अथवा कोई गोलक S ऐसा है जहाँ ψ सत्य और उस "ψ-स्वीकारी" गोलक के सभी जगतों पर भौतिक सशर्त $\psi \to \chi$ सत्य है। ध्यान दें कि सहज व्याख्या से अपेक्षित बात के विपरीत, हमने परिभाषा में यह अपेक्षा नहीं की कि S *सबसे भीतरी* ψ-स्वीकारी गोलक हो। किंतु यदि (2) की शर्त किसी गोलक S के लिए संतुष्ट है, तो वह उन सभी गोलकों के लिए भी संतुष्ट है जिन्हें S समाविष्ट करता है; अतः विशेषतः सबसे भीतरी गोलक के लिए।

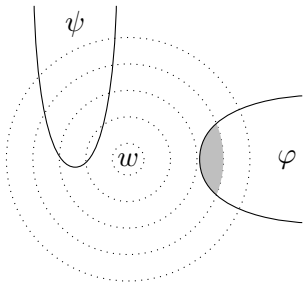
यह भी ध्यान दें कि गोलक प्रतिरूपों की परिभाषा यह अपेक्षा नहीं करती कि कोई सबसे भीतरी ψ-स्वीकारी गोलक *हो*: हमारे पास ψ-स्वीकारी गोलकों का अनंत अनुक्रम $S_1 \supsetneq S_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \{w\}$ हो सकता है, और इसलिए कोई सबसे भीतरी ψ-स्वीकारी गोलक नहीं। उस मामले में $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \chi$ तभी जब किसी i के लिए $\psi \to \chi$, गोलकों S_i, S_{i+1}, ...में सर्वत्र सत्य हो।

63.3 प्रतितथ्यात्मक की सत्यता और असत्यता

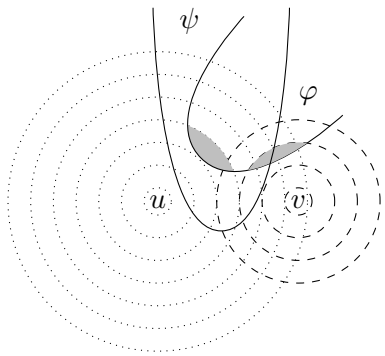
यदि निकटतम φ-जगत सभी ψ-जगत हों, तो प्रतितथ्यात्मक $\varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \psi$ (गैर-रिक्ततः) सत्य है, जैसा आकृति 63.2 में चित्रित है। यदि w के चारों ओर गोलक-तंत्र में कोई भी φ-स्वीकारी गोलक न हो, तो प्रतितथ्यात्मक w पर भी सत्य है। उस स्थिति में वह *रिक्ततः* सत्य है (आकृति 63.3 देखें)।



चित्र 63.4: असत्य प्रतितथ्यात्मक, असत्य विपरीत



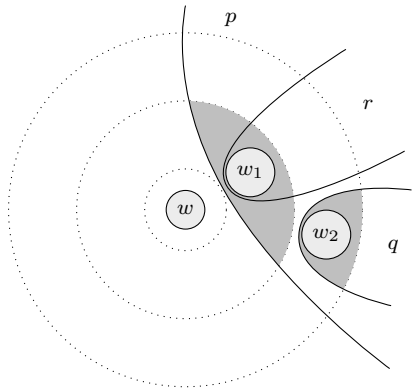
चित्र 63.5: असत्य प्रतितथ्यात्मक, सत्य विपरीत



चित्र 63.6: आकस्मिक प्रतितथ्यात्मक

वह दो प्रकार से असत्य हो सकता है। एक प्रकार वह है जिसमें निकटतम φ-जगत सभी ψ-जगत नहीं हैं, किंतु उनमें से कुछ हैं। इस मामले में $\varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \neg\psi$ भी असत्य है (आकृति 63.4 देखें)। यदि निकटतम φ-जगतों का ψ-जगतों के साथ बिल्कुल अतिव्यापन न हो, तो $\varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \psi$ असत्य है। किंतु इस मामले में सभी निकटतम φ-जगत $\neg\psi$-जगत हैं, अतः $\varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \neg\psi$ सत्य है (आकृति 63.5 देखें)।

कठोर सशर्त के विपरीत, प्रतितथ्यात्मक आकस्मिक हो सकते हैं। आकृति 63.6 के गोलक प्रतिरूप पर विचार करें। u के निकटतम सभी φ-जगत ψ-जगत हैं, अतः $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \psi$। किंतु v के निकटतम φ-जगतों में कुछ ψ-जगत नहीं हैं, अतः $\mathfrak{M}, v \nVdash \varphi \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \psi$।



चित्र 63.7: पूर्ववर्ती के प्रबलीकरण का प्रतिदृष्टांत

63.4 पूर्ववर्ती का प्रबलीकरण

"पूर्ववर्ती का प्रबलीकरण" अनुमान $\varphi \to \chi \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$ को कहते हैं। यह भौतिक सशर्त के लिए मान्य, किंतु प्रतितथ्यात्मक के लिए अमान्य है। मान लें यह सत्य है कि यदि मैं इस माचिस की तीली को रगड़ता, तो वह जलती। (इसका अर्थ है कि तीली या डिबिया की रगड़ने वाली सतह में कोई खराबी नहीं, मैं तीली तोड़ूँगा नहीं, इत्यादि।) किंतु यह सत्य नहीं है कि यदि मैं बाह्य अंतरिक्ष में इस तीली को जलाता, तो वह जलती। अतः निम्न अनुमान अमान्य है:

> यदि माचिस की तीली रगड़ी जाती, तो वह जलती।
>
> अतः यदि माचिस की तीली बाह्य अंतरिक्ष में रगड़ी जाती, तो वह जलती।

सशर्तों का लुईस–स्टालनेकर विवरण इसे समझाता है: वह निकटतम जगत जहाँ मैं तीली जलाता हूँ और ऐसा बाह्य अंतरिक्ष में करता हूँ, उस निकटतम जगत की अपेक्षा वास्तविक जगत से बहुत अधिक दूर है जहाँ मैं तीली जलाता हूँ। अतः यद्यपि बाद वाले में तीली जलती है, पहले वाले में नहीं। और ऐसा ही होना चाहिए।

उदाहरण 63.3. गोलक अर्थविज्ञान इस अनुमान को अमान्य करता है; अर्थात हमारे पास $p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} r \nvDash (p \wedge q) \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} r$ है। प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, O, V \rangle$ पर विचार करें, जहाँ $W = \{w, w_1, w_2\}$, $O_w = \{\{w\}, \{w, w_1\}, \{w, w_1, w_2\}\}$, $V(p) = \{w_1, w_2\}$, $V(q) = \{w_2\}$ और $V(r) = \{w_1\}$। एक p-स्वीकारी गोलक $S = \{w, w_1\}$ है और उसके सभी जगतों पर $p \to r$ सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} r$। एक $(p \wedge q)$-स्वीकारी गोलक $S' = \{w, w_1, w_2\}$ भी है, किंतु $\mathfrak{M}, w_2 \nVdash (p \wedge q) \to r$; अतः $\mathfrak{M}, w \nVdash (p \wedge q) \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} r$ (आकृति 63.7 देखें)।

63.5 संक्रमणशीलता

भौतिक सशर्त के लिए शृंखला-नियम सत्य है: $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vDash \varphi \to \chi$। दूसरे शब्दों में, भौतिक सशर्त संक्रमणशील है। क्या प्रतितथ्यात्मक के लिए भी यही सत्य है? स्टालनेकर का निम्न उदाहरण देखें।

> यदि जे. एडगर हूवर रूसी के रूप में जन्मे होते, तो वे कम्युनिस्ट होते।
>
> यदि जे. एडगर हूवर कम्युनिस्ट होते, तो वे देशद्रोही होते।
>
> अतः यदि जे. एडगर हूवर रूसी के रूप में जन्मे होते, तो वे देशद्रोही होते।

यदि हूवर का जन्म (उसी समय जब वास्तव में हुआ) संयुक्त राज्य अमेरिका में नहीं, बल्कि रूस में हुआ होता, तो वे सोवियत संघ में बड़े होकर कम्युनिस्ट बनते (ऐसा मान लें)। अतः पहला पूर्वाधार सत्य है। इसी प्रकार अकेले विचार करने पर दूसरा पूर्वाधार भी सत्य है। किंतु निष्कर्ष असत्य है: यदि हूवर USSR में जन्मे होते, तो पूरी संभावना है कि वे प्रबल

कम्युनिस्ट होते, अपने देश के देशद्रोही नहीं। सत्य-मूल्यों का यह सहज नियतन स्टालनेकर–लुईस विवरण से पुष्ट होता है। हमारे जगत के उस निकटतम संभव जगत में, जहाँ केवल हूवर का जन्मस्थान बदला है, हूवर USSR के अच्छे नागरिक के रूप में बड़े होते हैं। यही वह निकटतम संभव जगत है जहाँ पहले पूर्वाधार और निष्कर्ष का पूर्ववर्ती सत्य है; और वहाँ हूवर कम्युनिस्ट पार्टी के निष्ठावान सदस्य हैं, अतः देशद्रोही नहीं। किंतु दूसरे पूर्वाधार का मूल्यांकन करने के लिए हमें अलग जगत देखना होगा: वह निकटतम जगत जहाँ हूवर कम्युनिस्ट हैं, जिसमें वे संयुक्त राज्य अमेरिका में जन्मे, पक्ष बदलकर कम्युनिस्ट बने और इस प्रकार देशद्रोही हुए।[1]

उदाहरण 63.4. गोलक अर्थविज्ञान इस अनुमान को अमान्य करता है; अर्थात हमारे पास $p \Box\!\!\rightarrow q, q \Box\!\!\rightarrow r \nvDash p \Box\!\!\rightarrow r$ है। प्रतिरूप $\mathfrak{M} = \langle W, O, V \rangle$ पर विचार करें, जहाँ $W = \{w, w_1, w_2\}$, $O_w = \{\{w\}, \{w, w_1\}, \{w, w_1, w_2\}\}$, $V(p) = \{w_2\}$, $V(q) = \{w_1, w_2\}$ और $V(r) = \{w_1\}$। एक p-स्वीकारी गोलक $S = \{w, w_1, w_2\}$ है और उसके सभी जगतों में $p \rightarrow q$ सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash p \Box\!\!\rightarrow q$। इसी प्रकार एक q-स्वीकारी गोलक $S' = \{w, w_1\}$ है और उसके सभी जगतों में $\mathfrak{M} \nVdash q \rightarrow r$ सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash q \Box\!\!\rightarrow r$। किंतु p-स्वीकारी गोलक $\{w, w_1, w_2\}$ में एक जगत, अर्थात w_2, ऐसा है जहाँ $\mathfrak{M}, w_2 \nVdash p \rightarrow r$।

63.6 प्रतिधनात्मकता

भौतिक और कठोर सशर्त अपने प्रतिधनात्मक के समतुल्य होते हैं। प्रतितथ्यात्मक सशर्त ऐसे नहीं होते। क्राट्ज़र का यह उदाहरण देखें:

> यदि ग्योथे 1832 में न मरे होते, तो वे अब (फिर भी) मृत होते।
>
> यदि ग्योथे अब मृत न होते, तो वे 1832 में मरे होते।

पहला वाक्य सत्य है: मनुष्य सैकड़ों वर्ष नहीं जीते। दूसरा स्पष्टतः असत्य है: यदि ग्योथे अब मृत न होते, तो वे अभी जीवित होते और इसलिए 1832 में मर नहीं सकते थे।

उदाहरण 63.5. गोलक अर्थविज्ञान प्रतिधनात्मकता को अमान्य करता है; अर्थात हमारे पास $p \Box\!\!\rightarrow q \nvDash \neg q \Box\!\!\rightarrow \neg p$ है। p को "ग्योथे 1832 में नहीं मरे" और q को "ग्योथे अब मृत हैं" मानें। इसे हम ऐसे प्रतिरूप $\mathfrak{M}_1 = \langle W, O, V \rangle$ में निरूपित कर सकते हैं जिसमें $W = \{w, w_1, w_2\}$, $O = \{\{w\}, \{w, w_1\}, \{w, w_1, w_2\}\}$, $V(p) = \{w_1, w_2\}$ और $V(q) = \{w, w_1\}$। अतः w वास्तविक जगत है, जहाँ ग्योथे 1832 में मरे और अब भी मृत हैं; w_1 वह (निकट) जगत है, जहाँ ग्योथे, मान लें, 1833 में मरे और अब भी मृत हैं; और w_2 वह (दूरस्थ) जगत है, जहाँ ग्योथे अब भी जीवित हैं। एक p-स्वीकारी गोलक $S = \{w, w_1\}$ है और उसके सभी जगतों में $p \rightarrow q$ सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w \Vdash p \Box\!\!\rightarrow q$। किंतु $\neg q$-स्वीकारी गोलक $\{w, w_1, w_2\}$ में एक जगत, अर्थात w_2, ऐसा है जहाँ q असत्य और p सत्य है, अतः $\mathfrak{M}, w_2 \nVdash \neg q \rightarrow \neg p$।

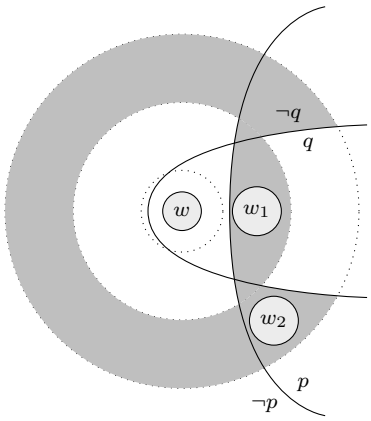
प्रश्न

प्रश्न 63.1. प्रतितथ्यात्मक की संक्रमणशीलता की विफलता का कोई विश्वसनीय, सहज उदाहरण खोजिए।

प्रश्न 63.2. उदाहरण 63.4 के प्रतिदृष्टांत के अनुरूप गोलक आरेख बनाइए।

प्रश्न 63.3. उदाहरण 63.4 में जगत w_2 वह है जहाँ हूवर रूस में जन्मे, कम्युनिस्ट हैं, किंतु देशद्रोही नहीं; और w_1 वह जगत है जहाँ हूवर अमेरिका में जन्मे, कम्युनिस्ट हैं और देशद्रोही हैं। इस प्रतिरूप में w_1, w_2 की अपेक्षा w के अधिक निकट है। क्या यह आवश्यक है? क्या आप ऐसा प्रतिदृष्टांत दे सकते हैं जिसमें यह न माना गया हो कि हूवर का रूस में जन्म लेना, उनके कम्युनिस्ट होने की अपेक्षा अधिक दूरस्थ संभावना है?

[1] निश्चय ही उदाहरण की शक्ति समझने के लिए हमें कुछ तत्त्वमीमांसात्मक और राजनीतिक मान्यताएँ स्वीकार करनी होंगी; मसलन यह कि हूवर का रूसी माता-पिता से जन्म लेना संभव था, अथवा 1950 के दशक के अमेरिका में कम्युनिस्ट अपने देश के देशद्रोही थे।



चित्र 63.8: प्रतिधनात्मकता का प्रतिदृष्टांत

खण्ड XV

समुच्चय सिद्धांत

अध्याय 64

पुनरावर्ती अवधारणा

64.1 विस्तारिता

सबसे पहले यह कहना चाहिए कि समुच्चयों की पहचान उनके अवयव से होती है। अधिक सटीक रूप में:

विस्तारिता (विस्तारिता). यदि समुच्चयों A और B के अवयव समान हैं, तो A और B एक ही समुच्चय हैं।

$$\forall A \forall B \, (\forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

हमने पूरे भाग I में इसे मान लिया था, किंतु इसे दोहराना उपयोगी है। विस्तारिता का अभिगृहीत इस मूल विचार को व्यक्त करता है कि किसी समुच्चय का निर्धारण उसके अवयव से होता है। (इसलिए समुच्चयों की तुलना *संकल्पनाओं* से की जा सकती है, जहाँ ठीक वही वस्तुएँ अनेक भिन्न संकल्पनाओं के अंतर्गत आ सकती हैं।)

इस सिद्धांत को क्यों स्वीकार करें? यह कहना युक्तिसंगत है कि विस्तारिता का कोई भी निषेध उस हर चीज़ को त्यागने का निर्णय है जिसे *समुच्चय सिद्धांत* तक कहा जा सके। समुच्चय सिद्धांत विस्तारात्मक संग्रहों का सिद्धांत ही है—न उससे अधिक, न कम।

फिर भी भाग XV की वास्तविक चुनौती ऐसे सिद्धांत निर्धारित करना है जो हमें बताएँ कि *कौन-से समुच्चय अस्तित्व रखते हैं*। और पता चलता है कि इस प्रश्न का एकमात्र सचमुच "स्पष्ट" उत्तर सिद्धतः गलत है।

64.2 रसेल का विरोधाभास (फिर से)

भाग I में हमने सहज समुच्चय सिद्धांत के साथ काम किया था। किंतु एक *अत्यंत* सहज अवधारणा के अनुसार समुच्चय केवल विधेयों के विस्तार होते हैं। यह सहज विचार निम्न सिद्धांत को अनिवार्य बनाएगा:

> *सहज समुच्चय-निर्माण।* प्रत्येक सूत्र φ के लिए $\{x : \varphi(x)\}$ का अस्तित्व है।

यह सिद्धांत जितना भी आकर्षक हो, इसकी असंगति सिद्ध की जा सकती है। हमने इसे खंड 1.6 में देखा था, किंतु परिणाम इतना महत्त्वपूर्ण और इतना सीधा है कि उसे शब्दशः दोहराना उचित है।

प्रमेय 64.1 (रसेल का विरोधाभास). *ऐसा कोई समुच्चय $R = \{x : x \notin x\}$ नहीं है।*

प्रमाण. यदि $R = \{x : x \notin x\}$ का अस्तित्व हो, तो $R \in R$ तभी और केवल तभी जब $R \notin R$; यह विरोधाभास है। □

रसेल ने यह परिणाम जून 1901 में खोजा। (हालाँकि उन्होंने विरोधाभास को ठीक उसी रूप में नहीं रखा था जिसमें हमने अभी प्रस्तुत किया है, क्योंकि वे *ग्रुंडगेज़ेत्से* में प्रतिपादित फ़्रेगे के समुच्चय सिद्धांत पर विचार कर रहे थे। इस पर हम खंड 64.6 में लौटेंगे।) रसेल ने 16 जून 1902 को फ़्रेगे को पत्र लिखकर फ़्रेगे के तंत्र की असंगति समझाई। पत्राचार और कुछ पृष्ठभूमि के लिए Heijenoort (1967, pp. 124–8) देखें।

इस बात पर बल देना उचित है कि यह दो-पंक्ति का प्रमाण *शुद्ध तर्कशास्त्र* का परिणाम है। माना कि हमने अपने संकेतन $\{x : x \notin x\}$ में एक (अतार्किक?) अभिगृहीत, विस्तारिता, का निहित रूप से उपयोग किया; क्योंकि यदि φ-वस्तुओं का कोई समुच्चय हो, तो $\{x : \varphi(x)\}$ को (विस्तारिता के कारण) उनका *एकमात्र* समुच्चय होना है। किंतु परिणाम को इस रूप में कहकर हम विस्तारिता के संकेत तक से बच सकते हैं: *ऐसा कोई समुच्चय नहीं है जिसके सदस्य ठीक वे समुच्चय हों जो स्वयं के सदस्य नहीं हैं*। और इसका समुच्चयों से कोई विशेष संबंध नहीं। स्वयं रसेल ने देखा था कि ठीक वैसा ही तर्क आपको यह निष्कर्ष देगा: *ऐसा कोई पुरुष नहीं जो ठीक उन पुरुषों की हजामत बनाए जो अपनी हजामत स्वयं नहीं बनाते*। अथवा: *ऐसा कोई पग कुत्ता नहीं जो ठीक उन पग कुत्तों को सूँघे जो स्वयं को नहीं सूँघते*। और इसी तरह। योजनाबद्ध रूप में परिणाम का आकार केवल यह है:

$$\neg\exists x\forall z(Rzx \leftrightarrow \neg Rzz).$$

और यह प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र का केवल एक प्रमेय (योजना) है। फलतः अपने समुच्चय सिद्धांत में थोड़ी फेरबदल करके हम रसेल के विरोधाभास से नहीं बच सकते; यह तो समुच्चय सिद्धांत तक *पहुँचने* से पहले ही उत्पन्न हो जाता है। यदि हमें (चिरसम्मत) प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र का उपयोग करना है, तो हमें बस यह *स्वीकार* करना होगा कि $R = \{x : x \notin x\}$ जैसा कोई समुच्चय नहीं है।

निष्कर्ष यह है। यदि आप असंगति से *बचते हुए* सहज समुच्चय-निर्माण को स्वीकार करना चाहते हैं, तो केवल *समुच्चय सिद्धांत* में फेरबदल पर्याप्त नहीं होगा। इसके बजाय आपको अपने *तर्कशास्त्र* का आमूल परिवर्तन करना होगा।

निश्चय ही अचिरसम्मत तर्कशास्त्रों वाले समुच्चय सिद्धांत प्रस्तुत किए गए हैं। पर वे—कम-से-कम इतना तो कहा ही जा सकता है—अमानक हैं। रसेल के विरोधाभास के प्रति मानक दृष्टिकोण उसे अनस्तित्व का सीधा प्रमाण मानना और फिर उसके साथ काम करना सीखना है। हम इसी दृष्टिकोण का अनुसरण करेंगे।

64.3 विधेयात्मक और अविधेयात्मक

रसेल समुच्चय R को $\{x : x \notin x\}$ द्वारा परिभाषित किया गया था। अधिक विस्तार से कहें तो R वह समुच्चय होता जिसमें वे सभी और केवल वे समुच्चय होते जो स्वयं के असदस्य नहीं हैं। अतः R को परिभाषित करते समय हम उस प्रांत पर परिमाणीकरण करते हैं जिसमें R भी होता (यदि उसका अस्तित्व होता)।

यह एक *अविधेयात्मक* परिभाषा है। अधिक सामान्यतः हम कह सकते हैं कि कोई परिभाषा अविधेयात्मक तभी और केवल तभी है जब वह ऐसे प्रांत पर परिमाणीकरण करती है जिसमें परिभाषित की जा रही वस्तु सम्मिलित हो।

विरोधाभासों के सामने आने के बाद व्हाइटहेड, रसेल, प्वाँकारे और वाइल ने ऐसी अविधेयात्मक परिभाषाओं को "दूषित रूप से चक्रीय" कहकर अस्वीकार किया:

> जिन विरोधाभासों से बचना है उनका विश्लेषण दिखाता है कि वे सभी एक प्रकार के दूषित चक्र से उत्पन्न होते हैं। ये दूषित चक्र इस धारणा से पैदा होते हैं कि वस्तुओं के किसी संग्रह में ऐसे सदस्य हो सकते हैं जिन्हें केवल संपूर्ण संग्रह के माध्यम से ही परिभाषित किया जा सकता है[.... ¶]
>
> अवैध समग्रताओं से बचाने वाला सिद्धांत इस प्रकार कहा जा सकता है: 'जिसमें किसी संग्रह के *सभी* सदस्य अंतर्भूत हों, वह स्वयं उस संग्रह का एक सदस्य नहीं होना चाहिए'; अथवा इसके विपरीत: 'यदि किसी संग्रह की समग्रता मान लेने पर उसमें ऐसे सदस्य होते जिन्हें केवल उस समग्रता के पदों में परिभाषित किया जा सकता, तो उस संग्रह की कोई समग्रता नहीं है।' हम इसे 'दूषित-चक्र सिद्धांत' कहेंगे, क्योंकि यह हमें अवैध समग्रताओं की धारणा में निहित दूषित चक्रों से बचने देता है। (Whitehead and Russell, 1910, p. 37)

यदि हम उनके साथ चलते हुए *दूषित-चक्र सिद्धांत* स्वीकार करें, तो खंड 64.2 की विनाशकारी सहज समुच्चय-निर्माण योजना को कुछ इस प्रकार बदलने का प्रयास कर सकते हैं:

विधेयात्मक समुच्चय-निर्माण। केवल समुच्चयों पर परिमाणीकरण करने वाले प्रत्येक सूत्र φ के लिए: समुच्चय′ $\{x : \varphi(x)\}$ का अस्तित्व है।

जब तक समुच्चय′ समुच्चय नहीं हैं, कोई विरोधाभास उत्पन्न नहीं होगा।

दुर्भाग्य से विधेयात्मक समुच्चय-निर्माण बहुत *व्यापक* नहीं है। आखिर यह हमें नई सत्ताओं, समुच्चयों′, से परिचित कराता है। इसलिए हमें उन सूत्रों पर विचार करना होगा जो समुच्चयों′ पर परिमाणीकरण करते हैं। यदि वे सदा कोई समुच्चय′ देते हैं, तो समस्त स्वयं के असदस्य समुच्चयों′ के समुच्चय′ पर विचार करते ही रसेल का विरोधाभास फिर उत्पन्न होगा। अतः इसी विचार को आगे बढ़ाते हुए हमें कहना होगा कि समुच्चयों′ पर परिमाणीकरण करने वाला सूत्र कोई संगत समुच्चय″ देता है। फिर हमें समुच्चय‴, समुच्चय⁗ इत्यादि चाहिए होंगे। प्राइम चिह्नों की बाढ़ रोकने के लिए इन्हें समुच्चय$_0$, समुच्चय$_1$, समुच्चय$_2$, समुच्चय$_3$, समुच्चय$_4$,... मानना सरल होगा। इससे हमें (सरल) प्रकार सिद्धांत में प्रवेश का एक मार्ग मिलेगा।

ऐसे सिद्धांत के विरुद्ध कुछ स्पष्ट आपत्तियाँ हैं (यद्यपि यह स्पष्ट नहीं कि वे *निर्णायक* आपत्तियाँ हैं)। संक्षेप में: परिणामी सिद्धांत का उपयोग दुष्कर है; वह भिन्न-भिन्न प्रकार की वस्तुएँ मानने में अपव्ययी है; और अंततः यह भी स्पष्ट नहीं कि अविधेयात्मक परिभाषाएँ सचमुच *इतनी बुरी* हैं।

अंतिम बात स्पष्ट करने के लिए Ramsey की यह टिप्पणी देखें:

> हम किसी व्यक्ति को किसी समूह का सबसे लंबा व्यक्ति कह सकते हैं और इस तरह उसे ऐसी समग्रता के माध्यम से पहचान सकते हैं जिसका वह स्वयं सदस्य है, फिर भी इसमें कोई दूषित चक्र नहीं होता। (Ramsey, 1925)

रैम्ज़ी की बात यह है कि "समूह का सबसे लंबा व्यक्ति" एक अविधेयात्मक परिभाषा है; किंतु वह स्पष्टतः पूरी तरह निर्दोष है।

उत्तर दिया जा सकता है कि इस मामले में सबसे लंबे व्यक्ति को *विधेयात्मक* साधनों से चुना जा सकता है। उदाहरणतः शायद हम बस उस व्यक्ति की ओर संकेत कर दें। तब अविधेयात्मक परिभाषाओं के विरुद्ध आपत्ति स्पष्टतः उन सत्ताओं तक सीमित करनी होगी जिन्हें *केवल* अविधेयात्मक ढंग से चुना जा सकता है। पर तब भी हमें यह और समझाना होगा कि ऐसी "अनिवार्य अविधेयात्मकता" इतनी बुरी क्यों होगी।[1]

यह स्वीकार करना होगा कि यदि हम चाहते हैं कि हमारी परिभाषाएँ किसी वस्तु को *बनाने* की विधि जैसी कोई चीज़ दें, तो अविधेयात्मक परिभाषाएँ अत्यंत समस्याजनक हैं। किसी अविधेयात्मक परिभाषा के साथ हम सचमुच दूषित चक्र में फँस जाएँगे: अविधेयात्मक रूप से निर्दिष्ट वस्तु बनाने के लिए पहले सभी वस्तुएँ (स्वयं उस अविधेयात्मक रूप से निर्दिष्ट वस्तु सहित) बनानी होंगी, क्योंकि उसका निर्देश सभी वस्तुओं के पदों में होता है; अतः उसे स्वयं बनाने से पहले ही बनाना पड़ेगा। किंतु फिर, "अनिवार्य रूप से अविधेयात्मक" ढंग से निर्दिष्ट समुच्चयों के विरुद्ध यह गंभीर आपत्ति तभी है जब हम समुच्चयों को ऐसी चीज़ें मानें जिन्हें हम *बनाते* हैं। और हम (संभवतः) ऐसा नहीं मानते।

इसलिए—भला हो या बुरा—जो दृष्टिकोण प्रचलित हुआ, वह (अ)विधेयात्मकता के विषय में कठोर रुख नहीं अपनाता। इसके बजाय उसमें वह दृष्टिकोण है जिसे अब संचयी-पुनरावर्ती दृष्टिकोण माना जाता है। अंततः यह हमें अपने समुच्चयों को "चरणों" में स्तरित करने देगा—कुछ-कुछ वैसे ही जैसे विधेयात्मक दृष्टिकोण सत्ताओं को समुच्चय$_0$, समुच्चय$_1$, समुच्चय$_2$, ... में स्तरित करता है—पर हम उनके बीच प्रकार का कोई भेद नहीं मानेंगे।

64.4 संचयी-पुनरावर्ती दृष्टिकोण

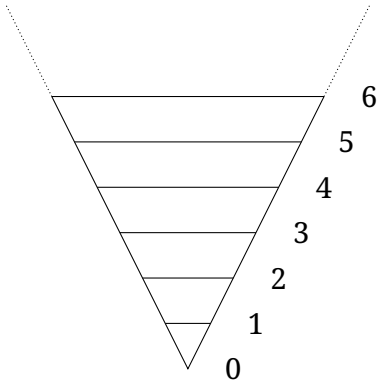
हम समुच्चयों को चरणों में किस प्रकार स्तरित करेंगे, इसका कुछ अधिक पूर्ण विवरण यह है:

> समुच्चय *चरणों* में बनते हैं। प्रत्येक चरण S के लिए कुछ चरण S से *पहले* होते हैं। चरण S पर, S से पहले के चरणों में बने समुच्चयों से बने प्रत्येक संग्रह को एक समुच्चय बनाया जाता है। चरणों में बने समुच्चयों के अतिरिक्त कोई समुच्चय नहीं हैं। (Shoenfield, 1977, p. 323)

[1] और अधिक के लिए Linnebo (2010) देखें।

यह *समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा* की रूपरेखा है। यही भाग XV में प्रस्तुत औपचारिक समुच्चय सिद्धांत का आधार होगी।

इसे कुछ और विस्तार से देखें। शोएनफ़ील्ड के वर्णन में प्रत्येक चरण पर हम उन समुच्चयों से नए समुच्चय बनाते हैं जो पहले के चरणों से उपलब्ध हैं। अतः शोएनफ़ील्ड के चित्र में आरंभिक चरण, चरण 0, से *पहले* कोई चरण नहीं है और इसलिए *और भी अधिक स्पष्टतः* पहले के चरणों से कोई समुच्चय उपलब्ध नहीं है।[2] अतः हम केवल एक समुच्चय बनाते हैं: बिना किसी अवयव वाला समुच्चय $\emptyset$। चरण 1 पर पहले के चरणों से ठीक एक समुच्चय उपलब्ध है, इसलिए केवल एक नया समुच्चय $\{\emptyset\}$ है। चरण 2 पर पहले के चरणों से दो समुच्चय उपलब्ध हैं और हम दो नए समुच्चय $\{\{\emptyset\}\}$ तथा $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ बनाते हैं। चरण 3 पर पहले के चरणों से चार समुच्चय उपलब्ध हैं, इसलिए हम बारह नए समुच्चय बनाते हैं...। इस प्रकार समुच्चयों का संचयी-पुनरावर्ती चित्र कुछ ऐसा दिखेगा (संख्याएँ चरण दर्शाती हैं):



तो इस कथा को क्यों स्वीकार करें?

एक कारण यह है कि यह अच्छी और सुगम कथा है। सबसे स्पष्ट कथा, अर्थात सहज समुच्चय-निर्माण, के विफल हो जाने के बाद हमें किसी अच्छी कथा की आवश्यकता है।

किंतु यह कथा *केवल* अच्छी नहीं है। यह मानने का अच्छा कारण है कि इस कथा पर आधारित कोई भी समुच्चय सिद्धांत *संगत* होगा। कारण यह है।

समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा के अनुसार हम चरणों में समुच्चय बनाते हैं और उनके अवयव ऐसी वस्तुएँ होनी चाहिए जो *पहले से* उपलब्ध थीं। अतः किसी भी चरण S के लिए हम यह समुच्चय बना सकते हैं:

$$R_S = \{x : x \notin x \text{ और } x, S \text{ से पहले उपलब्ध था}\}$$

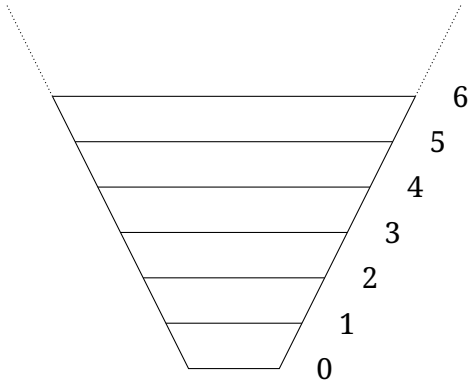
रसेल का विरोधाभास सिद्ध करने वाला तर्क अब स्थापित करेगा कि R_S स्वयं चरण S से पहले उपलब्ध नहीं है। और यह कोई विरोधाभास नहीं। इसके अतिरिक्त, यदि हम समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा स्वीकार करते हैं, तो हमें स्वयं रसेल समुच्चय बना पाने की *अपेक्षा* भी नहीं करनी चाहिए थी। क्योंकि वह उन सभी स्वयं के असदस्य समुच्चयों का समुच्चय होता जो "कभी भी उपलब्ध होंगे"। संक्षेप में: संचयी-पुनरावर्ती कथा को देखते हुए यह तथ्य *आश्चर्यजनक* नहीं कि हम (सिद्धतः) रसेल समुच्चय नहीं बना सकते; यही तो हमारी *भविष्यवाणी* होगी।

64.5 मूलतत्त्व हों या नहीं?

अगले कुछ अध्यायों में हम समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा से अभिगृहीत निकालने का प्रयास करेंगे। किंतु आगे बढ़ने से पहले हमें *मूलतत्त्वों* (urelements) के विषय में कुछ और कहना होगा।

खंड 64.4 के चित्र में हम पुराने *समुच्चयों* से ही नए समुच्चय बना सकते थे। फिर भी हम यह अनुमति देना चाह सकते हैं कि कुछ *गैर-समुच्चय*—गायें, सूअर, रेत के कण अथवा कुछ और—समुच्चयों के अवयव हो सकते हैं। उस स्थिति में हम कुछ मूल अवयवों, अर्थात *मूलतत्त्वों*, से आरंभ करते और फिर कहते कि प्रत्येक चरण S पर हम मूलतत्त्वों अथवा S से पहले के चरणों में बने समुच्चयों (किसी भी संयोजन में) से बने "सभी संभव" समुच्चय बनाएँगे। परिणामी चित्र कुछ ऐसा दिखेगा:

[2] हम क्यों मानें कि कोई *पहला* चरण है? खंड 65.1 में *Stages-are-ordered* की पादटिप्पणी देखें।



अब हमें निर्णय करना है: *क्या मूलतत्त्वों की अनुमति देनी चाहिए?*

दार्शनिक दृष्टि से अपने सिद्धांत-निर्माण में मूलतत्त्वों को सम्मिलित करना सार्थक है। इसका मुख्य कारण अपने समुच्चय सिद्धांत को *अनुप्रयोज्य* बनाना है। बात स्पष्ट करने के लिए अध्याय 4 से याद करें कि हम दो समुच्चयों A और B का आकार समान, अर्थात $A \approx B$, तभी और केवल तभी कहते हैं जब उनके बीच कोई द्विएकी हो। अब यदि मैदान की गायें और बाड़े के सूअर दोनों समुच्चय बनाते हैं, तो "गायों की संख्या सूअरों जितनी है" दावे का समुच्चय-सैद्धांतिक विवेचन दिया जा सकता है। किंतु यदि हम मूलतत्त्वों को निषिद्ध कर दें, जिससे गायें और सूअर समुच्चय *नहीं* बनाते, तो वह विवेचन उपलब्ध नहीं होगा। वास्तव में तब समुच्चय सिद्धांत को स्वयं समुच्चयों के अतिरिक्त किसी चीज़ पर लागू करने की कोई सीधी क्षमता हमारे पास नहीं होगी। (मूलतत्त्वों को सम्मिलित करने के और कारणों के लिए Potter 2004, pp. vi, 24, 50–1 देखें।)

गणितीय व्यवहार में, किंतु, मूलतत्त्वों की अनुमति विरल है। इसका आंशिक कारण यह है कि मूलतत्त्वों के बिना समुच्चय सिद्धांत सूत्रित करना *बहुत थोड़ा* सरल है। पर कभी-कभी समुच्चय सिद्धांत से मूलतत्त्वों को बाहर रखने के अधिक रोचक औचित्य मिलते हैं:

> इस विश्वास के अनुरूप कि समुच्चय सिद्धांत गणित की नींव है, हमें केवल समुच्चयों की बात करके संपूर्ण गणित को ग्रहण कर सकना चाहिए; अतः हमारे चर गाय और सूअर जैसी वस्तुओं पर परासित नहीं होने चाहिए। (Kunen, 1980, p. 8)

इसलिए अनुप्रयोज्यता पर बल मूलतत्त्वों को *सम्मिलित* करने का सुझाव देगा; अपचायक आधारभूत लक्ष्य (गणित को शुद्ध समुच्चय सिद्धांत में अपचयित करना) पर बल उन्हें *बाहर रखने* का सुझाव दे सकता है। थोड़ी-सी आलस्यप्रियता भी मूलतत्त्वों को बाहर रखने की ओर संकेत करती है।

हम सबसे आलस्यपूर्ण मार्ग अपनाएँगे। हालाँकि इसका कुछ शैक्षणिक औचित्य भी है। हमारा उद्देश्य आपको समुच्चय सिद्धांत के उन तत्त्वों से परिचित कराना है जिनकी समुच्चय सिद्धांत के दर्शन पर काम आरंभ करने के लिए आवश्यकता होगी। और उस दार्शनिक साहित्य का अधिकांश भाग मूलतत्त्वों के *बिना* सूत्रित समुच्चय सिद्धांतों की चर्चा करता है। अतः यदि यह पुस्तक उस साहित्य के काफ़ी निकट रहे, तो शायद अधिक उपयोगी होगी।

64.6 परिशिष्ट: फ़्रेगे का मूल नियम V

खंड 64.2 में हमने बताया था कि रसेल ने अपने विरोधाभास को फ़्रेगे द्वारा *ग्रुंडगेज़ेत्से* में प्रतिपादित तंत्र की समस्या के रूप में सूत्रित किया था। फ़्रेगे के तंत्र में सहज समुच्चय-निर्माण का सीधा सूत्रीकरण नहीं था। अतः इस परिशिष्ट में हम अत्यंत संक्षेप में बताएँगे कि फ़्रेगे के तंत्र में *क्या* था, और उसका सहज समुच्चय-निर्माण तथा रसेल के विरोधाभास से क्या संबंध है।

फ़्रेगे का तंत्र *द्वितीय-क्रम* का है और उसे *किसी संकल्पना के विस्तार* की धारणा सूत्रित करने के लिए बनाया गया था।[3] फ़्रेगे से प्रेरित संकेतन का उपयोग करते हुए हम *संकल्पना F के विस्तार* के लिए $\epsilon x\, F(x)$ लिखेंगे। यह एक ऐसी

[3]ठीक-ठीक कहें तो फ़्रेगे एक अधिक सामान्य धारणा, किसी फलन का "मान-परास", औपचारिक बनाना चाहते हैं। संकल्पनाओं के विस्तार उस अधिक सामान्य धारणा के विशेष मामले हैं। विवरण के लिए Heck (2012, pp. 8–9) देखें।

युक्ति है जो *विधेय* "F" को लेकर उसे (प्रथम-क्रम) *पद* "$\epsilon x\, F(x)$" में बदलती है। इस युक्ति से फ़्रेगे ने सदस्यता की निम्न *परिभाषा* दी:

$$a \in b =_{\text{df}} \exists G(b = \epsilon x\, G(x) \wedge Ga)$$

मोटे तौर पर: $a \in b$ तभी और केवल तभी जब a ऐसी संकल्पना के अंतर्गत आता है जिसका विस्तार b है। (ध्यान दें कि परिमाणक "$\exists G$" द्वितीय-क्रम का है।) फ़्रेगे ने निम्न सिद्धांत भी माना, जिसे *मूल नियम V* कहते हैं:

$$\epsilon x\, F(x) = \epsilon x\, G(x) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

मोटे तौर पर: संकल्पनाओं के विस्तार समान तभी और केवल तभी हैं जब वे समविस्तारी हों। (फिर से, "F" और "G" दोनों विधेय-स्थान में हैं।) अब एक सरल सिद्धांत सदस्यता को गुणधर्म-संतुष्टि से जोड़ता है:

सहायक प्रमेय 64.2 (*ग्रुंडगेज़ेत्से* में). $\forall F \forall a(a \in \epsilon x\, F(x) \leftrightarrow Fa)$

प्रमाण. F और a को नियत करें। अब $a \in \epsilon x\, F(x)$ तभी और केवल तभी जब $\exists G(\epsilon x\, F(x) = \epsilon x\, G(x) \wedge Ga)$ (सदस्यता की परिभाषा से), तभी और केवल तभी जब $\exists G(\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \wedge Ga)$ (मूल नियम V से), तभी और केवल तभी जब Fa (प्राथमिक द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र से)। □

इससे सहज समुच्चय-निर्माण लगभग तुरंत मिलता है:

सहायक प्रमेय 64.3 (*ग्रुंडगेज़ेत्से* में). $\forall F \exists s \forall a(a \in s \leftrightarrow Fa)$

प्रमाण. F को नियत करें; अब सहायक प्रमेय 64.2 से $\forall a(a \in \epsilon x\, F(x) \leftrightarrow Fa)$ मिलता है; अतः अस्तित्वपरक सामान्यीकरण से $\exists s \forall a(a \in s \leftrightarrow Fa)$। चूँकि F मनमाना था, परिणाम निष्पन्न होता है। □

F को $\forall x(Fx \leftrightarrow x \notin x)$ द्वारा प्रदत्त मानने पर रसेल का विरोधाभास निष्पन्न होता है।

अध्याय 65

Z की ओर कदम

65.1 कथा का अधिक विस्तृत रूप

खंड 64.4 में हमने समुच्चय-निर्माण की प्रक्रिया का शोएनफ़ील्ड द्वारा दिया वर्णन उद्धृत किया था। अब इस कथा को कुछ अधिक सटीक बनाने के लिए हम कुछ और सिद्धांत लिखना चाहते हैं। वे ये हैं:

Stages-are-key. प्रत्येक समुच्चय किसी चरण पर बनता है।

Stages-are-ordered. चरण क्रमित हैं: कुछ दूसरे चरणों से *पहले* आते हैं।[1]

Stages-accumulate. किसी भी चरण S और चरण S से *पहले* बने किन्हीं भी समुच्चयों के लिए: चरण S पर ऐसा समुच्चय बनता है जिसके सदस्य ठीक वही समुच्चय हैं। चरण S पर और कुछ नहीं बनता।

ये अनौपचारिक सिद्धांत हैं, किंतु इनके उपयोग से हम ज़ेर्मेलो के समुच्चय सिद्धांत के कई अभिगृहीतों का औचित्य सिद्ध कर सकेंगे।

(यहाँ एक सावधानी आवश्यक है। यद्यपि हम पूरी तरह मानक नामों वाले कुछ पूरी तरह मानक अभिगृहीत प्रस्तुत करेंगे, अभी प्रस्तुत तिरछे अक्षरों वाले सिद्धांतों के साहित्य में कोई विशिष्ट नाम नहीं हैं। ये केवल ऐसे उपनाम हैं जिनके उपयोगी होने की हमें आशा है।)

65.2 पृथक्करण

हम सहज समुच्चय-निर्माण के स्थान पर एक सिद्धांत से आरंभ करते हैं:

पृथक्करण की योजना (पृथक्करण की योजना). प्रत्येक सूत्र $\varphi(x)$ के लिए यह एक अभिगृहीत है: किसी भी A के लिए समुच्चय $\{x \in A : \varphi(x)\}$ का अस्तित्व है।

ध्यान दें कि यह कोई एक अभिगृहीत नहीं, बल्कि अभिगृहीतों की एक *योजना* है। पृथक्करण के *अनंततः अनेक* अभिगृहीत हैं; प्रत्येक सूत्र $\varphi(x)$ के लिए एक। योजना को समान रूप से (और सामान्यतः) इस प्रकार लिखा जाता है:

> ऐसे किसी भी सूत्र $\varphi(x)$ के लिए जिसमें "S" न हो, यह एक अभिगृहीत है:
>
> $$\forall A \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow (\varphi(x) \wedge x \in A)).$$

[1] वास्तव में हम मौन रूप से यह मानेंगे कि चरण *सुव्यवस्थित* हैं। इसका अर्थ अध्याय 66 में समझाया गया है। यह एक ठोस मान्यता है। वास्तव में Scott (1974) की अत्यंत चतुर तकनीक से इस मान्यता से *बचा* जा सकता है और फिर इसे *व्युत्पन्न* किया जा सकता है। (यह यह भी समझाएगा कि हमें आरंभिक चरण क्यों मानना चाहिए।) यहाँ हम इसका विवेचन नहीं कर सकते; अधिक के लिए Button (2021) देखें।

भाग XV के आरंभ में उल्लिखित परिपाटी के अनुसार पृथक्करण के अभिगृहीतों में सूत्रों φ के प्राचल हो सकते हैं।[2]

हमारी समुच्चयों की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा पृथक्करण का तुरंत औचित्य देती है। कारण देखने के लिए A को कोई समुच्चय मानें। अतः A किसी चरण S तक बन चुका है (*Stages-are-key* से)। चूँकि A चरण S पर बना, A के सभी सदस्य चरण S से पहले बने थे (*Stages-accumulate* से)। अब विशेषतः उन सभी समुच्चयों पर विचार करें जो A के सदस्य हैं और φ को भी संतुष्ट करते हैं; स्पष्टतः ये सभी समुच्चय भी चरण S से पहले बने थे। इसलिए चरण S पर उन्हें भी एक समुच्चय $\{x \in A : \varphi(x)\}$ में बनाया जाता है (*Stages-accumulate* से)।

सहज समुच्चय-निर्माण के विपरीत यह रसेल के विरोधाभास से बचता है। हम बस $\{x : x \notin x\}$ समुच्चय के अस्तित्व का दावा नहीं कर सकते। इसके बजाय, कोई समुच्चय A *दिए जाने पर*, हम समुच्चय $R_A = \{x \in A : x \notin x\}$ के अस्तित्व का दावा कर सकते हैं। पर इससे केवल $R_A \notin R_A$ और $R_A \notin A$ सिद्ध होते हैं, जिनमें से कोई बात बहुत चिंताजनक नहीं।

फिर भी पृथक्करण का एक तात्कालिक और उल्लेखनीय परिणाम है:

प्रमेय 65.1. *कोई सार्वत्रिक समुच्चय नहीं है; अर्थात $\{x : x = x\}$ का अस्तित्व नहीं है।*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए मान लें कि V सार्वत्रिक समुच्चय है। तब पृथक्करण से $R = \{x \in V : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ का अस्तित्व है, जो रसेल के विरोधाभास के विरुद्ध है। □

सार्वत्रिक समुच्चय का अभाव—वास्तव में समुच्चयों के पदानुक्रम का खुला अंत—संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा के सबसे मूलभूत विचारों में से एक है। इसलिए यह देखना उपयोगी है कि सहजतः हम एक दूसरे मार्ग से भी वहाँ पहुँच सकते थे। सार्वत्रिक समुच्चय को स्वयं का अवयव होना होगा। किंतु हमारी संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा में प्रत्येक समुच्चय पदानुक्रम में (पहली बार) अपने सभी अवयव के ठीक बाद वाले पहले चरण पर आता है। इससे निष्पन्न होता है कि *कोई भी* समुच्चय स्वयं का सदस्य नहीं है। क्योंकि स्वयं का सदस्य कोई समुच्चय जिस चरण पर पहली बार आता, उसे उसके ठीक बाद पहली बार आना पड़ता, जो असंगत है। (परिभाषा 67.15 में हम देखेंगे कि समुच्चय की "रैंक" की धारणा से इस व्याख्या को अधिक कठोर कैसे बनाया जाए। किंतु ऐसा करने से पहले कुछ और अभिगृहीत स्थापित करने होंगे।)

पृथक्करण और विस्तारिता के कुछ और परिणाम ये हैं।

प्रतिज्ञप्ति 65.2. *यदि किसी समुच्चय का अस्तित्व है, तो $\emptyset$ का अस्तित्व है।*

प्रमाण. यदि A समुच्चय है, तो पृथक्करण से $\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}$ का अस्तित्व है। □

प्रतिज्ञप्ति 65.3. *किन्हीं समुच्चयों A और B के लिए $A \setminus B$ का अस्तित्व है।*

प्रमाण. पृथक्करण से $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ का अस्तित्व है। □

यह भी पता चलता है कि (लगभग) मनमाने सर्वनिष्ठों का अस्तित्व है:

प्रतिज्ञप्ति 65.4. *यदि $A \neq \emptyset$, तो $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A) x \in y\}$ का अस्तित्व है।*

प्रमाण. $A \neq \emptyset$ मानें, अतः कोई $c \in A$ है। तब $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A) x \in y\} = \{x \in c : (\forall y \in A) x \in y\}$, जिसका अस्तित्व पृथक्करण से है। □

किंतु $A \neq \emptyset$ की शर्त पर ध्यान दें; क्योंकि रिक्ततः $\bigcap \emptyset$ सार्वत्रिक समुच्चय होता, जो प्रमेय 65.1 के विरुद्ध है।

[2]इसका अर्थ समझने के लिए उपप्रमेय 6.7 के ठीक बाद की चर्चा देखें।

65.3 सम्मिलन

प्रतिज्ञप्ति 65.4 ने हमें सर्वनिष्ठ दिए। किंतु यदि हम मनमाने सम्मिलनों का अस्तित्व चाहते हैं, तो एक और अभिगृहीत निर्धारित करना होगा:

सम्मिलन (सम्मिलन). किसी भी समुच्चय A के लिए समुच्चय $\bigcup A = \{x : (\exists b \in A) x \in b\}$ का अस्तित्व है।

$$\forall A \exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

इस अभिगृहीत का औचित्य भी संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा से मिलता है। A को समुच्चय मानें, अतः A किसी चरण S पर बना है (*Stages-are-key* से)। A का प्रत्येक सदस्य S से *पहले* बना था (*Stages-accumulate* से); इसलिए समान तर्क से A के प्रत्येक सदस्य का प्रत्येक सदस्य S से पहले बना था। अतः वे *सभी* समुच्चय S से पहले उपलब्ध हैं ताकि S पर उनसे एक समुच्चय बनाया जा सके। और वह समुच्चय ठीक $\bigcup A$ है।

65.4 युग्म

विचार करने योग्य अगला अभिगृहीत यह है:

युग्म (युग्म). किन्हीं समुच्चयों a, b के लिए समुच्चय $\{a, b\}$ का अस्तित्व है।

$$\forall a \forall b \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

पुनरावर्ती अवधारणा से इस अभिगृहीत का औचित्य इस प्रकार दिया जा सकता है। मान लें कि a चरण S पर और b चरण T पर उपलब्ध है। M को S और T में से जो बाद में आता है वह चरण मानें। चूँकि a और b दोनों चरण M पर उपलब्ध हैं, समुच्चय $\{a, b\}$ एक संभव संग्रह है जो M के बाद किसी भी चरण पर उपलब्ध है (दोनों में जो बड़ा हो)।

पर रुकिए! यह क्यों मानें कि M के बाद कोई चरण है? यदि कोई नहीं, तो हमारा औचित्य विफल होगा। अतः युग्म का औचित्य देने के लिए खंड 65.1 की कथा में एक और सिद्धांत जोड़ना होगा:

Stages-keep-going. कोई अंतिम चरण नहीं है।

क्या यह सिद्धांत उचित है? शोएनफ़ील्ड की कथा में कहीं भी *स्पष्टतः* नहीं कहा गया कि कोई अंतिम चरण नहीं है। फिर भी यदि वह (ठीक-ठीक कहें तो) हमारी कथा में एक अतिरिक्त जोड़ है, तो भी वह इस मूल विचार के अनुकूल है कि समुच्चय चरणों में बनते हैं। आगे हम इसे बस स्वीकार करेंगे। और इसलिए युग्म का अभिगृहीत भी स्वीकार करेंगे।

इस नए अभिगृहीत से हम और बहुत-से समुच्चयों का अस्तित्व सिद्ध कर सकते हैं। उदाहरणतः:

प्रतिज्ञप्ति 65.5. *किन्हीं समुच्चयों a और b के लिए निम्न समुच्चयों का अस्तित्व है:*

1. $\{a\}$
2. $a \cup b$
3. $\langle a, b \rangle$

प्रमाण. (1). युग्म से $\{a, a\}$ का अस्तित्व है, जो विस्तारिता से $\{a\}$ है।

(2). युग्म से $\{a, b\}$ का अस्तित्व है। अब सम्मिलन से $a \cup b = \bigcup \{a, b\}$ का अस्तित्व है।

(3). (1) से $\{a\}$ का अस्तित्व है। युग्म से $\{a, b\}$ का अस्तित्व है। अब फिर युग्म से $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \langle a, b \rangle$ का अस्तित्व है। □

65.5 घात समुच्चय

हम एक और अभिगृहीत के साथ आगे बढ़ेंगे:

घात समुच्चय (घात समुच्चय). किसी भी समुच्चय A के लिए समुच्चय $\wp(A) = \{x : x \subseteq A\}$ का अस्तित्व है।

$$\forall A \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (\forall z \in x) z \in A)$$

इसका औचित्य काफ़ी सीधा है। मान लें कि A चरण S पर बना है। तब A के सभी सदस्य S से पहले उपलब्ध थे (*Stages-accumulate* से)। अतः पृथक्करण के औचित्य में दिए तर्क की तरह A का प्रत्येक उपसमुच्चय चरण S तक बन चुका है। इसलिए S के बाद किसी भी चरण पर वे सभी एक समुच्चय में बनाए जाने के लिए उपलब्ध हैं। और हम जानते हैं कि ऐसा कोई चरण है, क्योंकि S अंतिम चरण नहीं है (*Stages-keep-going* से)। अतः $\wp(A)$ का अस्तित्व है।

घात समुच्चय का एक अच्छा परिणाम यह है:

प्रतिज्ञप्ति 65.6. *किन्हीं समुच्चयों A, B का कार्तीय गुणनफल $A \times B$ अस्तित्व में है।*

प्रमाण. घात समुच्चय और प्रतिज्ञप्ति 65.5 से समुच्चय $\wp(\wp(A \cup B))$ का अस्तित्व है। अतः पृथक्करण से इस समुच्चय का अस्तित्व है:

$$C = \{z \in \wp(\wp(A \cup B)) : (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y \rangle\}.$$

अब किन्हीं $x \in A$ और $y \in B$ के लिए प्रतिज्ञप्ति 65.5 से समुच्चय $\langle x, y \rangle$ का अस्तित्व है। इसके अतिरिक्त, चूँकि $x, y \in A \cup B$, हमारे पास $\{x\}, \{x, y\} \in \wp(A \cup B)$ और $\langle x, y \rangle \in \wp(\wp(A \cup B))$ हैं। अतः $A \times B = C$।$\square$

इस प्रमाण में घात समुच्चय पृथक्करण के साथ काम करता है। यह आश्चर्यजनक नहीं। पृथक्करण के बिना घात समुच्चय बहुत *शक्तिशाली* सिद्धांत न होता। आखिर पृथक्करण हमें बताता है कि किसी समुच्चय के कौन-से उपसमुच्चय अस्तित्व रखते हैं और इस प्रकार निर्धारित करता है कि प्रत्येक घात समुच्चय कितना "भरा हुआ" है।

65.6 अनंतता

हमारे पास यह सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त अभिगृहीत पहले से हैं कि अनंततः अनेक समुच्चय हैं (यदि कोई समुच्चय है)। मान लें कि किसी समुच्चय का अस्तित्व है, अतः $\emptyset$ का अस्तित्व है (प्रतिज्ञप्ति 65.2 से)। अब किसी भी समुच्चय x के लिए प्रतिज्ञप्ति 65.5 से समुच्चय $x \cup \{x\}$ का अस्तित्व है। इसे कुछ बार लागू करने पर हमें निम्न समुच्चय मिलेंगे:

0. $\emptyset$
1. $\{\emptyset\}$
2. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

और हम जाँच सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक समुच्चय भिन्न है।

हमने कुछ कारणों से क्रमांकन 0 से आरंभ किया है। उनमें से एक यह है। यह जाँचना बहुत कठिन नहीं कि "n" अंकित समुच्चय के ठीक n सदस्य हैं और (सहजतः) वह nवें चरण पर बनता है।

किंतु इससे हमें *अनंततः अनेक* समुच्चय तो मिलते हैं, यह गारंटी नहीं मिलती कि कोई *अनंत समुच्चय*, अर्थात अनंततः अनेक सदस्यों वाला समुच्चय, है। और यह सचमुच महत्त्वपूर्ण है: जब तक कोई (डेडेकिंड-)अनंत समुच्चय न

मिले, हम डेडेकिंड बीजगणित नहीं बना सकते। पर हमें डेडेकिंड बीजगणित चाहिए ताकि उसे प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय मान सकें। (खंड 6.4 से तुलना करें।)

महत्त्वपूर्ण बात यह है कि अब तक निर्धारित अभिगृहीत किसी अनंत समुच्चय के अस्तित्व की गारंटी *नहीं* देते। अतः हमें नया अभिगृहीत निर्धारित करना होगा:

अनंतता (अनंतता). ऐसा समुच्चय I है कि $\emptyset \in I$, और जब भी $x \in I$ हो तब $x \cup \{x\} \in I$।

$$\exists I((\exists o \in I)\forall x\ x \notin o \wedge \\ (\forall x \in I)(\exists s \in I)\forall z(z \in s \leftrightarrow (z \in x \vee z = x)))$$

यह देखना सरल है कि अनंतता के अभिगृहीत से मिला समुच्चय I डेडेकिंड-अनंत है। उसका विशिष्ट अवयव $\emptyset$ है और I पर अंतःक्षेप $s(x) = x \cup \{x\}$ से मिलता है। अब प्रमेय 6.5 ने दिखाया कि किसी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय से डेडेकिंड बीजगणित कैसे निकाला जाता है; और हम इसे प्राकृतिक संख्याओं का अपना समुच्चय मानेंगे। अधिक सटीक रूप में:

परिभाषा 65.7. I को अनंतता के अभिगृहीत द्वारा प्रदत्त कोई समुच्चय मानें। s को फलन $s(x) = x \cup \{x\}$ मानें। $\omega = \mathrm{clo}_s(\emptyset)$ रखें। हम ω के सदस्यों को *प्राकृतिक संख्याएँ* कहते हैं और कहते हैं कि n, $\emptyset$ पर s के n बार अनुप्रयोग का परिणाम है।

अब आप पीछे देखकर जाँच सकते हैं कि कुछ अनुच्छेद पहले "n" अंकित समुच्चय को संख्या n *माना* जाएगा। इस नियतन के महत्त्व पर हम खंड 65.8 में चर्चा करेंगे। अभी यह हमें एक सहज परिणाम सिद्ध करने देता है:

प्रतिज्ञप्ति 65.8. *कोई भी प्राकृतिक संख्या डेडेकिंड-अनंत नहीं है।*

प्रमाण. प्रमाण आगमन द्वारा है, अर्थात प्रमेय 6.6। स्पष्टतः $0 = \emptyset$ डेडेकिंड-अनंत नहीं है। आगमन चरण के लिए हम प्रतिधनात्मक स्थापित करेंगे: यदि (असंगत रूप से) $s(n)$ डेडेकिंड-अनंत है, तो n डेडेकिंड-अनंत है।

अतः मान लें कि $s(n)$ डेडेकिंड-अनंत है; अर्थात कोई एकैकी प्रतिचित्रण f ऐसा है कि $\mathrm{ran}(f) \subsetneq \mathrm{dom}(f) = s(n) = n \cup \{n\}$। दो मामलों पर विचार करना है।

मामला 1: $n \notin \mathrm{ran}(f)$। अतः $\mathrm{ran}(f) \subseteq n$ और $f(n) \in n$। $g = f\restriction_n$ रखें; अब $\mathrm{ran}(g) = \mathrm{ran}(f) \setminus \{f(n)\} \subsetneq n = \mathrm{dom}(g)$। इसलिए n डेडेकिंड-अनंत है।

मामला 2: $n \in \mathrm{ran}(f)$। $m \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{ran}(f)$ को नियत करें और प्रांत $s(n) = n \cup \{n\}$ वाला फलन h इस प्रकार परिभाषित करें:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{यदि } f(x) \neq n \\ m & \text{यदि } f(x) = n \end{cases}$$

अतः h और f हर जगह समान हैं, सिवाय इसके कि $h(f^{-1}(n)) = m \neq n = f(f^{-1}(n))$। चूँकि f कोई एकैकी प्रतिचित्रण है, $n \notin \mathrm{ran}(h)$; और $\mathrm{ran}(h) \subsetneq \mathrm{dom}(h) = s(n)$। अब मामला 1 के तर्क से n डेडेकिंड-अनंत है। □

फिर भी यह प्रश्न बचता है कि अनंतता के अभिगृहीत का *औचित्य* कैसे दिया जाए। संक्षिप्त उत्तर है कि अपनी अब तक की कथा में एक और सिद्धांत जोड़ना होगा। वह सिद्धांत यह है:

> *Stages-hit-infinity.* कोई अनंत चरण है। अर्थात ऐसा चरण है जो (a) पहला चरण नहीं है, (b) जिसके पहले कुछ चरण हैं, किंतु (c) जिसका कोई तात्कालिक पूर्ववर्ती नहीं है।

अनंतता का अभिगृहीत इस सिद्धांत से सीधे निष्पन्न होता है। हम जानते हैं कि प्राकृतिक संख्या n, चरण n पर बनती है। अतः समुच्चय ω पहले अनंत चरण पर बनता है। और ω स्वयं अनंतता के अभिगृहीत का साक्षी है।

किंतु इससे हम केवल इस प्रश्न पर लौट आते हैं कि *Stages-hit-infinity* का औचित्य कैसे दिया जाए। *Stages-keep-going* की तरह यह संचयी-पुनरावर्ती पदानुक्रम की हमारी कथा का स्पष्ट भाग नहीं था। इससे भी

अधिक: पुनरावर्ती पदानुक्रम के मूल विचार में, जहाँ समुच्चय चरण-दर-चरण बनते हैं, कुछ भी हमें यह मानने के लिए बाध्य नहीं करता कि प्रक्रिया में कोई *अनंत* चरण है। यह मानना पूरी तरह संगत लगता है कि चरण प्राकृतिक संख्याओं की तरह क्रमित हैं।

पर इससे एक स्पष्ट समस्या उत्पन्न होती है। खंड 6.4 में हमने डेडेकिंड के इस "प्रमाण" पर विचार किया था कि (विचारों का) कोई डेडेकिंड-अनंत समुच्चय है। संभव है वह आपको बहुत संतोषजनक न लगा हो। किंतु यदि समुच्चय की पुनरावर्ती अवधारणा (अथवा "विचार के नियम") *Stages-hit-infinity* को हम पर "अनिवार्य" नहीं करती, तो किसी डेडेकिंड-अनंत समुच्चय के अस्तित्व के दावे का अंतर्निहित औचित्य अब भी हमारे पास नहीं है।

निश्चय ही यहाँ और बहुत कुछ कहा जा सकता है। किंतु आशा है कि अब आप इस पर विचार आरंभ कर सकते हैं कि किसी अभिगृहीत (अथवा सिद्धांत) का औचित्य देने के लिए *क्या चाहिए*। आगे हम *Stages-hit-infinity* को बस मान लेंगे।

65.7 Z^-: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव

अगले अनुभाग में हम *Stages-hit-infinity* पर लौटेंगे। किंतु अनंतता के अभिगृहीत के साथ हम एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव पर पहुँच गए हैं। अब हमारे पास सिद्धांत Z^- के लिए आवश्यक सभी अभिगृहीत हैं। विस्तार से:

परिभाषा 65.9. सिद्धांत Z^- के अभिगृहीत ये हैं: विस्तारिता, सम्मिलन, युग्म, घात समुच्चय, अनंतता, और पृथक्करण योजना के सभी दृष्टांत।

यह नाम *ज़ेर्मेलो* समुच्चय सिद्धांत को दर्शाता है (उसमें से कुछ *घटाकर*, जिस पर हम बाद में आएँगे)। ज़ेर्मेलो इस सम्मान के अधिकारी हैं, क्योंकि उन्होंने मूलतः यह सिद्धांत अपने 1908a में सूत्रित किया था।[3]

यह सिद्धांत हमें बहुत विशाल मात्रा में गणित करने देने के लिए पर्याप्त शक्तिशाली है। विशेषतः आपको भाग I में पीछे देखकर स्वयं को आश्वस्त *करना चाहिए* कि सहज ढंग से किया हमारा हर काम Z^- के भीतर अधिक औपचारिक रूप से किया जा सकता है। (कुछ देर ऐसा करने के बाद आप आगे जाकर खंड 65.9 पढ़ना चाह सकते हैं।) अतः आगे, बिना किसी और टिप्पणी के, हम स्वयं को (कम-से-कम) Z^- में काम करता मानेंगे।

65.8 अपनी प्राकृतिक संख्याओं का चयन

परिभाषा 65.7 में हमने "प्राकृतिक संख्याएँ" पदबंध को स्पष्टतः परिभाषित किया। इस नियतन को कैसे समझना चाहिए? यह कोई तत्त्वमीमांसात्मक दावा नहीं, बल्कि कुछ समुच्चयों को प्राकृतिक संख्याएँ *मानने* का निर्णय मात्र है। ऐसा सोचने के कारणों को हमने खंड 2.2, खंड 5.5 और खंड 6.4 में छुआ था। किंतु इन कारणों को और तीक्ष्ण बनाया जा सकता है।

हमारा अनंतता का अभिगृहीत von Neumann (1925) का अनुसरण करता है। किंतु एक दूसरा अभिगृहीत है जिसे हम उसके स्थान पर अपना सकते थे:

> *ज़ेर्मेलो का 1908a का अनंतता का अभिगृहीत।* ऐसा समुच्चय A है कि $\emptyset \in A$ और $(\forall x \in A)\{x\} \in A$।

यदि हमने अपने (वॉन नोयमान-प्रेरित) अनंतता के अभिगृहीत के स्थान पर ज़ेर्मेलो का अभिगृहीत उपयोग किया होता, तो हमें उतने ही अच्छे ढंग से एक डेडेकिंड-अनंत समुच्चय और इसलिए एक डेडेकिंड बीजगणित मिलता। ज़ेर्मेलो के दृष्टिकोण में हमारे बीजगणित का विशिष्ट अवयव फिर $\emptyset$ (हमारा 0 का प्रतिनिधि) होता, किंतु अंतःक्षेप $x \mapsto x \cup \{x\}$ के बजाय प्रतिचित्रण $x \mapsto \{x\}$ से मिलता। इसका सरलतम परिणाम यह है कि ज़ेर्मेलो 2 को $\{\{\emptyset\}\}$ मानते हैं, जबकि हम (वॉन नोयमान के साथ) 2 को $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ मानते हैं।

[3] इतिहास और तकनीकी पक्षों पर रोचक टिप्पणियों के लिए Potter (2004, Appendix A) देखें।

अनंतता के एक अभिगृहीत को दूसरे के बजाय क्यों चुनें? मुख्य व्यावहारिक कारण यह है कि वॉन नोयमान का दृष्टिकोण परिमितेतर संख्याओं को सँभालने के लिए बहुत अच्छी तरह "विस्तारित" होता है। इसे हम अध्याय 66 से आगे देखेंगे। किंतु केवल *अंकगणित करने* के दृष्टिकोण से दोनों दृष्टिकोण समान रूप से अच्छे होते। अतः यदि कोई आपसे कहे कि प्राकृतिक संख्याएँ समुच्चय *हैं*, तो स्पष्ट प्रश्न है: *वे कौन-से समुच्चय हैं?*

इसी प्रश्न को Benacerraf (1965) ने प्रसिद्ध किया। किंतु इस बात पर बल देना उचित है कि यह उस परिघटना का केवल सबसे प्रसिद्ध उदाहरण है जिससे हम पहले ही कई बार मिले हैं। मूल बात यह है। समुच्चय सिद्धांत हमें कई "सहज" प्रकार की सत्ताओं का *अनुकरण* करने का मार्ग देता है: वास्तविक, परिमेय, पूर्ण और प्राकृतिक संख्याएँ तो हैं ही; साथ ही क्रमित युग्म, फलन और संबंध भी। किंतु समुच्चय सिद्धांत अनुकरण का कभी कोई *अद्वितीय* चयन नहीं देता। *सदा* ऐसे विकल्प होते हैं जो—सीधे-सीधे—उतनी ही अच्छी तरह काम करते।

65.9 परिशिष्ट: संवृति, समुच्चय-निर्माण और सर्वनिष्ठ

खंड 65.7 में हमने सुझाव दिया था कि आपको भाग I के सहज कार्य को पीछे देखकर जाँचना चाहिए कि उसे $\mathbf{Z}^-$ में किया जा सकता है। यदि आपने यह सुझाव माना, तो संभवतः *एक* बिंदु ने आपको उलझाया होगा: डेडेकिंड द्वारा *संवृतियों* के विवेचन में *सर्वनिष्ठ* का उपयोग।

परिभाषा 6.2 से याद करें कि

$$\mathrm{clo}_f(o) = \bigcap\{X : o \in X \text{ और } X,\ f\text{-संवृत है}\}.$$

इसका सामान्य आकार इस रूप की परिभाषा है:

$$C = \bigcap\{X : \varphi(X)\}.$$

किंतु इससे खतरे की घंटी बजनी चाहिए: चूँकि सहज समुच्चय-निर्माण विफल होता है, इसकी कोई गारंटी नहीं कि $\{X : \varphi(X)\}$ का अस्तित्व है। अतः ऐसी परिभाषाएँ ख़तरनाक रूप से *बेईमानी* जैसी दिखती हैं।

सौभाग्य से वे बेईमानी नहीं; अथवा यदि अपने वर्तमान रूप में वे *बेईमानी* हैं, तो थोड़े ईमानदार श्रम से उन्हें निर्दोष बनाया जा सकता है। उस ईमानदार श्रम का पूर्वसंकेत प्रतिज्ञप्ति 65.4 में था, जहाँ हमने समझाया कि किसी भी $A \neq \emptyset$ के लिए $\bigcap A$ का अस्तित्व क्यों है। किंतु अब इसे स्पष्टतः लिखेंगे।

विस्तारिता को मानकर यदि हम C को $\bigcap\{X : \varphi(X)\}$ के रूप में परिभाषित करना चाहें, तो वास्तव में हम केवल ऐसी वस्तु C माँग रहे हैं जो निम्न का पालन करे:

$$\forall x(x \in C \leftrightarrow \forall X(\varphi(X) \to x \in X)) \qquad (*)$$

अब मान लें कि ऐसा *कोई* समुच्चय S है कि $\varphi(S)$। तब समीकरण (*) पाने के लिए हम *पृथक्करण* का उपयोग करके C को बस इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$C = \{x \in S : \forall X(\varphi(X) \to x \in X)\}.$$

यह जाँचना अभ्यास के लिए छोड़ते हैं कि यह परिभाषा अपेक्षानुसार समीकरण (*) देती है। यह सामान्य रणनीति सर्वनिष्ठों को परिभाषित करने में सहज समुच्चय-निर्माण के किसी भी प्रतीयमान उपयोग से बचने देगी। जिस विशेष मामले से यह विचार-क्रम आरंभ हुआ, अर्थात $\mathrm{clo}_f(o)$, में यह इस प्रकार काम करेगा। सहायक प्रमेय 6.3 के प्रमाण का आरंभ हमने यह देखकर किया था कि $o \in \mathrm{ran}(f) \cup \{o\}$ और $\mathrm{ran}(f) \cup \{o\}$, f-संवृत है। अतः अपनी वांछित वस्तु को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$\mathrm{clo}_f(o) = \{x \in \mathrm{ran}(f) \cup \{o\} : (\forall X \ni o)(X\ f\text{-संवृत है} \to x \in X)\}.$$

प्रश्न

प्रश्न 65.1. दिखाइए कि किन्हीं समुच्चयों a, b, c के लिए समुच्चय $\{a, b, c\}$ का अस्तित्व है।

प्रश्न 65.2. दिखाइए कि किन्हीं समुच्चयों $a_1, \ldots, a_n$ के लिए समुच्चय $\{a_1, \ldots, a_n\}$ का अस्तित्व है।

प्रश्न 65.3. दिखाइए कि किन्हीं समुच्चयों A, B के लिए: (i) प्रांत A और परास B वाले सभी संबंधों के समुच्चय का अस्तित्व है; और (ii) A से B में सभी फलनों के समुच्चय का अस्तित्व है।

प्रश्न 65.4. A को समुच्चय और $\sim$ को A पर कोई तुल्यता संबंध मानें। सिद्ध कीजिए कि A पर $\sim$ के अधीन तुल्यता वर्गों का समुच्चय, अर्थात $A/_{\sim}$, अस्तित्व में है।

अध्याय 66

क्रमसूचक

66.1 परिचय

अध्याय 65 में हमने *Stages-hit-infinity* के रूप में माना था कि पदानुक्रम का एक अनंतवाँ चरण है (अनंतता का हमारा अभिगृहीत भी देखें)। किंतु *Stages-keep-going* को मानकर हम अनंतवें चरण पर रुक नहीं सकते; हमें आगे बढ़ते रहना होगा। अतः पहले अनंत चरण के बाद वाले अगले चरण पर हम उन समुच्चयों के सभी संभव संग्रह बनाते हैं जो पहले अनंत चरण पर उपलब्ध थे; फिर दोहराते हैं; फिर दोहराते हैं; फिर दोहराते हैं; ...

यहाँ निहित रूप से यह हुआ है कि हमने संख्या की ऐसी "सहज" धारणा का आह्वान आरंभ कर दिया है जिसके अनुसार समस्त प्राकृतिक संख्याओं के *बाद* भी संख्याएँ हो सकती हैं। विशेषतः यहाँ *परिमितेतर क्रमसूचक* की धारणा अंतर्भूत है। इस अध्याय का उद्देश्य इस विचार को अधिक कठोर बनाना है। हम क्रमसूचक की सामान्य धारणा का अन्वेषण करेंगे और फिर कुछ समुच्चयों को स्पष्टतः अपने क्रमसूचक परिभाषित करेंगे।

66.2 क्रमसूचक का सामान्य विचार

प्राकृतिक संख्याओं पर उनके सामान्य क्रम में विचार करें:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$$

तकनीकी भाषा में इसे ω-अनुक्रम कहते हैं। वास्तव में यही सामान्य क्रम समुच्चय पदानुक्रम के चरणों की हमारी आरंभिक रचना में प्रतिबिंबित होता है। अब मान लें कि हम 0 को इस अनुक्रम के अंत में ले जाते हैं, ताकि वह अन्य सभी संख्याओं के बाद आए:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < 0$$

यहाँ वही सत्ताएँ हैं, किंतु मूलतः भिन्न ढंग से क्रमित: हमारे पहले क्रम का कोई अंतिम अवयव नहीं था; नए क्रम का है। वास्तव में हमारा नया क्रम सत्ताओं के एक ω-अनुक्रम $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ और उसके बाद एक अन्य सत्ता से बना है। यह $\omega + 1$-अनुक्रम होगा।

केवल इन्हीं सत्ताओं से हम और भी प्रकार के क्रम बना सकते हैं। उदाहरणतः सभी सम संख्याओं (उनके स्वाभाविक क्रम में) के बाद सभी विषम संख्याओं (उनके स्वाभाविक क्रम में) पर विचार करें:

$$0 < 2 < 4 < \cdots < 1 < 3 < \cdots$$

यह एक ω-अनुक्रम के बाद दूसरा ω-अनुक्रम है; एक $\omega + \omega$-अनुक्रम।

हम इसी तरह आगे बढ़ सकते हैं। किंतु हमें *क्रमों* की इस चर्चा को समझने का कोई सामान्य ढंग चाहिए।

66.3 सुव्यवस्थाएँ

मूल धारणा यह है:

परिभाषा 66.1. संबंध $<$, A को *सुव्यवस्थित* करता है तभी और केवल तभी जब वह इन दो शर्तों को पूरा करे:

1. $<$ संबद्ध है; अर्थात सभी $a, b \in A$ के लिए या तो $a < b$, या $a = b$, या $b < a$;
2. A के प्रत्येक रिक्तेतर उपसमुच्चय का कोई $<$-न्यूनतम अवयव है; अर्थात यदि $\emptyset \neq X \subseteq A$, तो $(\exists m \in X)(\forall z \in X) z \not< m$।

यह देखना सरल है कि अभी विचार किए तीनों उदाहरण वास्तव में सुव्यवस्था संबंध थे।
सुव्यवस्था के विषय में कुछ प्राथमिक किंतु अत्यंत महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण ये हैं।

प्रतिज्ञप्ति 66.2. *यदि $<$, A को सुव्यवस्थित करता है, तो A के प्रत्येक रिक्तेतर उपसमुच्चय का अद्वितीय $<$-लघुतम सदस्य है, और $<$ स्व-अप्रतिवर्ती, असममित तथा संक्रमणशील है।*

प्रमाण. यदि X, A का रिक्तेतर उपसमुच्चय है, तो उसका कोई $<$-न्यूनतम अवयव m है; अर्थात $(\forall z \in X) z \not< m$। चूँकि $<$ संबद्ध है, $(\forall z \in X) m \leq z$। अतः m, X का $<$-लघुतम अवयव है।

स्व-अप्रतिवर्तिता के लिए $a \in A$ को नियत करें; $\{a\}$ का $<$-लघुतम अवयव a है, अतः $a \not< a$। संक्रमणशीलता के लिए, यदि $a < b < c$, तो चूँकि $\{a, b, c\}$ का कोई $<$-लघुतम अवयव है, $a < c$। असममिति स्व-अप्रतिवर्तिता और संक्रमणशीलता से निष्पन्न होती है। □

प्रतिज्ञप्ति 66.3. *यदि $<$, A को सुव्यवस्थित करता है, तो किसी भी सूत्र $\varphi(x)$ के लिए:*

$$\text{यदि } (\forall a \in A)((\forall b < a)\varphi(b) \to \varphi(a)), \text{ तो } (\forall a \in A)\varphi(a).$$

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करेंगे। मान लें $\neg(\forall a \in A)\varphi(a)$; अर्थात $X = \{x \in A : \neg\varphi(x)\} \neq \emptyset$। तब X का कोई $<$-न्यूनतम अवयव a है। अतः $(\forall b < a)\varphi(b)$, किंतु $\neg\varphi(a)$। □

यह अंतिम गुण आपको प्राकृतिक संख्याओं पर प्रबल आगमन के सिद्धांत की याद दिलाएगा; अर्थात यदि $(\forall n \in \omega)((\forall m < n)\varphi(m) \to \varphi(n))$, तो $(\forall n \in \omega)\varphi(n)$। और यह गुण सुव्यवस्था को अत्यंत सुदृढ़ धारणा बनाता है।[1]

66.4 क्रम-समाकृतिकताएँ

सुव्यवस्था *कितनी* सुदृढ़ है यह समझाने के लिए हम सुव्यवस्थाओं की तुलना की एक विधि प्रस्तुत करने से आरंभ करेंगे।

परिभाषा 66.4. *सुव्यवस्था* ऐसा युग्म $\langle A, < \rangle$ है कि $<$, A को सुव्यवस्थित करता है। सुव्यवस्थाएँ $\langle A, < \rangle$ और $\langle B, \lessdot \rangle$ *क्रम-समाकृतिक* तभी और केवल तभी हैं जब कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f \colon A \to B$ ऐसा हो कि: $x < y$ तभी और केवल तभी जब $f(x) \lessdot f(y)$। इस स्थिति में हम $\langle A, < \rangle \cong \langle B, \lessdot \rangle$ लिखते हैं और f को *क्रम-समाकृतिकता* कहते हैं।

आगे संक्षेप के लिए हम "क्रम-समाकृतिकताओं" के बजाय "समाकृतिकताओं" की बात करेंगे। सहजतः समाकृतिकताएँ संरचना-संरक्षक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण हैं। समाकृतिकताओं के कुछ सरल तथ्य ये हैं।

सहायक प्रमेय 66.5. *समाकृतिकताओं के संयोजन समाकृतिकताएँ होते हैं; अर्थात यदि $f \colon A \to B$ और $g \colon B \to C$ समाकृतिकताएँ हैं, तो $(g \circ f) \colon A \to C$ समाकृतिकता है।*

[1] स्मरण रहे: सभी सूत्रों में प्राचल हो सकते हैं (जब तक स्पष्टतः अन्यथा न कहा गया हो)।

प्रमाण. अभ्यास के लिए छोड़ा गया। □

उपप्रमेय 66.6. *$X \cong Y$ एक तुल्यता संबंध है।*

प्रतिज्ञप्ति 66.7. *यदि $\langle A, < \rangle$ और $\langle B, \lessdot \rangle$ समाकृतिक सुव्यवस्थाएँ हैं, तो उनके बीच समाकृतिकता अद्वितीय है।*

प्रमाण. f और g को $A \to B$ समाकृतिकताएँ मानें। हम परिणाम को आगमन द्वारा, अर्थात प्रतिज्ञप्ति 66.3 का उपयोग करके, सिद्ध करेंगे। $a \in A$ को नियत करें और (आगमन के लिए) मान लें कि $(\forall b < a) f(b) = g(b)$। $x \in B$ को नियत करें।

यदि $x \lessdot f(a)$, तो $f^{-1}(x) < a$, अतः f और g के समाकृतिकताएँ होने से $g(f^{-1}(x)) \lessdot g(a)$। किंतु चूँकि $f^{-1}(x) < a$, हमारी मान्यता से $x = f(f^{-1}(x)) = g(f^{-1}(x))$। अतः $x \lessdot g(a)$। इसी प्रकार यदि $x \lessdot g(a)$, तो $x \lessdot f(a)$।

सामान्यीकरण करने पर $(\forall x \in B)(x \lessdot f(a) \leftrightarrow x \lessdot g(a))$। अतः प्रतिज्ञप्ति 2.27 से $f(a) = g(a)$। इसलिए प्रतिज्ञप्ति 66.3 से $(\forall a \in A) f(a) = g(a)$। □

यह इस बात का कुछ आभास देता है कि सुव्यवस्थाएँ सुदृढ़ हैं। इसे आगे समझाने के लिए कुछ और संकेतन प्रस्तुत करना सहायक होगा।

परिभाषा 66.8. जब $\langle A, < \rangle$ कोई सुव्यवस्था और $a \in A$ हो, तब $A_a = \{x \in A : x < a\}$ रखें। हम कहते हैं कि A_a, A का उचित *आरंभिक खंड* है (और A को स्वयं A का अनुचित आरंभिक खंड मानते हैं)। $<_a$ को आरंभिक खंड पर $<$ का प्रतिबंध, अर्थात $<\restriction_{A_a^2}$, मानें।

इस संकेतन से हम यह कथन और प्रमाण दे सकते हैं कि कोई सुव्यवस्था अपने किसी उचित आरंभिक खंड के समाकृतिक नहीं है।

सहायक प्रमेय 66.9. *यदि $\langle A, < \rangle$ कोई सुव्यवस्था है और $a \in A$, तो $\langle A, < \rangle \ncong \langle A_a, <_a \rangle$*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए मान लें कि $f \colon A \to A_a$ कोई समाकृतिकता है। चूँकि f द्विएकी है और $A_a \subsetneq A$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 66.2 का उपयोग करके $b \in A$ को A का ऐसा $<$-लघुतम अवयव मानें कि $b \neq f(b)$। हम दिखाएँगे कि $(\forall x \in A)(x < b \leftrightarrow x < f(b))$; इससे प्रतिज्ञप्ति 2.27 द्वारा $b = f(b)$ निष्पन्न होगा और विरोधाभास पूर्ण होगा।

मान लें $x < b$। b के चयन से $x = f(x)$। और f समाकृतिकता है, इसलिए $f(x) < f(b)$। अतः $x < f(b)$।

मान लें $x < f(b)$। चूँकि f समाकृतिकता है, $f^{-1}(x) < b$; अतः b के चयन से $f^{-1}(x) = x$। इसलिए $x < b$। □

हमारा अगला परिणाम मोटे तौर पर दिखाता है कि किसी समाकृतिकता का "आरंभिक खंड" समाकृतिकता है:

सहायक प्रमेय 66.10. *$\langle A, < \rangle$ और $\langle B, \lessdot \rangle$ सुव्यवस्थाएँ हों। यदि $f \colon A \to B$ समाकृतिकता और $a \in A$ है, तो $f\restriction_{A_a} : A_a \to B_{f(a)}$ समाकृतिकता है।*

प्रमाण. चूँकि f समाकृतिकता है:

$$\begin{aligned} f[A_a] &= f[\{x \in A : x < a\}] \\ &= f[\{f^{-1}(y) \in A : f^{-1}(y) < a\}] \\ &= \{y \in B : y \lessdot f(a)\} \\ &= B_{f(a)} \end{aligned}$$

और $f\restriction_{A_a}$ क्रम को संरक्षित करता है, क्योंकि f करता है। □

हमारे अगले दो परिणाम स्थापित करते हैं कि सुव्यवस्थाएँ सदा तुलनीय हैं:

सहायक प्रमेय 66.11. *$\langle A, <\rangle$ और $\langle B, \lessdot\rangle$ सुव्यवस्थाएँ हों। यदि $\langle A_{a_1}, <_{a_1}\rangle \cong \langle B_{b_1}, \lessdot_{b_1}\rangle$ और $\langle A_{a_2}, <_{a_2}\rangle \cong \langle B_{b_2}, \lessdot_{b_2}\rangle$, तो $a_1 < a_2$ तभी और केवल तभी जब $b_1 \lessdot b_2$।*

प्रमाण. हम *बाएँ से दाएँ* सिद्ध करेंगे; दूसरी दिशा समान है। मान लें कि $\langle A_{a_1}, <_{a_1}\rangle \cong \langle B_{b_1}, \lessdot_{b_1}\rangle$ और $\langle A_{a_2}, <_{a_2}\rangle \cong \langle B_{b_2}, \lessdot_{b_2}\rangle$ दोनों हैं, जहाँ $f\colon A_{a_2} \to B_{b_2}$ हमारी समाकृतिकता है। $a_1 < a_2$ मानें; तब सहायक प्रमेय 66.10 से $\langle A_{a_1}, <_{a_1}\rangle \cong \langle B_{f(a_1)}, \lessdot_{f(a_1)}\rangle$। अतः $\langle B_{b_1}, \lessdot_{b_1}\rangle \cong \langle B_{f(a_1)}, \lessdot_{f(a_1)}\rangle$ और इसलिए सहायक प्रमेय 66.9 से $b_1 = f(a_1)$। अब $b_1 \lessdot b_2$, क्योंकि f का प्रांत B_{b_2} है। □

प्रमेय 66.12. *किन्हीं दो सुव्यवस्थाओं में एक दूसरी के किसी आरंभिक खंड (आवश्यक नहीं कि उचित हो) के समाकृतिक है।*

प्रमाण. $\langle A, <\rangle$ और $\langle B, \lessdot\rangle$ को सुव्यवस्थाएँ मानें। पृथक्करण का उपयोग करते हुए रखें:

$$f = \{\langle a, b\rangle \in A \times B : \langle A_a, <_a\rangle \cong \langle B_b, \lessdot_b\rangle\}.$$

सहायक प्रमेय 66.11 से सभी $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in f$ के लिए $a_1 < a_2$ तभी और केवल तभी जब $b_1 \lessdot b_2$। अतः $f\colon \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{ran}(f)$ समाकृतिकता है।

यदि $a_2 \in \mathrm{dom}(f)$ और $a_1 < a_2$, तो सहायक प्रमेय 66.10 से $a_1 \in \mathrm{dom}(f)$; अतः $\mathrm{dom}(f)$, A का आरंभिक खंड है। इसी प्रकार $\mathrm{ran}(f)$, B का आरंभिक खंड है। विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए मान लें कि दोनों *उचित* आरंभिक खंड हैं। तब a को $A \setminus \mathrm{dom}(f)$ का $<$-लघुतम अवयव मानें, जिससे $\mathrm{dom}(f) = A_a$; और b को $B \setminus \mathrm{ran}(f)$ का $\lessdot$-लघुतम अवयव मानें, जिससे $\mathrm{ran}(f) = B_b$। अतः $f\colon A_a \to B_b$ समाकृतिकता है और इसलिए $\langle a, b\rangle \in f$; यह विरोधाभास है। □

66.5 वॉन नोयमान द्वारा क्रमसूचकों की रचना

प्रमेय 66.12 एक विचार सुझाता है। हम सुव्यवस्थाओं के प्रतिनिधि के रूप में कुछ वस्तुएँ प्रस्तुत कर सकते हैं जिन्हें *क्रम-प्रकार* कहते हैं। सुव्यवस्था $\langle A, <\rangle$ के क्रम-प्रकार के लिए $\mathrm{ord}(A, <)$ लिखकर हम निम्न दो सिद्धांत पाना चाहेंगे:

$\mathrm{ord}(A, <) = \mathrm{ord}(B, \lessdot)$ तभी और केवल तभी जब $\langle A, <\rangle \cong \langle B, \lessdot\rangle$

$\mathrm{ord}(A, <) < \mathrm{ord}(B, \lessdot)$ तभी और केवल तभी जब किसी $b \in B$ के लिए $\langle A, <\rangle \cong \langle B_b, \lessdot_b\rangle$

इसके अतिरिक्त हम क्रम-प्रकारों को *कुछ समुच्चयों के रूप में* प्रस्तुत करने की आशा कर सकते हैं, जैसे प्राकृतिक संख्याओं को कुछ समुच्चयों के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

ऐसा करने का सबसे सामान्य ढंग—और हमारा अपनाया दृष्टिकोण—इन क्रम-प्रकारों को कुछ *विहित* सुव्यवस्थित समुच्चयों द्वारा परिभाषित करना है। इन विहित समुच्चयों को पहले वॉन नोयमान ने प्रस्तुत किया था:

परिभाषा 66.13. समुच्चय A *संक्रमणशील* तभी और केवल तभी है जब $(\forall x \in A) x \subseteq A$। फिर A *क्रमसूचक* तभी और केवल तभी है जब A संक्रमणशील हो और $\in$ द्वारा सुव्यवस्थित हो।

आगे हम क्रमसूचकों के लिए यूनानी अक्षरों का उपयोग करेंगे। परिभाषा से तुरंत निष्पन्न होता है कि यदि α कोई क्रमसूचक है, तो $\langle \alpha, \in_\alpha\rangle$ सुव्यवस्था है, जहाँ $\in_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in \alpha^2 : x \in y\}$। अतः संकेतन का थोड़ा दुरुपयोग करके हम बस कह सकते हैं कि α *स्वयं* सुव्यवस्था है।

हमारे पहले कुछ क्रमसूचक ये हैं:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

आप देखेंगे कि ये वही पहले कुछ क्रमसूचक हैं जिनसे हम अनंतता के अपने अभिगृहीत, अर्थात वॉन नोयमान की ω की परिभाषा, में मिले थे (खंड 65.6 देखें)। यह संयोग नहीं। वॉन नोयमान की क्रमसूचकों की परिभाषा प्राकृतिक संख्याओं को क्रमसूचक मानती है, किंतु परिमितेतर क्रमसूचकों को भी स्थान देती है।

सदा की तरह अब हम पूछ सकते हैं: क्या ये क्रमसूचक हैं? अथवा वॉन नोयमान ने हमें केवल कुछ ऐसे समुच्चय दिए हैं जिन्हें हम क्रमसूचक *मान* सकते हैं? इस प्रश्न पर होने वाली चर्चाएँ खंड 2.2, खंड 5.5, खंड 6.4 और खंड 65.8 में हुई चर्चाओं जैसी हैं, इसलिए हम इस बात को और नहीं खींचेंगे। आगे हम "क्रमसूचक" का उपयोग बस "वॉन नोयमान क्रमसूचक" के अर्थ में करेंगे।

66.6 क्रमसूचकों के मूल गुण

हमने देखा कि पहले कुछ क्रमसूचक प्राकृतिक संख्याएँ हैं। क्रमसूचक सिद्धांत विकसित करने का मुख्य कारण प्राकृतिक संख्याओं पर लागू आगमन के सिद्धांत का विस्तार करना है। प्राथमिक परिणामों की एक शृंखला से हम वहाँ तक पहुँचेंगे।

सहायक प्रमेय 66.14. *क्रमसूचक का प्रत्येक अवयव क्रमसूचक है।*

प्रमाण. α को ऐसा क्रमसूचक मानें कि $b \in \alpha$। चूँकि α संक्रमणशील है, $b \subseteq \alpha$। अतः जैसे $\in$, α को सुव्यवस्थित करता है, वैसे ही वह b को भी सुव्यवस्थित करता है।

b की संक्रमणशीलता देखने के लिए मान लें $x \in c \in b$। चूँकि $b \subseteq \alpha$, इसलिए $c \in \alpha$। फिर, चूँकि α संक्रमणशील है, $c \subseteq \alpha$, जिससे $x \in \alpha$। अतः $x, c, b \in \alpha$। किंतु $\in$, α को सुव्यवस्थित करता है, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 66.2 से $\in$, α पर संक्रमणशील संबंध है। अतः $x \in c \in b$ से $x \in b$। सामान्यीकरण करने पर $c \subseteq b$। $\square$

उपप्रमेय 66.15. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए $\alpha = \{\beta \in \alpha : \beta$ क्रमसूचक है$\}$।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 66.14 से तत्काल। $\square$

अगले दो मुख्य परिणामों, प्रमेय 66.16 और प्रमेय 66.17, का मोटा आशय यह है कि स्वयं क्रमसूचक सदस्यता द्वारा सुव्यवस्थित हैं:

प्रमेय 66.16 (परिमितेतर आगमन). *किसी भी सूत्र $\varphi(x)$ के लिए:*

$$\text{यदि } \exists\alpha\varphi(\alpha), \text{ तो } \exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge (\forall\beta \in \alpha)\neg\varphi(\beta))$$

जहाँ प्रदर्शित परिमाणक निहित रूप से क्रमसूचकों तक सीमित हैं।

प्रमाण. किसी क्रमसूचक α के लिए $\varphi(\alpha)$ मान लें। यदि $(\forall\beta \in \alpha)\neg\varphi(\beta)$, तो काम पूरा है। अन्यथा, चूँकि α क्रमसूचक है, उसका कोई $\in$-लघुतम अवयव है जो φ को संतुष्ट करता है; और सहायक प्रमेय 66.14 से वह क्रमसूचक है। $\square$

ध्यान दें कि हम प्रमेय 66.16 को समान रूप से इस योजना में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\text{यदि } \forall\alpha((\forall\beta \in \alpha)\varphi(\beta) \to \varphi(\alpha)), \text{ तो } \forall\alpha\varphi(\alpha)$$

इसके लिए प्रमेय 66.16 में बस $\neg\varphi(\alpha)$ लेकर प्राथमिक तार्किक रूपांतरण करने होते हैं।

प्रमेय 66.17 (त्रिकोटी). *किन्हीं क्रमसूचकों α और β के लिए $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$।*

प्रमाण. प्रमाण दोहरे आगमन द्वारा है, अर्थात प्रमेय 66.16 का दो बार उपयोग करके। कहें कि x, y से *तुलनीय* है तभी और केवल तभी जब $x \in y \vee x = y \vee y \in x$।

आगमन के लिए मान लें कि α में प्रत्येक क्रमसूचक *प्रत्येक* क्रमसूचक से तुलनीय है। आगे के आगमन के लिए मान लें कि α, β में प्रत्येक क्रमसूचक से तुलनीय है। हम दिखाएँगे कि α, β से तुलनीय है। β पर आगमन से निष्पन्न होगा कि α प्रत्येक क्रमसूचक से तुलनीय है; और फिर α पर आगमन से *प्रत्येक* क्रमसूचक *प्रत्येक* क्रमसूचक से तुलनीय है, जैसा अपेक्षित था। $\alpha \notin \beta$ और $\beta \notin \alpha$ मानकर $\alpha = \beta$ दिखाना पर्याप्त है।

$\alpha \subseteq \beta$ दिखाने के लिए $\gamma \in \alpha$ को नियत करें; सहायक प्रमेय 66.14 से यह क्रमसूचक है। अतः पहली आगमन परिकल्पना से γ, β से तुलनीय है। किंतु यदि या तो $\gamma = \beta$ या $\beta \in \gamma$, तो (आवश्यक होने पर α की संक्रमणशीलता का उपयोग करके) $\beta \in \alpha$, जो हमारी मान्यता के विरुद्ध है; इसलिए $\gamma \in \beta$। सामान्यीकरण करने पर $\alpha \subseteq \beta$।

दूसरी आगमन परिकल्पना का उपयोग करने वाला ठीक समान तर्क $\beta \subseteq \alpha$ दिखाता है। अतः $\alpha = \beta$। □

इसलिए हम कभी-कभी $\alpha \in \beta$ के बजाय $\alpha < \beta$ लिखेंगे, क्योंकि $\in$ क्रम संबंध जैसा व्यवहार कर रहा है। परिचय और यह तथ्य कि $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ की अपेक्षा $\alpha \leq \beta$ लिखना सरल है, इसके अतिरिक्त कोई गहरा कारण नहीं।[2]

हमारे पिछले परिणामों के दो त्वरित परिणाम ये हैं, जिनमें पहला हमारे नए संकेतन को काम में लाता है:

उपप्रमेय 66.18. *यदि $\exists\alpha\varphi(\alpha)$, तो $\exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall\beta(\varphi(\beta) \to \alpha \leq \beta))$. इसके अतिरिक्त किन्हीं क्रमसूचकों α, β, γ के लिए $\alpha \notin \alpha$ और $\alpha \in \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$, दोनों।*

प्रमाण. ठीक प्रतिज्ञप्ति 66.2 की तरह। □

उपप्रमेय 66.19. *A क्रमसूचक तभी और केवल तभी है जब A क्रमसूचकों का संक्रमणशील समुच्चय है।*

प्रमाण. बाएँ से दाएँ। सहायक प्रमेय 66.14 से। *दाएँ से बाएँ।* यदि A क्रमसूचकों का संक्रमणशील समुच्चय है, तो प्रमेय 66.16 और प्रमेय 66.17 से $\in$, A को सुव्यवस्थित करता है। □

हमने प्रमेय 66.16 और प्रमेय 66.17 का आशय यह बताया कि $\in$ क्रमसूचकों को सुव्यवस्थित करता है। किंतु निम्न परिणाम के कारण ऐसे दावे के विषय में हमें *बहुत सावधान* रहना होगा:

प्रमेय 66.20 (बुराली–फ़ोर्टी विरोधाभास). *समस्त क्रमसूचकों का कोई समुच्चय नहीं है।*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए मान लें कि O समस्त क्रमसूचकों का समुच्चय है। यदि $\alpha \in \beta \in O$, तो सहायक प्रमेय 66.14 से α क्रमसूचक है, अतः $\alpha \in O$। इसलिए O संक्रमणशील है और इस प्रकार उपप्रमेय 66.19 से O क्रमसूचक है। फलतः $O \in O$, जो उपप्रमेय 66.18 के विरुद्ध है। □

इस परिणाम का नाम Burali-Forti पर है। किंतु 1899 में डेडेकिंड को लिखे पत्र में कैंटर ने पहली बार स्पष्टतः वह *विरोधाभास* देखा जो समस्त क्रमसूचकों का समुच्चय मानने से उत्पन्न होता है। वैन हेयेनॉर्ट के शब्दों में:

> स्वयं बुराली–फ़ोर्टी ने माना कि विरोधाभास *असंगति तक अपचय* द्वारा यह परिणाम स्थापित करता है कि क्रमसूचकों का स्वाभाविक क्रम केवल एक आंशिक क्रम है। (Heijenoort, 1967, p. 105)

बुराली–फ़ोर्टी की भूल को अलग रखकर पिछले विवेचन का सार इस प्रकार है। क्रमसूचक ऐसे समुच्चय हैं जो अलग-अलग सदस्यता द्वारा सुव्यवस्थित हैं और सामूहिक रूप से भी सदस्यता द्वारा सुव्यवस्थित हैं (बिना सामूहिक रूप से कोई समुच्चय बनाए)।

इसे पूर्ण करने के लिए क्रमसूचकों के कुछ और मूल गुण ये हैं, जो प्रमेय 66.16 और प्रमेय 66.17 से निष्पन्न होते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 66.21. *क्रमसूचकों का प्रत्येक कड़ाई से अवरोही अनुक्रम परिमित है।*

[2] हम $\alpha \leq \beta$ लिख सकते थे; किंतु वह पूरी तरह अमानक होता।

प्रमाण. क्रमसूचकों के किसी अनंत कड़ाई से अवरोही अनुक्रम $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ का कोई $<$-न्यूनतम सदस्य नहीं है, जो प्रमेय 66.16 के विरुद्ध है। □

प्रतिज्ञप्ति 66.22. *किन्हीं क्रमसूचकों α, β के लिए $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$।*

प्रमाण. यदि $\alpha \in \beta$, तो β की संक्रमणशीलता से $\alpha \subseteq \beta$। इसी प्रकार यदि $\beta \in \alpha$, तो $\beta \subseteq \alpha$। और यदि $\alpha = \beta$, तो $\alpha \subseteq \beta$ और $\beta \subseteq \alpha$। अतः प्रमेय 66.17 से काम पूरा है। □

प्रतिज्ञप्ति 66.23. *किन्हीं क्रमसूचकों α, β के लिए $\alpha = \beta$ तभी और केवल तभी जब $\alpha \cong \beta$।*

प्रमाण. क्रमसूचक सुव्यवस्थाएँ हैं; अतः यह त्रिकोटी (प्रमेय 66.17) और सहायक प्रमेय 66.9 से तत्काल मिलता है। □

66.7 प्रतिस्थापन

खंड 66.5 में हमने यह सुझाव देकर क्रमसूचकों को प्रस्तुत करने की प्रेरणा दी थी कि उन्हें क्रम-प्रकार, अर्थात सुव्यवस्थाओं के विहित प्रतिनिधि, माना जा सकता है। यह सफल होने के लिए हमें सिद्ध करना होगा कि *प्रत्येक सुव्यवस्था किसी क्रमसूचक के समाकृतिक है*। इससे हम $\mathrm{ord}(A, <)$ को ऐसा क्रमसूचक α परिभाषित कर सकेंगे कि $\langle A, < \rangle \cong \alpha$।

दुर्भाग्य से अब तक प्रस्तुत अभिगृहीतों से ही हम वांछित परिणाम सिद्ध *नहीं कर सकते*। (क्यों, यह खंड 68.2 में देखेंगे; अभी बात केवल इतनी है कि हम नहीं कर सकते।) हमें एक नया विचार चाहिए, और वह यह है:

प्रतिस्थापन की योजना (प्रतिस्थापन की योजना). किसी भी सूत्र $\varphi(x, y)$ के लिए निम्न एक अभिगृहीत है:

किसी भी A के लिए यदि $(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x, y)$, तो $\{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$ का अस्तित्व है।

पृथक्करण की तरह यह एक योजना है: यह अनंततः अनेक भिन्न φ में प्रत्येक के लिए एक, इस प्रकार अनंततः अनेक अभिगृहीत देती है। इसे समान रूप से (और सामान्यतः) इस तरह लिखा जाता है:

ऐसे किसी भी सूत्र $\varphi(x, y)$ के लिए जिसमें "B" न हो, निम्न एक अभिगृहीत है:

$$\forall A[(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x, y) \to \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y))]$$

पहली बार देखने पर यह काफ़ी उलझा हुआ सूत्र है। प्रतिस्थापन का निम्न त्वरित परिणाम संभवतः हमारे सहज विचार को *अधिक स्पष्ट* रूप में व्यक्त करता है:[3]

उपप्रमेय 66.24. *किसी भी पद $\tau(x)$ और किसी भी समुच्चय A के लिए इस समुच्चय का अस्तित्व है:*

$$\{\tau(x) : x \in A\} = \{y : (\exists x \in A) y = \tau(x)\}.$$

प्रमाण. चूँकि τ एक पद है, $\forall x \exists! y\, \tau(x) = y$। अतः और भी अधिक स्पष्टतः $(\forall x \in A)\exists! y\, \tau(x) = y$। इसलिए प्रतिस्थापन से $\{y : (\exists x \in A)\tau(x) = y\}$ का अस्तित्व है। □

[3]पद ऐसा व्यंजक है जो (अपने मुक्त चरों के किसी भी पूरण पर) ठीक एक वस्तु चुनता है। उदाहरणतः "$\emptyset$" रिक्त समुच्चय चुनने वाला पद है; "$\{x\}$" x का एकल समुच्चय चुनने वाला पद है (x जो भी हो); और "$x \cup y$" x और y का सम्मिलन चुनने वाला पद है (वे जो भी हों)।

यह सुझाता है कि अभिगृहीत के लिए "प्रतिस्थापन" अच्छा नाम है: कोई समुच्चय A दिए जाने पर आप A के प्रत्येक सदस्य को τ के अधीन उसके प्रतिबिंब से बदलकर नया समुच्चय $\{\tau(x) : x \in A\}$ बना सकते हैं। वास्तव में किसी फलन के अधीन समुच्चय के प्रतिबिंब के संकेतन का अनुसरण करते हुए हम $\{\tau(x) : x \in A\}$ के लिए $\tau[A]$ लिख सकते हैं।

किंतु निर्णायक बात यह है कि τ एक *पद* है। खंड 3.3 के अर्थ में उसका कोई *फलन* (का नाम), अर्थात क्रमित युग्मों का कोई विशिष्ट समुच्चय, होना आवश्यक नहीं। आखिर यदि f (उस अर्थ में) फलन है, तो समुच्चय $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ केवल $\mathrm{ran}(f)$ का एक विशिष्ट उपसमुच्चय है, और केवल $\mathbf{Z}^-$ के अभिगृहीतों से उसके अस्तित्व की गारंटी पहले ही है।[4] इसके विपरीत प्रतिस्थापन हमारे अभिगृहीतों में एक *शक्तिशाली* योग है, जैसा हम अध्याय 68 में देखेंगे।

66.8 $\mathbf{ZF}^-$: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव

प्रतिस्थापन का औचित्य कैसे दिया जाए (यदि दिया भी जा सके), यह प्रश्न सरल नहीं। इसलिए इसे हम अध्याय 68 के लिए सुरक्षित रखेंगे। किंतु प्रतिस्थापन जोड़ने पर हम एक और महत्त्वपूर्ण पड़ाव पर पहुँच गए हैं। अब हमारे पास सिद्धांत $\mathbf{ZF}^-$ के लिए आवश्यक सभी अभिगृहीत हैं। विस्तार से:

परिभाषा 66.25. सिद्धांत $\mathbf{ZF}^-$ के अभिगृहीत ये हैं: विस्तारिता, सम्मिलन, युग्म, घात समुच्चय, अनंतता, और पृथक्करण तथा प्रतिस्थापन योजनाओं के सभी दृष्टांत। दूसरे शब्दों में, $\mathbf{ZF}^-$, $\mathbf{Z}^-$ में प्रतिस्थापन जोड़ता है।

यह *ज़ेर्मेलो–फ़्रेंकेल* समुच्चय सिद्धांत को दर्शाता है (उसमें से कुछ *घटाकर*, जिस पर हम बाद में आएँगे)। फ़्रेंकेल को यह सम्मान मिलता है, क्योंकि 1922 में प्रतिस्थापन के सूत्रीकरण का श्रेय उन्हें दिया जाता है, यद्यपि पहला सटीक सूत्रीकरण Skolem (1922) ने दिया था।

66.9 क्रम-प्रकार के रूप में क्रमसूचक

प्रतिस्थापन से सुसज्जित होकर, और इस प्रकार अब $\mathbf{ZF}^-$ में काम करते हुए, हम अंततः अपना लक्षित परिणाम सिद्ध कर सकते हैं:

प्रमेय 66.26. *प्रत्येक सुव्यवस्था किसी अद्वितीय क्रमसूचक के समाकृतिक है।*

प्रमाण. $\langle A, <\rangle$ को सुव्यवस्था मानें। प्रतिज्ञप्ति 66.23 से वह अधिक-से-अधिक एक क्रमसूचक के समाकृतिक है। अतः विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए मान लें कि $\langle A, <\rangle$ *किसी भी* क्रमसूचक के समाकृतिक नहीं है। पहले हम "$\langle A, <\rangle$ को यथासंभव छोटा बनाएँगे"। विस्तार से: यदि कोई उचित आरंभिक खंड $\langle A_a, <_a\rangle$ किसी भी क्रमसूचक के समाकृतिक नहीं है, तो उस गुणधर्म वाला कोई लघुतम $a \in A$ है; तब $B = A_a$ और $\lessdot = <_a$ रखें। अन्यथा $B = A$ और $\lessdot = <$ रखें।

परिभाषा से B का प्रत्येक उचित आरंभिक खंड किसी क्रमसूचक के समाकृतिक है, जो ऊपर की तरह अद्वितीय है। अतः प्रतिस्थापन से निम्न समुच्चय का अस्तित्व है और वह फलन है:

$$f = \{\langle \beta, b\rangle : b \in B \text{ और } \beta \cong \langle B_b, \lessdot_b\rangle\}$$

विरोधाभास पूर्ण करने के लिए हम दिखाएँगे कि किसी क्रमसूचक α के लिए f एक समाकृतिकता $\alpha \to B$ है।

स्पष्ट है कि $\mathrm{ran}(f) = B$। और सहायक प्रमेय 66.11 से f क्रम को संरक्षित करता है; अर्थात $\gamma \in \beta$ तभी और केवल तभी जब $f(\gamma) \lessdot f(\beta)$। $\mathrm{dom}(f)$ को क्रमसूचक दिखाने के लिए उपप्रमेय 66.19 से उसकी संक्रमणशीलता दिखाना पर्याप्त है। अतः $\beta \in \mathrm{dom}(f)$ को नियत करें; अर्थात किसी b के लिए $\beta \cong \langle B_b, \lessdot_b\rangle$। यदि $\gamma \in \beta$, तो सहायक प्रमेय 66.10 से $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$; सामान्यीकरण करने पर $\beta \subseteq \mathrm{dom}(f)$। □

यह परिणाम उस निम्न परिभाषा की अनुमति देता है जिसे हम खंड 66.5 से देना चाहते थे:

[4] बस $\{y \in \bigcup\bigcup f : (\exists x \in A) y = f(x)\}$ पर विचार करें।

परिभाषा 66.27. यदि $\langle A, < \rangle$ सुव्यवस्था है, तो उसका क्रम-प्रकार $\mathrm{ord}(A, <)$ वह अद्वितीय क्रमसूचक α है जिसके लिए $\langle A, < \rangle \cong \alpha$।

इसके अतिरिक्त यह परिभाषा दो अच्छे सिद्धांतों की अनुमति देती है:

उपप्रमेय 66.28. *जहाँ $\langle A, < \rangle$ और $\langle B, \lessdot \rangle$ सुव्यवस्थाएँ हैं:*

$$\mathrm{ord}(A, <) = \mathrm{ord}(B, \lessdot) \text{ तभी और केवल तभी जब } \langle A, < \rangle \cong \langle B, \lessdot \rangle$$
$$\mathrm{ord}(A, <) \in \mathrm{ord}(B, \lessdot) \text{ तभी और केवल तभी जब किसी } b \in B \text{ के लिए } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, \lessdot_b \rangle$$

प्रमाण. समानता प्रतिज्ञप्ति 66.23 से मिलती है। दूसरे दावे को सिद्ध करने के लिए $\mathrm{ord}(A, <) = \alpha$ और $\mathrm{ord}(B, \lessdot) = \beta$ मानें, तथा $f \colon \beta \to \langle B, \lessdot \rangle$ को अपनी समाकृतिकता मानें। तब:

$$\begin{aligned} \alpha \in \beta \text{ तभी और केवल तभी जब } & f\restriction_\alpha \colon \alpha \to B_{f(\alpha)} \text{ समाकृतिकता है} \\ & \text{तभी और केवल तभी जब } \langle A, < \rangle \cong \langle B_{f(\alpha)}, \lessdot_{f(\alpha)} \rangle \\ & \text{तभी और केवल तभी जब किसी } b \in B \text{ के लिए } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, \lessdot_b \rangle \end{aligned}$$

यह प्रतिज्ञप्ति 66.7, सहायक प्रमेय 66.10 और उपप्रमेय 66.15 से मिलता है। □

66.10 उत्तरवर्ती और सीमा क्रमसूचक

अगले कुछ अध्यायों में हम क्रमसूचकों का बहुत उपयोग करेंगे। इसलिए कुछ सरल धारणाएँ प्रस्तुत करना सहायक होगा।

परिभाषा 66.29. किसी भी क्रमसूचक α का *उत्तरवर्ती* $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ है। हम α को *उत्तरवर्ती* क्रमसूचक कहते हैं यदि किसी क्रमसूचक β के लिए $\beta^+ = \alpha$। हम α को *सीमा* क्रमसूचक तभी और केवल तभी कहते हैं जब α न रिक्त हो, न उत्तरवर्ती क्रमसूचक।

निम्न परिणाम दिखाता है कि यह *उत्तरवर्ती* की सही धारणा है:

प्रतिज्ञप्ति 66.30. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए:*

1. *$\alpha \in \alpha^+$;*
2. *α^+ क्रमसूचक है;*
3. *ऐसा कोई क्रमसूचक β नहीं है कि $\alpha \in \beta \in \alpha^+$।*

प्रमाण. तुच्छतः $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$। इसी तरह α^+ क्रमसूचकों का संक्रमणशील समुच्चय है और इसलिए उपप्रमेय 66.19 से क्रमसूचक है। और $\alpha \in \beta \in \alpha^+$ असंभव है, क्योंकि तब या तो $\beta \in \alpha$ अथवा $\beta = \alpha$, जो उपप्रमेय 66.18 के विरुद्ध है। □

यह परिमितेतर आगमन द्वारा प्रमाण के एक रूपांतर की भी अनुमति देता है:

प्रमेय 66.31 (सरल परिमितेतर आगमन). *$\varphi(x)$ को ऐसा सूत्र मानें कि:*

1. *$\varphi(\emptyset)$; और*
2. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए यदि $\varphi(\alpha)$, तो $\varphi(\alpha^+)$; और*
3. *यदि α सीमा क्रमसूचक और $(\forall \beta \in \alpha)\varphi(\beta)$ है, तो $\varphi(\alpha)$।*

तब $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ *।*

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करते हैं। मान लें कि कोई क्रमसूचक $\neg\varphi$ है; γ को ऐसा लघुतम क्रमसूचक मानें। तब या तो $\gamma = \emptyset$; अथवा किसी ऐसे α के लिए $\gamma = \alpha^+$ जिसके लिए $\varphi(\alpha)$; अथवा γ सीमा क्रमसूचक है और $(\forall\beta \in \gamma)\varphi(\beta)$। □

संकेतन का एक अंतिम अंश आगे सहायक होगा:

परिभाषा 66.32. यदि X क्रमसूचकों का समुच्चय है, तो $\mathrm{lsub}(X) = \bigcup_{\alpha\in X} \alpha^+$।

यहाँ "lsub" अंग्रेज़ी "least strict upper bound", अर्थात "लघुतम कठोर ऊपरी परिबंध", का संक्षेप है।[5] निम्न परिणाम इसे समझाता है:

प्रतिज्ञप्ति 66.33. *यदि X क्रमसूचकों का समुच्चय है, तो $\mathrm{lsub}(X)$, X के प्रत्येक क्रमसूचक से बड़ा लघुतम क्रमसूचक है।*

प्रमाण. $Y = \{\alpha^+ : \alpha \in X\}$ रखें, जिससे $\mathrm{lsub}(X) = \bigcup Y$। चूँकि क्रमसूचक संक्रमणशील हैं और किसी क्रमसूचक का प्रत्येक सदस्य क्रमसूचक है, इसलिए $\mathrm{lsub}(X)$ क्रमसूचकों का संक्रमणशील समुच्चय है और इस प्रकार उपप्रमेय 66.19 से क्रमसूचक है।

यदि $\alpha \in X$, तो $\alpha^+ \in Y$, अतः $\alpha^+ \subseteq \bigcup Y = \mathrm{lsub}(X)$ और इसलिए $\alpha \in \mathrm{lsub}(X)$। अतः $\mathrm{lsub}(X)$, X के प्रत्येक क्रमसूचक से कड़ाई से बड़ा है।

इसके विपरीत यदि $\alpha \in \mathrm{lsub}(X)$, तो किसी $\beta \in X$ के लिए $\alpha \in \beta^+ \in Y$, जिससे $\alpha \leq \beta \in X$। अतः $\mathrm{lsub}(X)$, X का *लघुतम* कठोर ऊपरी परिबंध है। □

प्रश्न

प्रश्न 66.1. खंड 66.2 में प्राकृतिक संख्याओं पर तीन उदाहरण क्रम दिए गए। जाँचिए कि प्रत्येक सुव्यवस्था है।

प्रश्न 66.2. सहायक प्रमेय 66.5 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 66.3. प्रमेय 66.17 के प्रमाण का "ठीक समान तर्क" पूर्ण कीजिए।

प्रश्न 66.4. सिद्ध कीजिए कि यदि X का प्रत्येक सदस्य क्रमसूचक है, तो $\bigcup X$ क्रमसूचक है।

[5] कुछ पुस्तकें इसके लिए "$\sup(X)$" का उपयोग करती हैं। किंतु अन्य पुस्तकें "$\sup(X)$" का उपयोग लघुतम *अकठोर* ऊपरी परिबंध, अर्थात केवल $\bigcup X$, के लिए करती हैं। यदि X का महत्तम अवयव α हो, तो ये धारणाएँ अलग होती हैं: लघुतम *कठोर* ऊपरी परिबंध α^+ है, जबकि लघुतम *अकठोर* ऊपरी परिबंध केवल α है।

अध्याय 67

चरण और रैंक

67.1 चरणों को V_α के रूप में परिभाषित करना

अध्याय 66 में हमने सुव्यवस्थाएँ और (वॉन नोयमान) क्रमसूचक परिभाषित किए। इस अध्याय में हम इनका उपयोग स्वयं समुच्चय पदानुक्रम को अभिलक्षित करने में करेंगे। इसके लिए याद करें कि खंड 66.10 में हमने उत्तरवर्ती और सीमा क्रमसूचकों की धारणा परिभाषित की थी। निम्न परिभाषा में हम इन्हीं विचारों का उपयोग करते हैं:

परिभाषा 67.1.

$$\begin{aligned} V_\emptyset &= \emptyset \\ V_{\alpha^+} &= \wp(V_\alpha) && \text{किसी भी क्रमसूचक } \alpha \text{ के लिए} \\ V_\alpha &= \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma && \text{जब } \alpha \text{ सीमा क्रमसूचक हो} \end{aligned}$$

यह क्रमसूचकों पर *परिमितेतर पुनरावर्तन* द्वारा परिभाषा होगी। इस संबंध में हमें इसकी तुलना प्राकृतिक संख्याओं पर फलनों की पुनरावर्ती परिभाषाओं से करनी चाहिए।[1] प्राकृतिक संख्याओं की तरह हम आधार मामला और उत्तरवर्ती मामले परिभाषित करते हैं; किंतु क्रमसूचकों के साथ हमें *सीमा* मामलों का व्यवहार भी बताना होगा।

V_α की यह परिभाषा एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव होगी। हमने समुच्चयों के अपने पदानुक्रम को अनौपचारिक रूप से *चरणों* में समुच्चय बनाने के रूप में प्रेरित किया है। वास्तव में V_α ठीक वही चरण हैं। किंतु महत्त्वपूर्ण बात यह है कि यह चरणों का *आंतरिक* अभिलक्षण है। सिद्धांत का कोई संभव *प्रतिरूप* सुझाने के बजाय हमने अपने समुच्चय सिद्धांत के *भीतर* चरण परिभाषित किए होंगे।

67.2 परिमितेतर पुनरावर्तन प्रमेय

सबसे पहले हमें यह पुष्टि करनी होगी कि परिभाषा 67.1 एक सफल परिभाषा है। अधिक सामान्यतः हमें सिद्ध करना है कि (परिमितेतर) पुनरावर्तन द्वारा परिमितेतर परिभाषा देने का प्रत्येक प्रयास सफल होगा। यही इस अनुभाग का उद्देश्य है।

चेतावनी: यह कठिन सामग्री है। फिर भी व्यापक शिक्षा काफ़ी सरल है: परिमितेतर आगमन और प्रतिस्थापन मिलकर परिमितेतर पुनरावर्तन के (कई रूपों की) वैधता की गारंटी देते हैं।[2]

परिभाषा 67.2. $\tau(x)$ को पद, f को फलन और α को क्रमसूचक मानें। हम f को τ का α-*सन्निकटन* तभी और केवल तभी कहते हैं जब $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ और $(\forall\beta \in \alpha) f(\beta) = \tau(f\restriction_\beta)$, दोनों हों।

[1] खंड 6.2 में योग, गुणन और घातांक की परिभाषाओं से तुलना करें।

[2] स्मरण रहे: सभी सूत्रों और पदों में प्राचल हो सकते हैं (जब तक स्पष्टतः अन्यथा न कहा गया हो)।

सहायक प्रमेय 67.3 (परिबद्ध पुनरावर्तन). *किसी भी पद $\tau(x)$ और किसी भी क्रमसूचक α के लिए τ का एक अद्वितीय α-सन्निकटन है।*

प्रमाण. हम दिखाएँगे कि किसी भी $\gamma \leq \alpha$ के लिए एक अद्वितीय γ-सन्निकटन है।

पहले अद्वितीयता स्थापित करें। g और h को क्रमशः γ- और δ-सन्निकटन मानें। उनके निवेशों पर परिमितेतर आगमन दिखाता है कि किसी भी $\beta \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(h) = \gamma \cap \delta = \min(\gamma, \delta)$ के लिए $g(\beta) = h(\beta)$। अतः हमारे सन्निकटन (यदि उनका अस्तित्व है) अद्वितीय हैं और सभी मानों पर सहमत हैं।

अस्तित्व स्थापित करने के लिए अब हम क्रमसूचकों $\delta \leq \alpha$ पर सरल परिमितेतर आगमन (प्रमेय 66.31) का उपयोग करते हैं।

रिक्त फलन तुच्छतः $\emptyset$-सन्निकटन है।

यदि g कोई γ-सन्निकटन है, तो $g \cup \{\langle \gamma, \tau(g) \rangle\}$ कोई γ^+-सन्निकटन है।

यदि γ सीमा क्रमसूचक है और सभी $\delta < \gamma$ के लिए g_δ कोई δ-सन्निकटन है, तो $g = \bigcup_{\delta \in \gamma} g_\delta$ रखें। यह फलन है, क्योंकि हमारे विभिन्न g_δ सभी मानों पर सहमत हैं। और यदि $\delta \in \gamma$, तो $g(\delta) = g_{\delta^+}(\delta) = \tau(g_{\delta^+} \restriction_\delta) = \tau(g \restriction_\delta)$।

इससे परिमितेतर आगमन द्वारा प्रमाण पूर्ण होता है। □

यदि हम किसी फलन के बजाय *पद* को परिभाषित करने की अनुमति लें, तो पिछले परिणाम से परिबंध α हटाया जा सकता है। निम्न परिणाम के कथन और प्रमाण में, जब σ पद हो, हम $\sigma \restriction_\alpha = \{\langle \beta, \sigma(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}$ रखते हैं।

प्रमेय 67.4 (सामान्य पुनरावर्तन). *किसी भी पद $\tau(x)$ के लिए हम स्पष्टतः ऐसा पद $\sigma(x)$ परिभाषित कर सकते हैं कि किसी भी क्रमसूचक α के लिए $\sigma(\alpha) = \tau(\sigma \restriction_\alpha)$।*

प्रमाण. प्रत्येक α के लिए सहायक प्रमेय 67.3 से τ का अद्वितीय α-सन्निकटन f_α है। $\sigma(\alpha)$ को $f_{\alpha^+}(\alpha)$ के रूप में परिभाषित करें। अब:

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= f_{\alpha^+}(\alpha) \\
&= \tau(f_{\alpha^+} \restriction_\alpha) \\
&= \tau(\{\langle \beta, f_{\alpha^+}(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\
&= \tau(\{\langle \beta, f_{\beta^+}(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\
&= \tau(\sigma \restriction_\alpha)
\end{aligned}$$

यह ध्यान रखते हुए कि सहायक प्रमेय 67.3 की तरह सभी $\beta < \alpha$ के लिए $f_{\beta^+}(\beta) = f_{\alpha^+}(\beta)$। □

ध्यान दें कि प्रमेय 67.4 एक *योजना* है। निर्णायक रूप से हम σ से किसी फलन, अर्थात किसी विशेष प्रकार के *समुच्चय*, को परिभाषित करने की अपेक्षा नहीं कर सकते; क्योंकि तब $\mathrm{dom}(\sigma)$ समस्त क्रमसूचकों का समुच्चय होता, जो बुराली–फ़ोर्टी विरोधाभास (प्रमेय 66.20) के विरुद्ध है।

फिर भी यह दिखाना शेष है कि प्रमेय 67.4, V_α की हमारी परिभाषा का औचित्य सिद्ध करता है। यह तुरंत स्पष्ट न हो, पर परिमितेतर पुनरावर्तन के एक अंतिम सरल रूप से स्पष्ट हो जाएगा।

प्रमेय 67.5 (सरल पुनरावर्तन). *किन्हीं पदों $\tau(x)$ और $\theta(x)$ तथा किसी भी समुच्चय A के लिए हम स्पष्टतः ऐसा पद $\sigma(x)$ परिभाषित कर सकते हैं कि:*

$$\begin{aligned}
\sigma(\emptyset) &= A \\
\sigma(\alpha^+) &= \tau(\sigma(\alpha)) && \textit{किसी भी क्रमसूचक } \alpha \textit{ के लिए} \\
\sigma(\alpha) &= \theta(\mathrm{ran}(\sigma \restriction_\alpha)) && \textit{जब } \alpha \textit{ सीमा क्रमसूचक हो}
\end{aligned}$$

प्रमाण. हम पद $\xi(x)$ को इस प्रकार परिभाषित करने से आरंभ करते हैं:

$$\xi(x) = \begin{cases} A & \text{यदि } x \text{ ऐसा फलन नहीं जिसका} \\ & \quad \text{प्रांत क्रमसूचक हो; अन्यथा:} \\ \tau(x(\alpha)) & \text{यदि } \mathrm{dom}(x) = \alpha^+ \\ \theta(\mathrm{ran}(x)) & \text{यदि } \mathrm{dom}(x) \text{ सीमा क्रमसूचक हो} \end{cases}$$

प्रमेय 67.4 से ऐसा पद $\sigma(x)$ है कि प्रत्येक क्रमसूचक α के लिए $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma\restriction_\alpha)$; इसके अतिरिक्त $\sigma\restriction_\alpha$ प्रांत α वाला फलन है। सरल परिमितेतर आगमन (प्रमेय 66.31) से हम दिखाते हैं कि σ में अपेक्षित गुण हैं।

पहले, $\sigma(\emptyset) = \xi(\emptyset) = A$।

अगला, $\sigma(\alpha^+) = \xi(\sigma\restriction_{\alpha^+}) = \tau(\sigma\restriction_{\alpha^+}(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha))$।

अंत में, जब α सीमा हो, तब $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma\restriction_\alpha) = \theta(\mathrm{ran}(\sigma\restriction_\alpha))$। □

अब परिभाषा 67.1 का औचित्य सिद्ध करने के लिए बस $A = \emptyset$, $\tau(x) = \wp(x)$ और $\theta(x) = \bigcup x$ लें। अंततः इससे V_α की परिभाषा का औचित्य सिद्ध होता है!

67.3 चरणों के मूल गुण

V_α की परिभाषा का आधारभूत महत्त्व स्पष्ट करने के लिए हम उनके विषय में कुछ मूल परिणाम प्रस्तुत करेंगे। एक परिभाषा से आरंभ करें:[3]

परिभाषा 67.6. समुच्चय A *सामर्थ्यवान* तभी और केवल तभी है जब $\forall x((\exists y \in A)x \subseteq y \to x \in A)$।

सहायक प्रमेय 67.7. *प्रत्येक क्रमसूचक α के लिए:*

1. *प्रत्येक V_α संक्रमणशील है।*
2. *प्रत्येक V_α सामर्थ्यवान है।*
3. *यदि $\gamma \in \alpha$, तो $V_\gamma \in V_\alpha$ (और इसलिए (1) से $V_\gamma \subseteq V_\alpha$ भी)।*

प्रमाण. हम इसे (युगपत) परिमितेतर आगमन से सिद्ध करते हैं। आगमन के लिए मान लें कि प्रत्येक क्रमसूचक $\beta < \alpha$ के लिए (1)–(3) लागू होते हैं।

$\alpha = \emptyset$ का मामला तुच्छ है।

मान लें $\alpha = \beta^+$। (3) दिखाने के लिए, यदि $\gamma \in \alpha$, तो परिकल्पना से $V_\gamma \subseteq V_\beta$, अतः $V_\gamma \in \wp(V_\beta) = V_\alpha$। (2) दिखाने के लिए मान लें $A \subseteq B \in V_\alpha$, अर्थात $A \subseteq B \subseteq V_\beta$; तब $A \subseteq V_\beta$, इसलिए $A \in V_\alpha$। (1) दिखाने के लिए ध्यान दें कि यदि $x \in A \in V_\alpha$, तो $A \subseteq V_\beta$, अतः $x \in V_\beta$; परिकल्पना से V_β संक्रमणशील है, इसलिए $x \subseteq V_\beta$ और इस प्रकार $x \in V_\alpha$।

मान लें α सीमा क्रमसूचक है। (3) दिखाने के लिए, यदि $\gamma \in \alpha$, तो $\gamma \in \gamma^+ \in \alpha$; इसलिए मान्यता से $V_\gamma \in V_{\gamma^+}$, और फलतः $V_\gamma \in \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta = V_\alpha$। (1) और (2) दिखाने के लिए बस देखें कि संक्रमणशील (क्रमशः सामर्थ्यवान) समुच्चयों का सम्मिलन संक्रमणशील (क्रमशः सामर्थ्यवान) होता है। □

सहायक प्रमेय 67.8. *प्रत्येक क्रमसूचक α के लिए $V_\alpha \notin V_\alpha$।*

[3] "सामर्थ्यवान" (potent) के लिए कोई मानक शब्दावली नहीं; यह Button (2021) द्वारा प्रयुक्त नाम का अनुवाद है।

प्रमाण. परिमितेतर आगमन से। स्पष्टतः $V_\emptyset \notin V_\emptyset$।

यदि $V_{\alpha^+} \in V_{\alpha^+} = \wp(V_\alpha)$, तो $V_{\alpha^+} \subseteq V_\alpha$; और चूँकि सहायक प्रमेय 67.7 से $V_\alpha \in V_{\alpha^+}$, इसलिए $V_\alpha \in V_\alpha$। इसके विपरीत: यदि $V_\alpha \notin V_\alpha$, तो $V_{\alpha^+} \notin V_{\alpha^+}$।

यदि α सीमा है और $V_\alpha \in V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, तो किसी $\beta \in \alpha$ के लिए $V_\alpha \in V_\beta$; किंतु तब $V_\beta \in V_\alpha$ भी, जिससे सहायक प्रमेय 67.7 (दो बार) द्वारा $V_\beta \in V_\beta$। इसके विपरीत यदि सभी $\beta \in \alpha$ के लिए $V_\beta \notin V_\beta$, तो $V_\alpha \notin V_\alpha$। □

उपप्रमेय 67.9. *किन्हीं क्रमसूचकों α, β के लिए: $\alpha \in \beta$ तभी और केवल तभी जब $V_\alpha \in V_\beta$।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 67.7 एक दिशा देता है। इसके विपरीत मान लें $V_\alpha \in V_\beta$। तब सहायक प्रमेय 67.8 से $\alpha \neq \beta$; और $\beta \notin \alpha$, क्योंकि अन्यथा $V_\beta \in V_\alpha$ और फिर सहायक प्रमेय 67.7 (दो बार) से $V_\beta \in V_\beta$, जो सहायक प्रमेय 67.8 के विरुद्ध है। अतः त्रिकोटी से $\alpha \in \beta$। □

यह सब हमें प्रत्येक V_α को पदानुक्रम का αवाँ चरण मानने देता है। कारण यह है।

निश्चय ही हमारे V_α को *पुनरावर्ती* प्रक्रिया में बना माना जा सकता है, क्योंकि क्रमसूचकों का हमारा उपयोग पुनरावृत्ति की धारणा का अनुसरण करता है। इसके अतिरिक्त यदि एक चरण दूसरे से पहले बना, अर्थात $V_\beta \in V_\alpha$, अर्थात $\beta \in \alpha$, तो हमारी निर्माण प्रक्रिया *संचयी* है, क्योंकि $V_\beta \subseteq V_\alpha$। अंततः हम वास्तव में पहले के किसी चरण पर उपलब्ध समुच्चयों के *सभी* संभव संग्रह बना रहे हैं, क्योंकि प्रत्येक उत्तरवर्ती चरण V_{α^+} अपने पूर्ववर्ती V_α का घात समुच्चय है।

संक्षेप में: $\mathbf{ZF}^-$ के साथ समुच्चयों के संचयी-पुनरावर्ती पदानुक्रम की अपनी दृष्टि को व्यक्त करने का काम *लगभग* पूरा है। (यद्यपि निश्चय ही प्रतिस्थापन का औचित्य देना अब भी शेष है।)

67.4 आधारिता

हमारा काम केवल *लगभग* पूरा है—*पूर्णतः* समाप्त नहीं—क्योंकि $\mathbf{ZF}^-$ में कुछ भी यह गारंटी नहीं देता कि *प्रत्येक* समुच्चय किसी V_α में है, अर्थात प्रत्येक समुच्चय किसी चरण पर बना है।

एक काफ़ी सीधा (गणितीय) अर्थ है जिसमें हमें इसकी *परवाह नहीं* कि पदानुक्रम के बाहर समुच्चय हैं या नहीं। (यदि वहाँ कोई हों, तो हम उन्हें बस अनदेखा कर सकते हैं।) किंतु हमने समुच्चय की अपनी *संकल्पना* को इस विचार से प्रेरित किया है कि प्रत्येक समुच्चय किसी चरण पर बनता है (खंड 65.1 में *Stages-are-key* देखें)। इसलिए हम पदानुक्रम के बाहर पड़ने वाले समुच्चयों की संभावना रोकना चाहेंगे। तदनुसार हमें ऐसा नया अभिगृहीत जोड़ना होगा जो सुनिश्चित करे कि प्रत्येक समुच्चय पदानुक्रम में कहीं आता है।

चूँकि V_α हमारे चरण हैं, हम बस निम्न को अभिगृहीत के रूप में जोड़ने पर विचार कर सकते हैं:

नियमितता। $\forall A \exists \alpha\, A \subseteq V_\alpha$

यह पूरी तरह उचित दृष्टिकोण होता। किंतु अगले अनुभाग में बताए जाने वाले कारणों से हम इसके बजाय एक वैकल्पिक अभिगृहीत अपनाएँगे:

आधारिता (आधारिता). $(\forall A \neq \emptyset)(\exists B \in A) A \cap B = \emptyset$.

कुछ प्रयास से हम ($\mathbf{ZF}^-$ में) दिखा सकते हैं कि आधारिता से नियमितता निष्पन्न होती है:

परिभाषा 67.10. प्रत्येक समुच्चय A के लिए रखें:

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_0(A) &= A, \\ \mathrm{cl}_{n+1}(A) &= \bigcup \mathrm{cl}_n(A), \\ \mathrm{trcl}(A) &= \bigcup_{n<\omega} \mathrm{cl}_n(A). \end{aligned}$$

हम $\mathrm{trcl}(A)$ को A की *संक्रमणशील संवृति* कहते हैं।

"संक्रमणशील संवृति" नाम उपयुक्त है:

प्रतिज्ञप्ति 67.11. *$A \subseteq \mathrm{trcl}(A)$ और $\mathrm{trcl}(A)$ संक्रमणशील समुच्चय है।*

प्रमाण. स्पष्टतः $A = \mathrm{cl}_0(A) \subseteq \mathrm{trcl}(A)$। और यदि $x \in b \in \mathrm{trcl}(A)$, तो किसी n के लिए $b \in \mathrm{cl}_n(A)$, अतः $x \in \mathrm{cl}_{n+1}(A) \subseteq \mathrm{trcl}(A)$। □

सहायक प्रमेय 67.12. *यदि A संक्रमणशील समुच्चय है, तो कोई α ऐसा है कि $A \subseteq V_\alpha$।*

प्रमाण. परिभाषा 66.32 से "$\mathrm{lsub}(X)$" की परिभाषा याद करते हुए दो समुच्चय परिभाषित करें:

$$D = \{x \in A : \forall \delta\ x \nsubseteq V_\delta\}$$
$$\alpha = \mathrm{lsub}\{\delta : (\exists x \in A)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma \in \delta) x \nsubseteq V_\gamma)\}$$

$D = \emptyset$ मान लें। अतः यदि $x \in A$, तो कोई δ ऐसा है कि $x \subseteq V_\delta$ और क्रमसूचकों की सुव्यवस्था से $(\forall \gamma \in \delta) x \nsubseteq V_\gamma$; फलतः $\delta \in \alpha$ और इसलिए सहायक प्रमेय 67.7 से $x \in V_\alpha$। अतः अपेक्षानुसार $A \subseteq V_\alpha$।

अतः $D = \emptyset$ दिखाना पर्याप्त है। विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए अन्यथा मान लें। आधारिता से कोई $B \in D \subseteq A$ ऐसा है कि $D \cap B = \emptyset$। यदि $x \in B$, तो A की संक्रमणशीलता से $x \in A$; और चूँकि $x \notin D$, इसलिए $\exists \delta\ x \subseteq V_\delta$। अब रखें:

$$\beta = \mathrm{lsub}\{\delta : (\exists x \in b)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma < \delta) x \nsubseteq V_\gamma)\}.$$

पहले की तरह $B \subseteq V_\beta$, जो $B \in D$ दावे के विरुद्ध है। □

प्रमेय 67.13. *नियमितता लागू होती है।*

प्रमाण. A को नियत करें; अब प्रतिज्ञप्ति 67.11 से $A \subseteq \mathrm{trcl}(A)$, जो संक्रमणशील है। अतः सहायक प्रमेय 67.12 से कोई α ऐसा है कि $A \subseteq \mathrm{trcl}(A) \subseteq V_\alpha$। □

ये परिणाम दिखाते हैं कि **ZF**$^-$ सशर्त *आधारिता* $\Rightarrow$ *नियमितता* को सिद्ध करता है। प्रतिज्ञप्ति 67.22 में हम दिखाएँगे कि **ZF**$^-$, *नियमितता* $\Rightarrow$ *आधारिता* को सिद्ध करता है। अतः आधारिता और नियमितता (**ZF**$^-$ के सापेक्ष) *समतुल्य* हैं। इसका अर्थ है कि **ZF**$^-$ को मानकर हम नियमितता से उसकी समतुल्यता देखकर आधारिता का औचित्य दे सकते हैं। और *Stages-are-key* के आधार पर नियमितता का औचित्य तुरंत दे सकते हैं।

67.5 Z और ZF: एक महत्त्वपूर्ण पड़ाव

आधारिता के साथ हम एक और महत्त्वपूर्ण पड़ाव पर पहुँचते हैं। हमने सिद्धांतों **Z**$^-$ और **ZF**$^-$ पर विचार किया, जिन्हें हमने कुछ सिद्धांतों में से कुछ "घटाकर" प्राप्त कहा था। वह घटाई गई चीज़ आधारिता है। अतः:

परिभाषा 67.14. सिद्धांत **Z**, **Z**$^-$ में आधारिता जोड़ता है। अतः उसके अभिगृहीत विस्तारिता, सम्मिलन, युग्म, घात समुच्चय, अनंतता, आधारिता और पृथक्करण योजना के सभी दृष्टांत हैं।

सिद्धांत **ZF**, **ZF**$^-$ में आधारिता जोड़ता है। दूसरे शब्दों में, **ZF**, **Z** में प्रतिस्थापन के सभी दृष्टांत जोड़ता है।

फिर भी आपके मन में एक प्रश्न आया होगा। यदि **ZF**$^-$ में नियमितता आधारिता के समतुल्य है और नियमितता का औचित्य स्पष्ट है, तो इतना चक्कर लगाकर नियमितता के बजाय आधारिता को अपना मूल अभिगृहीत क्यों मानें?

ऐतिहासिक कारणों (किसने क्या और कब सूत्रित किया) को अलग रखें, तो मूल कारण यह है कि आधारिता को V_α की परिभाषा का उपयोग किए बिना प्रस्तुत किया जा सकता है। वह परिभाषा खंड 67.2 के पूरे काम पर निर्भर थी:

उसका औचित्य दिखाने के लिए हमें परिमितेतर पुनरावर्तन सिद्ध करना पड़ा। किंतु परिमितेतर पुनरावर्तन के हमारे प्रमाण ने *प्रतिस्थापन* का उपयोग किया। अतः जहाँ आधारिता और नियमितता $\mathbf{ZF}^-$ के सापेक्ष समतुल्य हैं, वे $\mathbf{Z}^-$ के सापेक्ष समतुल्य नहीं हैं।

वास्तव में बात इस सरल टिप्पणी से कहीं अधिक गंभीर है। यद्यपि यह इस पुस्तक के दायरे से बहुत बाहर जाता है, पता चलता है कि $\mathbf{Z}^-$ और $\mathbf{Z}$ दोनों V_α को परिभाषित करने के लिए अत्यंत दुर्बल हैं। अतः यदि आप केवल $\mathbf{Z}$ में काम कर रहे हैं, तो नियमितता (हमारे सूत्रित रूप में) का *अर्थ* तक नहीं बनता। इसी कारण हमारा आधिकारिक अभिगृहीत नियमितता के बजाय आधारिता है।

अब से हम बिना और टिप्पणी के $\mathbf{ZF}$ में काम करेंगे (जब तक अन्यथा न कहा जाए)।

67.6 रैंक

अब हमने चरणों को V_α के रूप में परिभाषित कर लिया है और जानते हैं कि प्रत्येक समुच्चय किसी चरण का उपसमुच्चय है, इसलिए किसी समुच्चय की *रैंक* परिभाषित कर सकते हैं। सहजतः A की रैंक वह पहला क्षण है जिस पर A बनता है। अधिक सटीक रूप में:

परिभाषा 67.15. प्रत्येक समुच्चय A के लिए $\mathrm{rank}(A)$ ऐसा लघुतम क्रमसूचक α है कि $A \subseteq V_\alpha$।

प्रतिज्ञप्ति 67.16. *किसी भी A के लिए $\mathrm{rank}(A)$ का अस्तित्व है।*

प्रमाण. अभ्यास के लिए छोड़ा गया। □

रैंकों की सुव्यवस्था हमें कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करने देती है:

प्रतिज्ञप्ति 67.17. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए $V_\alpha = \{x : \mathrm{rank}(x) \in \alpha\}$।*

प्रमाण. यदि $\mathrm{rank}(x) \in \alpha$, तो $x \subseteq V_{\mathrm{rank}(x)} \in V_\alpha$; अतः V_α की सामर्थ्यता से $x \in V_\alpha$ (सहायक प्रमेय 67.7 का कई बार उपयोग करके)। इसके विपरीत यदि $x \in V_\alpha$, तो $x \subseteq V_\alpha$, अतः $\mathrm{rank}(x) \leq \alpha$; अब सरल परिमितेतर आगमन दिखाता है कि $x \notin V_\alpha$। □

प्रतिज्ञप्ति 67.18. *यदि $B \in A$, तो $\mathrm{rank}(B) \in \mathrm{rank}(A)$।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 67.17 से $A \subseteq V_{\mathrm{rank}(A)} = \{x : \mathrm{rank}(x) \in \mathrm{rank}(A)\}$। □

इस तथ्य का उपयोग करके हम ऐसा परिणाम स्थापित कर सकते हैं जो आगमन के एक रूप से *सभी समुच्चयों* के विषय में बातें सिद्ध करने देता है:

प्रमेय 67.19 ($\in$-आगमन योजना). *किसी भी सूत्र φ के लिए:*

$$\forall A((\forall x \in A)\varphi(x) \to \varphi(A)) \to \forall A\varphi(A).$$

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक सिद्ध करेंगे। मान लें $\neg\forall A\varphi(A)$। परिमितेतर आगमन (प्रमेय 66.16) से लघुतम संभव रैंक वाली कोई गैर-φ वस्तु है; अर्थात कोई A ऐसा है कि $\neg\varphi(A)$ और $\forall x(\mathrm{rank}(x) \in \mathrm{rank}(A) \to \varphi(x))$। अब यदि $x \in A$, तो प्रतिज्ञप्ति 67.18 से $\mathrm{rank}(x) \in \mathrm{rank}(A)$, जिससे $\varphi(x)$; अर्थात $(\forall x \in A)\varphi(x) \wedge \neg\varphi(A)$।□

इस शक्तिशाली परिणाम को अनौपचारिक रूप से समझने का एक ढंग यह है। कहें कि φ *वंशानुगत* है तभी और केवल तभी जब किसी समुच्चय का प्रत्येक अवयव φ होने पर वह समुच्चय स्वयं φ हो। तब $\in$-आगमन बताता है: यदि φ वंशानुगत है, तो प्रत्येक समुच्चय φ है।

रैंकों की चर्चा को (अभी के लिए) पूरा करने हेतु हम कुछ ऐसे दावे सिद्ध करेंगे जिनका कई बार पूर्वसंकेत दे चुके हैं।

प्रतिज्ञप्ति 67.20. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{lsub}_{x \in A} \operatorname{rank}(x)$.

प्रमाण. $\alpha = \operatorname{lsub}_{x \in A} \operatorname{rank}(x)$ रखें। प्रतिज्ञप्ति 67.18 से $\alpha \leq \operatorname{rank}(A)$। किंतु यदि $x \in A$, तो $\operatorname{rank}(x) \in \alpha$, इसलिए प्रतिज्ञप्ति 67.17 से $x \in V_\alpha$ और फलतः $A \subseteq V_\alpha$, अर्थात $\operatorname{rank}(A) \leq \alpha$। अतः $\operatorname{rank}(A) = \alpha$। □

उपप्रमेय 67.21. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए $\operatorname{rank}(\alpha) = \alpha$।*

प्रमाण. परिमितेतर आगमन के लिए मान लें कि सभी $\beta \in \alpha$ के लिए $\operatorname{rank}(\beta) = \beta$। अब प्रतिज्ञप्ति 67.20 से $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{lsub}_{\beta \in \alpha} \operatorname{rank}(\beta) = \operatorname{lsub}_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha$। □

अंततः खंड 67.4 के अंत में वचन दिए परिणाम का त्वरित प्रमाण यह है कि **ZF**$^-$ सशर्त *नियमितता* $\Rightarrow$ *आधारिता* को सिद्ध करता है। (ध्यान दें कि "रैंक" की धारणा और प्रतिज्ञप्ति 67.18 इस प्रमाण में उपयोग के लिए उपलब्ध हैं, क्योंकि—जैसा इस अनुभाग के आरंभ में कहा गया—उन्हें **ZF**$^-$ + नियमितता का उपयोग करके प्रस्तुत किया जा सकता है।)

प्रतिज्ञप्ति 67.22 (ZF$^-$ + नियमितता में काम करते हुए). *आधारिता लागू होती है।*

प्रमाण. $A \neq \emptyset$ और लघुतम संभव रैंक वाले किसी $B \in A$ को नियत करें। यदि $c \in B$, तो प्रतिज्ञप्ति 67.18 से $\operatorname{rank}(c) \in \operatorname{rank}(B)$, अतः B के चयन से $c \notin A$। □

प्रश्न

प्रश्न 67.1. प्रतिज्ञप्ति 67.16 सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 67.2. प्रतिज्ञप्ति 67.17 में उल्लिखित सरल परिमितेतर आगमन पूर्ण कीजिए।

अध्याय 68

प्रतिस्थापन

68.1 परिचय

प्रतिस्थापन वह अभिगृहीत योजना है जो **ZF** और **Z** में अंतर करती है। अध्याय 66 से 67 में हमने पूरे समय उसका उपयोग किया। इस अध्याय में हम अंततः इस प्रश्न पर विचार करेंगे: क्या प्रतिस्थापन उचित है?

प्रश्न को तीक्ष्ण बनाने के लिए यह देखना उपयोगी है कि प्रतिस्थापन वास्तव में बहुत *प्रबल* है। इस अध्याय में (और फिर खंड 71.5 में) हमें आभास होगा कि वह कितना प्रबल है। इससे संकेत मिलेगा कि उसका औचित्य सचमुच आवश्यक है।

हम दो प्रकार के औचित्य पर चर्चा करेंगे। मोटे तौर पर: *बाह्य* औचित्य किसी अभिगृहीत को उसके फलों द्वारा उचित ठहराने का प्रयास है; *आंतरिक* औचित्य यह सुझाकर उसे उचित ठहराने का प्रयास है कि संबंधित गणितीय संकल्पनाएँ उसका समर्थन करती हैं। इस अध्याय में इसका अर्थ और स्पष्ट होगा, किंतु यह केवल हिमशैल का सिरा है। अधिक के लिए विशेषतः Maddy (1988a और 1988b) देखें।

68.2 प्रतिस्थापन की शक्ति

प्रतिस्थापन की शक्ति के विषय में एक सरल प्रेक्षण से आरंभ करें: जब तक हम **Z** से आगे नहीं जाते, $\omega + \omega$ से बड़े या उसके बराबर किसी वॉन नोयमान क्रमसूचक का अस्तित्व सिद्ध नहीं कर सकते।

कारण की रूपरेखा यह है। **ZF** में काम करते हुए समुच्चय $V_{\omega+\omega}$ पर विचार करें। यह समुच्चय **Z** के किसी *प्रतिरूप* के प्रांत का कार्य करता है। इसे देखने के लिए हम सूत्र के *सापेक्षीकरण* का कुछ संकेतन प्रस्तुत करते हैं:

परिभाषा 68.1. किसी भी समुच्चय M और किसी भी सूत्र φ के लिए φ^M को वह सूत्र मानें जो φ के सभी परिमाणकों को M तक सीमित करने से मिलता है। अर्थात "$\exists x$" को "$(\exists x \in M)$" से और "$\forall x$" को "$(\forall x \in M)$" से बदलें।

दिखाया जा सकता है कि **Z** के प्रत्येक अभिगृहीत φ के लिए **ZF** $\vdash \varphi^{V_{\omega+\omega}}$। किंतु उपप्रमेय 67.21 से $\omega + \omega$, $V_{\omega+\omega}$ में *नहीं* है। अतः $\omega + \omega$ का अनस्तित्व **Z** के साथ संगत है।

इसीलिए हमने खंड 66.7 में कहा था कि प्रतिस्थापन के बिना प्रमेय 66.26 सिद्ध नहीं किया जा सकता। क्योंकि **Z** में ऐसी स्पष्ट सुव्यवस्था परिभाषित करना सरल है जिसका सहज रूप से क्रम-प्रकार $\omega + \omega$ *होना चाहिए*। वास्तव में खंड 66.2 में हमने प्राकृतिक संख्याओं पर इस क्रम का अनौपचारिक उदाहरण दिया था:

$n \lessdot m$ तभी और केवल तभी जब या तो $n < m$ और $m - n$ सम है,
अथवा n सम और m विषम है।

किंतु यदि $\omega + \omega$ का अस्तित्व नहीं, तो यह सुव्यवस्था किसी क्रमसूचक के समाकृतिक नहीं। अतः **Z**, प्रमेय 66.26 को सिद्ध *नहीं* करता।

बात को उलटें: प्रतिस्थापन हमें $\omega + \omega$ का अस्तित्व सिद्ध करने देता है और इसलिए $V_{\omega+\omega}$ का अस्तित्व भी सिद्ध करने देना चाहिए। और इतना ही नहीं। हम जो *कोई भी* सुव्यवस्था परिभाषित कर सकें, उसके लिए प्रमेय 66.26 बताता है कि कोई α उस सुव्यवस्था के समाकृतिक है और इसलिए V_α का अस्तित्व है। इस सीधे अर्थ में प्रतिस्थापन गारंटी देता है कि समुच्चयों का पदानुक्रम *बहुत ऊँचा* होना चाहिए।

अगले कुछ अनुभागों में, और फिर खंड 71.5 में, हमें अधिक स्पष्ट आभास होगा कि प्रतिस्थापन पदानुक्रम को ठीक *कितना* ऊँचा होने को बाध्य करता है। अभी सरल बात यह है कि प्रतिस्थापन को सचमुच औचित्य की *आवश्यकता है*!

68.3 प्रतिस्थापन के विषय में बाह्य विचार

हम प्रतिस्थापन का औचित्य देने के एक *बाह्य* प्रयास पर विचार करने से आरंभ करते हैं। बूलोस निम्न सुझाव देते हैं।

> [...] प्रतिस्थापन के अभिगृहीत अपनाने का कारण काफ़ी सरल है: उनके अनेक वांछनीय परिणाम हैं और (प्रकटतः) कोई अवांछनीय परिणाम नहीं। पुनरावर्ती अवधारणा से संबंधित प्रमेयों के अतिरिक्त परिणामों में अनंत संख्याओं का संतोषजनक, भले ही आदर्श न हो, सिद्धांत और सुस्थापित संबंधों पर आगमनात्मक परिभाषाओं का औचित्य देने वाला अत्यंत वांछनीय परिणाम सम्मिलित हैं। (Boolos, 1971, 229)

बूलोस के विचार का सार है कि हमें प्रतिस्थापन का औचित्य उसके फलों से देना चाहिए। उनके बताए विशिष्ट फल वे बातें हैं जिनकी चर्चा हमने पिछले कुछ अध्यायों में की है। प्रतिस्थापन ने हमें सिद्ध करने दिया कि वॉन नोयमान क्रमसूचक सुव्यवस्था-प्रकार के विचार के उत्कृष्ट प्रतिनिधि थे (यही हमारा "अनंत संख्याओं का संतोषजनक, भले ही आदर्श न हो, सिद्धांत" है)। प्रतिस्थापन ने हमें V_α परिभाषित करने, रैंक की धारणा स्थापित करने और $\in$-आगमन सिद्ध करने दिया (यही "पुनरावर्ती अवधारणा के विषय में हमारे प्रमेय" हैं)। अंततः प्रतिस्थापन हमें परिमितेतर पुनरावर्तन प्रमेय सिद्ध करने देता है (यही "सुस्थापित संबंधों पर आगमनात्मक परिभाषाएँ" हैं)।

ये वास्तव में वांछनीय परिणाम हैं। किंतु क्या ये वांछनीय परिणाम प्रतिस्थापन का *औचित्य* देने के लिए पर्याप्त हैं? *नहीं।* कम-से-कम सीधे नहीं।

एक सरल समस्या यह है। हमने प्रतिस्थापन के कुछ वांछनीय परिणाम बताए हैं, किंतु उनमें से कई अन्य साधनों से प्राप्त किए जा सकते थे। यह बात जितनी प्रसिद्ध होनी चाहिए उतनी नहीं, इसलिए स्थिति समझाने के लिए रुकना उचित है।

समुच्चयों का एक सरल सिद्धांत, स्तर सिद्धांत या संक्षेप में **LT**, है।[1] **LT** के अभिगृहीत केवल विस्तारिता, पृथक्करण और यह दावा हैं कि प्रत्येक समुच्चय किसी *स्तर* का उपसमुच्चय है, जहाँ "स्तर" को चतुराई से इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि स्तर हमारे परिचित V_α जैसा व्यवहार करें। अतः **ZF**, **LT** को सिद्ध करता है; किंतु **LT**, **ZF** से *बहुत* दुर्बल है। वास्तव में **LT** युग्म, घात समुच्चय, अनंतता या प्रतिस्थापन नहीं देता। **LT** में अनंतता और घात समुच्चय जोड़ने से प्राप्त सिद्धांत को **Zr** मानें; इससे युग्म भी मिलता है, अतः **Zr** कम-से-कम **Z** जितना प्रबल है। किंतु वास्तव में **Zr**, **Z** से कड़ाई से अधिक प्रबल है, क्योंकि वह यह दावा जोड़ता है कि प्रत्येक समुच्चय की कोई रैंक है (इसीलिए इसे **Zr** कहने का सुझाव)। वास्तव में **Zr** देता है: क्रमसूचकों का पूर्णतः संतोषजनक सिद्धांत; पदानुक्रम को सुव्यवस्थित चरणों में स्तरित करने वाले परिणाम; $\in$-आगमन का प्रमाण; और परिमितेतर पुनरावर्तन का एक *रूप*।

संक्षेप में: यद्यपि बूलोस यह नहीं जानते थे, उनके बताए सभी वांछनीय परिणाम प्रतिस्थापन के *बिना* प्राप्त किए जा सकते थे; उन्हें बस **Z** के बजाय **Zr** का उपयोग करना था।

(यह सब देखते हुए हमने आपको **LT** और **Zr** के बजाय **ZF** पढ़ाने का पारंपरिक मार्ग क्यों अपनाया? दो कारण हैं। पहला: विशुद्ध ऐतिहासिक कारणों से **LT** से आरंभ करना काफ़ी अमानक है; हम आपको समुच्चय सिद्धांत की अधिक मानक चर्चाएँ पढ़ सकने में समर्थ बनाना चाहते थे। दूसरा: जब आप **LT** और **Zr** को समझने के लिए तैयार हों, तब बस Potter 2004 और Button 2021 पढ़ सकते हैं।)

निश्चय ही चूँकि **Zr**, **ZF** से कड़ाई से दुर्बल है, कुछ परिणाम ऐसे हैं जिन्हें **ZF** सिद्ध करता है किंतु **Zr** अनिर्णीत छोड़ता है। अतः इनमें से किसी परिणाम की ओर संकेत करके बाह्य आधार पर प्रतिस्थापन का औचित्य देने का प्रयास

[1] **LT** के पहले रूप Montague (1965) और Scott (1974) ने दिए; Potter (2004) ने उसे सरल बनाकर पुस्तक-लंबा विवेचन दिया; और Button (2021) ने हाल में **LT** को और सरल बनाया है।

किया जा सकता है। किंतु **Zr** का उपयोग जान लेने पर ऐसी बातों के बहुत उदाहरण खोजना कठिन है जो (a) प्रतिस्थापन द्वारा, किंतु अन्यथा नहीं, निर्णीत होती हैं और (b) सहजतः सत्य हैं। (अधिक के लिए Potter 2004, §13.2 देखें।)

निष्कर्ष यह है। प्रतिस्थापन का विश्वसनीय बाह्य औचित्य देने के लिए ऐसा परिणाम खोजना होगा जो प्रतिस्थापन के बिना प्राप्त *नहीं किया जा सकता*। और यह सरल काम नहीं।

प्रतिस्थापन का विशुद्ध बाह्य औचित्य देने के प्रत्येक प्रयास में उत्पन्न एक और समस्या पर विचार करें। (यह समस्या शायद पहली से अधिक मूलभूत है।) बूलोस केवल यह नहीं बताते कि प्रतिस्थापन के अनेक वांछनीय परिणाम हैं। वे यह भी कहते हैं कि उसके "(प्रकटतः) कोई अवांछनीय" परिणाम नहीं। किंतु कोष्ठक में दिया यह संरक्षण, "प्रकटतः", निश्चय ही अत्यंत निर्णायक है।

याद करें कि हम यहाँ कैसे पहुँचे: सहज समुच्चय-निर्माण असंगति में पड़ा और हमने इस असंगति का उत्तर समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा अपनाकर दिया। इस अवधारणा के साथ ऐसी कथा आती है जो, हमें आशा है, उसकी संगति का आश्वासन देती है। किंतु यदि उस कथा के भीतर से प्रतिस्थापन का औचित्य न दिया जा सके, तो **ZF** को संगत मानने का (अभी तक) कोई कारण नहीं। अथवा अधिक ठीक कहें तो शायद केवल संयोगवश अब तक किसी ने कोई विरोधाभास *नहीं खोजा*, इस तथ्य के अतिरिक्त **ZF** को संगत मानने का कोई कारण नहीं। ठीक इसी अर्थ में बूलोस की टिप्पणी का सार यह प्रतीत होता है: "(प्रकटतः) **ZF** संगत है"। हमें संगति का इससे अधिक आश्वासन माँगना चाहिए।

यह समस्या प्रतिस्थापन का औचित्य देने के प्रत्येक *विशुद्ध* बाह्य प्रयास को प्रभावित करेगी, अर्थात ऐसे हर औचित्य को जो केवल **ZF** के (ज्ञात) परिणामों के पदों में व्यक्त हो। इसलिए हम प्रतिस्थापन का *आंतरिक* औचित्य खोजना चाहेंगे, अर्थात ऐसा औचित्य जो सुझाए कि समुच्चयों के विषय में हमारी कथा किसी तरह हमें प्रतिस्थापन के प्रति "पहले से" प्रतिबद्ध करती है।

68.4 आकार-परिसीमन

प्रतिस्थापन का "आंतरिक" औचित्य देने का शायद सबसे सामान्य प्रयास निम्न धारणा से आता है:

> *Limitation-of-size*. कोई भी वस्तुएँ समुच्चय बनाती हैं, बशर्ते वे बहुत अधिक न हों।

यह सिद्धांत तुरंत प्रतिस्थापन का औचित्य सिद्ध करेगा। आखिर प्रतिस्थापन से बना कोई समुच्चय उस समुच्चय से बड़ा नहीं हो सकता जिससे वह बना है। सटीक रूप में: मान लें कि प्रतिस्थापन का उपयोग करके आप समुच्चय $\tau[A] = \{\tau(x) : x \in A\}$ बनाते हैं; तब $\tau[A] \preceq A$; अतः यदि A के अवयव समुच्चय बनाने के लिए बहुत अधिक नहीं थे, तो उनके प्रतिबिंब भी $\tau[A]$ बनाने के लिए बहुत अधिक नहीं हैं।

प्रतिस्थापन का औचित्य देने के लिए *Limitation-of-size* का आह्वान करने में स्पष्ट कठिनाई यह है कि हमने अब तक *Limitation-of-size* जैसा कोई सिद्धांत निर्धारित *नहीं* किया। इसके अतिरिक्त अध्याय 64 से 65 में समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा की कथा कहते समय किसी बात ने *Limitation-of-size* की दिशा में *संकेत* तक नहीं किया। वास्तव में इसीलिए बूलोस ने एक स्थान पर लिखा: "शायद यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि समुच्चय सिद्धांत के 'पीछे' कम-से-कम दो विचार हैं" (1989, p. 19)। एक ओर समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा से जुड़े विचार **Z** का औचित्य सिद्ध करने के लिए हैं। दूसरी ओर *Limitation-of-size* प्रतिस्थापन का औचित्य सिद्ध करने के लिए है।

किंतु समस्या केवल यह नहीं कि अब तक हम *Limitation-of-size* के विषय में *मौन* रहे हैं। समस्या यह है कि *Limitation-of-size* (अभी सूत्रित रूप में) समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती धारणा के साथ बहुत असहज बैठता है। आखिर उसमें समुच्चयों के *चरणों* में बनने के विचार का कोई उल्लेख नहीं।

इन "दो विचारों" (अर्थात समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा और *Limitation-of-size*) के इतिहास को देखते हुए यह बहुत आश्चर्यजनक नहीं। अंततः ये "दो विचार" समुच्चय-सैद्धांतिक विरोधाभास रोकने की दो काफ़ी भिन्न परियोजनाएँ हैं। समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती धारणा मोटे तौर पर यह कहकर रसेल का विरोधाभास रोकती है: *हमें कभी रसेल समुच्चय के अस्तित्व की अपेक्षा नहीं करनी चाहिए थी, क्योंकि वह किसी चरण पर "बनता" नहीं*। इसके विपरीत *Limitation-of-size* मोटे तौर पर यह कहकर रसेल समुच्चय को बाहर करता है: *हमें कभी रसेल समुच्चय के अस्तित्व की अपेक्षा नहीं करनी चाहिए थी, क्योंकि वह अस्तित्व रखने के लिए बहुत बड़ा होता*।

इस रूप में बात रखें तो साफ़ कहें: विरोधाभासों के उत्तर के रूप में *Limitation-of-size* को *बहुत* अधिक औचित्य चाहिए। उदाहरण के लिए रसेल के विरोधाभास का यह रूप देखें: *ऐसा कोई पग कुत्ता नहीं जो ठीक उन पग*

कुत्तों को सूँघे जो स्वयं को नहीं सूँघते (खंड 64.2 देखें)। यदि आप पूछें "ऐसा कोई पग क्यों नहीं है?", तो यह कहना अच्छा उत्तर नहीं कि ऐसे पग को बहुत अधिक पगों को सूँघना पड़ता। फिर रसेल समुच्चय के अनस्तित्व की यह सहज व्याख्या अच्छी क्यों होगी कि वह अस्तित्व रखने के लिए "बहुत बड़ा" होता?

संक्षेप में यदि *Limitation-of-size* की "सहज" प्रेरणा आपको कुछ रहस्यमय लगे, तो यह समझने योग्य है।

68.5 प्रतिस्थापन और "निरपेक्ष अनंतता"

अब हम *Limitation-of-size* को पीछे छोड़कर प्रतिस्थापन का औचित्य देने वाले (आंतरिक) प्रयासों के एक भिन्न परिवार का अन्वेषण करेंगे, जो समुच्चयों के चरणों में बनने के विचार को गंभीरता से लेते हैं।

पुनरावर्ती प्रक्रिया की पहली रूपरेखा देते समय हमने कुछ सिद्धांत दिए जो हर चरण पर होने वाली बात समझाते थे। ये *Stages-are-key*, *Stages-are-ordered*और *Stages-accumulate*थे। बाद में हमने कुछ सिद्धांत जोड़े जो चरणों की संख्या के विषय में बताते थे: *Stages-keep-going* ने बताया कि समुच्चय-निर्माण की प्रक्रिया कभी समाप्त नहीं होती, और *Stages-hit-infinity* ने बताया कि प्रक्रिया किसी अनंतवें चरण से होकर जाती है।

यह सुझाव उचित है कि ये अंतिम दो सिद्धांत किसी अधिक व्यापक सिद्धांत से निष्पन्न होते हैं, जैसे:

> *Stages-are-inexhaustible.* निरपेक्ष रूप से अनंततः अनेक चरण हैं; पदानुक्रम उतना ऊँचा है जितना संभवतः हो सकता है।

स्पष्टतः यह अनौपचारिक सिद्धांत है। किंतु यदि यह समुच्चय की संचयी-पुनरावर्ती अवधारणा से तुरंत *निष्पन्न* न भी हो, तो निश्चित ही उसके *अनुकूल* लगता है। कम-से-कम *Limitation-of-size* के विपरीत यह इस विचार को बनाए रखता है कि समुच्चय चरण-दर-चरण बनते हैं।

अब आशा है कि *Stages-are-inexhaustible* का उपयोग करके प्रतिस्थापन का औचित्य दिया जाए। देखें कि यह कैसे हो सकता है।

खंड 66.2 में हमने देखा कि ऐसी सुव्यवस्था बनाना सरल है जो (सारतः) $\omega+\omega$ के समाकृतिक होनी चाहिए। दूसरे शब्दों में हम आसानी से ऐसी चरण-दर-चरण पुनरावर्ती प्रक्रिया की कल्पना कर सकते हैं जिसका क्रम-प्रकार (सारतः) $\omega+\omega$ है। अतः यदि हमने *Stages-are-inexhaustible* स्वीकार किया है, तो निश्चित ही स्वीकार करना चाहिए कि पदानुक्रम का कम-से-कम $\omega+\omega$वाँ चरण, अर्थात $V_{\omega+\omega}$, है; क्योंकि पदानुक्रम निश्चित ही इतनी दूर तक चल *सकता* है।

यह विचार इस प्रकार सामान्यीकृत होता है: किसी भी सुव्यवस्था के लिए पुनरावर्ती पदानुक्रम बनाने की प्रक्रिया को कम-से-कम उस सुव्यवस्था जितनी दूर चलना चाहिए। और प्रमेय 66.26 को *अभिगृहीत* मानकर इसकी गारंटी दी जा सकती है। यह बताएगा कि प्रत्येक सुव्यवस्था किसी वॉन नोयमान क्रमसूचक के समाकृतिक है। चूँकि प्रत्येक वॉन नोयमान क्रमसूचक अपनी रैंक के बराबर होगा, प्रमेय 66.26 हमें बताएगा कि जब भी हम अपने समुच्चय सिद्धांत में कोई सुव्यवस्था वर्णित कर सकें, समुच्चय-निर्माण की पुनरावर्ती प्रक्रिया को उस सुव्यवस्था से आगे निकलना होगा।

यह विचार निश्चित ही *Stages-are-inexhaustible* का उपप्रमेय जैसा लगता है। दुर्भाग्य से यदि हमारा उद्देश्य इस विचार से प्रतिस्थापन निकालना है, तो एक सरल तकनीकी बाधा सामने आती है: प्रतिस्थापन प्रमेय 66.26 से कड़ाई से अधिक प्रबल है। (यह प्रेक्षण Potter (2004, §13.2) का है; हम इसे खंड 68.8 में सिद्ध करेंगे।)

निष्कर्ष है कि यदि हम *Stages-are-inexhaustible* को इस प्रकार समझना चाहते हैं कि उससे प्रतिस्थापन मिले, तो वह *केवल* यह नहीं कह सकता कि पदानुक्रम किसी भी सुव्यवस्था से आगे निकलता है। उसे इससे अधिक प्रबल दावा करना होगा। इस उद्देश्य से Shoenfield (1977) ने विचार का यह अत्यंत स्वाभाविक प्रबलीकरण सुझाया: पदानुक्रम किसी भी समुच्चय के साथ *सह-अंतिम* नहीं है।[2] कुछ अधिक विस्तार से: यदि τ ऐसा प्रतिचित्रण है जो समुच्चयों को पदानुक्रम के चरणों पर भेजता है, तो τ के अधीन किसी भी समुच्चय A का प्रतिबिंब पदानुक्रम को समाप्त नहीं करता। दूसरे शब्दों में (योजनाबद्ध रूप में):

> *Stages-are-super-cofinal.* यदि A समुच्चय है और प्रत्येक $x \in A$ के लिए $\tau(x)$ कोई चरण है, तो ऐसा चरण है जो प्रत्येक $x \in A$ के लिए $\tau(x)$ के बाद आता है।

[2]प्रतीत होता है कि ग्योडेल ने समान विचार सुझाया था; Potter (2004, p. 223) देखें। ग्योडेल और Shoenfield की चर्चा के लिए Incurvati (2020, 90–5) देखें।

स्पष्ट है कि **ZF**, *Stages-are-super-cofinal* के उपयुक्त औपचारिक रूप को सिद्ध करता है। इसके विपरीत हम अनौपचारिक तर्क दे सकते हैं कि *Stages-are-super-cofinal* प्रतिस्थापन का औचित्य देता है।[3] मान लें $(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x, y)$। तब प्रत्येक $x \in A$ के लिए $\sigma(x)$ को ऐसा y मानें कि $\varphi(x, y)$, और $\tau(x)$ को वह चरण मानें जिस पर $\sigma(x)$ पहली बार बना। *Stages-are-super-cofinal* से ऐसा चरण V है कि $(\forall x \in A)\tau(x) \in V$। अब चूँकि प्रत्येक $\tau(x) \in V$ और $\sigma(x) \subseteq \tau(x)$, इसलिए पृथक्करण से $\{y \in V : (\exists x \in A)\sigma(x) = y\} = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$ प्राप्त कर सकते हैं।

अतः *Stages-are-super-cofinal* प्रतिस्थापन का औचित्य सिद्ध करता है। और कम-से-कम यह विश्वसनीय है कि *Stages-are-inexhaustible*, *Stages-are-super-cofinal* का औचित्य सिद्ध करता है। मान लें *Stages-are-super-cofinal* विफल होता है। तब पदानुक्रम किसी समुच्चय A के साथ सह-अंतिम है; अर्थात हमारे पास ऐसा प्रतिचित्रण τ है कि किसी भी चरण S के लिए कोई $x \in A$ ऐसा है कि $S \in \tau(x)$। उस स्थिति में पदानुक्रम की कथित "निरपेक्ष अनंतता" को पकड़ने का साधन हमारे पास है: A पर लागू τ का परास उसे *समाप्त* कर देता है। और यह इस विचार से समझौता करता है कि पदानुक्रम "निरपेक्ष रूप से अनंत" है। प्रतिधनात्मक रूप में: *Stages-are-inexhaustible* से *Stages-are-super-cofinal* निष्पन्न होता है, जो बदले में प्रतिस्थापन का औचित्य देता है।

यह प्रतिस्थापन का आंतरिक औचित्य देने का सचमुच आशाजनक प्रयास है। किंतु अंततः यह सफल होता है या नहीं, इसका निर्णय हमें आप पर छोड़ना होगा।

68.6 प्रतिस्थापन और परावर्तन

Stages-are-inexhaustible द्वारा प्रतिस्थापन का औचित्य देने का हमारा अंतिम प्रयास एक गहरे और सुंदर परिणाम से आरंभ होता है:[4]

प्रमेय 68.2 (परावर्तन योजना). *किसी भी सूत्र φ के लिए:*

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\forall x_1 \ldots, x_n \in V_\beta)(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(x_1, \ldots, x_n))$$

परिभाषा 68.1 की तरह φ^{V_β}, φ के प्रत्येक परिमाणक को समुच्चय V_β तक सीमित करने का परिणाम है। अतः सहजतः परावर्तन यह कहता है: यदि φ पूरे पदानुक्रम में सत्य है, तो φ पदानुक्रम के मनमाने रूप से अनेक *आरंभिक खंडों* में सत्य है।

Montague (1961) और Lévy (1960) ने दिखाया कि प्रतिस्थापन और परावर्तन (के उपयुक्त सूत्रीकरण) **Z** के सापेक्ष समतुल्य हैं, जिससे दोनों में से किसी को जोड़ने पर **ZF** मिलता है। (ये परिणाम हम खंड 68.7 में सिद्ध करते हैं।) इस समतुल्यता को देखते हुए कोई *Stages-are-inexhaustible* द्वारा परावर्तन और प्रतिस्थापन का औचित्य इस प्रकार देने की आशा कर सकता है: *Stages-are-inexhaustible* को मानकर पदानुक्रम अत्यंत ऊँचा होना चाहिए; वास्तव में इतना ऊँचा कि उसके विषय में कही जा सकने वाली कोई बात उसकी ऊँचाई को परिबद्ध करने के लिए पर्याप्त न हो। इसे हम इस विचार के रूप में समझ सकते हैं कि यदि कोई वाक्य φ पूरे पदानुक्रम में सत्य है, तो वह पदानुक्रम के मनमाने रूप से अनेक आरंभिक खंडों में सत्य है। और यही परावर्तन है।

फिर यह प्रतिस्थापन का आंतरिक औचित्य देने का सचमुच आशाजनक प्रयास लगता है। किंतु यहाँ इसके विषय में कहने के लिए बहुत अधिक है। अब आपको स्वयं निर्णय करना होगा कि यह सफल है या नहीं।[5]

---

[3] *Stages-are-super-cofinal* के किसी औपचारिक रूप से प्रतिस्थापन सिद्ध करना अधिक कठिन होगा, क्योंकि अकेला **Z** चरणों को परिभाषित करने के लिए पर्याप्त प्रबल नहीं; अतः यह स्पष्ट नहीं कि *Stages-are-super-cofinal* को औपचारिक कैसे बनाया जाए। एक विकल्प **LT** के किसी विस्तार में काम करना है, जैसा खंड 68.3 में चर्चा की गई।

[4] स्मरण रहे: सभी सूत्रों में प्राचल हो सकते हैं (जब तक स्पष्टतः अन्यथा न कहा गया हो)।

[5] फिर भी आप Incurvati (2020, 95–100) पढ़कर आगे बढ़ना चाह सकते हैं।

68.7 परिशिष्ट: प्रतिस्थापन से संबंधित परिणाम

इस अनुभाग में हम **ZF** के भीतर परावर्तन सिद्ध करेंगे। हम वह अर्थ भी सिद्ध करेंगे जिसमें परावर्तन प्रतिस्थापन के समतुल्य है। और इस सबका परावर्तन/ प्रतिस्थापन की शक्ति से संबंधित एक रोचक परिणाम सिद्ध करेंगे। *चेतावनी: यह इस पाठ्यपुस्तक का निस्संदेह सबसे उन्नत गणितीय अंश है।*

हम एक उपप्रमेय से आरंभ करेंगे जो संक्षेप के लिए चरों या वस्तुओं के अनुक्रमों से निपटने हेतु *ऊपरी रेखा* की संकेत-युक्ति अपनाता है। अतः "$\overline{a}_k$", "a_{k_1}, ..., a_{k_n}" का संक्षेप है, जहाँ n प्रसंग से निर्धारित होता है।

सहायक प्रमेय 68.3. *प्रत्येक $1 \leq i \leq k$ के लिए $\varphi_i(\overline{v}_i, x)$ को सूत्र मानें। तब प्रत्येक α के लिए कोई $\beta > \alpha$ ऐसा है कि किन्हीं $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k \in V_\beta$ और प्रत्येक $1 \leq i \leq k$ के लिए:*

$$\exists x \varphi_i(\overline{a}_i, x) \to (\exists x \in V_\beta)\varphi_i(\overline{a}_i, x)$$

प्रमाण. हम पद μ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं: $\mu(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$ वह लघुतम चरण V है जो प्रत्येक $1 \leq i \leq k$ के लिए निम्न सभी सशर्तों को संतुष्ट करता है:

$$\exists x \varphi_i(\overline{a}_i, x) \to (\exists x \in V)\varphi_i(\overline{a}_i, x))$$

यह पुष्टि करना सरल है कि सभी $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ के लिए $\mu(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$ का अस्तित्व है। अब प्रतिस्थापन और अपने पुनरावर्तन प्रमेय का उपयोग करके परिभाषित करें:

$$\begin{aligned} S_0 &= V_{\alpha+1} \\ S_{n+1} &= S_n \cup \bigcup\{\mu(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k) : \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k \in S_n\} \\ S &= \bigcup_{m<\omega} S_n. \end{aligned}$$

प्रत्येक S_n, और इसलिए स्वयं S, V_α के बाद का चरण है। अब $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_k \in S$ को नियत करें; अतः कोई $n < \omega$ ऐसा है कि $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_k \in S_n$। कोई $1 \leq i \leq k$ नियत करें और मान लें $\exists x \varphi_i(\overline{a}_i, x)$। तब रचना से $(\exists x \in \mu(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k))\varphi_i(\overline{a}_i, x)$, अतः $(\exists x \in S_{n+1})\varphi_i(\overline{a}_i, x)$ और फलतः $(\exists x \in S)\varphi_i(\overline{a}_i, x)$। इसलिए S हमारा V_β है। □

अब हम प्रमेय 68.2 को काफ़ी सीधे सिद्ध कर सकते हैं:

प्रमाण. α को नियत करें। सामान्यता खोए बिना हम मान सकते हैं कि φ के एकमात्र संयोजक $\exists$, $\neg$ और $\wedge$ हैं (क्योंकि ये अभिव्यक्ति के लिए पर्याप्त हैं)। $\psi_1, \ldots, \psi_k$ को φ के सभी उपसूत्रों की जटिलता के क्रम में गणना मानें, ताकि $\psi_k = \varphi$। सहायक प्रमेय 68.3 से कोई $\beta > \alpha$ ऐसा है कि किसी भी $\overline{a}_i \in V_\beta$ और प्रत्येक $1 \leq i \leq k$ के लिए:

$$\exists x \psi_i(\overline{a}_i, x) \to (\exists x \in V_\beta)\psi_i(\overline{a}_i, x) \qquad (*)$$

ψ_i की जटिलता पर आगमन से हम दिखाएँगे कि किसी भी $\overline{a}_i \in V_\beta$ के लिए $\psi_i(\overline{a}_i) \leftrightarrow \psi_i^{V_\beta}(\overline{a}_i)$। यदि ψ_i परमाण्विक है, तो यह तुच्छ है। द्विसशर्त यह भी स्थापित करता है कि जब ψ_i इस गुण को संतुष्ट करने वाले उपसूत्रों का निषेध या संयोजन हो, तो स्वयं ψ_i यह गुण संतुष्ट करता है। अतः एकमात्र रोचक मामला परिमाणीकरण का है। $\overline{a}_i \in V_\beta$ को नियत करें; तब:

$(\exists x \psi_i(\overline{a}_i, x))^{V_\beta}$	तभी और केवल तभी जब $(\exists x \in V_\beta)\psi_i^{V_\beta}(\overline{a}_i, x)$	परिभाषा से
	तभी और केवल तभी जब $(\exists x \in V_\beta)\psi_i(\overline{a}_i, x)$	परिकल्पना से
	तभी और केवल तभी जब $\exists x \psi_i(\overline{a}_i, x)$	(*) से

इससे आगमन पूर्ण होता है; $\psi_k = \varphi$ होने से परिणाम निष्पन्न होता है। □

हमने ZF में परावर्तन सिद्ध किया। हमारा प्रमाण मूलतः Montague (1961) का अनुसरण करता है। अब हम Z में सिद्ध करना चाहते हैं कि परावर्तन से प्रतिस्थापन निष्पन्न होता है। प्रमाण एक सरलीकरण के साथ Lévy (1960) का अनुसरण करता है।

चूँकि हम Z में काम कर रहे हैं, परावर्तन को ठीक ऊपर दिए रूप में प्रस्तुत नहीं कर सकते। आखिर हमने परावर्तन को "V_α" संकेतन से सूत्रित किया और उसे Z में परिभाषित नहीं किया जा सकता (खंड 67.5 देखें)। अतः इसके बजाय हम प्रतिस्थापन का प्रकटतः अधिक दुर्बल सूत्रीकरण इस प्रकार देंगे:

दुर्बल परावर्तन। किसी भी सूत्र φ के लिए ऐसा संक्रमणशील समुच्चय S है कि 0, 1 और φ के सभी प्राचल S के अवयव हैं, और $(\forall \overline{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S)$।

इसका उपयोग करके प्रतिस्थापन सिद्ध करने के लिए पहले हम Lévy (1960, Theorem 2 के प्रथम भाग) का अनुसरण करके दिखाएँगे कि दो सूत्रों को एक साथ "परावर्तित" किया जा सकता है:

सहायक प्रमेय 68.4 (Z + दुर्बल परावर्तन में). *किन्हीं सूत्रों ψ, χ के लिए ऐसा संक्रमणशील समुच्चय S है कि 0 और 1 (और सूत्रों के सभी प्राचल) S के अवयव हैं, और $(\forall \overline{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$।*

प्रमाण. φ को सूत्र $(z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)$ मानें।

यहाँ हम संक्षेप का उपयोग करते हैं; "$z = 0$" को "$\forall t\, t \notin z$" और "$z = 1$" को "$\forall s(s \in z \leftrightarrow \forall t\, t \notin s)$" लिखकर विस्तृत करना चाहिए। किंतु चूँकि $0, 1 \in S$ और S संक्रमणशील है, ये सूत्र S के लिए *निरपेक्ष* हैं; अर्थात उनके परिमाणकों को S तक सीमित करें या न करें, वे उसी वस्तु पर लागू होंगे।[6]

दुर्बल परावर्तन से हमारे पास कोई उपयुक्त S ऐसा है कि:

$$\begin{aligned}
&(\forall z, \overline{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S) \\
\text{अर्थात } &(\forall z, \overline{x} \in S)(((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\
&\qquad ((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi))^S) \\
\text{अर्थात } &(\forall z, \overline{x} \in S)(((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\
&\qquad ((z = 0 \wedge \psi^S) \vee (z = 1 \wedge \chi^S))) \\
\text{अर्थात } &(\forall \overline{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))
\end{aligned}$$

दूसरे दावे से तीसरा निष्पन्न होता है, क्योंकि "$z = 0$" और "$z = 1$", S के लिए निरपेक्ष हैं; चौथा दावा $0 \neq 1$ से निष्पन्न होता है। □

अब हम Lévy (1960, Theorem 6) का अनुसरण और सरलीकरण करके प्रतिस्थापन प्राप्त कर सकते हैं:

प्रमेय 68.5 (Z + दुर्बल परावर्तन में). *किसी भी सूत्र $\varphi(v, w)$ और किसी भी A के लिए यदि $(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x, y)$, तो $\{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y\}$ का अस्तित्व है।*

प्रमाण. ऐसे A को नियत करें कि $(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x, y)$, और सूत्र परिभाषित करें:

$$\begin{aligned}
&\psi \text{ है } (\varphi(x, z) \wedge A = A) \\
&\chi \text{ है } \exists y\, \varphi(x, y)
\end{aligned}$$

सहायक प्रमेय 68.4 का उपयोग करते हुए, चूँकि A, ψ का प्राचल है, ऐसा संक्रमणशील S है कि $0, 1, A \in S$ (अन्य सभी प्राचलों सहित), और:

$$(\forall x, z \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$$

[6] अधिक औपचारिक रूप में, ξ को इन सूत्रों में से कोई एक मानकर $\xi(z) \leftrightarrow \xi^S(z)$।

अतः विशेषतः:

$$(\forall x, z \in S)(\varphi(x,z) \leftrightarrow \varphi^S(x,z))$$
$$(\forall x \in S)(\exists y \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi^S(x,y))$$

इन्हें मिलाकर और यह देखकर कि $A \in S$ तथा S की संक्रमणशीलता से $A \subseteq S$:

$$(\forall x \in A)(\exists y \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi(x,y))$$

अब $(\forall x \in A)(\exists! y \in S)\varphi(x,y)$, क्योंकि $(\forall x \in A)\exists! y\, \varphi(x,y)$। अब पृथक्करण से $\{y \in S : (\exists x \in A)\varphi(x,y)\} = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x,y)\}$। □

68.8 परिशिष्ट: परिमित अभिगृहीतीकरणीयता

हम प्रतिस्थापन से कुछ परिणाम निकालकर यह अध्याय समाप्त करते हैं। पहला परिणाम Montague (1961) का है; ध्यान दें कि यह **ZF** के *भीतर* कोई प्रमाण नहीं, बल्कि **ZF** के *विषय में* प्रमाण है:

प्रमेय 68.6. **ZF** *परिमित रूप से अभिगृहीतीकरणीय नहीं है। अधिक सामान्यतः: यदि* **T** *परिमित और* **T** $\vdash$ **ZF** *है, तो* **T** *असंगत है।*

(यहाँ हम मौन रूप से स्वयं को उन प्रथम-क्रम वाक्यों तक सीमित रखते हैं जिनका एकमात्र अतार्किक आदिम $\in$ *है, और यह दर्शाने के लिए* **T** $\vdash$ **ZF** *लिखते हैं कि सभी* $\varphi \in$ **ZF** *के लिए* **T** $\vdash \varphi$*।)*

प्रमाण. ऐसे परिमित **T** को नियत करें कि **T** $\vdash$ **ZF**। अतः **T** परावर्तन, अर्थात प्रमेय 68.2, को सिद्ध करता है। चूँकि **T** परिमित है, हम उसे एक संयोजन θ के रूप में फिर लिख सकते हैं। इस सूत्र के साथ परावर्तन करने पर **T** $\vdash \exists\beta(\theta \leftrightarrow \theta^{V_\beta})$। चूँकि तुच्छतः **T** $\vdash \theta$, हमें **T** $\vdash \exists\beta\, \theta^{V_\beta}$ मिलता है।

अब $\psi(X)$ को इसका संक्षेप मानें:

$$\theta^X \wedge X \text{ संक्रमणशील है} \wedge (\forall Y \in X)(Y \text{ संक्रमणशील है} \to \neg\theta^Y)$$

मोटे तौर पर यह कहता है: X, θ का संक्रमणशील प्रतिरूप है और इस दृष्टि से $\in$-न्यूनतम है। अब **T** $\vdash \exists\beta\, \theta^{V_\beta}$ याद करते हुए, **ZF** और इसलिए **T** के भीतर रैंकों के मूल तथ्यों से हमारे पास है:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M \psi(M). \qquad (*)$$

$\psi(X)$ के पहले संयोज्य का उपयोग करके, जब भी **T** $\vdash \sigma$, हमारे पास **T** $\vdash \forall X(\psi(X) \to \sigma^X)$ है। अतः (*) से:

$$\mathbf{T} \vdash \forall X(\psi(X) \to (\exists N \psi(N))^X)$$

इसका और फिर से (*) का उपयोग करके:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \psi(N))^M)$$

अतः विशेषतः:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \in M)((N \text{ संक्रमणशील है})^N \wedge (\theta^N)^M))$$

अतः संक्रमणशीलता के विषय में प्राथमिक तर्क से:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \in M)(N \text{ संक्रमणशील है} \wedge \theta^N))$$

अतः **T** असंगत है।[7] □

[7] इस "प्राथमिक तर्क" में संक्रमणशील समुच्चयों के लिए कुछ "निरपेक्षता तथ्य" सिद्ध करना अंतर्भूत है।

Potter (2004, 223) द्वारा उल्लिखित समान परिणाम यह है:

प्रतिज्ञप्ति 68.7. *T को Z में परिमिततः अनेक नए अभिगृहीत जोड़ने वाला विस्तार मानें। यदि* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{ZF}$*, तो* T *असंगत है। (यहाँ हम प्रमेय 68.6 वाली ही मौन सीमाएँ उपयोग करते हैं।)*

प्रमाण. पृथक्करण के (अनंततः अनेक) दृष्टांतों को *छोड़कर* T के सभी अभिगृहीतों के संयोजन के लिए θ का उपयोग करें। प्रमेय 68.6 की तरह θ से ψ परिभाषित करके हम दिखा सकते हैं कि $\mathbf{T} \vdash \exists M \psi(M)$।

प्रमेय 68.6 की तरह हम यह योजना स्थापित कर सकते हैं कि जब भी $\mathbf{T} \vdash \sigma$, तब $\mathbf{T} \vdash \forall X(\psi(X) \to \sigma^X)$। फिर हम ठीक प्रमेय 68.6 की तरह अपना प्रमाण पूर्ण करते हैं।

किंतु योजना स्थापित करने में प्रमेय 68.6 की अपेक्षा कुछ अधिक काम लगता है। आखिर पृथक्करण-दृष्टांत T में हैं, पर वे θ के संयोज्य नहीं। फिर भी प्रत्येक पृथक्करण-दृष्टांत σ के लिए $\mathbf{T} \vdash \forall X(X$ संक्रमणशील है $\to \sigma^X)$ सिद्ध करके हम यह बाधा पार कर सकते हैं। इसे पाठक के लिए छोड़ते हैं। □

जैसा खंड 68.5 में कहा गया, यह दिखाता है कि प्रतिस्थापन प्रमेय 66.26 से कड़ाई से अधिक प्रबल है। अथवा कुछ अधिक सटीक रूप में: यदि Z + "प्रत्येक सुव्यवस्था किसी अद्वितीय क्रमसूचक के समाकृतिक है" संगत है, तो वह प्रतिस्थापन के किसी दृष्टांत को सिद्ध करने में विफल रहता है।

प्रश्न

प्रश्न 68.1. ZF के भीतर *Stages-are-super-cofinal* को औपचारिक रूप दीजिए।

प्रश्न 68.2. दिखाइए कि प्रत्येक पृथक्करण-दृष्टांत σ के लिए हमारे पास $\mathbf{Z} \vdash \forall X(X$ संक्रमणशील है $\to \sigma^X)$ है। (इस योजना का उपयोग हमने प्रतिज्ञप्ति 68.7 में किया।)

प्रश्न 68.3. दिखाइए कि प्रत्येक $\varphi \in \mathbf{Z}$ के लिए $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{V_{\omega+\omega}}$।

प्रश्न 68.4. प्रमेय 68.6 और प्रतिज्ञप्ति 68.7 के प्रमाणों में प्रयुक्त शेष योजनाबद्ध परिणामों की पुष्टि कीजिए।

अध्याय 69

क्रमसूचक अंकगणित

69.1 परिचय

अध्याय 66 में हमने क्रमसूचक संख्याओं का सिद्धांत विकसित किया। अध्याय 67 में हमने देखा कि क्रमसूचकों को ऐसी रीढ़ माना जा सकता है जिसके चारों ओर शेष पदानुक्रम निर्मित होता है। किंतु क्रमसूचकों की यही एकमात्र भूमिका नहीं। क्रमसूचक अंकगणित करने का कार्य भी है।

खंड 66.2 में ω, $\omega + 1$ और $\omega + \omega$ की बात करते समय हम इसका संकेत पहले ही दे चुके थे। उस समय हमने अनौपचारिक रूप से बात की; अब उसे ठीक ढंग से विस्तृत करने का समय है। फिर भी उल्लेख कर दें कि इस अध्याय में दर्शन बहुत कम है; केवल तकनीकी विकास और यह (कुछ) रोचक प्रेक्षण कि एक ही काम दो भिन्न ढंग से किया जा सकता है।

69.2 क्रमसूचक योग

मान लें कि हम α और β को जोड़ना चाहते हैं। हम α की एक प्रति के ठीक बाद β की एक प्रति रख सकते हैं। (हमें *प्रतियाँ* लेनी होंगी, क्योंकि प्रतिज्ञप्ति 66.22 से जानते हैं कि या तो $\alpha \subseteq \beta$ अथवा $\beta \subseteq \alpha$।) इसका सहज प्रभाव चरणों के एक α-अनुक्रम से गुजरना और *फिर* एक β-अनुक्रम से गुजरना है। परिणामी अनुक्रम सुव्यवस्थित होगा; अतः प्रमेय 66.26 से वह किसी (अद्वितीय) क्रमसूचक के समाकृतिक है। उस क्रमसूचक को α और β का *योग* माना जा सकता है।

क्रमसूचक योग के पीछे यही सहज विचार है। उसे कठोर रूप से परिभाषित करने के लिए हम समुच्चयों की *प्रतियाँ* लेने के विचार से आरंभ करते हैं। यहाँ विचार यह है कि कौन-सी वस्तु कहाँ से आई इसका पता रखने के लिए मनमाने चिह्न 0 और 1 उपयोग किए जाएँ:

परिभाषा 69.1. A और B का *असंयुक्त योग* $A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ है।

अब क्रमसूचकों के युग्मों पर एक क्रम परिभाषित करें:

परिभाषा 69.2. किन्हीं क्रमसूचकों $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ के लिए कहें:

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \lhd \langle \beta_1, \beta_2 \rangle \text{ तभी और केवल तभी जब या तो } \alpha_2 \in \beta_2$$
$$\text{अथवा } \alpha_2 = \beta_2 \text{ और } \alpha_1 \in \beta_1\text{, दोनों}$$

यह *प्रतिलोम शब्दकोशीय* क्रम है, क्योंकि क्रम पहले दूसरे अवयव और फिर पहले अवयव से किया जाता है। अब याद करें कि हम $\alpha + \beta$ को α की प्रति के बाद β की प्रति वाले क्रम का क्रम-प्रकार परिभाषित करना चाहते थे। इसके लिए हम कहते हैं:

परिभाषा 69.3. किन्हीं क्रमसूचकों α, β का योग $\alpha + \beta = \mathrm{ord}(\alpha \sqcup \beta, \lhd)$ है।

ध्यान दें कि यहाँ हमने संकेतन का थोड़ा दुरुपयोग किया है; कठोर रूप में "$\lhd$" के स्थान पर "$\{\langle x, y\rangle \in \alpha \sqcup \beta : x \lhd y\}$" लिखना चाहिए। किंतु संक्षेप के लिए आगे भी संकेतन का यह दुरुपयोग करते रहेंगे।

निम्न परिणाम प्रमेय 66.26 के साथ पुष्टि करता है कि हमारी परिभाषा सुगठित है:

सहायक प्रमेय 69.4. *किन्हीं क्रमसूचकों α और β के लिए $\langle \alpha \sqcup \beta, \lhd\rangle$ सुव्यवस्था है।*

प्रमाण. स्पष्टतः $\lhd$, $\alpha \sqcup \beta$ पर संबद्ध है। उसकी सुस्थापितता दिखाने के लिए कोई रिक्तेतर $X \subseteq \alpha \sqcup \beta$ नियत करें। Y को X का वह उपसमुच्चय मानें जिसके सदस्यों का दूसरा निर्देशांक यथासंभव छोटा है; अर्थात $Y = \{\langle \gamma, i\rangle \in X : (\forall \langle \delta, j\rangle \in X) i \leq j\}$। अब Y का लघुतम प्रथम निर्देशांक वाला अवयव चुनें। $\square$

इस प्रकार हमारे पास क्रमसूचक योग की अच्छी, स्पष्ट परिभाषा है। एक अनाश्चर्यजनक तथ्य यह है (याद करें कि परिभाषा 65.7 से $1 = \{0\}$):

प्रतिज्ञप्ति 69.5. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए $\alpha + 1 = \alpha^+$।*

प्रमाण. $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ से $\alpha \sqcup 1 = (\alpha \times \{0\}) \sqcup (\{0\} \times \{1\})$ में उस समाकृतिकता f पर विचार करें जो $\gamma \in \alpha$ के लिए $f(\gamma) = \langle \gamma, 0\rangle$ और $f(\alpha) = \langle 0, 1\rangle$ से दी गई है। $\square$

इसके अतिरिक्त यह दिखाना सरल है कि योग कुछ पुनरावर्ती शर्तों का पालन करता है:

सहायक प्रमेय 69.6. *किन्हीं क्रमसूचकों α, β के लिए हमारे पास है:*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \beta &= \operatorname*{lsub}_{\delta < \beta}(\alpha + \delta) && \textit{यदि } \beta \textit{ सीमा क्रमसूचक है} \end{aligned}$$

प्रमाण. हम प्रत्येक मामला जाँचते हैं; पहले:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \mathrm{ord}((\alpha \times \{0\}) \cup (0 \times \{1\}), \lhd) \\ &= \mathrm{ord}((\alpha \times \{0\}) \cup \{0\}, \lhd) \\ &= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &= \mathrm{ord}((\alpha \times \{0\}) \cup (\beta^+ \times \{1\}), \lhd) \\ &= \mathrm{ord}((\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), \lhd) + 1 \\ &= (\alpha + \beta) + 1 \end{aligned}$$

अब $\beta \neq \emptyset$ को सीमा मानें। यदि $\delta < \beta$, तो $\delta + 1 < \beta$ भी; अतः $\alpha + \delta$, $\alpha + \beta$ का उचित आरंभिक खंड है। इसलिए $\alpha + \beta$, $X = \{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$ का कठोर ऊपरी परिबंध है। इसके अतिरिक्त यदि $\alpha \leq \gamma < \alpha + \beta$, तो स्पष्टतः किसी $\delta < \beta$ के लिए $\gamma = \alpha + \delta$। अतः $\alpha + \beta = \mathrm{lsub}_{\delta < \beta}(\alpha + \delta)$। $\square$

किंतु एक उल्लेखनीय तथ्य यह है। क्रमसूचक योग परिभाषित करने के लिए हम *इसके बजाय* बस परिमितेतर पुनरावर्तन प्रमेय का उपयोग करके ठीक सहायक प्रमेय 69.6 में दिए पुनरावर्तन समीकरण निर्धारित कर सकते थे (हालाँकि "$\beta + 1$" के बजाय "β^+" का उपयोग करते)।

अतः क्रमसूचकों पर संक्रियाएँ परिभाषित करने के दो भिन्न ढंग हैं। किसी सुव्यवस्थित समुच्चय को स्पष्टतः बनाकर और उसके क्रम-प्रकार पर विचार करके हम उन्हें *संश्लेषणात्मक* रूप से परिभाषित कर सकते हैं। अथवा केवल पुनरावर्तन समीकरण निर्धारित करके उन्हें *पुनरावर्ती* रूप से परिभाषित कर सकते हैं। किंतु सही ढंग से करने पर परिणाम समान है। क्योंकि प्रमेय 66.26 गारंटी देता है कि ये पुनरावर्तन समीकरण *अद्वितीय* क्रमसूचक निर्धारित करते हैं।

कई अर्थों में क्रमसूचक अंकगणित प्राकृतिक संख्याओं के योग जैसा ही व्यवहार करता है। उदाहरणतः हम निम्न सिद्ध कर सकते हैं:

सहायक प्रमेय 69.7. *यदि α, β, γ क्रमसूचक हैं, तो:*

1. *यदि $\beta < \gamma$, तो $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$;*
2. *यदि $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, तो $\beta = \gamma$;*
3. *$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$; अर्थात योग साहचर्यात्मक है;*
4. *यदि $\alpha \leq \beta$, तो $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$।*

प्रमाण. हम (3) सिद्ध करते हैं और शेष अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। प्रमाण γ पर सरल परिमितेतर आगमन द्वारा है, जिसमें सहायक प्रमेय 69.6 का उपयोग होता है। जब $\gamma = 0$:

$$(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$$

जब $\gamma = \delta + 1$, आगमन के लिए मान लें कि $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$; अब सहायक प्रमेय 69.6 का तीन बार उपयोग करके:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + (\delta + 1) &= ((\alpha + \beta) + \delta) + 1 \\ &= (\alpha + (\beta + \delta)) + 1 \\ &= \alpha + ((\beta + \delta) + 1) \\ &= \alpha + (\beta + (\delta + 1))\end{aligned}$$

जब γ सीमा क्रमसूचक है, आगमन के लिए मान लें कि यदि $\delta \in \gamma$, तो $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$; अब:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \operatorname*{lsub}_{\delta<\gamma}((\alpha + \beta) + \delta) \\ &= \operatorname*{lsub}_{\delta<\gamma}(\alpha + (\beta + \delta)) \\ &= \alpha + \operatorname*{lsub}_{\delta<\gamma}(\beta + \delta) \\ &= \alpha + (\beta + \gamma)\end{aligned}$$

□

इन अर्थों में क्रमसूचक योग बहुत परिचित होना चाहिए। किंतु एक निर्णायक अर्थ में क्रमसूचक योग प्राकृतिक संख्याओं के योग जैसा *नहीं* है।

प्रतिज्ञप्ति 69.8. *क्रमसूचक योग क्रमविनिमेय नहीं है; $1 + \omega = \omega < \omega + 1$।*

प्रमाण. ध्यान दें कि $1 + \omega = \operatorname{lsub}_{n<\omega}(1 + n) = \omega \in \omega \cup \{\omega\} = \omega^+ = \omega + 1$। □

यह आरंभ में आश्चर्यजनक लगे, किंतु *लगना नहीं चाहिए*। एक ओर $1 + \omega$ पर विचार करते समय आप सभी प्राकृतिक संख्याओं के *पहले* एक अतिरिक्त अवयव रखने से मिले क्रम-प्रकार के विषय में सोचते हैं। खंड 6.1 में हिल्बर्ट के होटल के साथ किए तर्क की तरह सहजतः इस अतिरिक्त प्रथम अवयव से समग्र क्रम-प्रकार पर कोई प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए। दूसरी ओर $\omega + 1$ पर विचार करते समय आप सभी प्राकृतिक संख्याओं के *बाद* एक अतिरिक्त अवयव रखने से मिले क्रम-प्रकार के विषय में सोचते हैं। और वह मूलतः भिन्न वस्तु है!

69.3 क्रमसूचक योग का उपयोग

क्रमसूचकों पर योग का उपयोग करके हम परिभाषा 67.15 के अर्थ में विभिन्न समुच्चयों की रैंक स्पष्टतः परिकलित कर सकते हैं:

सहायक प्रमेय 69.9. *यदि* $\text{rank}(A) = \alpha$ *और* $\text{rank}(B) = \beta$*, तो:*

1. $\text{rank}(\wp(A)) = \alpha + 1$
2. $\text{rank}(\{A, B\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$
3. $\text{rank}(A \cup B) = \max(\alpha, \beta)$
4. $\text{rank}(\langle A, B\rangle) = \max(\alpha, \beta) + 2$
5. $\text{rank}(A \times B) \leq \max(\alpha, \beta) + 2$
6. *जब* α *रिक्त या सीमा हो, तब* $\text{rank}(\bigcup A) = \alpha$*; जब* $\alpha = \gamma + 1$*, तब* $\text{rank}(\bigcup A) = \gamma$*।*

प्रमाण. पूरे प्रमाण में हम प्रतिज्ञप्ति 67.20 का बार-बार आह्वान करते हैं।

(1). यदि $x \subseteq A$, तो $\text{rank}(x) \leq \text{rank}(A)$। अतः $\text{rank}(\wp(A)) \leq \alpha+1$। विशेषतः चूँकि $A \in \wp(A)$, इसलिए $\text{rank}(\wp(A)) = \alpha + 1$।

(2). प्रतिज्ञप्ति 67.20 से।

(3). प्रतिज्ञप्ति 67.20 से।

(4). (2) से, दो बार।

(5). ध्यान दें कि $A \times B \subseteq \wp(\wp(A \cup B))$, और (4) का आह्वान करें।

(6). यदि $\alpha = \gamma + 1$, तो कोई $c \in A$ ऐसा है कि $\text{rank}(c) = \gamma$, और A के किसी अवयव की रैंक इससे अधिक नहीं; अतः $\text{rank}(\bigcup A) = \gamma$। यदि α सीमा क्रमसूचक है, तो A के ऐसे अवयव हैं जिनकी रैंक α के मनमाने रूप से निकट (पर कड़ाई से छोटी) है; इसलिए $\bigcup A$ के भी ऐसे अवयव हैं जिनकी रैंक α के मनमाने रूप से निकट (पर कड़ाई से छोटी) है; अतः $\text{rank}(\bigcup A) = \alpha$। □

(5) में असमानता क्यों आती है, यह दिखाना अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

अब हम यह भी दिखा सकते हैं कि किसी क्रमसूचक को "परिमित" या "अनंत" कहने के अर्थ की कई उचित धारणाएँ परस्पर संपाती हैं:

सहायक प्रमेय 69.10. *किसी भी क्रमसूचक* α *के लिए निम्न समतुल्य हैं:*

1. $\alpha \notin \omega$*, i.e.,* α *प्राकृतिक संख्या नहीं है;*
2. $\omega \leq \alpha$
3. $1 + \alpha = \alpha$
4. $\alpha \approx \alpha + 1$*, अर्थात* α *और* $\alpha + 1$ *समसंख्य हैं;*
5. α *डेडेकिंड-अनंत है।*

अतः किसी क्रमसूचक के (अ)परिमित होने का अर्थ समझने के हमारे पास पाँच सिद्धतः समतुल्य ढंग हैं।

प्रमाण. *(1)* $\Rightarrow$ *(2)*. त्रिकोटी से।

(2) $\Rightarrow$ *(3)*. $\alpha \geq \omega$ को नियत करें। परिमितेतर आगमन से कोई लघुतम क्रमसूचक γ (संभवतः 0) ऐसा है कि कोई सीमा क्रमसूचक β है जिसके लिए $\alpha = \beta + \gamma$। अब:

$$1 + \alpha = 1 + (\beta + \gamma) = (1 + \beta) + \gamma = \operatorname*{lsub}_{\delta<\beta}(1 + \delta) + \gamma = \beta + \gamma = \alpha.$$

(3) $\Rightarrow$ *(4)*. स्पष्टतः कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon (\alpha \sqcup 1) \to (1 \sqcup \alpha)$ है। यदि $1 + \alpha = \alpha$, तो कोई समाकृतिकता $g\colon (1 \sqcup \alpha) \to \alpha$ है। अब $g \circ f$ पर विचार करें।

(4) $\Rightarrow$ *(5)*. यदि $\alpha \approx \alpha + 1$, तो कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon (\alpha \sqcup 1) \to \alpha$ है। प्रत्येक $\gamma < \alpha$ के लिए $g(\gamma) = f(\gamma, 0)$ परिभाषित करें; यह एकैकी प्रतिचित्रण α के डेडेकिंड-अनंत होने का साक्षी है, क्योंकि $f(0, 1) \in \alpha \setminus \operatorname{ran}(g)$।

(5) $\Rightarrow$ *(1)*. यह प्रतिज्ञप्ति 65.8 है। □

69.4 क्रमसूचक गुणन

अब हम क्रमसूचक गुणन की ओर आते हैं और इसे क्रमसूचक योग की तरह लेते हैं। मान लें कि हम α को β से गुणा करना चाहते हैं। इसके लिए आप चौड़ाई α और ऊँचाई β वाले आयताकार जाल की कल्पना कर सकते हैं; α और β का गुणनफल प्रत्येक पंक्ति के साथ चलने, फिर अगली पंक्ति से गुजरने... और इसी तरह पूरे जाल से गुजरने का परिणाम है। दूसरे शब्दों में β के *प्रत्येक* अवयव को α की एक प्रति से बदलने पर α और β का गुणनफल मिलता है।

इसे औपचारिक रूप देने के लिए हम α और β के कार्तीय गुणनफल पर बस प्रतिलोम शब्दकोशीय क्रम का उपयोग करते हैं:

परिभाषा 69.11. किन्हीं क्रमसूचकों α, β का गुणनफल $\alpha \cdot \beta = \operatorname{ord}(\alpha \times \beta, \lhd)$ है।

हमें फिर पुष्टि करनी होगी कि यह सुगठित परिभाषा है:

सहायक प्रमेय 69.12. *किन्हीं क्रमसूचकों α और β के लिए $\langle \alpha \times \beta, \lhd \rangle$ सुव्यवस्था है।*

प्रमाण. ठीक सहायक प्रमेय 69.4 की तरह। □

और यह सिद्ध करना कठिन नहीं कि गुणन इस प्रकार व्यवहार करता है:

सहायक प्रमेय 69.13. *किन्हीं क्रमसूचकों α, β के लिए:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \beta &= \operatorname*{lsub}_{\delta<\beta}(\alpha \cdot \delta) && \text{जब } \beta \text{ सीमा क्रमसूचक हो।} \end{aligned}$$

प्रमाण. अभ्यास के लिए छोड़ा गया। □

वास्तव में योग की तरह हम सीधी परिभाषा देने के बजाय इन पुनरावर्तन समीकरणों से क्रमसूचक गुणन परिभाषित कर सकते थे। समानतः योग की तरह कुछ व्यवहार परिचित है:

सहायक प्रमेय 69.14. *यदि α, β, γ क्रमसूचक हैं, तो:*

1. *यदि $\alpha \neq 0$ और $\beta < \gamma$, तो $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$;*
2. *यदि $\alpha \neq 0$ और $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, तो $\beta = \gamma$;*

3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;

4. *यदि* $\alpha \leq \beta$, *तो* $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;

5. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

प्रमाण. अभ्यास के लिए छोड़ा गया। □

आप इच्छानुसार अन्य परिणाम सिद्ध कर सकते हैं (या खोज सकते हैं)। किंतु प्रतिज्ञप्ति 69.8 को देखते हुए निम्न आश्चर्यजनक नहीं होना चाहिए:

प्रतिज्ञप्ति 69.15. *क्रमसूचक गुणन क्रमविनिमेय नहीं है:* $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2$।

प्रमाण. $2 \cdot \omega = \mathrm{lsub}_{n<\omega}(2 \cdot n) = \omega \in \mathrm{lsub}_{n<\omega}(\omega + n) = \omega + \omega = \omega \cdot 2$. □

फिर सहज औचित्य काफ़ी सीधा है। $2 \cdot \omega$ परिकलित करने के लिए आप प्रत्येक प्राकृतिक संख्या को दो सत्ताओं से बदलते हैं। यदि आप सभी "आधी" संख्याएँ प्राकृतिक संख्याओं में डाल दें, अर्थात $\{n/2 : n \in \omega\}$ पर स्वाभाविक क्रम देखें, तो वही क्रम-प्रकार मिलेगा। इस रूप में क्रम-प्रकार स्पष्टतः स्वयं ω के समान है। किंतु $\omega \cdot 2$ परिकलित करने के लिए आप ω की दो प्रतियाँ एक के बाद एक रखते हैं।

69.5 क्रमसूचक घातांक

अब हम क्रमसूचक घातांक की ओर बढ़ते हैं। दुर्भाग्य से क्रमसूचक घातांक की कोई सुंदर संश्लेषणात्मक परिभाषा नहीं है।

निश्चय ही स्पष्ट संश्लेषणात्मक परिभाषाएँ हैं। एक परिभाषा यह है। $\mathrm{finfun}(\alpha, \beta)$ उन सभी फलनों $f : \alpha \to \beta$ का समुच्चय हो जिनके लिए $\{\gamma \in \alpha : f(\gamma) \neq 0\}$ किसी प्राकृतिक संख्या के साथ समसंख्य हो। $\mathrm{finfun}(\alpha, \beta)$ पर सुव्यवस्था इस प्रकार परिभाषित करें: $f \sqsubset g$ तभी जब $f \neq g$ और $f(\gamma_0) < g(\gamma_0)$, जहाँ $\gamma_0 = \max\{\gamma \in \alpha : f(\gamma) \neq g(\gamma)\}$। तब हम $\alpha^{(\beta)}$ को $\mathrm{ord}(\mathrm{finfun}(\alpha, \beta), \sqsubset)$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। पॉटर इस स्पष्ट परिभाषा का उपयोग करते हैं और तुरंत समझाते हैं:

> इस क्रम का चयन केवल ऐसी क्रमसूचक घातांक की परिभाषा पाने की हमारी इच्छा से निर्धारित होता है जो उपयुक्त पुनरावर्ती शर्त का पालन करे...; और इसकी कल्पना क्रमित योग या क्रमित गुणनफल की अपेक्षा कहीं कठिन है। (Potter, 2004, p. 199)

ठीक यही बात है। हमने योग को "α की एक प्रति जिसके बाद β की एक प्रति हो" और गुणन को "α की प्रतियों का एक β-अनुक्रम" बताया था। किंतु $\mathrm{finfun}(\alpha, \gamma)$ के बारे में कहने के लिए हमारे पास ऐसा कोई संक्षिप्त वर्णन नहीं है। इसलिए इसके बदले हम क्रमसूचक घातांक की परिभाषा सीधे परिमितेतर पुनरावर्तन *द्वारा* देंगे, अर्थात्:

परिभाषा 69.16.

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &= 1 \\ \alpha^{(\beta+1)} &= \alpha^{(\beta)} \cdot \alpha \\ \alpha^{(\beta)} &= \bigcup_{\delta<\beta} \alpha^{(\delta)} && \text{जब } \beta \text{ सीमा क्रमसूचक हो} \end{aligned}$$

यदि हम समुच्चय सिद्धांतकारों *के रूप में* काम कर रहे होते, तो शायद क्रमसूचक घातांक के कुछ गुणों का अन्वेषण करना चाहते। किंतु इसके अतिरिक्त कहने को अधिक कुछ नहीं है, सिवाय इस अपेक्षित तथ्य के कि क्रमसूचक घातांक क्रमविनिमेय नहीं है। अतः $2^{(\omega)} = \bigcup_{\delta<\omega} 2^{(\delta)} = \omega$, जबकि $\omega^{(2)} = \omega \cdot \omega$। पर हमें घातांक के क्रमविनिमेय होने की *अपेक्षा* भी नहीं करनी चाहिए, क्योंकि प्राकृतिक संख्याओं के लिए भी वह क्रमविनिमेय नहीं है: $2^{(3)} = 8 < 9 = 3^{(2)}$।

प्रश्न

प्रश्न 69.1. सहायक प्रमेय 69.7 का शेष सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 69.2. ऐसे समुच्चय A और B दीजिए कि $\mathrm{rank}(A \times B) = \max(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$। ऐसे समुच्चय A और B दीजिए कि $\mathrm{rank}(A \times B) \max(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)) + 2$। क्या कोई अन्य रैंक संभव है?

प्रश्न 69.3. सिद्ध कीजिए: सहायक प्रमेय 69.12, सहायक प्रमेय 69.13, और सहायक प्रमेय 69.14।

प्रश्न 69.4. परिमितेतर आगमन का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि यदि हम $\alpha^{(\beta)} = \mathrm{ord}(\mathrm{finfun}(\alpha, \beta), \sqsubset)$ परिभाषित करें, तो हमें परिभाषा 69.16 के पुनरावर्तन समीकरण प्राप्त होते हैं।

अध्याय 70

कार्डिनल

70.1 कैंटर का सिद्धांत

खंड 66.5 को याद कीजिए। हम सुव्यवस्थित समुच्चयों पर चर्चा कर रहे थे और हमने सुझाया था कि सुव्यवस्थाओं के प्रतिनिधि के रूप में काम करने वाली वस्तुएँ होना उपयोगी होगा। इसी विचार से हमने क्रमसूचक प्रस्तुत किए और फिर उपप्रमेय 66.28 में दिखाया कि वे हमारी अपेक्षा के अनुसार व्यवहार करते हैं, अर्थात्:

$$\mathrm{ord}(A, <) = \mathrm{ord}(B, \lessdot) \text{ तभी जब } \langle A, < \rangle \cong \langle B, \lessdot \rangle.$$

और पीछे खंड 4.8 को याद कीजिए। वहाँ सहज ढंग से काम करते हुए हमने किसी समुच्चय के "आकार" की धारणा प्रस्तुत की थी। विशेषतः हमने कहा था कि दो समुच्चय समसंख्य हैं, $A \approx B$, ठीक तभी जब कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon A \to B$ हो। यह धारणा सुव्यवस्था की धारणा से स्वभावतः सरल है: हमें केवल एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रणों में रुचि है, इसमें नहीं कि वे एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण "किसी संरचना को सुरक्षित रखते हैं" या नहीं (जैसा क्रम-समाकृतिकताओं में होता है)।

इन सब से एक सहज विचार उत्पन्न होता है। जैसे हमने सुव्यवस्थाओं को मापने के लिए कुछ वस्तुएँ, *क्रमसूचक*, प्रस्तुत की थीं, वैसे ही आकार मापने के लिए कुछ वस्तुएँ, *कार्डिनल*, प्रस्तुत कर सकते हैं। यही इस अध्याय का उद्देश्य है।

ये कार्डिनल क्या होंगे यह कहने से पहले हमें वह सिद्धांत निर्धारित करना चाहिए जिसका उन्हें पालन करना होगा। समुच्चय X की कार्डिनलता को $|X|$ लिखते हुए हम चाहेंगे कि वे इसका पालन करें:

$$|A| = |B| \text{ तभी जब } A \approx B.$$

हम इसे *कैंटर का* सिद्धांत कहेंगे, क्योंकि शायद कैंटर ही पहले व्यक्ति थे जिनके मन में यह बिल्कुल स्पष्ट रूप से था। (खंड 70.5 में हम *ह्यूम के* सिद्धांत से इसके संबंध पर और चर्चा करेंगे।) अतः हमारा उद्देश्य प्रत्येक X के लिए $|X|$ को इस प्रकार परिभाषित करना है कि उससे कैंटर का सिद्धांत प्राप्त हो।

70.2 क्रमसूचकों के रूप में कार्डिनल

वास्तव में कार्डिनलों का हमारा सिद्धांत क्रमसूचकों के हमारे सिद्धांत का (निर्लज्जतापूर्वक) उपयोग करेगा। अर्थात् हम कार्डिनलों को कुछ विशिष्ट क्रमसूचकों के रूप में ही परिभाषित करेंगे। विशेषतः हम निम्न परिभाषा देंगे:

परिभाषा 70.1. यदि A को सुव्यवस्थित किया जा सकता है, तो $|A|$ वह लघुतम क्रमसूचक γ है जिसके लिए $A \approx \gamma$। किसी भी क्रमसूचक γ के लिए हम कहते हैं कि γ एक *कार्डिनल* है तभी जब $\gamma = |\gamma|$।

हमने अभी "A को सुव्यवस्थित किया जा सकता है" वाक्यांश का उपयोग किया। गणित में लगभग हमेशा की तरह यहाँ यह मोडल कथन किसी अस्तित्वपरक दावे का केवल अनौपचारिक रूप है: "A को सुव्यवस्थित किया जा सकता है" कहने का अर्थ केवल इतना है कि "कोई ऐसा संबंध है जो A को सुव्यवस्थित करता है"।

किंतु परिभाषा 70.1 में एक अड़चन है। हम चाहेंगे कि *प्रत्येक* समुच्चय का कोई आकार हो, अर्थात् प्रत्येक A के लिए $|A|$ का अस्तित्व हो। किंतु हमारी अभी दी गई परिभाषा एक सशर्त वाक्य से आरंभ होती है: "*यदि* A को सुव्यवस्थित किया जा सकता है..."। यदि कोई ऐसा समुच्चय A हो जिसे सुव्यवस्थित नहीं किया जा सकता, तो हमारी परिभाषा $|A|$ नामक किसी वस्तु को परिभाषित ही नहीं करेगी।

अतः परिभाषा 70.1 का उपयोग करने के लिए हमें यह प्रत्याभूति चाहिए कि प्रत्येक समुच्चय को सुव्यवस्थित किया जा सकता है। दुर्भाग्य से **ZF** में यह प्रत्याभूति उपलब्ध नहीं है। इसलिए यदि हम परिभाषा 70.1 का उपयोग करना चाहते हैं, तो कोई नया अभिगृहीत जोड़ने के अतिरिक्त कोई विकल्प नहीं है, जैसे:

Well-Ordering (Well-Ordering). प्रत्येक समुच्चय को सुव्यवस्थित किया जा सकता है।

हम अध्याय 72 में चर्चा करेंगे कि सुव्यवस्था अभिगृहीत स्वीकार्य है या नहीं। किंतु अब से हम इसका मुक्त रूप से उपयोग करेंगे। इसके उपयोग से यह सिद्ध करना बहुत सीधा है कि (परिभाषा 70.1 में परिभाषित) कार्डिनलों का अस्तित्व है और वे सुव्यवस्थित ढंग से व्यवहार करते हैं:

सहायक प्रमेय 70.2. *प्रत्येक समुच्चय A के लिए:*

1. *$|A|$ का अस्तित्व है और वह अद्वितीय है;*
2. *$|A| \approx A$;*
3. *$|A|$ एक कार्डिनल है, अर्थात् $|A| = ||A||$;*

प्रमाण. A को नियत करें। सुव्यवस्था से कोई सुव्यवस्था $\langle A, R\rangle$ है। प्रमेय 66.26 से $\langle A, R\rangle$ किसी अद्वितीय क्रमसूचक β के समाकृतिक है। अतः $A \approx \beta$। परिमितेतर आगमन से कोई अद्वितीय लघुतम क्रमसूचक γ है जिसके लिए $A \approx \gamma$। अतः $|A| = \gamma$, जिससे (1) और (2) स्थापित होते हैं। (3) स्थापित करने के लिए ध्यान दें कि यदि $\delta \in \gamma$, तो γ के हमारे चयन से $\delta \prec A$, और इसलिए $\delta \prec \gamma$ भी, क्योंकि समसंख्यता एक तुल्यता संबंध है (प्रतिज्ञप्ति 4.20)। अतः $\gamma = |\gamma|$। □

अगला परिणाम कैंटर के सिद्धांत की, और उसके अतिरिक्त भी, प्रत्याभूति देता है। (ध्यान दें कि कार्डिनल अपना क्रम क्रमसूचकों से प्राप्त करते हैं, अर्थात् $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ तभी जब $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$। इसे सूत्रबद्ध करते समय जिन वस्तुओं को हम कार्डिनल जानते हैं, उनके लिए फ़्राक्टूर अक्षरों का उपयोग करेंगे। यह पर्याप्त मानक प्रथा है। एक सामान्य विकल्प यूनानी अक्षरों का उपयोग करना है, क्योंकि कार्डिनल क्रमसूचक होते हैं, किंतु उन्हें वर्णमाला के मध्य से चुनना, जैसे κ, λ।):

सहायक प्रमेय 70.3. *किन्हीं समुच्चयों A और B के लिए:*

$$A \approx B \text{ तभी जब } |A| = |B|$$
$$A \preceq B \text{ तभी जब } |A| \leq |B|$$
$$A \prec B \text{ तभी जब } |A| < |B|$$

प्रमाण. हम दूसरे दावे की बाएँ-से-दाएँ दिशा सिद्ध करेंगे (अन्य स्थितियाँ समान हैं और अभ्यास के लिए छोड़ी गई हैं)। अतः निम्न आरेख पर विचार करें:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & B \arrow[d, leftrightarrow] \\
|A| \arrow[r, dashed] & |B|
\end{tikzcd}$$

दो सिरों वाले तीर एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रणों को दर्शाते हैं, जिनके अस्तित्व की प्रत्याभूति सहायक प्रमेय 70.2 से मिलती है। $A \preceq B$ मानने पर कोई एकैकी प्रतिचित्रण $A \to B$ है। अब $|A|$ से A, फिर B, और फिर $|B|$ तक तीरों का अनुसरण करके हमें कोई एकैकी प्रतिचित्रण $|A| \to |B|$ (टूटा हुआ तीर) मिलता है। □

सहायक प्रमेय 70.3 का उपयोग श्रेडर–बर्नस्टीन को फिर से सिद्ध करने में भी कर सकते हैं। यह दावा है कि यदि $A \preceq B$ और $B \preceq A$, तो $A \approx B$। हमने इसे प्रमेय 4.25 के रूप में कहा था, किंतु पहले इसे—कुछ प्रयास के साथ—खंड 6.5 में सिद्ध किया था। अब विचार करें:

श्रेडर–बर्नस्टीन का पुनः प्रमाण. यदि $A \preceq B$ और $B \preceq A$, तो सहायक प्रमेय 70.3 से $|A| \leq |B|$ और $|B| \leq |A|$। अतः त्रिविभाजन और सहायक प्रमेय 70.3 से $|A| = |B|$ और $A \approx B$। □

यद्यपि यह बहुत सरल प्रमाण है, यह अप्रत्यक्ष रूप से प्रतिस्थापन (प्रमेय 66.26 पाने के लिए) और सुव्यवस्था (सहायक प्रमेय 70.3 की प्रत्याभूति के लिए) दोनों पर निर्भर है। इसके विपरीत खंड 6.5 का प्रमाण कहीं अधिक स्वावलंबी था (वास्तव में उसे $\mathbf{Z}^-$ में पूरा किया जा सकता है)।

70.3 ZFC: एक मील का पत्थर

सुव्यवस्था जोड़ने के साथ हम अंतिम सैद्धांतिक मील के पत्थर पर पहुँच गए हैं। अब हमारे पास **ZFC** के लिए आवश्यक सभी अभिगृहीत हैं। विस्तार से:

परिभाषा 70.4. **ZFC** सिद्धांत के ये अभिगृहीत हैं: विस्तारिता, सम्मिलन, युग्म, घात समुच्चय, अनंतता, आधारिता, सुव्यवस्था तथा पृथक्करण और प्रतिस्थापन योजनाओं के सभी दृष्टांत। दूसरे शब्दों में, **ZFC**, **ZF** में सुव्यवस्था जोड़ता है।

ZFC का अर्थ *चयन* सहित *ज़रमेलो–फ़्रेंकल* समुच्चय सिद्धांत है। यह कुछ विचित्र लग सकता है, क्योंकि हमने जो अभिगृहीत जोड़ा उसका नाम "सुव्यवस्था" था, "चयन" नहीं। किंतु बाद में जब हम चयन को सूत्रबद्ध करेंगे, तो पता चलेगा कि सुव्यवस्था (**ZF** के सापेक्ष) चयन के तुल्य है (प्रमेय 72.6 देखें)। अतः इनमें से किसे अपना "मूल" अभिगृहीत मानें, इससे कोई अंतर नहीं पड़ता। और "**ZFC**" नाम साहित्य में पूर्णतः मानक है।

70.4 परिमित, गणनीय, अगणनीय

अब जबकि कार्डिनलों से हमारा परिचय हो गया है, कार्डिनलों की विभिन्न किस्मों पर कुछ समय चर्चा करना उपयोगी है; विशेषतः परिमित, गणनीय और अगणनीय कार्डिनलों पर।

हमारे पहले दो परिणामों से निष्पन्न होगा कि परिमित कार्डिनल ठीक परिमित क्रमसूचक होंगे, जिन्हें हमने परिभाषा 65.7 में अपनी *प्राकृतिक संख्याओं* के रूप में परिभाषित किया था:

प्रतिज्ञप्ति 70.5. *मान लें $n, m \in \omega$। तब $n = m$ तभी जब $n \approx m$।*

प्रमाण. *बाएँ-से-दाएँ* दिशा तुच्छ है। *दाएँ-से-बाएँ* दिशा सिद्ध करने के लिए मान लें कि $n \neq m$ होते हुए भी $n \approx m$। त्रिविभाजन से या तो $n \in m$ या $m \in n$; व्यापकता खोए बिना $n \in m$ मान लें। तब $n \subsetneq m$ और कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f : m \to n$ है, इसलिए m डेडेकिंड-अनंत है, जो प्रतिज्ञप्ति 65.8 के विरुद्ध है। □

उपप्रमेय 70.6. *यदि $n \in \omega$, तो n एक कार्डिनल है।*

प्रमाण. तत्काल। □

इससे यह भी निष्पन्न होता है कि किसी कार्डिनल को "परिमित" या "अनंत" कहने के अर्थ की कई उचित धारणाएँ परस्पर समान हैं:

प्रमेय 70.7. *किसी भी समुच्चय A के लिए निम्न कथन तुल्य हैं:*

1. *$|A| \notin \omega$, अर्थात् A कोई प्राकृतिक संख्या नहीं है;*

2. $\omega \leq |A|$;

3. A *डेडेकिंड-अनंत है।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 69.10, सहायक प्रमेय 70.3 और उपप्रमेय 70.6 से। □

इससे उन कुछ धारणाओं की निम्न *परिभाषा* उचित ठहरती है जिनका उपयोग हमने भाग I में कुछ अनौपचारिक ढंग से किया था:

परिभाषा 70.8. हम कहते हैं कि A *परिमित* है तभी जब $|A|$ कोई प्राकृतिक संख्या है, अर्थात् $|A| \in \omega$। अन्यथा हम कहते हैं कि A *अनंत* है।

किंतु ध्यान दें कि यह परिभाषा **ZFC** की पृष्ठभूमि में प्रस्तुत की गई है। आखिर प्रत्येक समुच्चय की कार्डिनलता की प्रत्याभूति के लिए हमें सुव्यवस्था की आवश्यकता थी। और वास्तव में सुव्यवस्था के बिना कोई ऐसा समुच्चय हो सकता है जो न परिमित हो, न डेडेकिंड-अनंत। हम अध्याय 72 में इस प्रकार के प्रश्न पर लौटेंगे। अभी हम सुव्यवस्था पर निर्भर रहना जारी रखते हैं।

अब परिमित कार्डिनलों से अनंत कार्डिनलों की ओर बढ़ें। यहाँ दो प्राथमिक तथ्य हैं:

उपप्रमेय 70.9. *ω लघुतम अनंत कार्डिनल है।*

प्रमाण. ω एक कार्डिनल है, क्योंकि ω डेडेकिंड-अनंत है और यदि किसी $n \in \omega$ के लिए $\omega \approx n$ होता, तो n डेडेकिंड-अनंत होता, जो प्रतिज्ञप्ति 65.8 के विरुद्ध है। अब परिभाषा से ω लघुतम अनंत कार्डिनल है। □

उपप्रमेय 70.10. *प्रत्येक अनंत कार्डिनल एक सीमा क्रमसूचक है।*

प्रमाण. α को एक अनंत उत्तरवर्ती क्रमसूचक मानें, अतः किसी β के लिए $\alpha = \beta + 1$। प्रतिज्ञप्ति 70.5 से β भी अनंत है, अतः सहायक प्रमेय 69.10 से $\beta \approx \beta + 1$। अब सहायक प्रमेय 70.3 से $|\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$, इसलिए $\alpha \neq |\alpha|$। □

परिभाषा 4.27 में ही हमने बताया था कि हम गणनीय और अगणनीय अनंत समुच्चयों में अंतर कर सकते हैं। वह परिभाषा स्वाभाविक रूप से निम्न परिणाम देती है:

प्रतिज्ञप्ति 70.11. *A गणनीय है तभी जब $|A| \leq \omega$, और A अगणनीय है तभी जब $\omega < |A|$।*

प्रमाण. त्रिविभाजन से दोनों दावे तुल्य हैं, अतः यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि A गणनीय है तभी जब $|A| \leq \omega$। *दाएँ-से-बाएँ* दिशा के लिए: यदि $|A| \leq \omega$, तो सहायक प्रमेय 70.3 और उपप्रमेय 70.9 से $A \preceq \omega$। *बाएँ-से-दाएँ* दिशा के लिए: मान लें A गणनीय है; तब परिभाषा 4.27 से तीन संभव स्थितियाँ हैं:

1. यदि $A = \emptyset$, तो उपप्रमेय 70.6 और सहायक प्रमेय 70.3 से $|A| = 0 \in \omega$।

2. यदि $n \approx A$, तो उपप्रमेय 70.6 और सहायक प्रमेय 70.3 से $|A| = n \in \omega$।

3. यदि $\omega \approx A$, तो उपप्रमेय 70.9 से $|A| = \omega$।

अतः सभी स्थितियों में $|A| \leq \omega$। □

वास्तव में ω का स्थान विशेष है। यद्यपि अनेक गणनीय क्रमसूचक हैं:

उपप्रमेय 70.12. *ω एकमात्र गणनीय अनंत कार्डिनल है।*

प्रमाण. $\mathfrak{a}$ को कोई गणनीय अनंत कार्डिनल मानें। चूँकि $\mathfrak{a}$ अनंत है, $\omega \leq \mathfrak{a}$। चूँकि $\mathfrak{a}$ गणनीय कार्डिनल है, $\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \leq \omega$। अतः त्रिविभाजन से $\mathfrak{a} = \omega$। □

निस्संदेह अनंततः अनेक कार्डिनल हैं। इसलिए हम पूछ सकते हैं: *कितने कार्डिनल हैं?* निम्न परिणाम दिखाते हैं कि शायद हमें इस प्रश्न पर पुनर्विचार करना चाहिए।

प्रतिज्ञप्ति 70.13. *यदि X का प्रत्येक सदस्य कार्डिनल है, तो $\bigcup X$ एक कार्डिनल है।*

प्रमाण. यह जाँचना सरल है कि $\bigcup X$ एक क्रमसूचक है। मान लें $\alpha \in \bigcup X$ एक क्रमसूचक है; तब किसी कार्डिनल $\mathfrak{b}$ के लिए $\alpha \in \mathfrak{b} \in X$। चूँकि $\mathfrak{b}$ एक कार्डिनल है, $\alpha \prec \mathfrak{b}$। चूँकि $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup X$, हमारे पास $\mathfrak{b} \preceq \bigcup X$ है, और इसलिए $\alpha \not\approx \bigcup X$। सामान्यीकरण से $\bigcup X$ एक कार्डिनल है। □

प्रमेय 70.14. *कोई महत्तम कार्डिनल नहीं है।*

प्रमाण. किसी भी कार्डिनल $\mathfrak{a}$ के लिए कैंटर का प्रमेय (प्रमेय 4.24) और सहायक प्रमेय 70.2 से निष्पन्न होता है कि $\mathfrak{a} < |\wp(\mathfrak{a})|$। □

प्रमेय 70.15. *सभी कार्डिनलों का समुच्चय अस्तित्व में नहीं है।*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा मान लें $C = \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a}$ एक कार्डिनल है$\}$। प्रतिज्ञप्ति 70.13 से $\bigcup C$ एक कार्डिनल है, अतः प्रमेय 70.14 से कोई कार्डिनल $\mathfrak{b} > \bigcup C$ है। परिभाषा से $\mathfrak{b} \in C$, इसलिए $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup C$, और इस प्रकार $\mathfrak{b} \leq \bigcup C$, जो विरोधाभास है। □

इसकी तुलना रसेल के विरोधाभास और बुराली–फ़ोर्टी दोनों से कीजिए।

70.5 परिशिष्ट: ह्यूम का सिद्धांत

खंड 70.1 में हमने कैंटर के सिद्धांत का वर्णन किया था। वह था:

$$|A| = |B| \text{ तभी जब } A \approx B.$$

यह उस सिद्धांत से बहुत मिलता-जुलता है जिसे अब *ह्यूम का सिद्धांत* कहते हैं और जो कहता है:

$$\#x\, F(x) = \#x\, G(x) \text{ तभी जब } F \sim G$$

जहाँ '$F \sim G$' इसका संक्षिप्त रूप है कि F उतने ही हैं जितने G, अर्थात् F को G के साथ एक द्विआक्षेपी संगति में रखा जा सकता है, अर्थात्:

$$\begin{aligned}\exists R(\forall v \forall y(Rvy \to (Fv \land Gy)) \land \\ \forall v(Fv \to \exists! y\, Rvy) \land \\ \forall y(Gy \to \exists! v\, Rvy))\end{aligned}$$

किंतु ह्यूम के सिद्धांत और कैंटर के सिद्धांत के बीच प्रकार का अंतर है। कैंटर के सिद्धांत के कथन में चर "A" और "B" प्रथम-क्रम पद हैं जो *समुच्चयों* के लिए खड़े होते हैं। ह्यूम के सिद्धांत के कथन में "F", "G" और "R" प्रथम-क्रम पद *नहीं* हैं; बल्कि वे *विधेय स्थान* में हैं। (शायद वे *गुणों* के लिए खड़े होते हैं।) अतः ह्यूम के सिद्धांत को हम इस प्रकार कह सकते हैं: F की संख्या G की संख्या के बराबर है तभी जब F और G के बीच द्विआक्षेपी संगति हो। इसे *ह्यूम का सिद्धांत* कहते हैं, क्योंकि ह्यूम ने एक बार यह लिखा था:

> जब दो संख्याएँ इस प्रकार संबद्ध हों कि एक की प्रत्येक इकाई के अनुरूप दूसरी की सदैव एक इकाई हो, तो हम उन्हें बराबर कहते हैं। (Hume, 1740, Pt.III Bk.1 §1)

और Frege (1884, §63) ने ह्यूम के इस अंश को उद्धृत करके, फिर (वस्तुतः) (जिसे हमने कहा है) ह्यूम के सिद्धांत की रूपरेखा प्रस्तुत करके, इस सिद्धांत को समकालीन गणितीय-तार्किक महत्त्व दिलाया।

ह्यूम के सिद्धांत और मूल नियम V के बीच संरचनात्मक समानता पर ध्यान दीजिए। हमने इसे खंड 64.6 में इस प्रकार सूत्रबद्ध किया था:

$$\epsilon x\, F(x) = \epsilon x\, G(x) \text{iff} \, \forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)).$$

इस बिंदु पर कुछ टिप्पणी और तुलना उपयोगी हो सकती है।

ह्यूम के सिद्धांत या मूल नियम V जैसे सिद्धांत को समझने के दो ढंग हैं: *विधेयात्मक* या *अविधेयात्मक* (खंड 64.3 याद करें)। मूल नियम V के अविधेयात्मक पाठ में प्रत्येक F के लिए वस्तु $\epsilon x\, F(x)$ उसी परिमाणीकरण-क्षेत्र में आती है जिसका उपयोग हमने स्वयं मूल नियम V को सूत्रबद्ध करने में किया था। इसी प्रकार ह्यूम के सिद्धांत के अविधेयात्मक पाठ में प्रत्येक F के लिए वस्तु $\#x\, F(x)$ उसी परिमाणीकरण-क्षेत्र में आती है जिसका उपयोग हमने ह्यूम के सिद्धांत को सूत्रबद्ध करने में किया था। इसके विपरीत *विधेयात्मक* समझ में वस्तुएँ $\epsilon x\, F(x)$ और $\#x\, F(x)$ किसी *भिन्न* क्षेत्र की सत्ताएँ होंगी।

यदि हम मूल नियम V को अविधेयात्मक रूप से पढ़ें, तो सहज समुच्चय-निर्माण के माध्यम से वह असंगति की ओर ले जाता है (विवरण के लिए खंड 64.6 देखें)। सहज समुच्चय-निर्माण की तरह ही उसे *विधेयात्मक* रूप से पढ़कर संगत बनाया जा सकता है। किंतु तब वह संभवतः वह सब नहीं करेगा जो हम उससे चाहते थे।

किंतु ह्यूम के सिद्धांत को अविधेयात्मक रूप से संगत ढंग से पढ़ा *जा सकता है*। और इस प्रकार पढ़े जाने पर वह काफ़ी शक्तिशाली है।

उदाहरण के लिए विधेय "$x \neq x$" पर विचार करें, जिसे स्पष्टतः कोई वस्तु संतुष्ट नहीं करती। ह्यूम का सिद्धांत अब एक वस्तु $\#x(x \neq x)$ देता है। हम इसे संख्या 0 मान सकते हैं। अब *अविधेयात्मक* समझ में—किंतु *केवल* अविधेयात्मक समझ में—यह सत्ता 0 हमारे मूल परिमाणीकरण-क्षेत्र में आती है। इसलिए हम विधेय "$x = 0$" के साथ ह्यूम के सिद्धांत को सार्थक रूप से लागू करके एक वस्तु $\#x(x = 0)$ प्राप्त कर सकते हैं। हम इसे संख्या 1 मान सकते हैं। इसके अतिरिक्त ह्यूम के सिद्धांत से $0 \neq 1$ निष्पन्न होता है, क्योंकि अपने से असमान वस्तुओं से 0 के समान वस्तुओं तक कोई द्विआक्षेप नहीं हो सकता (पहली कोई नहीं, किंतु दूसरी एक है)। अब फिर अविधेयात्मक ढंग से काम करने पर 1 हमारे मूल परिमाणीकरण-क्षेत्र में आता है। अतः हम विधेय "$(x = 0 \vee x = 1)$" के साथ ह्यूम के सिद्धांत को सार्थक रूप से लागू करके वस्तु $\#x(x = 0 \vee x = 1)$ प्राप्त कर सकते हैं। हम इसे संख्या 2 मान सकते हैं, और दिखा सकते हैं कि $0 \neq 2$ और $1 \neq 2$, और इसी प्रकार आगे।

संक्षेप में, अविधेयात्मक रूप से लेने पर ह्यूम के सिद्धांत से निष्पन्न होता है कि *अनंततः अनेक वस्तुएँ हैं*। इसने *नव-फ़्रेगेय तर्कवादियों* को ह्यूम के सिद्धांत को अंकगणित का आधार मानने के लिए प्रेरित किया है।

किंतु फ़्रेगे ने *स्वयं* ह्यूम के सिद्धांत को अंकगणित का आधार नहीं माना। इसके बदले फ़्रेगे ने एक स्पष्ट परिभाषा से ह्यूम का सिद्धांत सिद्ध किया: $\#x\, F(x)$ को संकल्पना $F \sim \Phi$ के विस्तार के रूप में परिभाषित किया गया है। आधुनिक शब्दों में हम इसे $\#x\, F(x) = \{G : F \sim G\}$ के रूप में प्रस्तुत करने का प्रयास कर सकते हैं; किंतु यह हमें सहज समुच्चय-निर्माण की समस्याओं में वापस खींच लेगा।

अध्याय 71

कार्डिनल अंकगणित

71.1 मूल संक्रियाओं की परिभाषा

चूँकि हमें क्रम का ध्यान रखने की आवश्यकता नहीं है, कार्डिनल अंकगणित की परिभाषा क्रमसूचक अंकगणित की अपेक्षा कुछ सरल है। हम योग, गुणन और घातांक को एक साथ परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 71.1. जब $\mathfrak{a}$ और $\mathfrak{b}$ कार्डिनल हों:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} &= |\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}| \\ \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} &= |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| \\ \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} &= \left|{}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\right| \end{aligned}$$

जहाँ ${}^{X}Y = \{f : f$ एक फलन है $X \to Y\}$। (यह दिखाना सरल है कि किन्हीं समुच्चयों X और Y के लिए ${}^{X}Y$ का अस्तित्व है; इसे हम अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।)

इस परिभाषा की व्याख्या सहायक हो सकती है। योग के विषय में: इसमें परिभाषा 69.1 में परिभाषित असंयुक्त योग $\sqcup$ की धारणा का उपयोग होता है; और यह देखना सरल है कि यह परिभाषा परिमित स्थितियों में सही परिणाम देती है। गुणन के विषय में: प्रतिज्ञप्ति 1.27 हमें बताता है कि यदि A के n सदस्य और B के m सदस्य हों, तो $A \times B$ के $n \cdot m$ सदस्य होते हैं, इसलिए हमारी परिभाषा इस विचार का केवल परिमितेतर गुणन तक सामान्यीकरण करती है। घातांक भी समान है: हम इस विचार का केवल परिमित से परिमितेतर तक सामान्यीकरण कर रहे हैं। वास्तव में कुछ अर्थों में परिमितेतर कार्डिनल अंकगणित "साधारण" अंकगणित से परिमितेतर क्रमसूचक अंकगणित की अपेक्षा कहीं अधिक मिलता है:

प्रतिज्ञप्ति 71.2. *$\oplus$ और $\otimes$ क्रमविनिमेय और साहचर्यात्मक हैं।*

प्रमाण. क्रमविनिमेयता के लिए सहायक प्रमेय 70.3 से यह देखना पर्याप्त है कि $(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}) \approx (\mathfrak{b} \sqcup \mathfrak{a})$ और $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \approx (\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})$। साहचर्यता को हम अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

प्रतिज्ञप्ति 71.3. *A अनंत है तभी जब $|A| \oplus 1 = 1 \oplus |A| = |A|$।*

प्रमाण. प्रमेय 70.7 की तरह, सहायक प्रमेय 69.10 और सहायक प्रमेय 70.3 से। □

इससे स्पष्ट होता है कि क्रमसूचक और कार्डिनल योग/गुणन के लिए हमें भिन्न चिह्नों का उपयोग क्यों करना पड़ता है: ये वास्तव में *भिन्न* संक्रियाएँ हैं। अगले दो परिणाम दिखाते हैं कि क्रमसूचक और कार्डिनल घातांक भी भिन्न संक्रियाएँ हैं। (याद करें कि परिभाषा 65.7 से $2 = \{0, 1\}$ निष्पन्न होता है):

सहायक प्रमेय 71.4. *किसी भी A के लिए $|\wp(A)| = 2^{|A|}$।*

प्रमाण. प्रत्येक उपसमुच्चय $B \subseteq A$ के लिए $\chi_B \in {}^A2$ इस प्रकार दिया हो:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \in B \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अब $f(B) = \chi_B$ रखें; इससे कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण $f\colon \wp(A) \to {}^A2$ परिभाषित होता है। अतः $\wp(A) \approx {}^A2$। फलतः $\wp(A) \approx {}^{|A|}2$, इसलिए $|\wp(A)| = \left|{}^{|A|}2\right| = 2^{|A|}$। □

यह संक्षिप्त प्रमाण वस्तुतः खंड 4.13 की चर्चा को अपने में समेट लेता है। वहाँ हमने दिखाया था कि $\wp(\omega)$ की अगणनीयता को अनंत द्विआधारी शृंखलाओं के समुच्चय $\mathbb{B}^\omega$ की अगणनीयता तक कैसे "घटाया" जाए। वस्तुतः $\mathbb{B}^\omega$ केवल ${}^\omega2$ है; और पिछले प्रमाण ने दिखाया कि खंड 4.13 में प्रयुक्त तर्क ω के स्थान पर किसी भी समुच्चय A के साथ चलेगा। यह परिणाम कार्डिनल घातांक के बारे में एक त्वरित तथ्य भी देता है:

उपप्रमेय 71.5. *किसी भी कार्डिनल $\mathfrak{a}$ के लिए $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$।*

प्रमाण. कैंटर के प्रमेय (प्रमेय 4.24) और सहायक प्रमेय 71.4 से। □

अतः $\omega < 2^\omega$। किंतु ध्यान दें: यह *कार्डिनल* घातांक के बारे में परिणाम है। इसकी तुलना *क्रमसूचक* घातांक से करनी चाहिए, क्योंकि बाद वाली स्थिति में $\omega = 2^{(\omega)}$ (खंड 69.5 देखें)।

कार्डिनल घातांक की चर्चा करते हुए हम उस "ढंग" के बारे में भी कुछ अधिक सटीक हो सकते हैं जिसमें $\mathbb{R}$ अगणनीय है।

प्रमेय 71.6. $|\mathbb{R}| = 2^\omega$

प्रमाण की रूपरेखा. इसे सिद्ध करने के अनेक ढंग हैं। सबसे सीधा ढंग यह तर्क देना है कि $\wp(\omega) \preceq \mathbb{R}$ और $\mathbb{R} \preceq \wp(\omega)$, फिर श्रेडर–बर्नस्टीन से $\mathbb{R} \approx \wp(\omega)$ निष्कर्षित करना, और सहायक प्रमेय 71.4 से $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ निष्कर्षित करना। अंतःक्षेप $f\colon \wp(\omega) \to \mathbb{R}$ और $g\colon \mathbb{R} \to \wp(\omega)$ परिभाषित करना हम एक (ज्ञानवर्धक) अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं। □

71.2 योग और गुणन का सरलीकरण

पता चलता है कि परिमितेतर कार्डिनल योग और गुणन *अत्यंत* सरल हैं। यह इस तथ्य से निष्पन्न होता है कि कार्डिनल (कुछ) क्रमसूचक हैं, अतः सुव्यवस्थित हैं और इसलिए एक विशेष ढंग से उनका परिचालन किया जा सकता है। किंतु इसे दिखाना इतना सरल *नहीं* है। आरंभ में हमें एक युक्तिपूर्ण परिभाषा चाहिए:

परिभाषा 71.7. हम क्रमसूचकों के युग्मों पर एक *विहित क्रम* $\lhd$ इस शर्त से परिभाषित करते हैं कि $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \lhd \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ तभी जब इनमें से कोई एक हो:

1. $\max(\alpha_1, \alpha_2) < \max(\beta_1, \beta_2)$; अथवा
2. $\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2)$ और $\alpha_1 < \beta_1$; अथवा
3. $\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2)$ और $\alpha_1 = \beta_1$ और $\alpha_2 < \beta_2$

सहायक प्रमेय 71.8. *किसी भी क्रमसूचक α के लिए $\langle \alpha \times \alpha, \lhd \rangle$ एक सुव्यवस्था है।*

प्रमाण. स्पष्टतः $\lhd$, $\alpha \times \alpha$ पर संबद्ध है। मान लें कि न $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ से $\lhd$-लघुतर है, न दूसरा पहले से। तब $\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2)$ और $\alpha_1 = \beta_1$ और $\alpha_2 = \beta_2$, इसलिए $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$।

सुव्यवस्था दिखाने के लिए $X \subseteq \alpha \times \alpha$ को अरिक्त मानें। चूँकि α क्रमसूचक है, कोई δ समुच्चय $\{\max(\gamma_1, \gamma_2) : \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \in X\}$ का लघुतम सदस्य है। अब $\{\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \in X : \max(\gamma_1, \gamma_2) = \delta\}$ से उन युग्मों को छोड़ दें जिनका पहला निर्देशांक लघुतम नहीं है; शेष युग्मों में लघुतम दूसरे निर्देशांक वाला युग्म X का $\lhd$-लघुतम अवयव है।□

अब एक छोटा-सा सरल प्रेक्षण:

प्रतिज्ञप्ति 71.9. *यदि $\alpha \approx \beta$, तो $\alpha \times \alpha \approx \beta \times \beta$।*

प्रमाण. बस $f : \alpha \to \beta$ से $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \mapsto \langle f(\gamma_1), f(\gamma_2) \rangle$ प्रेरित होने दें। □

अब हम इन सबका उपयोग एक महत्त्वपूर्ण लेम्मा सिद्ध करने में करेंगे:

सहायक प्रमेय 71.10. *किसी भी अनंत क्रमसूचक α के लिए $\alpha \approx \alpha \times \alpha$।*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा α को वह लघुतम अनंत क्रमसूचक मानें जिसके लिए यह असत्य है। प्रतिज्ञप्ति 4.12 दिखाता है कि $\omega \approx \omega \times \omega$, अतः $\omega \in \alpha$। इसके अतिरिक्त α एक कार्डिनल है: विरोधाभास के लिए अन्यथा मान लें; तब $|\alpha| \in \alpha$, इसलिए परिकल्पना से $|\alpha| \approx |\alpha| \times |\alpha|$; और परिभाषा से $|\alpha| \approx \alpha$; अतः प्रतिज्ञप्ति 71.9 से $\alpha \approx \alpha \times \alpha$।

अब प्रत्येक $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \in \alpha \times \alpha$ के लिए इस खंड पर विचार करें:

$$\mathrm{Seg}(\gamma_1, \gamma_2) = \{\langle \delta_1, \delta_2 \rangle \in \alpha \times \alpha : \langle \delta_1, \delta_2 \rangle \lhd \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle\}$$

$\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$ रखते हुए ध्यान दें कि $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \lhd \langle \gamma + 1, \gamma + 1 \rangle$। अतः जब γ अनंत हो, ध्यान दें:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Seg}(\gamma_1, \gamma_2) &\precsim ((\gamma + 1) \cdot (\gamma + 1)) \\
&\approx (\gamma \cdot \gamma), \text{ सहायक प्रमेय 69.10 और प्रतिज्ञप्ति 71.9 से} \\
&\approx \gamma, \text{ आगमन परिकल्पना से} \\
&\prec \alpha, \text{ क्योंकि } \alpha \text{ एक कार्डिनल है}
\end{aligned}$$

अतः $\mathrm{ord}(\alpha \times \alpha, \lhd) \leq \alpha$, और फलतः $\alpha \times \alpha \preceq \alpha$। चूँकि निस्संदेह $\alpha \preceq \alpha \times \alpha$, परिणाम श्रेडर–बर्नस्टीन से निष्पन्न होता है। □

अंततः हम अपने सरलीकरण परिणाम पर पहुँचते हैं:

प्रमेय 71.11. *यदि $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ अनंत कार्डिनल हैं, तो:*

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathit{max}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

प्रमाण. व्यापकता खोए बिना मान लें $\mathfrak{a} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$। तब सहायक प्रमेय 71.10 का उपयोग करके, $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \leq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} \leq \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$। □

इसी प्रकार, यदि $\mathfrak{a}$ अनंत है, तो $\leq \mathfrak{a}$ आकार वाले समुच्चयों के $\mathfrak{a}$-आकार वाले सम्मिलन का आकार $\leq \mathfrak{a}$ है:

प्रतिज्ञप्ति 71.12. *$\mathfrak{a}$ को एक अनंत कार्डिनल मानें। प्रत्येक क्रमसूचक $\beta \in \mathfrak{a}$ के लिए X_β ऐसा समुच्चय हो कि $|X_\beta| \leq \mathfrak{a}$। तब $\left|\bigcup_{\beta \in \mathfrak{a}} X_\beta\right| \leq \mathfrak{a}$।*

प्रमाण. प्रत्येक $\beta \in \mathfrak{a}$ के लिए कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f_\beta : X_\beta \to \mathfrak{a}$ नियत करें।[1] एकैकी प्रतिचित्रण $g : \bigcup_{\beta \in \mathfrak{a}} X_\beta \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ को $g(v) = \langle \beta, f_\beta(v) \rangle$ से परिभाषित करें, जहाँ $v \in X_\beta$ और किसी $\gamma \in \beta$ के लिए $v \notin X_\gamma$। अब प्रमेय 71.11 से $\bigcup_{\beta \in \mathfrak{a}} X_\beta \preceq \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}$। □

[1] इन्हें "नियत" कैसे किया गया है? खंड 72.5 देखें।

71.3 कार्डिनल घातांक के कुछ सरलीकरण

यद्यपि $\lhd$ को परिभाषित करना कुछ जटिल था, उसका परिणाम कार्डिनल योग और गुणन संबंधी उपयोगी परिणाम प्रमेय 71.11 है। किंतु परिमितेतर घातांक का इतना सीधा सरलीकरण नहीं किया जा सकता। इसका कारण समझाने के लिए हम एक ऐसे परिणाम से आरंभ करते हैं जो परिमित स्थिति के परिचित प्रतिरूप का विस्तार करता है (यद्यपि उसका प्रमाण अमूर्तन के उच्च स्तर पर है):

प्रतिज्ञप्ति 71.13. *$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \otimes \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$ और $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\otimes\mathfrak{c}}$, किन्हीं कार्डिनलों $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ के लिए।*

प्रमाण. पहले दावे के लिए किसी फलन $f\colon (\mathfrak{b} \sqcup \mathfrak{c}) \to \mathfrak{a}$ पर विचार करें। अब प्रत्येक $\beta \in \mathfrak{b}$ के लिए $f_{\mathfrak{b}}(\beta) = f(\beta, 0)$ और प्रत्येक $\gamma \in \mathfrak{c}$ के लिए $f_{\mathfrak{c}}(\gamma) = f(\gamma, 1)$ परिभाषित करके "इसे विभाजित करें"। प्रतिचित्रण $f \mapsto (f_{\mathfrak{b}} \times f_{\mathfrak{c}})$ एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है ${}^{\mathfrak{b}\sqcup\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \to ({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \times {}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a})$.

दूसरे दावे के लिए किसी फलन $f\colon \mathfrak{c} \to ({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ पर विचार करें; अतः प्रत्येक $\gamma \in \mathfrak{c}$ के लिए हमारे पास कोई फलन $f(\gamma)\colon \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ है। अब प्रत्येक $\langle \beta, \gamma \rangle \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ के लिए $f^*(\beta, \gamma) = (f(\gamma))(\beta)$ परिभाषित करें। प्रतिचित्रण $f \mapsto f^*$ एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है ${}^{\mathfrak{c}}({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) \to {}^{\mathfrak{b}\otimes\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$. □

अब अनंत कार्डिनलों से काम करते समय हम $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ का परिकलन करने का कोई सरल ढंग *चाहेंगे*। इस दिशा में यह एक अच्छा कदम है:

प्रतिज्ञप्ति 71.14. *यदि $2 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ और $\mathfrak{b}$ अनंत है, तो $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$।*

प्रमाण.

$$\begin{aligned} 2^{\mathfrak{b}} &\leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}, \text{ क्योंकि } 2 \leq \mathfrak{a} \\ &\leq (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}, \text{ सहायक प्रमेय 71.4 से} \\ &= 2^{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}}, \text{ प्रतिज्ञप्ति 71.13 से} \\ &= 2^{\mathfrak{b}}, \text{ प्रमेय 71.11 से} \end{aligned}$$ □

हमें वास्तव में इसके और सरलीकरण की अपेक्षा नहीं करनी चाहिए, क्योंकि सहायक प्रमेय 71.4 से $\mathfrak{b} < 2^{\mathfrak{b}}$। किंतु यह हमें नहीं बताता कि $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ होने पर $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ के बारे में क्या कहा जाए। निस्संदेह यदि $\mathfrak{b}$ *परिमित* है, तो हम जानते हैं कि क्या करना है।

प्रतिज्ञप्ति 71.15. *यदि $\mathfrak{a}$ अनंत और $n \in \omega$, तो $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$।*

प्रमाण. $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, प्रमेय 71.11 से। □

इसके अतिरिक्त कुछ अन्य स्थितियों में हम $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ के आकार को नियंत्रित कर सकते हैं:

प्रतिज्ञप्ति 71.16. *यदि $2 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \leq 2^{\mathfrak{b}}$ और $\mathfrak{b}$ अनंत है, तो $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$।*

प्रमाण. $2^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq (2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}\otimes\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$, प्रतिज्ञप्ति 71.14 की ही रीति से। □

किंतु इस बिंदु के आगे विषय कहीं अधिक सूक्ष्म हो जाता है।

71.4 सातत्य परिकल्पना

पिछला परिणाम (सही रूप से) संकेत करता है कि यदि यह प्रत्याभूत हो कि अनंत कार्डिनल 2 की घातों के साथ, अर्थात् (सहायक प्रमेय 71.4 से) घात समुच्चय लेने के साथ, "सीधे-सादे ढंग से व्यवहार" करते हैं, तो कार्डिनल घातांक काफ़ी *सरल* होगा। किंतु हम यह नहीं मान सकते कि अनंत कार्डिनल घात समुच्चयों के साथ वास्तव में सीधे-सादे ढंग से व्यवहार *करते* हैं।

इसे खोलकर समझने के लिए हम पहले कुछ सुविधाजनक संकेत प्रस्तुत करते हैं।

परिभाषा 71.17. जहाँ $\mathfrak{a}^{\oplus}$, $\mathfrak{a}$ से पूर्णतः बड़ा लघुतम कार्डिनल है, हम दो अनंत अनुक्रम परिभाषित करते हैं:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega & \beth_0 &= \omega \\ \aleph_{\alpha+1} &= (\aleph_\alpha)^{\oplus} & \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \aleph_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta & \beth_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} \beth_\beta \end{aligned} \qquad \text{जब } \alpha \text{ सीमा क्रमसूचक हो।}$$

$\mathfrak{a}^{\oplus}$ की परिभाषा उचित है, क्योंकि प्रमेय 70.14 हमें बताता है कि प्रत्येक कार्डिनल $\mathfrak{a}$ के लिए $\mathfrak{a}$ से बड़ा कोई कार्डिनल है, और परिमितेतर आगमन प्रत्याभूत करता है कि $\mathfrak{a}$ से बड़ा कोई *लघुतम* कार्डिनल है। $\aleph$ अनुक्रम की शेष परिभाषा परिमितेतर पुनरावर्तन से दी जाती है।

कैंटर ने यह "$\aleph$" संकेत प्रस्तुत किया; यह *आलेफ़* है, हिब्रू वर्णमाला का पहला अक्षर और "अनंत" के हिब्रू शब्द का पहला अक्षर। पियर्स ने "$\beth$" संकेत प्रस्तुत किया; यह *बेथ* है, जो हिब्रू वर्णमाला का दूसरा अक्षर है।[2] अब ये संकेत हमें अनंत कार्डिनल देते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 71.18. *प्रत्येक क्रमसूचक α के लिए $\aleph_\alpha$ और $\beth_\alpha$ कार्डिनल हैं।*

प्रमाण. दोनों परिणाम सरल परिमितेतर आगमन से सिद्ध होते हैं। उपप्रमेय 70.9 से $\aleph_0 = \beth_0 = \omega$ एक कार्डिनल है। यह मानकर कि $\aleph_\alpha$ और $\beth_\alpha$ दोनों कार्डिनल हैं, $\aleph_{\alpha+1}$ और $\beth_{\alpha+1}$ स्पष्ट रूप से कार्डिनलों के रूप में परिभाषित हैं। और प्रतिज्ञप्ति 70.13 से कार्डिनलों के किसी समुच्चय का सम्मिलन कार्डिनल है। □

इसके अतिरिक्त प्रत्येक अनंत कार्डिनल एक $\aleph$ है:

प्रतिज्ञप्ति 71.19. *यदि $\mathfrak{a}$ कोई अनंत कार्डिनल है, तो किसी अद्वितीय γ के लिए $\mathfrak{a} = \aleph_\gamma$।*

प्रमाण. कार्डिनलों पर परिमितेतर आगमन से। आगमन के लिए मान लें कि यदि $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, तो $\mathfrak{b} = \aleph_{\gamma_\mathfrak{b}}$। यदि किसी $\mathfrak{b}$ के लिए $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{\oplus}$, तो $\mathfrak{a} = (\aleph_{\gamma_\mathfrak{b}})^{\oplus} = \aleph_{\gamma_\mathfrak{b}+1}$। यदि $\mathfrak{a}$ किसी कार्डिनल का उत्तरवर्ती नहीं है, तो चूँकि कार्डिनल क्रमसूचक होते हैं, $\mathfrak{a} = \bigcup_{\mathfrak{b}<\mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \bigcup_{\mathfrak{b}<\mathfrak{a}} \aleph_{\gamma_\mathfrak{b}}$, अतः $\mathfrak{a} = \aleph_\gamma$, जहाँ $\gamma = \bigcup_{\mathfrak{b}<\mathfrak{a}} \gamma_\mathfrak{b}$। □

चूँकि प्रत्येक अनंत कार्डिनल एक $\aleph$ है, यह हमें पूछने के लिए प्रेरित करता है: क्या प्रत्येक अनंत कार्डिनल एक $\beth$ है? यदि यह वास्तव में *सत्य होता*, तो अनंत कार्डिनल घात समुच्चय लेने की संक्रिया के साथ "सीधे-सादे ढंग से व्यवहार" करते। वास्तव में तब हमारे पास निम्न होता:

> *सामान्यीकृत सातत्य परिकल्पना* (GCH)। सभी α के लिए $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$।

[2] पियर्स ने दिसंबर 1900 में कैंटर को लिखे एक पत्र में इस संकेत का उपयोग किया। दुर्भाग्य से पियर्स ने वहाँ यह त्रुटिपूर्ण तर्क भी दिया कि $\alpha \geq \omega$ के लिए $\beth_\alpha$ का अस्तित्व नहीं है।

इसके अतिरिक्त यदि GCH सत्य होता, तो हम कार्डिनल घातांक में कुछ पर्याप्त सरलीकरण कर सकते थे। विशेषतः हम दिखा सकते थे कि $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ होने पर $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ का मान $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{a}^{\oplus}$ के बीच रहता है। फिर हम वे सटीक शर्तें दे सकते थे जो निर्धारित करती हैं कि दोनों में से कौन-सी संभावना घटित होती है (अर्थात् $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ अथवा $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}^{\oplus}$)। [3]

किंतु GCH एक *परिकल्पना* है, *प्रमेय* नहीं। वास्तव में Gödel (1938) ने सिद्ध किया कि यदि **ZFC** संगत है, तो **ZFC** + GCH भी संगत है। किंतु बाद में पता चला कि हम उसी प्रकार **ZFC** में ¬GCH भी जोड़ सकते हैं। वास्तव में GCH के सबसे सरल अतुच्छ *दृष्टांत* पर विचार करें:

सातत्य परिकल्पना (CH)। $\aleph_1 = \beth_1$।

Cohen (1963) ने सिद्ध किया कि यदि **ZFC** संगत है, तो **ZFC** + ¬CH भी संगत है। अतः सातत्य परिकल्पना **ZFC** से स्वतंत्र है।

इसे सातत्य परिकल्पना इसलिए कहते हैं क्योंकि "सातत्य" वास्तविक रेखा $\mathbb{R}$ का दूसरा नाम है। प्रमेय 71.6 हमें बताता है कि $|\mathbb{R}| = \beth_1$। अतः सातत्य परिकल्पना कहती है कि प्राकृतिक संख्याओं की कार्डिनलता $\aleph_0 = \beth_0$ और सातत्य की कार्डिनलता $\beth_1$ के बीच कोई कार्डिनल नहीं है।

ZFC से (G)CH की *स्वतंत्रता* को देखते हुए उनकी *सत्यता* के बारे में हमें क्या कहना चाहिए? इस पर कहने के लिए *बहुत कुछ* है। वास्तव में समुच्चय सिद्धांत के हाल के बहुत-से फलदायी कार्य इन प्रश्नों की जाँच की ओर निर्देशित रहे हैं। किंतु दो संक्षिप्त बिंदुओं पर अवश्य बल देना चाहिए।

पहला: इन औपचारिक स्वतंत्रता परिणामों से यह *तत्काल* निष्पन्न नहीं होता कि GCH या CH में से किसी का सत्यता-मूल्य *अनिर्धारित* है। संभव है कि हमें केवल कुछ और ऐसे अभिगृहीत जोड़ने हों जो हमें स्वाभाविक लगें और जो प्रश्न को किसी एक दिशा में तय कर दें। गेडेल ने स्वयं सुझाया कि यही उचित प्रतिक्रिया थी।

दूसरा: **ZFC** से CH की स्वतंत्रता निस्संदेह *चकित करने वाली* है, किंतु वह (शाब्दिक अर्थ में) *अविश्वसनीय* नहीं है। बात केवल इतनी है कि **ZFC** हमें जितना बताता है, उसके अनुसार कार्डिनलों से उनके उत्तरवर्तियों तक जाने में केवल घात समुच्चय लेने की अपेक्षा कोई अधिक सूक्ष्म साधन लग सकता है।

इन दोनों प्रेक्षणों के बाद यदि आप और जानना चाहते हैं, तो अब आपको इस बहस में हित रखने वाले विभिन्न दार्शनिकों और गणितज्ञों की ओर जाना होगा। [4]

71.5 ℵ-नियत बिंदु

अध्याय 67 में हमने सुझाया था कि प्रतिस्थापन के लिए औचित्य की आवश्यकता है, क्योंकि वह पदानुक्रम को बहुत ऊँचा होने के लिए बाध्य करता है। अब कुछ कार्डिनल अंकगणित कर लेने के बाद हम पदानुक्रम की ऊँचाई का एक छोटा चित्रण दे सकते हैं।

स्पष्टतः $0 < \aleph_0$, और $1 < \aleph_1$, और $2 < \aleph_2$...और वास्तव में आकार का अंतर प्रत्येक चरण के साथ केवल *बढ़ता* जाता है। अतः यह अनुमान लगाना आकर्षक है कि प्रत्येक क्रमसूचक κ के लिए $\kappa < \aleph_\kappa$।

किंतु **ZFC** दिए होने पर यह अनुमान *असत्य* है। वास्तव में हम सिद्ध कर सकते हैं कि ℵ-*नियत बिंदु* हैं, अर्थात् ऐसे कार्डिनल κ जिनके लिए $\kappa = \aleph_\kappa$।

प्रतिज्ञप्ति 71.20. *कोई ℵ-नियत बिंदु है।*

प्रमाण. पुनरावर्तन का उपयोग करके परिभाषित करें:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 0 \\ \kappa_{n+1} &= \aleph_{\kappa_n} \\ \kappa &= \bigcup_{n<\omega} \kappa_n \end{aligned}$$

[3] शर्त *सह-अंतिमता* द्वारा निर्धारित होती है।

[4] यद्यपि आप Potter (2004, §15.6) को पढ़कर आरंभ कर सकते हैं।

अब प्रतिज्ञप्ति 70.13 से κ एक कार्डिनल है। किंतु अब:

$$\kappa = \bigcup_{n<\omega} \kappa_{n+1} = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\kappa_n} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \aleph_\alpha = \aleph_\kappa$$

□

बूलोस ने एक बार ठीक उसी $\aleph$-नियत बिंदु के बारे में लेख लिखा जिसे हमने अभी निर्मित किया है। अपने लेख के आरंभ में κ के अस्तित्व पर ध्यान दिलाने के बाद उन्होंने कहा:

> [κ] उन लोगों की दृष्टि में, जिनका समुच्चय सिद्धांत से पहले कोई परिचय नहीं रहा है, एक *बहुत बड़ी* संख्या [है]—मेरे विचार में इतनी बड़ी कि वह किसी भी ऐसे सिद्धांत की सत्यता पर प्रश्न उठाती है जिसका एक कथन यह दावा हो कि कम-से-कम κ वस्तुएँ हैं। (Boolos, 2000, p. 257)

और अंततः उन्होंने अपना लेख इस प्रश्न के साथ समाप्त किया:

> [क्या] हमें संदेह है कि कहानी के आरंभ में स्थिति चाहे जैसी भी रही हो, यहाँ तक पहुँचते-पहुँचते पहिए व्यर्थ घूम रहे हैं और हम अब किसी वास्तविक स्थिति का वर्णन नहीं सुन रहे हैं? (Boolos, 2000, p. 268)

यदि हम वास्तव में "किसी वास्तविक स्थिति" से आगे निकल गए हैं, तो दोष सीधे प्रतिस्थापन पर लगाना होगा। क्योंकि यही वह अभिगृहीत है जो हमारे प्रमाण को काम करने देता है। ऐसी स्थिति में, संभवतः बूलोस को कुछ दशक पहले किया अपना यह दावा फिर देखना होगा कि प्रतिस्थापन के "कोई अवांछनीय" परिणाम नहीं हैं (खंड 68.3 देखें)।

किंतु क्या κ का अस्तित्व इतना बुरा है? यहाँ रसेल के *ट्रिस्ट्रम शैंडी विरोधाभास* पर विचार करना सहायक हो सकता है। ट्रिस्ट्रम शैंडी अपने जीवन का विवरण डायरी में लिखता है, किंतु एक दिन दर्ज करने में उसे एक वर्ष लगता है। प्रत्येक बीतते वर्ष के साथ ट्रिस्ट्रम और पीछे रह जाता है: एक वर्ष बाद उसने केवल एक दिन दर्ज किया और 364 दिन बिना दर्ज किए जी चुका है; दो वर्ष बाद उसने केवल दो दिन दर्ज किए और 728 दिन बिना दर्ज किए जी चुका है; तीन वर्ष बाद उसने केवल तीन दिन दर्ज किए और 1092 दिन बिना दर्ज किए जी चुका है...[5] फिर भी यदि ट्रिस्ट्रम *अमर* है, तो वह प्रत्येक दिन दर्ज कर लेगा, क्योंकि वह अपने जीवन के nवें वर्ष में nवाँ दिन दर्ज करेगा। इसलिए "समय के अंत में" ट्रिस्ट्रम के पास पूरी डायरी होगी।

अब: यह उस विचार से इतना भिन्न क्यों है कि κ तक α, $\aleph_\alpha$ से छोटा—और वास्तव में निरंतर, अत्यधिक छोटा—है, और κ पर हम बराबरी पा लेते हैं तथा $\kappa = \aleph_\kappa$?

इसे अलग रखते हुए और यह मानते हुए कि हम **ZFC** को स्वीकार करते हैं, आइए नियत-बिंदु निर्माणों के विषय में कुछ और रोचक परिणामों के साथ समाप्त करें। अगले तीन परिणाम सहज रूप से स्थापित करते हैं कि कोई (अतुच्छ) बिंदु है जहाँ पदानुक्रम जितना ऊँचा है उतना ही चौड़ा भी है:

प्रतिज्ञप्ति 71.21. *कोई $\beth$-नियत बिंदु है, अर्थात् कोई ऐसा κ कि $\kappa = \beth_\kappa$।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 71.20 की तरह, "$\aleph$" के स्थान पर "$\beth$" का उपयोग करके। □

प्रतिज्ञप्ति 71.22. $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ *। यदि $\omega \cdot \omega \leq \alpha$, तो $|V_\alpha| = \beth_\alpha$।*

प्रमाण. पहला दावा सरल परिमितेतर आगमन से सिद्ध होता है। दूसरा दावा इसलिए निष्पन्न होता है कि यदि $\omega \cdot \omega \leq \alpha$, तो $\omega + \alpha = \alpha$। इसे स्थापित करने के लिए हम अध्याय 69 के क्रमसूचक अंकगणित संबंधी तथ्यों का उपयोग करते हैं। पहले ध्यान दें कि $\omega \cdot \omega = \omega \cdot (1+\omega) = (\omega \cdot 1) + (\omega \cdot \omega) = \omega + (\omega \cdot \omega)$। अब यदि $\omega \cdot \omega \leq \alpha$, अर्थात् किसी β के लिए $\alpha = (\omega \cdot \omega) + \beta$, तो $\omega + \alpha = \omega + ((\omega \cdot \omega) + \beta) = (\omega + (\omega \cdot \omega)) + \beta = (\omega \cdot \omega) + \beta = \alpha$।□

उपप्रमेय 71.23. *कोई ऐसा κ है कि $|V_\kappa| = \kappa$।*

प्रमाण. κ को प्रतिज्ञप्ति 71.21 द्वारा दिया कोई $\beth$-नियत बिंदु मानें। स्पष्टतः $\omega \cdot \omega < \kappa$। अतः प्रतिज्ञप्ति 71.22 से $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$। □

[5] अधिवर्षों को भूलते हुए।

V_κ के नीचे उतने ही चरण हैं जितने V_κ के अवयव। अतः सहज रूप से V_κ जितना ऊँचा है उतना ही चौड़ा है। यह बहुत ट्रिस्ट्रम-शैंडी जैसा है: हम *घात समुच्चय* लेकर एक चरण से अगले चरण तक जाते हैं और इस प्रकार प्रत्येक कदम पर अपने पदानुक्रम को *कहीं* बड़ा बनाते हैं। किंतु "अंत में", अर्थात् चरण κ पर, पदानुक्रम की चौड़ाई उसकी ऊँचाई को पकड़ लेती है।

कोई पूछ सकता है: *पदानुक्रम की चौड़ाई उसकी ऊँचाई के बराबर कितनी बार होती है?* उत्तर है: *जितनी बार क्रमसूचक हैं।* किंतु इसके लिए कुछ व्याख्या चाहिए।

हम एक पद τ इस प्रकार परिभाषित करते हैं। किसी भी A के लिए रखें:

$$\begin{aligned}\tau_0(A) &= |A| \\ \tau_{n+1}(A) &= \beth_{\tau_n(A)} \\ \tau(A) &= \bigcup_{n<\omega} \tau_n(A)\end{aligned}$$

प्रतिज्ञप्ति 71.21 की तरह किसी भी A के लिए $\tau(A)$ एक $\beth$-नियत बिंदु है, और तुच्छतः $|A| < \tau(A)$। अब इस पुनरावर्ती परिभाषा पर विचार करें:

$$\begin{aligned}W_0 &= 0 \\ W_{\alpha+1} &= \tau(W_\alpha) \\ W_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta, \text{ जब } \alpha \text{ सीमा क्रमसूचक हो}\end{aligned}$$

यह निर्माण सभी क्रमसूचकों के लिए परिभाषित है। अतः सहज रूप से W क्रमसूचकों से $\beth$-नियत बिंदुओं तक " एकैकी प्रतिचित्रण" है। और ठीक पहले की तरह किसी भी α के लिए V_{W_α} जितना ऊँचा है उतना ही चौड़ा है।

प्रश्न

प्रश्न 71.1. Z^- में सिद्ध कीजिए कि किन्हीं समुच्चयों X और Y के लिए ${}^XY$ का अस्तित्व है। **ZF** में काम करते हुए सहायक प्रमेय 69.9 की रीति से $\mathrm{rank}(X)$ और $\mathrm{rank}(Y)$ से $\mathrm{rank}({}^XY)$ परिकलित कीजिए।

प्रश्न 71.2. सिद्ध कीजिए कि $\oplus$ और $\otimes$ साहचर्यात्मक हैं।

प्रश्न 71.3. यह दिखाकर कि $\wp(\omega) \preceq \mathbb{R}$ और $\mathbb{R} \preceq \wp(\omega)$, प्रमेय 71.6 का प्रमाण पूरा कीजिए।

अध्याय 72

चयन

72.1 परिचय

अध्याय 70 से 71 में हमने कार्डिनलों को क्रमसूचक मानकर कार्डिनलों का सिद्धांत विकसित किया। यह दृष्टिकोण सुव्यवस्था अभिगृहीत पर निर्भर है। पता चलता है कि सुव्यवस्था एक अन्य सिद्धांत—चयन अभिगृहीत—के तुल्य है और उसकी स्वीकार्यता पर गंभीर दार्शनिक चर्चा हुई है। इस अध्याय में हमारे प्रश्न हैं: इस अभिगृहीत का उपयोग कैसे होता है और क्या उसका औचित्य दिया जा सकता है?

72.2 टार्स्की–स्कॉट युक्ति

परिभाषा 70.1 में हमने कार्डिनलों को क्रमसूचकों के रूप में परिभाषित किया। इसके लिए हमने सुव्यवस्था अभिगृहीत माना। हमने ऐसा केवल इसलिए किया कि यही "प्रचलित मानक" है।

इसलिए सुव्यवस्था से जुड़े दार्शनिक प्रश्नों पर चर्चा करने से पहले यह स्पष्ट होना महत्त्वपूर्ण है कि हम प्रचलित मानक से हट *सकते हैं* और सुव्यवस्था माने *बिना* कार्डिनलों का सिद्धांत विकसित कर सकते हैं। हम फिर भी $A \approx B$, $A \preceq B$ और $A \prec B$ की परिभाषाएँ वैसे ही उपयोग कर सकते हैं जैसे वे अध्याय 4 में आई थीं। हमें केवल *कार्डिनल* की एक नई धारणा चाहिए।

एक सहज विचार A की कार्डिनलता को इस प्रकार परिभाषित करने का प्रयास होगा:

$$\{x : A \approx x\}.$$

आप इसकी तुलना फ़्रेगे की $\#xFx$ की परिभाषा से कर सकते हैं, जिसकी रूपरेखा खंड 70.5 के बिल्कुल अंत में दी गई थी। वहाँ संकेत किए कारणों से यह परिभाषा विफल होती है। प्रत्येक एकल समुच्चय $\{\emptyset\}$ के साथ समसंख्य है। किंतु पदानुक्रम के प्रत्येक उत्तरवर्ती चरण पर नए एकल समुच्चय बनते हैं (बस पिछले चरण के एकल समुच्चय पर विचार करें)। अतः $\{x : A \approx x\}$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि उसका कोई रैंक नहीं हो सकता।

इस समस्या से बचने के लिए हम टार्स्की और स्कॉट की एक युक्ति का उपयोग करते हैं:[1]

परिभाषा 72.1 (Tarski–Scott). किसी भी सूत्र $\varphi(x)$ के लिए $[x : \varphi(x)]$ उन सभी लघुतम संभव रैंक वाले x का समुच्चय हो जिनके लिए $\varphi(x)$ (अथवा यदि कोई ऐसा x न हो तो $\emptyset$)।

हमें जाँचना चाहिए कि यह परिभाषा वैध है। **ZF** में काम करते हुए प्रमेय 67.13 प्रत्याभूत करता है कि प्रत्येक x के लिए $\mathrm{rank}(x)$ का अस्तित्व है। अब यदि φ को संतुष्ट करने वाली कोई सत्ताएँ हैं, तो α वह लघुतम रैंक हो सकता है जिसके लिए $(\exists x \subseteq V_\alpha)\varphi(x)$, अर्थात् $(\forall \beta \in \alpha)(\forall x \subseteq V_\beta)\neg\varphi(x)$। तब हम पृथक्करण द्वारा $[x : \varphi(x)]$ को $\{x \in V_{\alpha+1} : \varphi(x)\}$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

[1] स्मरण रहे: सभी सूत्रों में प्राचल हो सकते हैं (जब तक स्पष्ट रूप से अन्यथा न कहा गया हो)।

टार्स्की–स्कॉट युक्ति का औचित्य देने के बाद अब हम इसका उपयोग कार्डिनलता की एक धारणा परिभाषित करने में कर सकते हैं:

परिभाषा 72.2. A की ts-कार्डिनलता $\mathrm{tsc}(A) = [x : A \approx x]$ है।

ts-कार्डिनल की परिभाषा सुव्यवस्था का उपयोग नहीं करती। किंतु उस अभिगृहीत के बिना भी हम दिखा सकते हैं कि ts-*कार्डिनल* परिभाषा 70.1 में परिभाषित *कार्डिनलों* की तरह काफ़ी व्यवहार करते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम सहायक प्रमेय 70.3 और सहायक प्रमेय 71.4 को ts-कार्डिनलों के पदों में फिर से कहें, तो प्रमाण सुव्यवस्था माने बिना **ZF** में ठीक चलते हैं।

इसी विषय में यह ध्यान देने योग्य है कि टार्स्की–स्कॉट युक्ति से हम क्रमसूचकों का सिद्धांत भी विकसित कर सकते हैं। जहाँ $\langle A, < \rangle$ कोई सुव्यवस्था है, वहाँ $\mathrm{tso}(A, <) = [\langle X, R\rangle : \langle A, <\rangle \cong \langle X, R\rangle]$ रखें। कार्डिनलों और क्रमसूचकों के इस निरूपण पर अधिक के लिए Potter (2004, chs. 9–12) देखें।

72.3 तुलनीयता और हार्टोग्स का लेम्मा

वह इसका सकारात्मक पक्ष था। अब नकारात्मक पक्ष देखें। चयन के बिना विषय *अव्यवस्थित* हो जाता है। क्यों, यह देखने के लिए Hartogs (1915) का यह सुंदर परिणाम देखें:

सहायक प्रमेय 72.3 (ZF में). *किसी भी समुच्चय A के लिए कोई क्रमसूचक α है ऐसा कि $\alpha \not\preceq A$।*

प्रमाण. यदि $B \subseteq A$ और $R \subseteq B^2$, तो सहायक प्रमेय 69.9 से $\langle B, R\rangle \subseteq V_{\mathrm{rank}(A)+4}$। अतः पृथक्करण का उपयोग करके विचार करें:

$$C = \{\langle B, R\rangle \in V_{\mathrm{rank}(A)+5} : B \subseteq A \text{ और } \langle B, R\rangle \text{ एक सुव्यवस्था है}\}$$

प्रतिस्थापन और प्रमेय 66.26 का उपयोग करके यह समुच्चय बनाएँ:

$$\alpha = \{\mathrm{ord}(B, R) : \langle B, R\rangle \in C\}.$$

उपप्रमेय 66.19 से α एक क्रमसूचक है, क्योंकि वह क्रमसूचकों का संक्रमणशील समुच्चय है। आखिर यदि $\gamma \in \beta \in \alpha$, तो किसी $B \subseteq R$ के लिए $\beta = \mathrm{ord}(B, R)$, जिससे सहायक प्रमेय 66.10 के अनुसार किसी $b \in B$ के लिए $\gamma = \mathrm{ord}(B_b, R_b)$, और इस प्रकार $\gamma \in \alpha$।

विरोधाभास द्वारा मान लें कि कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon \alpha \to A$ है। तब जहाँ:

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{ran}(f) \\ R &= \{\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle \in A \times A : \alpha \in \beta\}. \end{aligned}$$

स्पष्टतः $\alpha = \mathrm{ord}(B, R)$ और $\langle B, R\rangle \in C$। अतः $\alpha \in \alpha$, जो विरोधाभास है। □

इससे एक गहन परिणाम निष्पन्न होता है:

प्रमेय 72.4 (ZF में). *निम्न दावे तुल्य हैं:*

1. *सुव्यवस्था अभिगृहीत*
2. *किन्हीं समुच्चयों A और B के लिए या तो $A \preceq B$ अथवा $B \preceq A$*

प्रमाण. *(1) ⇒ (2).* A और B को नियत करें। (1) का उपयोग करने पर सुव्यवस्थाएँ $\langle A, R\rangle$ और $\langle B, S\rangle$ हैं। प्रमेय 66.26 का उपयोग करके $f\colon \alpha \to \langle A, R\rangle$ और $g\colon \beta \to \langle B, S\rangle$ को समाकृतिकताएँ मानें। प्रतिज्ञप्ति 66.22 से या तो $\alpha \subseteq \beta$ अथवा $\beta \subseteq \alpha$। यदि $\alpha \subseteq \beta$, तो $g \circ f^{-1}\colon A \to B$ एक एकैकी प्रतिचित्रण है, अतः $A \preceq B$; इसी प्रकार यदि $\beta \subseteq \alpha$, तो $B \preceq A$।

(2) ⇒ (1). A को नियत करें; सहायक प्रमेय 72.3 से कोई क्रमसूचक β है जिसके लिए $\beta \not\preceq A$। (2) का उपयोग करने पर हमारे पास $A \preceq \beta$ है। अतः कोई एकैकी प्रतिचित्रण $f\colon A \to \beta$ है और क्रम $\{\langle a, b\rangle \in A \times A : f(a) \in f(b)\}$ परिभाषित करके हम इस अंतःक्षेप का उपयोग A के अवयवों को सुव्यवस्थित करने में कर सकते हैं।□

एक तत्काल परिणाम यह है: यदि सुव्यवस्था विफल होती है, तो कुछ समुच्चय आकार की दृष्टि से *वास्तव में अतुलनीय* होते हैं। अतः यदि सुव्यवस्था विफल होती है, तो परिमितेतर कार्डिनल अंकगणित अव्यवस्थित होगा। उदाहरण के लिए हमें यह विचार छोड़ना होगा कि यदि A और B अनंत हों, तो $A \sqcup B \approx A \times B \approx M$, जहाँ M, A और B में बड़ा है (प्रमेय 71.11 देखें)। समस्या सरल है: यदि हम A और B के आकार की *तुलना* नहीं कर सकते, तो यह पूछना निरर्थक है कि कौन बड़ा है।

72.4 सुव्यवस्था समस्या

स्पष्टतः बहुत कुछ इस पर निर्भर है कि हम सुव्यवस्था को स्वीकार करते हैं या नहीं। किंतु इस सिद्धांत की चर्चा सामान्यतः उसके तुल्य सिद्धांत, चयन अभिगृहीत, पर केंद्रित रही है। इसलिए अब हम उस ओर ध्यान देंगे (और तुल्यता सिद्ध करेंगे)।

1883 में कैंटर ने सुव्यवस्था अभिगृहीत का समर्थन करते हुए उसे "विचार का ऐसा नियम जो मुझे मूलभूत, अपने परिणामों में समृद्ध और अपनी सामान्य वैधता के लिए विशेष रूप से उल्लेखनीय प्रतीत होता है" कहा (Potter 2004, p. 243 में उद्धृत)। किंतु अंततः कैंटर आश्वस्त हो गए कि इस "अभिगृहीत" को प्रमाण की आवश्यकता है। गणितीय समुदाय भी ऐसा ही मानने लगा।

इस समस्या को ज़रमेलो ने 1904 में "हल" किया। उनके समाधान की व्याख्या के लिए हमें कुछ परिभाषाएँ चाहिए।

परिभाषा 72.5. कोई फलन f एक *चयन फलन* है तभी जब सभी $x \in \mathrm{dom}(f)$ के लिए $f(x) \in x$। हम कहते हैं कि f, *A के लिए चयन फलन* है तभी जब f ऐसा चयन फलन है जिसके लिए $\mathrm{dom}(f) = A \setminus \{\emptyset\}$।

सहज रूप से A के लिए चयन फलन प्रत्येक (अरिक्त) समुच्चय $x \in A$ से एक विशिष्ट अवयव $f(x)$ *चुनता* है। तब चयन अभिगृहीत है:

चयन (चयन). प्रत्येक समुच्चय का कोई चयन फलन है।

ज़रमेलो ने दिखाया कि चयन से सुव्यवस्था निष्पन्न होती है और इसका विलोम भी:

प्रमेय 72.6 (ZF में). *सुव्यवस्था और चयन तुल्य हैं।*

प्रमाण. *बाएँ-से-दाएँ।* A को समुच्चयों का समुच्चय मानें। तब सम्मिलन अभिगृहीत से $\bigcup A$ का अस्तित्व है, अतः सुव्यवस्था से कोई $<$ है जो $\bigcup A$ को सुव्यवस्थित करता है। अब $f(x) = x$ का $<$-लघुतम सदस्य रखें। यह A के लिए चयन फलन है।

दाएँ-से-बाएँ। A को नियत करें। चयन से $\wp(A) \setminus \{\emptyset\}$ के लिए कोई चयन फलन f है। परिमितेतर पुनरावर्तन का उपयोग करके एक फलन परिभाषित करें:

$$g(0) = f(A)$$
$$g(\alpha) = \begin{cases} \text{रुकें!} & \text{यदि } A = g[\alpha] \\ f(A \setminus g[\alpha]) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

"रुकें!" का संकेत केवल उस परिभाषा का संक्षिप्त रूप है जो अन्यथा अधिक लंबी होती। अर्थात् पहली बार जब $A = g[\alpha]$ हो, तो सभी $\delta \leq \alpha$ के लिए $g(\delta) = A$ रखें। अभी आरंभ में हम केवल इतना निश्चित हो सकते हैं कि

इससे कोई *पद* परिभाषित होता है (प्रमेय 67.4 के बाद की टिप्पणियाँ देखें); किंतु हम दिखाएँगे कि हमारे पास वास्तव में एक फलन है।

चूँकि f चयन फलन है, प्रत्येक α के लिए (जब वह परिभाषित हो) हमारे पास $g(\alpha) = f(A \setminus g[\alpha]) \in A \setminus g[\alpha]$; अर्थात् $g(\alpha) \notin g[\alpha]$। अतः यदि $g(\alpha) = g(\beta)$, तो $g(\beta) \notin g[\alpha]$, अर्थात् $\beta \notin \alpha$, और इसी प्रकार $\alpha \notin \beta$। अतः त्रिविभाजन से $\alpha = \beta$। इसलिए g एकैकी है।

इसके बाद ध्यान दें कि हम सच में रुकते हैं!, अर्थात् कोई (लघुतम) क्रमसूचक α है ऐसा कि $A = g[\alpha]$। अन्यथा मानें; तब g के एकैकी होने से प्रत्येक क्रमसूचक α के लिए $\alpha \prec \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$ होता, जो सहायक प्रमेय 72.3 के विरुद्ध है। अतः $\mathrm{ran}(g) = A$ भी।

इन तथ्यों को मिलाकर g किसी क्रमसूचक से A तक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। अब g का उपयोग A को सुव्यवस्थित करने में किया जा सकता है। □

अतः सुव्यवस्था और चयन साथ ही टिकते या गिरते हैं। किंतु प्रश्न शेष है: वे टिकते हैं या गिरते हैं?

72.5 गणनीय चयन

चयन/सुव्यवस्था के किसी उपयोग के बिना यह सिद्ध करना सरल है कि:

सहायक प्रमेय 72.7 (Z^- में). *प्रत्येक परिमित समुच्चय का कोई चयन फलन है।*

प्रमाण. $a = \{b_1, \ldots, b_n\}$ रखें। सरलता के लिए मान लें कि प्रत्येक $b_i \neq \emptyset$। अतः ऐसी वस्तुएँ $c_1, \ldots, c_n$ हैं कि $c_1 \in b_1, \ldots, c_n \in b_n$। अब प्रतिज्ञप्ति 65.5 से समुच्चय $\{\langle b_1, c_1\rangle, \ldots, \langle b_n, c_n\rangle\}$ का अस्तित्व है; और यह a के लिए चयन फलन है। □

किंतु अनंत समुच्चयों पर विचार करते ही विषय अधिक धुँधला हो जाता है। उदाहरण के लिए ऊपर के इस "न्यूनतम" विस्तार पर विचार करें:

> *गणनीय चयन।* प्रत्येक *गणनीय* समुच्चय का कोई चयन फलन है।

यह चयन की एक विशेष स्थिति है। पता चलता है कि इस सिद्धांत का उपयोग उसके उपयोग की स्पष्ट जागरूकता के बिना काफ़ी बार किया गया था। यहाँ दो सुंदर उदाहरण हैं।[2]

उदाहरण 72.8. यह एक स्वाभाविक विचार है: किसी भी समुच्चय A के लिए या तो $\omega \preceq A$, अथवा किसी $n \in \omega$ के लिए $A \approx n$। यह उस सहज विचार को कहने का एक ढंग है कि प्रत्येक समुच्चय या तो परिमित है या अनंत। कैंटर और अनेक अन्य गणितज्ञों ने यह दावा बिना सिद्ध किए किया। हमने सावधानी से इसे प्रमेय 70.7 में सिद्ध किया। किंतु उस प्रमाण में हम ZFC में काम कर रहे थे, क्योंकि हमने माना था कि किसी भी समुच्चय A को सुव्यवस्थित किया जा सकता है, और इसलिए $|A|$ के अस्तित्व की प्रत्याभूति है। अर्थात् हमने स्पष्ट रूप से चयन को माना था।

वास्तव में Dedekind (1888) ने इस दावे का अपना प्रमाण इस प्रकार दिया:

प्रमेय 72.9 ($Z^- +$ गणनीय चयन में). *किसी भी A के लिए या तो $\omega \preceq A$ अथवा किसी $n \in \omega$ के लिए $A \approx n$।*

प्रमाण. मान लें कि सभी $n \in \omega$ के लिए $A \not\approx n$। तब विशेषतः प्रत्येक $n < \omega$ के लिए कोई उपसमुच्चय $A_n \subseteq A$ है जिसके ठीक 2^n अवयव हैं। इस अनुक्रम $A_0, A_1, A_2, \ldots$ का उपयोग करके हम प्रत्येक n के लिए परिभाषित करते हैं:

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i.$$

[2] Potter (2004, §9.4) और लूका इंकुर्वाती से।

अब निम्न पर ध्यान दें

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i<n} A_n\right| &\leq |A_0| + |A_1| + \ldots + |A_{n-1}| \\ &= 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} \\ &= 2^n - 1 \\ &< 2^n = |A_n|\end{aligned}$$

अतः प्रत्येक B_n का कम-से-कम एक सदस्य c_n है। इसके अतिरिक्त B_n परस्पर असंयुक्त हैं; इसलिए यदि $c_n = c_m$, तो $n = m$। किंतु प्रत्येक $c_n \in A$। अतः फलन $f(n) = c_n$, $\omega \to A$ एक अंतःक्षेप है। □

डेडेकिंड ने यह नहीं बताया कि उन्होंने गणनीय चयन का उपयोग किया था। किंतु क्या *आपने* उसका उपयोग देखा? फिर देखें। (सच में: *फिर देखें*।)

प्रमाण ने गणनीय चयन का दो बार उपयोग किया। पहले हमने उससे समुच्चयों का अनुक्रम $A_0, A_1, A_2, \ldots$ प्राप्त किया। फिर प्रत्येक B_n से अपना अवयव c_n चुनने के लिए उसका फिर उपयोग किया। इसके अतिरिक्त चयन का यह उपयोग हटाया नहीं जा सकता। Cohen (1966, p. 138) ने सिद्ध किया कि यदि हमारे पास चयन का कोई रूप न हो, तो परिणाम विफल होता है। अर्थात् **ZF** के साथ यह संगत है कि ऐसे समुच्चय हों जो ω के साथ *अतुलनीय* हों।

उदाहरण 72.10. 1878 में कैंटर ने कहा कि गणनीय समुच्चयों का गणनीय सम्मिलन गणनीय होता है। उन्होंने प्रमाण नहीं दिया, जिससे शायद संकेत मिलता है कि वे प्रमाण को स्पष्ट मानते थे। हमने सावधानी से इस परिणाम का अधिक सामान्य रूप प्रतिज्ञप्ति 71.12 में सिद्ध किया। किंतु हमारे प्रमाण ने स्पष्ट रूप से चयन माना था। और कम सामान्य परिणाम के प्रमाण को भी गणनीय चयन की आवश्यकता है।

प्रमेय 72.11 ($Z^- +$ गणनीय चयन में). *यदि प्रत्येक $n \in \omega$ के लिए A_n गणनीय है, तो $\bigcup_{n<\omega} A_n$ गणनीय है।*

प्रमाण. व्यापकता खोए बिना मान लें कि प्रत्येक $A_n \neq \emptyset$। अतः प्रत्येक $n \in \omega$ के लिए कोई आच्छादक प्रतिचित्रण $f_n \colon \omega \to A_n$ है। $f \colon \omega \times \omega \to \bigcup_{n<\omega} A_n$ को $f(m,n) = f_n(m)$ से परिभाषित करें। परिणाम निष्पन्न होता है क्योंकि $\omega \times \omega$ गणनीय है (प्रतिज्ञप्ति 4.12) और f एक आच्छादक प्रतिचित्रण है। □

क्या आपने गणनीय चयन का उपयोग देखा? उसका उपयोग फलनों का अनुक्रम $f_0, f_1, f_2, \ldots$ चुनने में होता है।[3] और फिर चयन के किसी सिद्धांत की अनुपस्थिति में परिणाम विफल होता है। विशेषतः Feferman and Levy (1963) ने सिद्ध किया कि **ZF** के साथ यह संगत है कि गणनीय समुच्चयों के किसी गणनीय सम्मिलन की कार्डिनलता $\beth_1$ हो। किंतु रसेल ने इस बात को कहीं अधिक मज़ेदार ढंग से कहा है:

> इसका उदाहरण वह करोड़पति है जो जब भी एक जोड़ी जूते खरीदता था तभी एक जोड़ी मोज़े खरीदता था, और किसी अन्य समय नहीं; तथा दोनों खरीदने का उसे इतना शौक था कि अंततः उसके पास $\aleph_0$ जोड़ी जूते और $\aleph_0$ जोड़ी मोज़े थे... जूतों में हम दाएँ और बाएँ का अंतर कर सकते हैं, इसलिए प्रत्येक जोड़ी में से एक चुन सकते हैं, अर्थात् सभी दाएँ जूते या सभी बाएँ जूते चुन सकते हैं; किंतु मोज़ों के लिए चयन का ऐसा कोई सिद्धांत स्वयं नहीं सूझता, और जब तक हम गुणात्मक अभिगृहीत [अर्थात् वस्तुतः चयन] न मानें, हम निश्चित नहीं हो सकते कि प्रत्येक जोड़ी में से एक मोज़ा रखने वाला कोई वर्ग है। (Russell, 1919, p. 126)

संक्षेप में निम्न सिद्ध करने के लिए चयन के किसी रूप की आवश्यकता है: यदि आपके पास गणनीयतः अनेक जोड़ी मोज़े हैं, तो आपके पास (केवल) गणनीयतः अनेक मोज़े हैं। और वास्तव में गणनीय चयन (या किसी तुल्य सिद्धांत) के बिना गणनीय समुच्चयों का गणनीय सम्मिलन गणनीय होने में विफल हो सकता है।

[3] चयन का समान उपयोग प्रतिज्ञप्ति 71.12 में हुआ, जब हमने निर्देश दिया था "प्रत्येक $\beta \in \alpha$ के लिए कोई एकैकी प्रतिचित्रण f_β नियत करें"।

निष्कर्ष यह है कि गणनीय चयन का बार-बार उपयोग हुआ, पर उसके उपयोगकर्ताओं को इसकी अधिक जानकारी नहीं थी। दार्शनिक प्रश्न है: हम गणनीय चयन का *औचित्य* कैसे दे सकते हैं?

किसी सहज औचित्य का प्रयास अतिसंकार्य का सहारा ले सकता है। मान लें कि हम पहला चयन $1/2$ मिनट में, दूसरा चयन $1/4$ मिनट में, ..., nवाँ चयन $1/2^n$ मिनट में, ...करते हैं। तब एक मिनट के भीतर हम चयनों का ω-अनुक्रम बना चुके होंगे और एक चयन फलन परिभाषित कर चुके होंगे।

किंतु ऐसा विचार-प्रयोग वास्तव में हमें क्या बता सकता है? पहली बात, यह "चुनने" के विचार को बहुत शाब्दिक रूप से लेने पर निर्भर है। दूसरी बात, यह गणित को तत्त्वमीमांसात्मक संभावना से बाँधता प्रतीत होता है।

अधिक महत्त्वपूर्ण बात: यह हमें *केवल* गणनीय चयन के बजाय चयन *सर्वथा* का कोई औचित्य नहीं देगा। क्योंकि यदि हमें *प्रत्येक* समुच्चय के लिए चयन फलन चाहिए, तो हमें "मनमानी क्रमसूचक लंबाई का अतिसंकार्य" कर सकना होगा। स्पष्ट शब्दों में, यह विचार हास्यास्पद है।

72.6 चयन के बारे में आंतरिक विचार

तब व्यापक प्रश्न यह है कि सुव्यवस्था, अथवा चयन, अथवा वास्तव में आकार की दृष्टि से सभी समुच्चयों की तुलनीयता—इनमें से किसे लें, इससे अंतर नहीं पड़ता—का औचित्य दिया जा सकता है या नहीं।

यहाँ एक *आंतरिक* औचित्य देने का प्रयास है। खंड 65.1 में हमने पदानुक्रम के बारे में कई सिद्धांत प्रस्तुत किए थे। उनमें से एक को फिर कहना उपयोगी है:

> *Stages-accumulate*। किसी भी चरण S और चरण S से *पहले* बने किन्हीं समुच्चयों के लिए: चरण S पर ऐसा समुच्चय बनता है जिसके सदस्य ठीक वे समुच्चय हैं। चरण S पर और कुछ नहीं बनता।

वास्तव में अनेक लेखकों ने सुझाया है कि चयन अभिगृहीत का औचित्य इस सिद्धांत (जैसे किसी सिद्धांत) के माध्यम से दिया जा सकता है। हम उस दृष्टिकोण की एक संक्षिप्त व्याख्या देंगे।

हम एक छोटे-से सरल परिणाम से आरंभ करेंगे, जो चयन का *एक और* तुल्य रूप देता है:

प्रमेय 72.12 (ZF में). *चयन निम्न सिद्धांत के तुल्य है। यदि A के अवयव असंयुक्त और अरिक्त हैं, तो कोई C है ऐसा कि प्रत्येक $x \in A$ के लिए $C \cap x$ एकल समुच्चय है। (ऐसे C को हम A के लिए चयन समुच्चय कहते हैं।)*

इस परिणाम का प्रमाण सीधा है और हम इसे पाठक के अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

मुख्य बात यह है कि A के लिए चयन समुच्चय, A के लिए किसी चयन फलन का परास मात्र है। अतः चयन का औचित्य देने के लिए हम चयन समुच्चयों के अस्तित्व के पदों में उसके तुल्य सूत्रीकरण का औचित्य देने का प्रयास कर सकते हैं। अब हम ठीक यही करेंगे।

A के अवयव असंयुक्त और अरिक्त हों। *Stages-are-key* (खंड 65.1 देखें) से A किसी चरण S पर बनता है। ध्यान दें कि $\bigcup A$ के सभी अवयव चरण S से पहले उपलब्ध होते हैं। अब *Stages-accumulate* से S से पहले बने *किन्हीं भी* समुच्चयों के लिए ऐसा समुच्चय बनता है जिसके सदस्य ठीक वे समुच्चय हैं। दूसरे शब्दों में: पहले उपलब्ध समुच्चयों का प्रत्येक *संभव* संग्रह चरण S पर अस्तित्व में होगा। किंतु ऐसी वस्तुओं का चयन करना निश्चय ही *संभव* है जिनसे A के लिए चयन समुच्चय बन सके; वह $\bigcup A$ का कोई अत्यंत विशिष्ट उपसमुच्चय मात्र है। अतः आवश्यकतानुसार ऐसा कोई चयन समुच्चय अस्तित्व में है।

यह आंतरिक आधार पर चयन का औचित्य देने का *बहुत* संक्षिप्त प्रयास है। किंतु इस विचार को आगे बढ़ाने के लिए आपको पॉटर का इसका सुंदर विकास (2004, §14.8) पढ़ना चाहिए।

72.7 बानाख–टार्स्की विरोधाभास

जैसे बूलोस ने प्रतिस्थापन का औचित्य देने का प्रयास किया था, वैसे ही हम भी *बाह्य* विचारों का सहारा लेकर चयन का औचित्य देने का प्रयास कर सकते हैं (खंड 68.3 देखें)। आखिर चयन को अपनाने के अनेक वांछनीय परिणाम हैं: प्रत्येक कार्डिनल की तुलना करने की क्षमता; प्रत्येक समुच्चय को सुव्यवस्थित करने की क्षमता; कार्डिनलों को एक विशिष्ट प्रकार का क्रमसूचक मानने की क्षमता; इत्यादि।

किंतु कभी-कभी दावा किया जाता है कि चयन के *अवांछनीय* परिणाम हैं। इसका मुख्य कारण Banach and Tarski (1924) का एक परिणाम है।

प्रमेय 72.13 (बानाख–टार्स्की विरोधाभास (ZFC में)). *किसी भी ठोस गोले को परिमिततः अनेक टुकड़ों में विघटित किया जा सकता है, जिन्हें (घूर्णन और स्थानांतरण द्वारा) फिर जोड़कर उस गोले की दो प्रतियाँ बनाई जा सकती हैं।*

पहली दृष्टि में यह कुछ विस्मयकारी है। स्पष्टतः दोनों गोलों का आयतन मूल गोले के आयतन का *दोगुना* है। किंतु दृढ़ गतियाँ—घूर्णन और स्थानांतरण—आयतन नहीं बदलतीं। इसलिए ऐसा लगता है जैसे बानाख–टार्स्की हमें जादू से नया पदार्थ अस्तित्व में लाने देता है।

बात और भी बिगड़ती है।[4] समान तर्क दिखाता है कि एक मटर को परिमिततः अनेक टुकड़ों में काटा जा सकता है, जिन्हें फिर (घूर्णन और स्थानांतरण द्वारा) जोड़कर बिग बेन के आकार और आकृति वाली वस्तु बनाई जा सकती है।

किंतु इनमें से कुछ भी अकेले ZF में सिद्ध नहीं होता।[5] अतः हमारे सामने निर्णय है: चयन को अस्वीकार करें या "विरोधाभास" के साथ जीना सीखें।

हम सुझाएँगे कि हमें इस "विरोधाभास" के साथ जीना सीखना चाहिए। वास्तव में हमें नहीं लगता कि यह कोई विशेष विरोधाभास है। खासकर हमें नहीं दिखता कि यह निम्न परिणामों में से किसी से अधिक या कम विरोधाभासी क्यों है: [6]

1. अंतराल $(0, 1)$ में उतने ही बिंदु हैं जितने $\mathbb{R}$ में।
   प्रमाण: $\tan(\pi(r - 1/2))$ पर विचार करें।

2. किसी रेखा में उतने ही बिंदु हैं जितने किसी वर्ग में।
   खंड 76.3 और खंड 76.5 देखें।

3. स्थान-पूरक वक्र हैं।
   खंड 76.3 और खंड 76.6 देखें।

इन तीनों परिणामों में किसी को चयन की आवश्यकता नहीं है। वास्तव में अब हम उन्हें गणित के आश्चर्यजनक, सुंदर अंश मात्र मानते हैं। शायद हमें बानाख–टार्स्की विरोधाभास के प्रति भी यही दृष्टिकोण अपनाना चाहिए।

निस्संदेह यहाँ एक तकनीकी प्रेक्षण आवश्यक है; किंतु उसके लिए केवल शांत भाव से सोचना चाहिए। दृढ़ गतियाँ आयतन सुरक्षित रखती हैं। फलतः जिन पाँच [7] टुकड़ों में गोला विघटित होता है, वे सभी *मापनीय* नहीं हो सकते। मोटे तौर पर इन अलग-अलग टुकड़ों को आयतन देना अर्थहीन है। आपको इन्हें बिंदुओं के अचित्रणीय "अनंत बिखराव" के रूप में सोचना चाहिए। संभव है कि ऐसे "अनंततः बिखरे" समुच्चयों की कल्पना "विचित्र" लगे। किंतु उनका अस्तित्व *Stages-accumulate* में निहित इस निर्देश से निष्पन्न होता प्रतीत होता है कि पहले उपलब्ध समुच्चयों के *सभी संभव* संग्रह बनाए जाएँ।

यदि इनमें से कुछ भी आश्वस्त न करे, तो बानाख–टार्स्की विरोधाभास अपनाने के पक्ष में यह अंतिम (बाह्य) तर्क है। इससे तत्काल सर्वकालीन श्रेष्ठ गणितीय चुटकुला मिलता है:

> *प्रश्न*। "Banach–Tarski" का वर्णविपर्यय क्या है?
>
> *उत्तर*। "Banach–Tarski Banach–Tarski"।

[4] Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 3.12) देखें।

[5] यद्यपि बानाख–टार्स्की को चयन से पूर्णतः दुर्बल सिद्धांतों से सिद्ध किया जा सकता है; Tomkowicz and Wagon (2016, 303) देखें।

[6] Potter (2004, 276–7), Weston (2003, 16) और Tomkowicz and Wagon (2016, 31, 308–9) अन्य उदाहरणों से समान बातें कहते हैं।

[7] हमने विरोधाभास को "परिमिततः अनेक टुकड़ों" के पदों में कहा था। वास्तव में Robinson (1947) ने सिद्ध किया कि विघटन *पाँच* टुकड़ों से (पर उससे कम से नहीं) किया जा सकता है। प्रमाण के लिए Tomkowicz and Wagon (2016, pp. 66–7) देखें।

72.8 परिशिष्ट: विताली का विरोधाभास

बानाख–टार्स्की निर्माण स्वीकार्य है या नहीं, इसका वास्तविक बोध पाने के लिए हमें उसके *प्रमाण* की जाँच करनी चाहिए। दुर्भाग्य से उसके लिए जितना बीजगणित चाहिए, उतना हम यहाँ प्रस्तुत नहीं कर सकते। फिर भी निम्न परिणाम पर ध्यान केंद्रित करके हम कुछ संक्षिप्त टिप्पणियाँ दे सकते हैं जो बानाख–टार्स्की के प्रमाण पर कुछ प्रकाश डालेंगी।[8]

प्रमेय 72.14 (विताली का विरोधाभास (ZFC में)). *किसी भी वृत्त को गणनीयतः अनेक टुकड़ों में विघटित किया जा सकता है, जिन्हें (घूर्णन और स्थानांतरण द्वारा) फिर जोड़कर उस वृत्त की दो प्रतियाँ बनाई जा सकती हैं।*

विताली के विरोधाभास को सिद्ध करना बानाख–टार्स्की विरोधाभास से कहीं सरल है। हमने इसे "विताली का विरोधाभास" कहा है क्योंकि यह विताली के 1905 के अमापनीय समुच्चय के निर्माण से निष्पन्न होता है। किंतु विताली और बानाख–टार्स्की विरोधाभासों के प्रमाणों के समुच्चय-सैद्धांतिक पक्ष बहुत समान हैं। परिणामों में मुख्य अंतर केवल यह है कि बानाख–टार्स्की *परिमित* विघटन पर विचार करता है, जबकि विताली का विरोधाभास *गणनीयतः अनंत* विघटन पर। Weston (2003) के शब्दों में, विताली का विरोधाभास "निश्चित ही बानाख–टार्स्की विरोधाभास जितना चकित करने वाला नहीं है, किंतु वह दिखाता है कि ज्यामितीय विरोधाभास 'सरल' स्थितियों में भी हो सकते हैं।"

विताली का विरोधाभास एक द्विविम आकृति, वृत्त, से संबंधित है। इसलिए हम समतल $\mathbb{R}^2$ पर काम करेंगे। R उन (दक्षिणावर्त) घूर्णनों का समुच्चय हो जो बिंदुओं को मूलबिंदु के चारों ओर $[0, 2\pi)$ के बीच *परिमेय* रेडियन मानों से घुमाते हैं। R के बारे में कुछ बीजगणितीय तथ्य ये हैं (यदि परिणाम का कथन समझ में न आए, तो प्रमाण उसका अर्थ स्पष्ट कर देगा):

सहायक प्रमेय 72.15. *R फलनों के संयोजन के अंतर्गत एक आबेली समूह बनाता है।*

प्रमाण. 0 रेडियन के घूर्णन को 0_R लिखने पर यह R का तत्समक अवयव है, क्योंकि किसी भी $\rho \in R$ के लिए $\rho \circ 0_R = 0_R \circ \rho = \rho$।

प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम है। जहाँ $\rho \in R$, r रेडियन से घुमाता है, वहाँ $\rho^{-1} \in R$, $2\pi - r$ रेडियन से घुमाता है, जिससे $\rho \circ \rho^{-1} = 0_R$।

संयोजन साहचर्यात्मक है: किन्हीं $\rho, \sigma, \tau \in R$ के लिए $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$।

संयोजन क्रमविनिमेय है: किन्हीं $\rho, \sigma \in R$ के लिए $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$। □

वास्तव में हम अपने समूह R को दो भागों में बाँट सकते हैं और फिर किसी भी आधे से पूरा समूह पुनः प्राप्त कर सकते हैं:

सहायक प्रमेय 72.16. *R का दो असंयुक्त समुच्चयों R_1 और R_2 में विभाजन है, जिनमें से दोनों R के लिए आधार हैं।*

प्रमाण. R_1 में $[0, \pi)$ के परिमेय रेडियन मानों वाले घूर्णन हों; $R_2 = R \setminus R_1$ रखें। प्राथमिक बीजगणित से, $\{\rho \circ \rho : \rho \in R_1\} = R$। R_2 के लिए समान परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। □

समूहों के बारे में इस तथ्य का उपयोग हम प्रमेय 72.14 स्थापित करने में करेंगे। **S** इकाई वृत्त हो, अर्थात् समतल के मूलबिंदु से ठीक एक इकाई दूर बिंदुओं का समुच्चय, अर्थात् $\{\langle r, s\rangle \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{r^2 + s^2} = 1\}$। हम **S** पर निम्न संबंध पर विचार करके उसे भागों में बाँटेंगे:

$$r \sim s \text{ तभी जब } (\exists \rho \in R)\rho(r) = s.$$

अर्थात् **S** के बिंदु इस संबंध से ठीक तभी जुड़े हैं जब मूलबिंदु के चारों ओर परिमेय मान वाले घूर्णन से एक से दूसरे तक पहुँचा जा सकता है। जैसा अपेक्षित है:

सहायक प्रमेय 72.17. *$\sim$ एक तुल्यता संबंध है।*

[8] अधिक पूर्ण निरूपण के लिए Weston (2003) या Tomkowicz and Wagon (2016) देखें।

प्रमाण. सहायक प्रमेय 72.15 का उपयोग करके तुच्छ। □

अब हम चयन का उपयोग करके ऐसा समुच्चय C प्राप्त करते हैं जिसमें $\sim$ के अंतर्गत **S** के प्रत्येक तुल्यता वर्ग से ठीक एक सदस्य हो। अर्थात् हम तुल्यता वर्गों के समुच्चय पर किसी चयन फलन f पर विचार करते हैं, [9]

$$E = \{[r]_\sim : r \in \mathbf{S}\},$$

और $C = \operatorname{ran}(f)$ रखें। प्रत्येक घूर्णन $\rho \in R$ के लिए समुच्चय $\rho[C]$ में C के प्रत्येक बिंदु पर घूर्णन ρ लगाने से प्राप्त बिंदु हैं। अगले दो परिणाम दिखाते हैं कि ये समुच्चय वृत्त को पूर्णतः और बिना अतिव्यापन के ढकते हैं:

सहायक प्रमेय 72.18. $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C]$.

प्रमाण. $s \in \mathbf{S}$ को नियत करें; कोई $r \in C$ है ऐसा कि $r \in [s]_\sim$, अर्थात् $r \sim s$, अर्थात् किसी $\rho \in R$ के लिए $\rho(r) = s$। □

सहायक प्रमेय 72.19. *यदि $\rho_1 \neq \rho_2$, तो $\rho_1[C] \cap \rho_2[C] = \emptyset$।*

प्रमाण. मान लें $s \in \rho_1[C] \cap \rho_2[C]$। अतः किन्हीं $r_1, r_2 \in C$ के लिए $s = \rho_1(r_1) = \rho_2(r_2)$। फलतः $\rho_2^{-1}(\rho_1(r_1)) = r_2$ और $\rho_2^{-1} \circ \rho_1 \in R$, इसलिए $r_1 \sim r_2$। चूँकि C, $\sim$ के अंतर्गत प्रत्येक तुल्यता वर्ग से ठीक एक सदस्य चुनता है, $r_1 = r_2$। अतः $s = \rho_1(r_1) = \rho_2(r_1)$ और इसलिए $\rho_1 = \rho_2$। □

अब हम अपने पहले के बीजगणितीय तथ्यों को वृत्त पर लागू करते हैं:

सहायक प्रमेय 72.20. **S** *का दो असंयुक्त समुच्चयों D_1 और D_2 में ऐसा विभाजन है कि D_1 को गणनीयतः अनेक समुच्चयों में विभाजित किया जा सकता है, जिन्हें घुमाकर* **S** *की एक प्रति बनाई जा सकती है (और इसी प्रकार D_2 के लिए)।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 72.16 के R_1 और R_2 का उपयोग करके रखें:

$$D_1 = \bigcup_{\rho \in R_1} \rho[C] \qquad\qquad D_2 = \bigcup_{\rho \in R_2} \rho[C]$$

सहायक प्रमेय 72.18 से यह **S** का विभाजन है, और सहायक प्रमेय 72.19 से D_1 और D_2 असंयुक्त हैं। निर्माण से D_1 को गणनीयतः अनेक समुच्चयों, प्रत्येक $\rho \in R_1$ के लिए $\rho[C]$, में विभाजित किया जा सकता है। और इन्हें घुमाकर **S** की प्रति बनाई जा सकती है, क्योंकि सहायक प्रमेय 72.16 और सहायक प्रमेय 72.18 से $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C] = \bigcup_{\rho \in R_1} (\rho \circ \rho)[C]$। यही तर्क D_2 पर लागू होता है। □

इससे तत्काल विताली का विरोधाभास निष्पन्न होता है। क्योंकि हम **S** को गणनीयतः अनेक टुकड़ों (विभिन्न $\rho[C]$) में बाँटकर और फिर उन्हें दृढ़ता से चलाकर (D_1 के प्रत्येक टुकड़े को केवल घुमाकर, और D_2 के प्रत्येक टुकड़े को पहले स्थानांतरित और फिर घुमाकर) **S** से उसकी *दो* प्रतियाँ बना सकते हैं।

प्रमाण की रणनीति को दोहराएँ। हमने समतल पर घूर्णनों के समूह के बारे में कुछ बीजगणितीय तथ्यों से आरंभ किया। इस समूह का उपयोग करके हमने **S** को तुल्यता वर्गों में विभाजित किया। फिर प्रत्येक वर्ग से अवयव चुनने के लिए चयन का उपयोग करके हम एक "विरोधाभास" पर पहुँचे।

बानाख–टार्स्की सिद्ध करने के लिए हम ठीक यही रणनीति उपयोग करते हैं। मुख्य अंतर यह है कि बानाख–टार्स्की सिद्ध करने में प्रयुक्त बीजगणितीय तथ्य विताली के विरोधाभास में प्रयुक्त तथ्यों से पर्याप्त अधिक जटिल हैं। किंतु उन बीजगणितीय तथ्यों का चयन से कोई संबंध नहीं है। हम उन्हें शीघ्रता से संक्षेपित करेंगे।

[9] चूँकि R गणनीय है, E का प्रत्येक अवयव गणनीय है। चूँकि **S** अगणनीय है, सहायक प्रमेय 72.18 और प्रतिज्ञप्ति 71.12 से निष्पन्न होता है कि E अगणनीय है। अतः यह *अ*गणनीय चयन का उपयोग है।

बानाख–टार्स्की सिद्ध करने के लिए हम पहले सहायक प्रमेय 72.16 का एक सदृश रूप स्थापित करते हैं: किसी भी *मुक्त समूह* को चार टुकड़ों में बाँटा जा सकता है, जिन्हें सहज रूप से "इधर-उधर चलाकर" हम पूरे समूह की दो प्रतियाँ पुनः प्राप्त कर सकते हैं।[10] फिर हम दिखाते हैं कि $\mathbb{R}^3$ के मूलबिंदु के चारों ओर दो विशिष्ट घूर्णनों का उपयोग घूर्णनों का एक मुक्त समूह F उत्पन्न करने में किया जा सकता है।[11] (अभी तक चयन नहीं।) अब हम गोले की सतह के बिंदुओं को "समान" मानते हैं तभी जब F के किसी घूर्णन से एक से दूसरा प्राप्त किया जा सके। फिर हम "समान" बिंदुओं के प्रत्येक तुल्यता वर्ग से ठीक एक बिंदु चुनने के लिए *चयन का उपयोग करते हैं*। सहायक प्रमेय 72.20 की तरह F के अपने विभाजन को गोले की सतह पर लागू करके हम उस सतह को चार टुकड़ों में बाँटते हैं, जिन्हें "इधर-उधर चलाकर" गोले की सतह की दो प्रतियाँ प्राप्त कर सकते हैं। इससे यह स्थापित होता है (Hausdorff, 1914):

प्रमेय 72.21 (हाउसडॉर्फ़ का विरोधाभास (ZFC में)). *किसी भी गोले की सतह को परिमिततः अनेक टुकड़ों में विघटित किया जा सकता है, जिन्हें (घूर्णन और स्थानांतरण द्वारा) फिर जोड़कर उस गोले की दो असंयुक्त प्रतियाँ बनाई जा सकती हैं।*

पूर्ण बानाख–टार्स्की प्रमेय (जो केवल गोले की सतह ही नहीं, उसके आंतरिक भाग से भी संबंधित है) प्राप्त करने के लिए कुछ और बीजगणितीय युक्तियाँ चाहिए। किंतु सच कहें तो यह बीजगणितीय केक पर सजावट मात्र है। इसलिए वेस्टन लिखते हैं:

> [...] मुक्त समूहों का परिणाम बानाख–टार्स्की विरोधाभास के प्रमाण का *मुख्य चरण* है। इस दृष्टि से बानाख–टार्स्की विरोधाभास $\mathbb{R}^3$ के बारे में उतना कथन नहीं है, जितना वह [$\mathbb{R}^3$ में स्थानांतरणों और घूर्णनों के] समूह की जटिलता के बारे में कथन है। (Weston, 2003, p. 16)

अर्थात् हम *परिमित* विघटन (बानाख–टार्स्की की तरह) दे सकते हैं या *गणनीयतः अनंत* विघटन (विताली के विरोधाभास की तरह), यह दो अथवा तीन विमाओं में काम करने संबंधी कुछ समूह-सैद्धांतिक तथ्यों पर निर्भर करता है।

मानना होगा कि अंतिम प्रेक्षण खंड 72.7 के अंत के चुटकुले को कुछ बिगाड़ देता है। क्योंकि वह द्विविम है, यदि उन टुकड़ों को फिर व्यवस्थित करके "Banach-Tarski Banach-Tarski" बनाना हो, तो "Banach-Tarski" को गणनीयतः *अनंत* टुकड़ों में बाँटना होगा। चुटकुला सुधारने के लिए तीन विमाओं में लिखना होगा। इसे हम पाठक के अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

एक अंतिम टिप्पणी। खंड 72.7 में हमने कहा था कि प्राप्त होने वाले गोले के "टुकड़े" *मापनीय* नहीं हो सकते, बल्कि वे अचित्रणीय "अनंत बिखराव" होने चाहिए। सहायक प्रमेय 72.20 प्राप्त करने में चयन के हमारे उपयोग के बारे में भी यही सत्य है। इसकी व्याख्या करना उपयोगी है।

फिर हमें कुछ पृष्ठभूमि की रूपरेखा देनी होगी (किंतु यह *केवल* रूपरेखा है; आप *माप* पर किसी पाठ्यपुस्तक की प्रविष्टि देख सकते हैं)। समुच्चय X के लिए माप परिभाषित करना, X पर किसी "σ-बीजगणित" के प्रत्येक E को मान $\mu(E) \in \mathbb{R}$ देना है। यहाँ विवरण आवश्यक नहीं हैं, सिवाय इसके कि फलन μ को गणनीय योज्यता के सिद्धांत का पालन करना चाहिए: असंयुक्त समुच्चयों के गणनीय सम्मिलन का माप उनके अलग-अलग मापों का योग है, अर्थात् जब X_n असंयुक्त हों, तब $\mu(\bigcup_{n<\omega} X_n) = \sum_{n<\omega} \mu(X_n)$। किसी समुच्चय को "अमापनीय" कहने का अर्थ है कि उसे कोई माप उपयुक्त रूप से नहीं दिया जा सकता। अब पहले के अपने R का उपयोग करते हुए:

उपप्रमेय 72.22 (Vitali). *μ ऐसा माप हो कि $\mu(\mathbf{S}) = 1$, और यदि X और Y सर्वांगसम हों, तो $\mu(X) = \mu(Y)$। तब सभी $\rho \in R$ के लिए $\rho[C]$ अमापनीय है।*

प्रमाण. विरोधाभास द्वारा अन्यथा मान लें। अतः किन्हीं $\sigma \in R$ और $r \in \mathbb{R}$ के लिए $\mu(\sigma[C]) = r$ मानें। किसी भी $\rho \in C$ के लिए $\rho[C]$ और $\sigma[C]$ सर्वांगसम हैं, अतः किसी भी $\rho \in C$ के लिए $\mu(\rho[C]) = r$। सहायक प्रमेय 72.18 और सहायक प्रमेय 72.19 से $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C]$ परस्पर असंयुक्त समुच्चयों का गणनीय सम्मिलन है। अतः गणनीय योज्यता निर्देश देती है कि $\mu(\mathbf{S}) = 1$ प्रत्येक $\rho[C]$ के मापों का योग है, अर्थात्,

$$1 = \mu(\mathbf{S}) = \sum_{\rho \in R} \mu(\rho[C]) = \sum_{\rho \in R} r$$

[10] *चार* टुकड़ों का उपयोग कर सकने का तथ्य Robinson (1947) का है। आधुनिक प्रमाण के लिए Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 5.2) देखें। समूह के टुकड़ों को "चलाने" के वर्णन में हम Weston (2003, p. 3) का अनुसरण करते हैं।

[11] Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 2.1) देखें।

किंतु यदि $r = 0$, तो $\sum_{\rho \in R} r = 0$, और यदि $r > 0$, तो $\sum_{\rho \in R} r = \infty$। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 72.1. प्रमेय 72.12 सिद्ध कीजिए। यदि कठिनाई हो, तो (Potter, 2004, pp. 242–3) में प्रमाण मिल सकता है।

खण्ड XVI

विधियाँ

इस भाग में सामान्य और कार्यपद्धति-संबंधी सामग्री है, विशेषतः विभिन्न प्रमाण-विधियों की व्याख्या जिनसे गैर-गणित विद्यार्थी अपरिचित हो सकते हैं। अभी इसमें प्रमाण लिखने के विषय में एक अध्याय और आगमन पर एक अध्याय है, किंतु इनके लिए अतिरिक्त अनुभाग, अभ्यास और गणितीय पारिभाषिकी पर एक अध्याय भी नियोजित हैं।

अध्याय 73

प्रमाण

73.1 परिचय

प्रारंभिक तर्कशास्त्र के अपने अनुभव के आधार पर आप किसी व्युत्पत्ति प्रणाली—शायद प्राकृतिक निगमन या फ़िच-शैली की व्युत्पत्ति प्रणाली, या शायद प्रमाण-वृक्ष प्रणाली—के साथ सहज होंगे। आपको शायद याद होगा कि इन प्रणालियों में प्रमाण करते हुए या तो कोई सूत्र सिद्ध करते थे या दिखाते थे कि दिया गया तर्क वैध है। इसके लिए आप प्रणाली के नियम तब तक लागू करते थे जब तक वांछित अंतिम परिणाम न मिल जाए। तर्कशास्त्र *के बारे में* विचार करते हुए हम भी बातें सिद्ध करते हैं, किंतु अधिकांश स्थितियों में किसी व्युत्पत्ति प्रणाली का उपयोग नहीं करते। वास्तव में जिन अधिकांश प्रमाणों पर हम विचार करते हैं वे पूर्णतः प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र की भाषा में होने की बजाय हिंदी में (शायद बीच-बीच में कुछ प्रतीकात्मक भाषा के साथ) किए जाते हैं। ऐसे प्रमाण बनाते समय आरंभ में आप असमंजस में हो सकते हैं— व्युत्पत्ति प्रणाली के बिना कुछ कैसे सिद्ध करूँ? आरंभ कैसे करूँ? कैसे जानूँ कि मेरा प्रमाण सही है?

प्रमाण का प्रयास करने से पहले यह जानना महत्त्वपूर्ण है कि प्रमाण क्या है और उसे कैसे बनाया जाए। नाम से संकेत मिलता है कि *प्रमाण* यह दिखाने के लिए होता है कि कोई बात सत्य है। इसे संवाद के रूप में सोच सकते हैं—कोई आपसे पूछता है कि क्या कोई बात सत्य है, जैसे क्या दो के अतिरिक्त प्रत्येक अभाज्य संख्या विषम है। केवल "हाँ" कहना पर्याप्त नहीं; वह जानना चाहेगा *क्यों*। ऐसी स्थिति में आप प्रमाण देंगे।

दैनिक वार्तालाप में उत्तर का केवल संकेत या अपूर्ण उत्तर पर्याप्त हो सकता है। किंतु तर्कशास्त्र और गणित में हमें कठोर प्रमाण चाहिए—हम दिखाना चाहते हैं कि कोई बात *किसी भी* संदेह से परे सत्य है। इसका अर्थ है कि हमारे प्रमाण का प्रत्येक चरण उचित ठहराया जाए और औचित्य ठोस हो (अर्थात् जिस मान्यता का उपयोग कर रहे हैं वह वास्तव में सिद्ध किए जा रहे प्रमेय के कथन में मानी गई हो, लागू की गई परिभाषाएँ सही ढंग से लागू हों, जिन औचित्यों का सहारा लिया गया हो वे सही अनुमान हों, इत्यादि)।

सामान्यतः हम कोई कथन सिद्ध कर रहे होते हैं। सिद्ध किए जा रहे कथनों को हम विभिन्न नाम देते हैं: प्रतिज्ञप्ति, प्रमेय, लेम्मा या उपप्रमेय। प्रतिज्ञप्ति प्रमाण योग्य मूल कथन है: दर्ज करने योग्य महत्त्वपूर्ण, किंतु शायद विशेष गहन नहीं अथवा प्रायः लागू नहीं। प्रमेय महत्त्वपूर्ण, सार्थक प्रतिज्ञप्ति है। उसका प्रमाण प्रायः कई चरणों में विभाजित होता है और कभी-कभी उसका नाम उसे पहली बार सिद्ध करने वाले व्यक्ति पर (जैसे कैंटर का प्रमेय, लोवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय) अथवा उसके संबंधित तथ्य पर (जैसे पूर्णता प्रमेय) रखा जाता है। लेम्मा ऐसी प्रतिज्ञप्ति या प्रमेय है जिसका उपयोग किसी अधिक महत्त्वपूर्ण परिणाम के प्रमाण में होता है। भ्रमित करने वाली बात यह है कि कभी-कभी लेम्मा अपने-आप में महत्त्वपूर्ण परिणाम होते हैं और उनका नाम भी उन्हें प्रस्तुत करने वाले व्यक्ति पर होता है (जैसे ज़ोर्न का लेम्मा)। उपप्रमेय ऐसा परिणाम है जो किसी अन्य परिणाम से सरलता से निष्पन्न होता है।

सिद्ध किए जाने वाले कथन में प्रायः ऐसी मान्यताएँ होती हैं जो स्पष्ट करती हैं कि हम किस प्रकार की वस्तुओं के बारे में कुछ सिद्ध कर रहे हैं। वह "$\varphi, \psi \to \chi$ रूप का कोई सूत्र हो" या "मान लें $\Gamma \vdash \varphi$" अथवा ऐसा कुछ कहकर आरंभ हो सकता है। ये प्रतिज्ञप्ति, प्रमेय या लेम्मा की *परिकल्पनाएँ* हैं और अपने प्रमाण में आप इन्हें सत्य मान सकते हैं। वे सिद्ध की जा रही बात को सीमित करती हैं और चर्चा की वस्तुओं के लिए कुछ नाम भी प्रस्तुत करती हैं। उदाहरणतः यदि आपकी प्रतिज्ञप्ति "$\varphi, \psi \to \chi$ रूप का कोई सूत्र हो" से आरंभ होती है, तो आप केवल एक विशेष प्रकार के सभी सूत्रों (अर्थात् सशर्तों) के बारे में कुछ सिद्ध कर रहे हैं और समझा जाता है कि $\psi \to \chi$ वह मनमाना सशर्त है जिसके बारे

में आपका प्रमाण बात करेगा।

73.2 प्रमाण आरंभ करना

किंतु आरंभ कहाँ से करें?

आपको कुछ सिद्ध करने के लिए दिया गया है, इसलिए प्रमाण में उसका उल्लेख सबसे अंत में होना चाहिए (निस्संदेह आरंभ में आप *घोषित* कर सकते हैं कि उसे सिद्ध करने जा रहे हैं, किंतु उसे मान्यता के रूप में उपयोग नहीं करना चाहते)। कागज़ के नए पन्ने के नीचे वह लिखें जिसे सिद्ध करने का प्रयास कर रहे हैं—इस प्रकार आपका लक्ष्य दृष्टि से ओझल नहीं होगा।

इसके बाद आपके पास उपयोग योग्य कुछ मान्यताएँ हो सकती हैं (अगले अनुभाग में आपके किए जा रहे प्रमाण के *प्रकार* पर चर्चा के समय यह और स्पष्ट होगा)। उन्हें पृष्ठ के ऊपर लिखें और यह स्पष्ट करें कि वे मान्यताएँ हैं (अर्थात् यदि p मान रहे हैं, तो "p मानें" या "मान लें कि p" लिखें)। अंततः प्रश्न में कुछ ऐसी परिभाषाएँ हो सकती हैं जिन्हें जानना आवश्यक है। आपको किसी विशिष्ट परिभाषा का उपयोग करने के लिए कहा जा सकता है, या जिन मान्यताओं अथवा निष्कर्ष की ओर काम कर रहे हैं उनमें विभिन्न परिभाषाएँ हो सकती हैं। *इन्हें लिखें और सुनिश्चित करें कि आप इनका अर्थ समझते हैं।*

प्रमाण को कैसे व्यवस्थित करें, यह प्रश्न के रूप पर भी निर्भर होगा। अगला अनुभाग वाक्य के प्रकार के आधार पर प्रमाण व्यवस्थित करने का विवरण देता है।

73.3 परिभाषाओं का उपयोग

हमने कहा था कि प्रमाण में प्रयुक्त हो सकने वाली सभी परिभाषाओं से आपको परिचित होना चाहिए और उन्हें ठीक प्रकार लागू करना आना चाहिए। यह वास्तव में महत्त्वपूर्ण बात है और इसे कुछ विस्तार से देखना उपयोगी है। गुणों और संबंधों को संक्षिप्त करने के लिए परिभाषाओं का उपयोग होता है, ताकि हम उनके बारे में अधिक संक्षेप में बात कर सकें। प्रस्तुत संक्षिप्त रूप को *परिभाष्य* कहते हैं और जिसे वह संक्षिप्त करता है उसे *परिभाषक*। प्रमाणों में हमें प्रायः इस ओर लौटना पड़ता है कि परिभाष्य कैसे प्रस्तुत किया गया, क्योंकि प्रमाण पूरा करने के लिए परिभाषक (वह लंबा रूप जिसका परिभाषित पद संक्षिप्त रूप है) की तार्किक संरचना का उपयोग करना होता है। परिभाषाओं को खोलकर आप सुनिश्चित करते हैं कि तार्किक क्रिया के मूल तक पहुँच रहे हैं।

एक उदाहरण से आरंभ करें। मान लें आप निम्न सिद्ध करना चाहते हैं:

प्रतिज्ञप्ति 73.1. *किन्हीं समुच्चयों A और B के लिए $A \cup B = B \cup A$।*

प्रमाण आरंभ करने के लिए भी हमें जानना होगा कि दो समुच्चयों का समान होना क्या है; अर्थात् हमें जानना होगा कि उस समीकरण में "$=$" का समुच्चयों के लिए क्या अर्थ है। समुच्चय तब समान परिभाषित होते हैं जब उनके अवयव समान हों। इसलिए हमें यह परिभाषा खोलनी है:

परिभाषा 73.2. समुच्चय A और B *समान*, $A = B$, हैं तभी जब A का प्रत्येक अवयव, B का अवयव हो और इसके विपरीत भी।

यह परिभाषा A और B को मनमाने समुच्चयों के स्थानधारकों के रूप में उपयोग करती है। वह जिस चीज़ को परिभाषित करती है—*परिभाष्य*—वह "$A = B$" अभिव्यक्ति है, और इसके लिए वह वह शर्त देती है जिसके अंतर्गत $A = B$ सत्य है। यह शर्त—"A का प्रत्येक अवयव, B का अवयव है और इसके विपरीत भी"—*परिभाषक* है।[1] परिभाषा निर्धारित करती है कि $A = B$ ठीक तभी सत्य है जब शर्त सत्य हो।

परिभाषा लागू करते समय परिभाषा के A और B का मिलान संबंधित स्थिति से करना होगा। हमारी स्थिति में इसका अर्थ है कि $A \cup B = B \cup A$ सत्य होने के लिए प्रत्येक $z \in A \cup B$, $B \cup A$ में भी होना चाहिए और इसके

[1] इस विशेष स्थिति में—और बहुत भ्रमकारी रूप से!—जब $A = B$, तो समुच्चय A और B एक ही समुच्चय हैं, यद्यपि बाएँ और दाएँ उसके लिए भिन्न अक्षर उपयोग करते हैं। किंतु उस समुच्चय को निर्दिष्ट करने के ढंग भिन्न हो सकते हैं और यही परिभाषा को अतुच्छ बनाता है।

विपरीत। प्रतिज्ञप्ति में $A \cup B$ परिभाषा के A की भूमिका निभाता है और $B \cup A$, B की। चूँकि A और B का उपयोग परिभाषा और सिद्ध की जा रही प्रतिज्ञप्ति के कथन दोनों में, किंतु भिन्न उपयोगों में, होता है, सावधान रहना होगा कि दोनों को न मिलाएँ। उदाहरणतः यह सोचना भूल होगी कि A का प्रत्येक अवयव, B का अवयव है और इसके विपरीत दिखाकर प्रतिज्ञप्ति सिद्ध कर सकते हैं—वह $A = B$ दिखाएगा, $A \cup B = B \cup A$ नहीं। (और चूँकि A तथा B कोई भी दो समुच्चय हो सकते हैं, आप अधिक आगे नहीं बढ़ेंगे, क्योंकि उनके बारे में कुछ न माना हो तो वे भिन्न समुच्चय हो सकते हैं।)

प्रमाण में हम सम्मिलन जैसी समुच्चय-सैद्धांतिक धारणाओं से काम कर रहे हैं, अतः प्रमाण कैसे आगे बढ़े यह समझने के लिए $\cup$ चिह्न का अर्थ भी जानना होगा। और कभी-कभी किसी परिभाषा को खोलने से आगे खोलने योग्य परिभाषाएँ मिलती हैं। उदाहरणतः $A \cup B$ को $\{z : z \in A$ अथवा $z \in B\}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः यदि $x \in A \cup B$ सिद्ध करना हो, तो $\cup$ की परिभाषा खोलने से पता चलता है कि $x \in \{z : z \in A$ अथवा $z \in B\}$ सिद्ध करना है। अब यह भी याद रखना होगा कि $x \in \{z : \ldots z \ldots\}$ तभी जब $\ldots x \ldots$। इसलिए $\{z : \ldots z \ldots\}$ संकेत की परिभाषा को और खोलने पर दिखाना है: $x \in A$ अथवा $x \in B$। अतः "$A \cup B$ का प्रत्येक अवयव, $B \cup A$ का भी अवयव है" का वास्तविक अर्थ है: "प्रत्येक x के लिए यदि $x \in A$ अथवा $x \in B$, तो $x \in B$ अथवा $x \in A$।" प्रतिज्ञप्ति की परिभाषाओं को पूर्णतः खोलने पर दिखाना यह है:

प्रतिज्ञप्ति 73.3. *किन्हीं समुच्चयों A और B के लिए: (a) प्रत्येक x के लिए यदि $x \in A$ अथवा $x \in B$, तो $x \in B$ अथवा $x \in A$, और (b) प्रत्येक x के लिए यदि $x \in B$ अथवा $x \in A$, तो $x \in A$ अथवा $x \in B$।*

महत्त्वपूर्ण बात यह है कि परिभाषाओं को खोलना प्रमाण के निर्माण का आवश्यक भाग है। इसे ठीक करना कभी-कभी कठिन होता है: परिभाषा के चरों और सिद्ध किए जा रहे दावे के पदों में अंतर और मिलान सावधानी से करना होगा। सफल होने के लिए आपको जानना होगा कि प्रश्न क्या पूछ रहा है और प्रश्न में प्रयुक्त सभी पदों का अर्थ क्या है—प्रायः एक से अधिक परिभाषाएँ खोलनी पड़ेंगी। नीचे जैसे सरल प्रमाणों में समाधान लगभग सीधे परिभाषाओं से ही निष्पन्न होता है। निस्संदेह यह सदैव इतना सरल नहीं होगा।

73.4 अनुमान प्रतिरूप

प्रमाण अलग-अलग अनुमानों से बने होते हैं। अनुमान करते समय हम सामान्यतः "अतः", "इस प्रकार" या "फलतः" जैसे शब्द से उसका संकेत करते हैं। अनुमान प्रायः प्रमाण में पहले से उपलब्ध एक या दो तथ्यों पर निर्भर करता है—वह कुछ ऐसा हो सकता है जिसे हमने माना हो, अथवा पहले ही किसी अनुमान से निष्कर्षित किया हो। स्पष्टता के लिए हम इन बातों पर चिह्न लगा सकते हैं और अनुमान में बताते हैं कि किन अन्य कथनों का उपयोग कर रहे हैं। अनुमान में प्रायः यह व्याख्या भी होगी कि नया निष्कर्ष पिछली बातों से *क्यों* निष्पन्न होता है। अनुमान के कुछ सामान्य प्रतिरूप प्रमाणों में बहुत बार प्रयुक्त होते हैं; नीचे उनमें से कुछ देखेंगे। आगमन द्वारा प्रमाण जैसे कुछ अनुमान प्रतिरूप अधिक विस्तृत हैं (और उनकी चर्चा बाद में होगी)।

हम एक अनुमान प्रतिरूप पर पहले ही चर्चा कर चुके हैं: किसी परिभाषा को खोलना या लागू करना। परिभाषा खोलते समय हम परिभाषक का उपयोग करके परिभाष्य वाली बात को फिर कहते हैं। उदाहरणतः मान लें हमने प्रमाण के दौरान पहले ही $D = E$ (a) स्थापित किया है। तब समुच्चयों के लिए $=$ की परिभाषा लागू करके अनुमान कर सकते हैं: "अतः परिभाषा से (a) के अनुसार D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है और इसके विपरीत भी।"

कुछ भ्रमकारी रूप से हम अनुमान का औचित्य प्रायः अनुमान करते समय नहीं, बल्कि उससे पहले लिखते हैं। मान लें हमने $D = E$ अभी सिद्ध नहीं किया, किंतु करना चाहते हैं। यदि लक्ष्य निष्कर्ष $D = E$ है, तो परिभाषा लागू करके इस लक्ष्य को फिर कह सकते हैं: $D = E$ सिद्ध करने के लिए सिद्ध करना होगा कि D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है और इसके विपरीत। अतः प्रमाण का रूप होगा: (a) सिद्ध करें कि D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है; (b) E का प्रत्येक अवयव, D का अवयव है; (c) इसलिए (a) और (b) से $=$ की परिभाषा द्वारा $D = E$। किंतु सामान्यतः हम इसे इस ढंग से नहीं लिखेंगे। इसके बदले ऐसा कुछ लिख सकते हैं,

> हम $D = E$ दिखाना चाहते हैं। $=$ की परिभाषा से इसका अर्थ यह दिखाना है कि D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है और इसके विपरीत।
>
> (a) ...(यह प्रमाण कि D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है) ...

(b) ...(यह प्रमाण कि E का प्रत्येक अवयव, D का अवयव है) ...

संयोजन का उपयोग

शायद सरलतम अनुमान प्रतिरूप संयोजन के किसी एक संयोज्य को निष्कर्ष के रूप में निकालना है। दूसरे शब्दों में: यदि हमने p और q माना अथवा पहले ही सिद्ध किया है, तो p (और q भी) अनुमानित कर सकते हैं। यह इतना मूल अनुमान है कि प्रायः इसका उल्लेख नहीं होता। उदाहरणतः $D = E$ की परिभाषा खोलने पर हमने स्थापित किया कि D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है और इसके विपरीत। इससे निष्कर्षित कर सकते हैं कि E का प्रत्येक अवयव, D का अवयव है (यही "इसके विपरीत" वाला भाग है)।

संयोजन सिद्ध करना

कभी-कभी सिद्ध करने को दी गई बात संयोजन रूप की होगी; आपसे "p और q सिद्ध करें" कहा जाएगा। इस स्थिति में केवल दो काम करने हैं: p सिद्ध करें, फिर q सिद्ध करें। प्रमाण को दो अनुभागों में बाँटकर स्पष्टता के लिए उन पर चिह्न लगा सकते हैं। पहली टिप्पणियाँ बनाते समय पृष्ठ के ऊपर "(1) p सिद्ध करें" और पृष्ठ के मध्य में "(2) q सिद्ध करें" लिख सकते हैं। (निस्संदेह हो सकता है आपसे स्पष्ट रूप से संयोजन सिद्ध करने को न कहा जाए, किंतु प्रमाण में संयोजन सिद्ध करना आवश्यक मिले। उदाहरणतः यदि $D = E$ सिद्ध करने को कहा जाए, तो $=$ की परिभाषा खोलने के बाद सिद्ध करना होगा: D का प्रत्येक अवयव, E का अवयव है *और* E का प्रत्येक अवयव, D का अवयव है।)

वियोजन सिद्ध करना

जब सिद्ध की जा रही बात वियोजन रूप की हो (अर्थात् "p अथवा q" रूप का कथन हो), तो किसी एक वियोज्य को सत्य दिखाना पर्याप्त है। किंतु लगभग कभी ऐसा नहीं होता कि कोई एक वियोज्य आपके प्रमेय की मान्यताओं से सीधे निष्पन्न हो। अधिकतर प्रमेय की मान्यताएँ स्वयं वियोजक होती हैं, या आप दिखा रहे होते हैं कि किसी प्रकार की सभी वस्तुओं में दो में से एक गुण है, किंतु कुछ में पहला और अन्य में दूसरा गुण है। यहाँ स्थितियों द्वारा प्रमाण उपयोगी होता है (नीचे देखें)।

सशर्त प्रमाण

आपको मिलने वाले अनेक प्रमेय सशर्त रूप में होंगे (अर्थात् दिखाएँ कि यदि p सत्य है, तो q भी सत्य है)। इन स्थितियों को व्यवस्थित करना सरल है—सशर्त का पूर्ववर्ती (यहाँ p) मान लें और उससे निष्कर्ष q सिद्ध करें। अतः यदि प्रमेय कहता है, "यदि p, तो q", प्रमाण "p मानें" से आरंभ करें और अंत तक q सिद्ध हो जाना चाहिए।

सशर्तों को भिन्न ढंग से कहा जा सकता है। अतः "यदि p, तो q" के बदले प्रमेय कह सकता है "p केवल यदि q", "q यदि p", या "q, बशर्ते p"। इन सबका अर्थ समान है और इनमें p मानकर उस मान्यता से q सिद्ध करना होता है। याद करें कि द्विसशर्त ("p तभी और केवल तभी जब q") वास्तव में दो सशर्तों का मेल है: यदि p, तो q, और यदि q, तो p। तब केवल सशर्त प्रमाण के दो दृष्टांत करने हैं: एक पहले सशर्त के लिए और दूसरा दूसरे के लिए। किंतु कभी-कभी कई अन्य "तभी और केवल तभी" कथनों को जोड़कर ऐसा कथन सिद्ध किया जा सकता है, जिससे p से आरंभ कर q पर समाप्त हों—पर उस स्थिति में सुनिश्चित करना होगा कि प्रत्येक चरण वास्तव में "तभी और केवल तभी" है।

सार्वत्रिक दावे

सार्वत्रिक दावे का उपयोग सरल है: यदि कोई बात हर वस्तु के लिए सत्य है, तो वह प्रत्येक विशिष्ट वस्तु के लिए सत्य है। अतः यदि प्रमाण की परिकल्पना $A \subseteq B$ है, तो इसका अर्थ ($\subseteq$ की परिभाषा खोलकर) है कि प्रत्येक $x \in A$ के लिए $x \in B$। इसलिए यदि पहले से जानते हैं कि $z \in A$, तो $z \in B$ निष्कर्षित कर सकते हैं।

सार्वत्रिक दावा सिद्ध करना कुछ कठिन लग सकता है। सामान्यतः ये कथन इस रूप के होते हैं: "यदि x में P है, तो उसमें Q है" या "सभी P, Q हैं।" निस्संदेह कथन इस रूप में पूरी तरह न बैठे, और ठीक क्या सिद्ध करने को कहा गया

है यह जानने में कुछ अभ्यास लगता है। किंतु प्रायः हमें सिद्ध करना होता है कि किसी गुण वाली सभी वस्तुओं में कोई अन्य विशिष्ट गुण है।

सार्वत्रिक दावा सिद्ध करने का ढंग उस एक गुण वाली वस्तुओं के लिए नाम या चर प्रस्तुत करना और फिर दिखाना है कि उनमें दूसरा गुण भी है। इसे ऐसे कह सकते हैं कि *सभी* P के लिए कोई बात सिद्ध करने हेतु उसे किसी *मनमाने* P के लिए सिद्ध करना होगा। और प्रस्तुत नाम किसी मनमाने P का नाम है। मनमानी वस्तुओं के इन नामों के लिए सामान्यतः एक अक्षर उपयोग करते हैं और अक्षर प्रायः परंपराओं का पालन करते हैं: जैसे प्राकृतिक संख्याओं के लिए n, सूत्रों के लिए φ, समुच्चयों के लिए A, फलनों के लिए f, इत्यादि।

युक्ति पूरे प्रमाण में सामान्यता बनाए रखना है। आरंभ में मानें कि किसी मनमानी वस्तु ("x") में गुण P है, और केवल परिभाषाओं या अनुमत मान्यताओं के आधार पर दिखाएँ कि x में गुण Q है। चूँकि यह निर्धारित नहीं किया कि x विशेषतः क्या है, सिवाय इसके कि उसमें P है, तब कह सकते हैं कि P वाली हर वस्तु में Q है। संक्षेप में x, गुण P वाली *सभी* वस्तुओं का प्रतिनिधि है।

प्रतिज्ञप्ति 73.4. *सभी समुच्चयों A और B के लिए $A \subseteq A \cup B$।*

प्रमाण. A और B मनमाने समुच्चय हों। हम $A \subseteq A \cup B$ दिखाना चाहते हैं। $\subseteq$ की परिभाषा से इसका अर्थ है: प्रत्येक x के लिए यदि $x \in A$, तो $x \in A \cup B$। अतः $x \in A$, A का कोई मनमाना अवयव हो। हमें दिखाना है कि $x \in A \cup B$। चूँकि $x \in A$, $x \in A$ अथवा $x \in B$। अतः $x \in \{x : x \in A \vee x \in B\}$। किंतु $\cup$ की परिभाषा से इसका अर्थ $x \in A \cup B$ है। □

स्थितियों द्वारा प्रमाण

मान लें मान्यता या पहले से स्थापित निष्कर्ष के रूप में आपके पास वियोजन है—आपने माना या सिद्ध किया है कि p अथवा q सत्य है। आप r सिद्ध करना चाहते हैं। यह दो चरणों में करें: पहले p को सत्य मानकर r सिद्ध करें, फिर q को सत्य मानकर r फिर सिद्ध करें। यह इसलिए काम करता है कि हम दोनों विकल्पों में से एक को सत्य मानते या जानते हैं। दोनों चरण स्थापित करते हैं कि दोनों में से कोई भी r की सत्यता के लिए पर्याप्त है। (यदि दोनों सत्य हैं, तो r के सत्य होने के एक नहीं दो कारण हैं। p और q दोनों मानकर r को अलग से सिद्ध करना आवश्यक नहीं।) अपने काम का संकेत देने के लिए हम घोषणा करते हैं कि "हम स्थितियों में भेद करते हैं।" उदाहरणतः मान लें हम जानते हैं कि $x \in B \cup C$। $B \cup C$ को $\{x : x \in B$ अथवा $x \in C\}$ परिभाषित किया गया है। दूसरे शब्दों में परिभाषा से $x \in B$ अथवा $x \in C$। इससे $x \in A$ सिद्ध करने के लिए पहले $x \in B$ मानकर इस मान्यता से $x \in A$ सिद्ध करेंगे, फिर $x \in C$ मानकर उससे $x \in A$ फिर सिद्ध करेंगे। मान्यता के नीचे "हम स्थितियों में भेद करते हैं", फिर उसके नीचे "स्थिति (1): $x \in B$", और पृष्ठ के बीच में "स्थिति (2): $x \in C$" लिखेंगे। फिर पृष्ठ के ऊपर और नीचे के आधे भाग भरेंगे।

स्थितियों द्वारा प्रमाण विशेषतः तब उपयोगी है जब सिद्ध की जा रही बात स्वयं वियोजक हो। एक सरल उदाहरण देखें:

प्रतिज्ञप्ति 73.5. *मान लें $B \subseteq D$ और $C \subseteq E$। तब $B \cup C \subseteq D \cup E$।*

प्रमाण. (a) $B \subseteq D$ और (b) $C \subseteq E$ मानें। परिभाषा से कोई भी $x \in B$, D में भी है (c), और कोई भी $x \in C$, E में भी है (d)। $B \cup C \subseteq D \cup E$ दिखाने के लिए ($\subseteq$ की परिभाषा से) दिखाना होगा कि यदि $x \in B \cup C$, तो $x \in D \cup E$। $x \in B \cup C$ तभी जब $x \in B$ अथवा $x \in C$ ($\cup$ की परिभाषा से)। इसी प्रकार $x \in D \cup E$ तभी जब $x \in D$ अथवा $x \in E$। अतः हमें दिखाना है: किसी भी x के लिए यदि $x \in B$ अथवा $x \in C$, तो $x \in D$ अथवा $x \in E$।

> अब तक हमने केवल परिभाषाएँ खोली हैं! हमने अपनी प्रतिज्ञप्ति को $\subseteq$ और $\cup$ के बिना फिर सूत्रबद्ध किया और अब एक सार्वत्रिक सशर्त दावा सिद्ध करना शेष है। ऊपर की चर्चा के अनुसार यह ऐसा x मानकर किया जाता है जिसके बारे में "यदि" वाला भाग सत्य मानते हैं, और फिर दिखाते हैं कि "तो" वाला भाग भी सत्य है। दूसरे शब्दों में हम मानेंगे कि $x \in B$ अथवा $x \in C$ और दिखाएँगे कि $x \in D$ अथवा $x \in E$। [2]

[2] यह अनुच्छेद केवल हमारे काम की व्याख्या करता है—यह प्रमाण का भाग नहीं और अपना प्रमाण लिखते समय आपको इतने विस्तार में जाने की आवश्यकता नहीं।

मान लें $x \in B$ अथवा $x \in C$। हमें दिखाना है कि $x \in D$ अथवा $x \in E$। हम स्थितियों में भेद करते हैं।

स्थिति 1: $x \in B$। (c) से $x \in D$। अतः $x \in D$ अथवा $x \in E$। (यहाँ हमने पिछले उपखंड में चर्चित अनुमान किया है!)

स्थिति 2: $x \in C$। (d) से $x \in E$। अतः $x \in D$ अथवा $x \in E$। □

अस्तित्व दावा सिद्ध करना

अस्तित्व दावा सिद्ध करने को कहे जाने पर प्रश्न सामान्यतः "सिद्ध करें कि कोई x है ऐसा कि $\ldots x \ldots$" रूप का होगा, अर्थात् कोई वस्तु है जिसमें "$\ldots x \ldots$" से वर्णित गुण है। इस स्थिति में किसी उपयुक्त वस्तु की पहचान कर दिखाना होगा कि उसमें आवश्यक गुण है। यह सीधा लगता है, किंतु इस प्रकार का प्रमाण कठिन हो सकता है। सामान्यतः इसमें किसी वस्तु का *निर्माण* या उसे *परिभाषित* करना और सिद्ध करना शामिल है कि इस प्रकार परिभाषित वस्तु में आवश्यक गुण है। सही वस्तु पाना कठिन हो सकता है, उसमें आवश्यक गुण सिद्ध करना कठिन हो सकता है, और कभी-कभी यह दिखाना भी कठिन होता है कि आपने कोई वस्तु परिभाषित करने में सफलता पाई है!

सामान्यतः आप वस्तु को निर्दिष्ट करके इसे लिखेंगे, जैसे "x, ...हो" (जहाँ ... मन की वस्तु निर्दिष्ट करता है), संभवतः यह सिद्ध करेंगे कि $\ldots$ वास्तव में किसी विद्यमान वस्तु का वर्णन करता है, और फिर दिखाएँगे कि x में गुण Q है। एक सरल उदाहरण देखें।

प्रतिज्ञप्ति 73.6. *मान लें $x \in B$। तब कोई A है ऐसा कि $A \subseteq B$ और $A \neq \emptyset$।*

प्रमाण. $x \in B$ मानें। $A = \{x\}$ रखें।

> यहाँ हमने समुच्चय A को उसके अवयव गिनाकर परिभाषित किया है। चूँकि हम मानते हैं कि x एक वस्तु है और अवयव गिनाकर सदैव समुच्चय बना सकते हैं, हमें यहाँ यह दिखाने की आवश्यकता नहीं कि समुच्चय A परिभाषित करने में सफल हुए हैं। किंतु अभी भी दिखाना होगा कि A में प्रतिज्ञप्ति द्वारा अपेक्षित गुण हैं। इसके बिना प्रमाण पूर्ण नहीं!

चूँकि $x \in A$, $A \neq \emptyset$।

> यह A की $\{x\}$ के रूप में परिभाषा और स्पष्ट तथ्यों $x \in \{x\}$ तथा $x \notin \emptyset$ पर निर्भर है।

चूँकि x, $\{x\}$ का एकमात्र अवयव है और $x \in B$, A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव है। $\subseteq$ की परिभाषा से $A \subseteq B$। □

अस्तित्व दावों का उपयोग

मान लें आप जानते हैं कि कोई अस्तित्व दावा सत्य है (आपने उसे सिद्ध किया है या वह उपयोग योग्य परिकल्पना है), जैसे "किसी x के लिए $x \in A$" अथवा "कोई $x \in A$ है।" प्रमाण में इसका उपयोग करने के लिए आप मान सकते हैं कि आपके पास उन वस्तुओं में से एक का नाम है जिनका अस्तित्व आपकी परिकल्पना कहती है। चूँकि A में कम-से-कम एक वस्तु है, ऐसी वस्तुएँ हैं जिनके लिए वह नाम हो सकता है। निस्संदेह आप किसी एक को चुन या उसका आगे वर्णन नहीं कर सकें (सिवाय इसके कि वह $\in A$ है)। किंतु प्रमाण के उद्देश्य से मान सकते हैं कि आपने उसे चुना और नाम दिया है। ऐसा नाम चुनना महत्त्वपूर्ण है जिसका पहले उपयोग न किया हो (या जो परिकल्पनाओं में न आता हो), अन्यथा त्रुटि हो सकती है। प्रमाण में इसका संकेत "किसी x के लिए $x \in A$" से "$a \in A$ हो" पर जाकर करते हैं। अब a के बारे में तर्क कर सकते हैं, अन्य परिकल्पनाएँ उपयोग कर सकते हैं, इत्यादि, जब तक किसी निष्कर्ष p पर न पहुँचें। यदि p में अब a का उल्लेख नहीं, तो p मान्यता $a \in A$ से स्वतंत्र है और आपने दिखाया कि वह केवल "किसी x के लिए $x \in A$" से निष्पन्न होता है।

प्रतिज्ञप्ति 73.7. *यदि $A \neq \emptyset$, तो $A \cup B \neq \emptyset$।*

प्रमाण. मान लें $A \neq \emptyset$। अतः किसी x के लिए $x \in A$।

यहाँ पहले हमने प्रतिज्ञप्ति की परिकल्पना को केवल फिर कहा। यह परिकल्पना, अर्थात् $A \neq \emptyset$, एक अस्तित्व दावा छिपाती है, जिस तक कुछ परिभाषाएँ खोलकर ही पहुँचते हैं। $=$ की परिभाषा बताती है कि $A = \emptyset$ तभी जब प्रत्येक $x \in A$, $\emptyset$ में भी हो और प्रत्येक $x \in \emptyset$, A में भी हो। दोनों पक्षों का निषेध करने पर मिलता है: $A \neq \emptyset$ तभी जब या तो कोई $x \in A$, $\notin \emptyset$ हो, अथवा कोई $x \in \emptyset$, $\notin A$ हो। चूँकि कुछ भी $\in \emptyset$ नहीं, दूसरा वियोज्य कभी सत्य नहीं हो सकता, और "$x \in A$ तथा $x \notin \emptyset$" केवल $x \in A$ रह जाता है। अतः $x \neq \emptyset$ तभी जब किसी x के लिए $x \in A$। यह अस्तित्व दावा है। अब A के अवयवों में से एक के लिए नाम प्रस्तुत करके उस अस्तित्व दावे का उपयोग करते हैं:

$a \in A$ हो।

अब हमने $\in A$ वस्तुओं में से एक के लिए नाम प्रस्तुत किया है। हम a के बारे में तर्क जारी रखेंगे, किंतु केवल $a \in A$ और कुछ नहीं मानने में सावधान रहेंगे:

चूँकि $a \in A$, $\cup$ की परिभाषा से $a \in A \cup B$। अतः किसी x के लिए $x \in A \cup B$, अर्थात् $A \cup B \neq \emptyset$।

अंतिम चरण में हम "$a \in A \cup B$" से "किसी x के लिए $x \in A \cup B$" पर गए। इसमें अब a का उल्लेख नहीं, अतः जानते हैं कि "किसी x के लिए $x \in A \cup B$" केवल "किसी x के लिए $x \in A$" से निष्पन्न होता है। किंतु इसका अर्थ $A \cup B \neq \emptyset$ है। □

हमारी तरह "x" जैसे आबद्ध चरों को a जैसे काल्पनिक नामों से अलग रखना शायद अच्छी प्रथा है। किंतु व्यवहार में हम प्रायः ऐसा नहीं करते और केवल x का उपयोग करते हैं, इस प्रकार:

मान लें $A \neq \emptyset$, अर्थात् कोई $x \in A$ है। $\cup$ की परिभाषा से $x \in A \cup B$। अतः $A \cup B \neq \emptyset$।

किंतु ऐसा करते समय विशेष सावधानी चाहिए कि भिन्न अस्तित्व दावों के लिए भिन्न x और y उपयोग करें। उदाहरणतः निम्न "यदि $A \neq \emptyset$ और $B \neq \emptyset$, तो $A \cap B \neq \emptyset$" (जो सत्य नहीं) का सही प्रमाण *नहीं* है।

मान लें $A \neq \emptyset$ और $B \neq \emptyset$। अतः किसी x के लिए $x \in A$ और किसी x के लिए $x \in B$ भी। चूँकि $x \in A$ और $x \in B$, $\cap$ की परिभाषा से $x \in A \cap B$। अतः $A \cap B \neq \emptyset$।

क्या आप पहचान सकते हैं कि गलत चरण कहाँ है और समझा सकते हैं कि परिणाम क्यों सत्य नहीं है?

73.5 एक उदाहरण

हमारा पहला उदाहरण समुच्चयों के सम्मिलनों और सर्वनिष्ठों के बारे में निम्नलिखित सरल तथ्य है। इससे परिभाषाओं को खोलना, संयोजनों और सार्वत्रिक दावों के प्रमाण तथा स्थितियों द्वारा प्रमाण स्पष्ट होंगे।

प्रतिज्ञप्ति 73.8. *किन्हीं समुच्चयों A, B और C के लिए, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$।*

आइए इसे सिद्ध करें!

प्रमाण. हम दिखाना चाहते हैं कि किन्हीं समुच्चयों A, B और C के लिए, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

पहले हम प्रतिज्ञप्ति के कथन में "$=$" की परिभाषा खोलते हैं। याद करें कि समुच्चयों को समान सिद्ध करने का अर्थ यह दिखाना है कि उनके अवयव समान हैं। अर्थात् $A \cup (B \cap C)$ के सभी अवयव, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ के भी अवयव हैं, और इसके विपरीत। "इसके विपरीत" का अर्थ है कि $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का प्रत्येक अवयव, $A \cup (B \cap C)$ का भी अवयव होना चाहिए। इसलिए परिभाषा खोलने पर हम देखते हैं कि हमें एक संयोजन सिद्ध करना है। इसे लिख लें:

परिभाषा से, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ तभी और केवल तभी जब $A \cup (B \cap C)$ का प्रत्येक अवयव, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का भी अवयव हो, और $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का प्रत्येक अवयव, $A \cup (B \cap C)$ का अवयव हो।

चूँकि यह एक संयोजन है, हमें प्रत्येक संयोज्य अलग-अलग सिद्ध करना होगा। पहले से आरंभ करें: सिद्ध करें कि $A \cup (B \cap C)$ का प्रत्येक अवयव, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का भी अवयव है।

यह एक सार्वत्रिक दावा है, इसलिए हम $A \cup (B \cap C)$ के किसी मनमाने अवयव पर विचार करके दिखाते हैं कि वह $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का भी अवयव अवश्य है। इस मनमाने अवयव को संबोधित करने के लिए कोई चर चुनेंगे, मान लें z। हमारा प्रमाण आगे बढ़ता है:

पहले हम सिद्ध करते हैं कि $A \cup (B \cap C)$ का प्रत्येक अवयव, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का भी अवयव है। मान लें $z \in A \cup (B \cap C)$। हमें दिखाना है कि $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

अब $\cup$ और $\cap$ की परिभाषाएँ खोलने का समय है। उदाहरण के लिए, $\cup$ की परिभाषा है: $A \cup B = \{z : z \in A$ अथवा $z \in B\}$। जब हम परिभाषा को "$A \cup (B \cap C)$" पर लागू करते हैं, तो परिभाषा के "B" की भूमिका अब "$B \cap C$" निभाता है; इसलिए $A \cup (B \cap C) = \{z : z \in A$ अथवा $z \in B \cap C\}$। अतः हमारी मान्यता $z \in A \cup (B \cap C)$ का अर्थ है: $z \in \{z : z \in A$ अथवा $z \in B \cap C\}$। और $z \in \{z : \ldots z \ldots\}$ तभी और केवल तभी जब ...z ..., अर्थात् इस मामले में $z \in A$ या $z \in B \cap C$।

परिभाषा $\cup$ से, या तो $z \in A$ या $z \in B \cap C$।

चूँकि यह एक वियोजन है, स्थितियों द्वारा प्रमाण लागू करना उपयोगी होगा। हम दोनों स्थितियाँ लेते हैं और दिखाते हैं कि प्रत्येक में हमारा अभीष्ट निष्कर्ष (अर्थात् "$z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$") प्राप्त होता है।

स्थिति 1: मान लें कि $z \in A$।

हमारी मान्यताओं के आधार पर आगे काम करने को अधिक कुछ नहीं है। इसलिए देखें कि निष्कर्ष में क्या उपलब्ध है। हम दिखाना चाहते हैं कि $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$। $\cap$ की परिभाषा के आधार पर इसे दिखाने के लिए हमें दिखाना होगा कि z, $(A \cup B)$ और $(A \cup C)$ दोनों में है। किंतु $z \in A \cup B$ तभी और केवल तभी जब $z \in A$ या $z \in B$, और हमारे पास पहले ही (स्थिति 1 की मान्यता के रूप में) $z \in A$ है। इसी तर्क से—B के स्थान पर C रखकर—$z \in A \cup C$। यह तर्क उलटी दिशा में चला था, अतः अपने प्रमाण के लिए आवश्यक दिशा में इसे लिखें।

चूँकि $z \in A$, इसलिए $z \in A$ या $z \in B$, और अतः परिभाषा $\cup$ से $z \in A \cup B$। इसी प्रकार $z \in A \cup C$। किंतु परिभाषा $\cap$ से इसका अर्थ है कि $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

इससे स्थितियों द्वारा प्रमाण की पहली स्थिति पूरी होती है। अब हम दूसरी स्थिति में निष्कर्ष निकालना चाहते हैं, जहाँ $z \in B \cap C$।

स्थिति 2: मान लें कि $z \in B \cap C$।

फिर हम दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ के साथ काम कर रहे हैं। परिभाषा $\cap$ लागू करें:

चूँकि $z \in B \cap C$, परिभाषा $\cap$ से z, B और C दोनों का अवयव अवश्य है।

अब अपने निष्कर्ष को फिर देखें। हमें दिखाना है कि z, $(A \cup B)$ और $(A \cup C)$ दोनों में है। फिर समाधान तत्काल है।

चूँकि $z \in B$, इसलिए $z \in (A \cup B)$। चूँकि $z \in C$, इसलिए $z \in (A \cup C)$ भी। अतः $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

यहाँ हमने $\cup$ और $\cap$ की परिभाषाएँ फिर लागू कीं, किंतु चूँकि हम उन परिभाषाओं को पहले ही याद कर चुके हैं और पहले ही दिखा चुके हैं कि यदि z दो समुच्चयों में से एक में हो तो वह उनके सम्मिलन में है, इसलिए हमें अपने किए को उतने विस्तार से बताने की आवश्यकता नहीं।

हमने स्थितियों द्वारा प्रमाण की दूसरी स्थिति पूरी कर ली है, इसलिए अब अपना पहला निष्कर्ष कह सकते हैं।

अतः यदि $z \in A \cup (B \cap C)$, तो $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

अब हमें केवल दूसरी दिशा दिखानी है कि $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का प्रत्येक अवयव, $A \cup (B \cap C)$ का अवयव है। पहले की तरह हम प्रथम समुच्चय का कोई मनमाना अवयव अपने पास मानकर और यह दिखाकर कि वह दूसरे समुच्चय में अवश्य है, इस सार्वत्रिक दावे को सिद्ध करते हैं। हम जो करने वाले हैं उसे लिखें।

अब मान लें कि $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$। हम दिखाना चाहते हैं कि $z \in A \cup (B \cap C)$।

अब हम परिकल्पना $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ से काम कर रहे हैं। आशा है कि प्रमाण के पहले भाग वाला ही z यहाँ प्रयोग करना अधिक उलझन पैदा नहीं करता। उस भाग को पूरा करते ही वहाँ की हमारी सभी मान्यताएँ प्रभावहीन हो गईं, इसलिए अब हम z के बारे में नई मान्यताएँ बना सकते हैं। यदि यह उलझाता हो तो आगे z के स्थान पर कोई अन्य चर रख दें।

परिभाषा $\cap$ से हम जानते हैं कि z, $A \cup B$ और $A \cup C$ दोनों में है। और $\cup$ की परिभाषा से इसे आगे खोल सकते हैं: या तो $z \in A$ या $z \in B$, और साथ ही या तो $z \in A$ या $z \in C$। यह फिर स्थितियों द्वारा प्रमाण जैसा दिखता है—सिवाय इसके कि "और" इसे उलझा देता है। आप सोच सकते हैं कि इसका अर्थ तीन संभावनाएँ होना है: z, A, B या C में है। लेकिन यह भूल होगी। हमें सावधान रहना है, अतः प्रत्येक वियोजन पर बारी-बारी से विचार करें।

परिभाषा $\cap$ से $z \in A \cup B$ और $z \in A \cup C$। परिभाषा $\cup$ से $z \in A$ या $z \in B$। हम स्थितियों में भेद करते हैं।

चूँकि हमारा ध्यान पहले वियोजन पर है, हमने अभी अपना दूसरा वियोजन ($A \cup C$ को खोलने से) प्राप्त नहीं किया। वास्तव में अभी उसकी आवश्यकता नहीं। पहली स्थिति $z \in A$ है, और किसी समुच्चय का अवयव, उस समुच्चय का किसी अन्य समुच्चय के साथ सम्मिलन का भी अवयव होता है। अतः स्थिति 1 सरल है:

स्थिति 1: मान लें कि $z \in A$। इससे $z \in A \cup (B \cap C)$ निष्पन्न होता है।

अब दूसरी स्थिति $z \in B$ लें। यहाँ हम दूसरा $\cup$ खोलेंगे और एक और बार स्थितियों द्वारा प्रमाण करेंगे:

स्थिति 2: मान लें कि $z \in B$। चूँकि $z \in A \cup C$, इसलिए या तो $z \in A$ या $z \in C$। हम आगे स्थितियों में भेद करते हैं:

स्थिति 2a: $z \in A$। तब फिर $z \in A \cup (B \cap C)$।

ठीक है, यह कुछ विचित्र था। इस स्थिति के लिए वास्तव में हमें मान्यता $z \in B$ की आवश्यकता नहीं थी, किंतु कोई समस्या नहीं।

स्थिति 2b: $z \in C$। तब $z \in B$ और $z \in C$, अतः $z \in B \cap C$, और फलतः $z \in A \cup (B \cap C)$।

इससे स्थितियों द्वारा दोनों प्रमाण पूरे होते हैं, और इसलिए दूसरा आधा भी पूरा हुआ।

अतः यदि $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, तो $z \in A \cup (B \cap C)$। $\square$

73.6 एक और उदाहरण

प्रतिज्ञप्ति 73.9. *यदि $A \subseteq C$, तो $A \cup (C \setminus A) = C$।*

प्रमाण. मान लें कि $A \subseteq C$। हम दिखाना चाहते हैं कि $A \cup (C \setminus A) = C$।

> हम यह देखकर आरंभ करते हैं कि यह एक सशर्त कथन है। इसका सार्वत्रिक परिमाणीकरण अंतर्निहित है: प्रतिज्ञप्ति सभी समुच्चयों A और C के लिए सत्य है। अतः A और C मनमाने समुच्चयों के चर हैं। ऐसा कथन सिद्ध करने के लिए हम पूर्ववर्ती को मानकर अनुवर्ती सिद्ध करते हैं।
>
> हम मान्यता $A \subseteq C$ का उपयोग करके आगे बढ़ते हैं। परिभाषा $\subseteq$ खोलें: मान्यता का अर्थ है कि A के सभी अवयव, C के भी अवयव हैं। इसे लिख लें—यह एक महत्त्वपूर्ण तथ्य है जिसका उपयोग हम पूरे प्रमाण में करेंगे।

परिभाषा $\subseteq$ से, चूँकि $A \subseteq C$, इसलिए सभी z के लिए, यदि $z \in A$, तो $z \in C$।

> हमने मान्यता में दी गई सभी परिभाषाएँ खोल ली हैं। अब हम निष्कर्ष पर बढ़ सकते हैं। हम दिखाना चाहते हैं कि $A \cup (C \setminus A) = C$, अतः पिछले उदाहरण की तरह प्रमाण व्यवस्थित करते हैं: दिखाते हैं कि $A \cup (C \setminus A)$ का प्रत्येक अवयव, C का भी अवयव है, और इसके विपरीत C का प्रत्येक अवयव, $A \cup (C \setminus A)$ का अवयव है। इसे संक्षेप में लिख सकते हैं: $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$ और $C \subseteq A \cup (C \setminus A)$। (यहाँ हम परिभाषा खोलने के विपरीत कर रहे हैं, किंतु इससे प्रमाण पढ़ना कुछ सरल हो जाता है।) चूँकि यह एक संयोजन है, हमें दोनों भाग सिद्ध करने हैं। पहला भाग दिखाने के लिए, अर्थात् यह कि $A \cup (C \setminus A)$ का प्रत्येक अवयव, C का भी अवयव है, हम किसी मनमाने z के लिए $z \in A \cup (C \setminus A)$ मानते हैं और दिखाते हैं कि $z \in C$। $\cup$ की परिभाषा से, $z \in A \cup (C \setminus A)$ से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $z \in A$ या $z \in C \setminus A$। अब आपको इसकी रीति समझ आने लगी होगी।

$A \cup (C \setminus A) = C$ तभी और केवल तभी जब $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$ और $C \subseteq (A \cup (C \setminus A)$। पहले हम सिद्ध करते हैं कि $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$। मान लें $z \in A \cup (C \setminus A)$। अतः या तो $z \in A$ या $z \in (C \setminus A)$।

> हम एक वियोजन पर पहुँचे हैं और उससे $z \in C$ सिद्ध करना चाहते हैं। यह हम स्थितियों द्वारा प्रमाण से करते हैं।

स्थिति 1: $z \in A$। चूँकि सभी z के लिए, यदि $z \in A$, तो $z \in C$, इसलिए हमारे पास $z \in C$ है।

> यहाँ हमने पहले लिखा हुआ वह तथ्य प्रयोग किया है जो प्रतिज्ञप्ति की परिकल्पना $A \subseteq C$ से निष्पन्न हुआ था। पहली स्थिति पूरी है और अब हम दूसरी स्थिति $z \in (C \setminus A)$ लेते हैं। याद करें कि $C \setminus A$ दोनों समुच्चयों का *अंतर* दर्शाता है, अर्थात् C के उन सभी अवयव का समुच्चय जो A के अवयव नहीं हैं। किंतु C का कोई भी अवयव जो A में नहीं है, विशेषतः C का अवयव है।

स्थिति 2: $z \in (C \setminus A)$। इसका अर्थ है कि $z \in C$ और $z \notin A$। अतः विशेषतः $z \in C$।

> बढ़िया, हमने पहली दिशा सिद्ध कर ली है। अब दूसरी दिशा लें। यहाँ हम सिद्ध करते हैं कि $C \subseteq A \cup (C \setminus A)$। अतः हम $z \in C$ मानकर सिद्ध करते हैं कि $z \in A \cup (C \setminus A)$।

अब मान लें $z \in C$। हम दिखाना चाहते हैं कि $z \in A$ या $z \in C \setminus A$।

> चूँकि A के सभी अवयव, C के भी अवयव हैं और $C \setminus A$ उन सभी वस्तुओं का समुच्चय है जो C के अवयव हैं पर A के नहीं, इसलिए निष्पन्न होता है कि z या तो A में है या $C \setminus A$ में। यदि आप पहले से नहीं जानते कि परिणाम सत्य क्यों है, तो यह कुछ अस्पष्ट हो सकता है। इसे चरण-दर-चरण सिद्ध करना बेहतर होगा। एक सरल तथ्य उपयोगी होगा जिसे हम बिना प्रमाण के कह सकते हैं: $z \in A$ या $z \notin A$।

इसे "अपवर्जित मध्य का सिद्धांत" कहते हैं: किसी भी कथन p के लिए, या तो p सत्य है या उसका निषेध सत्य है। (यहाँ p कथन $z \in A$ है।) चूँकि यह एक वियोजन है, हम फिर स्थितियों द्वारा प्रमाण कर सकते हैं।

या तो $z \in A$ या $z \notin A$। पहली स्थिति में $z \in A \cup (C \setminus A)$। दूसरी स्थिति में $z \in C$ और $z \notin A$, अतः $z \in C \setminus A$। किंतु तब $z \in A \cup (C \setminus A)$।

हमारा प्रमाण पूरा हुआ: हमने दिखाया है कि $A \cup (C \setminus A) = C$। □

73.7 विरोधाभास द्वारा प्रमाण

पहली स्थिति में विरोधाभास द्वारा प्रमाण ऐसा अनुमान प्रतिरूप है जिसका उपयोग नकारात्मक दावे सिद्ध करने में होता है। मान लें आप दिखाना चाहते हैं कि कोई दावा p *असत्य* है, अर्थात् $\neg p$ दिखाना चाहते हैं। सबसे आशाजनक रणनीति है (a) p को सत्य मानना और (b) दिखाना कि यह मान्यता ऐसी बात तक ले जाती है जिसे आप असत्य जानते हैं। "असत्य ज्ञात बात" ऐसा परिणाम हो सकता है जो स्वयं p से टकराता—उसका विरोध करता—है, अथवा विचाराधीन समग्र दावे की किसी अन्य परिकल्पना से। उदाहरणतः "यदि q, तो $\neg p$" के प्रमाण में q को सत्य मानना और उससे $\neg p$ सिद्ध करना होता है। यदि $\neg p$ को विरोधाभास से सिद्ध करते हैं, तो इसका अर्थ q के अतिरिक्त p भी मानना है। यदि p से $\neg q$ सिद्ध कर सकें, तो दिखा दिया कि मान्यता p ऐसी बात तक ले जाती है जो आपकी दूसरी मान्यता q का विरोध करती है, क्योंकि q और $\neg q$ दोनों सत्य नहीं हो सकते। निस्संदेह विरोधाभास के प्रमाण में परिभाषाएँ खोलने के साथ अन्य अनुमान प्रतिरूप भी उपयोग करने होंगे। एक उदाहरण देखें।

प्रतिज्ञप्ति 73.10. *यदि $A \subseteq B$ और $B = \emptyset$, तो A के कोई अवयव नहीं हैं।*

प्रमाण. मान लें $A \subseteq B$ और $B = \emptyset$। हम दिखाना चाहते हैं कि A के कोई अवयव नहीं हैं।

चूँकि यह सशर्त दावा है, हम पूर्ववर्ती मानते हैं और अनुवर्ती सिद्ध करना चाहते हैं। अनुवर्ती है: A के कोई अवयव नहीं हैं। इसे कुछ अधिक स्पष्ट कर सकते हैं: ऐसा नहीं है कि कोई $x \in A$ है।

A के कोई अवयव नहीं हैं तभी जब ऐसा नहीं है कि कोई x है जिसके लिए $x \in A$।

अतः हमने निर्धारित किया कि वास्तव में हमें नकारात्मक दावा $\neg p$ सिद्ध करना है, अर्थात्: ऐसा नहीं है कि कोई $x \in A$ है। विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए संगत सकारात्मक दावा p, अर्थात् कोई $x \in A$ है, मानकर उससे विरोधाभास सिद्ध करना होगा। "विरोधाभास के लिए मानें" अथवा केवल "अन्यथा मानें" लिखकर और फिर मान्यता p कहकर संकेत करते हैं कि विरोधाभास द्वारा प्रमाण कर रहे हैं।

अन्यथा मानें: कोई $x \in A$ है।

अब यह नई मान्यता है जिसका उपयोग विरोधाभास प्राप्त करने में करेंगे। हमारी दो और मान्यताएँ हैं: $A \subseteq B$ और $B = \emptyset$। पहली से $x \in B$ मिलता है:

चूँकि $A \subseteq B$, $x \in B$।

किंतु चूँकि $B = \emptyset$, B का प्रत्येक अवयव (जैसे x), $\emptyset$ का भी अवयव होना चाहिए।

चूँकि $B = \emptyset$, $x \in \emptyset$। यह विरोधाभास है, क्योंकि परिभाषा से $\emptyset$ के कोई अवयव नहीं हैं।

इससे प्रमाण पूरा हो चुका है: व्यवस्थित की गई मान्यताओं से हमें आवश्यक वस्तु (विरोधाभास) मिल गई और इसका अर्थ है कि सभी मान्यताएँ सत्य नहीं हो सकतीं। चूँकि पहली दो मान्यताएँ ($A \subseteq B$ और $B = \emptyset$) विवादित नहीं, अंतिम प्रस्तुत मान्यता (कोई $x \in A$ है) ही असत्य होनी चाहिए। किंतु पूर्ण विस्तार चाहें तो इसे स्पष्ट लिख सकते हैं।

अतः हमारी मान्यता कि कोई $x \in A$ है, असत्य होनी चाहिए; फलतः विरोधाभास द्वारा प्रमाण से A के कोई अवयव नहीं हैं। $\square$

प्रत्येक सकारात्मक दावा तुच्छतः किसी नकारात्मक दावे के तुल्य है: p तभी जब $\neg\neg p$। अतः विरोधाभास द्वारा प्रमाण का उपयोग सकारात्मक दावे "अप्रत्यक्ष रूप से" स्थापित करने में भी इस प्रकार हो सकता है: p सिद्ध करने के लिए उसे नकारात्मक दावा $\neg\neg p$ पढ़ें। यदि $\neg p$ से विरोधाभास सिद्ध कर सकें, तो विरोधाभास द्वारा प्रमाण से $\neg\neg p$ और फलतः p स्थापित किया है।

पिछले उदाहरण में हमारा लक्ष्य नकारात्मक दावा सिद्ध करना था, अर्थात् A के कोई अवयव नहीं हैं, इसलिए विरोधाभास द्वारा प्रमाण के उद्देश्य से की गई मान्यता (अर्थात् कोई $x \in A$ है) सकारात्मक दावा थी। उसने हमें काम करने के लिए काल्पनिक $x \in A$ दिया, जिसके बारे में तब तक तर्क किया जब तक $x \in \emptyset$ न मिला।

सकारात्मक दावा अप्रत्यक्ष रूप से सिद्ध करते समय विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए की जाने वाली मान्यता नकारात्मक होगी। किंतु बहुत बार सकारात्मक दावे को सरलता से नकारात्मक और नकारात्मक दावे को सकारात्मक रूप में फिर सूत्रबद्ध कर सकते हैं। यदि पिछले प्रमाण में नकारात्मक अनुवर्ती "A के कोई अवयव नहीं" के बदले "$A = \emptyset$" सिद्ध करते, तो प्रमाण मूलतः समान होता। ($=$ की परिभाषा से "$A = \emptyset$" सामान्य दावा है, क्योंकि वह "A का प्रत्येक अवयव, $\emptyset$ का अवयव है और इसके विपरीत" में खुलता है।) किंतु उसे नकारात्मक दावा "ऐसा नहीं: कोई $x \in A$ है" के तुल्य सरलता से देखा जा सकता है।

अतः कभी-कभी p को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा $\neg p$ को मान्यता बनाकर काम करना सरल है। जब सीधा प्रमाण उतना ही सरल या और सरल हो (जैसे अगले उदाहरणों में), तब भी कुछ लोग अप्रत्यक्ष रूप से आगे बढ़ना पसंद करते हैं। यदि दोहरा निषेध भ्रमित करे, तो किसी दावे के विरोधाभास द्वारा प्रमाण को *विपरीत* दावे से विरोधाभास के प्रमाण के रूप में सोचें। अतः $\neg p$ का विरोधाभास द्वारा प्रमाण मान्यता p से विरोधाभास का प्रमाण है; और p का विरोधाभास द्वारा प्रमाण $\neg p$ से विरोधाभास का प्रमाण है।

प्रतिज्ञप्ति 73.11. $A \subseteq A \cup B$.

प्रमाण. हम $A \subseteq A \cup B$ दिखाना चाहते हैं।

> प्रथम दृष्टि में यह सकारात्मक दावा है: प्रत्येक $x \in A$, $A \cup B$ में भी है। इसका निषेध है: कोई $x \in A$, $\notin A \cup B$ है। अतः इस निषेधित दावे को मानकर और यह दिखाकर कि वह विरोधाभास तक ले जाता है, दावे को अप्रत्यक्ष रूप से सिद्ध कर सकते हैं।

अन्यथा मानें, अर्थात् $A \not\subseteq A \cup B$।

> हमारे पास $A \subseteq A \cup B$ की परिभाषा है: प्रत्येक $x \in A$, $\in A \cup B$ भी है। $A \not\subseteq A \cup B$ का अर्थ समझने के लिए खुली परिभाषा पर कुछ प्राथमिक तार्किक परिचालन करना होगा: यह असत्य है कि प्रत्येक $x \in A$, $\in A \cup B$ भी है, तभी जब कोई $x \in A$ ऐसा है जो $\notin C$। (यहाँ बहुत सावधान रहना चाहिए: अनेक विद्यार्थियों के विरोधाभास द्वारा प्रमाण के प्रयास इसलिए विफल होते हैं कि वे "सभी A, B हैं" जैसे दावे के निषेध का गलत विश्लेषण करते हैं।) दूसरे शब्दों में $A \not\subseteq A \cup B$ तभी जब कोई x है ऐसा कि $x \in A$ और $x \notin A \cup B$। इसके बाद सरल है।

अतः कोई $x \in A$ है ऐसा कि $x \notin A \cup B$। $\cup$ की परिभाषा से $x \in A \cup B$ तभी जब $x \in A$ अथवा $x \in B$। चूँकि $x \in A$, हमारे पास $x \in A \cup B$ है। यह मान्यता $x \notin A \cup B$ का विरोध करता है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 73.12. *यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$, तो $A \subseteq C$।*

प्रमाण. मान लें $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$। हम $A \subseteq C$ दिखाना चाहते हैं।

> अप्रत्यक्ष रूप से आगे बढ़ें: जिसे स्थापित करना चाहते हैं उसका निषेध मानते हैं।

अन्यथा मानें, अर्थात् $A \not\subseteq C$।

पहले की तरह हम तर्क करते हैं कि $A \not\subseteq C$ तभी जब प्रत्येक $x \in A$, $\in C$ भी नहीं है, अर्थात् कोई $x \in A$, $\notin C$ है। चिंता न करें, अभ्यास के बाद ऐसे निषेध खोलने में बहुत सोचना नहीं पड़ेगा।

दूसरे शब्दों में कोई x है ऐसा कि $x \in A$ और $x \notin C$।

अब इसका उपयोग विरोधाभास तक पहुँचने में कर सकते हैं। निस्संदेह इसके लिए अन्य दो मान्यताएँ उपयोग करनी होंगी।

चूँकि $A \subseteq B$, $x \in B$। चूँकि $B \subseteq C$, $x \in C$। किंतु यह $x \notin C$ का विरोध करता है। □

प्रतिज्ञप्ति 73.13. *यदि $A \cup B = A \cap B$, तो $A = B$।*

प्रमाण. मान लें $A \cup B = A \cap B$। हम $A = B$ दिखाना चाहते हैं।

आरंभ अब नियमित है:

विरोधाभास के लिए मान लें कि $A \neq B$।

विरोधाभास द्वारा प्रमाण के लिए हमारी मान्यता $A \neq B$ है। चूँकि $A = B$ तभी जब $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$, हमें मिलता है कि $A \neq B$ तभी जब $A \not\subseteq B$ *अथवा* $B \not\subseteq A$। (ध्यान दें कि निषेधों का परिचालन करते समय सावधानी कितनी महत्त्वपूर्ण है!) इस वियोजन से विरोधाभास सिद्ध करने के लिए स्थितियों द्वारा प्रमाण उपयोग करते और दिखाते हैं कि प्रत्येक स्थिति में विरोधाभास निष्पन्न होता है।

$A \neq B$ तभी जब $A \not\subseteq B$ अथवा $B \not\subseteq A$। हम स्थितियों में भेद करते हैं।

पहली स्थिति में हम $A \not\subseteq B$ मानते हैं, अर्थात् किसी x के लिए $x \in A$ किंतु $\notin B$। $A \cap B$ को उन अवयवों के रूप में परिभाषित किया गया है जो A और B में साझे हैं, अतः यदि कोई वस्तु उनमें से एक में नहीं, तो सर्वनिष्ठ में नहीं। $A \cup B$, A के साथ B है, इसलिए दोनों में से किसी में भी वस्तु सम्मिलन में है। इससे मिलता है कि $x \in A \cup B$ किंतु $x \notin A \cap B$, और फलतः $A \cap B \neq A \cup B$।

स्थिति 1: $A \not\subseteq B$। तब किसी x के लिए $x \in A$ किंतु $x \notin B$। चूँकि $x \notin B$, तब $x \notin A \cap B$। चूँकि $x \in A$, $x \in A \cup B$। अतः $A \cap B \neq A \cup B$, जो मान्यता $A \cap B = A \cup B$ का विरोध करता है।

स्थिति 2: $B \not\subseteq A$। तब किसी y के लिए $y \in B$ किंतु $y \notin A$। पहले की तरह हमारे पास $y \in A \cup B$ किंतु $y \notin A \cap B$, इसलिए $A \cap B \neq A \cup B$, जो फिर $A \cap B = A \cup B$ का विरोध करता है। □

73.8 प्रमाण पढ़ना

पाठ्यपुस्तकों और लेखों में मिलने वाले प्रमाण बहुत कम उन सभी विवरणों को देते हैं जिन्हें अब तक हमने अपने उदाहरणों में शामिल किया है। लेखक प्रायः यह ध्यान नहीं दिलाते कि वे कब स्थितियों में भेद करते, कब अप्रत्यक्ष प्रमाण देते, या यह उल्लेख नहीं करते कि परिभाषा उपयोग कर रहे हैं। अतः पाठ्यपुस्तक में प्रमाण पढ़ते समय उसे समझने के लिए अक्सर वे विवरण स्वयं भरने होंगे। यह करना प्रमाण में आवश्यक विभिन्न चालों का अभ्यास भी है। एक उदाहरण देखें।

प्रतिज्ञप्ति 73.14 (अवशोषण). *सभी समुच्चयों A, B के लिए,*

$$A \cap (A \cup B) = A$$

प्रमाण. यदि $z \in A \cap (A \cup B)$, तो $z \in A$, अतः $A \cap (A \cup B) \subseteq A$। अब मान लें $z \in A$। तब $z \in A \cup B$ भी, और इसलिए $z \in A \cap (A \cup B)$ भी। □

अवशोषण नियम का पिछला प्रमाण बहुत संक्षिप्त है। प्रयुक्त परिभाषाओं का कोई उल्लेख नहीं, सिद्ध करने से पहले "हमें यह सिद्ध करना है" नहीं, इत्यादि। इसे खोलें। सिद्ध प्रतिज्ञप्ति किन्हीं समुच्चयों A और B के बारे में सामान्य दावा है और प्रमाण में A या B का उल्लेख मनमाने समुच्चयों के चर हैं। प्रमाण जो सामान्य दावे स्थापित करता है वे समुच्चयों की समानता सिद्ध करने के लिए आवश्यक हैं, अर्थात् समानता के बाएँ पक्ष का प्रत्येक अवयव, दाएँ पक्ष का अवयव है और इसके विपरीत।

"यदि $z \in A \cap (A \cup B)$, तो $z \in A$, अतः $A \cap (A \cup B) \subseteq A$।"

यह समानता के प्रमाण का पहला आधा है: यह स्थापित करता है कि यदि कोई मनमाना z बाएँ पक्ष का अवयव है, तो वह दाएँ पक्ष का भी अवयव है, अर्थात् $A \cap (A \cup B) \subseteq A$। मान लें $z \in A \cap (A \cup B)$। चूँकि z दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ का अवयव तभी है जब दोनों समुच्चयों का अवयव हो, हम निष्कर्षित कर सकते हैं कि $z \in A$ और $z \in A \cup B$ भी। विशेषतः $z \in A$, जिसे दिखाना था। चूँकि पहले आधे के लिए इतना ही करना है, हम जानते हैं कि शेष प्रमाण दूसरे आधे, अर्थात् $A \subseteq A \cap (A \cup B)$, का प्रमाण होना चाहिए।

"अब मान लें $z \in A$। तब $z \in A \cup B$ भी, और इसलिए $z \in A \cap (A \cup B)$ भी।"

हम $z \in A$ मानकर आरंभ करते हैं, क्योंकि दिखा रहे हैं कि किसी भी z के लिए यदि $z \in A$, तो $z \in A \cap (A \cup B)$। $z \in A \cap (A \cup B)$ दिखाने के लिए ("$\cap$" की परिभाषा से) दिखाना होगा कि (i) $z \in A$ और (ii) $z \in A \cup B$ भी। यहाँ (i) केवल हमारी मान्यता है, अतः आगे कुछ सिद्ध नहीं करना और इसीलिए प्रमाण उसका फिर उल्लेख नहीं करता। (ii) के लिए याद करें कि z समुच्चयों के सम्मिलन का अवयव तभी है जब उन समुच्चयों में कम-से-कम एक का अवयव हो। चूँकि $z \in A$ और $A \cup B$, A तथा B का सम्मिलन है, यहाँ ऐसा ही है। अतः $z \in A \cup B$। हमने (i) $z \in A$ और (ii) $z \in A \cup B$ दोनों दिखाए, फलतः "$\cap$" की परिभाषा से $z \in A \cap (A \cup B)$। प्रमाण उन परिभाषाओं का उल्लेख नहीं करता; माना जाता है कि पाठक उन्हें आत्मसात कर चुका है। यदि नहीं, तो लौटकर स्वयं को याद दिलाना होगा कि वे क्या हैं। फिर यह भी पहचानना होगा कि $z \in A$ से $z \in A \cup B$ क्यों निष्पन्न होता है, और $z \in A$ तथा $z \in A \cup B$ से $z \in A \cap (A \cup B)$ क्यों।

ऊपर के प्रमाण का एक अन्य रूप यहाँ है, जिसमें सब कुछ स्पष्ट कर दिया गया है:

प्रमाण. [समुच्चयों के लिए $=$ की परिभाषा से $A \cap (A \cup B) = A$ सिद्ध करने के लिए हमें दिखाना है कि (a) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ और (b) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$। (a): $\subseteq$ की परिभाषा से हमें दिखाना है कि यदि $z \in A \cap (A \cup B)$, तो $z \in A$।] यदि $z \in A \cap (A \cup B)$, तो $z \in A$ [क्योंकि $\cap$ की परिभाषा से $z \in A \cap (A \cup B)$ तभी और केवल तभी जब $z \in A$ और $z \in A \cup B$], अतः $A \cap (A \cup B) \subseteq A$। [(b): $\subseteq$ की परिभाषा से हमें दिखाना है कि यदि $z \in A$, तो $z \in A \cap (A \cup B)$।] अब मान लें [(1)] $z \in A$। तब [(2)] $z \in A \cup B$ भी [क्योंकि (1) से $z \in A$ या $z \in B$, जिसका $\cup$ की परिभाषा से अर्थ है $z \in A \cup B$], और इसलिए $z \in A \cap (A \cup B)$ भी [क्योंकि $\cap$ की परिभाषा अपेक्षा करती है कि $z \in A$, अर्थात् (1), और $z \in A \cup B$), अर्थात् (2)]। $\square$

73.9 मैं यह नहीं कर सकता!

हम सभी ऐसे बिंदु पर पहुँचते हैं जहाँ हार मानने का मन होता है। किंतु आप यह कर *सकते हैं*। आपके शिक्षक, शिक्षण सहायक और सहपाठी सहायता कर सकते हैं। उनसे सहायता माँगिए! संकट से बचने और हार मानने का मन होने पर क्या करें, इसके कुछ सुझाव ये हैं।

यह सुनिश्चित करने के लिए कि आप समस्याएँ सफलतापूर्वक हल कर सकें, निम्न करें:

1. *यथासंभव पहले आरंभ करें।* पूरे सत्र में हम व्यस्त होते हैं और हममें से अनेक टालमटोल से जूझते हैं; सबसे अच्छे कामों में से एक है गृहकार्य जल्दी आरंभ करना। इस प्रकार यदि अटक जाएँ, तो आपके पास समाधान ढूँढने का समय होगा (रोने के अतिरिक्त)।

2. *अपने सहपाठियों से बात करें।* आप अकेले नहीं हैं। कक्षा के अन्य लोग भी कठिनाई में हो सकते हैं—पर उनकी कठिनाइयाँ भिन्न हो सकती हैं। साथियों से चर्चा समस्या पर ऐसा भिन्न दृष्टिकोण दे सकती है जिससे समाधान सूझे। निस्संदेह उनका समाधान केवल नकल न करें: संकेत माँगें, या बताएँ कि कहाँ अटके और अगला कदम पूछें। और जब समझ जाएँ, तो बदले में सहायता करें। किसी और की सहायता और बातों की व्याख्या आपकी समझ भी बेहतर करेगी।

3. *सहायता माँगें।* आपके लिए अनेक संसाधन उपलब्ध हैं—आपके शिक्षक और शिक्षण सहायक आपकी सहायता के लिए हैं और *चाहते हैं* कि आप सफल हों। वे समस्या हल करने और प्रक्रिया में आपकी कठिनाई का स्थान पहचानने में सहायता कर सकेंगे।

4. *विराम लें।* यदि अटके हैं, तो इसका कारण यह *हो सकता है* कि आप समस्या को बहुत देर से देखते रहे हैं। छोटा विराम लें, एक कप चाय पिएँ, या कुछ समय दूसरी समस्या पर काम करें, फिर ताज़े मन से लौटें। रात भर सोचने दें।

ध्यान दें कि इन रणनीतियों के लिए प्रमाण पर बहुत पहले काम आरंभ करना आवश्यक है। यदि नियत दिन से पहले रात दो बजे प्रमाण आरंभ किया, तो वे अधिक सहायक नहीं होंगी।

यह बहुत निराशाजनक लग सकता है, किंतु प्रमाण हल करना ऐसी चुनौती है जिसका अंत में फल मिलता है। कुछ लोग इसे पेशे के रूप में करते हैं—अतः इसमें आनंद की कोई बात अवश्य होगी। लगभग हर चीज़ की तरह समस्याएँ हल करने और प्रमाण करने के लिए अभ्यास चाहिए। आपको ऐसे सहपाठी दिख सकते हैं जिन्हें यह सरल लगता है: संभवतः वे पहले ही बहुत अभ्यास कर चुके हैं। बहुत जल्दी हार न मानें।

यदि किसी विशेष समस्या पर समय (या धैर्य) समाप्त हो जाए, तो कोई बात नहीं। इसका अर्थ यह नहीं कि आप मूर्ख हैं या कभी समझ नहीं पाएँगे। अपने शिक्षक या दूसरे विद्यार्थी से जानें कि वह कैसे किया जाता है और पहचानें कि कहाँ गलती हुई या अटके, ताकि अगली बार समान प्रश्न में उससे बच सकें। फिर समाधान देखे बिना उसे करने का प्रयास करें। और अगली बार पहले आरंभ करें (और सहायता भी पहले माँगें)।

73.10 अन्य संसाधन

गणित में प्रमाण कैसे करें, इस विषय पर अनेक उपयोगी पुस्तकें हैं। विशेषतः *How to Read and do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes* (Solow, 2013) और *How to Prove It: A Structured Approach* (Velleman, 2019) देखें। *Book of Proof* (Hammack, 2013) और *Mathematical Reasoning* (Sandstrum, 2019) प्रमाण पर ऐसी पुस्तकें हैं जो ऑनलाइन निःशुल्क उपलब्ध हैं। दार्शनिकों को *More Precisely: The Math you need to do Philosophy* (Steinhart, 2018) गणितीय तर्कणा की अच्छी प्रारंभिक पुस्तक लग सकती है।

इंटरनेट पर प्रमाणों की कई छोटी मार्गदर्शिकाएँ भी उपलब्ध हैं; उदाहरणतः, "Introduction to Mathematical Arguments" (Hutchings, 2003) और "How to write proofs" (Cheng, 2004).

प्रेरक वीडियो

क्या गृहकार्य करने की कोई प्रेरणा नहीं लग रही? मन उदास है? ये वीडियो सहायक हो सकते हैं!

- `https://www.youtube.com/watch?v=ZXsQAXx_ao0`
- `https://www.youtube.com/watch?v=BQ4yd2W50No`
- `https://www.youtube.com/watch?v=StTqXEQ2l-Y`

प्रश्न

प्रश्न 73.1. मान लें आपसे $A \cap B \neq \emptyset$ सिद्ध करने को कहा गया है। यहाँ आने वाली सभी परिभाषाएँ खोलिए, अर्थात् इसे ऐसे रूप में फिर कहिए जिसमें "$\cap$", "$=$" या "$\emptyset$" का उल्लेख न हो।

प्रश्न 73.2. *अप्रत्यक्ष रूप से* सिद्ध कीजिए कि $A \cap B \subseteq A$।

प्रश्न 73.3. $A \cup (A \cap B) = A$ के निम्नलिखित प्रमाण को विस्तृत कीजिए। इसमें प्रयुक्त सभी अनुमान प्रतिरूपों का उल्लेख कीजिए, बताइए कि प्रत्येक चरण पहले स्थापित मान्यताओं या दावों से क्यों निष्पन्न होता है, और कहाँ हमें किन परिभाषाओं का सहारा लेना पड़ता है।

प्रमाण. यदि $z \in A \cup (A \cap B)$, तो $z \in A$ या $z \in A \cap B$। यदि $z \in A \cap B$, तो $z \in A$। प्रत्येक $z \in A$, $A \cup (A \cap B)$ में भी है। $\square$

अध्याय 74

आगमन

74.1 परिचय

आगमन एक महत्त्वपूर्ण प्रमाण तकनीक है जिसका विभिन्न रूपों में तर्कशास्त्र, सैद्धांतिक कंप्यूटर विज्ञान और गणित के लगभग सभी क्षेत्रों में उपयोग होता है। तर्कशास्त्र के अनेक परिणाम सिद्ध करने के लिए इसकी आवश्यकता पड़ती है।

आगमन की तुलना प्रायः निगमन से की जाती है और उसे विशिष्ट से सामान्य की ओर अनुमान कहा जाता है। उदाहरण के लिए यदि हम अनेक हरे पन्ने देखते हैं और ऐसी कोई वस्तु नहीं देखते जिसे हम पन्ना कहें पर जो हरी न हो, तो निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सभी पन्ने हरे हैं। यह आगमनात्मक अनुमान है, क्योंकि यह अनेक विशिष्ट स्थितियों (यह पन्ना हरा है, वह पन्ना हरा है, इत्यादि) से सामान्य दावे (सभी पन्ने हरे हैं) की ओर जाता है। *गणितीय* आगमन भी ऐसा अनुमान है जो सामान्य दावा निष्कर्षित करता है, किंतु वह इस "सरल आगमन" से बहुत भिन्न प्रकार का है।

बहुत मोटे तौर पर गणित का आगमनात्मक प्रमाण निष्कर्ष निकालता है कि किसी विशेष प्रकार की सभी गणितीय वस्तुओं में कोई विशेष गुण है। सरलतम स्थिति में आगमनात्मक प्रमाण जिन गणितीय वस्तुओं से संबंधित होता है वे प्राकृतिक संख्याएँ हैं। उस स्थिति में आगमनात्मक प्रमाण यह स्थापित करता है कि सभी प्राकृतिक संख्याओं में कोई गुण है, और इसके लिए वह दिखाता है कि

1. 0 में वह गुण है, और
2. जब भी किसी संख्या k में वह गुण हो, $k+1$ में भी वह गुण है।

तब प्राकृतिक संख्याओं पर आगमन का उपयोग प्रायः उन गणितीय वस्तुओं के बारे में सामान्य दावे सिद्ध करने में भी हो सकता है जिन्हें संख्याएँ दी जा सकती हैं। उदाहरणतः प्रत्येक परिमित समुच्चय में अवयवों की कोई परिमित संख्या n होती है, और यदि आगमन से दिखा सकें कि प्रत्येक संख्या n में यह गुण है कि "n आकार के सभी परिमित समुच्चय ...हैं", तो हमने सभी परिमित समुच्चयों के बारे में कुछ दिखा दिया होगा।

आगमन का सामान्यीकरण उन गणितीय वस्तुओं तक भी किया जा सकता है जो *आगमनात्मक रूप से परिभाषित* हैं। उदाहरणतः प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र जैसी औपचारिक भाषा की अभिव्यक्तियाँ आगमनात्मक रूप से परिभाषित होती हैं। *संरचनात्मक आगमन* ऐसी सभी अभिव्यक्तियों के बारे में परिणाम सिद्ध करने का ढंग है। विशेषतः संरचनात्मक आगमन तर्कशास्त्र में बहुत उपयोगी—और व्यापक रूप से प्रयुक्त—है।

74.2 $\mathbb{N}$ पर आगमन

अपने सरलतम रूप में आगमन वह तकनीक है जिससे सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए परिणाम सिद्ध किए जाते हैं। इसमें इस तथ्य का उपयोग होता है कि 0 से आरंभ करके बार-बार 1 जोड़ने पर अंततः हम प्रत्येक प्राकृतिक संख्या तक पहुँचते हैं। अतः यह सिद्ध करने के लिए कि कोई बात प्रत्येक संख्या के लिए सत्य है, हम (1) स्थापित कर सकते हैं कि वह 0 के लिए सत्य है और (2) दिखा सकते हैं कि जब भी वह किसी संख्या n के लिए सत्य हो, तो अगली संख्या $n+1$

के लिए भी सत्य है। यदि "संख्या n में गुण P है" को $P(n)$ से (और "संख्या k में गुण P है" को $P(k)$ से, इत्यादि) संक्षिप्त करें, तो सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $P(n)$ का आगमन द्वारा प्रमाण इनसे बनता है:

1. $P(0)$ का प्रमाण, और
2. यह प्रमाण कि किसी भी k के लिए यदि $P(k)$, तो $P(k+1)$।

इसे बिल्कुल स्पष्ट करने के लिए मान लें कि हमारे पास (1) और (2) दोनों हैं। तब (1) बताता है कि $P(0)$ सत्य है। यदि (2) भी हो, तो विशेषतः हम जानते हैं कि यदि $P(0)$, तो $P(0+1)$, अर्थात् $P(1)$। यह सामान्य कथन "किसी भी k के लिए यदि $P(k)$, तो $P(k+1)$" में k के स्थान पर 0 रखने से निष्पन्न होता है। अतः मोडस पोनेन्स से हमारे पास $P(1)$ है। (2) से फिर, अब n के स्थान पर 1 लेकर, हमारे पास है: यदि $P(1)$, तो $P(2)$। चूँकि हमने अभी $P(1)$ स्थापित किया, मोडस पोनेन्स से हमारे पास $P(2)$ है। और इसी प्रकार आगे। किसी भी संख्या n के लिए ऐसा n बार करने के बाद अंततः हम $P(n)$ पर पहुँचते हैं। इसलिए (1) और (2) मिलकर किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $P(n)$ स्थापित करते हैं।

एक उदाहरण देखें। मान लें हम जानना चाहते हैं कि n पासों से कितने भिन्न योग फेंके जा सकते हैं। कुछ मूर्खतापूर्ण लगने पर भी 0 पासों से आरंभ करें। यदि आपके पास कोई पासा नहीं है, तो केवल एक संभव योग "फेंका" जा सकता है: कोई बिंदु नहीं, जिनका योग 0 है। अतः भिन्न संभव फेंकों की संख्या 1 है। यदि केवल एक पासा हो, अर्थात् $n = 1$, तो 1 से 6 तक छह संभव मान हैं। दो पासों से 2 से 12 तक कोई भी योग फेंक सकते हैं, अर्थात् 11 संभावनाएँ। तीन पासों से 3 से 18 तक कोई भी संख्या फेंक सकते हैं, अर्थात् 16 भिन्न संभावनाएँ। $1, 6, 11, 16$: कोई प्रतिरूप दिखता है; शायद उत्तर $5n+1$ है? निस्संदेह $5n+1$ अधिकतम संभव है, क्योंकि n पासों से फेंके जा सकने वाले न्यूनतम मान n (सभी 1) और अधिकतम मान $6n$ (सभी 6) के बीच केवल $5n+1$ संख्याएँ हैं।

प्रमेय 74.1. *n पासों से n और $6n$ के बीच के सभी $5n+1$ संभव मान फेंके जा सकते हैं।*

प्रमाण. $P(n)$ यह दावा हो: "n पासों से n और $6n$ के बीच कोई भी संख्या फेंकना संभव है।" आगमन का उपयोग करने के लिए हम सिद्ध करते हैं:

1. *आगमन आधार* $P(1)$, अर्थात् केवल एक पासे से 1 और 6 के बीच कोई भी संख्या फेंकी जा सकती है।
2. *आगमन चरण*, सभी k के लिए यदि $P(k)$, तो $P(k+1)$।

(1) छह फलकों वाले पासे की जाँच से सिद्ध होता है। उसके सभी छह फलक हैं और 1 तथा 6 के बीच प्रत्येक संख्या किसी एक फलक पर आती है। अतः एक पासे से 1 और 6 के बीच कोई भी संख्या फेंकना संभव है।

(2) सिद्ध करने के लिए हम सशर्त के पूर्ववर्ती, अर्थात् $P(k)$, को मानते हैं। इस मान्यता को *आगमन परिकल्पना* कहते हैं। हम इसका उपयोग $P(k+1)$ सिद्ध करने में करते हैं। कठिन भाग यह ढूँढना है कि $k+1$ पासों के फेंक के संभव मानों को k पासों के फेंकों के संभव मानों और अतिरिक्त $(k+1)$वें पासे के फेंक के पदों में कैसे सोचा जाए—आगमन परिकल्पना का उपयोग करना हो तो हमें यही करना होगा।

आगमन परिकल्पना कहती है कि k पासों से k और $6k$ के बीच कोई भी संख्या पा सकते हैं। यदि अपने $(k+1)$वें पासे से 1 फेंकें, तो वह कुल में 1 जोड़ता है। अतः k पासे फेंककर और फिर $(k+1)$वें पासे से 1 फेंककर हम $k+1$ और $6k+1$ के बीच कोई भी मान फेंक सकते हैं। क्या बचा? $6k+2$ से $6k+6$ तक के मान। इन्हें हम पहले k बार 6 और फिर अपने $(k+1)$वें पासे से 2 और 6 के बीच की संख्या फेंककर पा सकते हैं। मिलाकर इसका अर्थ है कि $k+1$ पासों से $k+1$ और $6(k+1)$ के बीच कोई भी संख्या फेंक सकते हैं, अर्थात् हमने मान्यता $P(k)$, आगमन परिकल्पना, का उपयोग करके $P(k+1)$ सिद्ध कर दिया। □

बहुत बार हम आगमन का उपयोग तब करते हैं जब वस्तुओं (संख्याओं, समुच्चयों, इत्यादि) की ऐसी शृंखला के बारे में कुछ सिद्ध करना हो जो स्वयं "आगमनात्मक रूप से" परिभाषित है, अर्थात् $(n+1)$वीं वस्तु को nवीं के पदों में परिभाषित करके। उदाहरण के लिए n तक की प्राकृतिक संख्याओं का योग s_n इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

$$s_0 = 0$$
$$s_{n+1} = s_n + (n+1)$$

यह परिभाषा देती है:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 0, \\
s_1 &= s_0 + 1 && = 1, \\
s_2 &= s_1 + 2 && = 1 + 2 = 3 \\
s_3 &= s_2 + 3 && = 1 + 2 + 3 = 6, \text{ इत्यादि।}
\end{aligned}$$

अब हम आगमन से सिद्ध कर सकते हैं कि $s_n = n(n+1)/2$।

प्रतिज्ञप्ति 74.2. $s_n = n(n+1)/2$.

प्रमाण. हमें सिद्ध करना है (1) $s_0 = 0 \cdot (0+1)/2$ और (2) यदि $s_k = k(k+1)/2$, तो $s_{k+1} = (k+1)(k+2)/2$। (1) स्पष्ट है। (2) सिद्ध करने के लिए हम आगमन परिकल्पना $s_k = k(k+1)/2$ मानते हैं। इसका उपयोग करके हमें दिखाना है कि $s_{k+1} = (k+1)(k+2)/2$।

s_{k+1} क्या है? परिभाषा से $s_{k+1} = s_k + (k+1)$। आगमन परिकल्पना से $s_k = k(k+1)/2$। इसे पिछले समीकरण में प्रतिस्थापित कर सकते हैं, और फिर केवल भिन्नों का कुछ अंकगणित चाहिए:

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

यहाँ महत्त्वपूर्ण सीख यह है कि यदि आप किसी आगमनात्मक रूप से परिभाषित अनुक्रम a_n के बारे में कुछ सिद्ध कर रहे हैं, तो आगमन स्पष्ट विधि है। और यदि ऐसा न भी हो (जैसे पासों के फेंक की संभावनाओं में), तब भी आप आगमन का उपयोग कर सकते हैं यदि किसी प्रकार $k+1$ की स्थिति को k की स्थिति से जोड़ सकें।

74.3 प्रबल आगमन

ऊपर चर्चित आगमन सिद्धांत में हम $P(0)$ और यह भी सिद्ध करते हैं कि यदि $P(k)$, तो $P(k+1)$। दूसरे भाग में हम $P(k)$ को सत्य मानते हैं और इस मान्यता से $P(k+1)$ सिद्ध करते हैं। निस्संदेह तुल्य रूप से हम $P(k-1)$ मानकर उससे $P(k)$ सिद्ध कर सकते थे—महत्त्वपूर्ण बात यह है कि किसी भी संख्या से उसके उत्तरवर्ती तक अनुमान कर सकें; कि किसी भी संख्या के लिए संबंधित दावे को यह मानकर सिद्ध कर सकें कि वह उसके पूर्ववर्ती के लिए सत्य है।

आगमन सिद्धांत का एक रूप ऐसा है जिसमें हम केवल यह नहीं मानते कि दावा k के पूर्ववर्ती $k-1$ के लिए सत्य है, बल्कि यह मानते हैं कि वह k से छोटी सभी संख्याओं के लिए सत्य है, और इस मान्यता से k के लिए दावा स्थापित करते हैं। इससे भी सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए दावा $P(n)$ मिलता है। क्योंकि $P(0)$ स्थापित करते ही हमने स्थापित कर दिया कि P, 1 से छोटी सभी संख्याओं के लिए सत्य है। और यदि हम जानते हैं कि सभी $l < k$ के लिए $P(l)$ हो तो $P(k)$, तो इसे विशेषतः $k = 1$ के लिए जानते हैं। अतः $P(1)$ निष्कर्षित कर सकते हैं। इससे हमने $P(0)$ और $P(1)$, अर्थात् सभी $l < 2$ के लिए $P(l)$ सिद्ध कर दिया, और चूँकि हमारे पास यह सशर्त भी है कि यदि सभी $l < 2$ के लिए $P(l)$, तो $P(2)$, हम $P(2)$ निष्कर्षित कर सकते हैं, और इसी प्रकार आगे।

वास्तव में यदि हम सामान्य सशर्त "सभी k के लिए, यदि सभी $l < k$ के लिए $P(l)$, तो $P(k)$" स्थापित कर सकें, तो हमें $P(0)$ अलग से स्थापित नहीं करना पड़ता, क्योंकि वह इससे निष्पन्न होता है। याद रखें कि "सभी $l < k$ के लिए $P(l)$" जैसा सामान्य दावा तब सत्य है जब कोई $l < k$ न हो। यह रिक्त परिमाणीकरण की स्थिति है: "सभी A, B हैं" तब सत्य है जब कोई A न हो; $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x))$ तब सत्य है जब कोई x, $\varphi(x)$ को संतुष्ट न करे।

इस स्थिति में औपचारिक रूप "$\forall l\,(l < k \to P(l))$" होगा—और यदि कोई $l < k$ न हो तो वह सत्य है। और यदि $k = 0$, तो ठीक यही स्थिति है: कोई $l < 0$ नहीं, अतः "सभी $l < 0$ के लिए $P(0)$" सत्य है, चाहे P कुछ भी हो। इस प्रकार "यदि सभी $l < k$ के लिए $P(l)$, तो $P(k)$" का प्रमाण अपने-आप $P(0)$ स्थापित कर देता है।

यह रूप तब उपयोगी है जब k के लिए दावा स्थापित करना केवल $k - 1$ के लिए दावे पर निर्भर नहीं किया जा सकता, बल्कि एक या अधिक $l < k$ के लिए उसके सत्य होने की मान्यता चाहिए।

74.4 आगमनात्मक परिभाषाएँ

तर्कशास्त्र में हम वस्तुओं के प्रकार प्रायः *आगमनात्मक रूप से* परिभाषित करते हैं, अर्थात् यह बताने वाले नियम देकर कि परिभाषित किए जाने वाले प्रकार की वस्तु किसे माना जाए और उस प्रकार की पुरानी वस्तुओं से नई वस्तुएँ कैसे मिलें। उदाहरण के लिए हम किसी भाषा के पदों और सूत्रों जैसी चिह्नों की विशिष्ट प्रकार की शृंखलाएँ प्रायः आगमन से परिभाषित करते हैं। सरल उदाहरण के लिए a, b, c, d अक्षरों, चिह्न $\circ$ और कोष्ठकों [तथा] से बनी शृंखलाओं पर विचार करें, जैसे "[[c $\circ$ d][", "[a[]$\circ$]", "a" अथवा "[[a $\circ$ b] $\circ$ d]"। आपको शायद लगे कि पहली दो शृंखलाओं में कुछ "गलत" है: पहली में कोष्ठक बिल्कुल "संतुलित" नहीं हैं, और आपको लग सकता है कि "$\circ$" को ऐसी अभिव्यक्तियाँ "जोड़नी" चाहिए जो स्वयं सार्थक हों। तीसरी और चौथी शृंखलाएँ बेहतर दिखती हैं: प्रत्येक "[" के लिए समापन "]" है (यदि कोई कोष्ठक हैं), और प्रत्येक $\circ$ के दोनों ओर कोष्ठकों के युग्म से घिरी "सुंदर" अभिव्यक्तियाँ मिलती हैं।

हम सटीक रूप से बताना चाहते हैं कि "सुंदर पद" किसे माना जाए। सबसे पहले प्रत्येक अक्षर अपने-आप में सुंदर है। जो केवल एक अक्षर नहीं है, उसे "$[t \circ s]$" रूप का होना चाहिए, जहाँ s और t स्वयं सुंदर हों। इसके विपरीत यदि t और s सुंदर हैं, तो उनके बीच $\circ$ रखकर और उन्हें कोष्ठकों के युग्म से घेरकर नया सुंदर पद बना सकते हैं। इन संक्रियाओं का उपयोग सुंदर पदों के समुच्चय को *परिभाषित* करने में कर सकते हैं। यह एक *आगमनात्मक परिभाषा* है।

परिभाषा 74.3 (सुंदर पद). *सुंदर पदों* का समुच्चय इस प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित है:

1. कोई भी अक्षर a, b, c, d एक सुंदर पद है।
2. यदि s_1 और s_2 सुंदर पद हैं, तो $[s_1 \circ s_2]$ भी सुंदर पद है।
3. और कुछ भी सुंदर पद नहीं है।

यह परिभाषा बताती है कि कोई वस्तु सुंदर पद ठीक तभी मानी जाती है जब उसे (1) और (2) की शर्तों के अनुसार परिमित चरणों में निर्मित किया जा सके। पहले चरण में हम केवल अलग-अलग अक्षरों से बने सभी सुंदर पद बनाते हैं, अर्थात्,

$$\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}$$

दूसरे चरण में हम निर्मित पदों पर (2) लागू करते हैं। हमें मिलेंगे

$$[\mathrm{a} \circ \mathrm{a}], [\mathrm{a} \circ \mathrm{b}], [\mathrm{b} \circ \mathrm{a}], \ldots, [\mathrm{d} \circ \mathrm{d}]$$

दो अक्षरों के सभी संयोजनों के लिए। तीसरे चरण में अब तक बनाए किन्हीं दो सुंदर पदों पर (2) फिर लागू करते हैं। हमें $[\mathrm{a} \circ [\mathrm{a} \circ \mathrm{a}]]$ जैसे नए सुंदर पद मिलते हैं —जहाँ t चरण 1 का a और s चरण 2 का $[\mathrm{a} \circ \mathrm{a}]$ है—और चरण 2 के दो पदों $[\mathrm{b} \circ \mathrm{c}]$ तथा $[\mathrm{d} \circ \mathrm{b}]$ से बना $[[\mathrm{b} \circ \mathrm{c}] \circ [\mathrm{d} \circ \mathrm{b}]]$। और इसी प्रकार आगे। खंड (3) ऐसी किसी वस्तु को सुंदर पदों के समुच्चय में घुसने से रोकता है जो इस ढंग से निर्मित नहीं हुई।

ध्यान दें कि हमने अभी यह सिद्ध नहीं किया कि चिह्नों की हर शृंखला जो सुंदर "लगती" है, इस परिभाषा के अनुसार सुंदर है। किंतु यह स्पष्ट होना चाहिए कि जो कुछ हम निर्मित कर सकते हैं वह वास्तव में सुंदर "लगता" है: कोष्ठक संतुलित हैं और $\circ$ ऐसे भागों को जोड़ता है जो स्वयं सुंदर हैं।

आगमनात्मक परिभाषाओं की प्रमुख विशेषता यह है कि यदि आप सभी सुंदर पदों के बारे में कुछ सिद्ध करना चाहते हैं, तो परिभाषा बताती है कि किन स्थितियों पर विचार करना होगा। उदाहरणतः यदि बताया जाए कि t एक सुंदर पद है, तो आगमनात्मक परिभाषा बताती है कि t कैसा दिख सकता है: t कोई अक्षर हो सकता है, या सुंदर पदों के किसी युग्म s_1 और s_2 के लिए $[s_1 \circ s_2]$ हो सकता है। खंड (3) के कारण केवल यही संभावनाएँ हैं।

आगमनात्मक रूप से परिभाषित समुच्चय की सभी वस्तुओं के बारे में दावे सिद्ध करते समय आगमन का प्रबल रूप विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हो जाता है। उदाहरणतः मान लें हम सिद्ध करना चाहते हैं कि लंबाई n के प्रत्येक सुंदर पद में [की संख्या $< n/2$ है। इसे सभी n के बारे में दावा माना जा सकता है: प्रत्येक n के लिए लंबाई n के किसी भी सुंदर पद में [की संख्या $< n/2$ है।

प्रतिज्ञप्ति 74.4. *किसी भी n के लिए लंबाई n के सुंदर पद में [की संख्या $< n/2$ है।*

प्रमाण. इस परिणाम को (प्रबल) आगमन से सिद्ध करने के लिए हमें दिखाना होगा कि निम्न सशर्त दावा सत्य है:

> यदि प्रत्येक $l < k$ के लिए लंबाई l के किसी भी सुंदर पद में [की संख्या $< l/2$ है, तो लंबाई k के किसी भी सुंदर पद में [की संख्या $< k/2$ है।

इस सशर्त को दिखाने के लिए उसके पूर्ववर्ती को सत्य मानें, अर्थात् मानें कि किसी भी $l < k$ के लिए लंबाई l के सुंदर पदों में [की संख्या $< l/2$ है। इस मान्यता को हम आगमन परिकल्पना कहते हैं। हम दिखाना चाहते हैं कि लंबाई k के सुंदर पदों के लिए भी यही सत्य है।

अतः मान लें t लंबाई k का सुंदर पद है। चूँकि सुंदर पद आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं, दो स्थितियाँ हैं: (1) t स्वयं एक अक्षर है, अथवा (2) किन्हीं सुंदर पदों s_1 और s_2 के लिए $t = [s_1 \circ s_2]$।

1. t एक अक्षर है। तब $k = 1$, और t में [की संख्या 0 है। चूँकि $0 < 1/2$, दावा सत्य है।

2. किन्हीं सुंदर पदों s_1 और s_2 के लिए $t = [s_1 \circ s_2]$। l_1 को s_1 की लंबाई और l_2 को s_2 की लंबाई मानें। तब t की लंबाई $k = l_1 + l_2 + 3$ है (s_1 और s_2 की लंबाइयाँ और तीन चिह्न [, ∘,])। चूँकि $l_1 + l_2 + 3$ सदैव l_1 से बड़ा है, $l_1 < k$। इसी प्रकार $l_2 < k$। इसका अर्थ है कि आगमन परिकल्पना s_1 और s_2 पर लागू होती है: s_1 में [की संख्या $m_1 < l_1/2$, और s_2 में [की संख्या $m_2 < l_2/2$।

   t में [की संख्या s_1 में [की संख्या, और s_2 में [की संख्या, और 1 का योग है, अर्थात् $m_1 + m_2 + 1$। चूँकि $m_1 < l_1/2$ और $m_2 < l_2/2$, हमारे पास है:

$$m_1 + m_2 + 1 < \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} + 1 = \frac{l_1 + l_2 + 2}{2} < \frac{l_1 + l_2 + 3}{2} = k/2.$$

प्रत्येक स्थिति में हमने (आगमन परिकल्पना के आधार पर) दिखाया कि t में [की संख्या $< k/2$ है। प्रबल आगमन से प्रतिज्ञप्ति निष्पन्न होती है। □

74.5 संरचनात्मक आगमन

अब तक हमने सभी प्राकृतिक संख्याओं के बारे में परिणाम स्थापित करने के लिए आगमन का उपयोग किया है। किंतु किसी समान सिद्धांत का उपयोग आगमनात्मक रूप से परिभाषित समुच्चय के सभी अवयवों के बारे में परिणाम सीधे सिद्ध करने में किया जा सकता है। इसे प्रायः *संरचनात्मक* आगमन कहते हैं, क्योंकि यह आगमनात्मक रूप से परिभाषित वस्तुओं की संरचना पर निर्भर है।

सामान्यतः आगमनात्मक परिभाषा (a) समुच्चय के "आरंभिक" अवयवों की सूची और (b) ऐसी संक्रियाओं की सूची से दी जाती है जो पुराने अवयवों से समुच्चय के नए अवयव बनाती हैं। उदाहरणतः सुंदर पदों में आरंभिक वस्तुएँ अक्षर हैं। हमारे पास केवल एक संक्रिया है:

$$o(s_1, s_2) = [s_1 \circ s_2]$$

आप स्वयं प्राकृतिक संख्याओं $\mathbb{N}$ को भी आगमनात्मक परिभाषा से दिया मान सकते हैं: आरंभिक वस्तु 0 है और संक्रिया उत्तरवर्ती फलन $x + 1$ है।

आगमनात्मक रूप से परिभाषित समुच्चय के सभी अवयवों के बारे में कुछ सिद्ध करने के लिए, अर्थात् समुच्चय के प्रत्येक अवयव में कोई गुण P है, हमें:

1. सिद्ध करना होगा कि आरंभिक वस्तुओं में P है।

2. प्रत्येक संक्रिया o के लिए सिद्ध करना होगा कि यदि उसके तर्कों में P है, तो परिणाम में भी P है।

उदाहरणतः सभी सुंदर पदों के बारे में कुछ सिद्ध करने के लिए हम सिद्ध करेंगे कि वह सभी अक्षरों के बारे में सत्य है, और यदि वह s_1 तथा s_2 में अलग-अलग सत्य हो, तो $[s_1 \circ s_2]$ के बारे में भी सत्य है।

प्रतिज्ञप्ति 74.5. *किसी भी सुंदर पद t में [की संख्या] की संख्या के बराबर है।*

प्रमाण. हम संरचनात्मक आगमन का उपयोग करते हैं। सुंदर पद आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं, जहाँ अक्षर आरंभिक वस्तुएँ हैं और पुराने पदों से नए सुंदर पद बनाने की संक्रिया o है।

1. दावा प्रत्येक अक्षर के लिए सत्य है, क्योंकि अकेले अक्षर में [की संख्या 0 और उसमें] की संख्या भी 0 है।

2. मान लें s_1 में [की संख्या] की संख्या के बराबर है और यही s_2 के लिए सत्य है। $o(s_1, s_2)$, अर्थात् $[s_1 \circ s_2]$, में [की संख्या s_1 और s_2 में [की संख्याओं तथा एक का योग है। $o(s_1, s_2)$ में] की संख्या s_1 और s_2 में] की संख्याओं तथा एक का योग है। अतः $o(s_1, s_2)$ में [की संख्या] की संख्या के बराबर है। □

संरचनात्मक आगमन से एक और प्रमाण दें: चिह्नों की शृंखला t का उचित आरंभिक खंड कोई ऐसी शृंखला s है जो बाएँ से पढ़ने पर चिह्न-दर-चिह्न t से मेल खाती है, किंतु t लंबी है। अतः उदाहरणतः $[a \circ$, $[a \circ b]$ का उचित आरंभिक खंड है, किंतु न $[b \circ$ (वे दूसरे चिह्न पर भिन्न हैं), न $[a \circ b]$ (उनकी लंबाई समान है)।

प्रतिज्ञप्ति 74.6. *सुंदर पद t के प्रत्येक उचित आरंभिक खंड में] की अपेक्षा अधिक [हैं।*

प्रमाण. t पर आगमन से:

1. t अपने-आप में एक अक्षर है: तब t का कोई उचित आरंभिक खंड नहीं।

2. किन्हीं सुंदर पदों s_1 और s_2 के लिए $t = [s_1 \circ s_2]$। यदि r, t का उचित आरंभिक खंड है, तो कई संभावनाएँ हैं:

   a) r केवल [है: तब r में] की अपेक्षा एक अधिक [है।

   b) r, $[r_1$ है, जहाँ r_1, s_1 का उचित आरंभिक खंड है: चूँकि s_1 सुंदर पद है, आगमन परिकल्पना से r_1 में] की अपेक्षा अधिक [हैं और $[r_1$ के लिए भी यही सत्य है।

   c) r, $[s_1$ अथवा $[s_1 \circ$ है: पिछले परिणाम से s_1 में [और] की संख्याएँ बराबर हैं; अतः $[s_1$ अथवा $[s_1 \circ$ में [की संख्या] की संख्या से एक अधिक है।

   d) r, $[s_1 \circ r_2$ है, जहाँ r_2, s_2 का उचित आरंभिक खंड है: आगमन परिकल्पना से r_2 में] की अपेक्षा अधिक [हैं। पिछले परिणाम से s_1 में [और] की संख्याएँ बराबर हैं। अतः $[s_1 \circ r_2$ में [की संख्या] की संख्या से अधिक है।

   e) r, $[s_1 \circ s_2$ है: पिछले परिणाम से s_1 में [और] की संख्याएँ बराबर हैं, और यही s_2 के लिए। अतः $[s_1 \circ s_2$ में] की अपेक्षा एक अधिक [है। □

74.6 संबंध और फलन

जब हमने वस्तुओं के किसी समुच्चय (जैसे प्राकृतिक संख्याएँ या सुंदर पद) को आगमनात्मक रूप से परिभाषित कर लिया हो, तो इन वस्तुओं *पर संबंध* भी आगमन से परिभाषित कर सकते हैं। उदाहरणतः इस विचार पर विचार करें: सुंदर पद t_1, सुंदर पद t_2 का उपपद है यदि वह उसके एक भाग के रूप में आता है। इसके लिए चिह्न उपयोग करें: $t_1 \sqsubseteq t_2$। निस्संदेह प्रत्येक सुंदर पद स्वयं का उपपद है: $t \sqsubseteq t$। इस संबंध की आगमनात्मक परिभाषा इस प्रकार दे सकते हैं:

परिभाषा 74.7. सुंदर पद t_1 के t_2 का उपपद होने का संबंध $t_1 \sqsubseteq t_2$, t_2 पर आगमन से इस प्रकार परिभाषित है:

1. यदि t_2 कोई अक्षर है, तो $t_1 \sqsubseteq t_2$ तभी जब $t_1 = t_2$।
2. यदि t_2, $[s_1 \circ s_2]$ है, तो $t_1 \sqsubseteq t_2$ तभी जब $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, अथवा $t_1 \sqsubseteq s_2$।

उदाहरणतः यह परिभाषा हमें बताएगी कि $\mathrm{a} \sqsubseteq [\mathrm{b} \circ \mathrm{a}]$। क्योंकि (2) कहता है कि $\mathrm{a} \sqsubseteq [\mathrm{b} \circ \mathrm{a}]$ तभी जब $\mathrm{a} = [\mathrm{b} \circ \mathrm{a}]$, अथवा $\mathrm{a} \sqsubseteq \mathrm{b}$, अथवा $\mathrm{a} \sqsubseteq \mathrm{a}$। पहले दो असत्य हैं: स्पष्टतः a, $[\mathrm{b} \circ \mathrm{a}]$ के समान नहीं है, और (1) से $\mathrm{a} \sqsubseteq \mathrm{b}$ तभी जब $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, जो भी असत्य है। किंतु (1) से ही $\mathrm{a} \sqsubseteq \mathrm{a}$ तभी जब $\mathrm{a} = \mathrm{a}$, जो सत्य है।

यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि इस परिभाषा की सफलता एक ऐसे तथ्य पर निर्भर है जिसे हमने अभी सिद्ध नहीं किया: प्रत्येक सुंदर पद t या तो स्वयं एक अक्षर है, अथवा ऐसे *अद्वितीय रूप से निर्धारित* सुंदर पद s_1 और s_2 हैं कि $t = [s_1 \circ s_2]$। यहाँ "अद्वितीय रूप से निर्धारित" का अर्थ है कि यदि $t = [s_1 \circ s_2]$, तो $s_1 \neq r_1$ या $s_2 \neq r_2$ वाले $[r_1 \circ r_2]$ के *भी* बराबर नहीं। यदि ऐसा होता, तो खंड (2) स्वयं से टकरा सकता था: t_2 को $[s_1 \circ s_2]$ पढ़कर हमें $t_1 \sqsubseteq t_2$ मिल सकता, किंतु t_2 को $[r_1 \circ r_2]$ पढ़कर $t_1 \not\sqsubseteq t_2$ मिल सकता। यह सिद्ध करने से पहले कि ऐसा नहीं हो सकता, एक ऐसा उदाहरण देखें जहाँ ऐसा *हो सकता है*।

परिभाषा 74.8. *कोष्ठक-रहित पदों* को आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित करें

1. प्रत्येक अक्षर एक कोष्ठक-रहित पद है।
2. यदि s_1 और s_2 कोष्ठक-रहित पद हैं, तो $s_1 \circ s_2$ एक कोष्ठक-रहित पद है।
3. और कुछ भी कोष्ठक-रहित पद नहीं है।

कोष्ठक-रहित पदों के उदाहरण हैं a, $\mathrm{b} \circ \mathrm{d}$, $\mathrm{b} \circ \mathrm{a} \circ \mathrm{b}$। अब यदि कोष्ठक-रहित पदों के लिए "उपपद" को ऊपर की तरह परिभाषित करें, तो दूसरा खंड होगा

यदि $t_2 = s_1 \circ s_2$, तो $t_1 \sqsubseteq t_2$ तभी जब $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, अथवा $t_1 \sqsubseteq s_2$।

अब $\mathrm{b} \circ \mathrm{a} \circ \mathrm{b}$ इस प्रकार $s_1 \circ s_2$ रूप का है

$$s_1 = \mathrm{b} \text{ और} \qquad s_2 = \mathrm{a} \circ \mathrm{b}.$$

यह इस प्रकार $r_1 \circ r_2$ रूप का भी है

$$r_1 = \mathrm{b} \circ \mathrm{a} \text{ और} \qquad r_2 = \mathrm{b}.$$

अब क्या $\mathrm{a} \circ \mathrm{b}$, $\mathrm{b} \circ \mathrm{a} \circ \mathrm{b}$ का उपपद है? पहले पाठ के अनुसार उत्तर हाँ है और दूसरे के अनुसार नहीं।

जिस गुण के अनुसार अन्य सुंदर पदों से किसी सुंदर पद के निर्माण का ढंग अद्वितीय होता है, उसे *अद्वितीय पठनीयता* कहते हैं। चूँकि ऐसी आगमनात्मक रूप से परिभाषित वस्तुओं के संबंधों की आगमनात्मक परिभाषाएँ महत्त्वपूर्ण हैं, हमें सिद्ध करना होगा कि यह गुण सत्य है।

प्रतिज्ञप्ति 74.9. *मान लें t एक सुंदर पद है। तब या तो t स्वयं एक अक्षर है, अथवा ऐसे अद्वितीय रूप से निर्धारित सुंदर पद s_1, s_2 हैं कि $t = [s_1 \circ s_2]$।*

प्रमाण. यदि t स्वयं एक अक्षर है, तो शर्त संतुष्ट है। अतः मान लें t स्वयं एक अक्षर नहीं। आगमनात्मक परिभाषा से तब t किन्हीं सुंदर पदों s_1 और s_2 के लिए $[s_1 \circ s_2]$ रूप का होना चाहिए। यह दिखाना शेष है कि ये अद्वितीय रूप से निर्धारित हैं, अर्थात् यदि $t = [r_1 \circ r_2]$, तो $s_1 = r_1$ और $s_2 = r_2$।

अतः सुंदर पदों s_1, s_2, r_1, r_2 के लिए मान लें $t = [s_1 \circ s_2]$ और $t = [r_1 \circ r_2]$ भी। हमें दिखाना है कि $s_1 = r_1$ और $s_2 = r_2$। पहले s_1 और r_1 समान होने चाहिए, क्योंकि अन्यथा एक दूसरे का उचित आरंभिक खंड होगा। किंतु प्रतिज्ञप्ति 74.6 से यह असंभव है यदि s_1 और r_1 दोनों सुंदर पद हों। और यदि $s_1 = r_1$, तो स्पष्टतः $s_2 = r_2$ भी।□

हम फलनों को भी आगमनात्मक रूप से परिभाषित कर सकते हैं: उदाहरणतः वह फलन f जो किसी सुंदर पद को उसमें अंतर्निहित $[\ldots]$ की अधिकतम गहराई पर प्रतिचित्रित करता है, इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

परिभाषा 74.10. सुंदर पद की *गहराई* $f(t)$ आगमनात्मक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } t \text{ एक अक्षर है} \\ \max(f(s_1), f(s_2)) + 1 & \text{यदि } t = [s_1 \circ s_2]। \end{cases}$$

उदाहरणतः

$$\begin{aligned} f([\mathsf{a} \circ \mathsf{b}]) &= \max(f(\mathsf{a}), f(\mathsf{b})) + 1 = \\ &= \max(0, 0) + 1 = 1, \text{ और} \\ f([[\mathsf{a} \circ \mathsf{b}] \circ \mathsf{c}]) &= \max(f([\mathsf{a} \circ \mathsf{b}]), f(\mathsf{c})) + 1 = \\ &= \max(1, 0) + 1 = 2. \end{aligned}$$

यहाँ निस्संदेह हम मानते हैं कि s_1 और s_2 सुंदर पद हैं और इस तथ्य का उपयोग करते हैं कि प्रत्येक सुंदर पद या तो अक्षर है अथवा $[s_1 \circ s_2]$ रूप का। फिर यह महत्त्वपूर्ण है कि वह इस रूप का केवल एक ढंग से हो सकता है। क्यों, यह देखने के लिए पहले परिभाषित कोष्ठक-रहित पदों पर फिर विचार करें। संगत "परिभाषा" होगी:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } t \text{ एक अक्षर है} \\ \max(g(s_1), g(s_2)) + 1 & \text{यदि } t = s_1 \circ s_2। \end{cases}$$

अब कोष्ठक-रहित पद $\mathsf{a} \circ \mathsf{b} \circ \mathsf{c} \circ \mathsf{d}$ पर विचार करें। उसे एक से अधिक ढंग से पढ़ा जा सकता है, उदाहरणतः इस प्रकार $s_1 \circ s_2$

$$s_1 = \mathsf{a} \text{ और} \qquad s_2 = \mathsf{b} \circ \mathsf{c} \circ \mathsf{d},$$

अथवा इस प्रकार $r_1 \circ r_2$

$$r_1 = \mathsf{a} \circ b \text{ और} \qquad r_2 = \mathsf{c} \circ \mathsf{d}.$$

पहले पाठ के अनुसार g का परिकलन देगा

$$\begin{aligned} g(s_1 \circ s_2) &= \max(g(\mathsf{a}), g(\mathsf{b} \circ \mathsf{c} \circ \mathsf{d})) + 1 = \\ &= \max(0, 2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

जबकि दूसरे पाठ के अनुसार हमें मिलता है

$$\begin{aligned} g(r_1 \circ r_2) &= \max(g(\mathsf{a} \circ \mathsf{b}), g(\mathsf{c} \circ \mathsf{d})) + 1 = \\ &= \max(1, 1) + 1 = 2 \end{aligned}$$

किंतु किसी फलन को सदैव अद्वितीय मान देना चाहिए; अतः g की हमारी "परिभाषा" किसी फलन को बिल्कुल परिभाषित नहीं करती।

प्रश्न

प्रश्न 74.1. अतिसुंदर पदों का समुच्चय इस प्रकार परिभाषित करें

1. कोई भी अक्षर a, b, c, d अतिसुंदर पद है।
2. यदि s अतिसुंदर पद है, तो $[s]$ भी अतिसुंदर पद है।
3. यदि s_1 और s_2 अतिसुंदर पद हैं, तो $[s_1 \circ s_2]$ भी अतिसुंदर पद है।
4. और कुछ भी अतिसुंदर पद नहीं है।

दिखाइए कि लंबाई n के अतिसुंदर पद t में $[$ की संख्या $\leq n/2 + 1$ है।

प्रश्न 74.2. संरचनात्मक आगमन से सिद्ध कीजिए कि कोई सुंदर पद $]$ से आरंभ नहीं होता।

प्रश्न 74.3. फलन l की आगमनात्मक परिभाषा दीजिए, जहाँ $l(t)$ सुंदर पद t में चिह्नों की संख्या है।

प्रश्न 74.4. सुंदर पदों t पर संरचनात्मक आगमन से सिद्ध कीजिए कि $f(t) < l(t)$ (जहाँ $l(t)$, t में चिह्नों की संख्या है और $f(t)$, परिभाषा 74.10 में परिभाषित t की गहराई है)।

खण्ड XVII

इतिहास

अध्याय 75

जीवनियाँ

75.1 गेऑर्ग कांटोर

गेऑर्ग कांटोर (गे-ऑर्ग कान-टोर) की एक आरंभिक जीवनी का दावा था कि रूस के सेंट पीटर्सबर्ग जा रहे जहाज़ पर उनका जन्म हुआ और वे वहीं मिले थे तथा उनके माता-पिता अज्ञात थे। किंतु यह सच नहीं है; हालाँकि उनका जन्म 1845 में सेंट पीटर्सबर्ग में ही हुआ था।

कांटोर ने 1867 में बर्लिन विश्वविद्यालय से गणित में डॉक्टरेट प्राप्त की। वे समुच्चय सिद्धांत में अपने कार्य के लिए जाने जाते हैं और एक विशिष्ट अनुसंधान विषय के रूप में समुच्चय सिद्धांत की स्थापना का श्रेय उन्हें दिया जाता है। उन्होंने पहली बार सिद्ध किया कि भिन्न आकारों के अनंत समुच्चय होते हैं। उनके सिद्धांतों, और विशेषतः उनके अनंतताओं के सिद्धांत, ने तत्कालीन गणितज्ञों में बहुत वाद-विवाद उत्पन्न किया और उनका कार्य विवादास्पद रहा।

कांटोर की धार्मिक आस्थाएँ और उनका गणितीय कार्य अभिन्न रूप से जुड़े थे; उनका दावा यहाँ तक था कि परिमितेतर संख्याओं का सिद्धांत स्वयं ईश्वर ने सीधे उन्हें बताया था। जीवन के उत्तरार्ध में कांटोर मानसिक रोग से पीड़ित रहे। 1894 से और अंतिम वर्षों की ओर अधिक बार उन्हें अस्पताल में भर्ती किया गया। उनके कार्य की कड़ी आलोचना, जिसमें गणितज्ञ लियोपोल्ड क्रोनेकर से मतभेद भी था, अवसाद और गणित में रुचि की कमी का कारण बनी। अवसाद के दौरों में कांटोर दर्शन और साहित्य की ओर मुड़ते और उन्होंने यह सिद्धांत भी प्रकाशित किया कि शेक्सपियर के नाटकों के लेखक फ़्रांसिस बेकन थे।

कांटोर का निधन 6 जनवरी 1918 को हाले के एक आरोग्याश्रम में हुआ।

आगे का पठन कांटोर की पूर्ण जीवनियों के लिए Dauben (1990) और Grattan-Guinness (1971) देखें। कांटोर के आमूल विचारों का वर्णन बीबीसी रेडियो 4 के कार्यक्रम *A Brief History of Mathematics* (du Sautoy, 2014) में भी है। यदि आप कांटोर के सिद्धांतों को रैप के रूप में सुनना चाहें तो Rose (2012) देखें।

75.2 अलॉन्ज़ो चर्च

अलॉन्ज़ो चर्च का जन्म 14 जून 1903 को वॉशिंगटन, डीसी में हुआ। आरंभिक बाल्यावस्था में एयर गन से हुई एक दुर्घटना के कारण चर्च की एक आँख की दृष्टि चली गई। उन्होंने 1920 में कनेक्टिकट से प्रारंभिक विद्यालय पूरा किया और उसी वर्ष प्रिंसटन में विश्वविद्यालयी शिक्षा आरंभ की। 1927 में उनका डॉक्टरेट अध्ययन पूरा हुआ। कुछ वर्ष विदेश में बिताकर चर्च प्रिंसटन लौटे। वे अत्यंत विनम्र और सावधान माने जाते थे। श्यामपट्ट पर उनका लेखन निष्कलंक होता था और महत्त्वपूर्ण कागज़ों को सुरक्षित रखने के लिए वे उन पर सावधानी से ड्यूको सीमेंट (एक पारदर्शी गोंद) की परत चढ़ाते थे। अकादमिक कार्यों के बाहर उन्हें विज्ञान-कथा पत्रिकाएँ पढ़ना पसंद था और लेखन में कोई त्रुटि दिखने पर वे संपादकों को लिखने से नहीं हिचकते थे।

चर्च की अकादमिक उपलब्धियाँ महान थीं। अपने विद्यार्थियों स्टीफन क्लीन और बार्कली रॉसर के साथ उन्होंने प्रभावी गणनीयता का सिद्धांत, लैम्ब्डा कलन, ट्यूरिंग द्वारा ट्यूरिंग मशीन के विकास से स्वतंत्र रूप से विकसित किया। गणनीयता की दोनों परिभाषाएँ तुल्य हैं और उनसे वह कथन उत्पन्न होता है जिसे अब *चर्च–ट्यूरिंग प्रस्थापना* कहते हैं: प्राकृतिक

संख्याओं का कोई फलन तभी और केवल तभी प्रभावी रूप से गणनीय है जब वह ट्यूरिंग मशीन (या लैम्ब्डा कलन) द्वारा गणनीय हो। उन्होंने वह परिणाम भी सिद्ध किया जिसे अब *चर्च का प्रमेय* कहते हैं: प्रथम-क्रम सूत्रों की वैधता की निर्णय समस्या असमाधेय है।

चर्च वृद्धावस्था तक अपना कार्य करते रहे। 1967 में वे प्रिंसटन छोड़कर यूसीएलए गए, जहाँ 1990 में सेवानिवृत्ति तक प्राध्यापक रहे। चर्च का निधन 1 अगस्त 1995 को 92 वर्ष की आयु में हुआ।

आगे का पठन चर्च की संक्षिप्त जीवनी के लिए Enderton (2019) देखें। लैम्ब्डा कलन और एंटशाइडुंगसप्रॉब्लेम (चर्च की प्रस्थापना) पर चर्च के मूल लेख Church (1936a,b) हैं। Aspray (1984) में 1930 के दशक के प्रिंसटन गणित समुदाय के बारे में चर्च का साक्षात्कार दर्ज है। चर्च ने 1936 से 1979 तक *Journal of Symbolic Logic* के लिए पुस्तक समीक्षाओं की एक शृंखला लिखी। वे सभी जॉन मैकफार्लेन की वेबसाइट पर अभिलेखित हैं (MacFarlane, 2015)।

75.3 गेरहार्ड गेंट्सेन

गेरहार्ड गेंट्सेन मुख्यतः संरचनात्मक प्रमाण सिद्धांत के रचयिता, और विशेष रूप से प्राकृतिक निगमन तथा अनुक्रम कलन की व्युत्पत्ति प्रणालियों के निर्माता के रूप में जाने जाते हैं। उनका जन्म 24 नवंबर 1909 को जर्मनी के ग्राइफ़्सवाल्ड में हुआ। प्रारंभिक विद्यालय जाने से पहले गेरहार्ड ने तीन वर्ष घर पर शिक्षा पाई; विद्यालय में वे शिक्षा की दृष्टि से अधिकतर सहपाठियों से पीछे थे। इसके बावजूद वे प्रतिभाशाली विद्यार्थी थे और उन्होंने गणित की प्रबल योग्यता दिखाई। उनकी रुचियाँ विविध थीं; उदाहरणतः वे अपनी माँ के लिए कविताएँ और विद्यालय के रंगमंच के लिए नाटक भी लिखते थे।

गेंट्सेन ने विश्वविद्यालयी अध्ययन ग्राइफ़्सवाल्ड विश्वविद्यालय में आरंभ किया, किंतु फिर गॉटिंगेन, म्यूनिख और बर्लिन जाते रहे। उन्होंने 1933 में हरमन वाइल के निर्देशन में गॉटिंगेन विश्वविद्यालय से डॉक्टरेट प्राप्त की। (पॉल बर्नाइस ने उनके अधिकांश कार्य का पर्यवेक्षण किया था, किंतु नाज़ियों ने उन्हें विश्वविद्यालय से निकाल दिया।) 1934 में गेंट्सेन ने डेविड हिल्बर्ट के सहायक के रूप में काम आरंभ किया। उसी वर्ष अपने शोधपत्रों *Untersuchungen über das logische Schließen I–II [Investigations Into Logical Deduction I–II]* में उन्होंने अनुक्रम कलन और प्राकृतिक निगमन की व्युत्पत्ति प्रणालियाँ विकसित कीं। 1936 में उन्होंने पियानो अभिगृहीतों की संगतता सिद्ध की।

नाज़ियों के साथ गेंट्सेन का संबंध जटिल है। जिस समय उनके मार्गदर्शक बर्नाइस को जर्मनी छोड़ने के लिए विवश किया गया, उसी समय गेंट्सेन नाज़ी अर्धसैनिक संगठन एसए की विश्वविद्यालय शाखा में सम्मिलित हुए। अनेक जर्मनों की तरह वे नाज़ी दल के सदस्य थे। युद्ध के दौरान उन्होंने वायु गुप्तचर इकाई में दूरसंचार अधिकारी के रूप में सेवा की। किंतु 1942 में मानसिक विक्षोभ के कारण उन्हें सेवा से मुक्त कर दिया गया। यह स्पष्ट नहीं कि गेंट्सेन की निष्ठा नाज़ी दल के साथ थी अथवा उन्होंने अकादमिक सफलता सुनिश्चित करने के लिए दल की सदस्यता ली थी।

1943 में गेंट्सेन को जर्मन यूनिवर्सिटी ऑफ प्राग के गणितीय संस्थान में अकादमिक पद का प्रस्ताव मिला, जिसे उन्होंने स्वीकार किया। किंतु 1945 में प्राग के नागरिकों ने जर्मन अधिग्रहण के विरुद्ध विद्रोह किया। सोवियत सेनाएँ नगर पहुँचीं और विश्वविद्यालय के सभी प्राध्यापकों को गिरफ़्तार कर लिया। नाज़ी संगठनों की सदस्यता के कारण गेंट्सेन को बेगार शिविर ले जाया गया। 4 अगस्त 1945 को 35 वर्ष की आयु में अपनी कोठरी में कुपोषण से उनकी मृत्यु हुई।

आगे का पठन गेंट्सेन की पूर्ण जीवनी के लिए Menzler-Trott (2007) देखें। नाज़ी शासन के अधीन गणितज्ञों पर एक रोचक पुस्तक, जिसमें गेंट्सेन के जीवन का संक्षिप्त विवरण भी है, Segal (2014) ने दी है। तार्किक निगमन पर गेंट्सेन के शोधपत्र मूल जर्मन में उपलब्ध हैं (Gentzen, 1935a,b)। Szabo (1969) ने गेंट्सेन के शोधपत्रों के अंग्रेज़ी अनुवाद एक खंड में संकलित किए हैं; इसमें एक जीवनी-रेखा भी है।

75.4 कुर्ट ग्योडेल

कुर्ट ग्योडेल (गर-डल) का जन्म 28 अप्रैल 1906 को ऑस्ट्रो-हंगेरियाई साम्राज्य के ब्र्युन (अब चेक गणराज्य का ब्रनो) में हुआ। जिज्ञासु और कुशाग्र स्वभाव के कारण परिवार बालक कुर्टेले को प्रायः “Der kleine Herr Warum”

(नन्हे श्रीमान क्यों) कहता था। प्राथमिक विद्यालय से ही वे पढ़ाई में उत्कृष्ट थे; केवल गणित में उन्हें सर्वोच्च से कम अंक मिला। खराब स्वास्थ्य के कारण ग्योडेल प्रायः विद्यालय से अनुपस्थित रहते और उन्हें शारीरिक शिक्षा से छूट थी। बचपन में उन्हें आमवाती ज्वर का निदान हुआ। चिकित्सकीय आकलन के विपरीत होने पर भी वे जीवन भर मानते रहे कि इससे उनके हृदय पर स्थायी प्रभाव पड़ा था।

ग्योडेल ने 1924 में वियना विश्वविद्यालय में अध्ययन आरंभ किया और 1929 में डॉक्टरेट पूरा किया। पहले वे भौतिकी पढ़ना चाहते थे, किंतु दार्शनिक रूडोल्फ़ कार्नाप के प्रभाव के कारण उनकी रुचि शीघ्र ही गणित और विशेषतः तर्कशास्त्र की ओर चली गई। हान्स हान के निर्देशन में लिखे उनके शोधप्रबंध ने तादात्म्य सहित प्रथम-क्रम विधेय तर्क का पूर्णता प्रमेय सिद्ध किया (Gödel, 1929)। केवल एक वर्ष बाद उन्होंने अपने सबसे प्रसिद्ध परिणाम—पहला और दूसरा अपूर्णता प्रमेय—प्राप्त किए (Gödel 1931 में प्रकाशित)। वियना में अपने समय के दौरान ग्योडेल, वियना मंडल में बहुत सक्रिय थे। यह कार्नाप सहित वैज्ञानिक दृष्टि वाले दार्शनिकों का समूह था, जिनका कार्य ग्योडेल के परिणामों से विशेष रूप से प्रभावित हुआ।

1938 में ग्योडेल ने अडेल निम्बुर्स्की से विवाह किया। उनके माता-पिता प्रसन्न नहीं थे: वह उनसे छह वर्ष बड़ी और पहले से तलाक़शुदा ही नहीं थीं, बल्कि एक रात्रिक्लब में नर्तकी का काम भी करती थीं। किंतु सामाजिक दबाव ने ग्योडेल को प्रभावित नहीं किया और उनकी मृत्यु तक दोनों का सुखी विवाह बना रहा।

1938 में नाज़ी जर्मनी द्वारा ऑस्ट्रिया का विलय किए जाने के बाद ग्योडेल और अडेल संयुक्त राज्य अमेरिका चले गए, जहाँ उन्होंने न्यू जर्सी के प्रिंसटन में इंस्टीट्यूट फॉर एडवांस्ड स्टडी में पद ग्रहण किया। अंतर्मुखता और विलक्षण स्वभाव के बावजूद प्रिंसटन में ग्योडेल का समय सहयोगपूर्ण और फलदायी रहा। उन्होंने समुच्चय सिद्धांत, दर्शन और भौतिकी में निबंध प्रकाशित किए। विशेष रूप से आईएएस में अपने सहकर्मी अल्बर्ट आइंस्टाइन से उनकी बहुत गहरी मित्रता हुई।

अंतिम वर्षों में ग्योडेल का मानसिक स्वास्थ्य बिगड़ गया। 1977 में उनकी पत्नी के अस्पताल में भर्ती होने के कारण वह उनके लिए भोजन नहीं बना सकीं। जीवन भर मानसिक स्वास्थ्य समस्याओं से जूझे ग्योडेल अंततः उत्पीड़न-भ्रम से ग्रस्त हो गए। विष दिए जाने के घोर भय से ग्योडेल ने भोजन करने से इनकार कर दिया। 14 जनवरी 1978 को प्रिंसटन में भुखमरी से उनका निधन हुआ।

आगे का पठन ग्योडेल के जीवन की पूर्ण जीवनी के लिए John Dawson (1997) देखें। अन्य जीवनीपरक लेखों और तर्कशास्त्र तथा दर्शन में ग्योडेल के योगदान पर निबंधों के लिए Wang (1990), Baaz et al. (2011), Takeuti et al. (2003) और Sigmund et al. (2007) देखें।

ग्योडेल का पीएचडी शोधप्रबंध मूल जर्मन में उपलब्ध है (Gödel, 1929)। अपूर्णता प्रमेयों का मूल पाठ (Gödel, 1931) है। पत्राचार के एक चयन सहित ग्योडेल के सभी प्रकाशित और अप्रकाशित लेख उनके *Collected Papers* Feferman et al. (1986, 1990) में अंग्रेज़ी में उपलब्ध हैं।

ग्योडेल के अपूर्णता प्रमेयों के विस्तृत विवेचन के लिए Smith (2013) देखें। ग्योडेल के प्रमेयों की अनौपचारिक दार्शनिक चर्चा के लिए मार्क लिन्सेनमायर का पॉडकास्ट (Linsenmayer, 2014) देखें।

75.5 एमी नोएथर

एमी नोएथर (नर-टर) का जन्म 23 मार्च 1882 को जर्मनी के एरलांगेन में एक उच्च-मध्यवर्गीय विद्वान परिवार में हुआ। "आधुनिक बीजगणित की जननी" कही जाने वाली नोएथर ने महिलाओं की शिक्षा के मार्ग में भारी बाधाओं के बावजूद गणित और भौतिकी दोनों में युगांतरकारी योगदान दिए। उस समय जर्मनी में लड़कियों को कलाओं की शिक्षा दी जानी थी और उन्हें महाविद्यालय-तैयारी विद्यालयों में जाने की अनुमति नहीं थी। फिर भी गॉटिंगेन और एरलांगेन विश्वविद्यालयों (जहाँ उनके पिता गणित के प्राध्यापक थे) में कक्षाएँ सुनने के बाद नोएथर अंततः 1904 में एरलांगेन में विद्यार्थी के रूप में नामांकन कर सकीं, जब उसकी नीति बदलकर महिला विद्यार्थियों को अनुमति दी गई। उन्होंने 1907 में गणित में डॉक्टरेट प्राप्त की।

अपनी योग्यताओं के बावजूद नोएथर को कार्य-जीवन में बहुत विरोध झेलना पड़ा। 1908–1915 तक उन्होंने एरलांगेन में बिना वेतन पढ़ाया। इस दौरान उन्होंने उस समय के विश्व के अग्रणी गणितज्ञों में से एक डेविड हिल्बर्ट का ध्यान खींचा; हिल्बर्ट ने उन्हें गॉटिंगेन बुलाया। किंतु महिलाओं को प्राध्यापक पद पाने की मनाही थी और वे केवल हिल्बर्ट के नाम से, फिर बिना वेतन, व्याख्यान दे सकीं। इसी समय उन्होंने वह सिद्ध किया जिसे अब नोएथर का प्रमेय कहते हैं

और जिसका उपयोग आज भी सैद्धांतिक भौतिकी में होता है। अंततः 1919 में नोएथर को पढ़ाने का अधिकार मिला। विश्वविद्यालय के सहकर्मियों के लगातार विरोध पर हिल्बर्ट की प्रतिक्रिया कथित रूप से थी: "सज्जनो, संकाय की सीनेट कोई स्नानागार नहीं है।"

1920 के दशक के उत्तरार्ध में उन्होंने अमूर्त बीजगणित के कार्य पर ध्यान केंद्रित किया और उनके योगदान ने इस क्षेत्र में क्रांति ला दी। अपने प्रमाणों में वे प्रायः तथाकथित आरोही शृंखला प्रतिबंध का उपयोग करती थीं, जो कहता है कि कुछ समुच्चयों की कोई अनंत कड़ाई से बढ़ती शृंखला नहीं होती। उदाहरणतः अब नोएथरी वलय कहलाने वाली कुछ बीजीय संरचनाओं में गुण होता है कि आदर्शों का कोई अनंत अनुक्रम $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ नहीं होता। इस प्रतिबंध को किसी भी आंशिक क्रम पर व्यापक बनाया जा सकता है (बीजगणित में इसका संबंध उपसमुच्चय संबंध से क्रमित आदर्शों की विशेष स्थिति से है), और हम द्वैत अवरोही शृंखला प्रतिबंध पर भी विचार कर सकते हैं, जिसमें किसी आंशिक क्रम का प्रत्येक कड़ाई से *घटता* अनुक्रम अंततः समाप्त होता है। यदि कोई आंशिक क्रम अवरोही शृंखला प्रतिबंध को संतुष्ट करता है, तो इस क्रम के साथ आगमन का उसी तरह उपयोग संभव है जैसे हम $\mathbb{N}$ पर $<$ क्रम के साथ आगमन का उपयोग कर सकते हैं। ऐसे क्रमों को *सुस्थापित* या *नोएथरी*, और संबद्ध प्रमाण सिद्धांत को *नोएथरी आगमन* कहते हैं।

नोएथर यहूदी थीं और 1933 में नाज़ियों के सत्ता में आने पर उन्हें पद से हटा दिया गया। सौभाग्य से नोएथर पेनसिल्वेनिया के ब्रिन मॉर में अस्थायी पद के लिए संयुक्त राज्य अमेरिका जा सकीं। वहाँ रहते हुए उन्होंने प्रिंसटन में भी व्याख्यान दिए, यद्यपि उन्हें विश्वविद्यालय महिलाओं के प्रति स्वागतशील नहीं लगा (Dick, 1981, 81)। 1935 में गर्भाशय की गाँठ निकालने के लिए नोएथर का ऑपरेशन हुआ। शल्यक्रिया से हुए संक्रमण के कारण उनकी मृत्यु हुई और उन्हें ब्रिन मॉर में दफ़नाया गया।

आगे का पठन नोएथर की जीवनी के लिए Dick (1981) देखें। पेरिमीटर इंस्टीट्यूट फॉर थ्योरेटिकल फिज़िक्स के नोएथर के जीवन और प्रभाव पर व्याख्यान ऑनलाइन उपलब्ध हैं (Institute, 2015)। यदि पढ़ते-पढ़ते थक गए हों, तो *Stuff You Missed in History Class* में नोएथर के जीवन और प्रभाव पर पॉडकास्ट है (Frey and Wilson, 2015)। नोएथर की संकलित रचनाएँ मूल जर्मन में उपलब्ध हैं (Jacobson, 1983)।

75.6 रोज़ा पीटर

रोज़ा पीटर का जन्म 17 फ़रवरी 1905 को हंगरी के बुडापेस्ट में रोज़ा पोलित्ज़र के नाम से हुआ। वे पुनरावर्ती फलनों पर अपने कार्य के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं; पुनरावर्तन सिद्धांत के क्षेत्र की स्थापना में यह कार्य आवश्यक था।

पीटर का पालन-पोषण कठिन राजनीतिक समय में हुआ—उनकी किशोरावस्था में प्रथम विश्व युद्ध चल रहा था—फिर भी वे बुडापेस्ट के संपन्न मारिया तेरेज़िया बालिका विद्यालय जा सकीं, जहाँ से 1922 में स्नातक हुईं। फिर उन्होंने बुडापेस्ट के पाज़मानी पीटर विश्वविद्यालय (जिसका नाम बाद में लोरांड एटवश विश्वविद्यालय हुआ) में अध्ययन किया। पिता के आग्रह पर उन्होंने रसायन विज्ञान पढ़ना आरंभ किया, किंतु बाद में गणित चुना और 1927 में स्नातक हुईं। यद्यपि वे माध्यमिक विद्यालय में गणित पढ़ाने की योग्य थीं, महामंदी से विश्व अर्थव्यवस्था प्रभावित होने के कारण उस समय आर्थिक स्थिति भयावह थी। इस दौरान पीटर ने गणित की शिक्षिका और निजी अध्यापिका के रूप में छोटे-मोटे काम किए। अंततः वे गणित में स्नातकोत्तर अध्ययन के लिए विश्वविद्यालय लौटीं। मूलतः उनकी योजना संख्या सिद्धांत पर काम करने की थी, किंतु यह जानकर कि उनके परिणाम पहले ही सिद्ध किए जा चुके हैं, उन्होंने लगभग गणित ही छोड़ दिया। उन्हें ग्योडेल के अपूर्णता प्रमेयों पर काम करने के लिए प्रोत्साहित किया गया और उन्होंने अनजाने में उनके कई परिणाम भिन्न तरीकों से सिद्ध कर दिए। इससे उनका आत्मविश्वास लौटा और डेविड हिल्बर्ट के आधारभूत कार्यक्रम से प्रेरित पीटर ने पुनरावर्तन सिद्धांत पर अपने पहले शोधपत्र लिखे। उन्होंने 1935 में पीएचडी प्राप्त की और 1937 में *Journal of Symbolic Logic* की संपादक बनीं।

पीटर के आरंभिक शोधपत्रों को व्यापक रूप से पुनरावर्ती फलन सिद्धांत के क्षेत्र में संस्थापक योगदान माना जाता है। Péter (1935a) में उन्होंने विभिन्न प्रकार के पुनरावर्तन के बीच संबंध की जाँच की। Péter (1935b) में उन्होंने दिखाया कि एक निश्चित पुनरावर्ती रूप से परिभाषित फलन आदिम पुनरावर्ती नहीं है। इससे विल्हेल्म एकरमान का पहले का परिणाम सरल हुआ। पीटर के सरलीकृत फलन को अब प्रायः एकरमान फलन—और कभी-कभी अधिक उचित रूप से एकरमान–पीटर फलन—कहते हैं। उन्होंने पुनरावर्ती फलन सिद्धांत पर पहली पुस्तक लिखी (Péter, 1951)।

अपने कार्य के महत्त्व और प्रभाव के बावजूद पीटर को 1945 तक पूर्णकालिक अध्यापन पद नहीं मिला। द्वितीय विश्व युद्ध में हंगरी के नाज़ी अधिग्रहण के दौरान यहूदी-विरोधी कानूनों के कारण पीटर को पढ़ाने की अनुमति नहीं थी।

1944 में सरकार ने बुडापेस्ट में यहूदी बस्ती बनाई; उसे शेष नगर से काटकर सशस्त्र पहरेदार तैनात किए गए। 1945 में बस्ती की मुक्ति तक पीटर को वहीं रहने के लिए विवश किया गया। फिर उन्होंने बुडापेस्ट टीचर्स ट्रेनिंग कॉलेज और 1955 से एटवश लोरांड विश्वविद्यालय में पढ़ाया। वे गणित की अकादमिक डॉक्टर बनने वाली पहली हंगेरियाई महिला गणितज्ञ और हंगेरियन अकैडमी ऑफ साइंसेज़ के लिए निर्वाचित पहली महिला थीं।

पीटर गणित की एक उत्साही शिक्षिका के रूप में जानी जाती थीं, जो केवल व्याख्यान देने की अपेक्षा अपने विद्यार्थियों के साथ गणितीय समस्याओं की प्रकृति और सुंदरता खोजना पसंद करती थीं। फलतः विद्यार्थी उन्हें स्नेह से "आंट रोज़ा" कहते थे। पीटर का निधन 1977 में 71 वर्ष की आयु में हुआ।

आगे का पठन अधिक जीवनीपरक पठन के लिए (O'Connor and Robertson, 2014) और (Andrásfai, 1986) देखें। Tamassy (1994) ने पीटर का एक संक्षिप्त साक्षात्कार लिया। गणित पर मनोरंजक पठन के लिए पीटर की पुस्तक *Playing With Infinity* (Péter, 2010) देखें।

75.7 जूलिया रॉबिन्सन

जूलिया बोमन रॉबिन्सन अमेरिकी गणितज्ञ थीं। वे मुख्यतः निर्णय समस्याओं पर अपने कार्य और सर्वाधिक प्रसिद्ध रूप से हिल्बर्ट की दसवीं समस्या के समाधान में अपने योगदान के लिए जानी जाती हैं। रॉबिन्सन का जन्म 8 दिसंबर 1919 को मिसूरी के सेंट लुई में हुआ। रॉबिन्सन याद करती हैं कि बाल्यावस्था में ही संख्याएँ उन्हें आकर्षित करती थीं (Reid, 1986, 4)। नौ वर्ष की आयु में उन्हें लाल बुखार हुआ और फिर आमवाती ज्वर के कई बार लौटने वाले दौरे पड़े। इससे उन्हें बहुत समय बिस्तर पर बिताना पड़ा और वे पढ़ाई में पीछे रह गईं। यद्यपि निजी शिक्षकों की सहायता से वे बराबरी पर आ सकीं, उनके रोग के शारीरिक प्रभावों का उनके जीवन पर स्थायी असर रहा।

बचपन के संघर्षों के बावजूद रॉबिन्सन ने गणित और विज्ञानों के कई पुरस्कारों के साथ माध्यमिक विद्यालय पूरा किया। उन्होंने सैन डिएगो स्टेट कॉलेज से विश्वविद्यालयी जीवन आरंभ किया और अंतिम वर्ष में यूनिवर्सिटी ऑफ कैलिफोर्निया, बर्कली चली गईं। वहाँ गणितज्ञ राफ़ाएल रॉबिन्सन ने उन्हें प्रभावित किया। दोनों अच्छे मित्र बने और 1941 में विवाह किया। संकाय सदस्य की पत्नी होने के कारण रॉबिन्सन को बर्कली के गणित विभाग में पढ़ाने से रोक दिया गया। यद्यपि वे गणित की कक्षाएँ सुनती रहीं, उन्हें विश्वविद्यालय छोड़कर परिवार आरंभ करने की आशा थी। किंतु विवाह के कुछ ही समय बाद रॉबिन्सन को निमोनिया हो गया। उन्हें बताया गया कि बचपन के आमवाती ज्वर के कारण उनके हृदय पर बहुत-सा घाव-ऊतक जमा हो गया था। इसकी गंभीरता के कारण चिकित्सक ने अनुमान लगाया कि वे चालीस वर्ष से अधिक जीवित नहीं रहेंगी और उन्हें संतान न करने की सलाह दी गई (Reid, 1986, 13)।

रॉबिन्सन लंबे समय तक अवसादग्रस्त रहीं, किंतु अंततः उन्होंने गणित का अध्ययन जारी रखने का निर्णय लिया। वे बर्कली लौटीं और 1948 में अल्फ्रेड टार्स्की के निर्देशन में पीएचडी पूरी की। टार्स्की दिखा चुके थे कि वास्तविक संख्याओं का प्रथम-क्रम सिद्धांत निर्णेय है, और ग्योडेल के कार्य से निष्पन्न होता था कि प्राकृतिक संख्याओं का प्रथम-क्रम सिद्धांत अनिर्णेय है। परिमेय संख्याओं का प्रथम-क्रम सिद्धांत निर्णेय है या नहीं, यह एक बड़ी खुली समस्या थी। अपने शोधप्रबंध (1949) में रॉबिन्सन ने सिद्ध किया कि वह निर्णेय नहीं है।

निर्णय समस्याओं में रुचि के कारण रॉबिन्सन ने आगे हिल्बर्ट की दसवीं समस्या का समाधान खोजने का प्रयास किया। यह समस्या 1900 में डेविड हिल्बर्ट द्वारा रखी गई 23 प्रसिद्ध गणितीय समस्याओं की सूची में से एक थी। दसवीं समस्या पूछती है कि क्या कोई ऐसा कलनविधि है जो परिमित समय में बता दे कि पूर्णांक गुणांकों वाले किसी बहुपद समीकरण, जैसे $3x^2 - 2y + 3 = 0$, का पूर्णांकों में हल है या नहीं। ऐसे प्रश्नों को *डायोफैंटाइन समस्याएँ* कहते हैं। कुछ आरंभिक सफलताओं के बाद रॉबिन्सन ने मार्टिन डेविस और हिलरी पटनम के साथ काम आरंभ किया, जो इसी समस्या पर काम कर रहे थे। वे यह दिखाने में सफल हुए कि घातीय डायोफैंटाइन समस्याएँ (जिनमें अज्ञात राशियाँ घातांक के रूप में भी आ सकती हैं) अनिर्णेय हैं, और उन्होंने दिखाया कि एक निश्चित अनुमान (जिसे बाद में "जे.आर." कहा गया) से हिल्बर्ट की दसवीं समस्या की अनिर्णेयता निष्पन्न होती है (Davis et al., 1961)। रॉबिन्सन पूरे 1960 के दशक में समस्या पर काम करती रहीं। 1970 में युवा रूसी गणितज्ञ यूरी मतियासेविच ने अंततः जे.आर. परिकल्पना सिद्ध की। संयुक्त परिणाम को अब मतियासेविच–रॉबिन्सन–डेविस–पटनम प्रमेय, संक्षेप में एमआरडीपी प्रमेय, कहते हैं। मतियासेविच और रॉबिन्सन मित्र बने और उन्होंने कई शोधपत्रों पर सहयोग किया। मतियासेविच को लिखे एक पत्र में रॉबिन्सन ने कहा था, "वास्तव में मुझे बहुत प्रसन्नता है कि साथ काम करते हुए (हज़ारों मील की दूरी से) हम स्पष्टतः उससे अधिक प्रगति कर रहे हैं जितनी हममें से कोई अकेले कर पाता" (Matijasevich, 1992, 45)।

रॉबिन्सन अमेरिकन मैथमेटिकल सोसाइटी की पहली महिला अध्यक्ष और नेशनल अकैडमी ऑफ साइंस के लिए निर्वाचित पहली महिला थीं। ल्यूकीमिया का निदान होने के बाद 30 जुलाई 1985 को 65 वर्ष की आयु में उनका निधन हुआ।

आगे का पठन रॉबिन्सन के गणितीय शोधपत्र उनकी *Collected Works* (Robinson, 1996) में उपलब्ध हैं, जिसमें उनका नेशनल अकैडमी ऑफ साइंसेज़ जीवनीपरक संस्मरण (Feferman, 1994) भी पुनर्मुद्रित है। रॉबिन्सन की बड़ी बहन कॉन्स्टन्स रीड ने साक्षात्कारों पर आधारित "Autobiography of Julia" (Reid, 1986) और एक पूर्ण संस्मरण (Reid, 1996) प्रकाशित किया। जॉर्ज चिचेरी ने रॉबिन्सन और हिल्बर्ट की दसवीं समस्या पर एक लघु वृत्तचित्र निर्देशित किया (Csicsery, 2016)। रॉबिन्सन के साथ यूरी मतियासेविच के सहयोग और उनके कार्य पर रॉबिन्सन के प्रभाव के संक्षिप्त संस्मरण के लिए (Matijasevich, 1992) देखें।

75.8 बर्ट्रैंड रसेल

बर्ट्रैंड रसेल को आधुनिक विश्लेषणात्मक दर्शन के संस्थापकों में से एक माना जाता है। 18 मई 1872 को जन्मे रसेल दर्शन और तर्कशास्त्र में अपने कार्य के लिए ही नहीं जाने जाते थे; उन्होंने विविध विषयों पर अनेक लोकप्रिय पुस्तकें भी लिखीं। वे जीवन भर प्रबल राजनीतिक कार्यकर्ता भी रहे।

रसेल का जन्म वेल्स के मॉनमथशायर में ट्रेलेख में हुआ। उनके माता-पिता ब्रिटिश अभिजात वर्ग के सदस्य थे। वे स्वतंत्र विचारक थे और उस समय बोस्टन के उग्र सुधारवादियों से भी उनकी मित्रता थी। दुर्भाग्य से रसेल के बचपन में ही उनके माता-पिता की मृत्यु हो गई और उन्हें दादा-दादी के साथ रहने भेज दिया गया। वहाँ उनका धार्मिक पालन-पोषण हुआ (जिससे उनके माता-पिता हर कीमत पर बचना चाहते थे)। नैतिकता के सभी मामलों में उनकी दादी अत्यंत कठोर थीं। किशोरावस्था में निजी शिक्षकों ने अधिकतर उन्हें घर पर पढ़ाया।

विश्लेषणात्मक दर्शन और विशेषतः तर्कशास्त्र पर रसेल का प्रभाव अत्यंत व्यापक है। उन्होंने ट्रिनिटी कॉलेज, कैम्ब्रिज में गणित और दर्शन पढ़ा, जहाँ गणितज्ञ और दार्शनिक अल्फ्रेड नॉर्थ व्हाइटहेड ने उन्हें प्रभावित किया। 1910 में रसेल और व्हाइटहेड ने *Principia Mathematica* का पहला खंड प्रकाशित किया, जिसमें उन्होंने इस मत का समर्थन किया कि गणित को तर्कशास्त्र में घटाया जा सकता है। आगे उन्होंने सैकड़ों पुस्तकें, निबंध और राजनीतिक पुस्तिकाएँ प्रकाशित कीं। 1950 में उन्हें साहित्य का नोबेल पुरस्कार मिला।

रसेल राजनीति और सामाजिक सक्रियता में गहराई से संलग्न थे। प्रथम विश्व युद्ध के दौरान शांतिवादी गतिविधियों और विरोध के कारण उन्हें गिरफ़्तार करके छह महीने के लिए कारागार भेजा गया। कारागार में वे लिख-पढ़ सके और उनका कहना था कि यह अनुभव "काफ़ी सुखद" था। वे जीवन भर शांतिवादी रहे और 1961 में परमाणु निरस्त्रीकरण की एक सभा में भाग लेने पर फिर कारावास हुआ। वे 1948 की एक विमान दुर्घटना में भी बचे, जिसमें केवल धूम्रपान खंड में बैठे लोग जीवित बचे थे। इसलिए रसेल कहते थे कि उनका जीवन धूम्रपान के कारण बचा। रसेल ने चार विवाह किए, किंतु विवाहेतर संबंधों के लिए भी उनकी ख्याति थी। उनका निधन 2 फ़रवरी 1970 को वेल्स के पेनरिनडाइद्राइथ में 97 वर्ष की आयु में हुआ।

आगे का पठन रसेल ने 1872–1967 के अपने जीवन को समेटती तीन भागों की आत्मकथा लिखी (Russell, 1967, 1968, 1969)। मैकमास्टर विश्वविद्यालय का बर्ट्रैंड रसेल अनुसंधान केंद्र, बर्ट्रैंड रसेल अभिलेखागार का घर है। उनकी संकलित रचनाओं के खंडों (खोज-योग्य अनुक्रमणिकाओं सहित) और अभिलेखीय परियोजनाओं की जानकारी के लिए उनकी वेबसाइट Duncan (2015) देखें। रसेल का शोधपत्र *On Denoting* (Russell, 1905), बीसवीं शताब्दी के विश्लेषणात्मक दर्शन की एक उत्कृष्ट कृति है।

रसेल पर *Stanford Encyclopedia of Philosophy* की प्रविष्टि (Irvine, 2015) में इच्छा और राजनीतिक सिद्धांत पर रसेल के वक्तव्य की ध्वनि-कतरनें हैं। रसेल के कई वीडियो साक्षात्कार ऑनलाइन उपलब्ध हैं। उदाहरणतः उन्हें धूम्रपान और विमान दुर्घटना में होने की चर्चा करते देखने के लिए Russell (n.d.) देखें। रसेल की कुछ रचनाएँ, जिनमें उनकी *Introduction to Mathematical Philosophy* भी है, LibriVox (n.d.) पर निःशुल्क श्रव्य-पुस्तकों के रूप में उपलब्ध हैं।

75.9 अल्फ्रेड टार्स्की

अल्फ्रेड टार्स्की का जन्म 14 जनवरी 1901 को पोलैंड के वारसॉ (तब रूसी साम्राज्य का भाग) में हुआ। "नेपोलियन-जैसे" कहे जाने वाले टार्स्की ऊँची आवाज़ वाले, वाचाल और प्रखर थे। उनकी ऊर्जा प्रायः उनके व्याख्यानों में दिखती थी—एक बार व्याख्यान के दौरान सिगरेट फेंकते हुए उन्होंने कूड़ेदान में आग लगा दी, जिसके बाद उस भवन में उनके व्याख्यान देने पर रोक लगा दी गई।

टार्स्की में कम आयु से ही ज्ञान की प्यास थी। यद्यपि बाद के जीवन में वे विद्यार्थियों को कहते थे कि उन्होंने तर्कशास्त्र इसलिए पढ़ा क्योंकि वही एक कक्षा थी जिसमें उन्हें B मिला था, किंतु उनके माध्यमिक विद्यालय के अभिलेख दिखाते हैं कि उन्हें हर विषय में A मिला था—तर्कशास्त्र में भी। उन्होंने 1918 से 1924 तक वारसॉ विश्वविद्यालय में अध्ययन किया। टार्स्की पहले जीवविज्ञान पढ़ना चाहते थे, किंतु विश्वविद्यालय तर्क और दर्शन के वारसॉ संप्रदाय का केंद्र होने के कारण उनकी रुचि गणित, दर्शन और तर्कशास्त्र में हो गई। टार्स्की ने 1924 में स्तानिस्वाव लेश्न्येव्स्की के निर्देशन में डॉक्टरेट प्राप्त की।

1939 में संयुक्त राज्य अमेरिका जाने से पहले टार्स्की ने वारसॉ में माध्यमिक विद्यालय के शिक्षक के रूप में काम करते हुए अपने कुछ सबसे महत्त्वपूर्ण कार्य पूरे किए। तार्किक परिणाम और तार्किक सत्य पर उनका कार्य इसी समय लिखा गया। 1939 में टार्स्की व्याख्यान यात्रा पर संयुक्त राज्य अमेरिका गए हुए थे। उसी दौरान जर्मनी ने पोलैंड पर आक्रमण किया और यहूदी मूल के कारण टार्स्की लौट नहीं सके। उनकी पत्नी और बच्चे युद्ध के अंत तक पोलैंड में रहे, फिर वे भी संयुक्त राज्य अमेरिका आ सके। टार्स्की ने हार्वर्ड, कॉलेज ऑफ द सिटी ऑफ न्यू यॉर्क, प्रिंसटन के इंस्टीट्यूट फॉर एडवांस्ड स्टडी और अंततः यूनिवर्सिटी ऑफ कैलिफोर्निया, बर्कली में पढ़ाया। वहाँ उन्होंने तर्क और विज्ञान की पद्धति का बहुविषयी कार्यक्रम स्थापित किया। टार्स्की का निधन 26 अक्टूबर 1983 को 82 वर्ष की आयु में हुआ।

आगे का पठन टार्स्की के जीवन के बारे में अधिक जानने के लिए जीवनी *Alfred Tarski: Life and Logic* (Feferman and Feferman, 2004) देखें। तार्किक परिणाम और सत्य पर टार्स्की की मूलभूत रचनाएँ (Corcoran, 1983) में अंग्रेज़ी में उपलब्ध हैं। टार्स्की की सभी मूल रचनाएँ चार-खंडों की शृंखला (Tarski, 1981) में संकलित की गई हैं।

75.10 एलन ट्यूरिंग

एलन ट्यूरिंग का जन्म 23 जून 1912 को लंदन के मैडा वेल में हुआ। उन्हें सैद्धांतिक कंप्यूटर विज्ञान का जनक माना जाता है। भौतिक विज्ञानों और गणित में ट्यूरिंग की रुचि कम आयु में ही आरंभ हो गई थी। किंतु बाल्यावस्था में उनके विद्यालयों में उनकी रुचियों को समुचित स्थान नहीं मिला; वहाँ साहित्य और शास्त्रीय विषयों पर बल दिया जाता था। फलतः विद्यालय में उनका प्रदर्शन खराब रहा और उनके कई शिक्षकों ने उन्हें फटकारा।

ट्यूरिंग ने स्नातक विद्यार्थी के रूप में किंग्स कॉलेज, कैम्ब्रिज में गणित पढ़ा। 1936 में उन्होंने गणनीय फलन की संकल्पना को ठीक-ठीक परिभाषित करने और निर्णय समस्या की अनिर्णेयता सिद्ध करने के प्रयास में वह यंत्र विकसित किया जिसे अब ट्यूरिंग मशीन कहते हैं। अलॉन्ज़ो चर्च अपने लैम्ब्डा कलन द्वारा इस परिणाम को उनसे पहले सिद्ध कर चुके थे। फिर भी चर्च के परिणाम के संदर्भ सहित ट्यूरिंग का शोधपत्र प्रकाशित हुआ। चर्च ने ट्यूरिंग को प्रिंसटन आमंत्रित किया, जहाँ वे 1936–1938 तक रहे और चर्च के निर्देशन में डॉक्टरेट प्राप्त की।

तर्कशास्त्र में रुचि के बावजूद भौतिक विज्ञानों में ट्यूरिंग की आरंभिक रुचि प्रबल बनी रही। द्वितीय विश्व युद्ध में ब्लेचली पार्क स्थित ब्रिटिश कूटविश्लेषण विभाग में सेवा के दौरान उनके व्यावहारिक कौशल का उपयोग हुआ। जर्मन नौसैनिक संचार में प्रयुक्त एनिग्मा कूट को तोड़ने में ट्यूरिंग की केंद्रीय भूमिका थी। इलेक्ट्रॉनिक मशीनों के आगमन के साथ सांख्यिकी और कूटलेखन में उनकी विशेषज्ञता ने दल को "बॉम्ब" नामक विकूटन मशीन बनाकर कूट तोड़ने में सक्षम किया। उनके विचारों ने विश्व के पहले प्रोग्राम-योग्य इलेक्ट्रॉनिक कंप्यूटर, कोलॉसस, के निर्माण में भी सहायता की; इसका उपयोग ब्लेचली पार्क में जर्मन लोरेंज़ कूट तोड़ने के लिए भी हुआ।

ट्यूरिंग समलैंगिक थे। फिर भी 1942 में उन्होंने ब्लेचली पार्क की अपनी सहकर्मी जोन क्लार्क को विवाह का प्रस्ताव दिया, किंतु बाद में सगाई तोड़कर उन्हें बताया कि वे समलैंगिक हैं। उनके जीवन में कई प्रेम-संबंध रहे, यद्यपि उस समय ब्रिटेन में समलैंगिक कृत्य दंडनीय अपराध थे। 1952 में ट्यूरिंग के तत्कालीन प्रेमी के एक मित्र ने उनके घर में चोरी की। पुलिस में शिकायत करते समय ट्यूरिंग ने अपना समलैंगिक संबंध स्वीकार किया, क्योंकि उन्हें लगा कि सरकार

समलैंगिक कृत्यों को वैध बनाने वाली है। यह सच नहीं था और उन पर घोर अभद्रता का आरोप लगा। कारावास के स्थान पर ट्यूरिंग ने कामेच्छा घटाने वाला हार्मोन उपचार चुना। 8 जून 1954 को वे सायनाइड की अत्यधिक मात्रा से मृत पाए गए—सबसे संभवतः यह आत्महत्या थी। 2013 में महारानी एलिज़ाबेथ द्वितीय ने उन्हें शाही क्षमादान दिया।

आगे का पठन एलन ट्यूरिंग की विस्तृत जीवनी के लिए Hodges (2014) देखें। ट्यूरिंग के जीवन और कार्य से प्रेरित नाटक *Breaking the Code* का 1996 में टीवी निर्माण हुआ, जिसमें डेरेक जैकोबी ने ट्यूरिंग की भूमिका निभाई। बेनेडिक्ट कम्बरबैच और कीरा नाइटली अभिनीत अकादमी पुरस्कार-नामांकित फिल्म *The Imitation Game* भी एलन ट्यूरिंग के जीवन और ब्लेचली पार्क में उनके समय पर शिथिल रूप से आधारित है (Tyldum, 2014)।

Radiolab (2012) में ट्यूरिंग के जीवन और कार्य पर कई पॉडकास्ट हैं। बीबीसी होराइज़न का वृत्तचित्र *The Strange Life and Death of Dr. Turing* ऑनलाइन देखने को उपलब्ध है (Sykes, 1992)। Theelen (2012) एक चलती हुई लेगो ट्यूरिंग मशीन का लघु वीडियो है—इसे 2012 में ट्यूरिंग की जन्मशती के सम्मान में बनाया गया था।

ट्यूरिंग मशीनों और निर्णय समस्या पर ट्यूरिंग का मूल शोधपत्र Turing (1937) है।

75.11 अर्न्स्ट ज़र्मेलो

अर्न्स्ट ज़र्मेलो का जन्म 27 जुलाई 1871 को बर्लिन, जर्मनी में हुआ। उनकी पाँच बहनें थीं, किंतु परिवार खराब स्वास्थ्य से जूझता रहा और केवल तीन बहनें वयस्कता तक जीवित रहीं। उनके बचपन में ही माता-पिता भी चल बसे, जिससे सत्रह वर्ष की आयु में वे और उनके भाई-बहन अनाथ हो गए। ज़र्मेलो की कलाओं, विशेषतः कविता, में गहरी रुचि थी। वे तीक्ष्ण, हाज़िरजवाब और आलोचनात्मक माने जाते थे। उनकी सर्वाधिक प्रसिद्ध गणितीय उपलब्धियों में चयन अभिगृहीत की प्रस्तुति (1904 में) और समुच्चय सिद्धांत का उनका अभिगृहीतीकरण (1908 में) हैं।

विश्वविद्यालय में ज़र्मेलो की रुचियाँ विविध थीं। उन्होंने भौतिकी, गणित और दर्शन के पाठ्यक्रम लिए। हरमन श्वार्त्स के निर्देशन में ज़र्मेलो ने 1894 में बर्लिन विश्वविद्यालय में अपना शोधप्रबंध *Investigations in the Calculus of Variations* पूरा किया। 1897 में उन्होंने गॉटिंगेन विश्वविद्यालय में आगे अध्ययन करने का निर्णय लिया, जहाँ डेविड हिल्बर्ट के आधारभूत कार्य ने उन्हें बहुत प्रभावित किया। 1899 में वे प्राध्यापक बनने के पात्र हो गए, किंतु ग्यारह वर्ष बाद तक उन्हें पद नहीं मिला—संभवतः उनके विचित्र व्यवहार और "व्यग्र उतावलेपन" के कारण।

अंततः 1910 में ज़र्मेलो को ज़्यूरिख विश्वविद्यालय में सवेतन प्राध्यापक पद मिला, किंतु तपेदिक के कारण 1916 में उन्हें सेवानिवृत्त होना पड़ा। स्वस्थ होने के बाद 1921 में उन्हें फ़्राइबुर्ग विश्वविद्यालय में मानद प्राध्यापक पद दिया गया। इस दौरान उन्होंने आधारभूत गणित पर काम किया। थोराल्फ़ स्कोलेम और कुर्ट ग्योडेल की रचनाओं से वे चिढ़ गए और अपने शोधपत्रों में उनके दृष्टिकोणों की सार्वजनिक आलोचना की। अलोकप्रियता और जर्मनी में हिटलर के सत्तारोहण के विरोध के कारण उन्हें 1935 में फ़्राइबुर्ग के पद से हटा दिया गया।

ज़र्मेलो के जीवन के अंतिम वर्ष एकांत में बीते। 1935 में पद से हटाए जाने के बाद उन्होंने गणित छोड़ दिया। वे देहात चले गए, जहाँ सादगी से रहे। 1944 में उन्होंने विवाह किया और दृष्टि जाती रहने के कारण अपनी पत्नी पर पूर्णतः निर्भर हो गए। 1951 तक ज़र्मेलो की दृष्टि पूरी तरह चली गई। उनका निधन 21 मई 1953 को जर्मनी के ग्युंटरस्टाल में हुआ।

आगे का पठन ज़र्मेलो की पूर्ण जीवनी के लिए Ebbinghaus (2015) देखें। 1904 और 1908 के ज़र्मेलो के मूलभूत शोधपत्र मूल जर्मन में पढ़ने के लिए उपलब्ध हैं (Zermelo, 1904, 1908b)। भौतिकी पर उनके लेखन सहित ज़र्मेलो की संकलित रचनाएँ (Ebbinghaus et al., 2010; Ebbinghaus and Kanamori, 2013) में अंग्रेज़ी अनुवाद में उपलब्ध हैं।

अध्याय 76

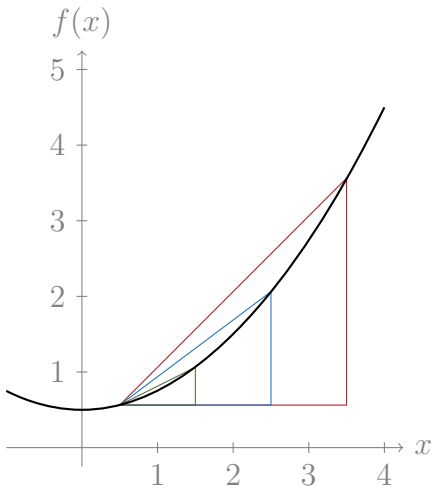
समुच्चय सिद्धांत का इतिहास और मिथक

इस अध्याय में टिम बटन के *Open Set Theory* पाठ का ऐतिहासिक आमुख सम्मिलित है।

76.1 अनंतसूक्ष्म राशियाँ और अवकलन

न्यूटन और लाइबनिट्स ने सत्रहवीं शताब्दी के अंत में (स्वतंत्र रूप से) कलन की खोज की। कलन का एक विशेष महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग *अवकलन* था। मोटे तौर पर, अवकलन का उद्देश्य किसी बिंदु पर फलन की "परिवर्तन दर", या प्रवणता, की संकल्पना देना है।

इस विचार को स्पष्ट करने का एक सजीव ढंग यह है। नीचे काले रंग में दिखाए गए फलन $f(x) = {x^2}/{4} + {1}/{2}$ पर विचार करें:



मान लें हम $c = {1}/{2}$ पर फलन की प्रवणता ज्ञात करना चाहते हैं। हम ऐसा त्रिभुज खींचकर आरंभ करते हैं जिसका कर्ण उस बिंदु पर प्रवणता का सन्निकटन करता है, संभवतः ऊपर का लाल त्रिभुज। जब β हमारे त्रिभुज की आधार-लंबाई है, तो उसकी ऊँचाई $f({1}/{2} + \beta) - f({1}/{2})$ है, अतः कर्ण की प्रवणता है:

$$\frac{f({1}/{2} + \beta) - f({1}/{2})}{\beta}.$$

अतः आधार-लंबाई 3 वाले हमारे लाल त्रिभुज की प्रवणता ठीक 1 है। छोटे त्रिभुज, आधार-लंबाई 2 वाले नीले त्रिभुज, का कर्ण बेहतर सन्निकटन देता है; उसकी प्रवणता ${3}/{4}$ है। उससे भी छोटा, आधार-लंबाई 1 वाला हरा त्रिभुज और बेहतर सन्निकटन देता है; उसकी प्रवणता ${1}/{2}$ है।

लगातार छोटे होते त्रिभुज हमें लगातार बेहतर सन्निकटन देते हैं। इसलिए हम कुछ ऐसा कह सकते हैं: *अनंतसूक्ष्म* आधार-लंबाई वाले त्रिभुज का कर्ण हमें $c = 1/2$ पर स्वयं प्रवणता देता है। इस प्रकार हमें बिंदु c पर फलन f के (प्रथम) अवकलज का सूत्र मिलेगा:

$$f'(c) = \frac{f(c+\beta) - f(c)}{\beta} \text{ जहाँ } \beta \text{ अनंतसूक्ष्म है।}$$

और मोटे तौर पर न्यूटन और लाइबनिट्स ने यही कहा था।

किंतु उन्होंने यह कहा है, तो हमें उनसे पूछना होगा: *अनंतसूक्ष्म* क्या है? एक गंभीर दुविधा उत्पन्न होती है। यदि $\beta = 0$, तो f' अपरिभाषित है, क्योंकि इसमें 0 से भाग देना पड़ता है। किंतु यदि $\beta > 0$, तो हमें केवल प्रवणता का *सन्निकटन* मिलता है, स्वयं प्रवणता नहीं।

यह कोई काल-विसंगत चिंता नहीं है। यहाँ बर्कली न्यूटन के अनुयायियों की आलोचना करते हैं:

> मैं मानता हूँ कि चिह्नों से किसी वस्तु अथवा कुछ भी नहीं, दोनों में से किसी को निरूपित कराया जा सकता है; और फलतः मूल संकेतन $c + \beta$ में β किसी वृद्धि अथवा कुछ भी नहीं, दोनों में से किसी का अर्थ दे सकता था। किंतु फिर आप उससे इनमें से जिसका भी अर्थ दिलाएँ, आपको उसी अर्थ के अनुरूप संगत तर्क करना चाहिए और दोहरे अर्थ के आधार पर आगे नहीं बढ़ना चाहिए: ऐसा करना स्पष्ट कुतर्क होगा। (Berkeley 1734, §XIII, चरों को पिछले पाठ के अनुरूप बदला गया है)

बर्कली के विरुद्ध अनंतसूक्ष्म कलन का बचाव करने के लिए कोई उत्तर दे सकता है कि "अनंतसूक्ष्म राशियों" की बात केवल आलंकारिक है। कहा जा सकता है कि जब तक हम *वास्तव में छोटा* त्रिभुज लेते हैं, हमें स्पर्शरेखा का *पर्याप्त अच्छा* सन्निकटन मिलेगा। बर्कली के पास इसका भी उत्तर था: यद्यपि वह अभियांत्रिकी के लिए पर्याप्त अच्छा हो सकता है, पर वह गणित की *स्थिति* को दुर्बल करता है, क्योंकि

> हमें बताया जाता है कि *in rebus mathematicis errores quàm minimi non sunt contemnendi*। [गणित के मामले में छोटी-से-छोटी त्रुटियों की उपेक्षा नहीं की जानी चाहिए।] (Berkeley, 1734, §IX)

तिरछे अक्षरों वाला अंश स्वयं न्यूटन की *Quadrature of Curves* (1704) से लगभग शब्दशः उद्धरण है।

बर्कली की दार्शनिक आपत्तियाँ अत्यंत मर्मभेदी हैं। फिर भी कलन एक अत्यधिक सफल उद्यम था और गणितज्ञ बिना त्रुटि में पड़े उसका उपयोग करते रहे।

76.2 सीमाओं की कठोर परिभाषा

आजकल पिछली समस्या का मानक समाधान अनंतसूक्ष्म राशियों से छुटकारा पाना है। वह इस प्रकार है।

हमने देखा कि जैसे-जैसे β छोटा होता है, हमें प्रवणता के बेहतर सन्निकटन मिलते हैं। वास्तव में, जैसे-जैसे β मनचाहे ढंग से 0 के निकट आता है, $f'(c)$ का मान हमारी इच्छित प्रवणता की ओर "असीम रूप से बढ़ता" है। इसलिए $\beta = 0$ *पर* क्या होता है, इस पर विचार करने के स्थान पर हमें केवल β के 0 के निकट आने पर $f'(c)$ की *प्रवृत्ति* पर विचार करना है।

इस प्रकार कहें तो सामान्य चुनौती इस रूप के दावों का अर्थ स्पष्ट करना है:

जैसे-जैसे x, c के निकट आता है, $g(x)$ असीम रूप से ℓ की ओर बढ़ता है।

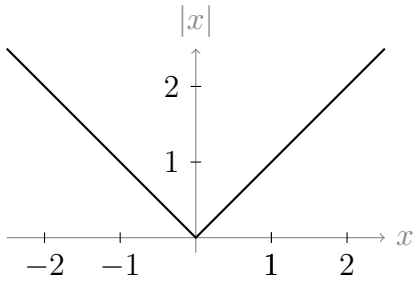
इसे हम अधिक संक्षेप में इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \ell.$$

उन्नीसवीं शताब्दी में कॉशी के पूर्व कार्य को आगे बढ़ाते हुए वाइयरश्ट्रास ने इस व्यंजक की पूर्णतः कठोर परिभाषा दी। विचार वास्तव में यह है कि x को c के उपयुक्त निकट लाकर हम $g(x)$ को ℓ के जितना चाहें उतना निकट ला सकते हैं। अधिक ठीक-ठीक, हम निर्धारित करते हैं कि $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$ का अर्थ होगा:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x\,(|x - c| < \delta \to |g(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

यहाँ खड़ी पट्टियाँ परम मान दर्शाती हैं। अर्थात् जब $x \geq 0$ तब $|x| = x$, और जब $x < 0$ तब $|x| = -x$; *उस* फलन को आप इस प्रकार दिखा सकते हैं:



अतः परिभाषा मोटे तौर पर यह कहती है: आप ऐसे निवेश चुनकर जो c से δ से अधिक दूर न हों (अर्थात् $|x - c| < \delta$), अपनी "त्रुटि" को ε से कम (अर्थात् $|g(x) - \ell| < \varepsilon$) कर सकते हैं।

सीमा की संकल्पना परिभाषित करने के बाद हम उससे अनंतसूक्ष्म राशियों को पूरी तरह टाल सकते हैं और निर्धारित कर सकते हैं कि c पर f की प्रवणता इससे दी जाती है:

$$f'(c) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(c+x) - f(c)}{x}\right) \text{ जहाँ सीमा अस्तित्व में है।}$$

फिर भी यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि हमारी परिभाषा को "जहाँ सीमा अस्तित्व में है" वाली सावधानी क्यों चाहिए। एक सरल उदाहरण के लिए $f(x) = |x|$ पर विचार करें, जिसका आलेख हमने अभी देखा। स्पष्टतः $f'(0)$ अपरिभाषित है: यदि हम 0 के "दाईं ओर से" निकट आएँ, तो प्रवणता सदा 1 है; यदि "बाईं ओर से" निकट आएँ, तो प्रवणता सदा -1 है; अतः सीमा अपरिभाषित है। इसलिए हम जोड़ सकते हैं कि फलन f, x पर *अवकलनीय* तभी और केवल तभी है जब ऐसी सीमा अस्तित्व में हो।

हमने देखा कि *सीमा* की संकल्पना से अवकलन को कैसे संभाला जाए। इसी संकल्पना से हम *सतत* फलन का विचार परिभाषित कर सकते हैं। (वास्तव में बोल्ज़ानो 1817 तक यह समझ चुके थे।) सांतत्य का कॉशी–वाइयरश्ट्रास निरूपण इस प्रकार है। मोटे तौर पर: कोई फलन f (किसी बिंदु पर) सतत है यदि फलन के निर्गम में एक निश्चित मात्रा की परिशुद्धता माँगने पर, फलन के निवेश में एक निश्चित मात्रा की परिशुद्धता पर बल देकर उसकी प्रत्याभूति दी जा सके। अधिक ठीक-ठीक: f, c पर सतत है यदि x के शून्य की ओर बढ़ने पर $f(c + x)$ और स्वयं $f(c)$ के बीच का अंतर 0 की ओर बढ़े। दूसरे शब्दों में: f, c पर *सतत* तभी और केवल तभी है जब $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$।

इससे आगे बढ़ना हमें वास्तविक विश्लेषण में ले जाएगा, जबकि हमारा विषय समुच्चय सिद्धांत है। अतः अब हमें रुककर शिक्षा कहनी चाहिए। उन्नीसवीं शताब्दी में गणितज्ञों ने *सीमा* की कठोर रूप से परिभाषित संकल्पना का आह्वान करके अनंतसूक्ष्म राशियों के बिना काम करना सीखा।

76.3 विकृतियाँ

किंतु *सीमा* की परिभाषा से कुछ काफ़ी "विकृत" रचनाएँ संभव निकलीं।

लगभग 1830 के दशक में बोल्ज़ानो ने ऐसा फलन खोजा जो *सर्वत्र सतत*, किंतु *कहीं भी अवकलनीय नहीं* था। (दुर्भाग्य से बोल्ज़ानो ने इसे कभी प्रकाशित नहीं किया; गणितज्ञों का इस विचार से पहला सामना 1872 में हुआ, जब वाइयरश्ट्रास ने स्वतंत्र रूप से यही विचार खोजा।)[1] कम-से-कम कहें तो यह काफ़ी आश्चर्यजनक था। $|x|$ जैसे फलन

[1] इस इतिहास का अत्यंत विस्तृत प्रलेखन वाइयरश्ट्रास फलन पर विकिपीडिया लेख की पाद-टिप्पणियों में है।

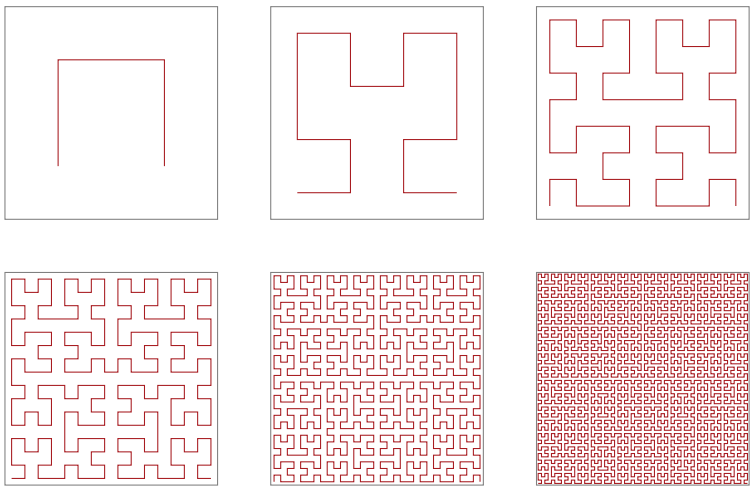
खोजना सरल है जो सर्वत्र सतत हों किंतु किसी विशेष बिंदु पर अवकलनीय न हों। किंतु कोई फलन जो सर्वत्र सतत हो पर *कहीं भी* अवकलनीय न हो, बिल्कुल भिन्न जीव है। एक क्षण सोचें कि आप ऐसा फलन कैसे खींचने का प्रयास करेंगे। उसे सतत सुनिश्चित करने के लिए आपको पृष्ठ से कलम कभी हटाए बिना उसे खींच पाना चाहिए; किंतु उसे कहीं भी अवकलनीय न होना सुनिश्चित करने के लिए आपको निरंतर अपनी कलम की दिशा अचानक बदलनी होगी।

इसके बाद और "विकृतियाँ" आईं। 5 जनवरी 1874 को कांटोर ने डेडेकिंड को पत्र लिखकर यह समस्या रखी:

> क्या किसी पृष्ठ (मान लें उसकी सीमा सहित कोई वर्ग) को किसी रेखा (मान लें उसके अंतबिंदुओं सहित कोई सीधी रेखा) से एकैकी रूप से इस तरह सहसंबद्ध किया जा सकता है कि पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु के अनुरूप रेखा का एक बिंदु हो और इसके विपरीत रेखा के प्रत्येक बिंदु के अनुरूप पृष्ठ का एक बिंदु हो?
>
> इस समय भी मुझे लगता है कि इस प्रश्न का उत्तर बहुत कठिन है—यद्यपि यहाँ भी *नहीं* कहने की प्रेरणा इतनी प्रबल होती है कि कोई प्रमाण को लगभग अनावश्यक मानना चाहेगा। [Gouvêa 2011 में उद्धृत]

किंतु 1877 में कांटोर ने सिद्ध किया कि वे गलत थे। वास्तव में किसी रेखा और किसी वर्ग पर बिंदुओं की संख्या ठीक समान है। 29 जून 1877 को उन्होंने डेडेकिंड को लिखा, "*je le vois, mais je ne le crois pas*"; अर्थात् "मैं इसे देखता हूँ, पर विश्वास नहीं करता"। गणित के "स्वीकृत इतिहास" में इसे प्रायः इस संकेत के रूप में लिया जाता है कि ये नए परिणाम तत्कालीन गणितज्ञों को कितने *शब्दशः अविश्वसनीय* लगे थे। (पत्राचार Gouvêa (2011) में प्रस्तुत है और हम खंड 76.4 में इस पर लौटेंगे। कांटोर के प्रमाण की रूपरेखा खंड 76.5 में है।)

कांटोर के परिणाम से प्रेरित होकर पियानो ने विचार करना आरंभ किया कि क्या किसी रेखा को किसी समतल पर *सुचारु रूप से* प्रतिचित्रित करना संभव है। यह एक *अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र* होता। 1890 में पियानो ने ठीक ऐसा वक्र बनाया। यह सच में अंतर्ज्ञान-विरोधी है: यूक्लिड ने रेखा को "चौड़ाई-रहित लंबाई" (पुस्तक I, परिभाषा 2) कहा था, किंतु पियानो ने दिखाया कि रेखा को उपयुक्त रूप से मोड़कर उसकी लंबाई को चौड़ाई में बदला जा सकता है। 1891 में हिल्बर्ट ने कुछ अधिक अंतर्ज्ञान-सुलभ अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र का वर्णन और उसे स्पष्ट करने वाले कुछ चित्र दिए। वक्र का निर्माण क्रमशः होता है और निर्माण के पहले छह चरण ये हैं:



सीमा में—एक संकल्पना जिसे अब तक कठोर परिभाषा मिल चुकी थी—पूरा वर्ग ठोस लाल रंग से भर जाता है। और प्रसंगवश, हिल्बर्ट का वक्र सर्वत्र सतत है पर कहीं भी अवकलनीय नहीं; अंतर्ज्ञानतः इसलिए कि अनंत सीमा में फलन हर क्षण अचानक दिशा बदलता है। (हम खंड 76.6 में हिल्बर्ट के निर्माण की अधिक विस्तृत रूपरेखा देंगे।)

अच्छा हो या बुरा, इन "विकृत" ज्यामितीय रचनाओं को ज्यामितीय अंतर्ज्ञान के आह्वान पर संदेह करने का कारण माना गया। वे गणित करने के उस नए ढंग के लिए लगभग *प्रचार* बन गईं जिसकी परिणति समुच्चय सिद्धांत में होनी थी। विषय के बाद के मिथक-निर्माण में बार-बार दोहराया गया कि ये परिणाम पूर्णतः कठोर और पूर्णतः चौंकाने वाले, दोनों थे। इस तरह उन्होंने दोहरा उद्देश्य पूरा किया: ज्यामितीय अंतर्ज्ञान पर भरोसा करने के विरुद्ध चेतावनी और सोचने के नए ढंगों की उर्वरता का प्रदर्शन।

76.4 इतिहास से अधिक मिथक?

एक शताब्दी से अधिक समय बीतने के बाद इन घटनाओं को देखते हुए हमें सावधान रहना चाहिए कि इन निर्णयों को केवल विश्वास के आधार पर न मान लें। परिणाम निश्चय ही नए, रोमांचक और आश्चर्यजनक थे। किंतु वे सच में कितने चौंकाने वाले थे? और क्या उन्होंने वास्तव में दिखाया कि हमें ज्यामितीय अंतर्ज्ञान पर भरोसा नहीं करना चाहिए?

चकित होने के प्रश्न पर Gouvêa (2011) बताते हैं कि डेडेकिंड को कांटोर की प्रसिद्ध टिप्पणी, "*je le vois, mais je ne le crois pas*", को संदर्भ से काफ़ी अलग करके उद्धृत किया जाता है। उसका कुछ और संदर्भ यहाँ है (Gouvêa से उद्धृत):

> यदि मैं आपकी उदारता और धैर्य से इतनी अधिक अपेक्षाएँ कर रहा हूँ, तो विषय के प्रति मेरे उत्साह को क्षमा करें; हाल में जो बातें मैंने आपको भेजीं, वे मेरे लिए भी इतनी अप्रत्याशित, इतनी नई हैं कि जब तक आप, आदरणीय मित्र, उनकी शुद्धता पर निर्णय नहीं देते, मुझे मन की शांति नहीं मिल सकती। जब तक आप मुझसे सहमत नहीं हुए हैं, मैं केवल यही कह सकता हूँ: *je le vois, mais je ne le crois pas.*

कांटोर जानते थे कि उनका परिणाम "इतना अप्रत्याशित, इतना नया" था। किंतु यह संदिग्ध है कि उन्होंने कभी अपने परिणाम को *अविश्वसनीय* माना हो। जैसा Gouvêa बताते हैं, वे केवल डेडेकिंड से अपना दिया हुआ प्रमाण जाँचने को कह रहे थे।

ज्यामितीय अंतर्ज्ञान के प्रश्न पर: पियानो ने अपना अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र बिना किसी आरेख के प्रकाशित किया। किंतु जब हिल्बर्ट ने अपना वक्र प्रकाशित किया, तो उन्होंने उद्देश्य समझाया: यदि पाठक "निम्नलिखित ज्यामितीय अंतर्ज्ञान की सहायता लें", तो वे उन्हें पियानो के परिणाम को समझने का स्पष्ट ढंग देंगे; इसके बाद उन्होंने ठीक खंड 76.3 में दिए गए आरेखों जैसे *आरेखों* की एक शृंखला सम्मिलित की।

अधिक सामान्यतः: यद्यपि प्रकाशित प्रमाणों में आरेख कुछ अप्रचलित हो गए हैं, इस तथ्य से बचा नहीं जा सकता कि गणितज्ञ बातें सिद्ध करते समय *बहुधा* आरेखों का उपयोग करते हैं। (मोटे तौर पर: अच्छे गणितज्ञ जानते हैं कि वे ज्यामितीय अंतर्ज्ञान पर कब भरोसा कर सकते हैं।)

संक्षेप में: प्रचार पर विश्वास न करें; या कम-से-कम उसे केवल विश्वास के आधार पर न मानें। इस विषय में अधिक जानने के लिए Giaquinto (2007) पढ़ सकते हैं।

76.5 रेखा और समतल पर कांटोर

श्रेडर–बर्नस्टाइन के प्रमाण से जुड़ी कुछ परिस्थितियाँ उस इतिहास से संबंधित हैं जिसकी चर्चा हमने खंड 76.3 में की थी। याद करें कि 1877 में कांटोर ने सिद्ध किया कि किसी वर्ग पर उतने ही बिंदु हैं जितने उसकी किसी एक भुजा पर। यहाँ हम उनका (पहला प्रयास किया हुआ) प्रमाण प्रस्तुत करेंगे।

मान लें L इकाई रेखा है, अर्थात् बिंदुओं का समुच्चय $[0,1]$। मान लें S इकाई वर्ग है, अर्थात् बिंदुओं का समुच्चय $\mathrm{L}\times\mathrm{L}$। इन पदों में कांटोर ने सिद्ध किया कि $\mathrm{L}\approx\mathrm{S}$। उन्होंने डेडेकिंड को एक टिप्पणी लिखी, जिसमें मूलतः निम्नलिखित तर्क था।

प्रमेय 76.1. $L \approx S$

प्रमाण: पहला भाग। $a, b \in \mathrm{L}$ नियत करें। उन्हें द्विआधारी संकेतन में लिखें, ताकि हमारे पास 0 और 1 के अनंत अनुक्रम a_1, a_2, ..., तथा b_1, b_2, ...हों, ऐसे कि:

$$a = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$$
$$b = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$$

अब निम्नलिखित फलन $f\colon \mathrm{S}\to\mathrm{L}$ पर विचार करें

$$f(a,b) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$$

अब f एकैकी प्रतिचित्रण है, क्योंकि यदि $f(a,b) = f(c,d)$, तो सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $a_n = c_n$ और $b_n = d_n$, अतः $a = c$ और $b = d$। $\square$

दुर्भाग्य से, जैसा डेडेकिंड ने कांटोर को बताया, यह मूल प्रश्न का उत्तर नहीं देता। $0.\dot{1}\dot{0} = 0.1010101010\ldots$ पर विचार करें। हमें चाहिए कि $f(a,b) = 0.\dot{1}\dot{0}$, जहाँ:

$$a = 0.\dot{1}\dot{1} = 0.111111\ldots$$
$$b = 0$$

किंतु $a = 0.\dot{1}\dot{1} = 1$। इसलिए जब हम कहते हैं "a और b को द्विआधारी संकेतन में लिखें", तो हमें चुनना होगा कि *कौन-सा* संकेतन प्रयोग करें; और चूँकि f को एक *फलन* होना है, हम दो संभावित संकेतनों में से केवल *एक* प्रयोग कर सकते हैं। किंतु यदि, उदाहरणतः, हम सरल संकेतन प्रयोग करके a को "$1.000\ldots$" लिखें, तो हमारे पास ऐसा कोई युग्म $\langle a, b\rangle$ नहीं जिसके लिए $f(a,b) = 0.\dot{1}\dot{0}$।

संक्षेप में: डेडेकिंड ने बताया कि कुछ आवर्ती दशमलव प्रसारों की संभावना के कारण कांटोर का फलन f एकैकी प्रतिचित्रण तो है, किंतु आच्छादक प्रतिचित्रण *नहीं*। अतः कांटोर ने केवल $\mathrm{S} \preceq \mathrm{L}$ दिखाया है, $\mathrm{S} \approx \mathrm{L}$ *नहीं*।

कांटोर ने लगभग तत्काल डेडेकिंड को उत्तर लिखकर मूलतः सुझाया कि प्रमाण को इस प्रकार पूरा किया जा सकता है:

प्रमाण: पूर्ण।. अतः हमने दिखाया है कि $\mathrm{S} \preceq \mathrm{L}$। किंतु स्पष्टतः L से S में एकैकी प्रतिचित्रण है: रेखा को वर्ग की किसी एक भुजा पर समतल रख दें। अतः $\mathrm{L} \preceq \mathrm{S}$ और $\mathrm{S} \preceq \mathrm{L}$। श्रेडर–बर्नस्टाइन (प्रमेय 4.25) से, $\mathrm{L} \approx \mathrm{S}$। $\square$

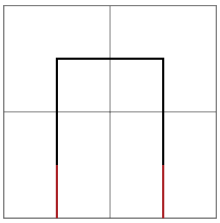
किंतु निस्संदेह कांटोर अंतिम पंक्ति को इन पदों में पूरा नहीं कर सकते थे, क्योंकि श्रेडर–बर्नस्टाइन प्रमेय तब तक सिद्ध नहीं हुआ था। वास्तव में, यद्यपि कांटोर ने बाद में इसे एक सामान्य अनुमान के रूप में सूत्रबद्ध किया, फिर भी 1897 तक इसका संतोषजनक प्रमाण नहीं हुआ। (और इसलिए 1877 में बाद में कांटोर ने प्रमेय 76.1 का एक भिन्न प्रमाण दिया, जो श्रेडर–बर्नस्टाइन से होकर नहीं जाता था।)

76.6 परिशिष्ट: हिल्बर्ट के अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र

अध्याय खंड 76.3 में हमने बताया था कि किसी रेखा और वर्ग पर बिंदुओं की संख्या ठीक समान होने के कांटोर के प्रमाण (प्रमेय 76.1) ने पियानो को यह पूछने के लिए प्रेरित किया कि क्या कोई अंतरिक्ष-पूर्ति *वक्र* हो सकता है। 1890 में उन्हें सकारात्मक उत्तर मिला। इस खंड में हम (कुछ अनौपचारिक ढंग से) समझाते हैं कि हिल्बर्ट का अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र (एक छोटे-से बदलाव सहित) कैसे बनाया जाए।[2]

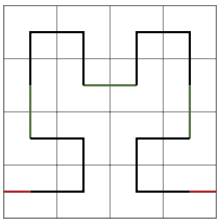
हमें किसी फलन h को फलनों h_1, h_2, h_3, ... के अनुक्रम की सीमा के रूप में परिभाषित करना है। पहले हम निर्माण का वर्णन करेंगे। फिर दिखाएँगे कि वह अंतरिक्ष की पूर्ति करता है। उसके बाद दिखाएँगे कि वह वक्र है।

हम h का परिसर इकाई वर्ग S लेंगे। h का हमारा पहला सन्निकटन, अर्थात् h_1, यह है:



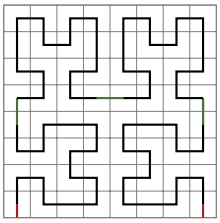
चीज़ों का हिसाब रखने के लिए हमने वर्ग पर 2×2 जाल रखा है। हम वक्र को निचले बाएँ चतुर्थांश से आरंभ होकर ऊपरी बाएँ, फिर ऊपरी दाएँ और अंततः निचले दाएँ जाते हुए सोच सकते हैं। निर्माण का दूसरा चरण, अर्थात् h_2, यह है:

[2] अधिक कठोर व्याख्या के लिए Rose (2010) देखें। बदलाव का अर्थ नीचे के वक्रों के लाल भाग सम्मिलित करना है। इससे यह जाँचना कुछ सरल होता है कि वक्र सतत है।



भिन्न रंग यह समझाने में सहायता करेंगे कि h_2 कैसे बनाया गया। पहले हम h_1 के गैर-लाल भाग की छोटे पैमाने की प्रतियाँ अपने वर्ग के निचले बाएँ, ऊपरी बाएँ, ऊपरी दाएँ और निचले दाएँ भाग में रखते हैं (काले रंग में खींची गईं)। फिर इन चार आकृतियों को (हरी रेखाओं से) जोड़ते हैं। अंत में अपनी आकृति को वर्ग की सीमा से (लाल रेखाओं से) जोड़ते हैं।

अब h_3 लें। जैसे h_2, h_1 के गैर-लाल भाग की चार जुड़ी हुई छोटे पैमाने की प्रतियों से बना था, वैसे ही h_3, h_2 के गैर-लाल भाग की चार छोटे पैमाने की प्रतियों (काले रंग में खींची गईं) से बनता है, जिन्हें फिर (हरी रेखाओं से) परस्पर और अंत में (लाल रेखाओं से) वर्ग की सीमा से जोड़ा जाता है।



अब हमें h_n से h_{n+1} परिभाषित करने का सामान्य प्रतिरूप दिखता है। अंततः हम इन क्रमागत फलनों h_1, h_2, ... की बिंदुवार सीमा लेकर *स्वयं* वक्र h परिभाषित करते हैं। अर्थात् प्रत्येक $x \in \mathrm{S}$ के लिए:

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

अब हम दिखाते हैं कि यह वक्र अंतरिक्ष की पूर्ति करता है। जब हम वक्र h_n खींचते हैं, तो S पर $2^n \times 2^n$ जाल रखते हैं। पाइथागोरस के प्रमेय से प्रत्येक जाल-खाने के विकर्ण की लंबाई है:

$$\sqrt{\left(1/2^n\right)^2 + \left(1/2^n\right)^2} = 2^{(\frac{1}{2}-n)}$$

और स्पष्टतः h_n प्रत्येक जाल-खाने से होकर गुजरता है। अतः S का प्रत्येक बिंदु h_n के किसी बिंदु से *अधिकतम* $2^{(\frac{1}{2}-n)}$ दूरी पर है। अब h को फलनों h_1, h_2, h_3, ... की सीमा के रूप में परिभाषित किया गया है। इसलिए किसी भी बिंदु की h से अधिकतम दूरी इससे दी जाती है:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{(\frac{1}{2}-n)} = 0.$$

अर्थात् S का प्रत्येक बिंदु h से 0 दूरी पर है। दूसरे शब्दों में S का प्रत्येक बिंदु वक्र *पर* स्थित है। अतः h अंतरिक्ष की पूर्ति करता है!

यह दिखाना शेष है कि h वास्तव में एक *वक्र* है। इसे दिखाने के लिए हमें संकल्पना परिभाषित करनी होगी। आधुनिक परिभाषा 1887 में जॉर्डन की दी हुई परिभाषा पर आधारित है (अर्थात् पहला अंतरिक्ष-पूर्ति वक्र दिए जाने से केवल कुछ वर्ष पहले की):

परिभाषा 76.2. वक्र, L से $\mathbb{R}^2$ में एक सतत प्रतिचित्रण है।

यह काफ़ी अंतर्ज्ञान-सुलभ है: अंतर्ज्ञानतः वक्र एक "सुचारु" प्रतिचित्रण है जो किसी विहित रेखा को समतल $\mathbb{R}^2$ पर ले जाता है। हमारा फलन h वास्तव में L से $\mathbb{R}^2$ में प्रतिचित्रण है। अतः हमें केवल दिखाना है कि h सतत है। हमने खंड 76.2 में ε/δ संकेतन से सांतत्य परिभाषित किया था। साधारण भाषा में हम यह स्थापित करना चाहते हैं: *यदि*

आप S में कोई बिंदु p और परिशुद्धता का कोई इच्छित स्तर ε निर्दिष्ट करें, तो हम L का ऐसा खुला खंड खोज सकते हैं कि उस खुले खंड में कोई भी x दिए जाने पर $h(x)$, p से ε के भीतर हो।

अतः मान लें कि आपने p और ε निर्दिष्ट किए हैं। इसका अर्थ वस्तुतः S पर केंद्र p और त्रिज्या ε वाला वृत्त खींचना है। (वृत्त S के किनारे के बाहर निकल सकता है, किंतु इससे कोई अंतर नहीं पड़ता।) अब याद करें कि फलन h_n का वर्णन करते समय हमने S पर $2^n \times 2^n$ जाल खींचा था। स्पष्ट है कि ε कितना भी छोटा हो, कोई ऐसा n होता है कि S पर $2^n \times 2^n$ जाल का कोई एक खाना केंद्र p और त्रिज्या ε वाले वृत्त के पूर्णतः भीतर स्थित हो।

अतः वह n लें और I, L का वह सबसे बड़ा खुला भाग हो जिसे h_n पूरी तरह संबद्ध जाल-खाने में प्रतिचित्रित करता है। (स्पष्ट है कि (a, b) अस्तित्व में है, क्योंकि हम पहले ही बता चुके हैं कि h_n, $2^n \times 2^n$ जाल के प्रत्येक खाने से होकर गुजरता है।) अब इतना दिखाना पर्याप्त है कि जब भी $x \in I$, बिंदु $h(x)$ उसी जाल-खाने में स्थित होता है। और *यह* दिखाने के लिए इतना दिखाना पर्याप्त है कि किसी भी $m > n$ के लिए $h_m(x)$ उसी जाल-खाने में है। किंतु यह स्पष्ट है। यदि हम देखें कि $m > n$ के लिए h_m के साथ क्या होता है, तो पाते हैं कि इकाई अंतराल का ठीक "वही भाग" उसी जाल-खाने में प्रतिचित्रित होता है; बस हम उसे उस क्षेत्र में उत्तरोत्तर अधिक खींचे और लहरदार ढंग से प्रतिचित्रित करते हैं।

खण्ड XVIII

संदर्भ

इस भाग में पाठ्यपुस्तक के परिशिष्टों में सम्मिलित करने के लिए वर्णमालाओं, संकेतनों, परिभाषाओं, नियमों आदि की विविध सूचियाँ संकलित हैं।

अध्याय 77

यूनानी वर्णमाला

अल्फ़ा	α	A	न्यू	ν	N
बीटा	β	B	क्साइ	ξ	Ξ
गामा	γ	Γ	ओमिक्रॉन	o	O
डेल्टा	δ	Δ	पाई	π	Π
एप्सिलॉन	ε	E	रो	ρ	P
ज़ीटा	ζ	Z	सिग्मा	σ	Σ
ईटा	η	H	टाउ	τ	T
थीटा	θ	Θ	अप्सिलॉन	υ	Υ
आयोटा	ι	I	फ़ाई	φ	Φ
कप्पा	κ	K	काई	χ	X
लैम्ब्डा	λ	Λ	साई	ψ	Ψ
म्यू	μ	M	ओमेगा	ω	Ω

अध्याय 78

फ़्राक्टूर वर्णमाला

A	𝔄	a	𝔞	N	𝔑	n	𝔫
B	𝔅	b	𝔟	O	𝔒	o	𝔬
C	ℭ	c	𝔠	P	𝔓	p	𝔭
D	𝔇	d	𝔡	Q	𝔔	q	𝔮
E	𝔈	e	𝔢	R	ℜ	r	𝔯
F	𝔉	f	𝔣	S	𝔖	s	𝔰
G	𝔊	g	𝔤	T	𝔗	t	𝔱
H	ℌ	h	𝔥	U	𝔘	u	𝔲
I	ℑ	i	𝔦	V	𝔙	v	𝔳
J	𝔍	j	𝔧	W	𝔚	w	𝔴
K	𝔎	k	𝔨	X	𝔛	x	𝔵
L	𝔏	l	𝔩	Y	𝔜	y	𝔶
M	𝔐	m	𝔪	Z	ℨ	z	𝔷

आगे प्रमाण सिद्धांत का स्रोत में उपलब्ध प्रारूप पूरा दिया गया है। स्रोत की संपादकीय चेतावनियाँ मूल परियोजना की स्थिति बताती हैं; मुख्य पीडीएफ़ से बाहर होने का उनका उल्लेख इस हिंदी संस्करण पर लागू नहीं होता। प्रारूप में चिह्नित अपूर्णता और प्रयोगात्मकता को अनुवाद ने समाप्त मान नहीं लिया है।

खण्ड XIX

प्रमाण सिद्धांत

प्रमाण सिद्धांत की सामग्री अपूर्ण और प्रयोगात्मक है तथा अभी मुख्य पीडीएफ़ निर्माण में सम्मिलित नहीं है।

अध्याय 79

अनुक्रम कलन

79.1 परिचय

अनुक्रम कलन ऐसी प्रमाण प्रणालियाँ हैं जिन्हें 1930 के दशक में गेर्हार्ड जेन्ट्सेन ने प्रस्तुत किया था। उनका उद्देश्य वस्तुओं को सिद्ध करने की व्यावहारिक विधि देना उतना नहीं था। इसके बजाय जेन्ट्सेन ने उनका उपयोग प्रमाण की संभावित संरचना और उनके गुणधर्मों के बारे में कुछ परिणाम सिद्ध करने के लिए किया। प्रमाण सिद्धांत का सरोकार ठीक इसी प्रकार के प्रश्नों से है।

नाम से ही स्पष्ट है कि अनुक्रम कलन सूत्रों पर नहीं, बल्कि *अनुक्रमों* पर काम करते हैं। अनुक्रम, सूत्रों के दो अनुक्रमों या बहुसमुच्चयों का युग्म होता है। जेन्ट्सेन की मूल प्रणालियों (**LK** और **LJ**) में अनुक्रमों का उपयोग हुआ था; अब प्रमाण सिद्धांतकार बहुसमुच्चयों का उपयोग करना पसंद करते हैं। बहुसमुच्चय, समुच्चय जैसा होता है, बस उसमें कोई अवयव एक से अधिक बार आ सकता है। फिर भी, समुच्चयों की तरह इसमें भी अवयव का क्रम महत्त्वपूर्ण नहीं होता। अतः व्यंजक $\{\varphi, \varphi, \psi\}$ और $\{\varphi, \psi, \varphi\}$ एक ही बहुसमुच्चय बताते हैं, किंतु वह बहुसमुच्चय $\{\varphi, \psi\}$ और $\{\varphi, \varphi, \psi, \psi\}$ से भिन्न है, क्योंकि बाद वाले बहुसमुच्चयों में φ और ψ की संख्याएँ पहले वाले से भिन्न हैं।

प्रमाण सिद्धांत में परंपरागत रूप से सूत्रों के बहुसमुच्चय बड़े यूनानी अक्षरों से लिखे जाते हैं। इसलिए जब हम Γ, Δ, Π, Λ या Θ लिखते हैं, तो उनसे आशय उस तर्क के सूत्रों के बहुसमुच्चयों से होता है जिस पर हम काम कर रहे हैं। परंपरागत रूप से प्रमाण सिद्धांतकार $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ लिखने के बजाय दोनों घटकों को अनुक्रम-चिह्न से अलग करते हैं; हम $\Rightarrow$ का उपयोग करेंगे।

परिभाषा 79.1 (अनुक्रम). *अनुक्रम* इस रूप का व्यंजक है:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

जहाँ Γ और Δ, सूत्रों के सीमित (संभवतः रिक्त) बहुसमुच्चय हैं। Γ को *पूर्वपक्ष* और Δ को *अनुवर्ती* कहते हैं।

मान लें कि γ, Γ के सूत्रों का संयोजन है (रिक्त संयोजन को $\top$ मानते हुए), और θ, Δ के सूत्रों का वियोजन है (रिक्त वियोजन को $\bot$ मानते हुए)। तब अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में) सत्य है यदि और केवल यदि $\gamma \to \theta$ सत्य है। चिरसम्मत तर्क में यह कहने के बराबर है कि या तो Γ का कोई सूत्र असत्य है, अथवा Δ का कोई सूत्र सत्य है।

यदि Γ, सूत्रों का बहुसमुच्चय है, तो Γ में φ जोड़ने से मिले परिणाम को हम Γ, φ (या φ, Γ) लिखते हैं। यदि Δ भी सूत्रों का बहुसमुच्चय है, तो Γ, Δ दोनों अनुक्रमों का बहुसमुच्चय-संघ है—यदि Γ में φ की *बहुलता* n है (अर्थात उसमें φ की n प्रतियाँ हैं) और Δ में उसकी बहुलता m है, तो Γ, Δ में φ की बहुलता $n + m$ है। यदि अनुक्रम के किसी एक ओर का बहुसमुच्चय रिक्त है, तो हम प्रायः वहाँ कुछ नहीं लिखते। उदाहरणतः, $\Rightarrow \varphi$ ऐसा अनुक्रम है जिसका पूर्वपक्ष रिक्त है और जिसके अनुवर्ती में φ की बहुलता 1 है।

अनुक्रम कलन में प्रमाण, अनुक्रमों का एक वृक्ष होता है, जिसमें सबसे ऊपर के (अथवा आरंभिक) अनुक्रम विचाराधीन प्रणाली की अभिगृहीतियाँ होते हैं; और यदि कोई अनुक्रम एक या दो अन्य अनुक्रमों के नीचे है, तो वह प्रणाली के किसी निगमन नियम द्वारा उनसे सही ढंग से प्राप्त होना चाहिए। हम पहले चिरसम्मत तर्क की दो भिन्न अनुक्रम

अभिगृहीतियाँ

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

संरचनात्मक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{CL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{CR}$$

तार्किक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\to\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 79.1: **G1c** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ और Δ, सूत्रों के बहुसमुच्चय हैं।

अभिगृहीतियाँ

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

तार्किक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\to\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \forall x\, \varphi(x) \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 79.2: **G3c** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ और Δ, सूत्रों के बहुसमुच्चय हैं। अभिगृहीतियों में सूत्र χ परमाण्विक होना चाहिए।

प्रणालियों, **G1c** और **G3c**, पर विचार करेंगे। उनकी अभिगृहीतियाँ और नियम सारणियाँ 79.1 और 79.2 में दिए गए हैं। (जेन्ट्सेन की मूल प्रणाली **LK** का वर्णन अध्याय 19 में है।)

इन प्रणालियों में सूक्ष्म अंतर हैं, जिनके कारण इनके प्रमाण-सैद्धांतिक गुणधर्म भी अलग हैं। **G1c** में $\varphi \Rightarrow \varphi$ अभिगृहीतियाँ हैं, जिनमें कोई अन्य सूत्र अनुमत नहीं है। **G3c** में $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ रूप की अभिगृहीतियाँ हैं, जिनके Γ और Δ में मनमाने "पार्श्व" सूत्रों आ सकते हैं, किंतु दोनों ओर आने वाला सूत्र χ *परमाण्विक* होना चाहिए। **G1c** में $\wedge$L और $\vee$R नियमों के दो-दो रूप हैं, जबकि **G3c** में प्रत्येक का केवल एक रूप है। और **G1c** में "संकुचन" (CL, CR) तथा "दुर्बलीकरण" (WL, WR) नामक अतिरिक्त "संरचनात्मक नियम" हैं।

प्रणालियाँ **G1c** और **G3c**, चिरसम्मत तर्क के लिए निर्दोष और पूर्ण हैं। दूसरे शब्दों में, इन प्रणालियों में सिद्ध-योग्य प्रत्येक अनुक्रम हर संरचना में सत्य है, और हर संरचना में सत्य प्रत्येक अनुक्रम का प्रमाण है। अतः किसी अनुक्रम का प्रमाण है *या नहीं*, इस प्रश्न का उत्तर तर्क की अन्य विधियों (जैसे निदर्श सिद्धांत की विधियों) से भी दिया जा सकता है। और चूँकि दोनों प्रणालियाँ ठीक उन्हीं अनुक्रमों को सिद्ध करती हैं जो हर संरचना में सत्य हैं, इसलिए विशेषतः वे समान अनुक्रम सिद्ध करती हैं।

फिर भी, प्रमाण सिद्धांत का सरोकार केवल इससे नहीं है कि कोई वस्तु *सिद्ध की जा सकती है या नहीं*, बल्कि इससे भी है कि उसे *कैसे* सिद्ध किया जाता है। प्रमाण सिद्धांतकार ऐसे प्रश्न देखते हैं: "क्या किसी नियम से हमेशा बचा जा सकता है?", "क्या इस नियम को प्रणाली में जोड़ा जा सकता है, बिना किसी नए अनुक्रम को सिद्ध करने योग्य बनाए?", या "क्या एक प्रणाली के प्रमाण को दूसरी प्रणाली के प्रमाण में बदला जा सकता है?" यदि ऐसे प्रश्न का उत्तर "हाँ" है, तो इस तथ्य का प्रमाण प्रायः प्रमाण की जटिलता पर आगमन से, या समतुल्यतः प्रमाण की संरचना पर

आगमन से दिया जाता है। इससे केवल तथ्य का प्रमाण ही नहीं मिलता (जैसे, यदि **G1c** कोई अनुक्रम सिद्ध करता है तो **G3c** भी वही अनुक्रम सिद्ध करता है), बल्कि एक प्रक्रिया भी मिलती है (जैसे **G1c** के प्रमाण को **G3c** के प्रमाण में बदलने की प्रक्रिया)।

प्रमाण सिद्धांत का एक केंद्रीय परिणाम *कट-विलोपन प्रमेय* है। यह दिखाता है कि हम कट नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\text{Cut}$$

को अनुक्रम प्रणालियों में जोड़ सकते हैं, बिना यह बदले कि कौन-से अनुक्रम सिद्ध-योग्य हैं। इसके अतिरिक्त, प्रमाण एक ऐसी विधि देता है जो **G1c** (या **G3c**) के नियमों के साथ Cut का उपयोग करने वाले किसी भी प्रमाण को ऐसे प्रमाण में बदल देती है जो केवल **G1c** (या **G3c**) के नियमों का उपयोग करता है। दूसरे शब्दों में, यह प्रक्रिया Cut नियम का उपयोग करने वाले प्रमाण से उस नियम का "विलोपन" करती है; इसी से इसका नाम आया है।

79.2 नियम और प्रमाण

हम कुछ परिभाषाएँ देकर और कुछ पारिभाषिक शब्द निश्चित करके आरंभ करते हैं।

उदाहरण के लिए **G3c** के उन दो नियमों पर विचार करें जो φ और ψ वाले अनुक्रमों से $\varphi \wedge \psi$ वाले अनुक्रमों को सिद्ध करने देते हैं:

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{R}$$

रेखा के ऊपर के अनुक्रमों को *आधार-वाक्य* और रेखा के नीचे के अनुक्रम को *निष्कर्ष* कहते हैं। प्रत्येक नियम में Γ और Δ के सूत्रों को *प्रसंग*, अथवा *पार्श्व सूत्रों*, कहते हैं। निष्कर्ष में जो सूत्र प्रसंग का भाग नहीं है उसे *प्रमुख* सूत्र, और आधार-वाक्यों में प्रसंग के बाहर के सूत्रों को *सक्रिय* (अथवा *सहायक*) सूत्रों कहते हैं।

परिमाणक नियम कुछ अधिक जटिल हैं। उदाहरणतः **G1c** में $\forall$ के नियम हैं:

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\text{R}$$

$\forall$L नियम में सक्रिय सूत्र $\varphi(t)$ है, जहाँ t कोई बंद पद, अर्थात चरों से रहित पद, है। ऐसा निगमन सही है—अर्थात वह योजनाबद्ध नियम $\forall$L से मेल खाता है—यदि कोई सूत्र φ, कोई चर x और कोई बंद पद t ऐसे हैं कि निष्कर्ष का प्रमुख सूत्र $\forall x\, \varphi$ और आधार-वाक्य का सक्रिय सूत्र $\varphi[t/x]$ है। $\forall$R नियम इसी प्रकार काम करता है, बस किसी भी पद t के बदले आधार-वाक्य का सक्रिय सूत्र $\varphi[a/x]$ होना चाहिए, जहाँ a कोई अचर है। इस अचर को $\forall$R निगमन का *आइगेनचर* कहते हैं। निगमन तभी सही है जब नीचे वाले अनुक्रम में a न आए, अर्थात a, Γ, Δ या φ में न आए। इसे *आइगेनचर प्रतिबंध* कहते हैं।

G1c और **G3c** जैसी अनुक्रम प्रणालियों में ऐसे योजनाबद्ध रूप से निर्दिष्ट नियमों का संग्रह और कुछ (वे भी योजनाबद्ध रूप से निर्दिष्ट) अनुक्रम होते हैं जिन्हें अभिगृहीतियाँ माना जाता है। ऐसी प्रणाली में प्रमाण, अनुक्रमों के सीमित वृक्ष हैं जो निगमन नियमों का उपयोग करके अभिगृहीतियों से आगमनतः उत्पन्न होते हैं। प्रत्येक पत्ता अभिगृहीति है और प्रत्येक अन्य अनुक्रम उसके ठीक ऊपर के अनुक्रमों से प्रणाली के किसी निगमन नियम द्वारा मिलता है।

परिभाषा 79.2. किसी अनुक्रम प्रणाली में *प्रमाण*, निम्न प्रकार आगमनतः परिभाषित अनुक्रमों के सीमित वृक्ष हैं:

1. प्रत्येक अभिगृहीति प्रमाण है।
2. यदि π_1, अनुक्रम S_1 पर समाप्त होने वाला प्रमाण है और S, एक आधार-वाक्य वाले नियम R द्वारा S_1 से मिलने वाला अनुक्रम है, तो

$$\begin{array}{c} \vdots\,\pi_1 \\ S_1 \\ \hline S \end{array} R$$

प्रमाण है।

3. यदि π_1 और π_2, क्रमशः अनुक्रमों S_1 और S_2 पर समाप्त होने वाले प्रमाण हैं और S, दो आधार-वाक्यों वाले नियम R द्वारा S_1 और S_2 से मिलने वाला अनुक्रम है, तो

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ S_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ S_2\end{array}}{S}\,R$$

प्रमाण है।

परिभाषा 79.2, प्रमाण को अनुक्रमों के वृक्षों के रूप में परिभाषित करता है। हम इन वृक्षों को "ऊपर की ओर" बढ़ता हुआ समझते हैं। वृक्ष के सबसे ऊपरी (पत्ता) नोड अभिगृहीतियाँ हैं और उन्हें *आरंभिक अनुक्रम* कहते हैं। सबसे नीचे वाले अनुक्रम को *अंतिम अनुक्रम* कहते हैं। यदि π, अंतिम अनुक्रम S वाला प्रमाण है, तो हम $\pi \vdash S$ भी लिखते हैं। यदि किसी अनुक्रम S का प्रमाण है, तो हम $\vdash S$ लिखते हैं; कभी-कभी $\vdash$ चिह्न की बाईं ओर वह प्रणाली भी दिखाते हैं जिसमें प्रमाण है, जैसे **G1c** $\vdash \varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$। आरंभिक अनुक्रमों को छोड़कर प्रमाण का प्रत्येक अनुक्रम किसी नियम R द्वारा किए गए निगमन का *निष्कर्ष* है। प्रमाण में किसी अनुक्रम के ठीक ऊपर के एक या दो अनुक्रमों (अर्थात उस नोड के जनकों) को निगमन के *आधार-वाक्य* कहते हैं।

प्रमाण की आगमनात्मक रचना में उपयोग हुए प्रमाण को उसके *उप-प्रमाण* कहते हैं। किसी निगमन के आधार-वाक्यों पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण को उस निगमन के *निकटस्थ उप-प्रमाण* कहते हैं।

प्रायः प्रमाण की जटिलता को किसी प्राकृतिक संख्या से मापना आवश्यक होता है। हम प्रमाण में अनुक्रमों की संख्या मात्र गिन सकते हैं, किंतु अक्सर प्रमाण की ऊँचाई अधिक उपयोगी माप है: यह अंतिम अनुक्रम और किसी आरंभिक अनुक्रम के बीच अनुक्रमों की अधिकतम संख्या है। हम इसकी आगमनात्मक परिभाषा भी दे सकते हैं।

परिभाषा 79.3. प्रमाण π की *ऊँचाई* $\mathrm{ht}(\pi)$ इस प्रकार आगमनतः परिभाषित है।

1. यदि π में केवल एक अभिगृहीति है, तो $\mathrm{ht}(\pi) = 0$।
2. यदि π एक आधार-वाक्य वाले ऐसे निगमन पर समाप्त होता है जिसका निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 है, तो $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + 1$।
3. यदि π दो आधार-वाक्यों वाले ऐसे निगमन पर समाप्त होता है जिसके निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 और π_2 हैं, तो $\mathrm{ht}(\pi) = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$.

यदि अनुक्रम S का ऊँचाई $\leq n$ वाला प्रमाण है, तो हम $\vdash_n S$ लिखते हैं।

उदाहरण 79.4. **G3c** में $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ रूप का हर अनुक्रम अभिगृहीति है, जहाँ χ परमाण्विक होना चाहिए। मान लें कि θ और α परमाण्विक वाक्य हैं। तब $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$ और $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$, अभिगृहीति $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ के दृष्टांत हैं। उदाहरणतः यदि $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ में $\chi \equiv \alpha$, $\Gamma = \{\theta\}$ और $\Delta = \emptyset$ लें, तो ठीक अनुक्रम $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ मिलता है। (याद रखें कि हम बहु*समुच्चयों* से काम कर रहे हैं, इसलिए $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ और $\alpha, \theta \Rightarrow \theta$ एक ही अनुक्रम हैं।)

चूँकि $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$, **G3c** की किसी अभिगृहीति का दृष्टांत है, वह अपने आप में **G3c** का प्रमाण माना जाता है; और परिभाषा 79.2(1) से $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ भी। इन्हें π_1 और π_2 कहें। (3) से हम इन दोनों प्रमाण को लेकर दो आधार-वाक्यों वाले नियम $\wedge$R से नया प्रमाण (π_3) बना सकते हैं:

$$\dfrac{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha}\,\wedge\mathrm{R}$$

π_3 से फिर हमें यह प्रमाण π_4 मिलता है:

$$\pi_3\left\{\dfrac{\dfrac{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha}\,\wedge\mathrm{R}}{\theta \wedge \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha}\,\wedge\mathrm{L}\right\}\pi_4$$

इसके लिए एक आधार-वाक्य वाले नियम $\wedge$L का उपयोग हुआ है (परिभाषा 79.2(2) का उपयोग करके)। π_4 के अंतिम निगमन का निकटस्थ उप-प्रमाण π_3 है। $\wedge$R निगमन के निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 और π_2 हैं। π_4 के उप-प्रमाण में π_1, π_2, π_3 और स्वयं π_4, सभी हैं। हमारे पास $\mathrm{ht}(\pi_1) = \mathrm{ht}(\pi_2) = 0$, $\mathrm{ht}(\pi_3) = 1$ और $\mathrm{ht}(\pi_4) = 2$ हैं। हमने दिखाया है कि किन्हीं भी परमाण्विक θ और α के लिए **G3c** $\vdash_4 \theta \wedge \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha$।

79.3 प्रमाणों के उदाहरण

अनुक्रमों के प्रमाण देने के लिए सामान्यतः अंतिम अनुक्रम से ऊपर की ओर काम करना सुविधाजनक होता है: उसमें किसी सूत्र को सक्रिय सूत्र चुनें, अनुक्रम के ऊपर अनुरूपी नियम के आधार-वाक्य लिखें, और अभिगृहीतियों तक पहुँचने तक यही प्रक्रिया दोहराएँ। उदाहरणतः, मान लें कि हमें यह अनुक्रम सिद्ध करना है:

$$(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)$$

$\chi \to (\theta \to \alpha)$ पर विचार करें: यह $\varphi \to \psi$ रूप का है और अनुक्रम की दाईं ओर आता है। पूरे अनुक्रम का **G1c** के $\to$R नियम से मिलान करने पर,

$$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

यह संकेत मिलता है कि हमें $\Gamma = \{\chi \to (\theta \to \alpha)\}$, $\Delta = \emptyset$, $\varphi \equiv \chi$ और $\psi \equiv \theta \to \alpha$ लेना चाहिए। अतः प्रमाण का अंतिम निगमन यह हो सकता है:

$$\dfrac{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

यदि हम $\theta \to \alpha$ को सक्रिय सूत्र मानकर यही विचार दोहराएँ, तो मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

अब हमें $(\chi \wedge \theta) \to \alpha$ पर ध्यान देकर **G1c** का $\to$L नियम उपयोग करना है,

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \to\mathrm{L}$$

इससे हमें मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta \qquad \theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha} \to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

ऊपर के बाएँ अनुक्रम में सूत्र $\chi \wedge \theta$ को प्रमुख मानकर $\wedge$R नियम उपयोग करने पर हमें मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \qquad \theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta} \wedge\mathrm{R} \qquad \theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha} \to\mathrm{R}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

यहाँ तक सब ठीक है। ध्यान दें कि हमने जो कुछ किया वह **G3c** में भी काम करता है, क्योंकि अब तक उपयोग किए गए नियम **G1c** और **G3c** में समान हैं। हम प्रमाण के ऐसे खंड पर पहुँचे हैं जिसमें ऊपर के सभी अनुक्रमों में बाईं और दाईं ओर समान सूत्र है। किंतु वे अभी ठीक-ठीक अभिगृहीतियाँ नहीं हैं।

G1c में हमें ऊपर के अनुक्रमों के प्रमाण, $\varphi \Rightarrow \varphi$ रूप की अभिगृहीतियों से देने होंगे। दुर्बलीकरण नियमों से यह सरलता से होता है; उदाहरणतः सबसे ऊपर बाएँ अनुक्रम $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$ को इस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है:

कुल मिलाकर, **G1c** में हमारा प्रमाण इस प्रकार दिखता है:

$$
\begin{array}{cccc}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi}\,\mathrm{WR} & \dfrac{\dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}\,\mathrm{WR} & \dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\chi, \alpha \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}\,\mathrm{WL} & \\
\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}\,\wedge\mathrm{R} & & & \to\mathrm{L} \\
\dfrac{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}\,\to\mathrm{R} & & & \\
\dfrac{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)}\,\to\mathrm{R} & & &
\end{array}
$$

इस प्रमाण की संरचना (विशेषतः इसकी ऊँचाई) इस बात पर निर्भर नहीं करती कि सूत्रों χ, θ और α क्या हैं। ऊपर के प्रमाण में इन चिह्नों को किन्हीं भी सूत्रों से बदल सकते हैं और परिणाम फिर भी **G1c** का प्रमाण रहेगा। **G1c** का यह प्रमाण *योजनाबद्ध* है।

G3c में अभिगृहीतियाँ $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ रूप के अनुक्रम हैं, जहाँ φ परमाण्विक होना चाहिए। अतः यद्यपि $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$, **G3c** की अभिगृहीति जैसा दिखता है ($\Gamma = \{\theta\}$; $\Delta = \{\alpha\}$), वह *वास्तव में* तभी अभिगृहीति है जब χ सचमुच परमाण्विक हो। हमारा प्रमाण-खंड **G3c** में तभी पूरा प्रमाण है जब χ, θ और α परमाण्विक सूत्रों हों।

यद्यपि कठोर अर्थ में हमने यह नहीं दिखाया कि

$$\textbf{G1c} \vdash (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha),$$

फिर भी व्यवहार में हमें इतना ही करना है (और हम इतना ही कर सकते हैं)। कारण यह है कि $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ रूप का हर अनुक्रम **G3c** में सिद्ध किया जा सकता है, भले ही स्वयं φ परमाण्विक न हो। इसे हम φ की गहराई $\mathrm{dp}(\varphi)$ पर आगमन द्वारा दिखा सकते हैं।

परिभाषा 79.5. सूत्र की *गहराई* $\mathrm{dp}(\varphi)$ इस प्रकार परिभाषित है:

1. यदि φ परमाण्विक है, तो $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$।
2. यदि $\varphi \equiv \neg\psi$, $\varphi \equiv \forall x\, A$, अथवा $\varphi \equiv \exists x\, A$, तो $\mathrm{dp}(\varphi) = \mathrm{dp}(\psi) + 1$।
3. यदि $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, $(\psi \vee \chi)$, अथवा $(\psi \to \chi)$, तो $\mathrm{dp}(\varphi) = \max(\mathrm{dp}(\psi), \mathrm{dp}(\chi)) + 1$।

यह सिद्ध करना कठिन नहीं कि किसी भी पद t के लिए $\mathrm{dp}(A(x)) = \mathrm{dp}(A(t))$। हमारे लिए महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि किसी भी नियम में प्रमुख सूत्र की गहराई सक्रिय सूत्रों की गहराई से सदैव अधिक होती है। उदाहरणतः हमारे पास है:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dp}(P(x)) = \mathrm{dp}(P(a)) &= 0, \\
\mathrm{dp}(\forall x\, P(x)) &= 1, \\
\mathrm{dp}((\forall x\, P(x) \to P(a))) &= \max(1, 0) + 1 = 2.
\end{aligned}
$$

इसका उपयोग हम $\mathrm{dp}(\varphi)$ पर आगमन द्वारा कुछ परिणाम सिद्ध करने में कर सकते हैं, जैसे निम्न परिणाम।

प्रतिज्ञप्ति 79.6. *किसी भी φ के लिए $\varphi \Rightarrow \varphi$ का* **G1c** *में ऐसा प्रमाण है जिसमें सभी अभिगृहीतियाँ परमाण्विक हैं।*

प्रमाण. $\mathrm{dp}(\varphi)$ पर आगमन द्वारा। यदि $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$, तो φ परमाण्विक है और $\varphi \Rightarrow \varphi$ पहले से अपेक्षित रूप का **G1c**-प्रमाण है। यदि $\mathrm{dp}(\varphi) > 0$, तो φ कम गहराई वाले सूत्रों से बना है, जैसे $\varphi \equiv \neg\psi$, $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, अथवा $\varphi \equiv \forall x\, A(x)$। आगमन परिकल्पना है कि $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\varphi)$ वाले सभी θ के लिए परमाण्विक अभिगृहीतियों से **G1c** $\vdash \theta \Rightarrow \theta$।

यदि $\varphi \equiv \neg\psi$, तो $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$ और आगमन परिकल्पना से परमाण्विक अभिगृहीतियों से $\psi \Rightarrow \psi$ का **G1c** में कोई प्रमाण π_1 है। इसे हम $\neg\psi \Rightarrow \neg\psi$ के प्रमाण तक इस प्रकार बढ़ा सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\neg\psi, \psi \;\Rightarrow\;}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}$$

यदि $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, तो $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$ और $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\varphi)$। आगमन परिकल्पना से परमाण्विक अभिगृहीतियों से $\psi \Rightarrow \psi$ और $\chi \Rightarrow \chi$ के **G1c** में प्रमाण π_1 और π_2 हैं। इन्हें हम $\psi \wedge \chi \Rightarrow \psi \wedge \chi$ के प्रमाण तक इस प्रकार बढ़ा सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi, \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\psi, \chi, \;\Rightarrow\; \psi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \chi, \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\psi, \chi, \;\Rightarrow\; \chi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \;\Rightarrow\; \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\mathrm{CL}$$

अब मान लें कि $\varphi \equiv \forall x\, B(x)$। ऐसा अचर c लें जो $\forall x\, B(x)$ में न आता हो। तब $\mathrm{dp}(B(c)) = \mathrm{dp}(\psi(x)) < \mathrm{dp}(\varphi)$, और आगमन परिकल्पना से परमाण्विक अभिगृहीतियों से $\psi(c) \Rightarrow \psi(c)$ का **G1c** में कोई प्रमाण π_1 है। इसे हम $\forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$ के प्रमाण तक इस प्रकार बढ़ा सकते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c) \;\Rightarrow\; \psi(c)\end{array}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \psi(c)}\,\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

शेष स्थितियाँ अभ्यास के लिए छोड़ी गई हैं। □

अपने प्रयोजन के लिए, $\varphi \equiv \neg\psi$ की स्थिति में हम यह प्रमाण भी उपयोग कर सकते थे:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\;\Rightarrow\; \psi, \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{L}$$

फिर भी, कुछ अनुक्रम प्रणालियों में यह काम नहीं करता। अंतःप्रज्ञात्मक अनुक्रम कलन **G1i**, **G1c** जैसा है, बस उसमें हर अनुक्रम की दाईं ओर अधिकतम एक सूत्र होने का प्रतिबंध है। यदि $\Delta = \emptyset$, तो पहला प्रमाण **G1i** में भी प्रमाण होगा, किंतु दूसरा नहीं, क्योंकि एक अनुक्रम की दाईं ओर ψ और $\neg\psi$ दोनों हैं।

ध्यान दें कि $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ की स्थिति में **G1c** में भी हम नियमों का वैकल्पिक क्रम उपयोग नहीं कर सकते थे। निम्न *प्रमाण नहीं है*:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c) \Rightarrow \psi(c)\end{array}}{\psi(c) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\forall x\, \psi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{L}$$

क्योंकि $\forall$R का आइगेनचर प्रतिबंध भंग होता है।

प्रतिज्ञप्ति 79.7. *$\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ रूप का प्रत्येक अनुक्रम (φ का परमाण्विक होना आवश्यक नहीं) **G3c** में सिद्ध किया जा सकता है।*

प्रमाण. प्रमाण प्रतिज्ञप्ति 79.6 के प्रमाण से बहुत मिलता-जुलता है, किंतु हमें आगमन परिकल्पना में सावधान रहना होगा। $n = \mathrm{dp}(\varphi) = 0$ की स्थिति फिर सरल है। यदि $n = 0$, तो φ परमाण्विक है, और $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, **G3c** की अभिगृहीति है।

अब मान लें कि $n > 0$। फिर हम स्थितियाँ अलग करते हैं। आगमन परिकल्पना है: ऐसे सभी D के लिए जिनमें $\mathrm{dp}(\theta) < n$, और सभी Π तथा Λ के लिए, **G3c** $\vdash \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$। यहाँ $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ की स्थिति है। हम आगमन परिकल्पना का दो बार उपयोग करते हैं: एक बार $\theta = \psi$, $\Pi = \chi, \Gamma$ और $\Lambda = \Delta$ के लिए, जिससे $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ का प्रमाण π_1 मिलता है; और एक बार $\theta = \chi$, $\Pi = \psi, \Lambda$ और $\Lambda = \Delta$ के लिए, जिससे $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ का प्रमाण π_2 मिलता है। यह $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ का प्रमाण है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ के लिए ऐसा अचर चुनें जो $\forall x\, \psi(x), \Gamma$ या Δ में न आता हो। $\theta = \psi(c)$, $\Pi = \forall x\, \psi(x), \Gamma$ और $\Lambda = \Delta$ के लिए आगमन परिकल्पना लागू करें। इससे $\psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ का प्रमाण π_1 मिलता है, जिससे हमें मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)\end{array}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}\,\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

जिस प्रकार हमने c चुना है, उससे $\forall$R का आइगेनचर प्रतिबंध संतुष्ट होता है। □

79.4 नियमों की व्याख्या

अनुक्रम की व्याख्या याद करें: अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ किसी संरचना $\mathfrak{M}$ में तब सत्य है जब या तो कम-से-कम एक $\varphi \in \Gamma$ असत्य हो, या कम-से-कम एक $\varphi \in \Delta$ सत्य हो। हम **G3c** के तार्किक नियमों को उनके प्रमुख सूत्रों की सत्यता-शर्तों का संहिताकरण मान सकते हैं। $\rightarrow$R पर विचार करें। इसका प्रमुख सूत्र $\varphi \rightarrow \psi$ है। यह तब सत्य है जब या तो φ असत्य

हो अथवा ψ सत्य हो। अतः अनुक्रम $\Rightarrow \varphi \to \psi$ सत्य है यदि और केवल यदि $\varphi \Rightarrow \psi$ सत्य है। इन अनुक्रमों के पूर्वपक्षों और अनुवर्तियों में प्रसंग के सूत्रों Γ, Δ जोड़ने पर ठीक $\to$R नियम का निष्कर्ष और आधार-वाक्य मिलते हैं। $\to$L की स्थिति समान है। $\varphi \to \psi$ तब असत्य है जब φ सत्य और ψ असत्य हो। अतः $\varphi \to \psi \Rightarrow$ सत्य है यदि और केवल यदि $\Rightarrow \varphi$ और $\psi \Rightarrow$ दोनों सत्य हों। $\to$L का निष्कर्ष उसके आधार-वाक्यों के संयोजन के समतुल्य है। यह ढाँचा सुनिश्चित करता है कि **G3c** के नियम निर्दोष हैं (यदि सभी आधार-वाक्य सत्य हैं तो निष्कर्ष सत्य है)। वे पूर्णता भी सुनिश्चित करते हैं।

वास्तव में, किसी भी सत्यता-फलनीय संयोजक की सत्यता-शर्तें इस प्रकार अनुक्रमों के समुच्चय के रूप में बताई जा सकती हैं। यह इस तथ्य से मिलता है कि चिरसम्मत तर्क के प्रत्येक सत्यता-फलन को संयोजक प्रसामान्य रूप के सूत्र से बताया जा सकता है: परमाण्विक और निषेधित परमाण्विक सूत्रों के वियोजनों का संयोजन। उदाहरणतः $\varphi \oplus \psi$ को तब और केवल तब सत्य मानें जब φ और ψ में से ठीक एक सत्य हो, अर्थात "अपवर्जी अथवा"। तब $\varphi \oplus \psi$ सत्य है यदि और केवल यदि $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ सत्य है, और वह असत्य है यदि $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$ सत्य है। अतः हम $\oplus$ के लिए ये अनुक्रम-कलन नियम प्रस्तुत कर सकते हैं:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi \qquad \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \oplus \psi} \oplus\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\varphi \oplus \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \oplus\mathrm{R}$$

और ये नियम भी निर्दोष और पूर्ण होंगे। इनके निष्कर्ष तब और केवल तब सत्य हैं जब सभी आधार-वाक्य सत्य हों।

G3c में प्रत्येक संयोजक और परिमाणक के ठीक दो नियम हैं: एक वाम नियम और एक दक्षिण नियम। किंतु **G1c** में दो $\wedge$L और दो $\vee$R नियम हैं। इसका कारण यह है कि जेन्ट्सेन की मूल प्रणाली **LK**, जिसके आधार पर **G1c** बना है, का एक महत्त्वपूर्ण अचिरसम्मत तर्क, अर्थात अंतःप्रज्ञात्मक तर्क, के लिए **LJ** नामक रूपांतर था। अंतःप्रज्ञात्मक तर्क के लिए निर्दोष और पूर्ण प्रणाली पाने के लिए **LJ** के हर अनुक्रम के अनुवर्ती में अधिकतम एक सूत्र आने का प्रतिबंध है। इससे **G3c** का $\vee$R नियम उपयोग करना असंभव हो जाता है, क्योंकि उसके आधार-वाक्य के अनुवर्ती में φ और ψ दोनों हैं। इसलिए जेन्ट्सेन ने **LJ** के लिए $\vee$R नियमों का एक युग्म इस्तेमाल किया और **LK** के लिए भी वही रखा। इसी प्रकार अंतःप्रज्ञात्मक रूपांतर **G1i**, बस ऐसा **G1c** है जिसमें सभी अनुवर्तियों में अधिकतम एक सूत्र आने का प्रतिबंध है। (**G3c** का भी एक अंतःप्रज्ञात्मक रूपांतर है, किंतु उसके कुछ नियम **G3c** के अनुरूपी नियमों से भिन्न हैं। उदाहरणतः उसमें भी $\vee$R नियमों का युग्म है।)

यह देखना सरल है कि **G1c** के संरचनात्मक नियम निर्दोष हैं। उदाहरणतः, यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ में दाईं ओर कोई सत्य सूत्र अथवा बाईं ओर कोई असत्य सूत्र है, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ में भी वही है; φ सत्य है या असत्य, इससे कोई अंतर नहीं पड़ता। अतः यदि WR का आधार-वाक्य सत्य है तो उसका निष्कर्ष भी सत्य है। ध्यान दें कि यहाँ इसका विलोम सत्य नहीं है। निष्कर्ष φ के सत्य होने के कारण सत्य हो सकता है, और तब आधार-वाक्य के सत्य होने की प्रत्याभूति नहीं है।

संरचनात्मक नियम आखिर क्यों रखें? उदाहरणतः $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ को सिद्ध करने के लिए संकुचन (CR, CL) चाहिए। यदि आप $\varphi \Rightarrow \varphi$ से आरंभ करें, तो पहले $\neg$R द्वारा $\Rightarrow \varphi, \neg\varphi$ मिलता है। फिर आप $\vee$R के दोनों रूप क्रमशः उपयोग कर सकते हैं: एक बार $\neg\varphi$ से $\varphi \vee \neg\varphi$ पाने के लिए, और एक बार φ से $\varphi \vee \neg\varphi$ पाने के लिए। इससे $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi$ मिलता है। अतः **G1c** में $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ पाने के लिए प्रमाण में समान सूत्र की दो उपस्थितियों को "संकुचित" करने की क्षमता चाहिए:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}$$

वास्तव में ऐसे वैध अनुक्रम हैं जिन्हें आप दुर्बलीकरण या संकुचन के बिना **G1c** में सिद्ध नहीं कर सकते। उदाहरणतः **G1c** में अनुक्रम $\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi$ का प्रमाण, $\to$R पर समाप्त होना चाहिए (क्योंकि केवल $\psi \to \varphi$ ही प्रमुख हो सकता है), और इसके लिए आधार-वाक्य $\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$ चाहिए। इसे अभिगृहीति $\varphi \Rightarrow \varphi$ से पाने के लिए WL चाहिए:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{WL}}{\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi}\,\to\mathrm{R}$$

G3c में संकुचन और दुर्बलीकरण नियमों की बिल्कुल आवश्यकता नहीं है। दुर्बलीकरण अभिगृहीतियों में ही अंतर्निहित है। दो आधार-वाक्यों वाले नियमों में प्रसंग Γ, Δ की दोनों प्रतियों को एक में मिलाकर संकुचन से अधिकांशतः बचा जा सकता है। **G1c** और **G3c** दोनों में ऐसे "प्रसंग साझा करने वाले" नियम हैं। एक आधार-वाक्य वाले नियमों में संकुचन केवल $\vee$R, $\wedge$L, $\exists$R और $\forall$L के लिए चाहिए। **G3c** में इन नियमों के रूप संकुचन को पूर्णतः अनावश्यक बना देते हैं। एक प्रणाली **G2c** (सारणी 79.3 देखें) है, जिसमें दो आधार-वाक्यों वाले नियमों के प्रसंग स्वतंत्र हैं। **G2c** में संकुचन **G1c** से भी अधिक महत्त्वपूर्ण है।

79.5 नियमित प्रमाण और प्रतिस्थापन

परिमाणकों के नियमों में कुछ जटिलताएँ उन "आइगेनचर प्रतिबंधों" के कारण आती हैं जो $\exists$L और $\forall$R नियमों पर लागू होते हैं। इन जटिलताओं में से अधिकांश को यह सुनिश्चित करके सँभाला जा सकता है कि इन निगमनों में अचर a का पुनः उपयोग कभी न हो। निम्न परिभाषा प्रस्तुत करें।

परिभाषा 79.8. **G1c** या **G3c** में प्रमाण π *नियमित* है यदि

1. कोई आइगेनचर a, एक से अधिक $\exists$L या $\forall$R निगमन के आइगेनचर के रूप में उपयोग नहीं होता, और
2. यदि a किसी $\exists$L या $\forall$R निगमन का आइगेनचर है, तो वह π में केवल उस निगमन के ऊपर आता है।

सहायक प्रमेय 79.9. *यदि π नियमित है, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होता है, c ऐसा अचर है जिसका π में आइगेनचर के रूप में उपयोग नहीं हुआ, और t ऐसा पद है जिसमें π का कोई आइगेनचर नहीं है, तो π में c की प्रत्येक उपस्थिति को t से बदलकर मिला $\pi[t/c]$ एक नियमित प्रमाण है। $\pi[t/c]$ का अंतिम अनुक्रम $\Gamma[t/c] \Rightarrow \Delta[t/c]$ है, जहाँ $\Gamma[t/c] = \{\varphi(t) : \varphi(c) \in \Gamma\}$।*

प्रमाण. $\mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन द्वारा। यदि $\mathrm{ht}(\pi) = 0$, तो वह केवल एक अभिगृहीति है। तब $\pi[t/c]$ भी अभिगृहीति है, क्योंकि उसमें कोई भी सूत्र $\varphi(c)$ बदलकर $\varphi(t)$ बन जाता है।

यदि $\mathrm{ht}(\pi) > 0$, तो हम π के अंतिम निगमन के अनुसार स्थितियाँ अलग करते हैं। संरचनात्मक नियमों (**G1c** में) और प्रतिज्ञप्तिपरक संयोजकों के तार्किक नियमों की स्थितियाँ सरल हैं और अभ्यास के लिए छोड़ी जाती हैं। हम उन स्थितियों पर विचार करते हैं जहाँ π किसी परिमाणक निगमन पर समाप्त होता है।

1. यदि अंतिम निगमन $\forall$R है, तो π का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi' \\ \Gamma(c) \Rightarrow \Delta'(c), \varphi(a,c)\end{array}}{\Gamma(c) \Rightarrow \Delta'(c), \forall x\, \varphi(x,c)}\ \forall\mathrm{R}$$

आगमन परिकल्पना से $\pi'[t/c]$, $\Gamma(t) \Rightarrow \Delta'(t), \varphi(a,t)$ का नियमित प्रमाण है। चूँकि a, π का आइगेनचर है, इसलिए a, t में नहीं आता। अतः $\pi[t/c]$ का अंतिम निगमन,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c] \\ \Gamma(t) \Rightarrow \Delta'(t), \varphi(a,t)\end{array}}{\Gamma(t) \Rightarrow \Delta'(t), \forall x\, \varphi(x,t)}\ \forall\mathrm{R}$$

सही है: निष्कर्ष में a नहीं आता।

अभिगृहीतियाँ

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

संरचनात्मक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{CL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{CR}$$

तार्किक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\varphi \vee \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,\vee\mathrm{L} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi \qquad \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\varphi \to \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,\to\mathrm{L} \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 79.3: **G2c** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ और Δ, सूत्रों के बहुसमुच्चय हैं।

2. यदि **G3c** में अंतिम निगमन $\forall$L है, तो π का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi' \\ \varphi(s(c),c), \forall x\,\varphi(x,c), \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,c), \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c)}\;\forall\mathrm{R}$$

आगमन परिकल्पना से $\pi'[t/c]$, $\varphi(s(t),t), \forall x\,\varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)$ का नियमित प्रमाण है। $\pi[t/c]$ का अंतिम निगमन,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c] \\ \varphi(s(t),t), \forall x\,\varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)}\;\forall\mathrm{R}$$

सही है। **G1c** में $\forall$L की स्थिति समान, किंतु थोड़ी कम जटिल है।

3. अंतिम निगमन $\exists$R या $\exists$L है: अभ्यास।

प्रत्येक स्थिति में हमने किसी नियमित प्रमाण के अंत में एक अनुक्रम जोड़ा (या दो आधार-वाक्यों वाले नियमों की स्थिति में दो नियमित प्रमाण के अंत में)। नया अनुक्रम π के अंतिम अनुक्रम से केवल इतना भिन्न है कि c को पद t से बदला गया है। इसके अतिरिक्त, π और $\pi[t/c]$ के आइगेनचर समान हैं। चूँकि मान लिया गया था कि t में π का कोई आइगेनचर नहीं है, नया अंतिम अनुक्रम $\pi[t/c]$ का कोई आइगेनचर नहीं रखता। फलतः $\pi[t/c]$ नियमित है। □

प्रतिज्ञप्ति 79.10. *यदि π, **G1c** या **G3c** में प्रमाण है, तो समान संरचना (विशेषतः समान ऊँचाई) वाला कोई नियमित प्रमाण π' है, जो π से केवल आइगेनचरों के प्रतिस्थापन में भिन्न है।*

प्रमाण. केवल इस प्रमाण के लिए, π के किसी आइगेनचर निगमन को *स्वच्छ* कहें यदि उसका आइगेनचर न तो किसी अन्य निगमन का आइगेनचर हो, न ही उस निगमन के निकटस्थ उप-प्रमाण के बाहर π में कहीं आए; अन्यथा उसे *अस्वच्छ* कहें। मान लें कि π में अस्वच्छ आइगेनचर निगमनों की संख्या n है। हम n पर आगमन द्वारा दिखाते हैं कि π को अपेक्षित नियमित प्रमाण π' में बदला जा सकता है। यदि $n = 0$, तो π के सभी आइगेनचर निगमन स्वच्छ हैं, अतः π नियमित है और कुछ सिद्ध नहीं करना। अन्यथा सबसे ऊपर का कोई आइगेनचर निगमन चुनें, मान लें $\forall$R। उस पर समाप्त होने वाले π के उप-प्रमाण π_1 का रूप है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2 \\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(c)\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\,\varphi(x)}\;\forall\mathrm{R}$$

ध्यान दें कि c आइगेनचर है, इसलिए वह Γ, Δ या $\forall x\,\varphi(x)$ में नहीं आता। प्रमाण π_2 नियमित है, क्योंकि उसमें कोई आइगेनचर निगमन है ही नहीं। a ऐसा अचर हो जो π में न आता हो। सहायक प्रमेय 79.9 से $\pi_2[a/c], \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(a)$ का नियमित प्रमाण है, जिस पर हम $\forall$R लागू कर सकते हैं। यदि हम π में π_1 को प्रमाण π_1' से बदल दें,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2[a/c] \\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(a)\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\,\varphi(x)}\;\forall\mathrm{R}$$

तो हमने एक अस्वच्छ आइगेनचर निगमन को स्वच्छ निगमन से बदल दिया है, और एकमात्र अंतर आइगेनचर c को a से बदलना है। परिणामी प्रमाण में $n - 1$ अस्वच्छ आइगेनचर निगमन हैं, और परिणाम आगमन परिकल्पना से मिलता है। □

हम अभी सिद्ध किए गए प्रतिज्ञान का स्पष्टतः आह्वान नहीं करेंगे, किंतु मानेंगे कि विचाराधीन सभी प्रमाण नियमित हैं—यदि वे नियमित न हों, तो हम आइगेनचर बदलकर उन्हें सदैव नियमित बना सकते हैं।

79.6 ग्राह्य और व्युत्पाद्य नियम

प्रमाण सिद्धांत के अनेक परिणाम इस प्रश्न से संबद्ध परिणामों से सरोकार रखते हैं—या उनका उपयोग करते हैं—कि किसी विशिष्ट नियम का उपयोग करके सिद्ध की जा सकने वाली हर वस्तु को क्या उस नियम के बिना भी सिद्ध किया जा सकता है। कट-विलोपन प्रमेय इसका सबसे प्रसिद्ध उदाहरण है। वह दिखाता है कि Cut सहित किसी अनुक्रम प्रणाली के नियमों से सिद्ध किए जा सकने वाले प्रत्येक अनुक्रम को Cutके बिना भी सिद्ध किया जा सकता है। इस प्रकार का गुणधर्म इतना महत्त्वपूर्ण है कि इसका अपना नाम है।

परिभाषा 79.11. कोई नियम R किसी अनुक्रम प्रणाली में *ग्राह्य* है यदि उस प्रणाली और नियम R को साथ लेकर सिद्ध किए जा सकने वाले प्रत्येक अनुक्रम को R के बिना भी सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 79.12. नियम $\wedge$L के **G1c** और **G3c** में अलग-अलग रूप हैं। **G1c** में इसके दो रूप हैं: एक में प्रमुख सूत्र $\varphi \wedge \psi$ का वाम संयोज्य φ आधार-वाक्य में है, और दूसरे में दक्षिण संयोज्य ψ:

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L}_1 \qquad \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L}_2$$

इसके विपरीत, **G3c** में केवल एक नियम है:

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L}_3$$

अब हम पूछ सकते हैं, "क्या **G3c** का नियम $\wedge\mathrm{L}_3$, **G1c** में ग्राह्य है?" हाँ: $\wedge\mathrm{L}_3$ का उपयोग करने वाले किसी भी निगमन का हम केवल **G1c** के नियमों से सीधे अनुकरण कर सकते हैं। $\wedge\mathrm{L}_1$ और $\wedge\mathrm{L}_2$ के अतिरिक्त हमें संरचनात्मक नियम CL भी चाहिए:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L}_1}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L}_2}{\varphi \wedge \psi \Gamma \Rightarrow \Delta} \mathrm{CL}$$

एक नियम वाले निगमन का अन्य नियमों से अनुकरण करना किसी नियम को ग्राह्य दिखाने का एक ढंग है। किंतु यही एकमात्र ढंग नहीं है, और कुछ नियम ग्राह्य तो हैं पर इस प्रकार अनुकरणीय नहीं। जिन नियमों का ऐसा अनुकरण हो सके उन्हें *व्युत्पाद्य* कहते हैं।

परिभाषा 79.13. कोई नियम R,

$$\frac{S_1 \qquad \dots \qquad S_n}{S} R$$

किसी प्रणाली में *व्युत्पाद्य* कहलाता है यदि प्रणाली के नियमों और अभिगृहीतियों के साथ S_1, ..., S_n रूप के अतिरिक्त आरंभिक अनुक्रमों का उपयोग करके अनुक्रम S का कोई योजनाबद्ध प्रमाण हो।

उदाहरण 79.12 में दिया प्रमाण दिखाता है कि $\wedge\mathrm{L}_3$, **G1c** में व्युत्पाद्य नियम है, क्योंकि वह केवल **G1c** के नियमों से, $\wedge\mathrm{L}_3$ के आधार-वाक्यों को आरंभिक अनुक्रम मानकर, उसके निष्कर्ष का योजनाबद्ध प्रमाण है। (उसमें **G1c** की कोई अभिगृहीति उपयोग नहीं हुई।)

प्रतिज्ञप्ति 79.14. **G3c** *के नियम* $\wedge$L *और* $\vee$R, **G1c** *में व्युत्पाद्य हैं।*

प्रमाण. $\wedge$L का प्रमाण उदाहरण 79.12 में दिया है। $\vee$R का प्रमाण अभ्यास के लिए छोड़ा गया है। □

उदाहरण 79.15. **G1c** का नियम WR,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

G3c में ग्राह्य है। प्रमाण का विचार सरल है: मान लें कि **G3c** में आधार-वाक्य $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण π है। π के हर अनुक्रम के अनुवर्ती में सूत्र φ जोड़ दें। अभिगृहीतियाँ अभिगृहीतियाँ रहती हैं; सही निगमन सही निगमन रहते हैं। नए प्रमाण का अंतिम-सूत्र $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ है।

किंतु नियम WR, **G3c** में व्युत्पाद्य नहीं है। मान लें कि वह है, अर्थात **G3c** की केवल अभिगृहीतियों और नियमों तथा संभवतः अतिरिक्त आरंभिक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ का कोई प्रमाण मिल सकता है। यदि यह प्रमाण, जैसा WR के व्युत्पाद्य होने के लिए आवश्यक है, पूर्णतः योजनाबद्ध हो, तो Γ और Δ हटाकर हम उसे $\Rightarrow \varphi$ के प्रमाण में बदल सकते हैं। इससे अतिरिक्त आरंभिक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$, रिक्त अनुक्रम $\Rightarrow$ में बदल जाएगा। चूँकि रिक्त अनुक्रम में एक भी सूत्र नहीं है, जबकि **G3c** के हर नियम को अपने आधार-वाक्यों में कम-से-कम एक सक्रिय सूत्र चाहिए, रिक्त अनुक्रम इस योजनाबद्ध प्रमाण के किसी निगमन का आधार-वाक्य नहीं हो सकता। फलतः प्रमाण तभी योजनाबद्ध हो सकता है जब वह वास्तव में अतिरिक्त अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का आरंभिक अनुक्रम के रूप में उपयोग न करे। दूसरे शब्दों में, वह केवल **G3c** की अभिगृहीतियों और नियमों से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ की योजनाबद्ध व्युत्पत्ति होगा, और हमने दिखा दिया होगा कि इस रूप के हर अनुक्रम का **G3c** में प्रमाण है। किंतु यह असंभव है, क्योंकि **G3c** निर्दोष है और इसलिए केवल उन अनुक्रमों को सिद्ध कर सकता है जो हर संरचना में सत्य हैं। $\Gamma = \Delta = \emptyset$ और $\varphi \equiv \bot$ लेने पर **G3c** को, उदाहरणतः, अनुक्रम $\Rightarrow \bot$ को सिद्ध करना होगा, जो वह नहीं करता।

आइए इस परिणाम का एक सुंदर आगमनात्मक प्रमाण दें कि दुर्बलीकरण **G3c** में ग्राह्य नियम है। वास्तव में, जैसा सहज तर्क दिखाता है, थोड़ा अधिक प्रबल परिणाम सत्य है: π के हर अनुक्रम की दाईं ओर φ जोड़ने से हम प्रमाण की संरचना नहीं बदलते, विशेषतः उसकी ऊँचाई नहीं बढ़ाते। यह महत्त्वपूर्ण है, इसलिए इसकी अपनी परिभाषा उचित है।

परिभाषा 79.16. कोई नियम R,

$$\frac{S_1 \qquad \dots \qquad S_n}{S}\,R$$

किसी प्रणाली में *ऊँचाई-संरक्षक ग्राह्य* (या *ऊँ.सं.-ग्राह्य*) है यदि $i = 1, \dots, n$ के लिए जब भी $\vdash_{h_i} S_i$ हो, तब $m = \max(h_1, \dots, h_n)$ के साथ $\vdash_m S$ हो।

ध्यान दें कि किसी नियम के ऊँचाई-संरक्षक ग्राह्य होने के लिए इतना पर्याप्त है कि जब भी आधार-वाक्यों S_i के ऊँचाई $h_i = \mathrm{ht}(\pi_i)$ वाले प्रमाण π_i हों, तब निष्कर्ष का कोई ऐसा प्रमाण π हो जिसकी ऊँचाई $\mathrm{ht}(\pi)$, h_i के अधिकतम से बड़ी न हो। विशेषतः, यदि केवल एक आधार-वाक्य S_1 है, तो $\mathrm{ht}(\pi) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ पर्याप्त है। WR और WL की स्थिति में वास्तव में $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1)$ है, किंतु यह आवश्यक नहीं।

प्रतिज्ञप्ति 79.17. **G1c** *के नियम* WR *और* WL, **G3c** *में ऊँचाई-संरक्षक ग्राह्य हैं।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि यदि ऊँचाई $\mathrm{ht}(\pi) = n$ वाले प्रमाण π के साथ **G3c** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ का कोई **G3c**-प्रमाण π' है जिसके लिए $\mathrm{ht}(\pi') = n$। हम इसे n पर आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं। यदि $n = 0$, तो π केवल अभिगृहीति $\Gamma \Rightarrow \Delta$ है (अर्थात कोई परमाण्विक χ, Γ और Δ दोनों में आता है), और $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ भी अभिगृहीति है। यदि $n = \mathrm{ht}(\pi) > 0$, तो प्रमाण π का कोई अंतिम निगमन है। उपयोग हुए नियम के अनुसार स्थितियाँ अलग करते हैं। केवल एक उदाहरण दें: मान लें कि अंतिम निगमन $\wedge$R था। तब $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$, और अंतिम निगमन के निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 और π_2 के अंतिम अनुक्रम क्रमशः $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi$ हैं। दूसरे शब्दों में, π ऐसा दिखता है:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

हमारे पास $n = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$ भी है। अतः $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$ और $\mathrm{ht}(\pi_2) < n$, इसलिए आगमन परिकल्पना लागू होती है: $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$ के प्रमाण π_1' और π_2' हैं। $\wedge$R नियम से हमें $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ का प्रमाण π' मिलता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi} \wedge\mathrm{R}$$

हमारे पास $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi_1'), \mathrm{ht}(\pi_2')) + 1 = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1 = \mathrm{ht}(\pi)$. □

प्रतिज्ञप्ति 79.17 अत्यंत उपयोगी है। इसके बार-बार अनुप्रयोग के लिए हम एक संकेतन प्रस्तुत करेंगे: यदि π, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण है, तो $\pi[\Pi \Rightarrow \Lambda]$, बाईं ओर Π के सभी सूत्रों के साथ दुर्बलीकरण की ग्राह्यता और दाईं ओर Λ के सभी सूत्रों के साथ दुर्बलीकरण की ग्राह्यता लागू करने से मिला परिणाम है। यह $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ का प्रमाण है।

79.7 नियमों की प्रतिलोम्यता

परिभाषा 79.18. कोई नियम R,

$$\dfrac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S} R$$

किसी प्रणाली में *प्रतिलोम्य* है यदि जब भी $\vdash S$ हो, तब $i = 1, \dots, n$ के लिए $\vdash_{h_i} S_i$ हो। वह किसी प्रणाली में *ऊँचाई-संरक्षक प्रतिलोम्य* (या *ऊँ.सं.-प्रतिलोम्य*) है यदि जब भी $\vdash_n S$ हो, तब $i = 1, \dots, n$ के लिए $\vdash_n S_i$ हो।

सहायक प्रमेय 79.19. *$\neg$, $\wedge$, $\vee$ और $\rightarrow$ के लिए* **G3c** *के नियम ऊँचाई-संरक्षक प्रतिलोम्य हैं, अर्थात:*

1. $\neg$R: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$, *तो* **G3c** $\vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *।*
2. $\neg$L: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta$, *तो* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ *।*
3. $\wedge$R: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$, *तो* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ *और* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ *।*
4. $\wedge$L: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$, *तो* **G3c** $\vdash_n \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *।*
5. $\vee$R: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$, *तो* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ *।*
6. $\vee$L: *यदि* **G3c** $\vdash_n \varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, *तो* **G3c** $\vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *और* **G3c** $\vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *।*
7. $\rightarrow$R: *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$, *तो* **G3c** $\vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ *।*
8. $\rightarrow$L: *यदि* **G3c** $\vdash_n \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, *तो* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ *और* **G3c** $\vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *।*

प्रमाण. हमें दिखाना है कि **G3c** के किसी भी नियम R के लिए, यदि R के निष्कर्ष S का कोई प्रमाण π है, तो R के आधार-वाक्यों S_i के प्रमाण π_i भी हैं, जहाँ $\mathrm{ht}(\pi_i) \leq \mathrm{ht}(\pi)$। नियम $\wedge$L पर विचार करें: मान लें कि $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ रूप के अंतिम अनुक्रम वाला कोई प्रमाण π है। हमें दिखाना है कि $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण π' है जिसके लिए $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$। इसे हम $n = \mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन से करते हैं।

यदि $n = 0$, तो π में केवल अभिगृहीति $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ है। **G3c** में अभिगृहीतियाँ $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ रूप की हैं, जहाँ χ परमाण्विक है। दूसरे शब्दों में, χ, $\varphi \wedge \psi$ नहीं हो सकता। यदि $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीति है, तो कोई परमाण्विक χ, Γ और Δ दोनों का अवयव होना चाहिए। किंतु तब $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ भी अभिगृहीति है, और हमें अपना प्रमाण π' मिल गया (जिसकी ऊँचाई भी 0 है)।

यदि $n > 0$, तो वह किसी निगमन पर समाप्त होता है। हमें n के लिए कथन सिद्ध करना है, किंतु हम मान सकते हैं कि वह ऊँचाई $< n$ के किसी भी प्रमाण के लिए सत्य है, प्रसंग भिन्न होने पर भी। दूसरे शब्दों में, किसी भी $k < n$ और किन्हीं Π तथा Λ के लिए, यदि $\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ का ऊँचाई k वाला प्रमाण है, तो $\varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ का ऊँचाई $\leq k$ वाला प्रमाण है।

दो स्थितियाँ हैं: बाईं ओर का $\varphi \wedge \psi$ या तो प्रमुख है, या नहीं। यदि वह प्रमुख है, तो अंतिम निगमन $\wedge$L है और निकटस्थ उप-प्रमाण π_1, $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होता है। इस स्थिति में परिणाम सत्य है क्योंकि $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$।

यदि $\varphi \wedge \psi$ प्रमुख नहीं है, तो कोई अन्य सूत्र प्रमुख है और $\varphi \wedge \psi$ अंतिम निगमन के प्रसंग में है। तब आगमन परिकल्पना अंतिम नियम R के निकटस्थ उप-प्रमाण पर लागू होती है, जिससे प्रमाण π_1' अथवा दो प्रमाण π_1' और π_2' मिलते हैं, जिनकी ऊँचाई, π के निकटस्थ उप-प्रमाण की ऊँचाई (या ऊँचाइयों) से अधिक नहीं। π_1' और π_2' के अंतिम अनुक्रमों में बाईं ओर के प्रसंग में $\varphi \wedge \psi$ के बदले φ, ψ हैं। प्रमाण π' पाने के लिए नियम R लागू करें। उदाहरणतः मान लें कि π, $\rightarrow$L पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma', \chi \rightarrow \theta \Rightarrow \Delta} \rightarrow\mathrm{L}$$

यहाँ बाईं ओर $\chi \rightarrow \theta$ प्रमुख है, और बाईं ओर का प्रसंग $\varphi \wedge \psi, \Gamma'$ है (अर्थात $\Gamma = \Gamma', \chi \rightarrow \theta$)। आगमन परिकल्पना से क्रमशः $\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi$ और $\varphi \wedge \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta$ के प्रमाण π_1' और π_2' मिलते हैं। ये दोनों अनुक्रम फिर $\rightarrow$L नियम के आधार-वाक्य बनकर π' दे सकते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \varphi, \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \psi, \Gamma', \chi \rightarrow \theta \Rightarrow \Delta} \rightarrow\mathrm{L}$$

हमारे पास

$$\mathrm{ht}(\pi) = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$$
$$\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi_1'), \mathrm{ht}(\pi_2')) + 1$$

परिभाषा से, और

$$\mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$$
$$\mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$$

आगमन परिकल्पना से। अतः

$$\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi). \qquad \square$$

सहायक प्रमेय 79.20. *नियम* $\forall$R *और* $\exists$L *निम्न अर्थ में ऊँचाई-संरक्षक प्रतिलोम्य हैं:*

1. *यदि* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)$, *तो* **G3c** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$; *और*
2. *यदि* **G3c** $\vdash_n \exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$, *तो* **G3c** $\vdash_n \varphi(c), \Gamma \Rightarrow \Delta$,

ऐसे प्रत्येक c *के लिए जो क्रमशः* Γ, Δ *और* $\forall x\, \varphi(x)$ *अथवा* $\exists x\, \varphi(x)$ *में न आता हो।*

प्रमाण. हम (1) दिखाते हैं और (2) अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। तर्क सहायक प्रमेय 79.19 के प्रमाण जैसा है। आगमन चरण में फिर दो स्थितियाँ हैं। जिसमें $\forall x\, \varphi(x)$ प्रमुख है वह स्थिति फिर शीघ्र पूरी होती है: अंतिम $\forall$R निगमन का आधार-वाक्य अपेक्षित रूप $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)$ का है, और उस पर समाप्त होने वाले निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 के लिए $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$। इसके अतिरिक्त, आइगेनचर प्रतिबंध से a, Γ, Δ या $\forall x\, \varphi(x)$ में नहीं आता। चूँकि हम π_1 को नियमित मान सकते हैं, इसलिए सहायक प्रमेय 79.9 से $\pi_1[c/a]$ समान ऊँचाई वाला $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$ का प्रमाण है।

दूसरी स्थिति में $\forall x\, \varphi(x)$ अंतिम निगमन में प्रमुख नहीं है; कोई अन्य सूत्र प्रमुख है। हम फिर उदाहरण के रूप में एक स्थिति देखते हैं। मान लें कि अंतिम निगमन $\wedge$R है। Δ का कोई सूत्र $\psi \wedge \chi$ रूप का है और प्रमुख है। प्रमाण π इस पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

जहाँ $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$। c ऐसा अचर हो जो Δ में न आता हो; तब स्पष्टतः वह Δ', ψ अथवा Δ', χ में भी नहीं आता। अतः आगमन परिकल्पना π_1 और π_2 पर लागू होती है; हमारे पास प्रमाण π_1' और π_2' हैं, जहाँ $\mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ और $\mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$। $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$ का अपेक्षित प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

जहाँ $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi_1'), \mathrm{ht}(\pi_2')) + 1 \leq \mathrm{ht}(\pi)$। □

सहायक प्रमेय 79.19, कट-विलोपन प्रमेय के प्रमाण में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। किंतु उसका उपयोग निम्न दिखाने के लिए भी हो सकता है:

प्रतिज्ञप्ति 79.21. **G1c** *के संकुचन नियम* CL *और* CR, **G3c** *में ऊँचाई-संरक्षक ग्राह्य हैं।*

प्रमाण. हम CR और CL के लिए एक साथ तर्क देते हैं। मान लें कि π, **G3c** में $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ अथवा $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण है। हमें दिखाना है कि क्रमशः $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ अथवा $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई **G3c**-प्रमाण π' भी है, जहाँ $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$। इसे हम $n = \mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन से करते हैं।

यदि $n = 0$, तो π केवल अभिगृहीति है। किंतु यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, **G3c** की अभिगृहीति है, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ भी है: या तो कोई परमाण्विक χ, Γ और Δ दोनों का अवयव है, या φ परमाण्विक और Γ का अवयव है। यही तर्क तब लागू होता है जब अंतिम अनुक्रम $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ हो।

यदि $n > 0$, तो π किसी नियम R पर समाप्त होता है। यदि φ इस अंतिम निगमन में प्रमुख नहीं है, तो हम π के निकटस्थ उप-प्रमाण पर आगमन परिकल्पना और परिणामी प्रमाण(s) पर वही नियम R लगाकर, सहायक प्रमेय 79.19 के प्रमाण की तरह प्रमाण π' पा सकते हैं। आगमन परिकल्पना यह है कि यदि $\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta, \theta$ अथवा $\theta, \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$ का ऊँचाई $k < n$ वाला प्रमाण है, तो क्रमशः $\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$ अथवा $\theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$ का ऊँचाई $\leq k$ वाला प्रमाण है। (ध्यान दें कि प्रसंग अथवा संकुचित सूत्र, Γ, Δ या φ से भिन्न होने पर भी आगमन परिकल्पना लागू होती है!)

उदाहरणतः मान लें कि R, $\wedge$R है और π इस पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

जहाँ $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$। आगमन परिकल्पना से क्रमशः $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$ के प्रमाण π_1' और π_2' मिलते हैं, जहाँ $\mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ और $\mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$। प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

यदि φ अंतिम निगमन में प्रमुख है, तो हम π के निकटस्थ उप-प्रमाण पर प्रतिलोमन प्रमेयिका (सहायक प्रमेय 79.19), फिर आगमन परिकल्पना और फिर नियम R लगाते हैं। उदाहरणतः मान लें कि π, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ सिद्ध करता है, $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ है और अंतिम निगमन में प्रमुख है। तब π इस प्रकार दिखता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \psi$ का प्रमाण π_1' पाने के लिए सहायक प्रमेय 79.19 को π_1 पर लगाएँ। (यह $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \psi$ का प्रमाण भी देता है, किंतु हमें उसकी आवश्यकता नहीं।) इसी प्रकार π_2 पर सहायक प्रमेय 79.19 लगाकर हमें $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \chi$ का प्रमाण π_2' मिलता है। क्योंकि $\wedge$R का प्रतिलोमन ऊँचाई-संरक्षक है, $\mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$ और $\mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2) < \mathrm{ht}(\pi)$। अतः आगमन परिकल्पना π_1' और π_2' पर लागू होती है: क्रमशः $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ के प्रमाण π_1'' और π_2'' हैं, जहाँ $\mathrm{ht}(\pi_1'') \leq \mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ और $\mathrm{ht}(\pi_2'') \leq \mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$। तब प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

जहाँ $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$।

जिन स्थितियों में सूत्र प्रमुख है, उनमें परिमाणक नियमों के लिए हमें विशेष सावधानी रखनी होगी।

मान लें कि $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ दाईं ओर प्रमुख है। तब π इस पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \forall x\, \psi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

सहायक प्रमेय 79.20 से ऐसे किसी भी c के लिए, जो $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \psi(a)$ में न आता हो, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c), \psi(a)$ का ऊँचाई $\leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ वाला कोई प्रमाण π_1' है। हम π_1' को नियमित मान सकते हैं; अतः सहायक प्रमेय 79.9 से प्रमाण $\pi_1'[a/c]$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a), \psi(a)$ का भी ऊँचाई $\leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ वाला प्रमाण है। अब आगमन परिकल्पना लागू होती है और हमें $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)$ का प्रमाण π_1'' देती है। π' पाने के लिए $\forall$R नियम लगाएँ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\ \forall\mathrm{R}$$

जहाँ $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$।

अब मान लें कि $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ है और दाईं ओर प्रमुख है। तब π इस प्रकार दिखता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x), \psi(t)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

आगमन परिकल्पना π_1 पर लागू होती है और $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi$ का प्रमाण π_1' है। (ध्यान दें कि यहाँ किसी प्रतिलोमन प्रमेयिका की आवश्यकता नहीं!) तब प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

जहाँ $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$। □

79.8 G1c और G3c के बीच रूपांतरण

हमने कहा था कि **G1c** और **G3c** दोनों चिरसम्मत तर्क के लिए निर्दोष और पूर्ण हैं, अर्थात प्रत्येक ठीक उन्हीं सभी अनुक्रमों को सिद्ध करता है जो हर संरचना में सत्य हैं। विशेषतः वे समान अनुक्रम सिद्ध करते हैं। अब हम इस तथ्य को निर्दोषता और पूर्णता प्रमेयों का चक्कर लगाए बिना, विशुद्ध प्रमाण-सैद्धांतिक ढंग से सिद्ध कर सकते हैं। ऐसा प्रमाण **G1c** के प्रमाण को **G3c** के प्रमाण में, और इसके विपरीत, बदलने के *रूपांतरण* देता है।

प्रतिज्ञप्ति 79.22. *यदि* **G1c** $\vdash S$, *तो* **G3c** $\vdash S$।

प्रमाण. हम दिखाते हैं कि यदि π, **G1c** में प्रमाण है, तो **G3c** में S का कोई प्रमाण π' है। इसे हम $n = \mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन द्वारा करते हैं।

यदि $n = 0$, तो π अभिगृहीति है। अभिगृहीति $\bot \Rightarrow$ भी **G3c** की अभिगृहीति है (प्रसंग Γ, Δ को रिक्त लें)। **G3c** में केवल परमाण्विक ही नहीं, मनमाने φ के साथ अभिगृहीतियाँ $\varphi \Rightarrow \varphi$ अनुमत हैं। किंतु हमने प्रतिज्ञप्ति 79.7 में सिद्ध किया कि ऐसे सभी अनुक्रम **G3c** में सिद्ध-योग्य हैं।

यदि $n > 0$, तो π किसी नियम R पर समाप्त होता है। आगमन परिकल्पना प्रत्याभूत करती है कि उस नियम के आधार-वाक्यों के **G3c** में प्रमाण हैं, अर्थात निकटस्थ उप-प्रमाण के **G3c** में रूपांतरण हैं। यदि नियम R भी **G3c** का नियम है, तो हम उसे आधार-वाक्यों के रूपांतरित प्रमाण पर लागू करते हैं। जो नियम **G3c** के भी नियम नहीं हैं, उन्हें हम पहले ही कम-से-कम ग्राह्य दिखा चुके हैं। अतः यदि नियम R $\wedge$L या $\vee$R था, तो प्रतिज्ञप्ति 79.14 लगाएँ। यदि वह दुर्बलीकरण नियम था, तो प्रतिज्ञप्ति 79.17 लगाएँ। यदि वह संकुचन नियम था, तो प्रतिज्ञप्ति 79.21 लगाएँ। □

प्रतिज्ञप्ति 79.23. *यदि* **G3c** $\vdash S$, *तो* **G1c** $\vdash S$।

प्रमाण. हम फिर S के प्रमाण π की ऊँचाई पर आगमन करते हैं। **G3c** की प्रत्येक अभिगृहीति को किसी अभिगृहीति तथा WL और WR नियमों के कई अनुप्रयोगों से **G1c** में सिद्ध किया जा सकता है:

$$\begin{array}{c}\chi \Rightarrow \chi\\ \vdots\,\mathrm{WL}\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \chi\\ \vdots\,\mathrm{WR}\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}\bot \Rightarrow\\ \vdots\,\mathrm{WL}\\ \bot, \Gamma \Rightarrow\\ \vdots\,\mathrm{WR}\\ \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$$

यदि π किसी नियम R पर समाप्त होता है, तो आगमन परिकल्पना आधार-वाक्यों के **G1c** में प्रमाण देती है, और हम उन प्रमाण पर वही नियम R लागू कर सकते हैं। अपवाद $\wedge$L और $\vee$R नियम हैं, जो **G1c** और **G3c** में भिन्न हैं। **G3c** के रूप **G1c** में इस प्रकार व्युत्पाद्य हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{CL} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \psi}\,\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, , \varphi \vee \psi, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\mathrm{CR}$$

□

प्रश्न

प्रश्न 79.1. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$, $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ और $\varphi \equiv \exists x\, B(x)$ की स्थितियाँ पूरा करके प्रतिज्ञप्ति 79.6 का प्रमाण पूर्ण करें।

प्रश्न 79.2. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ और $\varphi \equiv \exists x\, B(x)$ की स्थितियाँ पूरा करके प्रतिज्ञप्ति 79.7 का प्रमाण आगे बढ़ाएँ।

प्रश्न 79.3. मान लें कि $\varphi \downarrow \psi$ तब और केवल तब सत्य है जब न φ सत्य हो और न ψ ("NOR")। इसके **G3c** नियम क्या होंगे? (ऐसे दो अनुक्रम खोजें जो एक साथ तब और केवल तब सत्य हों जब $\varphi \downarrow \psi$ सत्य हो। इससे आपको $\downarrow$R नियम मिलेगा। फिर ऐसा एक अनुक्रम खोजें जो तब और केवल तब सत्य हो जब $\varphi \downarrow \psi$ असत्य हो। इससे आपको $\downarrow$L नियम मिलेगा।)

प्रश्न 79.4. दिखाएँ कि **G3c** का नियम $\vee$R, **G1c** में व्युत्पाद्य है।

प्रश्न 79.5. मान लें कि $\leftrightarrow$ कोई परिभाषित संक्रियक है: $\varphi \leftrightarrow \psi$, $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ का संक्षिप्त रूप है। दिखाएँ कि नियम

1. $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}\,\leftrightarrow\mathrm{L}$
2. $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}\,\leftrightarrow\mathrm{R}$

(क) **G1c** और (ख) **G3c** में व्युत्पाद्य हैं।

प्रश्न 79.6. $\to$R के लिए सहायक प्रमेय 79.19 का प्रमाण दें।

प्रश्न 79.7. CL के लिए प्रतिज्ञप्ति 79.21 के प्रमाण की रूपरेखा दें। $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ और $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ की स्थितियों का वर्णन करें।

प्रश्न 79.8. शेष परिमाणक स्थितियों, अर्थात जहाँ $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ और $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$, में CL के लिए प्रतिज्ञप्ति 79.21 के प्रमाण की रूपरेखा दें।

अध्याय 80

कट-विलोपन

80.1 परिचय

Cut नियम यह है

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \text{Cut}$$

(सूत्र φ को *कट सूत्र* कहते हैं।)

जेंट्सेन के मूल अनुक्रम कलन **LK** में Cut सम्मिलित था। जेंट्सेन का *हाउप्टज़ाट्स* ("मुख्य प्रमेय") कहता है कि **LK** में सिद्ध-योग्य प्रत्येक अनुक्रम Cut नियम का उपयोग किए बिना भी सिद्ध-योग्य है; अर्थात् **LK**-प्रमाणों से Cut का "विलोपन" किया जा सकता है। हमारी प्रणालियों **G1c** और **G3c** में Cutनहीं है, किंतु उनके लिए भी प्रश्न उठाया जा सकता है: क्या Cut तथा **G1c** (या **G3c**) के अन्य नियमों का उपयोग करने वाले प्रमाण से Cut हटाया जा सकता है? हमारी स्थापित शब्दावली में समतुल्य प्रश्न है: क्या Cut, **G1c** (या **G3c**) का ग्राह्य नियम है?

कट-विलोपन प्रमेय शायद प्रमाण सिद्धांत का सबसे महत्त्वपूर्ण और प्रसिद्ध परिणाम है। सर्वप्रथम यह स्थापित करता है कि **G1c** और **G3c** को ऐसे नियम की आवश्यकता नहीं है जो पहली दृष्टि में स्पष्टतः आवश्यक लग सकता है। जब आप वास्तविक प्रमाणों को औपचारिक रूप देने का प्रयास करेंगे, तो देखेंगे कि सहायक प्रमेयों के उपयोग से निपटने का कोई ढंग चाहिए। गणितज्ञ परिणाम सिद्ध करते हैं और फिर दूसरे परिणामों के प्रमाणों में उनका आह्वान करते हैं। अतः आप पहले परिणाम L (सहायक प्रमेय) के प्रमाण को अनुक्रम $\Rightarrow L$ के प्रमाण के रूप में औपचारिक कर सकते हैं। फिर दूसरे परिणाम R, जिसके प्रमाण में L का उपयोग है, को अनुक्रम $L \Rightarrow R$ के प्रमाण के रूप में औपचारिक करते हैं। आप कैसे जानेंगे कि R का प्रमाण, अर्थात् केवल $\Rightarrow R$ का प्रमाण, है? दोनों प्रमाण को मिलाने का कोई ढंग चाहिए, और Cut नियम ऐसा करने देता है।

हमने बताया कि **G1c** और **G3c** पूर्ण हैं, इसलिए वे हर उस अनुक्रम को सिद्ध करते हैं जिसे सिद्ध हो सकने की अपेक्षा होगी—सभी वैध अनुक्रमों को। इसे सीधे सिद्ध किया जा सकता है। किंतु जेंट्सेन के समय केवल अभिगृहीतीय व्युत्पत्ति प्रणालियों की पूर्णता ज्ञात थी। **LK** की पूर्णता दिखाने के लिए जेंट्सेन ने अभिगृहीतीय प्रणाली की व्युत्पत्तियाँ का **LK**-प्रमाण में अनुवाद दिया। इस अनुवाद में Cut का अनिवार्य उपयोग था। कट-विलोपन केवल चिरसम्मत तर्क का महत्त्वपूर्ण परिणाम नहीं है: अनेक अन्य तर्कों के भी अनुक्रम कलन हैं। कुछ तर्कों के अनुक्रम कलनों की पूर्णता का सीधा प्रमाण कठिन या असंभव है, इसलिए अन्य प्रणालियों से अनुवाद (Cutका उपयोग करके) ही पूर्णता दिखाने का एकमात्र मार्ग है। तब यह स्थापित करने के लिए प्रमाण-सैद्धांतिक ढंग से कट-विलोपन सिद्ध करना आवश्यक है कि Cut अनावश्यक है और Cut-विहीन प्रणाली पूर्ण है।

कट-विलोपन इसलिए भी महत्त्वपूर्ण है कि उसके अनुप्रयोग से अन्य स्वतंत्र रूप से रोचक परिणाम मिलते हैं। हम दो उदाहरणों—क्रेग अंतर्वेशन प्रमेय और हेरब्रांड प्रमेय—पर विचार करेंगे।

कट-विलोपन सिद्ध करने में प्रयुक्त विचार सामान्यतः यह दिखाते हैं कि Cut का उपयोग करने वाले प्रमाण को उसके बिना वाले प्रमाण में कैसे बदला जाए। ये रूपांतरण प्रायः "स्थानीय" होते हैं; अर्थात् हम किसी प्रमाण का एक भाग (सामान्यतः Cut अनुमान पर समाप्त होने वाला उप-प्रमाण) लेकर उसे उसी अनुक्रम के दूसरे उप-प्रमाण से बदलते हैं, जिसमें Cut अनुमान हटा दिया गया हो या अन्य अनुमानों से बदल दिया गया हो। ऐसे तर्क Cut वाले प्रमाण को

उसके बिना वाले प्रमाणों में बदलने की चरण-दर-चरण कलन-विधियाँ देते हैं। अनुप्रयोगों में कट-विलोपन प्रक्रियाओं के उपयोग पर इससे अधिक सूचना मिलती है। उदाहरणतः अंतर्वेशन प्रमेय के निदर्श-सैद्धांतिक प्रमाण इस रूप के हैं: "यदि $\varphi \to \psi$ वैध है तो कोई अंतर्वेशक विद्यमान है" (अभी इस बात को छोड़ दें कि अंतर्वेशक क्या है)। कट-विलोपन वाला प्रमाण-सैद्धांतिक तर्क ऐसी कलन-विधि देता है जो $\varphi \to \psi$ का प्रमाण लेकर अंतर्वेशक लौटाती है। निदर्श-सैद्धांतिक तर्क के विपरीत प्रमाण-सैद्धांतिक तर्क *रचनात्मक* है।

कट-विलोपन प्रमेय सिद्ध करने के दो लोकप्रिय ढंग हैं। एक (जेंट्सेन तक जाने वाला) दिखाता है कि प्रमाण के सबसे ऊपर के कट हटाए जा सकते हैं, और फिर ऐसे कटों को तब तक हटाता है जब तक कोई शेष न रहे। दूसरा (मूलतः श्यूटे और टेट का) किसी प्रमाण के सबसे जटिल कटों पर केंद्रित होता है और क्रमशः उन कटों को हटाता है जो इस अर्थ में महत्तम हैं कि किसी अन्य कट के कट सूत्र की गहराई अधिक नहीं है। दोनों के अपने लाभ और कमियाँ हैं। कुछ प्रणालियों में एक उपागम काम करता है जबकि दूसरे का कार्यान्वयन कठिन या असंभव भी होता है। इसलिए हम दोनों उपागमों का वर्णन करते हैं। हम **G3c** के लिए कट-विलोपन सिद्ध करेंगे। वास्तव में हम Cut का नहीं, बल्कि *प्रसंग-साझा कट* $\mathrm{Cut_{CS}}$का विलोपन दिखाएँगे:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut}$$

यदि कोई अनुक्रम कलन दुर्बलीकरण और संकुचन स्वीकार करता है (या तो **G1c** जैसे वास्तविक नियमों के रूप में या **G3c** जैसे ग्राह्य नियमों के रूप में), तो Cut, $\mathrm{Cut_{CS}}$का अनुकरण कर सकता है और इसका विपरीत भी। हम Cut के बजाय $\mathrm{Cut_{CS}}$ चुनते हैं, क्योंकि पहली कट-विलोपन युक्ति का $\mathrm{Cut_{CS}}$के लिए वर्णन सरल है और दूसरी युक्ति केवल $\mathrm{Cut_{CS}}$के लिए काम करती है।

80.2 सबसे ऊपर के कट हटाना

परिभाषा 80.1. किसी $\mathrm{Cut_{CS}}$ नियम पर समाप्त होने वाले प्रमाण π पर विचार करें,

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

जिसमें कोई अन्य $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान नहीं है। π की *कट ऊँचाई* $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + \mathrm{ht}(\pi_2)$ है। π की *कट कोटि* $\mathrm{cr}(\pi) = \mathrm{dp}(\varphi)$ है।

सहायक प्रमेय 80.2. $\mathrm{Cut_{CS}}$ *नियम* **G3c** *में ग्राह्य है। दूसरे शब्दों में, यदि* π *किसी एक* $\mathrm{Cut_{CS}}$ *पर समाप्त होने वाला और अन्यथा केवल* **G3c** *के नियमों का उपयोग करने वाला प्रमाण है, तो उसी अंतिम अनुक्रम का कोई प्रमाण* π', **G3c** *में है।*

प्रमाण. प्रमाण कट ऊँचाई और कोटि पर दोहरे आगमन से है। प्रमाण π निम्न पर समाप्त होता है:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

आगमन आधार: $\mathrm{ch}(\pi) = 0$ और $\mathrm{cr}(\pi) = 0$। चूँकि $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + \mathrm{ht}(\pi_2) = 0$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ और $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ दोनों अभिगृहीत हैं। दो स्थितियाँ हैं: (क) φ इनमें से किसी एक में प्रमुख नहीं है, या (ख) φ दोनों में प्रमुख है। नीचे हम दोनों स्थितियों में दिखाएँगे कि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत होना चाहिए (और इसके लिए आगमन परिकल्पना की आवश्यकता नहीं है)।

अब हम इस आधार पर अनेक संभावित स्थितियों में भेद करेंगे कि π_1 और π_2 अभिगृहीत हैं या किसी अनुमान पर समाप्त होते हैं, और उस अनुमान में φ प्रमुख है या नहीं। स्थितियाँ A और B आगमन आधार को समेटती हैं। आगमन चरण में हम $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ या $\mathrm{cr}(\pi) > 0$ (या दोनों) मानते हैं। हम आगमन परिकल्पना का उपयोग कर सकते हैं: किसी एक $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ पर समाप्त होने वाले ऐसे प्रमाण से अंतिम $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ हटाया जा सकता है जिसकी या तो कट कोटि $= \mathrm{cr}(\pi)$ और कट ऊँचाई $< \mathrm{ch}(\pi)$ है, या कट कोटि $< \mathrm{cr}(\pi)$ है। $\mathrm{ch}(\pi) = 0$ (दोनों आधार-वाक्य अभिगृहीत) वाली स्थिति A और B में, तथा $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ वाली स्थितियाँ C–D में समेटी गई हैं।

स्थिति A: कोई ψ, Γ और Δ दोनों में आता है। तब $\Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत है (यदि ψ परमाण्विक है), अथवा प्रतिज्ञप्ति 79.7 से उसका **G3c** में $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$-विहीन प्रमाण π' है। यह आगमन आधार की स्थिति (क) को समेटता है, क्योंकि यदि $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ में अथवा $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ में प्रमुख नहीं है और ये अभिगृहीत हैं, तो कोई अन्य परमाण्विक ψ, Γ और Δ दोनों में होना चाहिए। यह आगमन चरण को भी समेटता है यदि आधार-वाक्यों में से कोई एक ऐसा अभिगृहीत है जिसमें φ प्रमुख नहीं है (भले ही दूसरा आधार-वाक्य किसी नियम का निष्कर्ष हो)।

स्थिति B: दोनों आधार-वाक्य अभिगृहीत हैं और φ प्रमुख, अतः परमाण्विक, है। बाएँ आधार-वाक्य $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ पर विचार करें। चूँकि φ प्रमुख है, उसे Γ में आना चाहिए (अन्यथा $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ अभिगृहीत न होता)। इसी प्रकार φ को Δ में आना चाहिए, अन्यथा $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत न होता। अतः φ परमाण्विक है और Γ तथा Δ दोनों में आता है, अर्थात् $\Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत है। यह आगमन आधार की स्थिति (ख) को समेटता है।

वैकल्पिक स्थितियाँ A और B

स्थिति A: कट के आधार-वाक्यों में से एक, परमाण्विक χ वाला $\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \chi$ रूप का अभिगृहीत है। यदि χ, कट सूत्र φ नहीं है, तो χ को Γ और Δ दोनों में आना चाहिए। उस स्थिति में $\Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत है और हम उसे π' ले सकते हैं। यदि कट सूत्र $\chi \equiv \varphi$ है, तो या तो (बायाँ आधार-वाक्य अभिगृहीत हो तो) $\varphi \in \Gamma$ और $\Gamma = \Gamma', \varphi$, अथवा (दायाँ आधार-वाक्य अभिगृहीत हो तो) $\varphi \in \Delta$ और $\Delta = \Delta', \varphi$। पहली स्थिति में π_2, $\varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण है, और CL की ग्राह्यता (प्रतिज्ञप्ति 79.21) से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण है। दूसरी स्थिति में π_2, $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$ का प्रमाण है और CR की ग्राह्यता से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण मिलता है।

स्थिति B: आधार-वाक्यों में से एक $\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ रूप का अभिगृहीत है। यदि बायाँ आधार-वाक्य ऐसा अभिगृहीत है, तो $\bot \in \Gamma$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta$ भी अभिगृहीत है। यदि दायाँ आधार-वाक्य ऐसा अभिगृहीत है, तो या तो $\bot \in \Gamma$ (जिस स्थिति में $\Gamma \Rightarrow \Delta$ फिर अभिगृहीत है), या $\varphi \equiv \bot$। दूसरी स्थिति में π_1, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$ का प्रमाण है। π_1 के प्रत्येक अनुक्रम के अनुवर्ती से $\bot$ की एक प्रति हटाकर हम इसे $\Gamma \Rightarrow \Delta$ के प्रमाण में बदल सकते हैं। (अभ्यास: $\mathrm{ht}(\pi_1)$ पर आगमन से इसे सत्यापित करें।)

अब मान लें कि न स्थिति A लागू है, न स्थिति B। शेष स्थितियों में $\mathrm{ch}(\pi) > 0$, अर्थात् आधार-वाक्यों में से कम-से-कम एक किसी अनुमान का निष्कर्ष है।

स्थितियाँ C और D: कटों का क्रम-विनिमय। स्थितियों C और D की सभी संभावनाओं का एक समान प्रतिरूप है। हम $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ पर समाप्त होने वाले ऐसे प्रमाण से आरंभ करते हैं जिसमें एक आधार-वाक्य किसी नियम R से प्राप्त होता है, और उसमें कट सूत्र φ प्रमुख नहीं (कोई अन्य सूत्र θ प्रमुख) है। इस प्रमाण में $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$, नियम R के बाद आता है और उसका योजनाबद्ध रूप है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,R\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

यह केवल उस स्थिति को समेटता है जहाँ R एक आधार-वाक्य वाला दायाँ नियम है, A, R का प्रमुख सूत्र नहीं है, और जो सूत्र θ प्रमुख है वह $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$के दाएँ आधार-वाक्य के अनुवर्ती में आता है। यदि θ पूर्वपक्ष में (अर्थात् R कोई बायाँ

नियम है) अथवा Cut_{CS}के बाएँ आधार-वाक्य में आता, तो स्पष्टतः रूप अलग होता। Π और Λ के सूत्रों नियम R के सक्रिय सूत्रों को निरूपित करते हैं।

हम इस क्रम को उलटकर ऐसे प्रमाण पर विचार करते हैं जिसमें R, Cut_{CS} के बाद आता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda,\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda\end{array}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda}\,\text{Cut}_{\text{CS}}}{\Gamma, \Rightarrow \Delta',\theta,\theta}\,R$$

हम ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण से π_1 और π_3 से क्रमशः π_1' और π_3' प्राप्त करते हैं।

चूँकि हम Cut_{CS} और R का क्रम बदलते हैं, इसे "कट का R के आर-पार ऊपर की ओर क्रम-विनिमय" कहते हैं। ऐसा करने पर Cut_{CS}के दाएँ आधार-वाक्य पर समाप्त होने वाले प्रमाण की ऊँचाई, और इसलिए कट ऊँचाई, घटती है। अर्थात् नए Cut_{CS} पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण की ऊँचाई, π_1 और π_3 से अधिक नहीं मानी जा सकती; अतः कट ऊँचाई घटती है (हमने दाईं ओर का एक अनुमान हटाया है)। अब आगमन परिकल्पना लागू होती है, जिससे Cut_{CS} अनुमान हटाया जा सकता है। अंत में CR की ग्राह्यता का उपयोग करके θ की अतिरिक्त प्रति हटाते हैं।

स्थिति C: π_1 और π_2 में से कम-से-कम एक, एक-आधार-वाक्य नियम R पर समाप्त होता है जिसमें φ प्रमुख नहीं है। कुल 18 स्थितियाँ हैं, जो इस पर निर्भर हैं कि φ, Cut_{CS}के बाएँ या दाएँ आधार-वाक्य में प्रमुख नहीं है, और नियम R नौ एक-आधार-वाक्य नियमों ($\neg$L, $\neg$R, $\vee$R, $\wedge$L, $\rightarrow$R, तथा चार परिमाणक नियम) में से कौन-सा है। हम केवल दो उदाहरणों पर विचार करते हैं: जहाँ φ, π_2 के अंतिम अनुमान में प्रमुख नहीं है और वह अनुमान $\rightarrow$R या $\exists$L पर समाप्त होता है। अन्य स्थितियाँ सदृश हैं और अभ्यास के लिए छोड़ी गई हैं।

मान लें π निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\varphi\end{array} \qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\chi\end{array}}{\varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi}\,\rightarrow\text{R}\end{array}\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi}\,\text{Cut}_{\text{CS}}$$

जहाँ $\Delta = \Delta',\psi\rightarrow\chi$। π_1 पर ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण (प्रतिज्ञप्ति 79.17) लगाकर हम $\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi,\varphi$ का प्रमाण π_1' पाते हैं (बाईं ओर ψ और दाईं ओर χ से दुर्बलीकरण करके)। इसी प्रकार π_3 पर प्रतिज्ञप्ति 79.17 लगाकर $\varphi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi$ का प्रमाण π_3' पाते हैं (दाईं ओर $\psi\rightarrow\chi$ से दुर्बलीकरण करके)। आगमन परिकल्पना निम्न पर लागू होती है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi,\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi\end{array}}{\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi}\,\text{Cut}_{\text{CS}}$$

जिसका कट सूत्र φ है: इस प्रमाण की कट कोटि π जैसी और कट ऊँचाई उससे कम है। इससे $\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi$ का **G3c** में Cut_{CS}-विहीन प्रमाण π_4 मिलता है। $\rightarrow$R लगाकर $\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\psi\rightarrow\chi$ का प्रमाण मिलता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\rightarrow\chi,\psi\rightarrow\chi}\,\rightarrow\text{R}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta$, अर्थात् $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi$, का प्रमाण π' पाने के लिए प्रतिज्ञप्ति 79.21 (संकुचन की ग्राह्यता) लगाएँ।

अब मान लें π निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L}\right\}\pi_2}{\Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

हम फिर आगमन परिकल्पना निम्न पर लगाते हैं

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1[\psi(c) \Rightarrow]\\ \exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3[\exists x\,\psi(x) \Rightarrow]\,\vdots\\ \varphi, \exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\exists x\,\psi(x), \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L}$$

ध्यान दें कि आइगेनचर की शर्त पूरी है, क्योंकि π_2 में $\exists$L की आइगेनचर-शर्त प्रत्याभूत करती है कि c, $\exists x\,\psi(x)$, Γ' या Δ में नहीं आता। अंत में प्रतिज्ञप्ति 79.21 लगाएँ।

स्थिति D: π_1 और π_2 में से कम-से-कम एक ऐसे द्वि-आधार-वाक्य नियम R पर समाप्त होता है जिसमें φ प्रमुख नहीं है। कुल 6 स्थितियाँ हैं। हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जहाँ φ, π_2 के $\wedge$R पर समाप्त होने वाले अंतिम अनुमान में प्रमुख नहीं है; अन्य स्थितियाँ सदृश हैं।

मान लें π निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

आगमन परिकल्पना इन प्रमाण पर लागू होती है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

और

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \chi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_4'\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

यहाँ **G3c** के प्रमाण π_1' और π_1'', π_1 से ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण (प्रतिज्ञप्ति 79.17) द्वारा मिलते हैं (एक बार दाईं ओर ψ से और एक बार χ से दुर्बलीकरण करके)। प्रमाण π_3' और π_4' भी क्रमशः π_3 और π_4 से ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण द्वारा मिलते हैं (दाईं ओर $\psi \wedge \chi$ से दुर्बलीकरण करके)।

आगमन परिकल्पना हमें $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi$ के **G3c** में प्रमाण π_5 और π_6 देती है। नियम $\wedge$R द्वारा हम इन्हें $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi$ के प्रमाण में मिलाते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_5\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_6\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

$\Gamma \Rightarrow \Delta$, अर्थात् $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi$, का प्रमाण पाने के लिए प्रतिज्ञप्ति 79.21 (संकुचन की ग्राह्यता) लगाएँ।

स्थिति E: कटों का अपचयन। अंतिम स्थिति में π_1 और π_2 दोनों ऐसे अनुमानों पर समाप्त होते हैं जिनमें φ प्रमुख है। φ के प्रत्येक संभावित प्रधान संक्रियक के लिए एक, कुल छह स्थितियाँ हैं।

प्रत्येक स्थिति में कट सूत्र φ वाले $\mathrm{Cut_{CS}}$ को φ के उप-सूत्रों पर एक या अधिक कटों में बदलते हैं; अर्थात् उन अनुमानों के सक्रिय सूत्रों पर जिनमें φ प्रमुख सूत्र है। इसलिए इन स्थितियों को प्रायः कट अनुमान का "अपचयन" या "रूपांतरण" कहते हैं।

1. यदि $\varphi \equiv \neg\psi$, तो π निम्न पर समाप्त होता है

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}\ \neg\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

आगमन परिकल्पना से निम्न में $\mathrm{Cut_{CS}}$ का विलोपन किया जा सकता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

2. यदि $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$, तो π निम्न पर समाप्त होता है

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi}\ \vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \vee\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

$\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होने वाले प्रमाण पर विचार करें,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

जहाँ π_2''', π_2'' से ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण द्वारा प्राप्त होता है। इसकी कट कोटि $< \mathrm{cr}(\pi)$ है, क्योंकि $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$; अतः आगमन परिकल्पना $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ का **G3c** में प्रमाण π_1'' देती है। $\mathrm{Cut_{CS}}$पर

समाप्त होने वाला प्रमाण

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

की कट कोटि $= \mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$ है, इसलिए आगमन परिकल्पना फिर लागू होती है और $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π' देती है।

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$। अभ्यास।

4. यदि $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$, तो π निम्न पर समाप्त होता है

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \chi}\,{\to}\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \to \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,{\to}\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

$\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होने वाला प्रमाण,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

की कट कोटि π से कम है। आगमन परिकल्पना $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_1'' देती है। अब $\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होने वाले प्रमाण पर विचार करें,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

इसकी कट कोटि भी π की कट कोटि से कम है, इसलिए आगमन परिकल्पना $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का **G3c**-प्रमाण π' देती है।

5. यदि $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$, तो π निम्न पर समाप्त होता है

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi(t), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

आगमन परिकल्पना से निम्न में $\mathrm{Cut_{CS}}$ का विलोपन किया जा सकता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi(t), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

जहाँ π_1'', π_1 से (π_1' से नहीं!) ऊँचाई-संरक्षक दुर्बलीकरण द्वारा प्राप्त होता है। (इस प्रमाण की कट कोटि समान किंतु कट ऊँचाई कम है।) इससे $\psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_2'' मिलता है।

प्रमाण π_1' का अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ है, जहाँ c किसी $\forall$R अनुमान का आइगेनचर है। अतः c, $\psi(x)$, Γ या Δ में नहीं आता। हम प्रमाण π को नियमित मानते हैं, इसलिए c केवल निम्न $\forall$R अनुमान का आइगेनचर है और केवल उसके ऊपर आता है; अर्थात् केवल π_1' में आता है और π_1' के किसी अनुमान का आइगेनचर नहीं है। चूँकि c, π_2 में नहीं आता, वह t में भी नहीं आ सकता। सहायक प्रमेय 79.9 से प्रमाण $\pi_1'[t/c], \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)$ का प्रमाण है। अब हम आगमन परिकल्पना इस प्रमाण पर लगाते हैं

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'[t/c]\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

(आगमन परिकल्पना लागू होती है क्योंकि कट सूत्र $\psi(t)$ है, अतः इस प्रमाण की कट कोटि π से कम है।)

6. $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ वाली स्थिति हम अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

ध्यान दें कि स्थिति E में जिस $\mathrm{Cut_{CS}}$-समाप्त प्रमाण पर हम आगमन परिकल्पना लगाते हैं, उसकी कट ऊँचाई मूल प्रमाण की कट ऊँचाई से अधिक हो सकती है। उदाहरणतः $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ वाली स्थिति में हमने π को दो $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों वाले प्रमाण में बदला,

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_1''$$

π_1' और π_2'' के बीच के ऊपर वाले $\mathrm{Cut_{CS}}$ की कट कोटि और कट ऊँचाई दोनों π से कम हैं। किंतु आगमन परिकल्पना लगाने से प्राप्त प्रमाण π_1'' की कट ऊँचाई अब π से कम नहीं है। फिर भी नीचे वाले $\mathrm{Cut_{CS}}$ का कट सूत्र ψ होने से उसकी कट *कोटि*, π की कट कोटि से कम है।

सहायक प्रमेय 80.2 स्थापित करता है कि किसी प्रमाण से एक सबसे ऊपर का $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान हटाया जा सकता है। इसे $\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होने वाले सबसे ऊपर के उप-प्रमाण पर क्रमशः लगाकर दिखाया जा सकता है कि किसी प्रमाण से कितने भी $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान हटाए जा सकते हैं।

प्रमेय 80.3. **G3c** $+$ $\mathrm{Cut_{CS}}$ *के प्रत्येक प्रमाण* π *को* **G3c** *के प्रमाण में बदला जा सकता है।*

प्रमाण. π में $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों की संख्या n पर आगमन से। यदि $n = 0$, तो कुछ करने को नहीं है: π पहले से **G3c** में प्रमाण है। अन्यथा सबसे ऊपर के $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण π' पर विचार करें। उसमें अंतिम अनुमान के रूप में केवल एक $\mathrm{Cut_{CS}}$ नियम है। सहायक प्रमेय 80.2 लगाकर उसे $\mathrm{Cut_{CS}}$-विहीन प्रमाण π'' में बदलें और उप-प्रमाण π' को π'' से बदल दें। परिणाम $n-1$ $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों वाला प्रमाण है और आगमन परिकल्पना लागू होती है। □

80.3 सबसे बड़े कट हटाना

सहायक प्रमेय 79.19 के प्रमाण ने दिखाया कि यदि **G3c** किसी तार्किक नियम ($\exists$R और $\forall$L के अतिरिक्त) के निष्कर्ष को सिद्ध करता है, तो वह प्रमाण की ऊँचाई बढ़ाए बिना नियम के प्रत्येक आधार-वाक्य को भी सिद्ध करता है। हम इससे अधिक दिखा सकते हैं: यह **G3c** $+$ $\mathrm{Cut_{CS}}$ के लिए भी सत्य है।

पहले की तरह किसी $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान की *कट कोटि* उसके कट सूत्र की गहराई लेते हैं।

सहायक प्रमेय 80.4. *यदि* **G3c** $+ \mathrm{Cut_{CS}}$ *किसी प्रमाण* π *द्वारा* $\exists$R *या* $\forall$L *से भिन्न तार्किक नियम* R *के निष्कर्ष को सिद्ध करता है, तो वह प्रत्येक आधार-वाक्य को भी प्रमाण* π' *द्वारा (अथवा नियम के एक या दो आधार-वाक्य होने के अनुसार प्रमाण* π', π'' *द्वारा) सिद्ध करता है। इसके अतिरिक्त (क)* $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$ *(और* $\mathrm{ht}(\pi'') \leq \mathrm{ht}(\pi)$*), तथा (ख)* π' *(और* π''*) में* $\mathrm{Cut_{CS}}$ *अनुमानों की संख्या और उनकी कोटियाँ* π *जैसी ही हैं।*

प्रमाण. सहायक प्रमेय 79.19 और 79.20 के प्रमाणों के निरीक्षण से। वह प्रमाण $\mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन से था। आधार स्थिति में हमने एक अभिगृहीत को दूसरे अभिगृहीत से बदला; इसलिए शर्तें (क) और (ख) स्वतः पूरी हैं। यदि π का अंतिम नियम R था, तो उसके निकटस्थ उप-प्रमाण ही वांछित प्रमाण π_i हैं और (क), (ख) दोनों पूरी हैं। अन्य सभी स्थितियों में हमने π के निकटस्थ उप-प्रमाण—अर्थात् अंतिम अनुमान R के आधार-वाक्य(यों) तक जाने वाले प्रमाणों—पर आगमन परिकल्पना लगाई और फिर परिणामों पर वही नियम R लगाया। नए प्रमाण के निकटस्थ उप-प्रमाण के लिए शर्तें (क), (ख) सत्य हैं, इसलिए पूरे प्रमाण के लिए भी सत्य हैं। केवल उस स्थिति का सत्यापन शेष है जहाँ अंतिम अनुमान $\mathrm{Cut_{CS}}$है। फिर केवल एक उदाहरण देखें: मान लें π, $\wedge$L के निष्कर्ष $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण है और $\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

आगमन परिकल्पना π_1 और π_2 पर लागू होती है (जो $\wedge$L के निष्कर्ष के उदाहरणों के भी प्रमाण हैं) और क्रमशः $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ तथा $\varphi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ के प्रमाण π_1' और π_2' देती है। इन्हें $\mathrm{Cut_{CS}}$ से मिलाकर π' पाते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \varphi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

स्पष्टतः (क) और (ख) पूरी हैं। □

ध्यान दें कि $\mathrm{Cut_{CS}}$के बजाय Cut लेने पर यह काम नहीं करता, क्योंकि तब अंतिम प्रमाण के निष्कर्ष के पूर्वपक्ष में ψ, χ, Γ की दो प्रतियाँ और अनुवर्ती में Δ की दो प्रतियाँ होतीं। हमें संकुचन की ग्राह्यता का आह्वान करना पड़ता, किंतु प्रतिज्ञप्ति 79.21 का प्रमाण उत्क्रमणीयता प्रमेय का उपयोग करता है। इस प्रकार तर्क चक्रीय हो जाता।

सहायक प्रमेय 80.4 से हम कट-विलोपन का वैकल्पिक प्रमाण दे सकते हैं। इस प्रमाण में हम $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों की सबसे ऊपर की आवृत्तियाँ क्रमशः नहीं हटाते, बल्कि महत्तम कोटि वाले $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों की आवृत्तियाँ हटाते हैं। अर्थात् **G3c** $+ \mathrm{Cut_{CS}}$ के किसी प्रमाण π से आरंभ करके उसमें कहीं भी स्थित कट हटाते हैं (संभवतः उसे कम कोटि के कटों से बदलकर), और तब तक ऐसा करते हैं जब तक कोई कट शेष न हो। केवल यह शर्त है कि जिस कट से निपटते हैं उसके ऊपर समान या अधिक कोटि का कोई कट न हो।

सहायक प्रमेय 80.5. *यदि* π, **G3c** $+ \mathrm{Cut_{CS}}$ *में कोटि* n *के किसी* $\mathrm{Cut_{CS}}$ *अनुमान पर समाप्त होने वाला और अन्यथा केवल* **G3c** *के नियमों तथा कोटि* $< n$ *के* $\mathrm{Cut_{CS}}$ *अनुमानों का उपयोग करने वाला प्रमाण है, तो उसी अंतिम अनुक्रम का* **G3c** $+ \mathrm{Cut_{CS}}$ *में ऐसा प्रमाण* π' *है जिसमें प्रत्येक* $\mathrm{Cut_{CS}}$ *अनुमान की कोटि* $< n$ *है।*

प्रमाण. प्रमाण π निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

हम φ के रूप के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं।

मान लें φ परमाण्विक है। इस शर्त से कि π_1 और π_2 के सभी Cut_{CS} अनुमानों की कोटि $< \text{dp}(\varphi) = 0$ होनी चाहिए, ध्यान दें कि π_1 या π_2 में कोई Cut_{CS} अनुमान हो ही नहीं सकता। $\text{ht}(\pi_2)$ पर आगमन से हम दिखाते हैं कि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कट-मुक्त प्रमाण है। यदि $\text{ht}(\pi_2) = 0$, तो $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीत है। यदि φ प्रमुख नहीं है, तो कोई परमाण्विक χ, Γ और Δ दोनों का अवयव है और $\Gamma \Rightarrow \Delta$ स्वयं अभिगृहीत है। यदि φ प्रमुख है, तो $\Delta = \Delta, \varphi$। इस स्थिति में π_1, $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$ पर समाप्त होता है। प्रतिज्ञप्ति 79.21 (संकुचन की ग्राह्यता) लगाकर $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$ का कट-मुक्त प्रमाण मिलता है। यदि $\text{ht}(\pi_2) > 0$, तो वह किसी नियम R पर समाप्त होता है। उस नियम का कोई आधार-वाक्य लें: उसका रूप $\varphi, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda$ है, जहाँ Π और Λ, R के सक्रिय सूत्रों हैं। π_1 और π_2 पर प्रतिज्ञप्ति 79.17 लगाने से $\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda, \varphi$ और $\varphi, \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$ के प्रमाण मिलते हैं, जिन पर आगमन परिकल्पना लागू होती है। इससे R के प्रत्येक आधार-वाक्य के लिए $\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$ का प्रमाण मिलता है। R लगाने से $\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta$ मिलता है, और प्रतिज्ञप्ति 79.21, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कट-मुक्त प्रमाण देता है।

यदि φ परमाण्विक नहीं है, तो उसके प्रधान संक्रियक के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं। प्रत्येक स्थिति में सहायक प्रमेय 80.4 लगाकर उन बाएँ और दाएँ नियमों के आधार-वाक्यों के प्रमाण प्राप्त करते हैं जिनमें φ प्रमुख सूत्र है। फिर सहायक प्रमेय 80.2 के प्रमाण की स्थिति E की तरह आगे बढ़ते हैं।

1. $\varphi \equiv \neg\psi$। प्रमाण π_1 और π_2, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ और $\neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होते हैं। सहायक प्रमेय 80.4 से $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ के प्रमाण π_1' और π_2' हैं। प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Cut}_{\text{CS}}$$

2. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$। प्रमाण π_1 और π_2, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi$ और $\psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होते हैं। सहायक प्रमेय 80.4 (π_1 पर लगाया गया $\vee$R का उत्क्रमण) से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$ का प्रमाण π_1' है। सहायक प्रमेय 80.4 (π_2 पर लगाया गया $\vee$L का उत्क्रमण) से $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_2' और $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_2'' है। π_2'' पर प्रतिज्ञप्ति 79.17 लगाकर $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ का प्रमाण π_2''' भी मिलता है। प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''' \\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\ \text{Cut}_{\text{CS}} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Cut}_{\text{CS}}$$

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$। अभ्यास।

4. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$। प्रमाण π_1 और π_2, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \chi$ तथा $\psi \to \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होते हैं। सहायक प्रमेय 80.4 (π_1 पर लगाया गया $\to$R का उत्क्रमण) से $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ का प्रमाण π_1' है। सहायक प्रमेय 80.4 (π_2 पर लगाया गया $\to$L का उत्क्रमण) से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ का प्रमाण π_2' और $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_2'' है। π_2'' पर प्रतिज्ञप्ति 79.17 लगाकर $\chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण π_2''' भी मिलता है। प्रमाण π' है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''' \\ \chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Cut}_{\text{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Cut}_{\text{CS}}$$

5. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$। प्रमाण π_1 और π_2, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)$ तथा $\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होते हैं। सहायक प्रमेय 80.4 से $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ का प्रमाण π_1' है।

   अब प्रमाण π_2 पर विचार करें। वह $\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होता है। π_2 के अंतिम अनुक्रम से ऊपर की ओर बढ़ते हुए किसी अनुक्रम के बाईं ओर $\forall x\, \psi(x)$ की प्रत्येक ऐसी आवृत्ति चिह्नित करें जो π_2 के अंतिम अनुक्रम में $\forall x\, \psi(x)$ की आवृत्ति तक "जाती है"; अर्थात्: (क) π_2 के अंतिम अनुक्रम में $\forall x\, \psi(x)$ को चिह्नित करें। (ख) यदि $\forall x\, \psi(x)$ किसी नियम के निष्कर्ष के प्रसंग में आता और चिह्नित है, तो नियम के आधार-वाक्य(यों) में संगत आवृत्ति चिह्नित करें। (ग) यदि $\forall x\, \psi(x)$ किसी $\forall$L नियम के निष्कर्ष में प्रमुख और चिह्नित है, तो आधार-वाक्य में $\forall x\, \psi(x)$ और $\psi(t)$ की संगत सक्रिय आवृत्तियाँ चिह्नित करें।

   अब $\forall x\, \psi(x)$ की इन सभी चिह्नित आवृत्तियों पर विचार करें। उनमें से कोई भी $\forall$L के अतिरिक्त किसी नियम में सक्रिय नहीं है (केवल $\forall$L के सक्रिय सूत्रों चिह्नित होते हैं)। π_2 में $\forall x\, \psi(x)$ की सभी चिह्नित आवृत्तियाँ हटा दें। यदि यह सही प्रमाण है, तो $\forall x\, \psi(x)$ की चिह्नित आवृत्तियाँ कभी सक्रिय नहीं थीं; वे सभी सीधे अभिगृहीतों से आई थीं। प्रमाण, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ पर समाप्त होता है और हम π को उससे बदल सकते हैं। हमने महत्तम कोटि का एक कट हटा दिया है।

   अन्यथा हमारे पास सही प्रमाण नहीं है, क्योंकि हमने उन सूत्रों $\forall x\, \psi(x)$ को हटाया है जो कुछ $\forall$L अनुमानों में सक्रिय थे। हमने इन्हें इस रूप के "अनुमानों" में बदल दिया है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_t \\ \psi(t), \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Pi \Rightarrow \Lambda}\ \forall\mathrm{L}$$

   ऐसे प्रत्येक सबसे ऊपर के "अनुमान" को निम्न से बदलें

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1'[t/c][\Pi \Rightarrow \Lambda] \\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda, \psi(t)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_t[\Gamma \Rightarrow \Delta] \\ \psi(t), \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

   और उसके नीचे प्रत्येक अनुक्रम की बाईं ओर Γ तथा दाईं ओर Δ जोड़ें। इसे तब तक दोहराएँ जब तक आधार-वाक्य में चिह्नित $\psi(t)$ वाले सभी $\forall$L "अनुमान", किसी $\psi(t)$ पर $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान से न बदल दिए जाएँ। परिणामी प्रमाण (जो अब सही प्रमाण है) का अंतिम अनुक्रम $\Gamma, \ldots, \Gamma \Rightarrow \Delta, \ldots, \Delta$ रूप का है। संकुचन की ग्राह्यता लगाकर उसे $\Gamma \Rightarrow \Delta$ के प्रमाण में बदलें और π को उससे बदल दें। हमने $\forall x\, \psi(x)$ पर एक कट को $\psi(t)$ पर (संभवतः अनेक) कटों से बदला है, किंतु ये सभी कम कोटि के हैं। π_1 या π_2 में पहले से आने वाले कट बने रहते हैं, पर वे भी सभी कम कोटि के हैं। □

सहायक प्रमेय 80.2 स्थापित करता है कि किसी प्रमाण में सर्वोच्च कोटि के $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान को कम कोटि के $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमानों से बदला जा सकता है। इस प्रमेय को महत्तम $\mathrm{Cut_{CS}}$पर समाप्त होने वाले सबसे ऊपर के उप-प्रमाण पर क्रमशः लगाकर हम फिर दिखा सकते हैं कि किसी प्रमाण से कितने भी $\mathrm{Cut_{CS}}$ अनुमान हटाए जा सकते हैं।

प्रमेय 80.6. **G3c** $+$ $\mathrm{Cut_{CS}}$ *के प्रत्येक प्रमाण* π *को* **G3c** *के किसी प्रमाण में बदला जा सकता है।*

प्रमाण. पहले सिद्ध करें कि π में महत्तम कोटि के सभी कट हटाए जा सकते हैं। π में आने वाले कटों की महत्तम कोटि d और कोटि d के कटों की संख्या n हो। प्रमाण n पर आगमन से है। यदि $n = 0$, तो सिद्ध करने को कुछ नहीं है। यदि $n > 0$, तो कोटि d का कोई सबसे ऊपर का कट चुनें और उस पर समाप्त होने वाला उप-प्रमाण π_1 मानें। सहायक प्रमेय 80.5 से उसी अंतिम अनुक्रम का ऐसा प्रमाण π_1' है जिसके सभी कटों की कोटि $< d$ है। π में π_1 को π_1' से बदलें। परिणाम कोटि d के $n - 1$ कटों वाला प्रमाण है और आगमन परिकल्पना लागू होती है।

अब परिणाम d पर आगमन से मिलता है। यदि $d = 0$, तो सभी कट परमाण्विक हैं और पिछले परिणाम से सभी हटाए जा सकते हैं। यदि $d > 0$, तो पिछला परिणाम ऐसा प्रमाण देता है जिसमें कोटि d के सभी कट कोटि $< d$ के कटों से बदल दिए गए हैं। चूँकि d, π में कटों की अधिकतम कोटि थी, अब हमारे पास ऐसा प्रमाण है जिसमें कटों की महत्तम कोटि $< d$ है; अतः आगमन परिकल्पना लागू होती है। □

80.4 मध्य-अनुक्रम प्रमेय और हेरब्रांड प्रमेय

कट-विलोपन प्रमेय का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम मध्य-अनुक्रम प्रमेय है। यह कहता है कि यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का ऐसा प्रमाण π है जिसमें प्रत्येक सूत्र पूर्वबंध रूप में है, तो ऐसा प्रमाण π' है जिसमें कोई अनुक्रम $S \equiv \Pi \Rightarrow \Lambda$ (जिसे *मध्य-अनुक्रम* कहते हैं) है और π' में S के ऊपर के सभी अनुमान प्रतिज्ञप्तिपरक तथा S के नीचे के सभी अनुमान परिमाणक अनुमान हैं। (सूत्र φ *पूर्वबंध* (या *पूर्वबंध रूप में*) है यदि उसका रूप

$$\mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

है, जहाँ प्रत्येक Q_i या तो $\forall$ या $\exists$ है।) मध्य-अनुक्रम प्रमेय का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम हेरब्रांड प्रमेय है। उसकी सामान्य स्थिति का वर्णन कुछ कठिन है, पर बहुत व्यापक रूप में वह यह कहता है: प्रथम-कोटि तर्क के प्रत्येक सिद्ध-योग्य वाक्य φ के लिए कोई प्रतिज्ञप्तिपरक सर्वतासत्य φ' है जिससे φ को सिद्ध किया जा सकता है। यहाँ उस स्थिति का रूप है जहाँ वाक्य $\exists x \, \psi(x)$ है और ψ परिमाणक-मुक्त है:

प्रमेय 80.7 (हेरब्रांड प्रमेय). *मान लें $\psi(x)$ परिमाणक-मुक्त है और $\vdash \exists x \, \psi(x)$। तब ऐसे पद t_1, ..., t_n हैं कि $\vdash \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$।*

सूत्र $\psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ को $\exists x \, \psi(x)$ का *हेरब्रांड विकल्प* कहते हैं। चूँकि ψ परिमाणक-मुक्त है, यह विकल्प भी परिमाणक-मुक्त है। अतः यदि वह सिद्ध-योग्य है, तो वह किसी कट-मुक्त प्रमाण से, और फलतः केवल प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमानों का उपयोग करने वाले प्रमाण से, सिद्ध-योग्य है। इसलिए वह सर्वतासत्य है।

हेरब्रांड प्रमेय का कठिन भाग यह दिखाना है कि प्रत्येक सिद्ध-योग्य सूत्र $\exists x \, \psi(x)$ के लिए कोई हेरब्रांड विकल्प विद्यमान है। इसका विलोम—यदि $\exists x \, \psi(x)$ का कोई हेरब्रांड विकल्प है तो वह सिद्ध-योग्य है—सरल है। वास्तव में हेरब्रांड विकल्प, $\exists x \, \psi(x)$ को निगमित करता है। उदाहरणतः $n = 2$ वाली स्थिति का **G3c** में प्रमाण यह है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi(t_1) \Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2) \qquad \psi(t_2) \Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}\,\vee\mathrm{L}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_2)}\,\exists\mathrm{R}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \Rightarrow \exists x \, \psi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

$\Rightarrow \exists x \, \psi(x)$ के प्रमाण π से हेरब्रांड विकल्प निकालने के लिए उस स्थिति पर विचार करें जहाँ कट-मुक्त प्रमाण π के सभी $\exists$R अनुमान अंत में हैं:

$$\begin{array}{c}
\vdots\,\pi_1 \\
\Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n) \\
\hline
\Rightarrow \exists x \, \psi(x), \psi(t_2), \ldots, \psi(t_n) \\
\vdots\,(n-1) \times \exists\mathrm{R} \\
\Rightarrow \exists x \, \psi(x)
\end{array}\,\exists\mathrm{R}$$

यदि ये π के वे सभी $\exists$R अनुमान हैं जिनमें $\exists x \, \psi(x)$ सक्रिय है, तो π_1' में कोई अन्य परिमाणक अनुमान नहीं है। कारण यह है कि $\psi(x)$ में कोई अन्य परिमाणक नहीं और अंतिम अनुक्रम की बाईं ओर कोई सूत्र नहीं है। दूसरे शब्दों में,

$\Rightarrow \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$, π का मध्य-अनुक्रम है। इसके अतिरिक्त, मध्य-अनुक्रम के ऊपर कोई परिमाणक अनुमान न होने से उसके ऊपर के सभी अनुक्रमों में $\exists x\, \psi(x)$ है, और ये न सक्रिय हैं न प्रमुख। अतः इन्हें प्रमाण π_1 से हटाया जा सकता है; इससे $\Rightarrow \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$ का प्रमाण, और $\vee$R के $n-1$ अनुप्रयोगों से हेरब्रांड विकल्प $\Rightarrow \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ का प्रमाण, मिलता है।

समस्या यह है कि हम यह नहीं मान सकते कि $\Rightarrow \exists x\, \psi(x)$ के कट-मुक्त प्रमाण में भी सभी $\exists$R अनुमान अंत में एक ही खंड में होंगे। इन $\exists$R अनुमानों के बीच ऐसे अनुमान हो सकते हैं जिनमें कोई $\psi(t_i)$ प्रमुख हो। इसलिए मध्य-अनुक्रम प्रमेय की आवश्यकता पड़ती है।

प्रमेय 80.8 (मध्य-अनुक्रम प्रमेय). *यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई* **G3c**-*प्रमाण π है जिसमें Γ और Δ के सभी सूत्रों पूर्वबंध हैं, तो ऐसा प्रमाण π' है जिसमें कोई अनुक्रम $\Pi \Rightarrow \Lambda$ है और उसके नीचे के सभी अनुमान परिमाणक अनुमान तथा उसके ऊपर के सभी अनुमान प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान हैं।*

प्रमाण. π में किसी परिमाणक अनुमान की *कोटि* उसके नीचे के प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमानों की संख्या, और π की कोटि $o(\pi)$ उसके सभी परिमाणक अनुमानों की कोटियों का योग परिभाषित करें। यदि $o(\pi) = 0$, तो किसी परिमाणक अनुमान के नीचे कोई प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान नहीं है और काम पूरा हुआ: सभी परिमाणक अनुमानों का एक आधार-वाक्य होने से केवल एक सर्वोच्च परिमाणक अनुमान है। उसका आधार-वाक्य मध्य-अनुक्रम है।

यदि $o(\pi) > 0$, तो कोटि > 0 वाला कोई सबसे निचला परिमाणक अनुमान चुनें। उसकी कोटि > 0 होने से उसके नीचे कोई प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान अवश्य है। उसके सबसे निचला होने से उसका निष्कर्ष किसी परिमाणक अनुमान का आधार-वाक्य नहीं हो सकता: अन्यथा उस दूसरे, अधिक नीचे वाले परिमाणक अनुमान के नीचे भी कोई प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान होता। हमारे पास कौन-सा परिमाणक अनुमान है और उसके नीचे कौन-सा प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान है, इसके अनुसार हम (बहुत-सी!) स्थितियों में भेद करते हैं। अंतिम अनुक्रम में केवल पूर्वबंध सूत्र होने के कारण परिमाणक अनुमान का प्रमुख सूत्र अगले प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान में सक्रिय नहीं हो सकता। अन्यथा उस अनुमान के प्रमुख सूत्र में किसी प्रतिज्ञप्तिपरक संयोजक के प्रभाव क्षेत्र में परिमाणक होता। उप-सूत्र गुण से उसे अंतिम अनुक्रम के किसी सूत्र का उप-सूत्र होना पड़ता। अतः परिमाणक अनुमान का प्रमुख सूत्र, नीचे वाले प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमान के प्रसंग का अवयव है।

ये दो उदाहरण हैं:

पहले मान लें कोई $\forall$R, $\rightarrow$L के दाएँ आधार-वाक्य पर समाप्त होता है। तब π का संबंधित उप-प्रमाण, उप-प्रमाण π_1 पर समाप्त होता है।

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \varphi(c)\end{array}}{\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\psi \rightarrow \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x)}\,\rightarrow\mathrm{L}$$

हम π को नियमित मान सकते हैं, इसलिए आइगेनचर c, π_3 के बाहर नहीं आता; विशेषतः वह $\psi \rightarrow \chi$ या π_2 में नहीं आता। अब प्रमाण π_1' पर विचार करें:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \varphi(c), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \varphi(c)\end{array}}{\psi \rightarrow \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \varphi(c)}\,\rightarrow\mathrm{L}}{\psi \rightarrow \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

जहाँ π_2' को π_2 से दाईं ओर $\varphi(c)$ द्वारा दुर्बलीकरण करके प्राप्त किया जाता है। (इससे कोई अनुमान नहीं जुड़ता, विशेषतः ऐसा कोई परिमाणक अनुमान नहीं जो कोटि को प्रभावित कर सके। इससे π_2 की किसी आइगेनचर-शर्त का उल्लंघन भी नहीं होता, क्योंकि $\varphi(c)$ का कोई अचर π_2 में आइगेनचर के रूप में प्रयुक्त नहीं है।) $\forall$R की आइगेनचर-शर्त अब भी पूरी है, क्योंकि c, $\psi \rightarrow \chi$ में नहीं आता।

संकुचन की ग्राह्यता का आह्वान करके हम $\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x)$ का प्रमाण π_1'' प्राप्त करते हैं। $\forall x\, \varphi(x)$ के लिए CR की ग्राह्यता के प्रमाण और उसमें प्रयुक्त $\forall$R की उत्क्रमणीयता के प्रमाण ने किसी अनुमान की कोटि नहीं बदली: उसने अधिक-से-अधिक अनुमान हटाए। अतः π_1'' में परिमाणक अनुमानों की संख्या π_1 से अधिक नहीं है, और π_1'' के प्रत्येक परिमाणक अनुमान के नीचे प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमानों की संख्या π_1 के संगत अनुमान जैसी है—केवल अंतिम $\forall$R को छोड़कर: π में उसके नीचे एक $\to$L था, जिसे हमने π_1'' में उसके ऊपर पहुँचा दिया है। π में π_1 को π_1'' से बदलें। परिणामी प्रमाण की कोटि कम है, क्योंकि कम-से-कम $\forall$R अनुमान की कोटि (कम-से-कम) 1 घटी है। अब आगमन परिकल्पना लगाएँ।

जहाँ परिमाणक अनुमान $\exists$R है वे स्थितियाँ और भी सरल हैं, क्योंकि न संकुचन चाहिए, न किसी आइगेनचर-शर्त की चिंता। उदाहरणतः मान लें $\exists$R के बाद $\wedge$R आता है (इस बार बाएँ आधार-वाक्य के रूप में)। संबंधित उप-प्रमाण π_1 है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi}\,\exists\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

π में π_1 को π_1' से बदलें:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\exists\mathrm{R}$$

जहाँ π_3' को π_3 से दाईं ओर $\varphi(t)$ द्वारा दुर्बलीकरण करके प्राप्त किया जाता है। इस दुर्बलीकरण में केवल π_3 के प्रत्येक अनुक्रम की दाईं ओर $\varphi(t)$ जोड़ना है, इसलिए किसी परिमाणक अनुमान की कोटि नहीं बदलती। π' में परिमाणक अनुमानों की कोटियाँ π जैसी हैं, केवल $\wedge$R के साथ क्रम-विनिमय किए गए $\exists$R अनुमान की कोटि 1 घटी है। आगमन परिकल्पना लागू होती है। $\square$

हेरब्रांड प्रमेय का प्रमाण. मान लें π, $\Rightarrow \exists x\, \varphi(x)$ पर समाप्त होता है। प्रमेय 80.8 से हम π को किसी मध्य-अनुक्रम S वाले प्रमाण π' में बदल सकते हैं, जिसका रूप अवश्य

$$\Rightarrow \exists x\, \varphi(x), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)$$

है। चूँकि S के ऊपर के सभी अनुमान प्रतिज्ञप्तिपरक हैं, $\exists x\, \varphi(x)$, S के ऊपर किसी अनुमान में प्रमुख नहीं हो सकता। परमाण्विक न होने से वह किसी अभिगृहीत में प्रमुख नहीं हो सकता। चूँकि $\exists x\, \varphi(x)$, $\varphi(t_1)$ का उचित उपसूत्र नहीं हो सकता (याद रखें कि $\varphi(x)$ परिमाणक-मुक्त है), वह S के ऊपर सक्रिय भी नहीं हो सकता। अतः S पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण से $\exists x\, \varphi(x)$ हटाने पर $\Rightarrow \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)$ का सही प्रमाण मिलता है; उससे $n-1$ $\vee$R अनुमानों द्वारा $\Rightarrow \varphi(t_1) \vee \cdots \vee \varphi(t_n)$ का प्रमाण प्राप्त होता है। $\square$

80.5 माएहारा प्रमेय और क्रेग अंतर्वेशन प्रमेय

विलियम क्रेग का अंतर्वेशन प्रमेय कहता है कि यदि $\varphi \vDash \psi$, तो ऐसा वाक्य χ (*अंतर्वेशक*) है कि $\varphi \vDash \chi$ और $\chi \vDash \psi$। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि अंतर्वेशक χ को इस प्रकार चुना जा सकता है कि उसमें आने वाले सभी अचरों और विधेय-चिह्नों, φ और ψ दोनों में आएँ। (हम मानते हैं कि कोई फलन-चिह्न सम्मिलित नहीं है।) इस प्रतिबंध के बिना φ और ψ तुच्छ रूप से अंतर्वेशक बन सकते थे।

अंतर्वेशन प्रमेय चिरसम्मत प्रथम-कोटि तर्क के लिए सत्य है और इसे खोजा गया "प्रथम-कोटि तर्क का अंतिम महत्त्वपूर्ण गुण" कहा गया है। निदर्श सिद्धांत और स्वचालित तर्कणा में इसके महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं। इसकी मूल प्रेरणा और अनुप्रयोग विज्ञान-दर्शन में था, क्योंकि इससे उन आदिम पदों का अध्ययन किया जा सकता है जिनके द्वारा किसी सिद्धांत को अभिगृहीतबद्ध किया जा सकता है या नहीं। इससे बेथ का परिभाष्यता प्रमेय भी मिलता है, जो कहता है कि यदि कोई सिद्धांत किसी संकल्पना को परोक्ष रूप से परिभाषित कर सकता है, तो वह उसे प्रत्यक्ष रूप से भी परिभाषित कर सकता है।

गणितीय तर्क के अनेक परिणामों की तरह अंतर्वेशन प्रमेय को निदर्श सिद्धांत और प्रमाण सिद्धांत दोनों की विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। प्रमाण-सैद्धांतिक विधियों का लाभ यह है कि वे अंतर्वेशक का अस्तित्व ही नहीं दिखातीं, बल्कि $\varphi \vDash \psi$ के किसी प्रमाण—जैसे $\varphi \Rightarrow \psi$ के **G3c** में किसी प्रमाण—से अंतर्वेशक की गणना करने वाली कलन-विधि भी देती हैं।

$\mathcal{L}(\varphi)$ को φ के अचरों और विधेय-चिह्नों का समुच्चय, और $\mathcal{L}(\Gamma) = \bigcup\{\mathcal{L}(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$ मानें। इस पूरे अनुभाग में हम मानते हैं कि संबंधित सूत्रों में कोई फलन-चिह्न नहीं है।

प्रमेय 80.9 (क्रेग अंतर्वेशन प्रमेय). *φ की भाषा $\mathcal{L}(\varphi)$ और ψ की $\mathcal{L}(\psi)$ हो। यदि* **G3c** $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$, *तो भाषा $\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi) \cap \mathcal{L}(\psi)$ में ऐसा सूत्र χ है कि* **G3c** $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$ *और* **G3c** $\vdash \chi \Rightarrow \psi$।

G3c के प्रमाण की संरचना का उपयोग करने के लिए हम अंतर्वेशन प्रमेय का सामान्यीकरण सिद्ध करते हैं। इसके लिए अनुक्रमों के पूर्वपक्ष और अनुवर्ती, दोनों को दो-दो भागों में विभक्त मानें। $\Gamma_1 ; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 ; \Delta_2$ लिखकर बताते हैं कि Γ_1 और Δ_1 पहले भाग तथा Γ_2 और Δ_2 दूसरे भाग में हैं। तब अंतर्वेशन प्रमेय निम्न प्रमेय से तुरंत मिलता है।

सहायक प्रमेय 80.10 (माएहारा प्रमेय). *यदि* **G3c** $\vdash \Gamma_1 ; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 ; \Delta_2$, *तो भाषा $\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ में ऐसा सूत्र χ है कि* **G3c** $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ *और* **G3c** $\vdash \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$।

प्रमाण. मान लें $\pi \vdash \Gamma_1 ; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 ; \Delta_2$। हम कथन को $n = \mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन से सिद्ध करते हैं।

यदि $n = 0$, तो $\Gamma_1 ; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 ; \Delta_2$ अभिगृहीत है और कोई परमाण्विक सूत्र φ, Γ_1, Γ_2 और Δ_1, Δ_2 दोनों में आता है। बाईं ओर φ के पहले या दूसरे भाग में और दाईं ओर पहले या दूसरे भाग में होने के अनुसार चार स्थितियाँ हैं।

1. $\varphi \in \Gamma_1$ और $\varphi \in \Delta_1$। हमें ऐसा χ चाहिए कि $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ तथा $\chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ दोनों सिद्ध-योग्य हों। φ बाएँ और दाएँ दोनों ओर आने से पहला अनुक्रम χ के किसी भी चुनाव पर पहले से अभिगृहीत है। $\chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ की सिद्ध-योग्यता सुनिश्चित करने का एकमात्र विकल्प $\chi \equiv \bot$ लेना है।

2. $\varphi \in \Gamma_1$ और $\varphi \in \Delta_2$। तब $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$ और $\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ दोनों अभिगृहीत हैं, इसलिए $\chi \equiv \varphi$ चुन सकते हैं।

3. $\varphi \in \Gamma_2$ और $\varphi \in \Delta_1$। तब $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ तथा $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi$ अभिगृहीत होते, पर उनमें φ गलत पक्षों पर है। इसलिए φ अंतर्वेशक नहीं है। किंतु $\neg$R और $\neg$L से हम $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi$ तथा $\neg\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ को सिद्ध कर सकते हैं।

4. $\varphi \in \Gamma_2$ और $\varphi \in \Delta_2$। अभ्यास।

वे स्थितियाँ अभ्यास के लिए छोड़ी जाती हैं जहाँ $\Gamma_1 ; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 ; \Delta_2$ इसलिए अभिगृहीत है कि $\bot \in \Gamma_1$ या $\bot \in \Gamma_2$।

यदि $n > 0$, तो π किसी तार्किक अनुमान पर समाप्त होता है। प्रयुक्त नियम और प्रमुख सूत्र के भाग के अनुसार स्थितियों में भेद करना होगा। प्रत्येक स्थिति में हम आगमन परिकल्पना का उपयोग कर सकते हैं: प्रमेय उन सभी प्रमाण π_1 के लिए सत्य है जिनमें $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$, और चाहे π_1 का अंतिम अनुक्रम दो भागों में किसी भी तरह विभाजित हो। कुछ विशेष स्थितियों पर विचार करें।

1. π, प्रमुख सूत्र $\neg\varphi$ वाले $\neg$R पर समाप्त होता है। दो स्थितियाँ हैं: $\neg\varphi$ के पहले या दूसरे भाग में होने के अनुसार π निम्न में से किसी एक पर समाप्त होता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \neg\varphi \,;\, \Delta_2}\ \neg\mathrm{R}$$

अथवा

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \neg\varphi}\ \neg\mathrm{R}$$

ध्यान दें कि यदि प्रमुख सूत्र $\neg\varphi$ पहले भाग में है, तो हमने सक्रिय सूत्र φ को भी आधार-वाक्य के पहले भाग में रखा है। यह चुनाव हम कर सकते हैं। यदि सक्रिय सूत्र को दूसरे भाग में रखते, तो आगमन परिकल्पना फिर भी लागू होती, किंतु तब हम कोई अंतर्वेशक न खोज पाते (अभ्यास: प्रयास करें)।

पहले उस स्थिति पर विचार करें जहाँ $\neg\varphi$ पहले भाग में है। आगमन परिकल्पना से π_1 के अंतिम अनुक्रम का कोई अंतर्वेशक, अर्थात् ऐसा सूत्र χ_1, है कि निम्न दोनों

$$\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{और} \qquad \chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

सिद्ध-योग्य हैं। हमें ऐसा सूत्र χ चाहिए कि निम्न दोनों सिद्ध-योग्य हों:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi, \chi \qquad \text{और} \qquad \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

स्पष्टतः हम $\chi \equiv \chi_1$ ले सकते हैं: आगमन परिकल्पना पहले ही बताती है कि दायाँ अनुक्रम सिद्ध-योग्य है, और बायाँ अनुक्रम आगमन परिकल्पना से मिले अनुक्रम पर $\neg$R लगाने से मिलता है। आगमन परिकल्पना यह भी बताती है कि $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\varphi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$। चूँकि $\mathcal{L}(\neg\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$ और $\mathcal{L}(\chi) = \mathcal{L}(\chi_1)$, हमें $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \neg\varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ मिलता है।

दूसरी परिस्थिति में स्थिति थोड़ी भिन्न है, क्योंकि $\neg\varphi$ दूसरे भाग में है। आधार-वाक्य के सक्रिय सूत्र को भी दूसरे भाग में रखते हैं और आगमन परिकल्पना निम्न पर लगाते हैं

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{और} \qquad \chi_1, \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

सिद्ध-योग्य हैं। यदि हम इनमें से दूसरे पर फिर $\neg$R नियम लगाएँ, तो निम्न के प्रमाण मिलते हैं

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{और} \qquad \chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \neg\varphi$$

यदि χ_1 अंतर्वेशक हो तो ठीक इन्हीं अनुक्रमों को सिद्ध-योग्य होना चाहिए; हम फिर $\chi \equiv \chi_1$ लेते हैं। पहले की तरह $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \neg\varphi)$।

2. π, प्रमुख सूत्र $\varphi \to \psi$ वाले $\to$R पर समाप्त होता है। $\varphi \to \psi$ के पहले या दूसरे भाग में होने के अनुसार फिर दो स्थितियाँ हैं। प्रमाण π निम्न में से किसी एक पर समाप्त होता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \psi \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi \to \psi \,;\, \Delta_2}\ \to\mathrm{R}$$

अथवा

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\varphi,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\psi\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\varphi\to\psi}\to\mathrm{R}$$

हमने फिर आधार-वाक्य के सक्रिय सूत्रों को उसी भाग में रखा है जिसमें निष्कर्ष का प्रमुख सूत्र है। पहली परिस्थिति में आगमन परिकल्पना लगाकर निम्न के प्रमाण पाते हैं

$$\varphi,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\psi,\chi_1 \qquad \text{और} \qquad \chi_1,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$$

बायाँ अनुक्रम $\to$R का उपयुक्त आधार-वाक्य है। अतः निम्न अनुक्रम सिद्ध-योग्य हैं:

$$\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\varphi\to\psi,\chi_1 \qquad \text{और} \qquad \chi_1,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$$

इसका अर्थ है कि χ_1, π के अंतिम अनुक्रम का भी अंतर्वेशक है, और हम एक बार फिर $\chi\equiv\chi_1$ ले सकते हैं। दूसरी परिस्थिति का उपचार उसी प्रकार होता है।

3. π, प्रमुख सूत्र $\varphi\to\psi$ वाले $\to$L पर समाप्त होता है। यदि $\varphi\to\psi$ पहले भाग में है, तो प्रमाण π निम्न पर समाप्त होता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\varphi\,;\,\Delta_2\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi,\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2\end{array}}{\varphi\to\psi,\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2}$$

आगमन परिकल्पना अब हमें चार सिद्ध-योग्य अनुक्रम देती है: दो बाएँ आधार-वाक्य के अंतर्वेशक χ_1 के लिए और दो दूसरे आधार-वाक्य के अंतर्वेशक χ_2 के लिए:

$$\begin{array}{rcrc}\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\varphi,\chi_1 & (1) & \chi_1,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2 & (2)\\ \psi,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\chi_2 & (3) & \chi_2,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2 & (4)\end{array}$$

यदि हम दुर्बलीकरण लगाकर (1) की दाईं ओर χ_2 और (3) की दाईं ओर χ_1 जोड़ें, तो अनुक्रम (1) और (3), $\to$L के आधार-वाक्य बन सकते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\varphi,\chi_1,\chi_2\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \psi,\Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\chi_1,\chi_2\end{array}}{\varphi\to\psi,\Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\chi_1,\chi_2}\to\mathrm{L}$$

$\vee$R लगाने से अनुक्रम मिलता है

$$\varphi\to\psi,\Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\chi_1\vee\chi_2$$

इससे संकेत मिलता है कि इस स्थिति में $\chi_1\vee\chi_2$ हमारा अंतर्वेशक हो सकता है। और वास्तव में शेष अनुक्रमों (2) और (4) से दूसरे आवश्यक अनुक्रम को सिद्ध किया जा सकता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_2\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_2,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_2\end{array}}{\chi_1\vee\chi_2,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_2}\vee\mathrm{L}$$

यह सत्यापित करना शेष है कि $\chi_1 \vee \chi_2$ सही भाषा में है। आगमन परिकल्पना देती है कि

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) && \text{और} \\ &\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\psi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) \end{aligned}$$

चूँकि

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi) && \text{और} \\ &\mathcal{L}(\psi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi) \end{aligned}$$

हमें दोनों मिलते हैं

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) && \text{और} \\ &\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) \end{aligned}$$

और फलतः $\mathcal{L}(\chi_1 \vee \chi_2) =$

$$\mathcal{L}(\chi_1) \cup \mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2),$$

जो वांछित है।

जहाँ $\varphi \to \psi$ दूसरे भाग में है वहाँ स्थिति भिन्न है, किंतु उसका उपचार इसी प्रकार होता है। आगमन परिकल्पना फिर चार सिद्ध-योग्य अनुक्रम देती है:

$$\begin{array}{lcrc} \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 & (1) & \chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi & (2) \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2 & (3) & \chi_2, \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 & (4) \end{array}$$

अब अनुक्रम (2) और (4)—कुछ दुर्बल किए गए सूत्रों सहित— $\to$L के आधार-वाक्य बनते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2} \to\mathrm{L}$$

हम फिर इसे ऐसे अनुक्रम में बदलना चाहते हैं जिसमें χ_1 और χ_2 से बना एक ही सूत्र हो, किंतु इस बार वह पूर्वपक्ष में चाहिए (क्योंकि अब हम दूसरे भाग से निपट रहे हैं)। $\wedge$L लगाने से काम बनता है; हमें अंतर्वेशक $\chi \equiv (\chi_1 \wedge \chi_2)$ लेना चाहिए। सौभाग्य से शेष अनुक्रमों (1) और (3) से दूसरे भाग के संगत अनुक्रम को सिद्ध कर सकते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \wedge \chi_2} \wedge\mathrm{R}$$

पहले की तरह $\mathcal{L}(\chi_1 \wedge \chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \varphi \to \psi)$।

4. π, प्रमुख सूत्र $\forall x\, \varphi(x)$ वाले $\forall$R पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1 \\ \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c) \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\, \varphi(x) \,;\, \Delta_2} \forall\mathrm{R}$$

अथवा

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\varphi(c)\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\forall x\,\varphi(x)}\;\forall\mathrm{R}$$

पहली परिस्थिति में आगमन परिकल्पना $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c), \chi_1$ और $\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ के प्रमाण देती है। पहले पर $\forall$R लगाकर $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\,\varphi(x), \chi_1$ मिलता है। (आइगेनचर-शर्त पूरी है, क्योंकि वह π के अंत में $\forall$R नियम में पहले से पूरी थी।) अतः यदि $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \forall x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ की शर्त पूरी हो, तो χ_1 अंतर्वेशक होगा। आगमन परिकल्पना से $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi(c)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$। इसलिए हमें c की चिंता करनी है—क्या c, χ_1 में आ सकता है? नहीं। यदि c, χ_1 में आता, तो $c \in \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi(c))$ (जो सत्य है) और $c \in \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ दोनों होते। किंतु तब c, π के $\forall$R अनुमान के निष्कर्ष में आता और आइगेनचर-शर्त का उल्लंघन होता।

दूसरी परिस्थिति समान है।

5. π, प्रमुख सूत्र $\exists x\,\varphi(x)$ वाले $\exists$R पर समाप्त होता है। फिर दो परिस्थितियाँ हैं। हम उस परिस्थिति पर विचार करते हैं जहाँ $\exists x\,\varphi(x)$ पहले भाग में है और दूसरी को अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

   पहली परिस्थिति में π निम्न पर समाप्त होता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\varphi(t)\,;\,\Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x)\,;\,\Delta_2}\;\exists\mathrm{R}$$

   आगमन परिकल्पना $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \chi_1$ और $\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ के प्रमाण देती है। पहले पर $\exists$R लगाकर $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\,\varphi(x), \chi_1$ मिलता है। अतः यदि $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ की शर्त पूरी हो, तो χ_1 फिर अंतर्वेशक होगा। यहाँ आगमन परिकल्पना $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x), \varphi(t)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ देती है। याद रखें कि हमने माना है कि कोई फलन-चिह्न नहीं है। इसका अर्थ है कि पद t केवल अचर हो सकता है, अर्थात् $t \equiv b$। यदि $b \notin \mathcal{L}(\chi_1)$, अथवा $b \in \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$, तो चिंता की बात नहीं: χ_1 को अंतर्वेशक ले सकते हैं। किंतु यदि $b \in \mathcal{L}(\chi_1)$ और $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ तो? सबसे पहले χ_1 में b की सभी आवृत्तियाँ चर y से बदलकर $\chi_1 \equiv \chi_1'[b/y]$ लिख सकते हैं, जहाँ χ_1' में b नहीं है। इसके अतिरिक्त या तो $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x))$ या $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$। क्रमशः $\chi \equiv \forall y\,\chi_1'(y)$ या $\chi \equiv \exists y\,\chi_1'(y)$ ले सकते हैं। पहली स्थिति में हमें मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\varphi(b),\chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\chi_1'(b)}\;\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\forall y\,\chi_1'(y)}\;\forall\mathrm{R}$$

   और

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b),\forall y\,\chi_1'(y),\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_2\end{array}}{\forall y\,\chi_1'(y),\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_2}\;\forall\mathrm{L}$$

ऊपर के अनुक्रमों के प्रमाण आगमन परिकल्पना से हैं (दूसरे में हम पूर्वपक्ष में $\forall y\, \chi_1'(y)$ द्वारा दुर्बलीकरण की ग्राह्यता लगाते हैं)। पहले प्रमाण में $\forall$R की आइगेनचर-शर्त पूरी है, क्योंकि $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x))$, और χ_1' को इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि उसमें b न हो।

दूसरी स्थिति में हमें (आगमन परिकल्पना और $\exists y\, \chi_1'(y)$ द्वारा दुर्बलीकरण की ग्राह्यता से) मिलता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(b), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)}\,\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y)}\,\exists\mathrm{R}$$

और

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b), \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array}}{\exists y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2}\,\exists\mathrm{L}$$

दूसरे प्रमाण में $\exists$L की आइगेनचर-शर्त पूरी है, क्योंकि $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$, और χ_1' को इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि उसमें b न हो।

अन्य स्थितियाँ समान हैं; उन्हें अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। □

माएहारा प्रमेय स्थापित कर लेने के बाद हम उससे क्रेग अंतर्वेशन प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 80.9 का प्रमाण. मान लें $\varphi \;\Rightarrow\; \psi$ सिद्ध-योग्य है। अंतर्वेशक χ पाने के लिए $\varphi\,; \;\Rightarrow\; ; \psi$ पर सहायक प्रमेय 80.10 लगाएँ। हमें $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$ और $\vdash \chi \Rightarrow \psi$ मिलता है। □

मान लें Γ, किसी भाषा $\mathcal{L}$ में वाक्यों का सिद्धांत है जिसमें कोई n-स्थानी विधेय-चिह्न R है। हम कहते हैं कि Γ, R को *परोक्ष रूप से परिभाषित करता है*, तभी और केवल तभी जब

$$\Gamma, \Gamma' \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n)),$$

जहाँ Γ', Γ में R की सभी आवृत्तियों को $R' \notin \mathcal{L}$ से बदलकर मिला है। Γ, R को *प्रत्यक्ष रूप से परिभाषित करता है*, तभी और केवल तभी जब R से रहित कोई $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ऐसा हो कि

$$\Gamma \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

स्पष्टतः यदि Γ, R को प्रत्यक्ष रूप से परिभाषित करता है, तो वह R को परोक्ष रूप से भी परिभाषित करता है। विलोम स्पष्ट नहीं है, किंतु फिर भी सत्य है:

सहायक प्रमेय 80.11 (बेथ परिभाष्यता प्रमेय). *यदि Γ, R को परोक्ष रूप से परिभाषित करता है, तो वह उसे प्रत्यक्ष रूप से भी परिभाषित करता है।*

प्रमाण. मान लें Γ, R को परोक्ष रूप से परिभाषित करता है। R', Γ' ऊपर जैसे हों और $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Gamma') = \mathcal{L} \setminus \{R\} \cup \{R'\}$। परिकल्पना से हमें मिलता है

$$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n))$$

c_1, ..., c_n ऐसे अचरों हों जो Γ में नहीं आते। उत्क्रमणीयता प्रमेय से हमें मिलता है

$$\Gamma, \Gamma', R(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n)$$

माएहारा प्रमेय को निम्न पर लगाएँ

$$\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) \; ; \Gamma' \Rightarrow \; ; R'(c_1, \ldots, c_n)$$

जिससे ऐसा $\varphi \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ मिलता है कि

$$\begin{aligned} \Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) &\Rightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \\ \varphi(c_1, \ldots, c_n), \Gamma' &\Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

के प्रमाण हैं। चूँकि $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\Gamma) \setminus \{R\}$, φ में R नहीं है। दूसरे अनुक्रम के प्रमाण में हर जगह R' को R से बदलकर निम्न का प्रमाण पाएँ

$$\varphi(c_1, \ldots, c_n), \Gamma \Rightarrow R(c_1, \ldots, c_n)$$

निम्न का प्रमाण पाने के लिए $\rightarrow$R और $\forall$R लगाएँ

$$\Gamma \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

इससे दिखता है कि $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, Γ में ρ को प्रत्यक्ष रूप से परिभाषित करता है। □

अंतर्वेशन के समतुल्य तीसरा परिणाम (जिसे उसकी तरह माएहारा प्रमेय से सिद्ध किया जा सकता है) यह है: यदि दो संगत सिद्धांत Γ_1, Γ_2 किसी पूर्ण सिद्धांत Γ को समाहित करते हैं, जिसकी भाषा $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ है, तो $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ संगत है।

याद रखें कि पूर्ण सिद्धांत वह है जिसकी भाषा के प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो $\Gamma \vdash \varphi$ या $\Gamma \vdash \neg\varphi$। चूँकि Γ_1 और Γ_2, Γ के संगत विस्तार हैं, Γ को संगत होना चाहिए। फलतः यदि φ, भाषा $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ में कोई वाक्य है, तो $\Gamma_1 \vDash \varphi$ और $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$ दोनों नहीं हो सकते। इसे देखने के लिए मान लें ऐसा कोई φ है। यदि $\Gamma_1 \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vDash \varphi$। अन्यथा Γ की पूर्णता से $\Gamma \vDash \neg\varphi$; और $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ होने से $\Gamma_1 \vDash \neg\varphi$, जिससे Γ_1 असंगत हो जाता। अतः $\Gamma \vDash \varphi$; और $\Gamma \subseteq \Gamma_2$ होने से $\Gamma_2 \vDash \varphi$। इसलिए $\Gamma \nvDash \neg\varphi$, अन्यथा Γ_2 असंगत होता।

प्रमाण के लिए संयुक्त भाषा $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ में ऐसे वाक्य φ का न होना ही पर्याप्त है जिसके लिए $\Gamma_1 \vDash \varphi$ और $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$। यहाँ हम माएहारा प्रमेय का उपयोग करके इसका प्रमाण-सैद्धांतिक प्रमाण देते हैं।

प्रमेय 80.12 (रॉबिन्सन संयुक्त संगति प्रमेय). *मान लें Γ_1, Γ_2 संगत सिद्धांत हैं, और भाषा $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ में कोई φ ऐसा नहीं है जिसके लिए $\Gamma_1 \vDash \varphi$ और $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$। तब $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ संगत है।*

प्रमाण. इसके विपरीत मान लें कि $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ असंगत है। तब अनुक्रम $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow$ का कोई प्रमाण है। $\Gamma_1 \; ; \Gamma_2 \Rightarrow \; ;$ पर माएहारा प्रमेय लगाकर भाषा $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ में ऐसा वाक्य φ पाएँ कि $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ और $\vdash \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \;$ । दूसरे से $\vdash \Gamma_2 \Rightarrow \neg\varphi$ मिलता है। किंतु हमने माना था कि ऐसा कोई वाक्य नहीं है। □

ऊपर हमने अप्रकट रूप से माना है कि सिद्धांत Γ, Γ_1, Γ_2 सीमित हैं। संहतता से परिणाम अनंत सिद्धांतों के लिए भी सत्य हैं।

प्रश्न

प्रश्न 80.1. सहायक प्रमेय 80.2 के प्रमाण में स्थिति D की उस उपस्थिति को सत्यापित करें जिसमें φ, π_1 के $\to$L पर समाप्त होने वाले अंतिम अनुमान में प्रमुख नहीं है। (ध्यान दें: इस अभ्यास का एक भाग यह स्पष्ट रूप से कहना है कि आपको क्या सिद्ध करना है, अर्थात् इस स्थिति में π का क्या रूप है।)

प्रश्न 80.2. सहायक प्रमेय 80.2 के प्रमाण में स्थिति D की उस उपस्थिति को सत्यापित करें जिसमें φ, π_1 के $\forall$L पर समाप्त होने वाले अंतिम अनुमान में प्रमुख नहीं है।

प्रश्न 80.3. सहायक प्रमेय 80.2 के प्रमाण में स्थिति E की उस उपस्थिति को सत्यापित करें जिसमें φ, π_1 और π_2 दोनों के अंतिम अनुमानों में प्रमुख है और $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$।

प्रश्न 80.4. सहायक प्रमेय 80.2 के प्रमाण में स्थिति E की उस उपस्थिति को सत्यापित करें जिसमें φ, π_1 और π_2 दोनों के अंतिम अनुमानों में प्रमुख है और $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$।

प्रश्न 80.5. सहायक प्रमेय 80.4 के प्रमाण में $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ वाली स्थिति सत्यापित करें। अर्थात् दिखाएँ कि यदि निम्न पर समाप्त होने वाला कोई प्रमाण π है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut_{CS}}$$

जिसमें π_1 और π_2 केवल $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$ कोटि के कट रखते हैं, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का ऐसा प्रमाण π' है जिसमें केवल $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$ कोटि के कट हैं।

प्रश्न 80.6. प्रमेय 80.8 के प्रमाण की उन स्थितियों का वर्णन करें जहाँ $\exists$L, $\to$R के आधार-वाक्य पर समाप्त होता है, और जहाँ $\forall$L, $\vee$L के बाएँ आधार-वाक्य पर समाप्त होता है।

प्रश्न 80.7. मान लें हमारे पास निम्न नियमों वाला संयोजक $\uparrow$ हो

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\varphi \uparrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \uparrow\mathrm{L} \qquad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \uparrow \psi}\ \uparrow\mathrm{R}$$

सहायक प्रमेय 80.10 के प्रमाण की उन स्थितियों को पूरा करके दिखाएँ कि माएहारा प्रमेय अब भी सत्य है जिनमें π इन नियमों में से किसी एक पर समाप्त होता है।

अध्याय 81

प्राकृतिक निगमन

81.1 परिचय

प्राकृतिक निगमन, प्रमाण प्रणालियों का ऐसा परिवार है जिसमें प्रत्येक तार्किक संयोजक या परिमाणक के लिए अनुमानों का एक युग्म होता है: एक संकारक को "प्रस्तुत" करता है (प्रवेशन नियम) और दूसरा संकारक का "विलोपन" करता है (विलोपन नियम)। उदाहरणतः $\to$Intro के निष्कर्ष में $\varphi \to \psi$ रूप के सूत्रों होते हैं और $\to$Elim के आधार-वाक्यों में $\varphi \to \psi$ रूप के सूत्रों होते हैं।

प्राकृतिक निगमन के पहले दो रूप 1930 के दशक में गेरहार्ड गेंट्सेन और स्तानिस्वाव याश्कोव्स्की ने प्रस्तुत किए। प्रमाण सिद्धांतकार अधिकतर गेंट्सेन की प्रणाली की चर्चा करते हैं, जबकि याश्कोव्स्की से अध्यापन में सर्वाधिक प्रयुक्त प्रणालियाँ उत्पन्न हुई। दोनों प्रणालियों में कोई *मान्यताओं* से आरंभ कर सकता है—ऐसे सूत्रों जिन्हें सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं, पर अन्य सूत्रों को सिद्ध करने में प्रयोग किया जा सकता है। पूरा प्रमाण ऐसी मान्यताओं पर निर्भर हो सकता है, और चूँकि वे अप्रमाणित हैं, प्रमाण अपना निष्कर्ष (अपना *अंतिम-सूत्र*) स्थापित नहीं करता, बल्कि केवल यह स्थापित करता है कि उसका निष्कर्ष मान्यताओं से निष्पन्न होता है।

कुछ अनुमान नियम ऐसे हैं जिनके निष्कर्ष अब कुछ मान्यताओं पर निर्भर नहीं रहते: वे मान्यताओं को "मुक्त" करते हैं। उदाहरणतः $\to$Intro नियम, मान्यता φ से निष्कर्ष ψ का प्रमाण लेता है और उसका निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ होता है। $\varphi \to \psi$ पर समाप्त होने वाला प्रमाण अब φ पर निर्भर नहीं है; मान्यता φ मुक्त कर दी जाती है। गेंट्सेन की प्रणालियों में प्रमाण, सूत्रों के वृक्ष होते हैं, मान्यताएँ सबसे ऊपर के सूत्रों होती हैं, और $\to$Intro जैसे नियमों पर ऐसे चिह्न होते हैं जो बताते हैं कि कौन-सी मान्यताएँ मुक्त की गई हैं। याश्कोव्स्की की प्रणालियों में किसी मान्यता पर निर्भर प्रमाण के अंशों को किसी ढंग से अलग किया जाता है, जैसे खड़ी रेखा के पीछे भीतर करके या डिब्बे में; मुक्त मान्यता φ और सशर्त का अनुवर्ती ψ डिब्बे की पहली और अंतिम पंक्तियाँ होते हैं, तथा $\to$Intro का निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ डिब्बे के बाहर होता है।

ये प्रणालियाँ "प्राकृतिक" हैं क्योंकि अनुमान नियम उस ढंग को प्रतिबिंबित करते हैं जिससे हम (या कम-से-कम गणितज्ञ) स्वाभाविक रूप से तर्क करते हैं। किसी काल्पनिक परिणाम (सशर्त) को स्थापित करने के लिए हम पूर्ववर्ती मानकर उससे अनुवर्ती सिद्ध करते हैं। यही $\to$Intro है। जब हमें कोई सशर्त $\varphi \to \psi$ और उसका पूर्ववर्ती φ ज्ञात हो, तो हम ψ निष्कर्षित करते हैं। यही $\to$Elim है। यह दिखाने के लिए कि किसी वियोजन $\varphi \vee \psi$ को मानने पर कोई निष्कर्ष सत्य है, हम स्थितियों द्वारा प्रमाण प्रयोग करते हैं। यही $\vee$Elim है। सामान्य दावा $\forall x\, \varphi(x)$ सिद्ध करने के लिए हम किसी मनमाने c के लिए $\varphi(c)$ सिद्ध करते हैं। यही $\forall$Intro है। और इसी प्रकार आगे।

उदाहरणतः गेंट्सेन-शैली के प्राकृतिक निगमन में $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ का यह एक सरल प्रमाण है:

$$x\,\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \vee \psi)}\,\to\text{Intro}$$

यह मान्यता φ से आरंभ होता है, $\varphi \vee \psi$ अनुमानित करने के लिए $\vee$Intro, और फिर $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ अनुमानित करने के लिए $\to$Intro का उपयोग करता है। $\to$Intro अनुमान मान्यता φ को मुक्त करता है; इसे चिह्न x बताता है।

प्रमाण सिद्धांतकार सूत्रों के वृक्षों पर काम करने वाली गेंट्सेन की मूल प्रणालियाँ पसंद करते हैं, यद्यपि एक रूपांतर भी प्रमाण सिद्धांत में महत्त्वपूर्ण है। मान्यताओं Γ से φ का प्रमाण दिखाता है कि φ, Γ से निष्पन्न होता है, अर्थात् $\Gamma \vDash \varphi$। प्राकृतिक निगमन के अनुमान नियमों को स्वाभाविक रूप से ऐसे तात्पर्यों के बारे में कुछ बताते हुए पढ़ा जा सकता है, उदाहरणतः $\to$Intro कहता है कि यदि $\Gamma + \varphi \vDash \psi$, तो $\Gamma \vDash \psi$। नियमों को सीधे इस तरह सूत्रबद्ध करना स्वाभाविक है कि वे अनुमान नियम के आधार-वाक्यों और निष्कर्ष, दोनों में मान्यताओं तथा उनसे निष्पन्न निष्कर्ष पर काम करें, अर्थात् वे अनुक्रमों $\Gamma \Rightarrow \varphi$ पर काम करें। ऐसी प्रणाली में ऊपर का सरल प्रमाण इस तरह दिखेगा:

$$x\,\dfrac{\dfrac{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\Rightarrow\; \varphi \to (\varphi \vee \psi)}\,\to\text{Intro}$$

जैसा आप देखते हैं, नियम वही हैं: वे $\Rightarrow$ के दाईं ओर के सूत्र पर काम करते हैं; बाईं ओर के सूत्रों केवल उन मान्यताओं को सूचीबद्ध करते हैं जिन पर वे प्रत्येक चरण में निर्भर हैं।

प्रवेशन/विलोपन नियम-युग्मों का पूरा समुच्चय अपने आप में शास्त्रीय तर्कशास्त्र के लिए पूर्ण नहीं है। हमें $\bot$ से संबंधित दो अतिरिक्त नियम जोड़ने होंगे। पहला "अंतर्ज्ञानवादी असंगति नियम" $\bot_I$, या "विस्फोट", है जो कहता है कि $\bot$ से हम कुछ भी अनुमानित कर सकते हैं। दूसरा अप्रत्यक्ष प्रमाण का शास्त्रीय सिद्धांत $\bot_C$ (या "शास्त्रीय असंगति नियम") है, जो कहता है कि यदि हम $\neg\varphi$ से $\bot$ को सिद्ध कर सकते हैं, तो हमने φ को सिद्ध कर दिया। यदि $\bot_C$को छोड़ दें, तो अंतर्ज्ञानवादी तर्कशास्त्र के लिए उपयुक्त प्रणाली मिलती है। यदि दोनों को छोड़ दें, तो वह "न्यूनतम तर्कशास्त्र" कहलाता है।

हम शास्त्रीय और अंतर्ज्ञानवादी तर्कशास्त्र के लिए गेंट्सेन-शैली के प्राकृतिक निगमन की चर्चा करेंगे। ये प्रणालियाँ **N1c** और **N1i** हैं। प्रणालियाँ **N2c** और **N2i** इनकी संगत प्रणालियाँ हैं, जो अकेले सूत्रों φ के स्थान पर अनुक्रमों $\Gamma \Rightarrow \varphi$ पर काम करती हैं।

81.2 नियम और प्रमाण

हम कुछ परिभाषाएँ देकर और कुछ शब्दावली नियत करके आरंभ करते हैं।

N1c और **N1i** के उन दो नियमों पर विचार करें जिनमें $\varphi \to \psi$ आता है।

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

$\to$Elim नियम पर्याप्त सरल है। रेखा के ऊपर के सूत्रों *आधार-वाक्य* हैं। बाईं ओर का सूत्र, *प्रमुख* सूत्र $\varphi \to \psi$ है। सभी विलोपन नियमों में ऐसा एक आधार-वाक्य होता है, सदा सबसे बाईं ओर। इसे अनुमान का *मुख्य* आधार-वाक्य कहते हैं। यदि अन्य हों, जैसा इस मामले में है, तो उन्हें *गौण* आधार-वाक्य कहते हैं। प्रवेशन नियमों के आधार-वाक्य को भी मुख्य आधार-वाक्य कहते हैं। रेखा के नीचे का सूत्र, *निष्कर्ष* है।

$\to$Intro नियम का केवल एक आधार-वाक्य है और यहाँ निष्कर्ष प्रमुख सूत्र $\varphi \to \psi$ है। सभी प्रवेशन नियम ऐसे ही हैं: निष्कर्ष प्रमुख सूत्र है; उसका मुख्य संकारक वही है जिसे "प्रस्तुत" किया जा रहा है।

संकेतन $[\varphi]^x$ का निम्न अर्थ है। किसी प्रमाण में $\to$Intro अनुमान को आधार-वाक्य के रूप में किसी सूत्र ψ पर लागू किया जाता है। ψ पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण में कई आरंभिक सूत्रों हैं। इन्हें *मान्यताएँ* कहते हैं। φ रूप की एक या अधिक मान्यताओं से ψ का प्रमाण, ऐसा प्रमाण है कि φ से ψ का तात्पर्य है। जब हम $\to$Intro नियम लागू करते हैं, तो $\varphi \to \psi$ निष्कर्षित करते हैं और निष्कर्ष अब मान्यता φ पर निर्भर नहीं रहता। इसे बताने के लिए $\to$Intro अनुमान सहित प्रमाण में φ रूप की मान्यताओं को *मुक्त* या *बंद* किया जाता है। नियम बताता है कि कौन-सी मान्यताएँ मुक्त की जा सकती हैं। निष्कर्ष $\varphi \to \psi$ वाले $\to$Intro के मामले में वे φ रूप की मान्यताएँ हैं, अर्थात् सशर्त के पूर्ववर्ती से मेल खाती हैं। कभी-कभी यह बताना महत्त्वपूर्ण होता है कि किस नियम पर कौन-सी मान्यताएँ मुक्त की गईं, और यह मुक्तिकरण चिह्न x से किया जाता है। महत्त्वपूर्ण है कि मान्यताएँ मुक्त करने वाले नियमों को अपेक्षित रूप की

सभी मान्यताएँ, बल्कि वास्तव में कोई भी मान्यता, मुक्त करना *आवश्यक नहीं*। उदाहरणतः निम्न सही है, यद्यपि पहला $\to$Intro कोई मान्यता मुक्त नहीं करता:

$$y\,\dfrac{x\,\dfrac{[\varphi]^y}{\psi \to \varphi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

जब कोई नियम किसी मान्यता को मुक्त नहीं करता, तो हम मुक्तिकरण चिह्न छोड़ देते हैं (जैसा यहाँ किया)।

प्रमाण में

$$y\,\dfrac{x\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x \qquad [\varphi]^y}{\varphi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{\varphi \to \varphi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \to \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

पहला $\to$Intro अनुमान बाईं मान्यता φ^x को और दूसरा दाईं मान्यता φ^y को मुक्त करता है। अर्थात् x से चिह्नित सभी मान्यताएँ, चिह्न x वाले $\to$Intro द्वारा और y चिह्न वाली सभी मान्यताएँ, चिह्न y वाले द्वारा मुक्त की जाती हैं। इसके काम करने के लिए यह महत्त्वपूर्ण है कि समान चिह्न वाली सभी मान्यताएँ समान सूत्र भी हों।

परिमाणक नियम कुछ अधिक जटिल हैं। उदाहरणतः **N1i** में $\exists$ के नियम हैं:

$$\dfrac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}\,\exists\text{Intro} \qquad x\,\dfrac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(c)]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\exists\text{Elim}$$

$\exists$Intro नियम में आधार-वाक्य $\varphi(t)$ है, जहाँ t कोई बंद पद, अर्थात् चरों से रहित पद, है। ऐसा अनुमान सही है—अर्थात् वह योजनाबद्ध नियम $\exists$Intro से मेल खाता है—यदि कोई सूत्र φ, कोई चर x और कोई बंद पद t ऐसा हो कि निष्कर्ष $\exists x\,\varphi$ और आधार-वाक्य $\varphi[t/x]$ हो। $\exists$Elim हमें $\varphi(c)$ रूप की मान्यताएँ मुक्त करने देता है, अर्थात् प्रत्येक अनुमान के लिए कोई अचर c है और $\varphi[c/x]$ रूप की मान्यताएँ मुक्त की जा सकती हैं। किसी एक अनुमान की सभी मुक्त मान्यताओं में वही c प्रयुक्त होना चाहिए। इस अचर को $\exists$Elim अनुमान का *आइगेनचर* कहते हैं। अनुमान तभी सही है जब c मुक्त की गई $\varphi(c)$ के अतिरिक्त किसी खुली मान्यता में न आए, ψ में न आए और φ में न आए। इसे *आइगेनचर शर्त* कहते हैं।

N1c और **N1i** में प्रमाण, अनुक्रमों के परिमित वृक्ष हैं जिन्हें अनुमान नियमों से अभिगृहीतों से आगमनात्मक रूप से उत्पन्न किया जाता है। प्रत्येक पत्ती एक मान्यता है, संभवतः मुक्तिकरण चिह्न से चिह्नित, और प्रत्येक अन्य सूत्र अपने ठीक ऊपर के सूत्रों से प्रणाली के किसी अनुमान नियम द्वारा निष्पन्न होता है। यदि किसी अनुमान के ऊपर वृक्ष में मान्यता के रूप में किसी सूत्र की उपस्थिति को उसके ऊपर के किसी अनुमान ने मुक्त नहीं किया, तो उसे (उस अनुमान पर) *खुला* कहते हैं।

परिभाषा 81.1. **N1c** और **N1i** में *प्रमाण*, निम्न प्रकार आगमनात्मक रूप से सूत्रों के परिमित वृक्ष हैं:

1. x या y जैसे मुक्तिकरण चिह्न से चिह्नित प्रत्येक सूत्र अपने आप में प्रमाण है। एक ही सूत्र से बने प्रमाण में वह सूत्र खुली मान्यता गिना जाता है।

2. यदि R ऐसा नियम है जिसके एक, दो या तीन आधार-वाक्य φ_1, φ_2, φ_3, निष्कर्ष φ हैं, और δ_1, δ_2, δ_3 क्रमशः φ_1, φ_2, φ_3 पर समाप्त होने वाले प्रमाण हैं, तो

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi}\,R$$

क्रमशः प्रमाण है, बशर्ते प्रमाण में मान्यता-चिह्न संगत हों (दो भिन्न सूत्रों का समान मुक्तिकरण चिह्न न हो) और अनुमान R के सही अनुप्रयोग हों।

3. नए प्रमाण में सबसे ऊपर की सूत्र उपस्थितियाँ, यदि वे δ_1, δ_2 या δ_3 की खुली मान्यताएँ हैं, तो नियम द्वारा मुक्त उपस्थितियों को छोड़कर प्रमाण की *खुली मान्यताएँ* गिनी जाती हैं। यदि नियम x (या $x\,y$) से चिह्नित है, तो $\to$Intro और $\neg$Intro के लिए ये δ_1 में x से चिह्नित सभी खुली मान्यताएँ हैं; $\exists$Elim के लिए δ_2 में x से चिह्नित सभी खुली मान्यताएँ; और $\vee$Elim के लिए δ_2 में x से चिह्नित तथा δ_3 में y से चिह्नित सभी खुली मान्यताएँ।

किसी प्रमाण के आगमनात्मक निर्माण में प्रयुक्त प्रमाण को उसके *उप-प्रमाण* कहते हैं। किसी अनुमान के आधार-वाक्यों पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण को उस अनुमान के *निकटस्थ उप-प्रमाण* कहते हैं। **N2c** और **N2i** के नियम सारणी 81.1 में दिए गए हैं।

परिभाषा 81.2. किसी प्रमाण δ की *ऊँचाई* $\mathrm{ht}(\delta)$ इस प्रकार आगमनात्मक रूप से परिभाषित है।

1. यदि δ किसी मान्यता से बना है, तो $\mathrm{ht}(\delta) = 0$।
2. यदि δ एक आधार-वाक्य वाले अनुमान पर समाप्त होता है जिसका निकटस्थ उप-प्रमाण δ_1 है, तो $\mathrm{ht}(\delta) = \mathrm{ht}(\delta_1) + 1$।
3. यदि δ दो आधार-वाक्यों वाले अनुमान पर समाप्त होता है जिसके निकटस्थ उप-प्रमाण δ_1 और δ_2 हैं, तो $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2)) + 1$।
4. यदि δ, $\vee$Elim पर समाप्त होता है जिसके निकटस्थ उप-प्रमाण δ_1, δ_2 और δ_3 हैं, तो $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1$।

यदि किसी अनुक्रम S का ऊँचाई $\leq n$ वाला प्रमाण है, तो हम $\vdash_n S$ लिखते हैं।

उदाहरण 81.3. **N1i** में कोई भी सूत्र, खुली मान्यता के रूप में स्वयं से प्रमाण गिना जाता है। अतः

$$\varphi \wedge \psi^x$$

एक प्रमाण δ_1 है। उसकी ऊँचाई 0 है। δ_1 से हम $\wedge$Elim के दो रूपों में से एक लागू करके दो प्रमाण δ_2 और δ_3 प्राप्त कर सकते हैं

$$\frac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1$$

δ_2 और δ_3 के अंतिम अनुमान का निकटस्थ उप-प्रमाण समान है: $\varphi \wedge \psi$। दोनों प्रमाण में $\varphi \wedge \psi$ की उपस्थिति खुली मान्यता है। हमारे पास $\mathrm{ht}(\delta_1) = \mathrm{ht}(\delta_2) = 1$ है।

नियम $\wedge$Intro को $\psi \wedge \varphi$ रूप के निष्कर्ष को उचित ठहराने के लिए ψ और φ रूप के दो आधार-वाक्य चाहिए। अतः निम्न एक प्रमाण δ_4 है:

$$\delta_2\left\{\frac{\dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}\right\}\delta_3$$

उसकी ऊँचाई $\mathrm{ht}(\delta_4) = \max(\mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1 = \max(1, 1) + 1 = 2$ है। उसमें मान्यताओं के रूप में $\varphi \wedge \psi$ की दो उपस्थितियाँ हैं और दोनों खुली हैं।

अंततः हम δ_5 पाने के लिए $\to$Intro लागू कर सकते हैं:

$$\delta_2\left\{\frac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,x\,\to\mathrm{Intro}\right\}\delta_3$$

उसकी ऊँचाई $\mathrm{ht}(\delta_4) + 1 = 3$ है। $\to$Intro अनुमान x से चिह्नित $\varphi \wedge \psi$ रूप की सभी मान्यता-उपस्थितियों को मुक्त करता है, अर्थात् निकटस्थ उपप्रमाण की दोनों पहले खुली मान्यताओं को। चूँकि वे ही δ_5 की एकमात्र मान्यताएँ हैं, उसकी कोई खुली मान्यता नहीं है और इसलिए वह अपने अंतिम-सूत्र $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$ *का* प्रमाण है।

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ {\to}\text{Intro} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ {\to}\text{Elim}$$

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ {\wedge}\text{Elim}_1$$

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ {\wedge}\text{Intro} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ {\wedge}\text{Elim}_2$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ {\vee}\text{Intro}_1$$

$$\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ {\vee}\text{Intro}_2 \qquad x\,y\,\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^y\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ {\vee}\text{Elim}$$

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ {\neg}\text{Intro} \qquad \dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ {\neg}\text{Elim}$$

$$\dfrac{\varphi(a)}{\forall x\,\varphi(x)}\ {\forall}\text{Intro} \qquad \dfrac{\forall x\,\varphi(x)}{\varphi(t)}\ {\forall}\text{Elim}$$

$$\dfrac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}\ {\exists}\text{Intro} \qquad x\,\dfrac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(a)]^x\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ {\exists}\text{Elim}$$

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot_I \qquad x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_C$$

तालिका 81.1: **N1i** और **N1c** के नियम। ∀Intro में अचर a निष्कर्ष या किसी खुली मान्यता में नहीं आना चाहिए। ∃Elim में a आधार-वाक्यों या किसी खुली मान्यता में नहीं आना चाहिए। **N1i** में $\bot_C$सम्मिलित नहीं है।

81.3 अनुक्रमों सहित प्राकृतिक निगमन: N2c और N2i

G1c या **G1i** में प्रमाण δ दिखाता है कि उसका अंतिम-सूत्र φ उसकी खुली मान्यताओं से निष्पन्न होता है। यदि Γ, सूत्रों ψ का वह समुच्चय है जहाँ ψ^x, δ में खुली मान्यता के रूप में आता है, तो इसे $\delta \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$ लिख सकते हैं। इससे संकेत मिलता है कि हम अनुक्रमों के लिए भी प्राकृतिक निगमन प्रणाली सूत्रबद्ध कर सकते हैं। ऐसी प्रणाली में प्रत्येक अनुक्रम यह जानकारी रखता है कि दाईं ओर का सूत्र किन खुली मान्यताओं पर निर्भर है, अर्थात् अनुक्रम पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण में कौन-सी मान्यताएँ खुली हैं। यह अनुक्रमों सहित प्राकृतिक निगमन, या "अनुक्रम शैली में" प्राकृतिक निगमन है, और हम फलित प्रणालियों को **N2c** तथा **N2i** कहते हैं।

N1 और **N2** के बीच संगति को अधिक निकट बनाने के लिए बाईं ओर के समुच्चयों Γ को चिह्नित सूत्रों $x : \psi$ से बना लें। चूँकि **N1** के नियम केवल आधार-वाक्यों के सूत्रों, अर्थात् निकटस्थ उप-प्रमाण के अंतिम-सूत्रों, पर काम करते हैं, इसलिए **N2** के नियम केवल अनुक्रम के अनुवर्ती पर काम करते हैं। अतः अनुक्रमों के बाईं ओर के चिह्नित सूत्रों को हम केवल प्रसंग कह सकते हैं।

मान्यताओं के स्थान पर **N2** प्रमाणों के सबसे ऊपर के अनुक्रम इस रूप के अभिगृहीत होते हैं

$$x : \varphi \Rightarrow \varphi.$$

नियम ठीक **N1** के नियमों के अनुरूप हैं और सारणी 81.2 में दिए गए हैं।

क्योंकि हमें (**N1c** और **N1i** की तरह) यह अनुमति देनी है कि नियम $\to$Intro, $\neg$Intro, $\vee$Elim और $\exists$Elim मान्यताओं को वास्तव में मुक्त कर सकते हैं, पर ऐसा आवश्यक नहीं, इसलिए हम **N2c** और **N2i** में संबद्ध नियमों के सही अनुप्रयोग तब भी स्वीकार करते हैं जब संबद्ध प्रसंग सूत्रों φ, ψ और $\varphi(a)$ संबद्ध आधार-वाक्य के प्रसंग में उपस्थित न हों।

प्रतिज्ञप्ति 81.4. *यदि δ, φ का* **N1c** *या* **N1i** *में कोई प्रमाण है, तो* **N2c (N2i)** *में $\Gamma \Rightarrow \varphi$ का कोई प्रमाण δ' है, जहाँ Γ उन सभी $x : \psi$ का समुच्चय है जिनके लिए ψ^x, δ की खुली मान्यता है।*

प्रमाण. $n = \mathrm{ht}(\delta)$ पर आगमन से। यदि $n = 0$, तो δ अकेली खुली मान्यता φ^x है। तब $\Gamma = \{x : \varphi\}$ और $\Gamma \Rightarrow \varphi$, **N2c** या **N2i** का अभिगृहीत है।

यदि $n > 0$, तो हम δ के अंतिम अनुमान के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं। हम केवल एक स्थिति की चर्चा करते हैं; शेष अभ्यास के रूप में छोड़ी जाती हैं।

मान लें अंतिम अनुमान $\to$Intro है। तब δ का अंत है

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

आगमन परिकल्पना से **N2c (N2i)** में $\Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण δ_1' है, जहाँ Γ' वे चिह्नित मान्यताएँ हैं जो δ_1 में खुली हैं। यदि ψ^x, δ_1 की खुली मान्यता है, तो उसे $\to$Intro अनुमान पर मुक्त किया जाता है और δ की खुली मान्यताएँ $\Gamma = \Gamma' \setminus \{x : \psi\}$ हैं। दूसरे शब्दों में δ_1', $x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi$ का प्रमाण है और हम δ' को यह ले सकते हैं

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ x : B, \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

यदि ψ^x, δ_1 की खुली मान्यता नहीं है, तो $\to$Intro कोई मान्यता मुक्त नहीं करता और δ तथा δ_1 की खुली मान्यताएँ समान हैं। चूँकि **N2c** और **N2i** में $\to$Intro के आधार-वाक्य में प्रसंग सूत्र $x : \psi$ का उपस्थित होना आवश्यक नहीं,

$$\frac{x:\varphi,\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi\to\psi}\to\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \varphi\to\psi \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \varphi}{\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \psi}\to\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi\wedge\psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\wedge\text{Elim}_1$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \varphi \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \psi}{\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \varphi\wedge\psi}\wedge\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi\wedge\psi}{\Gamma \Rightarrow \psi}\wedge\text{Elim}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi\vee\psi}\vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi\vee\psi}\vee\text{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \varphi\vee\psi \qquad x:\varphi,\Gamma_2 \Rightarrow \chi \qquad y:\psi,\Gamma_3 \Rightarrow \chi}{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3 \Rightarrow \chi}\vee\text{Elim}$$

$$\frac{x:\varphi,\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi}\neg\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \neg\varphi \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \varphi}{\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \bot}\neg\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x\,\varphi(x)}\forall\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \forall x\,\varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow \varphi(t)}\forall\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x\,\varphi(x)}\exists\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \exists x\,\varphi(x) \qquad x:\varphi(a),\Gamma_2 \Rightarrow \chi}{\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \chi}\exists\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\bot_I \qquad \frac{x:\neg\varphi,\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\bot_C$$

तालिका 81.2: **N2c** और **N2i** के नियम। $\forall$Intro और $\exists$Elim में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ_i, चिह्नित सूत्रों $x:\varphi$ के समुच्चय हैं। नियम $\forall$Intro और $\exists$Elim को आइगेनचर प्रतिबंध संतुष्ट करना चाहिए: a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। **N2i** में $\bot_C$सम्मिलित नहीं है।

हम δ' को यह ले सकते हैं

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'_1\\ \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

वे स्थितियाँ भी इसी प्रकार हैं जहाँ δ किसी अन्य नियम पर समाप्त होता है। □

प्रतिज्ञप्ति 81.5. *यदि $\delta, \Gamma \Rightarrow \varphi$ का* **N2c** *या* **N2i** *में कोई प्रमाण है, तो* **N1c (N1i)** *में कोई प्रमाण δ' है जिसका अंतिम-सूत्र φ और प्रत्येक $x:\psi \in \Gamma$ के लिए खुली मान्यता ψ^x है।*

प्रमाण. हम फिर δ की ऊँचाई n पर आगमन से आगे बढ़ते हैं। यदि $n = 0$, तो δ अभिगृहीत $x:\varphi \Rightarrow \varphi$ है। प्रमाण δ' मान्यता φ^x है।

यदि $n > 0$, तो हम δ के अंतिम अनुमान के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं। उदाहरणतः यदि वह अनुमान $\to$Intro है, तो δ का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x:\psi,\Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}\qquad \text{या}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

आगमन परिकल्पना से **N1c (N1i)** में χ का कोई प्रमाण है। पहली स्थिति में ψ^x, δ' की खुली मान्यता है; दूसरी में नहीं। हम प्रमाण δ' को यह ले सकते हैं

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}\qquad \text{या}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

क्रमशः। □

81.4 नियमित प्रमाण और प्रतिस्थापन

$\exists$Elim और $\forall$Intro नियमों पर लागू होने वाली "आइगेनचर शर्तों" के कारण परिमाणकों के नियम कुछ जटिलताएँ उत्पन्न करते हैं। इन अनुमानों में अचर c का कभी पुनः उपयोग न हो, यह सुनिश्चित करके इनमें से अधिकांश जटिलताओं को सँभाला जा सकता है। निम्नलिखित परिभाषा प्रस्तुत करें।

परिभाषा 81.6. कोई प्राकृतिक निगमन प्रमाण δ *नियमित* है यदि

1. कोई आइगेनचर a, एक से अधिक $\exists$Elim या $\forall$Intro अनुमान के आइगेनचर के रूप में प्रयुक्त न हो, और
2. यदि a किसी $\exists$Elim या $\forall$Intro अनुमान का आइगेनचर है, तो वह केवल क्रमशः गौण आधार-वाक्य या आधार-वाक्य तक जाने वाले निकटस्थ उप-प्रमाण में आए।

सहायक प्रमेय 81.7. *यदि δ नियमित है, χ पर समाप्त होता है, c ऐसा अचर है जो δ में आइगेनचर के रूप में प्रयुक्त नहीं, और t ऐसा पद है जिसमें δ का कोई आइगेनचर नहीं, तो c की प्रत्येक उपस्थिति को t से बदलकर δ से प्राप्त $\delta[t/c]$ एक नियमित प्रमाण है। $\delta[t/c]$ का अंतिम-सूत्र, $\chi[t/c]$ है। यदि φ^x, δ की खुली मान्यता है, तो $\varphi[t/c]^x$, $\delta[t/c]$ की खुली मान्यता है।*

प्रमाण. $\mathrm{ht}(\delta)$ पर आगमन से। यदि $\mathrm{ht}(\delta)=0$, तो वह केवल मान्यता φ^x से बना है। तब $\delta[t/c]$, $\varphi[t/c]^x$ है।

यदि $\mathrm{ht}(\delta)>0$, तो हम δ के अंतिम अनुमान के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं। प्रतिज्ञप्ति संयोजकों के नियमों की स्थितियाँ सरल हैं और अभ्यास के रूप में छोड़ी जाती हैं। हम उन स्थितियों पर विचार करते हैं जहाँ δ किसी परिमाणक अनुमान पर समाप्त होता है।

1. यदि अंतिम अनुमान $\forall$Intro है, तो δ इस रूप का है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi(a,c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,c)}\forall\text{Intro}$$

आगमन परिकल्पना से $\delta'[t/c]$, $\varphi(a,t)$ का नियमित प्रमाण है। चूँकि a, δ का आइगेनचर है, इसलिए a, t में नहीं आता। अतः $\delta[t/c]$ का अंतिम अनुमान,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \vdots\\ \varphi(a,t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t)}\ \forall\text{Intro}$$

सही है: चूँकि t में a नहीं है, इसलिए न निष्कर्ष न कोई खुली मान्यता a को समाहित करती है।

2. यदि अंतिम अनुमान $\forall$Elim है, तो δ इस रूप का है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \vdots\\ \forall x\,\varphi(x,c)\end{array}}{\varphi(s(c),c)}\ \forall\text{Elim}$$

आगमन परिकल्पना से $\delta'[t/c]$, $\forall x\,\varphi(x,t)$ का नियमित प्रमाण है। (निष्कर्ष का पद $s(c)$, c को समाहित कर सकता है, पर यह आवश्यक नहीं।) $\delta[t/c]$ का अंतिम अनुमान,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \vdots\\ \forall x\,\varphi(x,t)\end{array}}{\varphi(s(t),t)}\ \forall\text{Elim}$$

सही है और $\varphi(s(t),t) \equiv \varphi(s(c),c)[t/c]$। $\exists$Intro की स्थिति भी इसी प्रकार है।

3. यदि अंतिम अनुमान $\exists$Elim है, तो δ इस रूप का है

$$x\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ \vdots\\ \exists x\,\varphi(x,c)\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\varphi(a,c)]^x\\ \vdots\,\delta_2'\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ \exists\text{Elim}$$

आगमन परिकल्पना से $\delta_1'[t/c]$ और $\delta_2'[t/c]$ क्रमशः $\exists x\,\varphi(x,c)$ और खुली मान्यता $\varphi(a,t)$ से χ के नियमित प्रमाण हैं। चूँकि a, δ का आइगेनचर है, इसलिए a, t में नहीं आता। अतः $\delta[t/c]$ का अंतिम अनुमान,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \vdots\\ \varphi(a,t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t)}\ \forall\text{Intro}$$

सही है: $\varphi(x,t)[a/x] \equiv \varphi(a,c)[t/c]$, और न निष्कर्ष χ न कोई खुली मान्यता a को समाहित करती है। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 81.8. *यदि δ,* **N1c** *या* **N1i** *में कोई प्रमाण है, तो उसी संरचना (विशेषतः उसी ऊँचाई) वाला कोई नियमित प्रमाण δ' है, जो δ से केवल आइगेनचरों के प्रतिस्थापन में भिन्न है।*

प्रमाण. केवल इस प्रमाण के लिए, δ के किसी आइगेनचर अनुमान को *स्वच्छ* कहें यदि उसका आइगेनचर किसी अन्य अनुमान का आइगेनचर न हो और उस अनुमान के निकटस्थ उप-प्रमाण के अतिरिक्त δ में कहीं न आए; अन्यथा उसे *मलिन* कहें। मान लें n, δ में मलिन आइगेनचर अनुमानों की संख्या है। हम n पर आगमन से दिखाते हैं कि δ को आवश्यक नियमित प्रमाण δ' में बदला जा सकता है। यदि $n = 0$, तो δ में सभी आइगेनचर अनुमान स्वच्छ हैं, अतः δ नियमित है और कुछ सिद्ध नहीं करना। अन्यथा कोई सर्वोच्च आइगेनचर अनुमान, मान लें $\forall$Intro, चुनें। उस पर समाप्त होने वाला δ का उप-प्रमाण δ_1 इस रूप का है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi(c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\ \forall\text{Intro}$$

ध्यान दें कि c आइगेनचर है, इसलिए वह $\forall x\,\varphi(x)$ या किसी खुली मान्यता में नहीं आता। प्रमाण δ_2 नियमित है, क्योंकि उसमें कोई आइगेनचर अनुमान ही नहीं। मान लें a ऐसा अचर है जो δ में नहीं आता। सहायक प्रमेय 81.7 से $\delta_2[a/c]$, $\varphi(a)$ का नियमित प्रमाण है। आइगेनचर शर्त से δ_2 की किसी खुली मान्यता में c नहीं आता, अतः $\delta_2[a/c]$ की किसी खुली मान्यता में a नहीं आता। इसलिए हम $\forall$Intro लागू कर सकते हैं। यदि δ में δ_1 को प्रमाण δ_1' से बदलें,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2[a/c]\\ \varphi(a)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\ \forall\text{Intro}$$

तो हमने एक मलिन आइगेनचर अनुमान को स्वच्छ अनुमान से बदल दिया है और एकमात्र अंतर आइगेनचर c का a से प्रतिस्थापन है। फलित प्रमाण में $n-1$ मलिन आइगेनचर अनुमान हैं और परिणाम आगमन परिकल्पना से निष्पन्न होता है। □

हम अभी सिद्ध प्रतिज्ञप्ति का स्पष्ट रूप से आह्वान नहीं करेंगे, किंतु मानेंगे कि विचाराधीन सभी प्रमाण नियमित हैं—यदि वे न हों, तो आइगेनचर बदलकर उन्हें सदा नियमित बना सकते हैं।

सहायक प्रमेय 81.7 और प्रतिज्ञप्ति 81.8, **N2c** और **N2i** के लिए भी सत्य हैं। प्रमाण अभ्यास के रूप में छोड़ते हैं।

81.5 प्रमाण की कलमबंदी

N1c और **N1i** में प्रमाण, मान्यताओं ψ से सूत्रों φ के प्रमाण हैं। मान लें स्वयं ψ का कोई प्रमाण है। हम ψ के प्रमाण को ψ से φ के प्रमाण के साथ कैसे मिलाएँ कि φ का ऐसा प्रमाण मिले जो मान्यता ψ का उपयोग न करे?

एक विकल्प है $\to$Intro लागू करके φ के प्रमाण से मान्यता ψ को मुक्त करना। फिर $\psi \to \varphi$ के फलित प्रमाण को ψ के प्रमाण के साथ मिलाकर यह मिलता है

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi\to\chi}\ \to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi}\ \to\text{Elim}$$

यह सीधा है, किंतु कुछ असुंदर: $\to$ को प्रस्तुत करके तुरंत उसका विलोपन ही क्यों करें? $\psi \to \varphi$ से होकर इस प्रकार के "चक्कर" से बचना संभव होना चाहिए। (वास्तव में उन्हें सदा टाला जा सकता है, यही प्रसामान्यीकरण प्रमेय की विषयवस्तु है।)

N1c और **N1i** में इस मामले में हम इसे काफ़ी सरलता से टाल सकते हैं: मान्यताओं ψ^x को केवल ψ के पूरे प्रमाण से बदल सकते हैं। अन्य प्रमाण की मान्यताओं पर प्रमाण की यह "कलमबंदी" काफ़ी उपयोगी है, अतः हम इसे परिभाषा के रूप में दर्ज करते हैं।

परिभाषा 81.9. यदि δ_1, खुली मान्यता ψ^x से φ का कोई **N1c**-प्रमाण (या **N1i**-प्रमाण) है और δ_2, ψ का कोई **N1c**-प्रमाण (**N1i**-प्रमाण) है, तो $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ वह परिणाम है जो δ_1 में ψ^x की प्रत्येक अमुक्त उपस्थिति को δ_2 से बदलने पर मिलता है।

बशर्ते δ_1 और δ_2 में एक ही चिह्न वाले भिन्न मान्यता सूत्रों न हों और δ_2 की किसी खुली मान्यता में δ_1 का कोई आइगेनचर न हो, फलित $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ एक सही प्रमाण है और उसकी खुली मान्यताएँ δ_1 तथा δ_2 की खुली मान्यताएँ हैं। प्रमाण की कलमबंदी करते समय ये शर्तें सामान्यतः संतुष्ट होंगी। पहली तब संतुष्ट होती है जब δ_1 और δ_2 किसी बड़े प्रमाण के उपप्रमाण हों। यदि दूसरी संतुष्ट न हो, तो δ_1 के आइगेनचरों के नाम बदलकर उसे संतुष्ट कर सकते हैं।

एक संगत परिभाषा **N2c** और **N2i** पर लागू होती है।

परिभाषा 81.10. यदि δ_1, $x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ का कोई **N2c**-प्रमाण (या **N2i**-प्रमाण) है और δ_2, $\Gamma_2 \Rightarrow \psi$ का कोई **N1c**-प्रमाण (**N1i**-प्रमाण) है, तो $\delta_1[\delta_2/x : \psi]$ वह परिणाम है जो δ_1 के प्रत्येक अभिगृहीत $x : \psi \Rightarrow \psi$ को δ_2 से बदलकर और ऐसे अभिगृहीतों के नीचे प्रत्येक अनुक्रम के प्रसंग में Γ_2 जोड़कर मिलता है।

प्रतिज्ञप्ति 81.11. *यदि* $\delta_1 \vdash x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ *और* $\delta_2 \vdash \Gamma_2 \Rightarrow \psi$, *तो* $\delta_1[\delta_2/x : \psi] \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi$, *बशर्ते* δ_1 *का कोई आइगेनचर* Γ_2 *में न आए।*

प्रमाण. $\mathrm{ht}(\delta)$ पर आगमन से। □

81.6 G2i से N2i में अनुवाद

G2i में अनुक्रमों के पूर्वपक्ष सूत्रों के बहुसमुच्चय Γ हैं, जबकि **N2i** में अनुक्रमों के पूर्वपक्ष चिह्नित सूत्रों के ऐसे समुच्चय Γ' हैं जिनमें प्रत्येक चिह्न केवल एक बार आता है। कहें कि चिह्नित सूत्रों का कोई समुच्चय Γ', बहुसमुच्चय Γ के *अनुरूप* है, यदि प्रत्येक सूत्र φ के लिए Γ' में $x : \varphi$ रूप के अवयव की संख्या, Γ में φ की बहुलता (अर्थात् φ की प्रतियों की संख्या) से कम या बराबर हो।

प्रतिज्ञप्ति 81.12. *यदि* **G2i** + Cut $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, *तो* **N2i** $\vdash \Gamma' \Rightarrow \chi$, *जहाँ* Δ *रिक्त होने पर* $\chi \equiv \bot$ *और अन्यथा* $\Delta = \{\varphi\}$, *तथा* Γ', Γ *के अनुरूप है।*

प्रमाण. हम दिखाते हैं कि यदि π, **G2ci** में $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण है, तो Γ के अनुरूप कोई Γ' और **N2i** में $\Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण δ है। यह हम $n = \mathrm{ht}(\pi)$ पर आगमन से करते हैं।

यदि $n = 0$, तो π कोई अभिगृहीत है। यदि वह अभिगृहीत $\bot \Rightarrow$ है, तो δ अभिगृहीत $x : \bot \Rightarrow \bot$ है, अर्थात् $\Gamma' = \{x : \bot\}$ और $\chi \equiv \bot$। यदि π, $\varphi \Rightarrow \varphi$ रूप का अभिगृहीत है, तो δ, $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ है।

यदि $n > 0$, तो π किसी नियम R पर समाप्त होता है। आगमन परिकल्पना प्रत्याभूत करती है कि **N2c** में उस नियम के आधार-वाक्यों के अनुरूप अनुक्रमों के प्रमाण हैं। हम मान सकते हैं कि उन प्रमाणों के सभी मुक्तिकरण चिह्न भिन्न हैं और कोई चिह्न x, यदि कहीं मुक्त होता है, तो केवल उसे मुक्त करने वाले अनुमान के ऊपर आता है (आवश्यक होने पर पुनः चिह्नित करके)। फिर हम दिखाते हैं कि इन प्रमाण को मिलाकर उपयुक्त $\Gamma' \Rightarrow \chi$ के प्रमाण कैसे दिए जा सकते हैं। हम R के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं।

1. यदि R, WR है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ \mathrm{WR}$$

π_1 पर लागू आगमन परिकल्पना $\Gamma' \Rightarrow \bot$ का कोई प्रमाण देती है। $\Gamma' \Rightarrow \varphi$ का प्रमाण पाने के लिए हम $\bot_I$ लागू करते हैं।

2. यदि R, WL है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\ \text{WR}$$

π_1 पर लागू आगमन परिकल्पना $\Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण देती है, जिसे हम δ लेते हैं। ध्यान दें कि यदि Γ', Γ के अनुरूप है, तो वह φ, Γ के भी अनुरूप है, क्योंकि Γ' में $x : \varphi$ की संख्या Γ में φ की प्रतियों की संख्या से अधिक नहीं, और इसलिए $\Gamma \cup \{\varphi\}$ में φ की प्रतियों की संख्या से भी अधिक नहीं है।

3. यदि R, CL है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\ \text{CL}$$

π_1 पर लागू आगमन परिकल्पना $\Pi, \Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण देती है, जहाँ $\Pi \subseteq \{x : \varphi, y : \varphi\}$। यदि $\Pi = \{x : \varphi, y : \varphi\}$, तो π_1 के सभी चिह्नित सूत्रों $y : \varphi$ को $x : \varphi$ से बदलें। चूँकि x, π_1 के अंतिम अनुक्रम के प्रसंग में आता है, हम मान सकते हैं कि π_1 का कोई अनुमान $x : \psi$ रूप का सूत्र मुक्त नहीं करता, अर्थात् π_1 में किसी अनुक्रम के बाईं ओर कोई $x : \psi$ सक्रिय नहीं है। फलतः परिणाम अब भी **N2i** में प्रमाण है।

4. यदि R, $\rightarrow$R है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\text{R}$$

आगमन परिकल्पना से $x : \varphi, \Gamma' \Rightarrow \psi$ या $\Gamma' \Rightarrow \psi$ का कोई प्रमाण δ_1 है, जहाँ Γ', Γ के अनुरूप है। हम δ_1 और $\rightarrow$Intro के एक अनुप्रयोग को δ ले सकते हैं।

5. यदि R, $\rightarrow$L है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta}\ \rightarrow\text{L}$$

आगमन परिकल्पना $\Gamma'_1 \Rightarrow \varphi$ का प्रमाण δ_1 और $x : \psi, \Gamma'_2 \Rightarrow \chi$ अथवा $\Gamma'_2 \Rightarrow \chi$ का प्रमाण δ_2 देती है। यदि δ_2 दूसरे रूप का है, तो δ_2 स्वयं δ हो सकता है। अन्यथा हम π_1 के सभी सूत्रों और मुक्तिकरण चिह्नों को पुनः चिह्नित करके सुनिश्चित कर सकते हैं कि कोई चिह्न δ_1 और δ_2 दोनों में न आए। तब $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ के अनुरूप है। चूँकि $x : \psi$, δ_2 के अंतिम अनुक्रम में आता है, इसलिए δ_2 में मुक्तिकरण चिह्न x वाले किसी अनुमान में $x : \psi$ सक्रिय नहीं हो सकता। δ_2 के प्रत्येक अभिगृहीत $x : \psi \Rightarrow \psi$ को प्रमाण δ_3 से बदलें

$$\dfrac{x : \varphi \rightarrow \psi \;\Rightarrow\; \varphi \rightarrow \psi \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma'_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{x : \varphi \rightarrow \psi \;\Rightarrow\; \psi}\ \rightarrow\text{Elim}$$

और δ_2 में $x : \psi$ की प्रत्येक उपस्थिति को $x : \varphi \to \psi$ से बदलें। परिणाम $\delta_2[\delta_3/x : \psi]$, $x : \varphi \to \psi, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \chi$ का प्रमाण है।

6. यदि R, $\wedge$R है, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ \wedge\mathrm{R}$$

आगमन परिकल्पना $\Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ का प्रमाण δ_1 और $\Gamma_2' \Rightarrow \varphi$ का δ_2 देती है। π_2 में सभी सूत्रों और मुक्तिकरण चिह्नों को पुनः चिह्नित करके हम सुनिश्चित कर सकते हैं कि कोई चिह्न δ_1 तथा δ_2 दोनों में न आए। तब $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ के अनुरूप है। δ_1 और δ_2 के अंतिम अनुक्रमों पर $\wedge$Intro लागू करके हमें प्रमाण δ मिलता है।

7. यदि R, $\wedge$L है, तो उदाहरणतः π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\mathrm{L}$$

आगमन परिकल्पना से $x : \varphi, \Gamma' \Rightarrow \chi$ या $\Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण δ_1 है, जहाँ Γ', Γ के अनुरूप है। दूसरी स्थिति में हम δ_1 को δ ले सकते हैं। पहली स्थिति में ध्यान दें कि $x : \varphi$ अंतिम अनुक्रम में आता है, इसलिए δ_1 में मुक्तिकरण चिह्न x वाले किसी अनुमान में $x : \varphi$ सक्रिय नहीं है। प्रत्येक अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ को प्रमाण δ_2 से बदलें

$$\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\ \wedge\mathrm{Elim}$$

और $x : \varphi$ की प्रत्येक उपस्थिति को $x : \varphi \wedge \psi$ से बदलें, अर्थात् $\delta_1[\delta_2/x : \varphi]$ पर विचार करें। यह $x : \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \chi$ का प्रमाण है।

8. यदि R, Cutहै, तो π का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Cut}$$

आगमन परिकल्पना $\Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ का प्रमाण δ_1 और $x : \varphi, \Gamma_2' \Rightarrow \chi$ अथवा $\Gamma_2' \Rightarrow \chi$ का प्रमाण δ_2 देती है। दूसरी स्थिति में δ को δ_2 लें। अन्यथा δ_2 के प्रत्येक अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ को δ_1 से बदलें; इससे $\Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \chi$ का प्रमाण δ, अर्थात् $\delta_2[\delta_1/x : \varphi]$, प्राप्त होता है। □

81.7 N2 से G2 में अनुवाद

प्रतिज्ञप्ति 81.13. *यदि* **N2c** (**N2i**) $\vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$, *तो* **G2c** (**N2i**) + Cut $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta$, *जहाँ* Γ', Γ *से चिह्न हटाने पर मिले सूत्रों का बहुसमुच्चय है, और यदि* φ, $\perp$ *नहीं है तो* $\Delta = \{\varphi\}$, *तथा यदि है तो* $\Delta = \emptyset$।

प्रमाण. प्रमाण फिर $\Gamma \Rightarrow \varphi$ के प्रमाण δ की ऊँचाई पर आगमन से है। यदि δ अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ है, तो π उसका संगत अभिगृहीत $\varphi \Rightarrow \varphi$, अथवा $\varphi \equiv \perp$ होने पर $\perp \Rightarrow$ है।

यदि δ किसी अनुमान नियम पर समाप्त होता है, तो हम स्थितियों में भेद करते हैं:

1. यदि R, प्रमुख सूत्र $\psi \to \chi$ सहित $\to$Intro है और $x : \psi$ आधार-वाक्य के प्रसंग में उपस्थित पर निष्कर्ष के प्रसंग में अनुपस्थित है, तो δ का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \psi \to \chi}\;\to\text{Intro}$$

आगमन परिकल्पना $\psi, \Gamma' \Rightarrow \chi$ का (या $\chi \equiv \bot$ होने पर $\psi, \Gamma' \Rightarrow$ का) कोई प्रमाण π_1 देती है, जिससे हम $\to$R लागू करके π प्राप्त करते हैं ($\chi \equiv \bot$ की स्थिति में पहले WR लागू करके)।

2. यदि R, $\to$Intro है, किंतु $x : \psi$ आधार-वाक्य के प्रसंग में उपस्थित नहीं है, तो δ का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \psi \to \chi}\;\to\text{Intro}$$

आगमन परिकल्पना $\Gamma' \Rightarrow \chi$ का कोई प्रमाण π_1 देती है, जिससे हम ψ सहित WL, और फिर $\to$R लागू करके π प्राप्त करते हैं।

3. यदि R, $\to$Elim है, तो δ का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \psi \to \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\;\to\text{Elim}$$

जहाँ $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$। आगमन परिकल्पना $\Gamma_1' \Rightarrow \psi \to \varphi$ का प्रमाण π_1 और $\Gamma_2' \Rightarrow \psi$ का प्रमाण π_2 देती है। हमें प्रमाण π इस रूप में मिलता है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \psi \to \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2' \;\Rightarrow\; \psi\end{array} \qquad \varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{\psi \to \varphi, \Gamma_2' \;\Rightarrow\; \varphi}\;\to\text{L}}{\Gamma_1', \Gamma_2' \;\Rightarrow\; \varphi}\;\text{Cut}$$

बहुसमुच्चय $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$, $\Gamma' = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)'$ के बराबर न भी हो सकता है: उदाहरणतः यदि Γ_1 और Γ_2 दोनों में $x : \chi$ हो, तो $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$ में χ की दो प्रतियाँ हैं, पर $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)'$ में केवल एक। उपयुक्त CL अनुमान जोड़कर इसे ठीक कर सकते हैं।

$\varphi \equiv \bot$ होने पर δ_2 पर लागू आगमन परिकल्पना $\Gamma_2' \Rightarrow$ का कोई प्रमाण देती है, जिससे हम उपयुक्त WL अनुमान और φ सहित एक WR जोड़कर प्रमाण π प्राप्त कर सकते हैं।

4. यदि R, $\bot_C$है, तो δ का अंत है

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \bot\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi}\;\bot_C$$

आगमन परिकल्पना से $\neg\varphi, \Gamma' \Rightarrow$ का कोई प्रमाण π_1 है। हम प्रमाण π को यह लेते हैं

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad x : \neg\varphi, \Gamma' \Rightarrow \overset{\pi_1}{\vdots}}{\Gamma' \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}$$

ध्यान दें कि केवल $\bot_C$ का अनुवाद ऐसा प्रमाण π देता है जिसके दाईं ओर एक से अधिक सूत्र हैं। अर्थात् किसी **N2i** प्रमाण का अनुवाद एक **G2i**-प्रमाण है। $\square$

प्रश्न

प्रश्न 81.1. प्रतिज्ञप्ति 81.8 के प्रमाण में उस स्थिति का वर्णन कीजिए जहाँ सर्वोच्च आइगेनचर अनुमान $\exists$Elim है।

अध्याय 82

प्रसामान्यीकरण

82.1 परिचय

यदि आपने किसी प्रतिबंधक $\varphi \to \psi$ को सिद्ध किया है, तो संभव है कि $\to$Elim का उपयोग करके आप उसे ψ के किसी प्रमाण में लगा सकें। इसके लिए निश्चय ही φ का कोई प्रमाण δ_1 भी चाहिए। बहुत संभव है कि $\varphi \to \psi$ का आपका प्रमाण δ_1, $\to$Intro पर समाप्त हो, जो खुली मान्यता φ से ψ के प्रमाण δ_2 को $\varphi \to \psi$ के प्रमाण में बदलता है। यदि ऐसा है, तो आपके अंतिम प्रमाण का रूप है

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}$$

आपकी युक्ति इस अर्थ में दक्ष है कि आपने पहले से उपलब्ध वस्तु ($\varphi \to \psi$ के प्रमाण) का पुनः उपयोग किया, पर आपका प्रमाण दक्ष नहीं है। $\varphi \to \psi$ को प्रस्तुत करके तुरंत उसका विलोपन करना एक चक्कर जैसा लगता है। ψ को सिद्ध करने का कोई अधिक सीधा मार्ग होना चाहिए।

वास्तव में ऐसा मार्ग सदा होता है। ऊपर जैसे "चक्कर"— प्रवेशन नियम के तुरंत बाद लगा विलोपन नियम—प्राकृतिक निगमन के प्रमाण से सदा हटाए जा सकते हैं। इसे *प्रसामान्यीकरण* कहते हैं और परिणाम एक *प्रसामान्य* प्रमाण (या *प्रसामान्य रूप में* प्रमाण) होता है।

अनुक्रम कलन के कट-विलोपन प्रमेय की तरह इस परिणाम का प्रमाण कुछ जटिल है और बहुत-सी स्थितियों पर विचार माँगता है। चिरसम्मत **N1c** के लिए इसे सिद्ध करना अंतःप्रज्ञात्मक **N1i** की अपेक्षा कठिन है। जैसे कट-विलोपन दिखाता है कि अनुक्रम कलन में Cut नियम का उपयोग करके आप उससे अधिक कुछ सिद्ध नहीं कर सकते जितना उसके बिना, वैसे ही प्रसामान्यीकरण दिखाता है कि चक्करों के उपयोग से आप उनसे बचते हुए किए जा सकने वाले प्रमाणों से अधिक कुछ सिद्ध नहीं कर सकते। अन्य समानताएँ भी हैं: किसी परिणाम का प्रसामान्य प्रमाण, उसी परिणाम के चक्कर वाले सबसे छोटे प्रमाण से बहुत लंबा हो सकता है, ठीक जैसे अनुक्रम कलन में कट वाला प्रमाण, सबसे छोटे कट-मुक्त प्रमाण से बहुत छोटा हो सकता है। उप-सूत्र गुण—कि किसी परिणाम को सदा ऐसे प्रमाण से सिद्ध किया जा सकता है जिसमें केवल उस परिणाम के उप-सूत्रों प्रयुक्त हों—प्राकृतिक निगमन के लिए प्रसामान्यीकरण से वैसे ही मिलता है जैसे अनुक्रम कलन के लिए कट-विलोपन से।

82.2 खंड और कट

प्रवेशन नियम के बाद आने वाला विलोपन नियम किसी प्रमाण में चक्कर है, और किसी प्रमाण का प्रसामान्यीकरण ऐसे चक्करों को हटाना है। किंतु $\vee$Elim और $\exists$Elim, "जिस चक्कर को हम हटाना चाहते हैं" की परिभाषा को भी कुछ

जटिल बना देते हैं। समस्या यह है: इन नियमों के कारण यह निश्चित नहीं कि किसी चक्कर में विलोपन नियम, प्रवेशन नियम के *तुरंत* बाद ही आए। बीच में $\vee$Elim या $\exists$Elim हो सकता है, उदाहरणतः

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array}\;{}_y \qquad x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,\exists\text{Elim} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

वास्तव में $\vee$Elim या $\exists$Elim के कितने ही अनुप्रयोग $\to$Intro को $\to$Elim से अलग कर सकते हैं, उदाहरणतः

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array}\;{}_y \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \theta\vee\alpha\end{array} \quad x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to\text{Intro} \quad x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,\vee\text{Elim}}{\varphi\to\psi}\,\exists\text{Elim} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

यह उदाहरण दिखाता है कि एक ही $\to$Elim अनेक चक्करों में सम्मिलित हो सकता है, क्योंकि वह एक से अधिक $\to$Intro के बाद आता है। इन सभी संभावनाओं को समेटने के लिए हम किसी **N1i**-प्रमाण में सूत्र की आवृत्तियों के कुछ विशेष प्रकार के अनुक्रमों द्वारा चक्करों को परिभाषित करते हैं; इन्हें *खंड* कहते हैं। हमारे उदाहरण में यह $\varphi\to\psi$ की आवृत्तियों का ऐसा अनुक्रम है जिसमें $\vee$Elim या $\exists$Elim का गौण आधार-वाक्य उसके निष्कर्ष के बाद आता है। उदाहरण में ऐसे दो खंड हैं, और प्रत्येक में $\varphi\to\psi$ की तीन आवृत्तियाँ हैं। औपचारिक परिभाषा यह है।

परिभाषा 82.1. किसी **N1i** प्रमाण δ में *खंड*, उसी सूत्र φ की आवृत्तियों φ_1, ..., φ_n का ऐसा अनुक्रम है जिसमें

1. φ_1, $\vee$Elim या $\exists$Elim का निष्कर्ष नहीं है;
2. φ_n, $\vee$Elim या $\exists$Elim का गौण आधार-वाक्य नहीं है;
3. $i = 1$, ..., $n-1$ के लिए φ_i, $\vee$Elim या $\exists$Elim का गौण आधार-वाक्य और A_{i+1} उस अनुमान का निष्कर्ष है।

उस खंड की *लंबाई* n है।

हर खंड विलोपन का लक्ष्य (चक्कर) नहीं होता। जो होते हैं उन्हें *कट* कहते हैं।

परिभाषा 82.2. *कट* ऐसा खंड है जिसमें φ_n किसी विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य हो, और या तो $n = 1$ तथा $\varphi_1 = \varphi_n$ किसी प्रवेशन अनुमान या $\bot_I$का निष्कर्ष हो, अथवा $n > 1$ हो।

ध्यान दें कि कट खंड का प्रवेशन नियम के निष्कर्ष से आरंभ होना आवश्यक नहीं है। केवल यह आवश्यक है कि वह किसी विलोपन नियम के मुख्य आधार-वाक्य पर समाप्त हो। किंतु लंबाई 1 के खंड को कट मानने के लिए उसका प्रवेशन नियम का निष्कर्ष होना आवश्यक है।

परिभाषा 82.3. किसी कट की *कोटि* $\mathrm{dp}(\varphi)$ है। किसी प्रमाण δ की *कट कोटि* $\mathrm{cr}(\delta)$, δ के कटों की अधिकतम कोटि है। कोई कट δ में *महत्तम* है यदि उसकी कोटि $\mathrm{cr}(\delta)$ है, अर्थात् उसकी कोटि अधिकतम है। δ की *कट लंबाई* उसके सभी महत्तम कटों की लंबाइयों का योग है।

82.3 क्रम-विनिमय रूपांतरण

N1i में कट ऐसे खंड हैं जो किसी विलोपन नियम के मुख्य आधार-वाक्य पर समाप्त होते हैं। प्रसामान्यीकरण प्रमाण की एक स्थिति में महत्तम कटों की लंबाई, और उसके साथ प्रमाण की कट लंबाई, घटानी होती है। लंबाई > 1 वाला कट अनेक ढंगों से समाप्त हो सकता है, जो इस पर निर्भर है कि कट में φ की अंतिम सूत्र-आवृत्ति ($\vee$Elim या $\exists$Elim) का निष्कर्ष है या नहीं, और वह किस विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य है।

उदाहरणतः यदि संबंधित अनुमान $\vee$Elim और $\wedge$Elim हैं, $\varphi \equiv \psi \vee \chi$, और कोई उप-प्रमाण δ_1 निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi\wedge\chi\end{array}\quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,x\,y\;\vee\text{Elim}}{\psi}\;\wedge\text{Elim}_1$$

कट की अंतिम सूत्र-आवृत्ति φ_n, $\vee$Elim का निष्कर्ष, नीचे वाला $\psi \wedge \chi$, है। अंतिम से पहले की सूत्र-आवृत्ति φ_{n-1}, $\vee$Elim के गौण आधार-वाक्यों में से एक है।

इस कट की लंबाई घटाने के लिए हम $\vee$Elim और $\wedge$Elim अनुमानों का क्रम बदल ("क्रम-विनिमय कर") सकते हैं। अर्थात् δ में उपप्रमाण δ_1 को निम्न से बदलते हैं:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_1\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_1}{\psi}\,x\,y\;\vee\text{Elim}}$$

जो कट $\vee$Elim के नीचे $\wedge$Elim के आधार-वाक्य पर समाप्त होते थे, वे अब $\vee$Elim के गौण आधार-वाक्यों के ऊपर स्थित $\wedge$Elim अनुमानों में से एक के आधार-वाक्य पर समाप्त होते हैं; अर्थात् प्रत्येक की लंबाई 1 घटी है।

इसके अतिरिक्त δ_2, δ_3 या δ_4 के पूर्णतः भीतर, अथवा δ में δ_1 के पूर्णतः बाहर स्थित कोई भी कट अपरिवर्तित है: उसमें अब भी वही सूत्रों और वही अनुमान सम्मिलित हैं, अतः विशेषतः उसकी कोटि और लंबाई δ के संगत कट जैसी हैं। इसलिए नए प्रमाण की कट कोटि नहीं बढ़ी, और उसकी कट लंबाई पुराने प्रमाण से कम है।

किसी विलोपन नियम को $\vee$Elim या $\exists$Elim नियम के ऊपर ले जाने की प्रक्रिया को *क्रम-विनिमय रूपांतरण* कहते हैं। कुछ नियम-युग्मों के प्रतिरूप सारणी 82.1 में दिए गए हैं। (शेष अभ्यास के लिए छोड़े गए हैं।)

$$\dfrac{\dfrac{\theta\vee\alpha\quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}\quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,x\,y\;\vee\text{Elim}}{\psi}\;\wedge\text{Elim}_1 \quad\longrightarrow$$

$$\dfrac{\theta\vee\alpha\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_1\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_1}{\psi}\,x\,y\;\vee\text{Elim}$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\,\vee\text{Elim} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim}
\qquad \longrightarrow
$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim}}{\chi}\,\vee\text{Elim}
$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\,\vee\text{Elim} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim}
\qquad \longrightarrow
$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi \to \chi\end{array} \qquad \psi}{\chi}\,\to\text{Elim}}{\chi}\,\vee\text{Elim}
$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\forall x\,\psi(x)}\,\vee\text{Elim}}{\psi(t)}\,\forall\text{Elim}
\qquad \longrightarrow
$$

$$
x\,y\;\dfrac{\theta \vee \alpha \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)}\,\forall\text{Elim}}{\psi(t)}\,\vee\text{Elim}
$$

तालिका 82.1: **N1i** के कुछ क्रम-विनिमय रूपांतरण।

हमें आश्वस्त कर लेना चाहिए कि क्रम-विनिमय रूपांतरण लगाते समय हम कहीं आइगेनचर की किसी शर्त का

उल्लंघन तो नहीं करते। विचार करें

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}\quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}}{\exists x\,\psi(x)}\,{\scriptstyle x\,y}\ \vee\text{Elim}\quad \begin{array}{c}[\psi(c)]^z\\ \vdots\,\delta_5\\ \chi\end{array}}{\chi}\,{\scriptstyle z}\ \exists\text{Elim}$$

यदि हम इसे निम्न से बदलें

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}\quad \begin{array}{c}[\psi(c)]^z\\ \vdots\,\delta_5\\ \chi\end{array}}{\chi}\,{\scriptstyle z}\ \exists\text{Elim}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}\quad \begin{array}{c}[\psi(c)]^z\\ \vdots\,\delta_5\\ \chi\end{array}}{\chi}\,{\scriptstyle z}\ \exists\text{Elim}}{\chi}\,{\scriptstyle x\,y}\ \vee\text{Elim}$$

तो हमें चिंता हो सकती है कि आइगेनचर c, मान लें, θ में आता हो। आखिर मान्यता θ मूल $\exists$Elim के ऊपर मुक्त होती है, इसलिए मूल प्रमाण में वह ऐसी मान्यता में नहीं आती जो $\exists$Elim अनुमान के मुख्य आधार-वाक्य के ऊपर खुली हो; अतः वहाँ आइगेनचर की शर्त पूरी होती है। पर नए प्रमाण में θ, $\exists$Elim अनुमानों के बाद तक मुक्त नहीं होती, इसलिए आइगेनचर की शर्त का उल्लंघन होता प्रतीत होगा। किंतु याद रखें कि हम अपने प्रमाण को नियमित मानते हैं: प्रत्येक आइगेनचर केवल एक अनुमान का आइगेनचर है और प्रमाण में केवल $\exists$Elim के गौण आधार-वाक्य के ऊपर आता है। विशेषतः c, δ_3 या δ_4 में नहीं आ सकता।

यह उदाहरण एक और बात दिखाता है: ध्यान दें कि नए प्रमाण में δ_5 की दो प्रतियाँ हैं। इसका अर्थ है कि यदि δ_5 में कोई महत्तम कट है, तो हमने कट लंबाई *नहीं* घटाई!इसलिए हमें क्रम-विनिमय रूपांतरण केवल तभी लगाना चाहिए जब हमें ज्ञात हो कि δ_5 में कोई महत्तम कट नहीं है। इसे हम सदा किसी *सबसे ऊपर के* महत्तम कट को चुनकर सुनिश्चित करेंगे; अर्थात् ऐसा महत्तम कट जिसके उप-प्रमाण (यहाँ δ_1) में उप-प्रमाण के अंतिम अनुमान के ऊपर समाप्त होने वाला कोई महत्तम कट न हो। इससे δ_5 में (और वास्तव में δ_2, δ_3 या δ_4 में भी) अन्य महत्तम कट होने की संभावना समाप्त हो जाती है।

82.4 अपचयन रूपांतरण

यदि **N1i** के किसी प्रमाण में कट की लंबाई 1 है, तो वह किसी एक सूत्र-आवृत्ति वाला खंड है, और वह सूत्र किसी प्रवेशन अनुमान का निष्कर्ष तथा किसी विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य दोनों है। प्रसामान्यीकरण प्रमाण में ऐसे कटों का "अपचयन" उस प्रवेशन/विलोपन युग्म पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण को ऐसे नए प्रमाण से बदलकर किया जाता है जिसमें अनुमानों का वह युग्म हटा दिया गया हो। ऐसे प्रतिस्थापन से नए कट बन सकते हैं। किंतु हम देख सकते हैं कि नए कटों की कोटि अपचयित किए जा रहे कट से कम होती है। अतः नए प्रमाण की या तो कट लंबाई कम है (क्योंकि लंबाई 1 वाला कोई महत्तम कट हट गया), या उसकी कट कोटि कम हो गई है (यदि संबंधित महत्तम कट ही एकमात्र महत्तम कट था)।

उदाहरणतः यदि संबंधित अनुमान $\to$Intro और $\to$Elim हैं, $\varphi \equiv \psi \to \chi$, और कोई उप-प्रमाण δ_1 निम्न पर समाप्त होता है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\,{\scriptstyle x}\ \to\text{Intro}\quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\ \to\text{Elim}$$

इस कट को हटाने के लिए हम δ में उपप्रमाण δ_1 को निम्न से बदलते हैं:

$$\begin{array}{c} \vdots\,\delta_3 \\ \psi \\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^x] \\ \chi \end{array}$$

$\delta_2[\delta_3/\psi^x]$ से हमारा आशय उस प्रमाण से है जो δ_2 में x से चिह्नित प्रत्येक मान्यता ψ को पूरे प्रमाण δ_3 से बदलने पर प्राप्त होता है। इस प्रमाण में अब x से चिह्नित ψ रूप की खुली मान्यताएँ नहीं हैं। इसमें x से चिह्नित कोई दूसरी मान्यता भी नहीं है, क्योंकि सदा की तरह हम मानते हैं कि कोई दो सूत्रों एक ही चिह्न वाली मान्यताओं के रूप में नहीं आते। अतः नए प्रमाण की खुली मान्यताएँ δ_1 जैसी ही हैं; δ_2 का मान्यताएँ मुक्त करने वाला हर अनुमान $\delta_2[\delta_3/\psi^x]$ में उन्हीं मान्यताओं को मुक्त करता है; और δ_3 का मान्यताएँ मुक्त करने वाला हर अनुमान संभवतः अनेक प्रतियों में परिणत होता है, जो $\delta_2[\delta_3/\psi^x]$ में संगत मान्यताओं को मुक्त करती हैं।

δ_2, δ_3 या δ_4 के पूर्णतः भीतर, अथवा δ में δ_1 के पूर्णतः बाहर स्थित कोई भी कट अपरिवर्तित रहता है: उसमें अब भी वही सूत्रों और वही अनुमान सम्मिलित हैं, इसलिए विशेषतः उसकी कोटि और लंबाई δ के संगत कट जैसी ही हैं। हमने लंबाई 1 का कोई महत्तम कट हटाया है; इसलिए या तो कट लंबाई कम हुई है, अथवा कट कोटि कम हुई है (यदि δ की कट लंबाई 1 थी और यही एकमात्र महत्तम कट था)।

किंतु दो बातें हो सकती हैं:

1. सभी मान्यताओं ψ^x को δ_3 से बदलने पर हमने δ_3 के सभी कटों की प्रतियाँ बढ़ा दी हैं। यदि उनमें से कुछ महत्तम कट थे, तो नए प्रमाण की कट लंबाई पुराने प्रमाण की कट लंबाई से अधिक हो सकती है। हमें इसकी रोकथाम सुनिश्चित करनी है। इसके लिए अपचयन रूपांतरण केवल *सबसे दाएँ* महत्तम कटों पर लगाते हैं; अर्थात् ऐसे कटों पर जिनसे दाईं ओर δ से गुजरती किसी शाखा पर कोई महत्तम कट न हो। यदि δ_3 में कोई कट होता, तो वह यहाँ अपचयित किए जा रहे कट के दाईं ओर होता और हम सबसे दाएँ कट पर काम नहीं कर रहे होते। सदा सबसे दाएँ कट चुनकर हम सुनिश्चित करते हैं कि या तो प्रमाण की कट लंबाई घटेगी, या कट कोटि भी घट जाएगी।

2. यदि δ_2 की कोई मान्यता ψ^x किसी विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य है, और δ_3 का अंतिम अनुमान $\vee$Elim, $\exists$Elim, या कोई प्रवेशन अनुमान है, तो ऐसी मान्यता पर δ_3 को δ_2 में कलम करके हमने नया कट बना दिया है। जो δ_2 में केवल मान्यता थी वह अब लंबाई 1 का कट (प्रवेशन अनुमान का निष्कर्ष और विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य), अथवा किसी कट खंड की अंतिम सूत्र-आवृत्ति (विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य और $\vee$Elim या $\exists$Elim का निष्कर्ष) है। यदि B^x, $\vee$Elim या $\exists$Elim का गौण आधार-वाक्य था, तो वह पहले से किसी खंड, और संभवतः कट खंड, की पहली सूत्र-आवृत्ति था। नए प्रमाण में वह खंड अब अधिक लंबा हो सकता है। किंतु ध्यान दें कि इस नए कट या विद्यमान कट खंड को बनाने वाला सूत्र ψ है और $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \to \chi)$। अतः यद्यपि हमने संभवतः कट जोड़े या उनकी लंबाई बढ़ाई है, इनमें से कोई महत्तम कट नहीं है। इसलिए या तो कट कोटि घटी है, या समान कोटि के कट शेष हों तो कट लंबाई घटी है।

लंबाई 1 के कट के अपचयन की प्रक्रिया को *अपचयन रूपांतरण* (या *चक्कर रूपांतरण*) कहते हैं। कुछ नियम-युग्मों के प्रतिरूप सारणी 82.2 में दिए गए हैं। (शेष अभ्यास के लिए छोड़े गए हैं।)

एक स्थिति पर अभी विचार शेष है। कट की परिभाषा में वह स्थिति भी है जहाँ कट की लंबाई 1 है और φ, $\bot_I$ का निष्कर्ष तथा किसी विलोपन अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य दोनों है। इस स्थिति से उसी प्रकार निपटते हैं जैसे उस स्थिति से जिसमें φ किसी प्रवेशन नियम का निष्कर्ष हो। उदाहरणतः निम्न को बदलें

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi \to \chi} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\ \to\text{Elim} \quad \text{से} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\chi}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\,x\,{\to}\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\,{\to}\text{Elim}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^x]\\ \chi\end{array}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,\wedge\text{Intro}}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_1
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,\wedge\text{Intro}}{\chi}\,\wedge\text{Elim}_2
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\psi\vee\chi}\,\vee\text{Intro}_1 \qquad \begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\chi]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}}{\theta}\,x\,y\,\vee\text{Elim}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\\ \vdots\,\delta_3[\delta_2/\psi^x]\\ \theta\end{array}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(c)\end{array}}{\forall x\,\psi(x)}\,\forall\text{Intro}}{\psi(t)}\,\forall\text{Elim}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2[t/c]\\ \psi(t)\end{array}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\end{array}}{\exists x\,\psi(x)}\,\exists\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\psi(c)]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array}}{\theta}\,x\,\exists\text{Elim}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\\ \vdots\,\delta_3[t/c][\delta_2/\psi(t)^x]\\ \theta\end{array}
$$

तालिका 82.2: **N1i** के कुछ अपचयन रूपांतरण।

उन स्थितियों में हमें थोड़ा सावधान रहना होगा जहाँ $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ या $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$। उदाहरणतः यदि हमने निम्न को

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi \vee \chi}\,\bot_I \qquad \begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\chi]^x\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}}{\theta}\,\vee\text{Elim} \quad \text{से} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\theta}\,\bot_I$$

बदला, तो हम कट सूत्र θ वाला नया कट प्रस्तुत कर सकते हैं, और इसकी कोई गारंटी नहीं कि $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$! इसलिए यहाँ भी हमें उसी प्रकार आगे बढ़ना चाहिए जैसे $\vee$Intro/$\vee$Elim अपचयन में बढ़े थे, और निम्न से बदलना चाहिए

$$\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \dfrac{\bot}{\psi}\,\bot_I\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \quad \text{अथवा} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \dfrac{\bot}{\chi}\,\bot_I\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}$$

82.5 प्रसामान्यीकरण प्रमेय

प्रमाण *प्रसामान्य* रूप में है यदि उसमें कोई कट खंड नहीं है। स्पष्ट है कि ऐसा तभी और केवल तभी है जब उस पर न क्रम-विनिमय रूपांतरण लगाया जा सके, न अपचयन रूपांतरण। किसी प्रमाण का *प्रसामान्यीकरण* करने का अर्थ है कि जब तक कोई कट शेष न रहे तब तक क्रम-विनिमय और अपचयन रूपांतरण लगाकर उसे प्रसामान्य प्रमाण में बदल दिया जाए। यह सदा संभव है—यही *प्रसामान्यीकरण प्रमेय* है।

प्रमेय 82.4. *प्रत्येक* **N1i**-*प्रमाण δ का प्रसामान्यीकरण होता है; अर्थात् उसे कट-विहीन प्रमाण δ' में बदला जा सकता है।*

प्रमाण. δ की कट कोटि और लंबाई पर आगमन से। आगमन परिकल्पना है कि कम कट कोटि, अथवा समान कट कोटि किंतु कम कट लंबाई वाले प्रत्येक प्रमाण का प्रसामान्यीकरण होता है।

यदि कट लंबाई 0 है, तो कोई कट नहीं है और δ पहले से प्रसामान्य है। अतः मान लें कि δ की कट कोटि और कट लंबाई दोनों > 0 हैं। कोई सबसे ऊपर का, सबसे दायाँ महत्तम कट खंड चुनें। यदि कट खंड की लंबाई > 1 है, तो क्रम-विनिमय रूपांतरण लगाएँ। यदि उसकी लंबाई 1 है, तो संगत अपचयन रूपांतरण लगाएँ। इससे ऐसा नया प्रमाण मिलता है जिसकी कट कोटि समान पर कट लंबाई कम है, अथवा जिसकी कट कोटि कम है; इसलिए आगमन परिकल्पना लागू होती है। □

ऊपर के प्रमाण में प्रयुक्त युक्ति (सदा सबसे ऊपर के, सबसे दाएँ महत्तम कट से निपटना) रूपांतरणों का ऐसा विशेष क्रम सुझाती है जिसमें उन्हें किसी प्रमाण पर लगाने से प्रसामान्य प्रमाण प्राप्त होगा। आश्चर्यजनक रूप से क्रम का वास्तव में कोई महत्त्व नहीं है। क्रम-विनिमय और अपचयन रूपांतरणों को किसी भी क्रम में लगाने से अंततः प्रसामान्य प्रमाण मिलता है।

खंड और कट की परिभाषाएँ **N2i** के लिए आसानी से सूत्रबद्ध की जा सकती हैं, और **N1i** के क्रम-विनिमय तथा अपचयन रूपांतरण सीधे **N2i** में अनूदित होते हैं। फलतः प्रसामान्यीकरण प्रमेय **N2i** के लिए भी सत्य है।

प्रमेय 82.5. *प्रत्येक* **N2i**-*प्रमाण δ का प्रसामान्यीकरण होता है; अर्थात् उसे कट-विहीन प्रमाण δ' में बदला जा सकता है।*

82.6 प्रसामान्य N2i-प्रमाण और G2i के बीच अनुवाद

N2i के प्रमाण का **G2i** के प्रमाण में और इसके विपरीत अनुवाद किया जा सकता है। सबसे पहले, कट-मुक्त **2i** प्रमाण का अनुवाद प्रसामान्य **N2i**-प्रमाण देता है।

परिणाम कहने के लिए हमें कुछ शब्दावली चाहिए, जिससे **N2i** और **G2i** के अनुक्रमों के पूर्वपक्षों का संबंध आसानी से बता सकें: चिह्नित सूत्रों का समुच्चय Γ', अचिह्नित सूत्रों के बहुसमुच्चय Γ के *अनुरूप* है, यदि प्रत्येक सूत्र φ के लिए Γ' में $x : \varphi$ रूप के अवयव की संख्या, Γ में φ की बहुलता से कम या बराबर हो।

उपप्रमेय 82.6. *यदि* **G2i** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, *तो* $\Gamma' \Rightarrow \chi$ *का कोई प्रसामान्य* **N2c**-*प्रमाण* δ *है, जहाँ चिह्नित सूत्रों का समुच्चय* Γ', *बहुसमुच्चय* Γ *के अनुरूप है; अर्थात् प्रत्येक सूत्र* φ *के लिए* Γ' *में* $x : \varphi$ *रूप के अवयव की संख्या,* Γ *में* φ *की बहुलता (अर्थात्* φ *की प्रतियों की संख्या) से कम या बराबर है।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 81.12 के प्रमाण के निरीक्षण से: हम प्रवेशन नियमों को प्रमाण के अंत में और विलोपन नियमों को केवल प्रमाण के ऊपर जोड़ते हैं; अतः किसी विलोपन नियम के ऊपर कभी प्रवेशन नियम प्रस्तुत नहीं करते। □

किंतु प्रतिज्ञप्ति 81.12 में दिया गया Cut नियम का अनुवाद **N2i**-प्रमाण δ में कट प्रस्तुत कर सकता है। यदि कोई **G2i** प्रमाण, Cut पर समाप्त होता है और उसके निकटस्थ उप-प्रमाण π_1 तथा π_2 क्रमशः $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ और $\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ के हैं, तो हम π_1 के अनुवाद δ_1 को π_2 के अनुवाद δ_2 में आने वाले अभिगृहीतों $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ पर कलम करते हैं। यदि δ_1, प्रमुख सूत्र φ वाले किसी प्रवेशन नियम पर समाप्त होता है और δ_2 में अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ किसी विलोपन नियम का मुख्य आधार-वाक्य है, तो इससे δ में कट बनेगा।

N2i के प्रमाण का **G2i** के प्रमाण में अनुवाद भी संभव है। प्रतिज्ञप्ति 81.13 के प्रमाण में $\wedge$Elim, $\rightarrow$Elim, $\neg$Elim, $\forall$Elim के अनुवाद से परिणामी **G2i** प्रमाण में Cut अनुमान बनते हैं। किंतु जिस **N2i**-प्रमाण से हम आरंभ करते हैं वह प्रसामान्य हो, तो इससे बचा जा सकता है।

किसी **N2i**-प्रमाण δ में अनुक्रमों की आवृत्तियों की सूची S_1, ..., S_n को *शाखा* कहें, यदि S_1 अभिगृहीत हो और जब भी S_i किसी अनुमान का मुख्य आधार-वाक्य हो, S_{i+1} उसका निष्कर्ष हो। दूसरे शब्दों में, शाखा δ में अनुक्रमों को अभिगृहीतों से नीचे की ओर अनुसरित करती है, किंतु विलोपन नियमों के गौण आधार-वाक्यों पर रुक जाती है। δ की *मुख्य शाखा* ऐसी शाखा है जिसमें S_n अंतिम अनुक्रम है। प्रत्येक प्रमाण δ में कम-से-कम एक मुख्य शाखा अवश्य है, क्योंकि हर नियम का कम-से-कम एक मुख्य आधार-वाक्य है (केवल $\wedge$Intro के दो हैं)।

प्रतिज्ञप्ति 82.7. *यदि* δ, $\Gamma \Rightarrow \varphi$ *का कोई प्रसामान्य* **N2c** *या* **N2i**-*प्रमाण है, तो* $\Gamma' \Rightarrow \Delta$ *का कोई (कट-मुक्त)* **G2c**-*प्रमाण (*__G2i__*-प्रमाण)* π *है, जहाँ* Γ' *चिह्न हटाकर* Γ *से प्राप्त सूत्रों का बहुसमुच्चय है; और यदि* φ, $\perp$ *नहीं है तो* $\Delta = \{\varphi\}$, *अन्यथा* $\Delta = \emptyset$।

प्रमाण. इस बार आगमन $\Gamma \Rightarrow \varphi$ के प्रमाण δ में अनुमानों की संख्या पर है। यदि δ में कोई अनुमान नहीं है, तो वह अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ है और π संगत अभिगृहीत $\varphi \Rightarrow \varphi$, अथवा $\varphi \equiv \perp$ होने पर $\perp \Rightarrow$, है।

यदि δ किसी अनुमान-नियम पर समाप्त होता है, तो हम स्थितियों में भेद करते हैं:

1. यदि R कोई प्रवेशन नियम या $\perp_I$है, तो अनुवाद प्रतिज्ञप्ति 81.13 के प्रमाण की तरह ठीक उसी प्रकार आगे बढ़ता है और Cutकी आवश्यकता नहीं होती।

   यदि δ का अंतिम नियम R कोई विलोपन नियम है, तो निम्न बातों पर ध्यान दें:

   a) δ की मुख्य शाखा किसी प्रवेशन नियम से नहीं गुजरती, क्योंकि अन्यथा मुख्य शाखा पर किसी प्रवेशन नियम या $\perp_I$ के बाद विलोपन नियम आता और δ प्रसामान्य न होता।

   b) चूँकि δ की मुख्य शाखाओं पर कोई प्रवेशन नियम नहीं है, केवल एक मुख्य शाखा है। (केवल $\wedge$Intro के दो मुख्य आधार-वाक्य हैं, इसलिए अनेक मुख्य शाखाओं को $\wedge$Intro नियम के आधार-वाक्यों से गुजरना पड़ता।)

c) यदि मुख्य शाखा में $\vee$Elim या $\exists$Elim का मुख्य आधार-वाक्य सम्मिलित है, तो ऐसा केवल एक नियम है और वही अंतिम नियम, अर्थात् R, है। (अन्यथा मुख्य शाखा में ऐसा $\vee$Elim या $\exists$Elim नियम होता जिसका निष्कर्ष किसी विलोपन नियम का मुख्य आधार-वाक्य है; क्रम-विनिमय रूपांतरण संभव होने से प्रमाण प्रसामान्य न होता।)

d) $\vee$Elim और $\exists$Elim के अतिरिक्त कोई विलोपन नियम मान्यताएँ मुक्त नहीं करता, अर्थात् अनुक्रमों का बायाँ प्रसंग नहीं बदलता। $\vee$Elim और $\exists$Elim केवल किसी गौण आधार-वाक्य के ऊपर की मान्यताएँ मुक्त करते हैं, अर्थात् केवल अपने गौण आधार-वाक्यों का बायाँ प्रसंग बदलते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि δ की मुख्य शाखा के अनुक्रम S_i का प्रसंग Γ_1 है, तो जिस अनुमान का S_i मुख्य आधार-वाक्य है उसके निष्कर्ष S_{i+1} का प्रसंग $\Gamma_1' \supseteq \Gamma_1$ है।

e) फलतः यदि $x : \chi \Rightarrow \chi$ मुख्य शाखा का सर्वोच्च अनुक्रम S_1 है, तो $x : \chi \in \Gamma$।

अब हम χ के रूप के अनुसार स्थितियों में भेद करते हैं। चूँकि मुख्य शाखा का प्रत्येक S_i किसी विलोपन नियम का मुख्य आधार-वाक्य है, यह बात $x : \chi \Rightarrow \chi$ पर भी लागू होती है।

2. $\chi \equiv \theta \wedge \alpha$। तब δ का रूप है

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta} \wedge\text{Elim}_1 & & \\ \vdots & & \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi & & \end{array}$$

$x : \theta \wedge \alpha \Rightarrow \theta$ को समाहित करने वाली मुख्य शाखा में न $\rightarrow$Intro, $\neg$Intro का कोई मुख्य आधार-वाक्य है, न $\vee$Elim या $\exists$Elim का कोई गौण आधार-वाक्य; इसलिए $x : \theta \wedge \alpha$ के प्रसंग सूत्रों मुख्य शाखा भर अपरिवर्तित रहते हैं। इससे स्पष्ट होता है कि अंतिम अनुक्रम के प्रसंग में $x : \theta \wedge \alpha$ क्यों होना चाहिए। इसके अतिरिक्त हम $\wedge$Elim पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण को $x : \theta \Rightarrow \theta$ से बदलकर, और मुख्य शाखा के हर अनुक्रम के प्रसंग में $x : \theta \wedge \alpha$ को $x : \theta$ से बदलकर, प्रमाण δ को प्रमाण δ_1 में बदल सकते हैं; अर्थात् निम्न को बदलें

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta} \wedge\text{Elim}_1 & & \\ \vdots & & \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi & \text{इसमें} & x : \theta, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} x : \theta \;\Rightarrow\; \theta \\ \vdots \\ \\ \end{array}$$

आगमन परिकल्पना δ_1 पर लागू होती है, क्योंकि δ में अनुमानों की संख्या δ' के अनुमानों की संख्या से 1 अधिक है।

आगमन परिकल्पना से $x : \theta, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ का कोई **G2i**-प्रमाण π_1 है। $\wedge$L लगाकर हमें प्रमाण π मिलता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \theta, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{\theta \wedge \alpha, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \varphi} \wedge\text{L}$$

यदि $\varphi \equiv \bot$, तो हम कोई WR जोड़ते हैं, उदाहरणतः

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \theta, \Gamma_1' \;\Rightarrow\end{array}}{\theta \wedge \alpha, \Gamma_1' \;\Rightarrow}\wedge\text{L}}{\theta \wedge \alpha, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \varphi}\text{WR}$$

3. यदि $\chi \equiv \theta \vee \alpha$, तो उसे $\vee$Elim का मुख्य आधार-वाक्य होना चाहिए और यह अनुमान मुख्य शाखा का अंतिम अनुमान R होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, δ का रूप है:

$$\dfrac{x : \theta \vee \alpha \Rightarrow \theta \vee \alpha \qquad \begin{array}{c} \vdots\,\delta_1 \\ y : \theta, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\,\delta_2 \\ z : \alpha, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array}}{x : \theta \vee \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi} \vee\text{Elim}$$

आगमन परिकल्पना प्रमाण δ_1 और δ_2 पर लागू होती है; हमें $\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ और $\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \varphi$ के **G2i**-प्रमाण π_1 और π_2 मिलते हैं। π पाने के लिए हम $\vee$L लगाते हैं:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\,\pi_1 \\ \theta, \Gamma_1' \Rightarrow \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\,\pi_2 \\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \varphi \end{array}}{\theta \vee \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \varphi} \vee\text{L}$$

यदि $\vee$Elim, $y : \theta$ या $z : \alpha$ को मुक्त न करे (अर्थात् वे गौण आधार-वाक्यों के प्रसंग में उपस्थित न हों), अथवा φ, $\perp$ हो, तो हमें कुछ WL और WR जोड़ने होंगे। उदाहरणतः

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\,\pi_1 \\ \Gamma_1' \Rightarrow \end{array}}{\theta, \Gamma_1' \Rightarrow}\text{WL} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\,\pi_2 \\ \Gamma_2' \Rightarrow \end{array}}{\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow}\text{WL}}{\theta \vee \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow}\vee\text{L}}{\theta \vee \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \varphi}\text{WR}$$

4. $\chi \equiv \theta \to \alpha$। तब δ का रूप है

$$\begin{array}{c} \dfrac{x : \theta \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha \qquad \begin{array}{c} \vdots\,\delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \theta \end{array}}{x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha} \to\text{Elim} \\ \vdots\,\delta_2 \\ x : \theta \to \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array}$$

यहाँ ध्यान दें कि $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha$ को समाहित करने वाली मुख्य शाखा में न $\to$Intro, $\neg$Intro का कोई मुख्य आधार-वाक्य है, न $\vee$Elim या $\exists$Elim का कोई गौण आधार-वाक्य; इसलिए $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ के प्रसंग सूत्रों मुख्य शाखा भर अपरिवर्तित रहते हैं। इससे स्पष्ट होता है कि अंतिम अनुक्रम के प्रसंग में $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ क्यों होना चाहिए। इसके अतिरिक्त हम $\to$Elim पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण को $x : \alpha \Rightarrow \alpha$ से बदलकर, और मुख्य शाखा के प्रत्येक अनुक्रम के प्रसंग में $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ को $x : \alpha$ से बदलकर, प्रमाण-अंश δ_2 को सही प्रमाण δ_2' में बदल सकते हैं; अर्थात् निम्न को बदलें

$$\begin{array}{c} x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha \\ \vdots\,\delta_2 \\ x : \theta \to \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array} \quad \text{इसमें} \quad \begin{array}{c} x : \alpha \Rightarrow \alpha \\ \vdots\,\delta_2' \\ x : \alpha, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array}$$

आगमन परिकल्पना δ_1 और δ_2' पर लागू होती है, क्योंकि δ में अनुमानों की संख्या δ_1 और δ_2 के अनुमानों की संख्याओं का योग, और मुख्य शाखा के आरंभ में $\to$Elim अनुमान के लिए 1, है। (यदि वह अनुमान δ का अंतिम अनुमान R भी है, तो δ_1 में 0 अनुमान हैं।)

आगमन परिकल्पना से $\Gamma_1 \Rightarrow \theta$ और $\alpha, \Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ के **G2i**-प्रमाण क्रमशः π_1 और π_2 हैं। $\to$L लगाकर हमें प्रमाण π मिलता है:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \Rightarrow \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \varphi\end{array}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \varphi} \to\text{L}$$

यदि θ और/या $\varphi \equiv \bot$, तो हम एक या दो WR जोड़ते हैं, उदाहरणतः

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_1' \Rightarrow \theta}\text{WR} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow\end{array}}{\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \varphi}\text{WR}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \varphi} \to\text{L}$$

शेष स्थितियों का उपचार इसी प्रकार होता है और उन्हें अभ्यास के लिए छोड़ा जाता है। □

उपप्रमेय 82.8. *किसी प्रसामान्य* **N1i** *या* **N2i**-*प्रमाण में आने वाला प्रत्येक सूत्र, अंतिम सूत्र या अंतिम अनुक्रम का उप-सूत्र है।*

प्रमाण. प्रतिज्ञप्ति 82.7 से प्रत्येक प्रसामान्य **N2i**-प्रमाण का किसी **G2i**-प्रमाण में अनुवाद किया जा सकता है। प्रमाण के निरीक्षण से दिखता है कि **N2i**-प्रमाण में आने वाला प्रत्येक सूत्र, **G2i**-प्रमाण में भी आता है। **G2i** में Cut नियम न होने के कारण उप-सूत्र गुण है। □

प्रश्न

प्रश्न 82.1. क्रम-विनिमय रूपांतरण के बाद कम-से-कम एक कट की लंबाई 1 घटती है। यदि हम $\wedge$Elim का $\vee$Elim के आर-पार क्रम-विनिमय करते हैं, तो वास्तव में दो कट खंडों की लंबाई घटती है; इसलिए इस स्थिति में प्रमाण की कट लंबाई कम-से-कम 2 घटती है। क्या ऐसे किसी एक क्रम-विनिमय से प्रमाण की कट लंबाई 2 से अधिक घट सकती है? क्या कट *कोटि* घट सकती है?

प्रश्न 82.2. $\vee$Elim के बाद आने वाले $\vee$Elim या $\neg$Elim के लिए क्रम-विनिमय रूपांतरण दीजिए।

प्रश्न 82.3. $\exists$Elim के बाद आने वाले $\exists$Elim के लिए क्रम-विनिमय रूपांतरण दीजिए। समझाइए कि बाद वाली स्थिति में आइगेनचर की किसी शर्त का उल्लंघन क्यों नहीं होता।

प्रश्न 82.4. $\neg$Intro के बाद आने वाले $\neg$Elim के लिए अपचयन रूपांतरण दीजिए।

अध्याय 83

प्रकारों के रूप में प्रतिज्ञप्तियाँ

यह करी–हावर्ड अनुरूपता पर अध्याय का *अत्यंत प्रयोगात्मक* प्रारूप है। इसमें अधिक व्याख्या और अभिप्रेरणा चाहिए तथा संभवतः त्रुटियाँ और लोप हैं। प्रसामान्यीकरण के प्रमाण की समीक्षा और विस्तार होना चाहिए। गुणनफल प्रकार के उदाहरण नहीं हैं। क्रम-विनिमय और सरलीकरण रूपांतरण समेटे नहीं गए हैं। (प्रकारित) लैम्ब्डा कलन की सामग्री जुड़ने पर यह अधिक अर्थपूर्ण होगा, क्योंकि यहाँ उसे मूलतः पूर्वमानित किया गया है। अत्यंत सावधानी से उपयोग करें।

83.1 परिचय

लैम्ब्डा कलन अभिकलन का सरल निदर्श है। यह चरों से बने पदों पर काम करता है। यदि N और M पद हैं, तो (NM) भी पद है ("M पर लगाया गया N")। यदि N पद है, तो $\lambda x.\, N$ पद है। यदि N में चर x है, तो $\lambda x.\, N$ में x की संगत आवृत्तियाँ λx संकारक से आबद्ध होती हैं और इसलिए अब मुक्त नहीं रहतीं। $(\lambda x.\, NM)$ रूप का पद, $N[M/x]$ में β-संकुचित होता है (N में x की हर मुक्त आवृत्ति को M से बदलने का परिणाम)। पद N, N' में β-रूपांतरित होता है यदि N' किसी उपपद को β-संकुचित करके N से मिलता है; हम $N \to N'$ लिखते हैं। λ-कलन में अभिकलन कोई अनुक्रम $N \to N_1 \to N_2 \to \ldots$ है। यदि यह अनुक्रम ऐसे पद N_k पर समाप्त होता है जिसका कोई उपपद β-संकुचित नहीं हो सकता, तो उसे *प्रसामान्य* या N का प्रसामान्य रूप कहते हैं। λ-कलन में अभिकलन को ऐसे अनुक्रमों के रूप में समझें। प्रसामान्य रूप मिलने पर अभिकलन रुकता है और वही उसका परिणाम है। अभिकलनों का यह सरल निदर्श ट्यूरिंग-पूर्ण निकलता है: प्रत्येक आंशिक पुनरावर्ती फलन की गणना λ-कलन के किसी पद द्वारा की जा सकती है।

हास्केल करी और विलियम हावर्ड ने स्वतंत्र रूप से प्राकृतिक निगमन और λ-कलन के बीच निकट समानता खोजी। सहजतः पद $\lambda x.\, N$ कोई फलन है: x उसका तर्क है और N बताता है कि x दिए जाने पर मान कैसे निकाला जाए। तब पद $(\lambda x.\, NM)$ फलन $\lambda x.\, N$ को तर्क M पर लगाना है, और β-संकुचन बताता है कि उसका मूल्यांकन कैसे करें: N में x को M से बदलें (और परिणामी पद का मूल्यांकन जारी रखें)। अब इन्हें नियत प्रांत और परिसर वाले फलन मानें। यदि $\lambda x.\, N$ का प्रांत A और परिसर B है, तो चर x को केवल A से तर्क लेने वाला और N को B से मान उत्पन्न करने वाला समझना चाहिए। फलतः $(\lambda x.\, NM)$ तभी अर्थपूर्ण होना चाहिए जब $\lambda x.\, N$ फलन $A \to B$ और $M \in A$ हो। यह सूचना λ-कलन में जोड़ने पर *प्रकारित* λ-कलन मिलता है। प्रकारित λ-कलन में प्रत्येक व्यंजक $(\lambda x.\, NM)$ वैध नहीं, केवल वे जिनमें $\lambda x.\, N$ और M के "प्रकार" मेल खाते हैं; अर्थात् $\lambda x.\, N$ का प्रकार $A \to B$ और M का प्रकार A है। $\lambda x.\, N$ का प्रकार $A \to B$ तभी है जब x का प्रकार A और N का प्रकार B हो। सामान्यतः हर व्यंजक $(M_1 M_2)$ वैध नहीं है। केवल वे पद $(M_1 M_2)$ वैध हैं जहाँ M_1 का प्रकार $A \to B$ और M_2 का प्रकार A है; तब $(M_1 M_2)$ का प्रकार B है।

ये प्रकारण नियम अब स्पष्टतः प्राकृतिक निगमन की व्युत्पत्तियाँ के अनुरूप हैं, जहाँ प्रकारों को सूत्रों और स्वयं व्युत्पत्तियाँ को λ-पद निरूपित करते हैं। उदाहरणतः $\varphi \to \psi$ की व्युत्पत्ति किसी पद $\lambda x^{\varphi}.\, N$ के अनुरूप है, जिसका

फलन प्रकार $\varphi \to \psi$ है। प्राकृतिक निगमन के अनुमान-नियम प्रकारित लैम्ब्डा कलन के प्रकारण नियमों के अनुरूप हैं, उदाहरणतः

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\to}\text{Intro} \qquad \text{के अनुरूप है} \qquad \dfrac{x : \varphi \;\Rightarrow\; N : \psi}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \to \psi}$$

जहाँ दाईं ओर के नियम का अर्थ है कि यदि x का प्रकार φ और N का प्रकार ψ है, तो $\lambda x^{\varphi}.\, N$ का प्रकार $\varphi \to \psi$ है।

$\to$Elim नियम संयोजन पदों के प्रकारण नियम के अनुरूप है, अर्थात्

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,{\to}\text{Elim} \qquad \text{के अनुरूप है} \qquad \dfrac{\Rightarrow\; M_1 : \varphi \to \psi \qquad \Rightarrow\; M_2 : \varphi}{\Rightarrow\; (M_1 M_2) : \psi}$$

यदि किसी $\to$Intro नियम के तुरंत बाद $\to$Elim नियम आता है, तो व्युत्पत्ति को सरल किया जा सकता है:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\to}\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,{\to}\text{Elim} \qquad \to \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

जो लैम्ब्डा पदों के β-संकुचन के अनुरूप है

$$(\lambda x^{\varphi}.\, NM) \quad \to \quad N[M/x].$$

$\wedge$ के नियमों और "गुणनफल" प्रकारों के बीच, तथा $\vee$ के नियमों और "योग" प्रकारों के बीच, ऐसी ही अनुरूपताएँ हैं।

सरलतः प्रकारित लैम्ब्डा कलन के पदों और प्राकृतिक निगमन की व्युत्पत्तियाँ के बीच इस अनुरूपता को "करी–हावर्ड", "प्रोग्रामों के रूप में प्रमाण", या "प्रकारों के रूप में प्रतिज्ञप्तियाँ" अनुरूपता कहते हैं। सूत्रों (प्रतिज्ञप्तियों) के प्रकारों से और प्रमाणों के पदों से अनुरूप होने के अतिरिक्त, अनुरूपताओं को इस प्रकार सारांशित कर सकते हैं:

तर्क	प्रोग्राम
प्रतिज्ञप्ति/सूत्र	प्रकार
प्रमाण	पद
मान्यता	चर
मुक्त की गई मान्यता	आबद्ध चर
मुक्त न की गई मान्यता	मुक्त चर
$\varphi \to \psi$	फलन प्रकार
$\varphi \wedge \psi$	गुणनफल प्रकार
$\varphi \vee \psi$	योग प्रकार
$\perp$	रिक्त प्रकार

करी–हावर्ड अनुरूपता स्वचालित प्रमाण सहायकों और प्रोग्रामों के प्रकार-जाँचकों की आधारशिलाओं में से एक है, क्योंकि किसी प्रतिज्ञप्ति का साक्षी प्रमाण जाँचना (जैसा हमने ऊपर किया) यह जाँचने के तुल्य है कि किसी प्रोग्राम (पद) का घोषित प्रकार है या नहीं।

83.2 प्रमाण पद

N1i में हम मान्यताओं को चरों (जैसे φ^x) से मुक्तिकरण चिह्न देते हैं। **N2i** में प्रत्येक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \varphi$ के बाएँ प्रसंग Γ में चर–सूत्र युग्मों की सूची होती है। अतः **N2i** में किसी प्रमाण का प्रत्येक अनुक्रम न केवल यह सूचना रखता है कि अब तक प्रमाण ने क्या सिद्ध किया है (अर्थात् φ), बल्कि यह भी कि प्रत्येक बिंदु पर कौन-सी मान्यताएँ खुली हैं (अर्थात् Γ)। यदि हर अनुक्रम में यह सूचना भी शामिल करें कि φ को *कैसे* सिद्ध किया गया? इसके लिए हम *पद-चिह्नित* प्रणाली **tN2i** परिभाषित कर सकते हैं, जिसमें अनुक्रमों का रूप $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ है। Γ और φ पहले जैसे हैं: $x : \psi$ रूप के युग्मों का समुच्चय और वह सूत्र जिसे अनुक्रम पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण ने Γ की मान्यताओं से निगमित दिखाया है। N ऐसा पद होगा जो अनुक्रम पर समाप्त होने वाले प्रमाण को संहिताबद्ध करता है।

हम प्रत्येक अनुक्रम को जो पद देते हैं वे चर x, y, ...से ऐसे फलन-चिह्नों द्वारा बनते हैं जो अब तक किए गए अनुमानों को संहिताबद्ध करते हैं। प्रत्येक अनुमान-नियम के लिए अलग फलन-चिह्न चाहिए। प्रवेशन नियमों से संबंधित फलन-चिह्न "रचयिता" और विलोपन नियमों से संबंधित फलन-चिह्न "विघटक" कहलाते हैं। प्रत्येक फलन-चिह्न उतने तर्क लेता है जितने नियम के आधार-वाक्य हैं। उदाहरणतः $\wedge$Intro और $\wedge\text{Elim}_1$ के फलन-चिह्न $c^\wedge$ (द्विस्थानी) और $d_1^\wedge$ (एकस्थानी) हो सकते हैं। तब **tN2i** में ये नियम बनते हैं

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow N : \varphi \qquad \Gamma_2 \Rightarrow M : \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow c^\wedge(N, m) : \varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow d_1^\wedge(N) : \varphi} \wedge\text{Elim}_1$$

यदि कोई अनुमान-नियम किसी मान्यता को मुक्त करता है—अर्थात् नियम के किसी आधार-वाक्य में ऐसा चिह्नित सूत्र $x : \varphi$ है जो निष्कर्ष के प्रसंग में नहीं है—तो प्रमाण पद में भी इसे बताना होगा। ऐसे नियमों से संबंधित फलन-चिह्न संगत चरों को *आबद्ध* करते हैं। उदाहरणतः $\rightarrow$Intro नियम आधार-वाक्य $x : \varphi, \Gamma \Rightarrow \psi$ से $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ तक जाता है। रचयिता $c^\rightarrow$ एक तर्क लेता है, पर उसे यह भी बताना होगा कि चर x आबद्ध हो जाता है। यह बताने का प्रमाण पद का ढंग है कि x चिह्न वाली मान्यता मुक्त हो गई है। उदाहरणतः यदि आधार-वाक्य का प्रमाण पद N है, तो निष्कर्ष का प्रमाण पद $c^\rightarrow([x]N)$ और नियम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{x : \varphi, \Gamma \Rightarrow N : \psi}{\Gamma \Rightarrow c^\rightarrow([x]N) : \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

किसी प्रमाण का पूर्ण पुनर्निर्माण करने के लिए कुछ अतिरिक्त सूचना चाहिए। यदि किसी नियम के आधार-वाक्य के सूत्रों निष्कर्ष के सूत्र को पूरी तरह निर्धारित नहीं करते, तो वह सूचना पद में जोड़नी होगी। $\rightarrow$Intro में ऐसा ही है, इसलिए हम $c^\rightarrow([x : \varphi]N)$ लिखेंगे। $\vee$Intro और $\perp_I$में भी ऐसा है, इसलिए उस सूचना को रखने वाले फलन-चिह्न प्रयुक्त करते हैं, उदाहरणतः

$$\frac{\Gamma \Rightarrow N : \varphi}{\Gamma \Rightarrow c_1^{\vee\psi} : \varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N : \perp}{\Gamma \Rightarrow d_\varphi^\perp(N) : \varphi} \perp_I$$

इन विचारों से ऐसी अनुक्रम-शैली प्राकृतिक निगमन प्रणाली बन सकती है जिसमें हर अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ रूप का है, जहाँ N एक *प्रमाण पद* है।

ऐसे प्रमाण पदों और तथाकथित *प्रकारित लैम्ब्डा कलन* के पदों में निकट संबंध है। इस संबंध के अनुरूप हम ऊपर के सामान्य रचयिता और विघटक चिह्नों के बजाय लैम्ब्डा कलन के साहित्य में प्रयुक्त चिह्न लेंगे। उदाहरणतः $c^\rightarrow([x : \varphi]N)$ के बजाय $\lambda x^\varphi.\, N$, $d^\rightarrow(N, M)$ के बजाय (NM), $c^\wedge(N, M)$ के बजाय $\langle N, M\rangle$, और $d_i^\wedge(N)$ के बजाय $\pi_i(N)$ लिखते हैं।

परिभाषा 83.1. प्रमाण पद निम्न नियमों द्वारा आगमनिक रूप से उत्पन्न होते हैं:

1. प्रत्येक चर x प्रमाण पद है (अभिगृहीत)।
2. यदि x चर, φ कोई सूत्र, और N प्रमाण पद है, तो $\lambda x^\varphi.\, N$ भी प्रमाण पद है ($\rightarrow$Intro)।
3. यदि N और M प्रमाण पद हैं, तो (NM) भी प्रमाण पद है ($\rightarrow$Elim)।

अभिगृहीत:

$$x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$$

अनुमान-नियम:

$$\frac{x : \varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; N : \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \to \psi} \to\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; N : \varphi \to \psi \qquad \Gamma_2 \;\Rightarrow\; M : \varphi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; (NM) : \psi} \to\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; N_1 : \varphi \qquad \Gamma_2 \;\Rightarrow\; N_2 : \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \langle N_1, N_2 \rangle : \varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \pi_1(N) : \varphi} \wedge\text{Elim}_1 \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \pi_2(N) : \psi} \wedge\text{Elim}_2$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \iota_2^{\varphi}(N) : \varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; M : \varphi \vee \psi \qquad x : \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; N_1 : \chi \qquad y : \psi, \Gamma_3 \;\Rightarrow\; N_2 : \chi}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \;\Rightarrow\; \delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi} \vee\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \bot}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi} \bot_I$$

तालिका 83.1: पद-चिह्नित प्रतिज्ञप्तिपरक अंतःप्रज्ञात्मक प्राकृतिक निगमन प्रणाली **tN2ip** के नियम।

4. यदि N और M प्रमाण पद हैं, तो $\langle N, M \rangle$ प्रमाण पद है ($\wedge$Intro)।
5. यदि N प्रमाण पद है, तो $\pi_i(N)$ भी प्रमाण पद है, जहाँ i, 1 या 2 है ($\wedge\text{Elim}_i$)।
6. यदि N प्रमाण पद और φ कोई सूत्र है, तो $\iota_i^{\varphi}(M)$ प्रमाण पद है, जहाँ i, 1 या 2 है ($\vee\text{Intro}_i$)।
7. यदि M, N_1, N_2 प्रमाण पद और x_1, x_2 चर हैं, तो $\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2$ प्रमाण पद है ($\vee$Elim)।
8. यदि N प्रमाण पद और φ कोई सूत्र है, तो $\varepsilon^{\varphi}(N)$ प्रमाण पद है ($\bot_I$)।

हर प्रमाण पद किसी प्रमाण का प्रमाण पद नहीं है। उदाहरणतः पद $\langle N, M \rangle$, $\wedge$Intro अनुमान पर समाप्त होने वाले प्रमाण को संहिताबद्ध करता है, इसलिए उसका अंतिम सूत्र कोई संयोजन $\varphi \wedge \psi$ है। यह $\to$Elim नियम का मुख्य आधार-वाक्य नहीं हो सकता, इसलिए $(\langle N, M \rangle P)$ सही प्रमाण का प्रमाण पद नहीं हो सकता। केवल **tN2ip** के नियमों का अनुसरण करने वाले प्रमाण पद *सही* प्रमाण पद हैं। ये नियम सारणी 83.1 में दिए गए हैं।

83.3 व्युत्पत्तियाँ को प्रमाण पदों में बदलना

प्राकृतिक निगमन के प्रमाण को प्रमाण पदों में बदलने की प्रक्रिया, अर्थात् **N2i** के प्रमाण का **tN2i** के प्रमाण में अनुवाद, अत्यंत सीधा है। इसमें केवल व्युत्पत्ति के किसी अनुक्रम की दाईं ओर प्रत्येक सूत्र के बाईं ओर प्रमाण पद लिखना है, जिससे $\Gamma \Rightarrow M : \varphi$ रूप के अनुक्रम मिलते हैं। तब हम कहेंगे कि प्रसंग Γ में M, φ का *साक्षी* है। कौन-सा प्रमाण पद लिखना है, यह पूर्णतः **tN2i** के नियम निर्धारित करते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 83.2. **N2i** *में* $\Gamma \Rightarrow \varphi$ *का प्रत्येक प्रमाण* δ, **tN2i** *में* $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ *के किसी प्रमाण* δ' *के अनुरूप है। प्रमाण पद* N, δ *से अद्वितीय रूप से निर्धारित होता है।*

प्रमाण. हम δ की ऊँचाई पर आगमन से आगे बढ़ते हैं। यदि δ अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ है, तो δ' अभिगृहीत $x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$ है। यदि δ किसी अनुमान-नियम पर समाप्त होता है, तो आगमन परिकल्पना प्रत्येक आधार-वाक्य का प्रमाण पद और प्रत्येक आधार-वाक्य के अनुरूप, उन प्रमाण पदों वाले अनुक्रमों के **tN2i**-प्रमाण देती है। हम **tN2i** का संगत नियम लगाते हैं; संगत प्रमाण पद **tN2i** का अनुमान-नियम निर्धारित करता है। □

उदाहरण 83.3. $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$ के **N1i** में इस अत्यंत सरल प्रमाण पर विचार करें:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\,\wedge\text{Elim}_2 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,x\,\to\text{Intro}$$

N2i में इसका रूप यह है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\text{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\,\wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

हम ऊपर से नीचे की ओर प्रमाण पद देते हैं। अभिगृहीतों के प्रमाण पद प्रसंग के चर x ही हैं। $\wedge\text{Elim}_i$ से संबंधित प्रमाण पद क्रमशः $\pi_2(x)$ और $\pi_1(x)$ निर्धारित होते हैं। $\wedge$Intro लगाने पर इन दोनों प्रमाण पदों को मिलाते हैं: $\langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$। अंत में $\to$Intro नियम कोई λ-अमूर्तन लगाता है, x को आबद्ध करता है और दर्ज करता है कि x ने मान्यता $\varphi \wedge \psi$ को चिह्नित किया था: $\lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$। तब **tN2i** में प्रमाण है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \psi}\,\wedge\text{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \varphi}\,\wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \psi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

83.4 प्रमाण पदों से व्युत्पत्तियाँ पुनः प्राप्त करना

अब दूसरी दिशा पर विचार करें: प्रमाण पद N का वापस **N2i** के प्रमाण में अनुवाद। सामान्यतः यह केवल ऐसे प्रसंग के सापेक्ष संभव है जिसमें दिए गए प्रमाण पद में मुक्त आने वाले प्रत्येक चर x के लिए युग्म $x : \varphi$ हो। पर पहले ऐसे उदाहरण से आरंभ करें जिसमें कोई मुक्त चर नहीं है, अर्थात् पद

$$\lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$$

यह $\lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, N_1$ रूप का है। चूँकि इस रूप का पद उत्पन्न करने वाला **tN2i** का एकमात्र नियम $\to$Intro है, हम जानते हैं कि N द्वारा संहिताबद्ध प्रमाण को $\to$Intro पर समाप्त होना चाहिए, अर्थात् वह निम्न पर समाप्त होता है

$$\frac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \chi}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi \wedge \psi) \to \chi}\ \to\text{Intro}$$

हम अभी नहीं जानते कि χ क्या है, किंतु जानते हैं कि पूर्वपक्ष $\varphi \wedge \psi$ है और आधार-वाक्य के प्रसंग में $x : \varphi \wedge \psi$ सम्मिलित होना चाहिए।

अब आधार-वाक्य से संबंधित प्रमाण पद पहले से निर्धारित है: $\langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle$। उसके द्वारा संहिताबद्ध प्रमाण को $\wedge$Intro पर समाप्त होना चाहिए। हम अब भी नहीं जानते कि χ क्या है, किंतु $\wedge$Intro का निष्कर्ष होने से जानते हैं कि वह संयोजन होना चाहिए, अर्थात् $\chi \equiv (\chi_1 \wedge \chi_2)$। पुनर्निर्माण जारी रखते हैं:

$$\cfrac{\cfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1 \qquad x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \chi_1 \wedge \chi_2}\ \wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\chi_1 \wedge \chi_2)}\ \to\text{Intro}$$

प्रमाण पद $\pi_2(x)$ का अर्थ है कि बाईं ओर का सर्वोच्च अनुक्रम $\wedge\text{Elim}_2$ से प्राप्त हुआ, अर्थात् आधार-वाक्य $\theta \wedge \chi_1$ रूप का है। दाईं ओर हम निर्धारित कर सकते हैं कि χ_2 तक जाने वाला अनुमान $\wedge\text{Elim}_1$ होना चाहिए और आधार-वाक्य $\chi_2 \wedge \alpha$ रूप का है।

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \theta \wedge \chi_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1}\ \wedge\text{Elim}_2 \qquad \cfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \chi_2 \wedge \alpha}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}\ \wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \chi_1 \wedge \chi_2}\ \wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\chi_1 \wedge \chi_2)}\ \to\text{Intro}$$

अब सर्वोच्च अनुक्रमों के प्रमाण पद चर हैं, इसलिए हम जानते हैं कि उन्हें अभिगृहीत होना चाहिए। इससे χ_1, χ_2, θ और α निर्धारित होते हैं: $\theta \equiv \varphi$ और $\chi_1 \equiv \psi$, अन्यथा बायाँ अनुक्रम अभिगृहीत नहीं होगा; तथा $\chi_2 \equiv \varphi$ और $\alpha \equiv \psi$, अन्यथा दायाँ अनुक्रम अभिगृहीत नहीं होगा। हमने प्रमाण पूर्णतः पुनः प्राप्त कर लिया है:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \psi}\ \wedge\text{Elim}_2 \qquad \cfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \varphi}\ \wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \psi \wedge \varphi}\ \wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\ \to\text{Intro}$$

83.5 प्रकार

(MN) जैसा प्रमाण पद अपने आप उस प्रमाण को अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं करता जिसका वह प्रमाण पद है। कारण यह है कि मुक्त चर, अर्थात् अभिगृहीतों के प्रमाण पद, संगत अभिगृहीतों के सूत्रों को विनिर्दिष्ट नहीं करते। किंतु यदि हम इन्हें किसी प्रसंग Γ में विनिर्दिष्ट करें, तो प्रमाण अद्वितीय रूप से निर्धारित *होता है*।

परिभाषा 83.4. किसी प्रमाण पद N का *प्रसंग* ऐसा समुच्चय Γ है जिसमें N के प्रत्येक मुक्त चर के लिए ठीक एक युग्म $x : \varphi$ हो।

ध्यान दें कि परिभाषा यह आवश्यक नहीं करती कि Γ में $x : \varphi$ *केवल* N के मुक्त चरों के लिए हो। इस प्रकार, उदाहरणतः $\Gamma = \{x : \varphi, y : \psi, z : \chi\}$, $\langle x, y\rangle$ का प्रसंग है।

परिभाषा 83.5. मान लें Γ, N का प्रसंग है। N का *प्रकार* (Γ के सापेक्ष) आगमनिक रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

1. x का प्रकार φ तभी और केवल तभी है जब $x : \varphi \in \Gamma$।

2. यदि $x : \varphi, \Gamma$ के सापेक्ष N का प्रकार ψ है, तो $\lambda x^{\varphi}. N$ का प्रकार $\varphi \to \psi$ है।
3. यदि N का प्रकार $\varphi \to \psi$ और M का प्रकार φ है, तो (NM) का प्रकार ψ है।
4. यदि N का प्रकार φ और M का प्रकार ψ है, तो $\langle N, M\rangle$ का प्रकार $\varphi \wedge \psi$ है।
5. यदि N का प्रकार $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ है, तो $\pi_i(N)$ का प्रकार φ_i है।
6. यदि N का प्रकार φ है, तो $i = 1$ होने पर $\iota_i^{\psi}(M)$ का प्रकार $\varphi \vee \psi$ और $i = 2$ होने पर $\psi \vee \varphi$ है।
7. यदि M का प्रकार $\varphi \vee \psi$, $x : \varphi, \Gamma$ के सापेक्ष N_1 का प्रकार χ, और $y : \psi, \Gamma$ के सापेक्ष N_2 का प्रकार χ है, तो $\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2$ का प्रकार χ है।
8. यदि N का प्रकार $\perp$ है, तो $\varepsilon^{\varphi}(N)$ का प्रकार φ है।

प्रतिज्ञप्ति 83.6. *प्रत्येक प्रमाण पद N का उसके प्रसंग Γ के सापेक्ष ठीक एक प्रकार है।*

प्रमाण. N पर आगमन से। □

यदि Γ के सापेक्ष N का प्रकार φ है, तो हम $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ लिखते हैं। परिभाषा 83.5 के उपवाक्य परिचित लगने चाहिए: वे एक छोटे अंतर के साथ ठीक **tN2i** के नियम हैं—प्रसंग Γ पूरे समय समान है। परिभाषा को सारणी 83.2 के नियमों वाले कलन **tN3i** के रूप में संहिताबद्ध कर सकते हैं।

प्रमाण पद λ-कलन के एक रूप—*गुणनफलों, योगों और रिक्त प्रकार वाला प्रकारित λ-कलन*—के पद हैं। चिरसम्मत λ-कलन में केवल चरों से बने पद, λ-*अमूर्तन* $\lambda x. N$ और अनुप्रयोग (MN) हैं; उसमें प्रकारित λ-अमूर्तन $\lambda x^{\varphi}. N$ का φ द्वारा अंकन नहीं है। λ-कलन अभिकलन का ट्यूरिंग-पूर्ण निदर्श है (अर्थात् उसमें प्रत्येक आंशिक अभिकलनीय फलन को किसी पद से निरूपित किया जा सकता है)। प्रमाण पदों और प्रकारण नियमों द्वारा दिया गया λ-कलन का रूप अभिकलन का प्रतिबंधित निदर्श है, किंतु मूल विचार वही हैं। प्रकार-निर्धारण उसे प्रतिबंधित करता है: केवल *सुप्रकारित* पद, अर्थात् किसी प्रसंग Γ के सापेक्ष प्रकार वाले प्रमाण पद, वैध हैं। उदाहरणतः $\lambda x. (xx)$ चिरसम्मत अप्रकारित λ-कलन में वैध पद है, किंतु $\lambda x^{\varphi}. (xx)$ किसी भी φ के लिए सुप्रकारित नहीं है। कारण यह है कि (xx) का प्रकार होने के लिए प्रकारण नियमों के अनुसार पहले x का प्रकार $\varphi \to \psi$ और दूसरे x का प्रकार φ होना चाहिए; यह असंभव है क्योंकि φ, $\varphi \to \psi$ का उचित उप-सूत्र है।

सहजतः प्रकारों को उस प्रकार के किसी पद द्वारा नामित वस्तु का प्रकार समझ सकते हैं। अतः $\varphi \wedge \psi$ प्रकार का पद ऐसा युग्म चुनता है जिसका पहला घटक φ और दूसरा घटक ψ प्रकार का है, अर्थात् गुणनफल $\varphi \times \psi$ का अवयव। $\varphi \to \psi$ प्रकार का पद, φ प्रकार की वस्तुओं से ψ प्रकार की वस्तुओं में फलन है। $\varphi \vee \psi$ प्रकार का पद या तो φ प्रकार की कोई वस्तु है या ψ प्रकार की, और साथ में यह सूचना है कि कौन-सी। यह दो समुच्चयों φ और ψ के असंयुक्त सम्मिलन जैसा है, जिसे $\{\langle i, x\rangle : i = 1$ अथवा $2, x \in \varphi$ यदि $i = 1, x \in \psi$ यदि $i = 2\}$ से परिभाषित किया गया है। प्रकार $\perp$ रिक्त समुच्चय है; अर्थात् किसी पद का यह प्रकार हो तो वह कुछ नामित नहीं कर सकता। चूँकि प्राकृतिक निगमन (**tN3i** सहित) संगत है, खुली मान्यताओं के बिना $\perp$ का कोई प्रमाण नहीं है; अतः $\perp$ प्रकार का कोई बंद प्रमाण पद (मुक्त चरों से रहित पद) नहीं है।

प्रकारित λ-कलन के संकारक ऐसे पद उत्पन्न करते हैं जो सहजतः सही प्रकार की वस्तु को नामित करते हैं, बशर्ते जिन पदों पर उन्हें लगाया गया है वे कुछ निश्चित वस्तुओं को नामित करें। उदाहरणतः "यदि $N_1 : \varphi$ और $N_2 : \psi$, तो $\langle N_1, N_2\rangle : \varphi \wedge \psi$" कहता है कि यदि N_1, φ प्रकार की और N_2, ψ प्रकार की किसी वस्तु को नामित करता है, तो $\langle N_1, N_2\rangle$, $\varphi \wedge \psi$ प्रकार की किसी वस्तु को नामित करता है।

83.6 अपचयन

प्राकृतिक निगमन व्युत्पत्तियाँ में किसी प्रवेशन नियम के बाद आने वाला विलोपन नियम ऐसा चक्कर है जिसका "अपचयन" किया जा सकता है। उदाहरणतः $\wedge$Intro के बाद $\wedge$Elim आने पर दोनों "निरस्त" हो जाते हैं, क्योंकि $\wedge$Elim का निष्कर्ष सदा उस संयोजन के संयोज्यों में से एक है जिसे $\wedge$Intro उत्पन्न करता है, और $\wedge$Intro के

अभिगृहीत:

$$\Gamma \Rightarrow x : \varphi, \text{ यदि } x : \varphi \in \Gamma$$

अनुमान-नियम:

$$\frac{x : \varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; N : \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \to \psi} \to\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; M : \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; (NM) : \psi} \to\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N_1 : \varphi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; N_2 : \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \langle N_1, N_2 \rangle : \varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \pi_1(N) : \varphi} \wedge\text{Elim}_1 \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \pi_2(N) : \psi} \wedge\text{Elim}_2$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \iota_2^{\psi}(N) : \psi \vee \varphi} \vee\text{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; M : \varphi \vee \psi \qquad x : \varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; N_1 : \chi \qquad y : \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; N_2 : \chi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi} \vee\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; N : \bot}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi} \bot_I$$

तालिका 83.2: प्रकार-निर्धारण प्रणाली के रूप में प्रयुक्त पद-चिह्नित प्रतिज्ञप्तिपरक अंतःप्रज्ञात्मक प्राकृतिक निगमन प्रणाली **tN3ip** के नियम।

आधार-वाक्य दोनों संयोज्य हैं। अतः यदि हमें किसी संयोज्य की व्युत्पत्ति चाहिए, तो संयोजन को प्रस्तुत करके फिर उसका विलोपन करने के बजाय सीधे उसी व्युत्पत्ति का उपयोग कर सकते हैं। हमें मिलता है

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1\wedge\varphi_2}\wedge\text{Intro}}{\varphi_i}\wedge\text{Elim}_i \quad\to\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_i\\ \varphi_i\end{matrix}$$

इस सरलीकरण से सुझाया गया ऐसा ही अपचयन-संबंध संबंधित प्रमाण पदों पर माना जा सकता है। यदि N_1, δ_1 का और N_2, δ_2 का प्रमाण पद है, तो कह सकते हैं कि बाएँ प्रमाण का प्रमाण पद (एक चरण में) दाएँ प्रमाण के प्रमाण पद में अपचयित होता है:

$$\pi_i(\langle N_1, N_2,)\rangle \to N_i$$

प्रकारित लैम्ब्डा कलन में यह गुणनफल प्रकार का *बीटा-अपचयन* नियम है।

प्राकृतिक निगमन में $\wedge$Intro के बाद $\wedge$Elim जैसे, अर्थात् अपचयन के अधीन, अनुमान-युग्म को *कट* कहते हैं। प्रकारित लैम्ब्डा कलन में $\to$ की बाईं ओर के पद को *अपचय्य* और दाईं ओर के पद को *अपचयफल* कहते हैं। अप्रकारित लैम्ब्डा कलन, जहाँ केवल $(\lambda x.\, N)Q$ को अपचय्य माना जाता है, के विपरीत प्रकारित लैम्ब्डा कलन में वाक्यविन्यास को $\langle N, M\rangle$, $\pi_i(N)$, $\iota_i(\varphi)N$, $\delta\, N\, x_1.M_1\, x_2.M_2$ और $\varepsilon^{\varphi}(N)$ वाले पदों तथा संगत अपचय्यों तक विस्तृत किया जाता है।

इसी प्रकार विकल्प के लिए अपचयन है:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{matrix}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\vee\text{Intro}\qquad\begin{matrix}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\,x_1,x_2\,\vee\text{Elim} \quad\to\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\\ \vdots\,\delta_i\\ \chi\end{matrix}$$

यह प्रमाण पदों के निम्न अपचयन के अनुरूप है:

$$\delta\,\iota_i^{\varphi_i}(M)\,x_1.N_1\,x_2.N_2 \to N_i[M/x_i]$$

जहाँ M, δ का और N_i, δ_i का प्रमाण पद है। यह योग प्रकारों का बीटा-अपचयन नियम है। यहाँ $M[N_i/x]$ का अर्थ M में चर x की सभी मुक्त आवृत्तियों को N_i से बदलना है।

फलन प्रकार का अपचयन $\to$Intro के बाद आने वाले $\to$Elim के चक्कर को हटाने के अनुरूप है।

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^{x}\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\,x\,\to\text{Intro}\qquad\begin{matrix}\vdots\,\delta'\\ \varphi\end{matrix}}{\psi}\to\text{Elim} \quad\to\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta'\\ \varphi\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{matrix}$$

प्रमाण पदों के लिए यह साधारण बीटा-अपचयन है:

$$(\lambda x^{\varphi}.\, NM) \to N[M/x]$$

प्रमाण पर अपचयन रूपांतरणों के अतिरिक्त हम क्रम-विनिमय रूपांतरणों पर विचार कर सकते हैं। ये ऐसे (उप-)प्रमाण पर लागू होते हैं जो $\vee$Elim के बाद किसी अन्य विलोपन नियम पर समाप्त होते हैं, उदाहरणतः:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \quad \begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_1 \wedge \chi_2}\,x_1, x_2\,\vee\text{Elim}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i}{\chi_i}\,x_1, x_2\,\vee\text{Elim}$$

यदि δ, δ_1 और δ_2 के प्रमाण पद क्रमशः M, N_1 और N_2 हैं, तो प्रमाण पदों, अर्थात् λ पदों, का संगत अपचयन नियम है:

$$\pi_i(\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2) \rightarrow \delta\, M\, x_1.\pi_i(N_1)\, x_2.\pi_i(N_2)$$

निश्चय ही हम चक्करों को केवल प्रमाण के अंत से ही नहीं, बल्कि चक्कर पर समाप्त होने वाले उप-प्रमाण पर अपचयन रूपांतरण लगाकर प्रमाण के भीतर से भी हटा सकते हैं। इसी प्रकार β-अपचयन, λ-पदों के उपपदों पर लागू होता है। यदि N, M का उपपद और $N \rightarrow N'$ है, तो M में उपपद N को N' से बदलकर M' पा सकते हैं। उस स्थिति में $M \rightarrow M'$ भी लिखते हैं। यदि कोई अनुक्रम $M = M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow \ldots \rightarrow M_k = M'$ है ($k = 1$, अर्थात् $M = M'$, वाली स्थिति सहित), तो $M \twoheadrightarrow M'$ लिखते हैं।

जिस प्रमाण के किसी उप-प्रमाण पर कोई रूपांतरण लागू नहीं किया जा सकता, उसे *प्रसामान्य* कहते हैं। इसी प्रकार जिस λ-पद के किसी उपपद पर कोई रूपांतरण लागू नहीं किया जा सकता, उसे *प्रसामान्य* कहते हैं। प्रसामान्य λ-पद को *प्रसामान्य रूप* भी कहते हैं।

83.7 प्रकार-संरक्षण

विचार किए गए अपचयन और क्रम-विनिमय रूपांतरणों को प्रणालियों **tN2i** और **tN3i** के लिए भी सीधे परिभाषित किया जा सकता है। प्रणाली **tN3i**, प्रसंग Γ के सापेक्ष किसी λ-पद N के प्रकार को ऐसा सूत्र φ परिभाषित करती है कि $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ का **tN3i** में कोई प्रमाण हो। λ-पदों के β-अपचयन नियमों का प्रमाण के अपचयन और क्रम-विनिमय रूपांतरणों को ठीक प्रतिबिंबित करना एक महत्त्वपूर्ण परिणाम देता है: किसी प्रसंग Γ के सापेक्ष λ-पद का प्रकार β-रूपांतरण के बाद समान रहता है। इस गुण को *प्रकार-संरक्षण* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 83.7. *यदि Γ के सापेक्ष N का प्रकार φ और $N \rightarrow N'$ है, तो Γ के सापेक्ष N' का प्रकार φ है।*

प्रमाण. N और $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ के प्रमाण δ की ऊँचाई पर आगमन से निम्न आसानी से स्थापित कर सकते हैं: यदि M, N का उपपद है, तो δ में $\Gamma' \Rightarrow M : \psi$ पर समाप्त होने वाला उप-प्रमाण δ_1 है। यदि M अपचय्य है, तो δ_1 पर कोई रूपांतरण लागू होता है। δ_1 पर अपचयन लगाकर $\Gamma' \Rightarrow M' : \psi$ का प्रमाण δ_1' मिलता है। **tN3i** के रूपांतरणों के निरीक्षण से M', M का अपचयफल है। δ में δ_1 को δ_1' से बदलने पर $\Gamma \Rightarrow N' : \varphi$ का प्रमाण δ' मिलता है, जहाँ N' उपपद M को M' से बदलकर N से प्राप्त होता है।

उदाहरणतः $\wedge$Intro के बाद आने वाले $\wedge$Elim का अपचयन रूपांतरण देखें:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_1 : \psi_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_2 : \psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \langle N_1, N_2\rangle : \psi_1 \wedge \psi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\Gamma \Rightarrow \pi_i(\langle N_1, N_2\rangle) : \psi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_i : \psi_i\end{array}$$

हम देखते हैं कि दाईं ओर के प्रमाण, अर्थात् δ_1', का प्रमाण पद N_i है। यह बाईं ओर के प्रमाण (δ_1) के प्रमाण पद $\pi_i(\langle N_1, N_2\rangle)$ पर β-रूपांतरण लगाने का ठीक परिणाम है।

अथवा $\rightarrow$Intro के बाद आने वाले $\rightarrow$Elim अनुमान और उस पर लगाए गए अपचयन रूपांतरण को देखें:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta_2\\ \vdots\\ x : \psi_1, \Gamma \Rightarrow N : \psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \lambda x^{\psi_1}.\, N : \psi_1 \rightarrow \psi_2}\,\rightarrow\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \Gamma \Rightarrow M : \psi_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x^{\psi_1}.\, NM) : \psi_2}\,\rightarrow\text{Elim} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \Gamma \Rightarrow M : \psi_1\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/x : \psi_1]\\ \Gamma \Rightarrow N[M/x] : \psi_2\end{array}$$

फिर दाईं ओर के प्रमाण का प्रमाण पद ठीक बाईं ओर के प्रमाण के प्रमाण पद के β-अपचयन का परिणाम है। निश्चय ही δ_2 की ऊँचाई पर आगमन से सावधानीपूर्वक सत्यापित करना होगा कि δ_2 में $\Gamma' \Rightarrow x : \psi_1$ रूप के सभी अभिगृहीतों को $\Gamma \Rightarrow M : \psi_1$ के प्रमाण δ_3 से बदलने पर वास्तव में $\Gamma \Rightarrow N[M/x] : \psi_2$ का प्रमाण $\delta_2[\delta_3/x : \psi_1]$ मिलता है। $\square$

प्रमाण और λ-पदों की सघन अनुरूपता का एक और परिणाम है। यदि N किसी प्रसंग Γ के सापेक्ष प्रकार φ का λ-पद है और उसमें कोई अपचय्य M है (अर्थात् वह प्रसामान्य रूप में नहीं है), तो $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ के संगत **tN3i** प्रमाण δ में ऐसा उप-प्रमाण ($\Gamma' \Rightarrow M : \psi$ पर समाप्त होने वाला) है जिस पर कोई रूपांतरण लगाया जा सकता है। यदि M को उसके अपचयफल से बदलकर $N \rightarrow N'$, तो δ पर अपचयन लगाने का संगत परिणाम $\Gamma \Rightarrow N' : \varphi$ का प्रमाण है। अतः प्रसामान्य रूप में न आने वाला प्रत्येक λ-पद किसी अन्य पद में β-अपचयित होता है। इस गुण को *प्रगति* कहते हैं।

प्रगति और प्रकार-संरक्षण मिलकर सुनिश्चित करते हैं कि λ-पदों का β-अपचयन कभी "अटकता" नहीं: यदि कोई पद सुप्रकारित है और प्रसामान्य रूप में नहीं है, तो वह किसी दूसरे सुप्रकारित पद में अपचयित होता है (और उस पद का प्रकार समान है)।

83.8 प्रसामान्यीकरण

इस अनुभाग में हम सिद्ध करते हैं कि किसी अपचयन क्रम के अनुसार प्रत्येक निगमन को एक प्रसामान्य निगमन में अपचयित किया जा सकता है; इसे *प्रसामान्यीकरण गुणधर्म* कहते हैं। हम प्रकारों के रूप में प्रतिज्ञप्तियों की अनुरूपता का उपयोग करेंगे: हम दिखाते हैं कि प्रत्येक प्रमाण पद को एक प्रसामान्य रूप में अपचयित किया जा सकता है; इससे प्राकृतिक निगमन की व्युत्पत्तियाँ के लिए प्रसामान्यीकरण प्राप्त होता है।

पहले हम पदों की जटिलता मापने वाले कुछ फलन परिभाषित करते हैं। किसी सूत्रों की *लंबाई* $\mathrm{len}(\varphi)$ इस प्रकार परिभाषित है:

$$\begin{aligned}\mathrm{len}(p) &= 0\\ \mathrm{len}(\varphi \wedge \psi) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1\\ \mathrm{len}(\varphi \vee \psi) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1\\ \mathrm{len}(\varphi \to \psi) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1.\end{aligned}$$

किसी अपचय्य M की जटिलता उसकी *कट कोटि* $\mathrm{cr}(M)$ से मापी जाती है:

$$\begin{aligned}\mathrm{cr}((\lambda x^{\varphi}.\, N^{\psi})Q) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1\\ \mathrm{cr}(\mathrm{p}_i(\langle M^{\varphi}, N^{\psi}\rangle)) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1\\ \mathrm{cr}(\mathrm{case}(\mathrm{in}_i^{\varphi_i}(M^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^{\chi}, x_2^{\varphi_2}.N_2^{\chi})) &= \mathrm{len}(\varphi) + \mathrm{len}(\psi) + 1\end{aligned}$$

किसी प्रमाण पद की जटिलता उसमें उपस्थित सबसे जटिल अपचय्य से मापी जाती है, और यदि वह प्रसामान्य है तो उसका मान 0 होता है:

$$\mathrm{mr}(M) = \max\{\mathrm{cr}(N) | N \text{ पद } M \text{ का उपपद और अपचय्य है}\}$$

सहायक प्रमेय 83.8. *यदि $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ एक अपचय्य है और $M \not\equiv x$, तो निम्नलिखित में से कोई एक स्थिति होती है:*

1. *M स्वयं एक अपचय्य है, अथवा*
2. *M का रूप $\mathrm{p}_i(x)$ है और N का रूप $\langle P_1, P_2\rangle$ है,*
3. *M का रूप $\mathrm{case}(i, x_1.P_1, x_2.P_2)$ है और N का रूप $\mathrm{in}_i(Q)$ है,*
4. *M का रूप xQ है और N का रूप $\lambda x.\, P$ है।*

पहली स्थिति में $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{cr}(M)$; अन्य स्थितियों में $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{len}(\varphi)$।

प्रमाण. M पर आगमन द्वारा प्रमाण।

1. यदि M एक अकेला चर y है और $y \not\equiv x$, तो $y[N/x]$ का मान y है, अतः वह अपचय्य नहीं है।
2. यदि M का रूप $\langle N_1, N_2\rangle$, या $\lambda x.\, N$, या $\mathrm{in}_i^{\varphi}(N)$ है, तो $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ का भी वही रूप है और इसलिए वह अपचय्य नहीं है।
3. यदि M का रूप $\mathrm{p}_i(P)$ है, तो हम दो स्थितियाँ देखते हैं।
   a) यदि P का रूप $\langle P_1, P_2\rangle$ है, तो $M \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$ एक अपचय्य है और स्पष्टतः
   $$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1[N/x], P_2[N/x]\rangle)$$
   भी एक अपचय्य है। दोनों की कट कोटियाँ समान हैं।
   b) यदि P एक अकेला चर है, तो प्रतिस्थापन को अपचय्य बनाने के लिए वह x ही होना चाहिए, और N का रूप $\langle P_1, P_2\rangle$ होना चाहिए। अब
   $$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(x)[\langle P_1, P_2\rangle/x]$$
   पर विचार करें, जो $\mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$ है। इसकी कट कोटि $\mathrm{cr}(x)$ के बराबर है, जो $\mathrm{len}(\varphi)$ है।

$\mathrm{case}(N, x_1.N_1, x_2.N_2)$ और PQ की स्थितियाँ इसी प्रकार हैं। □

सहायक प्रमेय 83.9. *यदि M संकुचित होकर M' बनता है, और M के प्रत्येक उचित अपचय्य उपपद N के लिए $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{cr}(N)$ है, तो $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{mr}(M')$।*

प्रमाण. स्थितियों के अनुसार प्रमाण।

1. यदि M का रूप $\mathrm{p}_i(\langle M_1, M_2\rangle)$ है, तो M' का मान M_i है; चूँकि M_i का प्रत्येक उपपद M का भी उचित उपपद है, इसलिए कथन सिद्ध होता है।

2. यदि M का रूप $(\lambda x^\varphi.\, N)Q^\varphi$ है, तो M' का मान $N[Q^\varphi/x^\varphi]$ है। M' में किसी अपचय्य पर विचार करें। या तो N में समान कट कोटि वाला अनुरूपी अपचय्य है, जिसकी कट कोटि मान्यता के अनुसार $\mathrm{cr}(M)$ से कम है, या उसकी कट कोटि $\mathrm{len}(\varphi)$ के बराबर है, जो परिभाषा से $\mathrm{cr}((\lambda x^\varphi.\, N)Q)$ से कम है।

3. यदि M का रूप
$$\mathrm{case}(\mathrm{in}_i(N^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^\chi, x_2^{\varphi_2}.N_2^\chi)$$
है, तो $M' \equiv N_i[N/x_i^{\varphi_i}]$। M' में किसी अपचय्य पर विचार करें। या तो N_i में समान कट कोटि वाला अनुरूपी अपचय्य है, जिसकी कट कोटि मान्यता के अनुसार $\mathrm{cr}(M)$ से कम है; या उसकी कट कोटि $\mathrm{len}(\varphi_i)$ के बराबर है, जो परिभाषा से $\mathrm{cr}(\mathrm{case}(\mathrm{in}_i(N^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^\chi, x_2^{\varphi_2}.N_2^\chi))$ से कम है। □

प्रमेय 83.10. *सभी प्रमाण पद अपचयित होकर प्रसामान्य रूप में आते हैं; सभी व्युत्पत्तियाँ अपचयित होकर प्रसामान्य व्युत्पत्तियाँ में आती हैं।*

प्रमाण. दूसरा कथन पहले से प्राप्त होता है। हम पहले कथन को प्रमाण पद M के लिए $m = \mathrm{mr}(M)$ पर पूर्ण आगमन द्वारा सिद्ध करते हैं।

1. यदि $m = 0$, तो M पहले से प्रसामान्य है।

2. अन्यथा हम n पर आगमन करते हैं, जहाँ n, M में कट कोटि m वाले अपचय्यों की संख्या है।

   a) यदि $n = 1$, तो ऐसा कोई अपचय्य N चुनें कि प्रत्येक उचित उपपद P के लिए, जो स्वयं भी अपचय्य है, $m = \mathrm{cr}(N) > \mathrm{cr}(P)$ हो। ऐसा अपचय्य अवश्य है, क्योंकि प्रत्येक पद के उपपदों की संख्या सीमित है।
   N के अपचयफल को N' लिखें। अब प्रमेयिका से $\mathrm{mr}(N') < \mathrm{mr}(N)$; अतः कट कोटि m वाले अपचय्यों की संख्या n घट जाती है। इसलिए m घटता है (1 या अधिक से), और हम m के लिए आगमन परिकल्पना लागू कर सकते हैं।

   b) आगमन चरण के लिए मान लें कि $n > 1$। प्रक्रिया समान है, केवल n घटकर कोई धनात्मक संख्या रह जाता है और इसलिए m नहीं बदलता। हम बस n के लिए आगमन परिकल्पना लागू करते हैं। □

प्रकारित λ-पदों के प्रसामान्यीकृत होने का अर्थ है कि प्रत्येक ऐसे पद का *एक प्रसामान्य रूप होता है*। यदि हम λ-पदों को उनके प्रसामान्य रूप तक β-अपचयित करने को किसी गणना का निष्पादन और प्रसामान्य रूप को उस गणना का मान समझें, तो इसका अर्थ है कि प्रकारित λ-कलन की प्रत्येक गणना अंततः रुकती है और कोई मान उत्पन्न करती है। इसके अतिरिक्त, प्रकार-संरक्षण सुनिश्चित करता है कि उस मान का प्रकार सही है। उदाहरणतः, यदि N का प्रकार $\varphi \to \psi$ है (अर्थात वह ऐसा फलन है जिसे प्रकार φ के निवेशों पर काम करके प्रकार ψ के मान उत्पन्न करने चाहिए) और हम उसे प्रकार φ के पद M (निवेश) पर लागू करें, तो (NM) अपचयित होकर पद N' (निर्गम) बनता है और यह प्रत्याभूत है कि उस निर्गम का प्रकार ψ है।

वास्तव में, प्रकारित λ-कलन के पद केवल उपपदों पर β-अपचयन लागू करने के किसी एक ढंग से ही प्रसामान्य रूपों तक नहीं पहुँचते, बल्कि β-अपचयन लागू करने का *हर* ढंग अंततः किसी प्रसामान्य रूप पर समाप्त होता है। इस

गुणधर्म को *प्रबल प्रसामान्यीकरण* कहते हैं। इसका अर्थ है कि न केवल गणना के अंततः रुकने और कोई मान देने की प्रत्याभूति का कोई ढंग है, बल्कि गणना को निष्पादित करने का *हर* ढंग अंततः कोई मान देता है।

हम कैसे जानें कि गणना को निष्पादित करने के विभिन्न ढंग *एक ही* मान देते हैं? अभी तक हम (प्रकार-संरक्षण से) केवल यह जानते हैं कि उससे मिलने वाले सभी मानों का प्रकार समान है। प्रकारित λ-कलन का एक और महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है: वह *संगमशील*, अथवा *चर्च–रॉसर*, है। यदि $N \twoheadrightarrow N_1$ और $N \twoheadrightarrow N_2$, तो कोई पद N' ऐसा है कि $N_1 \twoheadrightarrow N'$ और $N_2 \twoheadrightarrow N'$। याद करें कि $N \twoheadrightarrow N'$ का अर्थ है: N' शून्य या अधिक $\to$-अपचयन चरणों से प्राप्त होता है। यदि N_1 प्रसामान्य रूप में है, तो $N_1 \twoheadrightarrow N'$ को संतुष्ट करने वाला एकमात्र पद N' स्वयं N_1 है (शून्य $\to$-अपचयन चरणों द्वारा)। अतः यदि N_1 और N_2 दोनों प्रसामान्य रूप में हैं, तो $N_1 = N' = N_2$। दूसरे शब्दों में, क्योंकि $\twoheadrightarrow$ प्रबल रूप से प्रसामान्यीकृत होता है, किसी पद को अपचयित करने का हर ढंग अंततः प्रसामान्य रूप देता है। क्योंकि $\twoheadrightarrow$ चर्च–रॉसर है, कोई भी दो प्रसामान्य रूप समान हैं। इसलिए प्रकारित λ-कलन में गणना सदैव समाप्त होती है और गणना चाहे जिस ढंग से आगे बढ़े, उसका मान (प्रसामान्य रूप) समान रहता है।

किसी संबंध को संगमशील सिद्ध करना सामान्यतः कठिन होता है। फिर भी हम निम्न दुर्बलतर प्रतिबंध सरलता से स्थापित कर सकते हैं:

प्रतिज्ञप्ति 83.11 (दुर्बल चर्च–रॉसर गुणधर्म). *यदि $N \to N_1$ और $N \to N_2$, तो कोई पद N' ऐसा है कि $N_1 \twoheadrightarrow N'$ और $N_2 \twoheadrightarrow N'$।*

प्रमाण. दोनों पद N_1 और N_2, N में क्रमशः अपचय्य M_1 अथवा M_2 को उसके अपचयफल से बदलने पर मिलते हैं। अपचय्य M_1 और M_2, N के उपपद हैं और इसलिए परस्पर आच्छादित नहीं हो सकते। इसका अर्थ है कि या तो एक दूसरे का उपपद है, या वे N में अलग-अलग, अनाच्छादित स्थानों पर आते हैं। बाद वाली स्थिति देखें: N का रूप $N(M_1, M_2)$ है। M_1 को उसके अपचयफल M_1' से बदलने पर N_1, अर्थात $N(M_1', M_2)$, मिलता है; और M_2 को उसके अपचयफल M_2' से बदलने पर N_2, अर्थात $N(M_1, M_2')$, मिलता है। दोनों अपचयित होकर $N(M_1', M_2')$ बनते हैं। दूसरी स्थिति में मान लें कि M_2, M_1 का उपपद है (दूसरी दिशा सममित है), और M_1 किस प्रकार का अपचय्य है इसके अनुसार स्थितियाँ अलग करें। उदाहरणतः यदि $M_1 \equiv \pi_1(\langle O_1, O_2\rangle)$, तो वह अपचयित होकर O_1 बनता है। यदि M_2, O_1 का उपपद है, तो M_2 के रूपांतरण से O_1' मिलता है। अतः पहले M_1 और फिर M_2 को रूपांतरित करने पर O_1' मिलता है। किंतु पहले M_2 को रूपांतरित करने पर $\pi_1(\langle O_1', O_2\rangle)$ मिलता है और यह भी अपचयित होकर O_2 बनता है। □

सहायक प्रमेय 83.12 (न्यूमन की प्रमेयिका). *यदि $\twoheadrightarrow$ प्रबल रूप से प्रसामान्यीकृत होता है और उसमें दुर्बल चर्च–रॉसर गुणधर्म है, तो वह संगमशील है।*

प्रमाण. क्योंकि $\twoheadrightarrow$ प्रबल रूप से प्रसामान्यीकृत होता है, प्रत्येक अपचयन अनुक्रम किसी प्रसामान्य रूप में समाप्त होता है। प्रसामान्य रूप अद्वितीय हैं यदि और केवल यदि $\twoheadrightarrow$ संगमशील है। अतः मान लें कि किसी पद N के दो भिन्न प्रसामान्य रूप N' और N'' हैं, जो इन अपचयन अनुक्रमों से मिलते हैं:

$$N = N_1' \to N_2' \to \ldots \to N_k' = N' \text{ और}$$
$$N = N_1'' \to N_2'' \to \ldots \to N_l'' = N''$$

(अपचयन अनुक्रम की लंबाई > 0 होनी चाहिए, क्योंकि अन्यथा N पहले से प्रसामान्य रूप में होता।)

यदि $N_1' = N_1''$, तो उसके दो भिन्न प्रसामान्य रूप (N' और N'') हैं। यदि $N_1' \neq N_1''$, तो दुर्बल चर्च–रॉसर गुणधर्म से कोई N''' ऐसा है कि $N_1' \twoheadrightarrow N'''$ और $N_1'' \twoheadrightarrow N'''$। क्योंकि $N' \neq N''$, या तो $N''' \neq N'$ अथवा $N''' \neq N''$। फलतः N_1' या N_1'' में से किसी एक के दो भिन्न प्रसामान्य रूप हैं। हमने दिखाया है कि यदि N के दो भिन्न प्रसामान्य रूप हैं, तो कोई N_1 ऐसा है कि $N \to N_1$ और N_1 के दो भिन्न प्रसामान्य रूप हैं। स्पष्टतः हम इसी प्रकार आगे बढ़कर $N \to N_1 \to N_2 \to \ldots$ बना सकते हैं, किंतु यह असंभव है क्योंकि $\to$ प्रबल रूप से प्रसामान्यीकृत होता है। □

अध्याय 84

प्रमाण की खोज

84.1 परिचय

G3c या **N1i** जैसी प्रमाण प्रणालियों के अभिगृहीत और अनुमान-नियम यह निर्धारित करते हैं कि अनुक्रमों अथवा सूत्रों के कौन-से वृक्ष सही प्रमाण माने जाएँगे। अनुक्रमों या सूत्रों का ऐसा कोई वृक्ष दिए जाने पर (संभवतः इस अतिरिक्त सूचना सहित कि प्रत्येक चरण में कौन-से नियम लागू हुए हैं, अथवा मान्यताओं और उन्हें मुक्त करने वाले अनुमान-नियमों के चिह्नों सहित), अभिगृहीतों और नियमों की परिभाषाएँ हमें जाँचने देती हैं कि दिया गया वृक्ष सही प्रमाण है या नहीं। दी हुई मान्यताओं से किसी दिए हुए अनुक्रम या दिए हुए सूत्र का प्रमाण *खोजना* एक अलग और प्रायः अधिक कठिन समस्या है। यही *प्रमाण-खोज* की समस्या है।

प्रमाण-खोज की एक अत्यंत सीधी-सादी प्रक्रिया है। हम सूत्रों को किसी सीमित वर्णमाला के प्रतीकों के अनुक्रम मान सकते हैं। अनुक्रमों और अनुक्रमों अथवा सूत्रों के वृक्षों को भी सूत्रों के अनुक्रम माना जा सकता है (वृक्ष की शाखाओं को दिखाने के लिए शायद विशेष कोष्ठकों का उपयोग करके)। अभिगृहीत और नियम हमें यांत्रिक ढंग से जाँचने देते हैं कि प्रतीकों का कोई अनुक्रम सही प्रमाण निरूपित करता है या नहीं। फलतः हम *सभी संभव* सही प्रमाण यांत्रिक ढंग से उत्पन्न कर सकते हैं (प्रमाण को निरूपित करने वाली वर्णमाला के प्रतीकों के सभी अनुक्रम बनाकर और प्रत्येक प्रत्याशी अनुक्रम को जाँचकर)। सीधी-सादी प्रमाण-खोज प्रक्रिया यह है: सभी सही प्रमाण तब तक उत्पन्न करें जब तक दिए हुए अनुक्रम का (या दिए हुए सूत्र का ऐसा प्रमाण जिसकी खुली मान्यताएँ दी हुई मान्यताओं में हों) कोई प्रमाण न मिल जाए।

इससे अच्छी विधि वही सहज विधि है जिसका प्रयोग आप हाथ से प्रमाण खोजने में करेंगे: अंतिम अनुक्रम से आरंभ करें, कोई सूत्र चुनें और किसी अनुमान-नियम को "उलटी दिशा में" लागू करके ऐसा आधार-वाक्य या ऐसे आधार-वाक्य उत्पन्न करें जिनके प्रमाण मिलने पर वे अंतिम अनुमान के साथ मिलकर दिए हुए अनुक्रम का प्रमाण बना दें। प्राकृतिक निगमन प्रणाली में प्रमाण खोजने के लिए भी इसी प्रकार की (यद्यपि अधिक जटिल) विधि अपनाई जाती है।

पर यह विधि अचूक नहीं है: गलत नियम या सूत्रों का गलत क्रम चुनने पर आप ऐसी स्थिति में फँस सकते हैं जहाँ आगे कोई मार्ग न हो। यह विधि पूरी तरह विनिर्दिष्ट भी नहीं है: प्रत्येक बिंदु पर चुनने योग्य एक से अधिक सूत्रों या उलटी दिशा में लागू करने योग्य एक से अधिक नियम हो सकते हैं। *प्रमाण-खोज कलन-विधि* पूरी तरह विनिर्दिष्ट ऐसी प्रक्रिया है जो प्रमाण विद्यमान होने पर उसे खोज लेगी (अर्थात् जो अचूक है)।

कुछ प्रमाण प्रणालियाँ अन्य प्रणालियों की अपेक्षा सरल प्रमाण-खोज कलन-विधियों के अधिक अनुकूल होती हैं। अनुक्रम प्रणालियों में किसी सूत्र का प्रधान संक्रियक और उसका बाईं या दाईं ओर आना यह निर्धारित करता है कि उलटी दिशा में कौन-सा नियम लगाया जाए। उदाहरणतः यदि आप $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ का प्रमाण खोजना चाहते हैं, जहाँ $\varphi \wedge \psi$ दाईं ओर है, तो $\wedge$R को उलटी दिशा में लगाकर दो संगत आधार-वाक्य $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ और $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ उत्पन्न करने चाहिए। लेकिन यदि आपकी प्रणाली **G1c** है, तो संकुचन की उपस्थिति अधिक विकल्प देकर काम कठिन कर देती है: आप CR को भी उलटी दिशा में लगाकर $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi$ आधार-वाक्य बना सकते हैं; फिर $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi$, और इसी प्रकार आगे। **G2c** में स्थिति और भी खराब है। $\wedge$R को उलटी दिशा में लगाने के लिए आपको ऐसे Γ_1, Γ_2 का अनुमान लगाना होगा कि $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, और ऐसे Δ_1, Δ_2 का कि $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, फिर $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$ और $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \psi$ आधार-वाक्यों पर भाग्य आजमाना होगा। गलत अनुमान

आगे जाकर मार्ग बंद कर सकता है, तब आरंभ तक लौटकर दूसरे Γ_1, Γ_2, Δ_1, Δ_2 चुनने पड़ेंगे। यदि सूत्र $\varphi \vee \psi$ है, तो $\vee$R की दो संभावनाओं में से एक चुनकर $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ या $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ में से एक आधार-वाक्य उत्पन्न करना होगा। गलत चुनाव पर फिर पीछे लौटना पड़ेगा।

प्रणाली **G3c** में ये समस्याएँ नहीं हैं। उसमें कोई संरचनात्मक नियम नहीं है, और अनुमान-नियम का चुनाव प्रधान संक्रियक तथा सूत्र के आने वाले पक्ष से निर्धारित होता है। अतः **G3c**, **G1c** या **G2c** की अपेक्षा प्रमाण-खोज के लिए अधिक उपयुक्त है। सफल खोज **G3c** में प्रमाण देगी और उस प्रमाण का फिर **G1c** या **G2c** (या इस दृष्टि से **N1c**) में अनुवाद किया जा सकता है। इसलिए **G3c** की प्रमाण-खोज कलन-विधि और **G3c** के प्रमाण को अन्य प्रणालियों के प्रमाण में बदलने वाली अनुवाद कलन-विधियाँ मिलकर उन प्रणालियों की प्रमाण-खोज समस्या भी हल करती हैं।

हम कैसे जानें कि कोई प्रमाण-खोज कलन-विधि अचूक है? इसके लिए दिखाना होगा कि यदि कलन-विधि प्रमाण खोजने में विफल रहती है, तो कोई प्रमाण हो ही नहीं सकता। आखिर कोई खराब कलन-विधि चुनने पर ऐसे प्रसंग आ सकते हैं जहाँ प्रमाण होते हुए भी वह उसे न खोज पाए। सीधी-सादी कलन-विधि में यह समस्या नहीं है, क्योंकि वह सभी संभव प्रमाण में खोज करती है। किंतु प्रमाण-खोज कलन-विधि से अपेक्षा है कि वह दक्ष हो और न्यूनतम प्रयास करे।

प्रमाण-खोज कलन-विधि को अचूक दिखाने की मुख्य युक्ति यह है कि उसकी विफलता के ढंग से ही सिद्ध कर दें कि उस अनुक्रम का कोई प्रमाण संभव नहीं है। इसके लिए दिखाते हैं कि अनुक्रम वैध नहीं है। चिरसम्मत प्रथम-कोटि तर्क में वैध अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वे हैं जिनमें प्रत्येक संरचना, Γ के कम-से-कम एक सूत्र को असत्य या Δ के कम-से-कम एक सूत्र को सत्य बनाती है। **G3c** *निर्दोष* है, अर्थात् वह केवल वैध अनुक्रमों को सिद्ध करती है। यह प्रमाण पर आगमन से स्थापित होता है: अभिगृहीत स्पष्टतः वैध हैं, और किसी नियम के आधार-वाक्य वैध हों तो उसका निष्कर्ष भी वैध है। किसी प्रमाण-खोज कलन-विधि को अचूक दिखाने के लिए हम सिद्ध करते हैं कि यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ के प्रमाण की खोज विफल होती है, तो ऐसी संरचना परिभाषित की जा सकती है जिसमें Γ के सभी सूत्रों सत्य और Δ के सभी सूत्रों असत्य हों। इससे **G3c** की *पूर्णता* भी स्थापित होती है: यदि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध है, तो उसका कोई **G3c**-प्रमाण है। प्रत्येक विफल प्रमाण-खोज $\Gamma \Rightarrow \Delta$ को अवैध दिखाती है, इसलिए वैध अनुक्रम की प्रत्येक प्रमाण-खोज सफल होनी चाहिए।

84.2 G3c के लिए खोज कलन-विधि

हम **G3c** के लिए एक खोज कलन-विधि का वर्णन करते हैं। यह न तो एकमात्र संभव कलन-विधि है, न ही सर्वाधिक दक्ष। पर यह सही है: यदि किसी अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण है, तो यह अंततः रुककर कोई प्रमाण खोज लेगी। यह अचूक भी है: यदि यह प्रमाण पाए बिना रुकती है अथवा कभी नहीं रुकती, तो $\Gamma \Rightarrow \Delta$ आरंभ से ही वैध नहीं है।

कलन-विधि की एक अनिवार्य मुख्य विशेषता यह है कि वह सुनिश्चित करती है कि $\Gamma \Rightarrow \Delta$ में, अथवा प्रमाण-खोज में बने किसी अनुक्रम में, प्रत्येक सूत्र का "अपचयन" हो; अर्थात् उसे उलटी दिशा में लगाए गए किसी अनुमान-नियम का प्रमुख सूत्र माना जाए, और ऐसा जितनी बार आवश्यक हो उतनी बार किया जाए। इस विशेषता को हम *निष्पक्षता* कहते हैं।

कलन-विधि चरणों में काम करती है। प्रत्येक चरण का निर्गम अनुक्रमों का एक वृक्ष है, और अगले चरण का निर्गम ऐसे प्रत्येक सर्वोच्च अनुक्रम में किसी सूत्र का अपचयन करके बनता है जो पहले से अभिगृहीत न हो।

चरण 0 में हम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ से आरंभ करते हैं। निष्पक्षता सुनिश्चित करने के लिए Γ और Δ के सूत्रों को सूचकांकों के रूप में संख्याएँ इस प्रकार देते हैं कि भिन्न सूत्रों को भिन्न संख्याएँ मिलें। मसलन, सूत्रों को बाएँ से दाएँ गिनने की कल्पना करें। संख्याएँ हम अधिलिपियों के रूप में लिखते हैं। उदाहरणतः यदि हम $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$ का प्रमाण खोज रहे हैं, तो चरण 0 का निर्गम $\varphi^1, \psi^2 \Rightarrow \chi^3$ है। ऐसे सूचकांकित अनुक्रम में अधिलिपि के रूप में आने वाली सबसे बड़ी संख्या n उसका *अधिकतम सूचकांक* है (उदाहरण में 3)।

यदि अनुक्रम में परिमाणक हैं, तो दाईं ओर $\exists x\, \varphi(x)$ अथवा बाईं ओर $\forall x\, \varphi(x)$ का अपचयन करते समय प्रयुक्त पद भी जानने होंगे। हमें केवल अचरों c_0, c_1, c_2, ...से बने उन पदों की आवश्यकता होगी जो Γ और Δ में आने वाले फलन-चिह्नों का उपयोग करते हैं। मान लेते हैं कि इन सभी पदों का समुच्चय किसी नियत गणना में दिया गया है, ताकि हम, मसलन, "$\Gamma \Rightarrow \Delta$ में न आने वाला पहला अचर" कह सकें। कलन-विधि द्वारा उत्पन्न वृक्ष के प्रत्येक सूचकांकित अनुक्रम से अचरों का एक समुच्चय संबद्ध है। चरण 0 के अनुक्रम को दिया गया समुच्चय उसमें आने वाले सभी अचरों का समुच्चय है (यदि कोई हों), और यदि कोई अचर न हो तो $\{c_0\}$ है।

मान लें कि चरण n में कलन-विधि ने संबद्ध अचर-समुच्चयों सहित सूचकांकित अनुक्रमों का एक वृक्ष उत्पन्न किया है। चरण $n+1$ में हम प्रत्येक सर्वोच्च अनुक्रम के लिए निम्न कार्य करते हैं।

यदि कोई सूत्र φ अनुक्रम के बाएँ और दाएँ दोनों ओर आता है, अथवा बाईं ओर $\perp$ है, तो हम कुछ नहीं करते: ऐसे अनुक्रमों के **G3c** में प्रमाण हैं, अतः इस विशेष सर्वोच्च अनुक्रम के लिए कुछ शेष नहीं है।

यदि अनुक्रम में कोई गैर-परमाण्विक सूत्र नहीं है, तो कलन-विधि रोक दें। $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण नहीं है।

अन्यथा सबसे छोटे सूचकांक i वाला गैर-परमाण्विक सूत्र φ चुनें। तब संबंधित सर्वोच्च अनुक्रम या तो $\varphi^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ है या $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi^i$। अनुक्रम का अधिकतम सूचकांक k और उसे दिया गया अचरों का समुच्चय C मानें।

हम φ^i का "अपचयन" करते हैं; अर्थात् φ के प्रधान संक्रियक और φ^i के बाईं या दाईं ओर आने से निर्धारित अनुमान-नियम के अनुसार नए सर्वोच्च अनुक्रम उत्पन्न करते हैं।

1. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ और बाईं ओर आता है: $(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ के ऊपर एक नया सर्वोच्च अनुक्रम जोड़ें:

$$\frac{\psi^k, \chi^{k+1}, \Pi \Rightarrow \Lambda}{(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda} \wedge\mathrm{L}$$

   नए अनुक्रम को दिया गया अचरों का समुच्चय C है।

2. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ और दाईं ओर आता है: $\Pi \Rightarrow \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i$ के ऊपर दो नए सर्वोच्च अनुक्रम जोड़ें:

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Lambda, \psi^k \qquad \Pi \Rightarrow \Lambda, \chi^k}{\Pi \Rightarrow \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i} \wedge\mathrm{R}$$

   नए अनुक्रमों को दिया गया अचरों का समुच्चय C है।

3. $\varphi \equiv \neg\psi$, $\varphi \equiv \psi \vee \chi$ और $\varphi \equiv \psi \to \chi$ वाली स्थितियाँ समान हैं और अभ्यास के रूप में छोड़ी जाती हैं।

4. $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ और बाईं ओर आता है: $\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ के ऊपर एक नया सर्वोच्च अनुक्रम जोड़ें:

$$\frac{\psi(c)^k, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda} \exists\mathrm{L}$$

   जहाँ c, C में न आने वाला पहला अचर है। नए अनुक्रम को दिया गया अचरों का समुच्चय $C \cup \{c\}$ है।

5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ और दाईं ओर आता है: $\Pi \Rightarrow \Lambda, \exists x\, \psi(x)$ के ऊपर एक नया सर्वोच्च अनुक्रम जोड़ें:

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Lambda, \exists x\, \psi(x)^k, \psi(t)^{k+1}}{\Pi \Rightarrow \Lambda, \exists x\, \psi(x)^i} \exists\mathrm{L}$$

   जहाँ t, केवल C के अचरों वाला ऐसा पहला पद है जो इस अनुक्रम के नीचे दाईं ओर $\exists x\, \psi(x)$ के अपचयन में पहले प्रयुक्त न हुआ हो (या, यदि ऐसे सभी पद प्रयुक्त हो चुके हों, तो c_0)। नए अनुक्रम को दिया गया अचरों का समुच्चय C है।

6. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ वाली स्थितियाँ समान हैं और अभ्यास के रूप में छोड़ी जाती हैं।

यदि चरण $n+1$ में हमने किसी भी सर्वोच्च अनुक्रम में कोई नया अनुक्रम नहीं जोड़ा है, तो कलन-विधि सफलतापूर्वक समाप्त होती है। इस स्थिति में हमें $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का प्रमाण मिल गया है, जो चरण $n+1$ के वृक्ष से सभी सूचकांक मिटाकर प्राप्त होता है। सर्वोच्च अनुक्रम सभी $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ अथवा $\perp, \Pi \Rightarrow \Lambda$ रूप के हैं। सभी अनुमान **G3c** के सही अनुमान हैं। प्रतिज्ञप्तिपरक अनुमानों के लिए यह स्पष्ट है। ध्यान दें कि प्रत्येक चरण में किसी अनुक्रम को दिया गया अचरों का समुच्चय C उस अनुक्रम में आने वाले सभी अचरों को समाहित करता है। अतः $\exists$L और $\forall$R वाले अपचयन में आइगेनचर की शर्त पूरी होती है: आइगेनचर c निष्कर्ष को दिए गए समुच्चय C में न आने वाला अचर था, इसलिए c निष्कर्ष में भी नहीं आया। हमें मिलता है:

प्रतिज्ञप्ति 84.1. **G3c** *की प्रमाण-खोज कलन-विधि सही है: यदि वह सफलतापूर्वक समाप्त होती है, तो आरंभिक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण है।*

84.3 पूर्णता

अब हम दिखाते हैं कि प्रमाण-खोज कलन-विधि अचूक है; अर्थात् यदि वह बीच में रुक जाती है या कभी समाप्त नहीं होती, तो आरंभिक अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण नहीं है। इसके लिए हम ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ परिभाषित करते हैं कि प्रत्येक $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और प्रत्येक $\varphi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ हो। दूसरे शब्दों में, $\mathfrak{M}$ में Γ के सभी सूत्रों सत्य और Δ के सभी सूत्रों असत्य हैं; अर्थात् $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध नहीं है। चूँकि **G3c** निर्दोष है, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण नहीं है।

हम सूत्रों के युग्म Θ, Ξ और अचरों के समुच्चय C से $\mathfrak{M}$ को परिभाषित करते हैं। Θ, Ξ और C को प्रमाण-खोज के विफल (बीच में रुके या कभी समाप्त न होने वाले) निष्पादन की एक *विफलता शाखा* से प्राप्त करते हैं। विफलता शाखा अनुक्रमों $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ और अचरों के समुच्चयों C_n का ऐसा क्रम है कि $\Pi_0 \Rightarrow \Lambda_0$ अंतिम अनुक्रम $\Gamma \Rightarrow \Delta$ है, और $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$, चरण $n+1$ में $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ से उत्पन्न ऐसा आधार-वाक्य है जिसका कलन-विधि कोई प्रमाण नहीं खोजती। प्रत्येक n के लिए ऐसा आधार-वाक्य स्पष्टतः होना चाहिए, अन्यथा कलन-विधि प्रमाण खोज चुकी होती। C_n को $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ से संबद्ध अचरों का समुच्चय मानते हैं।

यदि कलन-विधि केवल परमाण्विक सूत्रों वाले किसी सर्वोच्च अनुक्रम पर बीच में रुकती है, तो उस अनुक्रम पर समाप्त होने वाली शाखा विफलता शाखा है। यदि कलन-विधि कभी समाप्त नहीं होती, तो वह उत्तरोत्तर बड़े वृक्ष उत्पन्न करती रहती है। इन्हें किसी अनंत वृक्ष को बढ़ाते जाने के रूप में समझा जा सकता है (वह वृक्ष जो कलन-विधि के अनंत चरण चलने पर मिलता)। यह वृक्ष अनंत, किंतु सीमित-शाखी होगा (प्रत्येक आसंधि की केवल एक या दो संतानें—उसके ठीक ऊपर के अनुक्रम—हैं)। क्योनिग के प्रमेय से प्रत्येक अनंत सीमित-शाखी वृक्ष में कोई अनंत शाखा अवश्य होती है। खोज कलन-विधि के अनंत काल तक चलने की स्थिति में ऐसी अनंत शाखा विफलता शाखा होगी।

यदि $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ और C_n का क्रम विफलता शाखा है, तो $\Theta = \bigcup_n \Pi_n$ और $\Xi = \bigcup_n \Lambda_n$ (सूचकांक और सूत्रों की अनेक आवृत्तियाँ हटाकर), तथा $C = \bigcup_n C_n$ लें।

अब हम $\mathfrak{M}$ को परिभाषित कर सकते हैं।

1. प्रांत $|\mathfrak{M}|$ उन पदों का समुच्चय है जिन्हें C और $\Gamma \Rightarrow \Delta$ के फलन-चिह्नों से बनाया जा सकता है, यदि कोई हों, किंतु बिना चरों के।

2. यदि $c \in |\mathfrak{M}|$, तो $c^{\mathfrak{M}} = c$।

3. यदि f, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ में कोई m-स्थानी फलन-चिह्न है और t_1, ..., $t_m \in |\mathfrak{M}|$, तो $f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$।

4. यदि R, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ में कोई m-स्थानी विधेय-चिह्न है, तो $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in |\mathfrak{M}|^m : R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta\}$।

[1] $\mathfrak{M}$ इस अर्थ में *पद निदर्श* है कि उसका प्रांत पदों का समुच्चय है, और अचरों तथा फलन-चिह्नों की व्याख्या इस प्रकार की जाती है कि $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = t$ सुनिश्चित हो। Θ के परमाण्विक सूत्रों का उपयोग $R^{\mathfrak{M}}$ को इस तरह परिभाषित करने में होता है कि $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ तभी और केवल तभी हो जब $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Theta$।

सहायक प्रमेय 84.2. *प्रत्येक $\varphi \in \Theta \cup \Xi$ के लिए:*

1. *यदि $\varphi \in \Theta$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$।*

2. *यदि $\varphi \in \Xi$, तो $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$।*

प्रमाण. $\mathrm{dp}(\varphi)$ पर आगमन से।

पहले मान लें कि φ परमाण्विक है, अर्थात् या तो $\varphi \equiv \bot$ या $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_m)$।

[1]अनुवादकीय टिप्पणी: स्रोत में आरंभिक परिमाणन का सूत्र-अक्षर छूटा है। ऊपर उसे जोड़ा गया है; विफलता शाखा के दाएँ पक्ष के लिए स्रोत का Δ_n बदलकर परिभाषानुसार Λ_n किया गया है। इसी प्रकार m-स्थानी फलन और विधेय की इन दो परिभाषाओं में स्रोत के असंगत n को m किया गया है।

चूँकि $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ विफलता शाखा है, कोई Π_n, $\bot$ को समाहित नहीं कर सकता (अन्यथा $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ अभिगृहीत होता)। $\mathfrak{M}$ की परिभाषा से $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_m)$ तभी और केवल तभी है जब $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta$। दोनों को मिलाकर: यदि $\varphi \in \Theta$, तो $\mathfrak{M} \vDash \varphi$।

यदि φ परमाण्विक है और $\varphi \in \Pi_n$, तो $\varphi \in \Pi_{n+1}$; और यदि $\varphi \in \Lambda_n$, तो $\varphi \in \Lambda_{n+1}$। (यह प्रमाण-खोज कलन-विधि द्वारा उत्तराधिकारी अनुक्रम उत्पन्न करने के ढंग से मिलता है।) अतः यदि $\varphi \in \Theta \cap \Xi$, तो किसी n के लिए $\varphi \in \Pi_n \cap \Lambda_n$। इसका अर्थ है कि $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ अभिगृहीत है, जबकि विफलता शाखा में कोई अभिगृहीत नहीं हो सकता। इसलिए रचना से परमाण्विक φ के लिए $\varphi \notin \Theta \cap \Xi$; फलतः यदि $\varphi \in \Xi$, तो $\varphi \notin \Theta$। $\mathfrak{M}$ की परिभाषा से इसका अर्थ है कि यदि $\varphi \in \Xi$, तो $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$।

आगमन चरण के लिए मान लें कि (1) और (2), φ से कम गहराई वाले सभी सूत्रों के लिए सत्य हैं। स्थितियों में भेद करके हम φ के लिए (1) और (2) सिद्ध करते हैं।

पहले ध्यान दें कि जब φ^i, $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ में आता है, तब वह $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ में भी आता है, जब तक कि i, $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ का सबसे छोटा सूचकांक न हो। प्रत्येक चरण में जोड़े गए सर्वोच्च अनुक्रमों में सबसे छोटा सूचकांक बढ़ता है, इसलिए अंततः हम ऐसे $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ पर पहुँचते हैं जिसमें φ^i आता है और i सबसे छोटा सूचकांक है। चरण $n+1$ में कलन-विधि φ^i का अपचयन करती है। दूसरे शब्दों में, यदि $\varphi \in \Theta$, तो किसी n के लिए $\Pi_n = \Pi'_n, \varphi^i$ और i सबसे छोटा सूचकांक है। और यदि $\varphi \in \Xi$, तो किसी n के लिए $\Lambda_n = \Lambda'_n, \varphi^i$ और i सबसे छोटा सूचकांक है।

1. $\varphi \in \Theta$ और $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$। तब किसी n के लिए $\Pi_n = \Pi'_n, (\psi \wedge \chi)^i$। $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$, $\wedge$L का संगत आधार-वाक्य है, अर्थात् $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi^k, \chi^{k+1}$। फलतः $\psi, \chi \in \Theta$। आगमन परिकल्पना से $\mathfrak{M} \vDash \psi$ और $\mathfrak{M} \vDash \chi$। $\mathfrak{M} \vDash$ की परिभाषा से $\mathfrak{M} \vDash \psi \wedge \chi$।

2. $\varphi \in \Xi$ और $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$। तब किसी n के लिए $\Lambda_n = \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$। $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$, निष्कर्ष $\Pi_n \Rightarrow \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$ वाले $\wedge$R के दो आधार-वाक्यों में से एक है; अर्थात् $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \psi^k$ या $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \chi^k$। फलतः या तो $\psi \in \Xi$ या $\chi \in \Xi$। आगमन परिकल्पना से या तो $\mathfrak{M} \nvDash \psi$ या $\mathfrak{M} \nvDash \chi$। $\mathfrak{M} \vDash$ की परिभाषा से $\mathfrak{M} \nvDash \psi \wedge \chi$।

3. $\varphi \equiv \neg\psi$, $\varphi \equiv \psi \vee \chi$ और $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$ वाली स्थितियाँ समान हैं और अभ्यास के लिए छोड़ी जाती हैं।

4. $\varphi \in \Theta$ और $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$। तब किसी n के लिए $\Pi_n = \Pi'_n, \exists x\, \psi(x)^i$। $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$, $\exists$L का संगत आधार-वाक्य है, अर्थात् किसी c के लिए $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi(c)^k$। फलतः $\psi(c) \in \Theta$ और $c \in C$। आगमन परिकल्पना से $\mathfrak{M} \vDash \psi(c)$। $\mathfrak{M} \vDash$ की परिभाषा से $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \psi(x)$।

5. $\varphi \in \Xi$ और $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$। तब किसी n के लिए $\Lambda_n = \Lambda'_n, \exists x\, \psi(x)^i$। हर बार $\exists x\, \psi(x)$ का अपचयन होने पर वह नए सूचकांक सहित आधार-वाक्य अनुक्रम के दाएँ पक्ष पर बना रहता है; अतः विफलता शाखा में दाईं ओर आने पर उसका अनंत बार अपचयन होता है। प्रत्येक पद $t \in |\mathfrak{M}|$ अंततः विफलता शाखा पर "केवल C_n के अचरों वाला ऐसा पहला पद जिसे दाईं ओर $\exists x\, \psi(x)$ के किसी अपचयन में अभी प्रयुक्त नहीं किया गया" बनता है। अतः प्रत्येक $t \in |\mathfrak{M}|$ के लिए किसी n पर $\psi(t) \in \Lambda_n$, और फलतः $\psi(t) \in \Xi$। आगमन परिकल्पना से प्रत्येक $t \in |\mathfrak{M}|$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \psi(t)$। $\mathfrak{M} \vDash$ की परिभाषा से $\mathfrak{M} \nvDash \exists x\, \psi(x)$।

6. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ वाली स्थितियाँ समान हैं और अभ्यास के लिए छोड़ी जाती हैं। □

उपप्रमेय 84.3. **G3c** *की प्रमाण-खोज कलन-विधि पूर्ण है: यदि वह बीच में रुकती है या कभी समाप्त नहीं होती, तो आरंभिक अनुक्रम* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *वैध नहीं है और इसलिए उसका कोई प्रमाण नहीं है।*

प्रमाण. यदि कलन-विधि बीच में रुकती है या कभी समाप्त नहीं होती, तो ऐसी विफलता शाखा है जिससे $\mathfrak{M}$ परिभाषित किया जा सकता है। सहायक प्रमेय 84.2 से प्रत्येक $\varphi \in \Gamma$ के लिए $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ और प्रत्येक $\varphi \in \Delta$ के लिए $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$। (याद रखें कि $\Pi_0 = \Gamma$ और $\Lambda_0 = \Delta$, इसलिए $\Gamma \subseteq \Theta$ और $\Delta \subseteq \Xi$।) अतः $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध नहीं है। **G3c** की निर्दोषता से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ का कोई प्रमाण नहीं है। □

उपप्रमेय 84.4. **G3c** *पूर्ण है: यदि* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *वैध है, तो* **G3c** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$*।*

प्रमाण. हम प्रतिधनात्मक कथन सिद्ध करते हैं। मान लें **G3c** $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$। तब प्रमाण-खोज कलन-विधि को बीच में रुकना होगा या कभी समाप्त नहीं होना होगा, क्योंकि खोजने के लिए कोई प्रमाण नहीं है। उपप्रमेय 84.3 से $\Gamma \Rightarrow \Delta$ वैध नहीं है। $\square$

84.4 सार्थक वृक्ष

सार्थक-वृक्ष प्रणालियाँ अनुक्रम कलनों से निकटतः संबंधित ऐसी प्रमाण प्रणालियाँ हैं जो हाथ से और सॉफ्टवेयर में कार्यान्वित—दोनों प्रकार की प्रमाण-खोज के लिए विशेष रूप से उपयुक्त हैं। अनुक्रमों के वृक्ष बनाने के बजाय सार्थक-वृक्षों में प्रमाण, सूत्रों का वृक्ष होता है। किंतु प्राकृतिक निगमन के विपरीत इनके नियम अनुक्रम कलन के नियमों का प्रतिबिंब हैं। सार्थक-वृक्ष प्रमाण मूलतः किसी निदर्श की प्रत्यक्ष खोज है। इसलिए इन्हें कभी-कभी *अर्थविज्ञानपरक सार्थक-वृक्ष* या *सत्य-वृक्ष* भी कहते हैं।

चिह्नित सार्थक वृक्ष चिह्नित सूत्रों का वृक्ष है, जिनका रूप $\mathbb{T}\,\varphi$ अथवा $\mathbb{F}\,\varphi$ हो सकता है। वृक्ष नीचे की ओर बढ़ते हैं। वे उन सूत्रों से आरंभ होते हैं जो बताते हैं कि हम क्या सिद्ध करना चाहते हैं। उदाहरणतः अनुक्रम $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$ को सिद्ध करने के लिए वृक्ष $\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi, \mathbb{F}\,\chi, \mathbb{T}\,\theta$ से आरंभ होगा। ऐसी संरचना जो φ और ψ को सत्य तथा χ और θ को असत्य बनाती है, यह दिखाने वाली संरचना है कि $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$ वैध नहीं है।

सार्थक वृक्ष के किसी पर्ण (सबसे निचले) आसंधि को शाखा-विस्तार नियमों द्वारा बढ़ाया जा सकता है। ये नियम उसी शाखा में अतिरिक्त आसंधियाँ जोड़ते हैं या नीचे दो सहोदर आसंधियाँ जोड़कर शाखा को दो नई शाखाओं में बाँटते हैं। नियमों को उसी शाखा में उसके ऊपर स्थित किसी भी चिह्नित सूत्र पर लगाया जा सकता है। चिरसम्मत सार्थक-वृक्ष प्रणाली **Tc** के शाखा-विस्तार नियम सारणी 84.1 में दिए गए हैं।

जैसा कि आप देख सकते हैं, ये नियम केवल **G3c** के उलटे किए हुए नियम हैं; $\mathbb{T}$ और $\mathbb{F}$ चिह्न क्रमशः बताते हैं कि सूत्र अनुक्रम के बाएँ या दाएँ पक्ष पर प्रमुख है।

सार्थक वृक्ष की कोई शाखा *बंद* है यदि उसमें $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ दोनों हों। यदि प्रत्येक शाखा बंद है, तो हम पूरे सार्थक वृक्ष को बंद कहते हैं। उदाहरणतः $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ के लिए, अर्थात् $\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ और $\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ से आरंभ होने वाला, एक संवृतक सार्थक वृक्ष यह है:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				मान्यता
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				मान्यता
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$		$\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ ✓		$\vee\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \chi$ ✓	$\wedge\mathbb{F}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	|	|	$\vee\mathbb{F}\,4$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$			$\vee\mathbb{F}\,4$
7.	$\otimes$	$\otimes$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
8.			$\mathbb{T}\,\chi$	$\mathbb{T}\,\chi$	$\wedge\mathbb{T}\,3$
9.			$\mathbb{F}\,\varphi$	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
10.			$\mathbb{F}\,\psi$	$\mathbb{F}\,\chi$	$\vee\mathbb{F}\,4$
			$\otimes$	$\otimes$	

सही के चिह्न बताते हैं कि संबंधित नियम को सूत्र के नीचे की सभी शाखाओं में उस पर लगाया जा चुका है। $\otimes$ चिह्न बताता है कि शाखा बंद है। नियमों के बाद की पंक्ति-संख्याएँ बताती हैं कि नियम किन चिह्नित सूत्रों पर लगाया गया है (अर्थात् उसी शाखा की बताई गई पंक्ति के सूत्र पर)।

सार्थक वृक्षों में प्रमाण-खोज सरल है। हम सार्थक वृक्ष को चरणों में उत्पन्न करते हैं। चरण 0 में आरंभिक सूत्रों को ऊपर लिख दें। चरण $n+1$ में प्रत्येक पर्ण आसंधि के लिए यह करें: अभी तक सही का चिह्न न लगे हुए पहले (सबसे

$$\frac{\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi}\,\neg\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\mathbb{T}\,\varphi}\,\neg\mathbb{F}$$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{T}\,\psi\end{array}}\,\wedge\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\wedge\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\psi}\,\wedge\mathbb{F}$$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\vee\psi}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\vee\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\vee\mathbb{F}$$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi\to\psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\to\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi\to\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\to\mathbb{F}$$

$$\frac{\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(t)}\,\forall\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(a)}\,\forall\mathbb{F}$$

$$\frac{\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(a)}\,\exists\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(t)}\,\exists\mathbb{F}$$

तालिका 84.1: **Tc** के नियम। $\forall\mathbb{F}$ और $\exists\mathbb{T}$ में अचर a ऊपर की शाखा में नहीं आना चाहिए, अर्थात् वह शाखा के लिए नया होना चाहिए।

ऊपरी) चिह्नित सूत्र को खोजें। उस सूत्र पर शाखा-विस्तार नियम लगाएँ। जिस प्रत्येक शाखा में वह चिह्नित सूत्र है, उसमें नियम लग जाने के बाद उस पर सही का चिह्न लगा दें। (ऊपर का उदाहरण इसी कलन-विधि से उत्पन्न हुआ है।)

$\mathbb{T}\,\forall$ और $\mathbb{F}\,\exists$ रूप के चिह्नित सूत्रों पर कभी सही का चिह्न नहीं लगाया जाता, इसलिए उनका विशेष उपचार करना पड़ता है। यदि वे उपस्थित हों, तो हमें सुनिश्चित करना चाहिए कि अंततः सभी लागू पदों के लिए $\forall\mathbb{T}$ और $\exists\mathbb{F}$ नियम लगाए जाएँ। उदाहरणतः प्रत्येक चरण में प्रत्येक शाखा के ऐसे सभी सूत्रों पर इन्हें लगाकर इसकी गारंटी दी जा सकती है (इस रूप का न होने वाले सर्वोच्च चिह्नित सूत्र से निपटने के बाद)। प्रयुक्त पद t ऐसा पहला पद है जिसे शाखा में पहले से आने वाले अचरों (या कोई अचर न आए तो c_0) और आरंभिक सूत्रों में आने वाले फलन-चिह्नों से बनाया जा सकता है, और जिसका संगत चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\,\psi(t)$ अथवा $\mathbb{F}\,\psi(t)$ शाखा में पहले से नहीं है।

यदि यह प्रमाण-खोज बंद सार्थक वृक्ष उत्पन्न नहीं करती, तो या तो उसमें ऐसी सीमित खुली शाखा है जहाँ सभी गैर-परमाण्विक सूत्रों पर सही का चिह्न लग चुका है, या खोज ऐसा अनंत, सीमित-शाखी वृक्ष उत्पन्न करती है जिसमें कोई अनंत शाखा होनी ही चाहिए। खंड 84.3 की ही तरह हम ऐसी संरचना $\mathfrak{M}$ परिभाषित कर सकते हैं कि शाखा में $\mathbb{T}\,\varphi$ आने पर $\mathfrak{M}\vDash\varphi$, और $\mathbb{F}\,\varphi$ आने पर $\mathfrak{M}\nvDash\varphi$ हो। ($\Theta=\{\varphi:\mathbb{T}\,\varphi$ शाखा में$\}$ और $\Xi=\{\varphi:\mathbb{F}\,\varphi$ शाखा में$\}$ लें।)

इस प्रमाण-खोज विधि से उत्पन्न सार्थक वृक्षों का प्रत्येक आसंधि को एक अनुक्रम देकर आसानी से **G3c** के प्रमाणों में अनुवाद किया जा सकता है। यदि आरंभिक सूत्र अनुक्रम $\Gamma\Rightarrow\Delta$ के अनुरूप हैं, तो प्रत्येक आरंभिक सूत्र को $\Gamma\Rightarrow\Delta$ से चिह्नित करें। यदि किसी शाखा को चिह्नित सूत्र $\mathbb{T}\,\varphi$ पर शाखा-विस्तार नियम लगाकर बढ़ाया जाता है, तो पर्ण को

$\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ से चिह्नित करें; और यदि नियम चिह्नित सूत्र $\mathbb{F}\,\varphi$ पर लगा है, तो पर्ण को $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ से चिह्नित करें। जहाँ सार्थक वृक्ष $\star\mathbb{T}$ नियम लगाता है, वहाँ अनुक्रम पर $\star$L नियम (φ को प्रमुख रखकर) लगाएँ; जहाँ वह $\star\mathbb{F}$ नियम लगाता है, वहाँ $\star$R नियम लगाएँ। नियम के आधार-वाक्य सार्थक वृक्ष में जोड़े गए संगत आसंधियों को चिह्नित करने वाले अनुक्रम हैं। जब कोई सार्थक वृक्ष $\mathbb{T}\,\varphi$ और $\mathbb{F}\,\varphi$ से बंद होता है, तब अंतिम पर्ण आसंधि का चिह्न $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ रूप का अनुक्रम होगा। सार्थक वृक्ष की कुछ क्रमिक आसंधियों को एक ही अनुक्रम मिलेगा; उनकी प्रतियाँ हटा दें। उदाहरणतः ऊपर का सार्थक वृक्ष इस प्रमाण में अनूदित होता है:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \chi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\vee\mathrm{R}}{\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\wedge\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi, \psi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi, \chi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\vee\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\wedge\mathrm{R}}{\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\vee\mathrm{L}$$

अध्याय 85

प्रमाण सिद्धांत के अतिरिक्त स्रोत-पाठ

85.1 कट-विलोपन के प्रमाण का अतिरिक्त अंश

> यह जमी हुई स्रोत प्रति में अलग रखा गया प्रमाण-अंश है। इसे उसी रूप में सुरक्षित रखा गया है; यह अपने-आप में एक नया पूर्ण प्रमेय या पूरा प्रमाण नहीं है।

यदि $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$, तो π निम्न पर समाप्त होता है

$$\pi_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi \\ \hline \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi \end{array}\to\mathrm{R} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi \end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'' \\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}\to\mathrm{L}\right\}\pi_2$$
$$\overline{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\ \mathrm{Cut}$$

Cutपर समाप्त होने वाले प्रमाण

$$\pi_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi \\ \hline \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi \end{array}\to\mathrm{R} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi \end{array}\right.$$
$$\overline{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi}\ \mathrm{Cut}$$

की कट ऊँचाई, π से कम है। आगमन परिकल्पना $\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi$ का प्रमाण π_1'' देती है। Cutपर समाप्त होने वाला प्रमाण

$$\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ B,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi \end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'' \\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}$$
$$\overline{\psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\ \mathrm{Cut}$$

जिसकी कट कोटि और कट ऊँचाई दोनों π की कट कोटि और ऊँचाई से कम हैं; अतः आगमन परिकल्पना $\psi,\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\Lambda$ का **G3c**-प्रमाण π_2''' देती है। अब Cutपर समाप्त होने वाले प्रमाण

$$\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi \end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''' \\ \psi,\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\Lambda \end{array}$$
$$\overline{\psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\ \mathrm{Cut}$$

(जिसकी कट कोटि $< \mathrm{cr}(\pi)$ है) पर आगमन परिकल्पना लगाकर $\Gamma, \Gamma, \Pi, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda, \Lambda, \Lambda$ का प्रमाण प्राप्त करें। प्रतिज्ञप्ति 79.21 लगाकर हमें $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ का प्रमाण π' मिलता है।

85.2 अनुक्रम प्राकृतिक निगमन

यदि कोई ऐसी प्राकृतिक निगमन व्युत्पत्ति है जिसमें Γ मुक्त न की गई मान्यताएँ और φ निष्कर्ष है, तो $\Gamma \Rightarrow \varphi$ लिखें; और यदि Γ रिक्त है तो $\Rightarrow \varphi$।

$\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ के लिए $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, और $\Gamma \cup \Delta$ के लिए Γ, Δ लिखते हैं।

ध्यान दें कि $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \varphi$ होने का अर्थ है कि हमारे पास ऐसी व्युत्पत्ति है जिसमें Γ मुक्त न की गई मान्यताएँ और $\varphi \wedge \varphi$ अंतिम सूत्र है। तब नीचे $\wedge$Elim लगाकर हम समान मुक्त न की गई मान्यताओं और निष्कर्ष φ वाली व्युत्पत्ति पा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$, तो $\Gamma \Rightarrow \varphi$।

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \wedge\mathrm{Elim} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \psi} \wedge\mathrm{Elim}$$

$\wedge$Elim चिह्न प्राकृतिक निगमन के इसी नाम के नियम से संबंध का संकेत देता है।

इसी प्रकार मान लें $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi$, अर्थात् हमारे पास मुक्त न की गई मान्यताओं Γ, φ और अंतिम सूत्र ψ वाली व्युत्पत्ति है। यदि हम $\rightarrow$Intro नियम लगाएँ, तो हमें ऐसी व्युत्पत्ति मिलती है जिसमें Γ मुक्त न की गई मान्यताएँ और $\varphi \rightarrow \psi$ अंतिम सूत्र है, अर्थात् $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$। ध्यान दें कि इससे मान्यताओं का मुक्त अधिक स्पष्ट हो गया है।

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\mathrm{Intro}$$

अन्य नियमों से भी इसी प्रकार निष्कर्ष निकाल सकते हैं, जिन्हें नीचे स्पष्ट किया गया है:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \wedge\mathrm{Elim}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \psi} \wedge\mathrm{Elim}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee\mathrm{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi \qquad \Delta, \varphi \Rightarrow \chi \qquad \Delta', \psi \Rightarrow \chi}{\Gamma, \Delta, \Delta' \Rightarrow \chi} \vee\mathrm{Elim}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\mathrm{Intro} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi} \rightarrow\mathrm{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \bot_I$$

हर मान्यता अपने आप φ से φ की व्युत्पत्ति है, अर्थात् हमारे पास सदा $\varphi \Rightarrow \varphi$ है।

$$\frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}$$

इन नियमों को मिलाकर इस विषय का कलन माना जा सकता है कि कौन-सी प्राकृतिक निगमन व्युत्पत्तियाँ विद्यमान हैं। इन्हें प्राकृतिक निगमन का संकेतनात्मक रूपांतर भी माना जा सकता है, जिसमें प्रत्येक चरण न केवल व्युत्पन्न किए गए सूत्र को, बल्कि उन मुक्त न की गई मान्यताओं को भी दर्ज करता है जिनसे उसे व्युत्पन्न किया गया।

$$
\begin{array}{l}
\varphi \;\Rightarrow\; \varphi \\
\hline
\varphi \;\Rightarrow\; \varphi \vee (\varphi \to \bot) \qquad \psi \;\Rightarrow\; \psi \\
\hline
\qquad \varphi, \psi \to \;\Rightarrow\; \bot \\
\hline
\qquad\quad (\psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \bot \\
\hline
\qquad\quad (\psi \;\Rightarrow\; \varphi \vee (\varphi \to \bot) \qquad (\psi \;\Rightarrow\; \psi \\
\hline
\qquad\qquad\qquad (\psi \;\Rightarrow\; \bot \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow\; \psi \to \bot
\end{array}
$$

जहाँ ψ, $(\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot$ का संक्षिप्त रूप है।

85.3 अनुक्रम कलन की अतिरिक्त नियम-सारणियाँ

अभिगृहीतियाँ

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

संरचनात्मक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\text{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\text{WR}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\text{CL}$$

तार्किक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}\,\neg\text{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\text{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\text{L}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\text{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\text{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\to\text{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\text{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\text{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists\text{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\text{R}$$

तालिका 85.1: अंतःप्रज्ञात्मक तर्क के लिए **G1i** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ, सूत्रों का बहुसमुच्चय है और Δ या तो रिक्त हो सकता है या उसमें एक अकेला सूत्र हो सकता है। CR नियम नहीं है। **G1m**, **G1i** में से WR और $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीतियाँ हटाने पर मिलता है।

अभिगृहीतियाँ

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

तार्किक नियम

$$\frac{\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Gamma \;\Rightarrow\; \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi, \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \qquad \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\to\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \forall x\, \varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi(a)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi(t)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 85.2: अंतःप्रज्ञात्मक तर्क के लिए **G3i** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ, सूत्रों का बहुसमुच्चय है और Δ या तो रिक्त हो सकता है या उसमें एक अकेला सूत्र हो सकता है। अभिगृहीतियों में सूत्र χ परमाण्विक होना चाहिए। **G1m, G1i** में से $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीतियाँ हटाने पर मिलता है।

अभिगृहीतियाँ

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

संरचनात्मक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{CL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{CR}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{XL} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}\,\mathrm{XR}$$

तार्किक नियम

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\to\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 85.3: **LK** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ, Δ और Π, सूत्रों के अनुक्रम हैं।

अभिगृहीतियाँ

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

तार्किक नियम

$$\frac{\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\to\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(t), \forall x\, \varphi(x) \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi(a)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\exists\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

तालिका 85.4: अंतःप्रज्ञात्मक तर्क के लिए बहु-निष्कर्ष **mG3i** के नियम। $\forall$R और $\exists$L में अचर a निष्कर्ष अनुक्रम में नहीं आना चाहिए। Γ और Δ, सूत्रों के बहुसमुच्चय हैं। अभिगृहीतियों में सूत्र χ परमाण्विक होना चाहिए। **mG1m**, **mG1i** में से $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ अभिगृहीतियाँ हटाने पर मिलता है।

खण्ड XX

पूरक और वैकल्पिक स्रोत-पाठ

इस भाग में वे भिन्न पाठ हैं जो जमी हुई स्रोत प्रति में मौजूद हैं, किंतु उसके सामान्य संकलन-क्रम में नहीं आते। कहीं विषय पहले के अध्याय से मिलता है, पर प्रमाण, उदाहरण या प्रस्तुति भिन्न है; इसलिए उसे बिना परिवर्तन सुरक्षित रखा गया है।

अध्याय 86

समुच्चयों, फलनों और आगमन पर पूरक पाठ

86.1 समुच्चयों के बारे में प्रमाण

इस खंड का स्थान `content/method/proofs` ने ले लिया है और इसे डिफ़ॉल्ट रूप से इस अध्याय से हटा दिया गया है।

अब तक प्रस्तुत समुच्चय और संकेतन हमें समुच्चय निर्दिष्ट करने तथा उनके बीच संबंध व्यक्त करने के सुविधाजनक संक्षिप्त रूप देते हैं। प्रायः ऐसे संबंधों के बारे में दावे सिद्ध करना भी आवश्यक होगा। यदि आप गणितीय प्रमाणों से परिचित नहीं हैं, तो यह आपके लिए नया हो सकता है। अतः हम एक सरल उदाहरण को चरण-दर-चरण देखेंगे। हम सिद्ध करेंगे कि किन्हीं समुच्चयों X और Y के लिए सदा $X \cap (X \cup Y) = X$ होता है। समुच्चयों के बीच ऐसी समानता कैसे सिद्ध करते हैं? याद करें कि समुच्चय केवल अपने अवयव से निर्धारित होते हैं, अर्थात् समुच्चय तभी और केवल तभी समान हैं जब उनके अवयव समान हों। अतः इस मामले में हमें सिद्ध करना है कि (a) $X \cap (X \cup Y)$ का प्रत्येक अवयव, X का भी अवयव है और इसके विपरीत, (b) X का प्रत्येक अवयव, $X \cap (X \cup Y)$ का भी अवयव है। दूसरे शब्दों में हम दोनों दिखाते हैं: (a) $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$ और (b) $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$।

"$X \cap (X \cup Y)$ का प्रत्येक अवयव z, X का भी अवयव है" जैसे सामान्य दावे को पहले कोई मनमाना $z \in X \cap (X \cup Y)$ दिया हुआ मानकर और इस मान्यता से $z \in X$ सिद्ध करके सिद्ध किया जाता है। आप इस प्रतिरूप को "सामान्य सशर्त प्रमाण" के नाम से जानते होंगे। इस प्रमाण में हमें मान्यता और निष्कर्ष में आई परिभाषाओं का उपयोग भी करना होगा, उदाहरणतः इस मामले में "$\cap$" और "$\cup$" की। अतः स्थिति (a) का तर्क इस प्रकार होगा:

> (a) पहले हम दिखाना चाहते हैं कि $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$, अर्थात् $\subseteq$ की परिभाषा से, किसी भी z के लिए यदि $z \in X \cap (X \cup Y)$, तो $z \in X$। अतः मान लें कि $z \in X \cap (X \cup Y)$। चूँकि z दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ का अवयव तभी और केवल तभी है जब वह दोनों समुच्चयों का अवयव हो, हम निष्कर्षित कर सकते हैं कि $z \in X$ और $z \in X \cup Y$ भी। विशेषतः $z \in X$, और हमें यही दिखाना था।

इससे प्रमाण का पहला आधा पूरा होता है। ध्यान दें कि अंतिम चरण में हमने यह तथ्य उपयोग किया कि यदि किसी मान्यता से कोई संयोजन ($z \in X$ और $z \in X \cup Y$) निष्पन्न होता है, तो उसी मान्यता से प्रत्येक संयोज्य निष्पन्न होता है। आप इस नियम को "संयोजन विलोपन", या $\wedge$Elim, के नाम से जानते होंगे। अब (b) सिद्ध करें:

> (b) अब हम सिद्ध करते हैं कि $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$, अर्थात् $\subseteq$ की परिभाषा से, किसी भी z के लिए यदि $z \in X$, तो $z \in X \cap (X \cup Y)$ भी। मान लें $z \in X$। यह दिखाने के लिए कि $z \in X \cap (X \cup Y)$, हमें ("$\cap$" की परिभाषा से) दिखाना है कि (i) $z \in X$ और (ii) $z \in X \cup Y$ भी। यहाँ (i) केवल हमारी मान्यता है, इसलिए आगे कुछ सिद्ध नहीं करना। (ii) के लिए याद करें कि z

समुच्चयों के किसी सम्मिलन का अवयव तभी और केवल तभी है जब वह उन समुच्चयों में कम-से-कम एक का अवयव हो। चूँकि $z \in X$ और $X \cup Y$, X तथा Y का सम्मिलन है, यहाँ ऐसा ही है। अतः $z \in X \cup Y$। हमने (i) $z \in X$ और (ii) $z \in X \cup Y$ दोनों दिखाए हैं; फलतः "$\cap$" की परिभाषा से $z \in X \cap (X \cup Y)$।

यह कुछ लंबा था, किंतु इससे स्पष्ट होता है कि हम समुच्चयों और उनके संबंधों के बारे में कैसे तर्क करते हैं। सामान्यतः हम इतना स्पष्ट विवरण नहीं देते; विशेषतः सभी परिभाषाएँ दोहराना आवश्यक नहीं होता। किसी अधिक उन्नत पाठ में हमारे परिणाम का प्रमाण कहीं अधिक संक्षिप्त होगा। वह कुछ ऐसा दिख सकता है।

प्रतिज्ञप्ति 86.1 (अवशोषण). *सभी समुच्चयों X, Y के लिए,*

$$X \cap (X \cup Y) = X$$

प्रमाण. (a) मान लें $z \in X \cap (X \cup Y)$। तब $z \in X$, अतः $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$।

(b) अब मान लें $z \in X$। तब $z \in X \cup Y$ भी और इसलिए $z \in X \cap (X \cup Y)$ भी। अतः $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$। $\square$

86.2 समरूपता

समरूपता ऐसा एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है जो उन समुच्चयों की संरचना को सुरक्षित रखता है जिन्हें वह परस्पर संबद्ध करता है; यहाँ संरचना का अर्थ उन संबंधों से है जो समुच्चयों के अवयवों के बीच विद्यमान हों। निम्न दो समुच्चयों $X = \{1, 2, 3\}$ और $Y = \{4, 5, 6\}$ पर विचार कीजिए। दोनों समुच्चयों को परवर्ती, लघुतर और बृहत्तर संबंध संरचना प्रदान करते हैं। इन समुच्चयों के बीच समरूपता ऐसा एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है जो इन संरचनाओं को सुरक्षित रखे। अतः एकैकी आच्छादक फलन $f\colon X \to Y$ तब समरूपता है जब $i < j$ तभी और केवल तभी जब $f(i) < f(j)$, $i > j$ तभी और केवल तभी जब $f(i) > f(j)$, और j, i का परवर्ती तभी और केवल तभी हो जब $f(j)$, $f(i)$ का परवर्ती हो।

परिभाषा 86.2 (समरूपता). मान लीजिए कि U युग्म $\langle X, R\rangle$ और V युग्म $\langle Y, S\rangle$ हैं, जहाँ X और Y समुच्चय हैं तथा R और S क्रमशः X और Y पर संबंध हैं। कोई एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण f, X से Y तक, U से V तक *समरूपता* तभी और केवल तभी है जब वह संबंधात्मक संरचना को सुरक्षित रखे; अर्थात्, किन्हीं x_1 और x_2, जो X में हों, के लिए, $\langle x_1, x_2\rangle \in R$ तभी और केवल तभी जब $\langle f(x_1), f(x_2)\rangle \in S$।

उदाहरण 86.3. निम्न दो समुच्चयों $X = \{1, 2, 3\}$ और $Y = \{4, 5, 6\}$ तथा लघुतर और बृहत्तर संबंधों पर विचार कीजिए। फलन $f\colon X \to Y$, जहाँ $f(x) = 7 - x$ है, $\langle X, <\rangle$ और $\langle Y, >\rangle$ के बीच समरूपता है।

86.3 परिचय

आगमन, तर्कशास्त्र में गणित की सामान्यतः प्रयुक्त प्रमाण-तकनीक है। आप इसे गणित से जानते होंगे, जहाँ प्राकृतिक संख्याओं पर आगमन किया जाता है। वास्तव में अनेक भिन्न प्रकार के गणितीय और तार्किक वस्तु-समुच्चय आगमन के अनुकूल होते हैं।

सामान्यतः आगमन हमें सार्वत्रिक दावा सिद्ध करने देता है; अर्थात् यह दिखाना कि किसी निश्चित प्रकार की प्रत्येक वस्तु में कोई गुण है। विशेषतः आगमन प्रायः तब उपयोगी है जब प्रमाण की "सार्वत्रिक प्रस्तावना" विधि बहुत जटिल हो। आगमन केवल विशेष ढंग से निर्मित गणितीय वस्तुओं पर काम करता है: यदि समुच्चय का प्रत्येक अवयव या तो मूल है अथवा मूल अवयवों से बना है, तो हम उस पर आगमन का उपयोग कर सकते हैं। अधिक ठीक-ठीक:

परिभाषा 86.4. कोई समुच्चय S, फलन f के अंतर्गत *संवृत* है तभी और केवल तभी जब $x \in S$ होने पर $f(x) \in S$।

उदाहरणतः प्राकृतिक संख्याएँ ($\mathbb{N}$), उत्तरवर्ती फलन $f(x) = x + 1$ के अंतर्गत संवृत हैं। यदि x प्राकृतिक संख्या है, तो $x+1$ भी है। किंतु प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ववर्ती फलन $f(x) = x - 1$ के अंतर्गत संवृत नहीं हैं, क्योंकि 0 प्राकृतिक संख्या है पर -1 नहीं।

परिभाषा 86.5. गुण P को फलन $f(x)$ के *अंतर्गत संरक्षित* कहते हैं, जब f के प्रांत की किसी भी वस्तु a के लिए $P(a)$ से $P(f(a))$ निष्पन्न हो (यदि a में गुण P है, तो $f(a)$ में भी है)।

"सम संख्या होने" का गुण फलन $f(x) = x + 2$ के अंतर्गत संरक्षित है, क्योंकि यदि x सम है, तो $x + 2$ भी सम है। सम संख्या होने का गुण उत्तरवर्ती फलन के अंतर्गत संरक्षित नहीं है, क्योंकि यदि x सम है, तो $x + 1$ विषम है।

आगमन प्राकृतिक संख्याओं पर इसलिए काम करता है क्योंकि उत्तरवर्ती फलन को परिमित बार लागू करके प्रत्येक प्राकृतिक संख्या तक 0 से पहुँचा जा सकता है। यह किसी भी ऐसे समुच्चय का अभिलक्षण है जिस पर हम आगमन कर सकते हैं।

परिभाषा 86.6 ($\mathbb{N}$ पर आगमन). यदि 0 में कोई गुण P है और P उत्तरवर्ती फलन के अंतर्गत संरक्षित है, तो प्रत्येक प्राकृतिक संख्या में गुण P है।

उदाहरण 86.7. पहली n प्राकृतिक संख्याओं का योग $\frac{n(n+1)}{2}$ है।

आधार स्थिति। पहली 0 प्राकृतिक संख्याओं का योग $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ है।

आगमन चरण। मान लें कि गुण k के लिए सत्य है। हम दिखाएँगे कि वह $k + 1$ के लिए सत्य है। दूसरे शब्दों में मान लें कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$0 + 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

हम दिखाएँगे कि $P(k + 1)$ सत्य है, अर्थात्

$$0 + 1 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$P(k)$ की मान्यता का उपयोग करके।

$$\begin{aligned}
0 + 1 + \ldots + k &= \frac{k(k+1)}{2} && \text{(मान्यता)} \\
0 + 1 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(दोनों पक्षों में } k+1 \text{ जोड़ें)} \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

अतः आगमन चरण पूरा होता है और हमने दावा सिद्ध कर दिया।[1]

[1]अनुवादक की टिप्पणी: जमी हुई स्रोत प्रति में अंश का पहला पद $2k$ छपा है। ठीक पिछली पंक्ति में $k(k+1)$ का विस्तार $k^2 + k$ है; यहाँ उसी के अनुसार k^2 किया गया है।

सूत्रों के लिए मूल अवयव परमाण्विक सूत्रों हैं। संकारकों से कम जटिल सूत्रों को जोड़कर अधिक जटिल सूत्रों मिलते हैं। प्रत्येक संकारक को सूत्रों के ऐसे फलन के अनुरूप माना जा सकता है जो संबद्ध संकारक से दोनों को जोड़ने वाला नया सूत्र देता है। उदाहरणतः दो सूत्रों φ और ψ को संयोजन में जोड़ने वाले फलन को $\mathcal{E}_\wedge(\varphi, \psi) = \varphi \wedge \psi$ लिख सकते हैं। इन्हें हम *सूत्र-निर्माण फलन* कह सकते हैं। सूत्रों का समुच्चय इन फलनों के अंतर्गत संवृत है: जब भी φ और ψ सूत्रों हों, तब $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ आदि भी हैं।[2]

परिभाषा 86.8 (सूत्रों पर आगमन). यदि प्रत्येक परमाण्विक सूत्र में गुण P है और P, सूत्र-निर्माण फलनों के अंतर्गत संरक्षित है, तो प्रत्येक सूत्र में गुण P है।

यह परिभाषा सूत्रों पर आगमनात्मक प्रमाणों की एक "विधि" सुझाती है। यदि हमें दिखाने को कहा जाए कि प्रत्येक सूत्र में गुण P है, तो निम्न चरणों का अनुसरण करें:

आधार स्थिति। मान लें φ कोई परमाण्विक सूत्र है। [...] अतः φ में गुण P है।
आगमन चरण। मान लें φ और ψ ऐसे सूत्रों हैं जिन दोनों में गुण P है।
स्थिति $\neg$: [...] अतः $\neg\varphi$ में गुण P है।
स्थिति $\wedge$: [...] अतः $\varphi \wedge \psi$ में गुण P है।
स्थिति $\vee$: [...] अतः $\varphi \vee \psi$ में गुण P है।
स्थिति $\rightarrow$: [...] अतः $\varphi \rightarrow \psi$ में गुण P है।
स्थिति $\leftrightarrow$: [...] अतः $\varphi \leftrightarrow \psi$ में गुण P है।
स्थिति $\forall$: [...] अतः $\forall x\varphi$ में गुण P है।
स्थिति $\exists$: [...] अतः $\exists x\varphi$ में गुण P है।

अतः प्रत्येक सूत्र में गुण P है।

[2]अनुवादकीय टिप्पणी: स्रोत के इस परिच्छेद और नीचे की आगमन-विधि में सूत्र के लिए दिया विकृत नियंत्रण-संकेत संकलित नहीं होता। यहाँ उसे सूत्र-संकेत φ किया गया है; मूल स्रोत-पाठ और परिवर्तन का विवरण साथ की उत्पत्ति-अभिलेख सामग्री में सुरक्षित हैं।

अध्याय 87

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र: निर्दोषता और पूर्णता के वैकल्पिक पाठ

87.1 प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की निर्दोषता

प्रमेय 87.1 (निर्दोषता). *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$*, तो* $\Gamma \vDash \varphi$*।*

प्रमाण. प्रमेयों पर आगमन से। यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\vDash \varphi$ और इसलिए और भी अधिक स्पष्टतः $\Gamma \vDash \varphi$। इसी प्रकार यदि $\varphi \in \Gamma$, तो $\Gamma \vDash \varphi$। आगमन चरण के लिए मान लें कि φ, χ और $\chi \to \varphi$ से *मोदुस पोनेन्स* द्वारा प्राप्त होता है; आगमन परिकल्पना के रूप में यह भी मान लें कि प्रमेय $\chi \to \varphi$ और χ के लिए सत्य है। प्रतिज्ञप्ति 7.19 का दूसरा मद इच्छित परिणाम देता है।[1] □

उपप्रमेय 87.2. *यदि* Γ *संतुष्टनीय है, तो* Γ *संगत है। अतः प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र संगत है।*

87.2 प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र की पूर्णता

परिभाषा 87.3. सूत्रों का समुच्चय Γ *अधिकतम संगत* है यदि वह संगत है और यदि Δ ऐसा संगत समुच्चय है कि $\Gamma \subseteq \Delta$, तो $\Gamma = \Delta$।

सहायक प्रमेय 87.4 (सत्यता लेम्मा). *मान लें* Γ *अधिकतम संगत है; तब:*

1. $\varphi \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब* $\neg\varphi \notin \Gamma$*;*
2. $\Gamma \vdash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\varphi \in \Gamma$*;*
3. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *तभी और केवल तभी जब या तो* $\varphi \notin \Gamma$ *या* $\psi \in \Gamma$*।*

प्रमाण.

1. मान लें $\varphi \in \Gamma$। यदि $\neg\varphi \in \Gamma$ भी, तो Γ असंगत है; और यदि न φ न $\neg\varphi$, Γ में है, तो प्रतिज्ञप्ति 12.25 से $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ में से कोई एक संगत है, जिसका अर्थ है कि Γ अधिकतम नहीं है। दूसरी दिशा भी इसी प्रकार सिद्ध होती है।
2. यदि $\varphi \in \Gamma$, तो निस्संदेह $\Gamma \vdash \varphi$। दूसरी ओर मान लें $\Gamma \vdash \varphi$। यदि $\varphi \notin \Gamma$, तो (1) से $\neg\varphi \in \Gamma$। अतः $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \neg\varphi$, जो विरोधाभास है।

[1] अनुवादक की टिप्पणी: स्रोत का संदर्भ तीसरे मद की ओर है, किंतु मोडस पोनेन्स की अर्थवैज्ञानिक वैधता उद्धृत प्रतिज्ञप्ति के दूसरे मद में है।

3. अभ्यास। □

सहायक प्रमेय 87.4(2) की बाएँ-से-दाएँ दिशा दिखाती है कि Γ *निगमनात्मक रूप से संवृत* है, अर्थात् सभी φ के लिए यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।

प्रमेय 87.5 (पूर्णता). *यदि Γ संगत है, तो Γ संतुष्टनीय है।*

प्रमाण. मान लें φ_0, φ_1, ...भाषा के सभी सूत्रों की सर्वग्राही सूची है। हम सूत्रों के समुच्चयों का बढ़ता अनुक्रम Γ_0, Γ_1, ...निम्न प्रकार पुनरावर्ती रूप से परिभाषित करते हैं:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{यदि } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ संगत है;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

फिर परिभाषित करें:

$$\Gamma^* = \bigcup_{0 \leq n} \Gamma_n.$$

अब प्रमाण बारी-बारी से निम्नलिखित तथ्य स्थापित करके आगे बढ़ता है:

1. प्रत्येक n के लिए समुच्चय Γ_n संगत है (n पर आगमन और प्रतिज्ञप्ति 12.25 के उपयोग से);
2. Γ^* संगत है;
3. Γ^* अधिकतम है।

फिर मूल्यांकन v को $v(p_i) = \mathbb{T}$ तभी और केवल तभी रखकर परिभाषित करें जब $p_i \in \Gamma^*$। इसके बाद φ पर आगमन से दिखाया जाता है कि अधिक जटिल वाक्यों के लिए भी Γ^* की सदस्यता, v के अनुसार सत्यता से मेल खाती है: $\overline{v}(\varphi) = \mathbb{T}$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$। विशेषतः v, Γ^* को संतुष्ट करता है और चूँकि $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, इसलिए इच्छानुसार Γ भी संतुष्टनीय है। □

उपप्रमेय 87.6. *यदि $\Gamma \vDash \varphi$, तो $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \nvdash \varphi$, तो प्रतिज्ञप्ति 12.23 से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ संगत है। अतः पूर्णता प्रमेय से $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ संतुष्टनीय है और $\Gamma \nvDash \varphi$। □

प्रतिज्ञप्ति 87.7 (संहतता प्रमेय). *Γ तभी और केवल तभी संतुष्टनीय है जब Γ का प्रत्येक* परिमित *उपसमुच्चय Γ_0 संतुष्टनीय हो।*

प्रमाण. Γ तभी और केवल तभी असंतुष्टनीय है जब वह असंगत है, तभी और केवल तभी जब Γ का कोई परिमित उपसमुच्चय Γ_0 असंगत है, और तभी और केवल तभी जब Γ का कोई परिमित उपसमुच्चय Γ_0 असंतुष्टनीय है। □

उपप्रमेय 87.8. *$\Gamma \vDash \varphi$ तभी और केवल तभी जब Γ के किसी परिमित उपसमुच्चय Γ_0 के लिए $\Gamma_0 \vDash \varphi$।*

अध्याय 88

प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र के पूरक पाठ

88.1 परिचय

प्रथम-क्रम तर्क के सिद्धांत और अधिसिद्धांत को विकसित करने के लिए हमें पहले उसकी अभिव्यक्तियों के वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान को परिभाषित करना होगा। प्रथम-क्रम तर्क की अभिव्यक्तियाँ पद और सूत्रों हैं। पद चरों, अचरों और फलन-चिह्नों से बनते हैं। इसके बाद सूत्रों, विधेय-चिह्नों और पदों से बनते हैं (इनसे सबसे छोटे, "परमाण्विक" सूत्रों बनते हैं); फिर तार्किक संयोजकों और परिमाणकों का उपयोग करके परमाण्विक सूत्रों से अधिक जटिल सूत्र बनाए जा सकते हैं। निर्माण-नियम देने के अनेक ढंग हैं; यहाँ हम केवल एक संभव ढंग देते हैं। अन्य पद्धतियाँ भिन्न प्रतीक चुनेंगी, संयोजकों के भिन्न समुच्चयों को आदिम मानेंगी और कोष्ठकों का भिन्न प्रकार से उपयोग करेंगी (या तथाकथित पोलिश संकेतन की तरह उनका बिल्कुल उपयोग नहीं करेंगी)। फिर भी सभी दृष्टिकोणों में यह बात समान है कि निर्माण-नियम पदों और सूत्रों के समुच्चय को *आगमनात्मक रूप से* परिभाषित करते हैं। परिभाषा ठीक ढंग से दी गई हो तो निर्माण-नियमों के अनुसार प्रत्येक अभिव्यक्ति मूलतः केवल एक ही प्रकार से बन सकती है। अभिव्यक्तियों को *अद्वितीय रूप से पठनीय* बनाने वाली आगमनात्मक परिभाषा के कारण हम उसी विधि—आगमनात्मक परिभाषा—से इन अभिव्यक्तियों को अर्थ दे सकते हैं।

अभिव्यक्तियों को अर्थ देना अर्थविज्ञान का विषय है। अर्थविज्ञान की केंद्रीय धारणा किसी संरचना में संतुष्टि की है। संरचना भाषा के निर्माण-अवयवों को अर्थ देती है: प्रांत वस्तुओं का एक अरिक्त समुच्चय है। परिमाणकों का निर्वचन इस प्रांत पर विचरण करने के रूप में किया जाता है, अचरों को प्रांत के अवयव दिए जाते हैं, फलन-चिह्नों को प्रांत से उसी में जाने वाले फलन दिए जाते हैं, और विधेय-चिह्नों को प्रांत पर संबंध दिए जाते हैं। मूल शब्दावली के इन नियतनों के साथ प्रांत मिलकर संरचना बनाता है। चरों, सूत्रों में आ सकते हैं; अतः अर्थविज्ञान देने के लिए हमें उन्हें भी प्रांत के अवयव नियत करने होते हैं—इसे चर-नियतन कहते हैं। अंततः संतुष्टि-संबंध इन सबको एक साथ जोड़ता है। कोई सूत्र, संरचना $\mathfrak{M}$ में चर-नियतन s के सापेक्ष संतुष्ट हो सकता है; इसे $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ लिखते हैं। इस संबंध की परिभाषा भी φ की संरचना पर आगमन से दी जाती है। उदाहरणतः तार्किक संयोजकों की सत्यता-सारणियों का उपयोग करके $\varphi \wedge \psi$ की संतुष्टि को φ और ψ की संतुष्टि (या असंतुष्टि) के आधार पर परिभाषित किया जाता है। फिर पता चलता है कि यदि सूत्र φ कोई वाक्य है, अर्थात् उसमें कोई मुक्त चर नहीं है, तो चर-नियतन अप्रासंगिक है। इसलिए हम सीधे कह सकते हैं कि कोई वाक्य, किसी संरचना में संतुष्ट है (या नहीं)।

वाक्यों के लिए संतुष्टि-संबंध $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ के आधार पर हम वैधता, अर्थगत तात्पर्य और संतुष्टनीयता की मूल अर्थगत धारणाएँ परिभाषित कर सकते हैं। कोई वाक्य वैध है, $\vDash \varphi$, यदि प्रत्येक संरचना उसे संतुष्ट करती है। वाक्यों का कोई समुच्चय उससे तात्पर्य रखता है, $\Gamma \vDash \varphi$, यदि Γ के सभी वाक्यों को संतुष्ट करने वाली प्रत्येक संरचना, φ को भी संतुष्ट करती है। और वाक्यों का कोई समुच्चय संतुष्टनीय है यदि कोई संरचना उसके सभी वाक्यों को एक साथ संतुष्ट करती है। चूँकि सूत्रों आगमनात्मक रूप से परिभाषित हैं और संतुष्टि भी सूत्रों की संरचना पर आगमन से परिभाषित होती है, इसलिए हम अपने अर्थविज्ञान के गुण सिद्ध करने तथा परिभाषित अर्थगत धारणाओं को परस्पर संबंधित करने के लिए आगमन का उपयोग कर सकते हैं।

88.2 व्युत्पन्नता के गुण

प्रतिज्ञप्ति 88.1 (एकदिष्टता). *यदि* $\Gamma \subseteq \Delta$ *और* $\Gamma \vdash \varphi$*, तो* $\Delta \vdash \varphi$ *भी।*

प्रमाण. प्रत्येक परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है; अतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$ की व्युत्पत्ति, $\Delta \vdash \varphi$ भी दिखाती है। □

प्रतिज्ञप्ति 88.2. $\Gamma \vdash \varphi$ *तभी और केवल तभी जब* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *असंगत हो।*

प्रतिज्ञप्ति 88.3.

1. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$*, तो* Γ *असंगत है।*
2. *यदि* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$*, तो* $\Gamma \vdash \neg\varphi$*।*
3. *यदि* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ *और* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$*, तो* $\Gamma \vdash \bot$*।*
4. *यदि* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ *और* $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$*, तो* $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \bot$*।*
5. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *अथवा* $\Gamma \vdash \psi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$*।*
6. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \vdash \psi$*।*
7. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \vdash \psi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$*।*
8. *यदि* $\Gamma \vdash \varphi$ *और* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$*, तो* $\Gamma \vdash \psi$*।*
9. *यदि* $\Gamma \vdash \neg\varphi$ *अथवा* $\Gamma \vdash \psi$*, तो* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$*।*

प्रमाण. 1. मान लें $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$।

1.	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	मान्यता
2.	$\Gamma_1 \vdash \varphi$	मान्यता
3.	$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$	छेदन

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; अतः $\Gamma \vdash \bot$।

2. मान लें $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$।

1.	$\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to \bot$	निगमन प्रमेय
3.	$\Gamma_0 \vdash (\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$	Ax0
4.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	MP 2, 3

3. मान लें $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ और $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$।

1.	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \bot$	निगमन प्रमेय
3.	$\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	मान्यता
4.	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$	Ax0
5.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	MP 2, 4
6.	$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$	छेदन 3, 5

चूँकि $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसलिए $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$। अतः $\Gamma \vdash \bot$।

4. अभ्यास।

5. मान लें $\Gamma_0 \vdash \varphi$।

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \vee \psi$	MP 1, 2

अतः $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$। $\Gamma \vdash \psi$ वाला प्रमाण इसी प्रकार है।

6. मान लें $\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$।

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \vee \psi$	MP 1, 2

अतः $\Gamma \vdash \varphi$। इसी प्रकार आरंभ होने वाली व्युत्पत्ति दिखाती है कि $\Gamma \vdash \psi$।

7. अभ्यास।

8. मान लें $\Gamma_0 \vdash \varphi$ और $\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$ दोनों।

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	मान्यता
3.	$\Gamma_0 \vdash \psi$	MP 1, 2

चूँकि $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, इसका अर्थ है कि $\Gamma \vdash \psi$।

9. पहले मान लें $\Gamma \vdash \neg\varphi$।

1.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	MP 1, 2

$\Gamma \vdash \psi$ का प्रमाण इसी प्रकार है:

1.	$\Gamma_0 \vdash \psi$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	MP 1, 2

□

प्रमेय 88.4 (सामान्यीकरण). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और x, Γ के किसी भी सूत्र में मुक्त नहीं है, तो $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$।*

प्रमाण. Thm_Γ पर आगमन करें। यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\forall x\, \varphi$ भी। यदि $\varphi \in \Gamma$, तो x, φ में मुक्त नहीं है; अतः $\varphi \to \forall x\, \varphi$ एक अभिगृहीत **(Ax3)** है और MP से $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$। अब मान लें कि φ, MP से मिलता है क्योंकि $\Gamma \vdash \psi$ और $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$। आगमन-परिकल्पना से $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$ और $\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi)$। पर **Ax2** से यह भी है:

$$\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \forall x\, \varphi),$$

और MP के दो प्रयोग अपेक्षित $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ देते हैं। □

प्रमेय 88.5. *(अचरों पर दुर्बल सामान्यीकरण) यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और c ऐसा अचर है जो Γ में नहीं आता, तो कोई चर x ऐसा है जो φ में नहीं आता और जिसके लिए $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$; तथा प्रमाण में c नहीं आता।*

प्रमाण. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ को φ का, Γ से, प्रमाण मानें, जिसमें $\varphi = \varphi_n$। ऐसा चर x चुनें जो $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ में नहीं आता और नए अनुक्रम पर विचार करें: $\varphi_1[x/c], \ldots, \varphi_n[x/c]$. यह अनुक्रम $\varphi[x/c]$ का, Γ से, प्रमाण है। वास्तव में, प्रत्येक $i = 1, \ldots, n$ के लिए:

- यदि φ कोई अभिगृहीत है, तो $\varphi_i[x/c]$ भी;
- यदि $\varphi_i \in \Gamma$, तो क्योंकि c, Γ में नहीं है, $\varphi_i[x/c] = \varphi_i \in \Gamma$;
- यदि φ_i, φ_j और $\varphi_j \to \varphi_i$ से मिलता है, तो $\varphi_i[x/c]$, $\varphi_j[x/c]$ और $(\varphi_j \to \varphi_i)[x/c] = \varphi_j[x/c] \to \varphi_i[x/c]$ से MP द्वारा मिलता है।

स्पष्ट है कि नए अनुक्रम में अचर c अब नहीं आता। अब Γ' को Γ के उन सूत्रों का समुच्चय मानें जो $\varphi[x/c]$ की व्युत्पत्ति में आते हैं। तब x, Γ' के किसी भी सूत्र में मुक्त नहीं है और $\Gamma' \vdash \varphi[x/c]$। सामान्यीकरण (प्रमेय 88.4) से $\Gamma' \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$; अतः एकदिष्टता से $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$, जैसा अपेक्षित था। □

हमारा लक्ष्य प्रमेय 88.5 की इस अपेक्षा को—कि x, φ में कहीं भी नहीं आता—इन दुर्बल अपेक्षाओं से बदलना है कि x, φ में मुक्त नहीं है और c, φ में उसके लिए मुक्त है। स्पष्टतः इसे आबद्ध चर बदलकर किया जा सकता है; इसलिए पहले हम यही सिद्ध करेंगे।

सहायक प्रमेय 88.6. *यदि x, c के लिए, φ में मुक्त है और y, φ में मुक्त नहीं है, तो x, y के लिए, $\varphi[y/c]$ में मुक्त है।*

प्रमाण. यदि x, y के लिए, $\varphi[y/x]$ में मुक्त नहीं है, तो y का कोई मुक्त आविर्भाव, $\varphi[y/c]$ में, किसी परिमाणक $\forall x$ के क्षेत्र में आता है। पर परिकल्पना से y, φ में मुक्त नहीं है; अतः ऐसे सभी आविर्भाव प्रतिस्थापन $[y/c]$ से आते हैं। तब c का कोई आविर्भाव $\forall x$ के क्षेत्र में आता है और x, c के लिए, φ में मुक्त नहीं है। □

सहायक प्रमेय 88.7 (आबद्ध चर का परिवर्तन). *यदि x और y, φ में मुक्त नहीं हैं और दोनों c के लिए, φ में, मुक्त हैं, तो $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c]$ (और प्रमाण में c नहीं आता)।*

प्रमाण. परिकल्पनाओं से y, c के लिए, φ में मुक्त है और x, φ में मुक्त नहीं है; अतः पिछले सहायक प्रमेय 88.6 से y, x के लिए, $\varphi[x/c]$ में मुक्त है। इससे $\forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[x/c][y/x]$ एक अभिगृहीत (**Ax1**) है। चूँकि x, φ में मुक्त नहीं है, इसलिए $\varphi[x/c][y/x] = \varphi[y/c]$; अतः

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[y/c],$$

और निगमन प्रमेय से $\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \varphi[y/c]$। चूँकि y, φ में मुक्त नहीं है, वह $\forall x\, \varphi[x/c]$ में भी मुक्त नहीं है; अतः सामान्यीकरण से $\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \forall y\, \varphi[y/c]$, और निगमन प्रमेय से फिर $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \forall y\, \varphi[y/c]$। $\vdash \forall y\, \varphi[y/c] \to \forall x\, \varphi[x/c]$ का प्रमाण पूर्णतः सममित है; अतः निष्कर्ष Taut से मिलता है। □

प्रमेय 88.8 (अचरों पर प्रबल सामान्यीकरण). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, अचर c, Γ में नहीं आता, और x, φ में मुक्त नहीं है पर c उसके लिए φ में मुक्त है, तो $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$।*

प्रमाण. चूँकि $\Gamma \vdash \varphi$ और c, Γ में नहीं है, दुर्बल सामान्यीकरण से कोई चर y ऐसा है जो φ में नहीं आता और जिसके लिए $\Gamma \vdash \forall y\, \varphi[y/c]$। चूँकि y, φ में कहीं भी नहीं है, इसलिए वह φ में मुक्त नहीं है और c उसके लिए φ में मुक्त भी है। यदि इसके अतिरिक्त परिकल्पना से x, φ में मुक्त नहीं है और c उसके लिए φ में मुक्त है, तो आबद्ध चर बदलने की शर्तें पूरी होती हैं; अतः $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c]$; फलतः $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$। □

प्रमेय 88.9. *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi(t)$, तो $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$।*

2. यदि $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$, तो $\Gamma \vdash \varphi(t)$।

प्रमाण. 1. अभ्यास।

2. मान लें $\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$।

1.	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$	मान्यता
2.	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi[t/x]$	Ax1
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi[t/x]$	MP 1, 2

□

88.3 वाक्यों के अधिकतम संगत समुच्चय

परिभाषा 88.10 (अधिकतम संगत समुच्चय). वाक्यों का समुच्चय Γ *अधिकतम संगत* तभी और केवल तभी है जब

1. Γ संगत है, और
2. यदि $\Gamma \subsetneq \Gamma'$, तो Γ' असंगत है।

ऊपर वाली परिभाषा के समतुल्य एक वैकल्पिक परिभाषा यह है: वाक्यों का समुच्चय Γ *अधिकतम संगत* तभी और केवल तभी है जब

1. Γ संगत है, और
2. यदि $\Gamma \cup \{\varphi\}$ संगत है, तो $\varphi \in \Gamma$।

दूसरे शब्दों में, किसी अधिकतम संगत समुच्चय Γ में पहले से न आने वाले वाक्यों को Γ में इस तरह जोड़ना संभव नहीं है कि परिणामी बड़ा समुच्चय संगत बना रहे।

पूर्णता के प्रमाण में अधिकतम संगत समुच्चय महत्त्वपूर्ण हैं, क्योंकि हम गारंटी दे सकते हैं कि वाक्यों का प्रत्येक संगत समुच्चय Γ किसी अधिकतम संगत समुच्चय Γ^* में समाहित है, और अधिकतम संगत समुच्चय में प्रत्येक वाक्य φ के लिए या तो φ या उसका निषेध $\neg\varphi$ होता है। विशेषतः यह परमाण्विक वाक्यों के लिए सत्य है; अतः ऐसी भाषा में जिसे अचरों से उपयुक्त रूप से विस्तारित किया गया हो, किसी अधिकतम संगत समुच्चय से हम ऐसी संरचना बना सकते हैं जिसमें विधेय-चिह्नों की व्याख्या इस आधार पर परिभाषित होती है कि कौन-से परमाण्विक वाक्यों समुच्चय Γ^* में हैं। फिर दिखाया जा सकता है कि यह संरचना, Γ^* के सभी वाक्यों को (और इसलिए Γ में आने वाले सभी को भी) सत्य बनाती है। इस अंतिम तथ्य के प्रमाण के लिए यह आवश्यक है कि $\neg\varphi \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \notin \Gamma^*$, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma^*$ या $\psi \in \Gamma^*$, इत्यादि।

प्रतिज्ञप्ति 88.11. *मान लें कि Γ अधिकतम संगत है। तब:*

1. *यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।*
2. *किसी भी φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\neg\varphi \in \Gamma$।*
3. *$(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों।*
4. *$(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*
5. *$(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \notin \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।*

प्रमाण. निम्न सभी बातों के लिए मान लें कि Γ अधिकतम संगत है।

1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\varphi \in \Gamma$।

   मान लें कि $\Gamma \vdash \varphi$। इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \notin \Gamma$: तब Γ के अधिकतम संगत होने से $\Gamma \cup \{\varphi\}$ असंगत है, अतः $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.18 और 20.18 से Γ असंगत है। यह इस धारणा का खंडन करता है कि Γ संगत है। अतः $\varphi \notin \Gamma$ नहीं हो सकता, इसलिए $\varphi \in \Gamma$।

2. किसी भी φ के लिए या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\neg\varphi \in \Gamma$।

   इसके विपरीत मान लें कि किसी φ के लिए $\varphi \notin \Gamma$ और $\neg\varphi \notin \Gamma$ दोनों हैं। चूँकि Γ अधिकतम संगत है, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ दोनों असंगत हैं, अतः $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ और $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.21 और 20.21 से Γ असंगत है, जो विरोधाभास है। अतः ऐसा कोई वाक्य φ नहीं हो सकता और प्रत्येक φ के लिए $\varphi \in \Gamma$ या $\neg\varphi \in \Gamma$।

3. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ दोनों हों:

   अग्र दिशा के लिए मान लें कि $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$। तब $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$। (1) से $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \psi$। (1) से $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$, जैसा अपेक्षित था।

   विपरीत दिशा के लिए $\varphi \in \Gamma$ और $\psi \in \Gamma$ मान लें। तब $\Gamma \vdash \varphi$ और $\Gamma \vdash \psi$। (2) से $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$। (1) से $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$।

4. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो।

   अग्र दिशा के प्रतिपक्ष के लिए मान लें कि $\varphi \notin \Gamma$ और $\psi \notin \Gamma$। हमें दिखाना है कि $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$। चूँकि Γ अधिकतम संगत है, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ और $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.23 और 20.23 से $\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\}$ असंगत है। अतः $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$, जैसा अपेक्षित था।

   विपरीत दिशा के लिए मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$। तब $\Gamma \vdash \varphi$ या $\Gamma \vdash \psi$। प्रतिज्ञप्तियाँ 19.23 और 20.23 से $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$। (1) से $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, जैसा अपेक्षित था।

5. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ तभी और केवल तभी जब या तो $\varphi \notin \Gamma$ या $\psi \in \Gamma$ हो:

अग्र दिशा के लिए $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ मान लें, और इसके विपरीत मान लें कि $\varphi \in \Gamma$ तथा $\psi \notin \Gamma$। इन धारणाओं पर $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ और $\Gamma \vdash \varphi$। (1) से $\Gamma \vdash \psi$। किंतु तब (1) से $\psi \in \Gamma$, जो $\psi \notin \Gamma$ वाली धारणा का खंडन करता है।

विपरीत दिशा के लिए पहले उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\varphi \notin \Gamma$। (2) से $\neg\varphi \in \Gamma$ और इसलिए $\Gamma \vdash \neg\varphi$। (2) से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। पुनः (1) से $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ मिलता है, जैसा अपेक्षित था।

अब उस स्थिति पर विचार करें जिसमें $\psi \in \Gamma$। तब $\Gamma \vdash \psi$ और (2) से $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$। (1) से $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$। $\square$

अध्याय 89

अंकगणित के गैर-मानक निदर्श: वैकल्पिक प्रस्तुति

89.1 अंकगणित के गैर-मानक निदर्श

परिभाषा 89.1. मान लें $\mathcal{L}_N$ अंकगणित की वह भाषा है जिसमें एक अचर o, एक द्विस्थानी विधेय-चिह्न $<$, एक एकस्थानी फलन-चिह्न $\prime$, और द्विस्थानी फलन-चिह्नों $+$ तथा $\times$ हैं।

1. अंकगणित का *मानक निदर्श*, $\mathcal{L}_N$ की वह संरचना $\mathfrak{N}$ है जिसमें $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ है और जो o का निर्वचन 0, $<$ का $\mathbb{N}$ पर लघुतर संबंध, तथा $\prime$, $+$ और $\times$ का निर्वचन क्रमशः $\mathbb{N}$ पर उत्तरवर्ती, योग तथा गुणन के रूप में करती है।

2. *सत्य अंकगणित*, सिद्धांत $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ है।

$\mathcal{L}_N$ में काम करते समय हम o पर उत्तरवर्ती फलन के n अनुप्रयोगों वाले रूप $\mathrm{o}'^{\cdots\prime}$ के प्रत्येक पद को संक्षेप में $\overline{n}$ लिखते हैं।

परिभाषा 89.2. $\mathcal{L}_N$ की कोई संरचना $\mathfrak{M}$ *मानक* तभी और केवल तभी है जब $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}$।

प्रमेय 89.3. *सत्य अंकगणित के गैर-मानक गणनीय निदर्श होते हैं।*

प्रमाण. नया अचर c प्रस्तुत करके $\mathcal{L}_N$ का विस्तार करें और सिद्धांत

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\overline{n} < c : n \in \mathbb{N}\}.$$

पर विचार करें। यह सिद्धांत परिमित रूप से संतुष्टनीय है, अतः संहतता से इसका एक निदर्श $\mathfrak{M}$ है, जिसे अधोमुखी लोवेनहाइम–स्कोलेम प्रमेय से गणनीय लिया जा सकता है। जहाँ $|\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}$ का प्रांत है, $\mathfrak{M}$ को $\mathcal{L}$ के अतार्किक अचरों का निर्वचन इस प्रकार करने दें: $\mathbf{z} = \mathrm{o}^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$, $\prec\ = <^{\mathfrak{M}} \subseteq M^2$, $* = \prime^{\mathfrak{M}} \colon |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$, और $\oplus = +^{\mathfrak{M}}, \otimes = \times^{\mathfrak{M}} \colon |\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}|$। प्रत्येक $x \in |\mathfrak{M}|$ के लिए, $*$ को x पर लागू करने से मिले $|\mathfrak{M}|$ के अवयव को हम x^* लिखते हैं।

अब यदि h, $\mathfrak{N}$ और $\mathfrak{M}$ के बीच समाकृतिकता होता, तो कोई $n \in \mathbb{N}$ होता ऐसा कि $h(n) = c^{\mathfrak{M}}$। अतः $\mathfrak{N}$ में कोई ऐसा नियतन s लें कि $s(x) = n$। तब $\mathfrak{N}, s \vDash \overline{n} = x$; प्रमेय 25.9 के प्रमाण से $\mathfrak{M}, h \circ s \vDash \overline{n} = x$ भी, अतः $c^{\mathfrak{M}} = \mathbf{z}^{*\cdots*}$ ($*$ को n बार दोहराकर)। किंतु यह असंभव है, क्योंकि मान्यता से $\mathfrak{M} \vDash \overline{n} < c$ और $\prec$ अस्वपरावर्ती है। इसलिए $\mathfrak{M}$ गैर-मानक है। $\square$

चूँकि प्रमेय 89.3 का गैर-मानक निदर्श $\mathfrak{M}$ मानक निदर्श से प्राथमिकतः तुल्य है, $\mathfrak{M}$ के अनेक गुण निकाले जा सकते हैं। इस खंड का शेष भाग इसी कार्य को समर्पित है, जिससे हम $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ के गणनीय गैर-मानक निदर्शों का सटीक अभिलक्षण प्राप्त कर सकेंगे।

1. $|\mathfrak{M}|$ का कोई सदस्य स्वयं से $\prec$-लघुतर नहीं है: वाक्य $\forall x \neg x < x$, $\mathfrak{N}$ में और इसलिए $\mathfrak{M}$ में सत्य है।

2. इसी प्रकार के तर्क से हमें मिलता है कि $\prec$, $|\mathfrak{M}|$ का एक *रैखिक क्रम* है, अर्थात् $|\mathfrak{M}|$ पर संपूर्ण, अस्वपरावर्ती, संक्रामी संबंध।

3. अवयव $\mathbf{z}$, $|\mathfrak{M}|$ का $\prec$-लघुतम अवयव है।

4. $|\mathfrak{M}|$ का प्रत्येक सदस्य अपने $*$-उत्तरवर्ती से $\prec$-लघुतर है और x^*, x से बड़ा $|\mathfrak{M}|$ का $\prec$-लघुतम सदस्य है।

5. $\mathfrak{M}$ में $\mathbb{N}$ से समाकृतिक ($\prec$ का) एक आरंभिक खंड है: $\mathbf{z}, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}^{**}, \ldots$, जिसे हम $|\mathfrak{M}|$ का *मानक भाग* कहते हैं। $|\mathfrak{M}|$ का कोई अन्य सदस्य *गैर-मानक* है। $|\mathfrak{M}|$ में गैर-मानक सदस्य अवश्य होने चाहिए, अन्यथा प्रमेय 89.3 के प्रमाण का फलन h एक समाकृतिकता है। हम $n, m, \ldots$ को $\mathfrak{M}$ के इस मानक भाग पर विचरने वाले चरों के रूप में प्रयोग करते हैं।

6. प्रत्येक गैर-मानक अवयव किसी भी मानक अवयव से बड़ा है; इसका कारण है कि प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए,

$$\mathfrak{N} \vDash \forall z\, (\neg(z = \mathsf{o} \vee \cdots \vee z = \overline{n}) \to \overline{n} < z),$$

   अतः यदि $z \in |\mathfrak{M}|$ सभी मानक अवयवों से भिन्न है, तो वह उन सभी से *बड़ा* होना चाहिए।

7. $\mathbf{z}$ के अतिरिक्त $|\mathfrak{M}|$ का प्रत्येक सदस्य, $|\mathfrak{M}|$ के किसी अद्वितीय अवयव का $*$-उत्तरवर्ती है, जिसे ${}^*x$ से निरूपित करते हैं। यदि $x = y^*$, तो x और y में से एक के मानक होने पर दोनों मानक हैं (और एक के गैर-मानक होने पर दोनों गैर-मानक)।

8. $|\mathfrak{M}|$ पर तुल्यता संबंध $\approx$ को यह कहकर परिभाषित करें कि $x \approx y$ तभी और केवल तभी जब किसी *मानक* n के लिए या तो $x \oplus n = y$ या $y \oplus n = x$। दूसरे शब्दों में $x \approx y$ तभी और केवल तभी जब x और y परिमित दूरी पर हों। यदि n और m मानक हैं, तो $n \approx m$। x के *खंड* को तुल्यता वर्ग $[x] = \{y : x \approx y\}$ परिभाषित करें।

9. मान लें $x \prec y$, जहाँ $x \not\approx y$। चूँकि $\mathfrak{N} \vDash \forall x \forall y\, (x < y \to (x' < y \vee x' = y))$, इसलिए या तो $x^* \prec y$ या $x^* = y$। दूसरा असंभव है, क्योंकि उससे $x \approx y$ निष्पन्न होता है, अतः $x \prec y$। इसी प्रकार यदि $x \prec y$ और $x \not\approx y$, तो $x \prec {}^*y$। इसलिए यदि $x \prec y$ और $x \not\approx y$, तो प्रत्येक $w \approx x$, प्रत्येक $v \approx y$ से $\prec$-लघुतर है। तदनुसार प्रत्येक खंड $[x]$ द्वि-अनंत शृंखला बनाता है

$$\cdots \prec {}^{**}x \prec {}^*x \prec x \prec x^* \prec x^{**} \prec \cdots$$

   जिसे Z-शृंखला कहते हैं क्योंकि इसका क्रम-प्रकार पूर्णांकों वाला है।

10. $\prec$ क्रम को खंडों तक उठाया जा सकता है: यदि $x \prec y$, तो x का खंड y के खंड से लघुतर है। कोई खंड *गैर-मानक* है यदि उसमें कोई गैर-मानक अवयव हो। मानक खंड सबसे छोटा खंड है।

11. कोई लघुतम गैर-मानक खंड नहीं है: यदि y गैर-मानक है, तो कोई $x \prec y$ है जहाँ x भी गैर-मानक और $x \not\approx y$ है। प्रमाण: मानक निदर्श $\mathfrak{N}$ में प्रत्येक संख्या दो से विभाज्य है, संभवतः शेषफल एक के साथ, अर्थात् $\mathfrak{N} \vDash \forall y \forall x\, (y = x + x \vee y = x + x + \mathsf{o}')$। प्राथमिक तुल्यता से प्रत्येक $y \in |\mathfrak{M}|$ के लिए कोई $x \in |\mathfrak{M}|$ है ऐसा कि या तो $x \oplus x = y$ या $x \oplus x \oplus \mathbf{z}^* = y$। यदि x मानक होता, तो y भी मानक होता; अतः x गैर-मानक है। इसके अतिरिक्त x और y भिन्न खंडों में हैं, अर्थात् $x \not\approx y$। इसे देखने के लिए मान लें कि वे एक ही खंड में हैं, अर्थात् किसी मानक n के लिए $x \oplus n = y$। यदि $y = x \oplus x$, तो $x \oplus n = x \oplus x$, जिससे योग के निरस्तीकरण नियम द्वारा $x = n$ (यह नियम $\mathfrak{N}$ में और इसलिए $\mathfrak{M}$ में भी सत्य है), और अंततः x मानक होता। $y = x \oplus x \oplus \mathbf{z}^*$ होने पर भी इसी प्रकार।

12. इसी प्रकार के तर्क से कोई महत्तम खंड नहीं है।

13. खंडों का क्रम घना है: यदि $[x]$, $[y]$ से लघुतर है (जहाँ $x \not\approx y$), तो उन दोनों से भिन्न कोई खंड $[z]$ उनके बीच है। मान लें $x \prec y$। पहले की तरह $x \oplus y$ दो से विभाज्य है (संभवतः शेषफल के साथ), अतः कोई $u \in |\mathfrak{M}|$ है ऐसा कि या तो $x \oplus y = u \oplus u$ या $x \oplus y = u \oplus u \oplus \mathbf{Z}^*$। अवयव u, x और y का औसत है, अतः उनके बीच है। मान लें $x \oplus y = u \oplus u$ (दूसरी स्थिति भी इसी प्रकार): यदि $u \approx x$, तो किसी मानक n के लिए:

$$x \oplus y = x \oplus n \oplus x \oplus n,$$

अतः $y = x \oplus n \oplus n$ और हमें $x \approx y$ मिलता, जो मान्यता के विरुद्ध है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $u \not\approx x$। इसी प्रकार का तर्क $u \not\approx y$ देता है।

अतः गैर-मानक खंड परिमेय संख्याओं की तरह क्रमित हैं: वे अंतबिंदु-रहित गणनीय रैखिक क्रम बनाते हैं। इससे निष्पन्न होता है कि सत्य अंकगणित के किन्हीं दो गणनीय गैर-मानक निदर्शों $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ के केवल $<$ तथा $=$ वाली भाषा में अपचय समाकृतिक हैं। वास्तव में समाकृतिकता h इस प्रकार परिभाषित की जा सकती है: $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ के मानक भाग मानक निदर्श $\mathfrak{N}$ से और इसलिए परस्पर समाकृतिक हैं। गैर-मानक भाग बनाने वाले खंड स्वयं परिमेय संख्याओं की तरह क्रमित हैं और इसलिए प्रमेय 25.26 से समाकृतिक हैं; प्रत्येक में मनमाने अवयवों का मेल करके और फिर $\mathfrak{M}_1$ में x के उत्तरवर्ती की छवि को $\mathfrak{M}_2$ में x की छवि का उत्तरवर्ती लेकर, खंडों की समाकृतिकता को खंडों के *भीतर* समाकृतिकता तक विस्तारित किया जा सकता है। ध्यान दें कि इससे यह निष्पन्न *नहीं* होता कि $\mathfrak{M}_1$ और $\mathfrak{M}_2$ अंकगणित की पूर्ण भाषा में समाकृतिक हैं (वास्तव में समाकृतिकता सदा किसी चिह्नक-समूह के सापेक्ष होती है), क्योंकि $|\mathfrak{M}_1|$ और $|\mathfrak{M}_2|$ पर योग और गुणन परिभाषित करने के गैर-समाकृतिक ढंग होते हैं। (यह वॉट के एक प्रसिद्ध प्रमेय से भी निष्पन्न होता है कि किसी पूर्ण सिद्धांत के गणनीय निदर्शों की संख्या 2 नहीं हो सकती।)

अध्याय 90

निरूपणीयता: फलनों का वर्ग C

90.1 फलनों का समुच्चय C

C को वह सबसे छोटा फलन-समुच्चय मानें जिसमें

1. शून्य फलन 0,
2. उत्तराधिकारी फलन,
3. जोड़,
4. गुणन,
5. प्रक्षेप, और
6. समता का अभिलाक्षणिक फलन $\chi_=$

हों और जो निम्न संक्रियाओं के अंतर्गत संवृत हो:

1. संयोजन, और
2. नियमित फलनों पर लागू अपरिबद्ध खोज।

याद रखें कि अंतिम प्रतिबंध का अर्थ केवल यह है कि आप μ संक्रिया का उपयोग तभी कर सकते हैं जब परिणाम सर्वत्र-परिभाषित हो। इसकी तुलना *सामान्य पुनरावर्ती* फलनों की परिभाषा से करें: यहाँ हमने जोड़, गुणन और $\chi_=$ जोड़े हैं, किंतु आदिम पुनरावर्तन हटा दिया है।

स्पष्टतः C का प्रत्येक फलन पुनरावर्ती है, क्योंकि जोड़, गुणन और $\chi_=$ पुनरावर्ती हैं। हम दिखाएँगे कि इसका विलोम भी सत्य है; इसका अर्थ है कि C की शेष सामग्री से हम आदिम पुनरावर्तन कर सकते हैं।

90.2 C के फलन Q में निरूपणीय हैं

हमें दिखाना है कि C का प्रत्येक फलन **Q** में निरूपणीय है। अंततः हमें दिखाना होगा कि C के प्रत्येक k-स्थानीय फलन $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$ को उसका निरूपण करने वाला कोई सूत्र $\varphi_f(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$ कैसे नियत किया जाए।

सहायक प्रमेय 90.1. *प्राकृतिक संख्याएँ n और m दी गई हों। यदि $n \neq m$, तो $Q \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$।*

प्रमाण. n पर आगमन का उपयोग करके दिखाएँ कि प्रत्येक m के लिए, यदि $n \neq m$, तो $Q \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$।

आधार मामले में $n = 0$। यदि m, 0 के बराबर नहीं है, तो किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए $m = k + 1$। हमारे पास अभिगृहीत $\forall x\, 0 \neq x'$ है। किसी परिमाणक-अभिगृहीत से x के स्थान पर $\overline{k}$ रखकर हम $0 \neq \overline{k}'$ निष्कर्षित कर सकते हैं। किंतु $\overline{k}'$ केवल $\overline{m}$ है।

आगमन चरण में हम मान सकते हैं कि दावा n के लिए सत्य है और $n+1$ पर विचार करते हैं। m कोई भी प्राकृतिक संख्या हो। दो संभावनाएँ हैं: या तो $m = 0$, अथवा किसी k के लिए $m = k + 1$। पहला मामला ऊपर की तरह हल होता है। दूसरे मामले में मान लें $n + 1 \neq k + 1$। तब $n \neq k$। n के लिए आगमन परिकल्पना से **Q** $\vdash \overline{n} \neq \overline{k}$। हमारे पास अभिगृहीत $\forall x\, \forall y\, x' = y' \to x = y$ है। किसी परिमाणक-अभिगृहीत से हमारे पास $\overline{n}' = \overline{k}' \to \overline{n} = \overline{k}$ है। प्रतिज्ञप्तिक तर्क का उपयोग करके हम **Q** में $\overline{n} \neq \overline{k} \to \overline{n}' \neq \overline{k}'$ निष्कर्षित कर सकते हैं। मोडस पोनेन्स से हमें $\overline{n}' \neq \overline{k}'$ मिलता है, और यही हमें चाहिए, क्योंकि $\overline{k}'$, $\overline{m}$ है। □

ध्यान दें कि उपपत्ति बहुत बड़ा दावा नहीं करती: मूलतः वह कहती है कि **Q** सिद्ध कर सकता है कि अलग-अलग अंक-सूचक अलग वस्तुओं को निर्दिष्ट करते हैं। उदाहरणतः **Q** सिद्ध करता है कि $0'' \neq 0'''$। किंतु इसे सामान्य रूप में दिखाने के लिए कुछ सावधानी चाहिए। यह भी ध्यान दें कि यद्यपि हम आगमन का उपयोग कर रहे हैं, यह **Q** के *बाहर* का आगमन है।

हम शून्य, उत्तराधिकारी, जोड़, गुणन, समता के अभिलाक्षणिक फलन और प्रक्षेपों का निरूपण कर सकेंगे। प्रत्येक मामले में उपयुक्त निरूपक सूत्र पूरी तरह सीधा है; उदाहरणतः शून्य का निरूपण सूत्र

$$y = 0,$$

उत्तराधिकारी का निरूपण सूत्र

$$x_0' = y,$$

और जोड़ का निरूपण सूत्र

$$x_0 + x_1 = y.$$

द्वारा होता है। काम यह दिखाने में है कि **Q** संबद्ध कथनों को सिद्ध कर सकता है; उदाहरणतः ऊपर के सूत्र द्वारा जोड़ का निरूपण होने का अर्थ यह दिखाना है कि प्राकृतिक संख्याओं m और n के प्रत्येक युग्म के लिए **Q** सिद्ध करता है

$$\overline{n} + \overline{m} = \overline{n + m}$$

और

$$\forall y\, ((\overline{n} + \overline{m}) = y \to y = \overline{n + m}).$$

संयोजन के बारे में क्या? मान लें h इस प्रकार परिभाषित है:

$$h(x_0, \ldots, x_{l-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

और हम पहले ही ऐसे सूत्र $\varphi_f, \varphi_{g_0}, \ldots, \varphi_{g_{k-1}}$ पा चुके हैं जो क्रमशः फलनों $f, g_0, \ldots, g_{k-1}$ का निरूपण करते हैं। तब हम h का निरूपण करने वाला सूत्र φ_h इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं: $\varphi_h(x_0, \ldots, x_{l-1}, y)$ हो

$$\exists z_0 \ldots \exists z_{k-1}\, (\varphi_{g_0}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_0) \wedge \cdots \wedge \varphi_{g_{k-1}}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_{k-1}) \wedge \\ \varphi_f(z_0, \ldots, z_{k-1}, y)).$$

अंततः अपरिबद्ध खोज पर विचार करें। मान लें $g(x, \vec{z})$ नियमित है और **Q** में, मान लें सूत्र $\varphi_g(x, \vec{z}, y)$ द्वारा, निरूपणीय है। f को $f(\vec{z}) = \mu x\ g(x, \vec{z})$ द्वारा परिभाषित करें। हम f का निरूपण करने वाला कोई सूत्र $\varphi_f(\vec{z}, y)$ खोजना चाहते हैं। एक स्वाभाविक चुनाव है:

$$\varphi_f(\vec{z}, y) \equiv \varphi_g(y, \vec{z}, 0) \wedge \forall w\, (w < y \to \neg\varphi_g(w, \vec{z}, 0)).$$

कुछ अतिरिक्त उपपत्तियों का उपयोग करके दिखाया जा सकता है कि यह काम करता है; उदाहरणतः:

सहायक प्रमेय 90.2. *प्रत्येक चर x और प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए* **Q**, $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$ *को सिद्ध करता है।*

यह फिर उल्लेखनीय है कि यह उस कथन से दुर्बल है कि **Q**, $\forall x \forall y\, (x' + y) = (x + y)'$ को सिद्ध करता है (जो असत्य है)।

प्रमाण. सामान्यतः प्रमाण n पर आगमन द्वारा है। आधार मामले में $n = 0$; हमें दिखाना है कि **Q**, $(x'+0) = (x+0)'$ को सिद्ध करता है। किंतु हमारे पास है:

$$\begin{aligned}
&(x' + 0) = x' \quad \text{अभिगृहीत 4 से}\\
&(x + 0) = x \quad \text{अभिगृहीत 4 से}\\
&(x + 0)' = x' \quad \text{पंक्ति 2 से}\\
&(x' + 0) = (x + 0)' \quad \text{पंक्तियों 1 और 3 से।}
\end{aligned}$$

आगमन चरण में हम मान सकते हैं कि हमने **Q** में $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$ व्युत्पन्न किया है। चूँकि $\overline{n+1}$, $\overline{n}'$ है, हमें दिखाना है कि **Q**, $(x' + \overline{n}') = (x + \overline{n}')'$ को सिद्ध करता है। समताओं की निम्न शृंखला **Q** में व्युत्पन्न की जा सकती है:

$$\begin{aligned}
(x' + \overline{n}') &= (x' + \overline{n})' \quad \text{अभिगृहीत 5}\\
&= (x + \overline{n}')' \quad \text{आगमन परिकल्पना से।}
\end{aligned}$$

□

सहायक प्रमेय 90.3. *1.* **Q**, $\neg(x < \overline{0})$ *को सिद्ध करता है।*

2. प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए **Q** *सिद्ध करता है*

$$x < \overline{n+1} \to (x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}).$$

प्रमाण. आइए 1 और 2 का कुछ भाग अनौपचारिक रूप से करें (अर्थात् औपचारिक व्युत्पत्ति बनाने के केवल संकेत दें)।

भाग 1 के लिए $<$ की परिभाषा से हमें **Q** में $\neg\exists y\, (y' + x) = 0$ सिद्ध करना है, जो प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र के अभिगृहीतों और नियमों से $\forall y\, (y' + x) \neq 0$ के समतुल्य है। विचार यह है: मान लें $(y' + x) = 0$। यदि x, 0 है, तो हमारे पास $(y' + 0) = 0$ है। किंतु **Q** के अभिगृहीत 4 से $(y' + 0) = y'$, और अभिगृहीत 2 से $y' \neq 0$, जो विरोधाभास है। अतः $\forall y\, (y' + x) \neq 0$। यदि x, 0 नहीं है, तो अभिगृहीत 3 से कोई z ऐसा है कि $x = z'$। किंतु तब हमारे पास $(y' + z') = 0$ है। अभिगृहीत 5 से $(y' + z)' = 0$, जो फिर अभिगृहीत 2 के विरुद्ध है।

भाग 2 के लिए n पर आगमन का उपयोग करें। आधार मामला $n = 0$ लें। उस मामले में हमें $x < \overline{1} \to x = \overline{0}$ दिखाना है। मान लें $x < \overline{1}$। तब $<$ के परिभाषक अभिगृहीत से हमारे पास $\exists y\, (y' + x) = 0'$ है। मान लें y में यह गुण है; अतः हमारे पास $y' + x = 0'$ है।

हमें $x = 0$ दिखाना है। अभिगृहीत 3 से यदि x, 0 नहीं है, तो वह किसी z के लिए z' के बराबर है। तब हमारे पास $(y' + z') = 0'$ है। **Q** के अभिगृहीत 5 से $(y' + z)' = 0'$। अभिगृहीत 1 से $(y' + z) = 0$। किंतु परिभाषा से इसका अर्थ $z < 0$ है, जो भाग 1 के विरुद्ध है। □

हमने दिखाया है कि संगणनीय फलनों के समुच्चय को **Q** में निरूपणीय फलनों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है। वास्तव में प्रमाण अधिक व्यापक है। निरूपणीयता की परिभाषा से यह देखना कठिन नहीं है कि **Q** का कोई भी विस्तार (अथवा कोई ऐसा सिद्धांत जिसमें **Q** की व्याख्या की जा सके) संगणनीय फलनों का निरूपण कर सकता है; किंतु विलोमतः, जिस किसी व्युत्पत्ति-तंत्र में प्रमाण की धारणा संगणनीय हो, उसमें प्रत्येक निरूपणीय फलन संगणनीय है। अतः उदाहरण के लिए संगणनीय फलनों के समुच्चय को पियानो अंकगणित, बल्कि ज़र्मेलो–फ्रेंकेल समुच्चय-सिद्धांत में भी निरूपित फलनों के समुच्चय के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है। जैसा ग्योडेल (Gödel) ने उल्लेख किया, यह कुछ आश्चर्यजनक है। हम देखेंगे कि सिद्धता के प्रश्न इस बात के प्रति अत्यंत संवेदनशील होते हैं कि हम किस सिद्धांत पर विचार कर रहे हैं; मोटे तौर पर अभिगृहीत जितने प्रबल होंगे, उतना अधिक सिद्ध किया जा सकेगा। किंतु अभिगृहीती सिद्धांतों के व्यापक वर्ग में निरूपणीय फलन ठीक संगणनीय फलन ही हैं।

अध्याय 91

द्वितीय-क्रम भाषा: पूरक परिचय

91.1 द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र की भाषा

प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र की तरह द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र की अभिव्यक्तियाँ एक मूल शब्दावली से बनती हैं जिसमें *चरों*, *अचरों*, *विधेय-चिह्नों* और कभी-कभी *फलन-चिह्नों* होते हैं। इनसे, तार्किक संयोजकों, परिमाणकों तथा कोष्ठक और अल्पविराम जैसे विराम-चिह्नों के साथ, *पद* और *सूत्रों* बनते हैं। अंतर यह है कि वस्तुओं के चरों के अतिरिक्त द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र में संबंधों और फलनों के चर भी होते हैं तथा उन पर परिमाणीकरण की अनुमति होती है। अतः द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र के तार्किक चिह्न प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र के चिह्नों के साथ ये हैं:

1. प्रत्येक स्थान-संख्या n के द्वितीय-क्रम संबंध चरों का एक गणनीय अनंत समुच्चय: V_0^n, V_1^n, V_2^n, ...
2. द्वितीय-क्रम फलन चरों का एक गणनीय अनंत समुच्चय: u_0^n, u_1^n, u_2^n, ...

प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र में प्रायः तादात्म्य $=$ सम्मिलित होती है। प्रथम-क्रम तर्कशास्त्र में किसी भाषा $\mathcal{L}$ के अतार्किक चिह्न हमें कोई रोचक बात व्यक्त करने देने के लिए निर्णायक हैं। निस्संदेह ऐसे वाक्यों हैं जिनमें कोई अतार्किक चिह्न नहीं आता, किंतु केवल $=$ से कुछ रोचक कहना कठिन है। द्वितीय-क्रम तर्कशास्त्र में संबंध और फलन चरों की असीमित आपूर्ति होने के कारण हम अतार्किक चिह्नों की विशेष आपूर्ति के बिना भी वह सब कह सकते हैं जो किसी प्रथम-क्रम भाषा में कह सकते हैं।

अध्याय 92

लैम्ब्डा कलन के पूरक पाठ

92.1 परिवर्तन और अपचयन

लैम्ब्डा कलन में परिवर्तन या अपचयन के तीन प्रकार हैं। जैसा हम देखेंगे, परिवर्तन और अपचयन में अंतर इस बात का है कि "रूपांतरण" एकदिश है या द्विदिश।

α-परिवर्तन चरों के पुनर्नामकरण से संबंधित है। $\lambda x.x$ और $\lambda y.y$ को एक ही फलन (तादात्म्य फलन) का निरूपण मानना स्वाभाविक है; इस विचार को हम इस प्रकार सटीक रूप देते हैं:

92.2 सूचियाँ

सूची $[M_1, M_2, \ldots, M_n]$ को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$[M_1, M_2, \ldots, M_n] \equiv \lambda sz.\, sM_1(sM_2(\ldots(sM_n z)))$$

अनौपचारिक रूप से, किसी सूची को निरूपित करने वाला पद उस सूची का "संचायक" फलन है: ऐसा फलन जो दो पद स्वीकार करता है। पहला ऐसा फलन है जो संचित मान के साथ नया अवयव लेकर नया संचित मान लौटाता है; दूसरा आरंभिक संचित मान है। वह अवयवों को एक-एक करके संचित करता है और अंत में परिणाम लौटाता है।

यदि आप फलनीय प्रोग्रामिंग से परिचित हैं, तो यह परिभाषा *दाएँ फोल्ड (right fold)* जैसी लगेगी: सूची को उसमें समाहित अवयवों के दाएँ फोल्ड फलन के रूप में परिभाषित किया गया है।

इस कूटन के आधार पर हम कुछ उपयोगी फलन सरलता से परिभाषित कर सकते हैं:

$$\text{Sum} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda xa.\, \text{Add}\, x\, a)\, \overline{0}$$
$$\text{Len} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda xa.\, \text{Add}\, a\, \overline{1})\overline{0}$$

Sum चर्च अंकों की किसी सूची का योग निकालता है। यह सूची पर संचय करता है, जिसमें आरंभिक मान $\overline{0}$ है और प्रत्येक अवयव के लिए नया मान $\text{Add}\, x\, a$ लौटाया जाता है (जहाँ x वर्तमान अवयव और a संचित मान है)। परिणाम सभी अवयवों का योग है।

अध्याय 93

बहुमूल्य तर्कशास्त्र: प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

93.1 प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ

जिस प्रकार हमने अनेक महत्त्वपूर्ण अर्थगत धारणाएँ (मान्यता, परिणाम, संतुष्टता) परिभाषित की हैं, उसी प्रकार अब हम उनकी संगत *प्रमाण-सैद्धांतिक धारणाएँ* परिभाषित करते हैं। ये संरचनाओं में वाक्यों की संतुष्टि के आधार पर नहीं, बल्कि कुछ सीक्वेंटों की व्युत्पन्नता या अव्युत्पन्नता के आधार पर परिभाषित होती हैं। यह एक महत्त्वपूर्ण खोज थी कि ये धारणाएँ परस्पर मेल खाती हैं। इनका मेल खाना *यथार्थता* और *पूर्णता प्रमेय* की अंतर्वस्तु है।

परिभाषा 93.1 (प्रमेय). कोई वाक्य φ *प्रमेय* है यदि **LK** में सीक्वेंट $\quad \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति हो। यदि φ प्रमेय है तो हम $\vdash \varphi$ लिखते हैं और यदि नहीं है तो $\nvdash \varphi$।

परिभाषा 93.2 (व्युत्पन्नता). कोई वाक्य φ, वाक्यों के समुच्चय Γ से *व्युत्पन्न* है, $\Gamma \vdash \varphi$, तभी और केवल तभी जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और Γ_0 के वाक्यों का कोई अनुक्रम Γ_0' ऐसा हो कि **LK**, $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ को व्युत्पन्न। यदि φ, Γ से व्युत्पन्न नहीं है तो हम $\Gamma \nvdash \varphi$ लिखते हैं।

संकुचन, दुर्बलीकरण और विनिमय नियमों के कारण Γ_0' में वाक्यों का क्रम और संख्या महत्त्व नहीं रखते: यदि कोई सीक्वेंट $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है, तो ऐसा प्रत्येक $\Gamma_0'' \Rightarrow \varphi$ भी व्युत्पन्न है जिसमें वही वाक्य आते हैं जो Γ_0' में आते हैं। उदाहरणार्थ, यदि $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$, तो $\Gamma_0' = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ और $\Gamma_0'' = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$ दोनों ऐसे अनुक्रम हैं जिनमें केवल Γ_0 के वाक्य आते हैं। यदि इनमें से एक वाला सीक्वेंट व्युत्पन्न है तो दूसरा भी है, जैसे:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}\,\text{CL}}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{XL}\quad\text{WL}$$

अब से यदि Γ_0 वाक्यों का परिमित समुच्चय हो, तो $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ से हमारा आशय ऐसा कोई भी सीक्वेंट होगा जिसका पूर्ववर्ती Γ_0 के वाक्यों का अनुक्रम हो; और आवश्यकता होने पर हम संकुचन, विनिमय और दुर्बलीकरण को अंतर्निहित मानेंगे।

परिभाषा 93.3 (संगति). वाक्यों का समुच्चय Γ *असंगत* है, तभी जब कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा हो कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow \quad$ को व्युत्पन्न। यदि Γ असंगत नहीं है, अर्थात् प्रत्येक परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ के लिए **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow \quad$ को व्युत्पन्न, तो हम इसे *संगत* कहते हैं।

प्रतिज्ञप्ति 93.4 (स्वपरावर्तन). *यदि* $\varphi \in \Gamma$, *तो* $\Gamma \vdash \varphi$।

प्रमाण. आरंभिक सीक्वेंट $\varphi \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है और $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 93.5 (एकदिष्टता). *यदि $\Gamma \subseteq \Delta$ और $\Gamma \vdash \varphi$, तो $\Delta \vdash \varphi$।*

प्रमाण. मान लें $\Gamma \vdash \varphi$, अर्थात् कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ व्युत्पन्न है। चूँकि $\Gamma \subseteq \Delta$, इसलिए Γ_0, Δ का भी परिमित उपसमुच्चय है। अतः $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की व्युत्पत्ति यह भी दिखाती है कि $\Delta \vdash \varphi$। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 93.6 (संक्रमणशीलता). *यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$।*

प्रमाण. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ और $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति π_0 है। यदि $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, तो किसी परिमित उपसमुच्चय $\Delta_0 \subseteq \Delta$ के लिए $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$ की कोई व्युत्पत्ति π_1 है। निम्न व्युत्पत्ति पर विचार करें:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi}\ \text{Cut}$$

चूँकि $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, इससे $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ सिद्ध होता है। $\square$

ध्यान दें कि इससे विशेष रूप से यह मिलता है कि यदि $\Gamma \vdash \varphi$ और $\varphi \vdash \psi$, तो $\Gamma \vdash \psi$। इससे यह भी निकलता है कि यदि $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ और प्रत्येक i के लिए $\Gamma \vdash \varphi_i$, तो $\Gamma \vdash \psi$।

प्रतिज्ञप्ति 93.7. *Γ असंगत है तभी जब प्रत्येक वाक्य φ के लिए $\Gamma \vdash \varphi$।*

प्रमाण. अभ्यास। $\square$

प्रतिज्ञप्ति 93.8 (संहतता). *1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि $\Gamma_0 \vdash \varphi$।*

2. यदि Γ का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संगत है, तो Γ संगत है।

प्रमाण. 1. यदि $\Gamma \vdash \varphi$, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि सीक्वेंट $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ की कोई व्युत्पत्ति है। फलतः $\Gamma_0 \vdash \varphi$।

2. यदि Γ असंगत है, तो कोई परिमित उपसमुच्चय $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ऐसा है कि **LK**, $\Gamma_0 \Rightarrow$ को व्युत्पन्न। किंतु तब Γ_0, Γ का असंगत परिमित उपसमुच्चय है। $\square$

अध्याय 94

सामान्य मोडल तर्कशास्त्र: पूरक पाठ

94.1 सामान्य मोडल तर्कशास्त्र

किसी मोडल तर्कशास्त्र को सूत्रों का कोई उपयुक्त रूप से सुव्यवस्थित समुच्चय माना जा सकता है। कुछ मोडल तर्कशास्त्र विशेष रुचि के हैं—इसलिए कि उनकी रोचक व्याख्याएँ और अनुप्रयोग हैं, पर मुख्यतः इसलिए कि उन्हें सैद्धांतिक रूप से अच्छी तरह समझा गया है। ये तथाकथित सामान्य मोडल तर्कशास्त्र हैं।

परिभाषा 94.1. *मोडल तर्कशास्त्र* $\mathbf{L}$, मूल मोडल भाषा के सूत्रों का ऐसा समुच्चय है जो

1. सभी प्रतिज्ञप्तिक सर्वसत्यताओं को समाहित करता है,
2. एकरूप प्रतिस्थापन के अधीन संवृत है, और
3. मोडस पोनेन्स के अधीन संवृत है; अर्थात् जब भी φ और $(\varphi \to \psi) \in \mathbf{L}$, तब $\psi \in \mathbf{L}$ भी।

उदाहरण 94.2. सूत्रों के कुछ ऐसे समुच्चय, जो निस्संदेह बहुत रोचक नहीं हैं, पर इस परिभाषा को संतुष्ट करते हैं और इसलिए मोडल तर्कशास्त्र माने जाते हैं:

1. सभी सर्वसत्यताओं का समुच्चय;
2. सभी सूत्रों का समुच्चय (असंगत मोडल तर्कशास्त्र)।

परिभाषा 94.3. कोई मोडल तर्कशास्त्र $\mathbf{L}$ *सामान्य* है तभी और केवल तभी जब

1. उसमें ये दोनों हों:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \tag{K}$$
$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p; \tag{Dual}$$

2. और वह आवश्यकीकरण के अधीन संवृत हो; अर्थात् जब भी $\varphi \in \mathbf{L}$, तब $\Box\varphi \in \mathbf{L}$ भी।

हमें मोडल तर्कशास्त्र परिभाषित करने के मुख्यतः दो ढंग मिलेंगे। एक प्रमाण-सैद्धांतिक ढंग है: कुछ व्युत्पत्ति-तंत्रों में व्युत्पन्न किए जा सकने वाले सूत्रों का समुच्चय। दूसरा प्रतिरूप-सैद्धांतिक ढंग है: प्रतिरूपों के कुछ वर्गों में मान्य सूत्रों का समुच्चय। यह साधारण प्रतिज्ञप्तिक तर्कशास्त्र (और इसी तरह प्रथम-कोटि तर्कशास्त्र) की स्थिति को प्रतिबिंबित करता है। वहाँ भी सूत्रों के किसी समुच्चय को दो भिन्न ढंगों से चुना जा सकता है, जैसे सभी सत्य-मूल्य नियतनों में सत्य सर्वसत्यताओं का समुच्चय, और किसी व्युत्पत्ति-तंत्र में सभी व्युत्पन्न सूत्रों का समुच्चय। सामान्य मोडल तर्कशास्त्रों के लिए मोडल तर्कशास्त्र निर्दिष्ट करने का यह द्विविध ढंग संबंधात्मक प्रतिरूपों और अभिगृहीतीय (हिल्बर्ट-प्रकार) प्रमाण-तंत्रों से संभव है।

अध्याय 95

अंतःप्रज्ञावादी अर्थविज्ञान: प्रतिज्ञप्तियाँ

95.1 प्रतिज्ञप्तियाँ

कभी-कभी संबंधात्मक प्रतिरूप $\mathfrak{M}$ के उन जगतों के समुच्चय का नाम होना उपयोगी है जहाँ कोई सूत्र φ सत्य है। हम इसे φ द्वारा परिभाषित *प्रतिज्ञप्ति* कहते हैं और $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$ लिखते हैं।

परिभाषा 95.1. हम फलन V को फलन $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}} \colon \mathrm{Frm} \to \wp(W)$ तक आगमनात्मक रूप से इस प्रकार विस्तृत करते हैं:

1. $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{M}} = \emptyset$
2. $[\![p]\!]_{\mathfrak{M}} = V(p)$
3. $[\![\neg\psi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$$\{w \in W : Rww' \text{ वाले प्रत्येक } w' \text{ के लिए } w' \notin [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}}\}.$$
4. $[\![\psi \wedge \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cap [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.
5. $[\![\psi \vee \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cup [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.
6. $[\![\psi \to \chi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$$\{w \in W : Rww' \text{ वाले प्रत्येक } w' \text{ के लिए, यदि } w' \in [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \text{ तो } w' \in [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}\}.$$

प्रतिज्ञप्ति 95.2. *$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ तभी और केवल तभी जब $w \in [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$।*[1]

प्रमाण. अभ्यास। □

[1]अनुवादक की टिप्पणी: स्रोत में यहाँ केवल प्रतिरूप का नाम छापने वाला आदेश `mModel` है; कथन के अभिप्रेत सत्यता-संबंध के लिए परियोजना का `mSat` आदेश इस्तेमाल किया गया है।

अध्याय 96

वैकल्पिक अध्यापन-क्रम और संपादकीय टिप्पणियाँ

अगली टिप्पणियाँ स्रोत के वैकल्पिक अध्यापन-क्रमों से हैं। उनके साझा खंड इस पुस्तक में पहले ही दिए गए हैं; केवल अध्याय-चालक बदलने के कारण उन्हें फिर से नहीं दोहराया गया है।

96.1 समुच्चय, संबंध और फलन: प्रारंभिक क्रम

इस फ़ाइल में सहज समुच्चय सिद्धांत वाले भाग के पहले चार अध्याय मूल, धीमी गति वाले रूप में हैं। पूर्ण भाग `sets-functions-relations-complete.tex` द्वारा सम्मिलित होता है। इस भाग की सामग्री मूलभूत सहज समुच्चय सिद्धांत का पर्याप्त रूप से पूर्ण परिचय है। जब तक यह न माना जा सके कि विद्यार्थियों की यह पृष्ठभूमि है, संभवतः पाठ्यक्रम को इस सामग्री की पुनरावृत्ति से आरंभ करना उचित है—कम-से-कम समुच्चय, फलन और संबंध वाला अंश। इससे यह सुनिश्चित होना चाहिए कि सभी विद्यार्थियों को अन्य किसी भी तार्किक खंड के लिए आवश्यक गणितीय संकेतन की मूल दक्षता हो।

96.2 संबंधों का अध्याय-क्रम

96.3 समुच्चयों का आकार: प्रारंभिक क्रम

यह अध्याय गणनों, गणनीयता और अगणनीयता पर चर्चा करता है। पाठ में कुछ खंडों के दो रूप हैं: एक अधिक प्रारंभिक रूप, और समुच्चय-सिद्धांत पर अधिक विस्तार से चर्चा किए जाने पर उपयोग के लिए एक अधिक उन्नत रूप। इस फ़ाइल में केवल प्रारंभिक रूप शामिल हैं। अधिक उन्नत रूप `size-of-sets-complete` में शामिल हैं।

96.4 वाक्यविन्यास और अर्थविज्ञान का संयुक्त क्रम

चित्र-श्रेय

संदर्भ-ग्रन्थ

Andrásfai, Béla. 1986. Rózsa (Rosa) Péter. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* 30(2-3): 139–145. URL http://www.pp.bme.hu/ee/article/view/4651.

Aspray, William. 1984. The Princeton mathematics community in the 1930s: Alonzo Church. URL http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/pmc05.htm. Interview.

Baaz, Matthias, Christos H. Papadimitriou, Hilary W. Putnam, Dana S. Scott, and Charles L. Harper Jr. 2011. *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth*. Cambridge: Cambridge University Press.

Banach, Stefan and Alfred Tarski. 1924. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae* 6: 244–77.

Benacerraf, Paul. 1965. What numbers could not be. *The Philosophical Review* 74(1): 47–73.

Berkeley, George. 1734. *The Analyst; or, a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician*.

Boolos, George. 1971. The iterative conception of set. *The Journal of Philosophy* 68(8): 215–31.

Boolos, George. 1989. Iteration again. *Philosophical Topics* 17(2): 5–21.

Boolos, George. 2000. Must we believe in set theory? In *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*, eds. Gila Sher and Richard Tieszen, 257–68. Cambridge: Cambridge University Press.

Burali-Forti, Cesare. 1897. Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 11: 154–64.

Button, Tim. 2021. Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27(4): 436–460.

Cantor, Georg. 1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84: 242–58.

Cantor, Georg. 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: Teubner.

Cantor, Georg. 1892. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1: 75–8.

Cheng, Eugenia. 2004. How to write proofs: A quick quide. URL `https://eugeniacheng.com/wp-content/uploads/2017/02/cheng-proofguide.pdf`.

Church, Alonzo. 1936a. A note on the Entscheidungsproblem. *The Journal of Symbolic Logic* 1: 40–41.

Church, Alonzo. 1936b. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics* 58: 345–363.

Cohen, Paul J. 1963. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 24: 556–557.

Cohen, Paul J. 1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Reading, MA: Benjamin.

Conway, John. 2006. The power of mathematics. In *Power*, eds. Alan Blackwell and David MacKay, Darwin College Lectures. Cambridge: Cambridge University Press. URL `http://www.cs.toronto.edu/~mackay/conway.pdf`.

Corcoran, John. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Indianapolis: Hackett, 2nd ed.

Csicsery, George. 2016. Zala films: Julia Robinson and Hilbert's tenth problem. URL `http://www.zalafilms.com/films/juliarobinson.html`.

Dauben, Joseph. 1990. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press.

Davis, Martin, Hilary Putnam, and Julia Robinson. 1961. The decision problem for exponential Diophantine equations. *Annals of Mathematics* 74(3): 425–436. URL `http://www.jstor.org/stable/1970289`.

Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Dick, Auguste. 1981. *Emmy Noether 1882–1935*. Boston: Birkhäuser.

du Sautoy, Marcus. 2014. A brief history of mathematics: Georg Cantor. URL `http://www.bbc.co.uk/programmes/b00ss1j0`. Audio Recording.

Duncan, Arlene. 2015. The Bertrand Russell Research Centre. URL `http://russell.mcmaster.ca/`.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2015. *Ernst Zermelo: An Approach to his Life and Work*. Berlin: Springer-Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Craig G. Fraser, and Akihiro Kanamori. 2010. *Ernst Zermelo. Collected Works*, vol. 1. Berlin: Springer-Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter and Akihiro Kanamori. 2013. *Ernst Zermelo: Collected Works*, vol. 2. Berlin: Springer-Verlag.

Enderton, Herbert B. 2019. Alonzo Church: Life and Work. In *The Collected Works of Alonzo Church*, eds. Tyler Burge and Herbert B. Enderton. Cambridge, MA: MIT Press.

Feferman, Anita and Solomon Feferman. 2004. *Alfred Tarski: Life and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Feferman, Solomon. 1994. Julia Bowman Robinson 1919–1985. *Biographical Memoirs of the National Academy of Sciences* 63: 1–28. URL `http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/robinson-julia.pdf`.

Feferman, Solomon, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, and Jean van Heijenoort. 1986. *Kurt Gödel: Collected Works. Vol. 1: Publications 1929–1936*. Oxford: Oxford University Press.

Feferman, Solomon, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, and Jean van Heijenoort. 1990. *Kurt Gödel: Collected Works. Vol. 2: Publications 1938–1974*. Oxford: Oxford University Press.

Feferman, Solomon and Azriel Levy. 1963. Independence results in set theory by Cohen's method II. *Notices of the American Mathematical Society* 10: 593.

Fraenkel, Abraham. 1922. Über den Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. *Sitzungsberichte der Preussischen Akadademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse* 253–257.

Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Wilhelm Koebner. Translation in Frege (1953).

Frege, Gottlob. 1953. *Foundations of Arithmetic*, ed. J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell & Mott, 2nd ed.

Frey, Holly and Tracy V. Wilson. 2015. Stuff you missed in history class: Emmy Noether, mathematics trailblazer. URL `https://www.iheart.com/podcast/stuff-you-missed-in-history-cl-21124503/episode/emmy-noether-mathematics-trailblazer-30207491/`. Podcast audio.

Gentzen, Gerhard. 1935a. Untersuchungen über das logische Schließen I. *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210. English translation in Szabo (1969), pp. 68–131.

Gentzen, Gerhard. 1935b. Untersuchungen über das logische Schließen II. *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210, 405–431. English translation in Szabo (1969), pp. 68–131.

Giaquinto, Marcus. 2007. *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Gödel, Kurt. 1929. Über die Vollständigkeit des Logikkalküls [On the completeness of the calculus of logic]. Dissertation, Universität Wien. Reprinted and translated in Feferman et al. (1986), pp. 60–101.

Gödel, Kurt. 1931. über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I [On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I]. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173–198. Reprinted and translated in Feferman et al. (1986), pp. 144–195.

Gödel, Kurt. 1938. The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50: 1143–8.

Gouvêa, Fernando Q. 2011. Was Cantor surprised? *American Mathematical Monthly* 118(3): 198–209.

Grattan-Guinness, Ivor. 1971. Towards a biography of Georg Cantor. *Annals of Science* 27(4): 345–391.

Hammack, Richard. 2013. *Book of Proof*. Richmond, VA: Virginia Commonwealth University. URL `http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/BookOfProof.pdf`.

Hartogs, Friedrich. 1915. Über das Problem der Wohlordnung. *Mathematische Annalen* 76: 438–43.

Hausdorff, Felix. 1914. Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. *Mathematische Annalen* 75: 428–34.

Heck, Richard Kimberly. 2012. *Reading Frege's Grundgesetze*. Oxford: Oxford University Press.

Heijenoort, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hilbert, David. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* 38(3): 459–460.

Hilbert, David. 2013. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, eds. William Bragg Ewald and Wilfried Sieg. Heidelberg: Springer.

Hodges, Andrew. 2014. *Alan Turing: The Enigma*. London: Vintage.

Hume, David. 1740. *A Treatise of Human Nature*. London.

Hutchings, Michael. 2003. Introduction to mathematical arguments. URL `https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/proofs.pdf`.

Incurvati, Luca. 2020. *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Institute, Perimeter. 2015. Emmy Noether: Her life, work, and influence. URL https://www.youtube.com/watch?v=tNNyAyMRsgE. Video Lecture.

Irvine, Andrew David. 2015. Sound clips of Bertrand Russell speaking. URL http://plato.stanford.edu/entries/russell/russell-soundclips.html.

Jacobson, Nathan. 1983. *Emmy Noether: Gesammelte Abhandlungen—Collected Papers*. Berlin: Springer-Verlag.

John Dawson, Jr. 1997. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. Boca Raton: CRC Press.

Katz, Karin Usadi and Mikhail G. Katz. 2012. Stevin numbers and reality. *Foundations of Science* 17(2): 109–23.

Kunen, Kenneth. 1980. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. New York: North Holland.

Lévy, Azriel. 1960. Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* 10(1): 223–38.

LibriVox. n.d. Bertrand Russell. URL https://librivox.org/author/1508?primary_key=1508&search_category=author&search_page=1&search_form=get_results. Collection of public domain audiobooks.

Linnebo, Øystein. 2010. Predicative and impredicative definitions. *Internet Encyclopedia of Philosophy* URL http://www.iep.utm.edu/predicat/.

Linsenmayer, Mark. 2014. The partially examined life: Gödel on math. URL http://www.partiallyexaminedlife.com/2014/06/16/ep95-godel/. Podcast audio.

MacFarlane, John. 2015. Alonzo Church's JSL reviews. URL http://johnmacfarlane.net/church.html.

Maddy, Penelope. 1988a. Believing the axioms I. *The Journal of Symbolic Logic* 53(2): 481–511.

Maddy, Penelope. 1988b. Believing the axioms II. *The Journal of Symbolic Logic* 53(3): 736–64.

Magnus, P. D., Tim Button, J. Robert Loftis, Aaron Thomas-Bolduc, Robert Trueman, and Richard Zach. 2021. *Forall* x*: Calgary. An Introduction to Formal Logic*. Calgary: Open Logic Project, f21 ed. URL https://forallx.openlogicproject.org/.

Matijasevich, Yuri. 1992. My collaboration with Julia Robinson. *The Mathematical Intelligencer* 14(4): 38–45.

Menzler-Trott, Eckart. 2007. *Logic's Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen*. Providence: American Mathematical Society.

Montague, Richard. 1961. Semantic closure and non-finite axiomatizability I. In *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics (Warsaw 1959)*, 45–69. New York: Pergamon.

Montague, Richard. 1965. Set theory and higher-order logic. In *Formal systems and recursive functions*, eds. John Crossley and Michael Dummett, 131–48. Amsterdam: North-Holland. Proceedings of the Eight Logic Colloquium, July 1963.

O'Connor, John J. and Edmund F. Robertson. 2005. The real numbers: Stevin to Hilbert URL http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_2.html.

O'Connor, John J. and Edmund F. Robertson. 2014. Rózsa Péter. URL http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Peter.html.

Peano, Giuseppe. 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen* 36(1): 157–60.

Péter, Rózsa. 1935a. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. *Mathematische Annalen* 110: 612–632.

Péter, Rózsa. 1935b. Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. *Mathematische Annalen* 111: 42–60.

Péter, Rózsa. 1951. *Rekursive Funktionen*. Budapest: Akademiai Kiado. English translation in (Péter, 1967).

Péter, Rózsa. 1967. *Recursive Functions*. New York: Academic Press.

Péter, Rózsa. 2010. *Playing with Infinity*. New York: Dover. URL https://books.google.ca/books?id=6V3wNs4uv_4C&lpg=PP1&ots=BkQZaHcR99&lr&pg=PP1#v=onepage&q&f=false.

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Radiolab. 2012. The Turing problem. URL http://www.radiolab.org/story/193037-turing-problem/. Podcast audio.

Ramsey, Frank Plumpton. 1925. The foundations of mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society* 25: 338–384.

Reid, Constance. 1986. The autobiography of Julia Robinson. *The College Mathematics Journal* 17: 3–21.

Reid, Constance. 1996. *Julia: A Life in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. URL https://books.google.ca/books?id=lRtSzQyHf9UC&lpg=PP1&pg=PP1#v=onepage&q&f=false.

Robinson, Julia. 1949. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic* 14(2): 98–114. URL http://www.jstor.org/stable/2266510.

Robinson, Julia. 1996. *The Collected Works of Julia Robinson*. Providence: American Mathematical Society.

Robinson, Raphael. 1947. On the decomposition of spheres. *Fundamenta Mathematicae* 34(1): 246–60.

Rose, Daniel. 2012. A song about Georg Cantor. URL https://www.youtube.com/watch?v=QUP5Z4Fb5k4. Audio Recording.

Rose, Nicholas J. 2010. Hilbert-type space-filling curves. URL https://web.archive.org/web/20151010184939/http://www4.ncsu.edu/~njrose/pdfFiles/HilbertCurve.pdf.

Russell, Bertrand. 1905. On denoting. *Mind* 14: 479–493.

Russell, Bertrand. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin.

Russell, Bertrand. 1967. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 1. London: Allen and Unwin.

Russell, Bertrand. 1968. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 2. London: Allen and Unwin.

Russell, Bertrand. 1969. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 3. London: Allen and Unwin.

Russell, Bertrand. n.d. Bertrand Russell on smoking. URL https://www.youtube.com/watch?v=80oLTiVW_lc. Video Interview.

Sandstrum, Ted. 2019. *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. Allendale, MI: Grand Valley State University. URL https://scholarworks.gvsu.edu/books/7/.

Scott, Dana. 1974. Axiomatizing set theory. In *Axiomatic Set Theory II*, ed. Thomas Jech, 207–14. American Mathematical Society. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, July–August 1967.

Segal, Sanford L. 2014. *Mathematicians under the Nazis*. Princeton: Princeton University Press.

Shoenfield, Joseph R. 1977. Axioms of set theory. In *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, 321–44. London: North-Holland.

Sigmund, Karl, John Dawson, Kurt Mühlberger, Hans Magnus Enzensberger, and Juliette Kennedy. 2007. Kurt Gödel: Das Album–The Album. *The Mathematical Intelligencer* 29(3): 73–76.

Skolem, Thoralf. 1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandanivschen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis zum 7. Juli 1922*, 137–52. Akademiska Bokhandeln.

Smith, Peter. 2013. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press.

Smullyan, Raymond M. 1968. *First-Order Logic*. New York, NY: Springer. Corrected reprint, New York, NY: Dover, 1995.

Solow, Daniel. 2013. *How to Read and Do Proofs*. Hoboken, NJ: Wiley.

Steinhart, Eric. 2018. *More Precisely: The Math You Need to Do Philosophy*. Peterborough, ON: Broadview, 2nd ed.

Sykes, Christopher. 1992. BBC Horizon: The strange life and death of Dr. Turing. URL `https://www.youtube.com/watch?v=gyusnGbBSHE`.

Szabo, Manfred E. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland.

Takeuti, Gaisi, Nicholas Passell, and Mariko Yasugi. 2003. *Memoirs of a Proof Theorist: Gödel and Other Logicians*. Singapore: World Scientific.

Tamassy, Istvan. 1994. Interview with Róza Péter. *Modern Logic* 4(3): 277–280.

Tarski, Alfred. 1981. *The Collected Works of Alfred Tarski*, vol. I–IV. Basel: Birkhäuser.

Theelen, Andre. 2012. Lego turing machine. URL `https://www.youtube.com/watch?v=FTSAiF9AHN4`.

Tomkowicz, Grzegorz and Stan Wagon. 2016. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press.

Turing, Alan M. 1937. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd Series* 42: 230–265.

Tyldum, Morten. 2014. The imitation game. Motion picture.

Velleman, Daniel J. 2019. *How to Prove It: A Structured Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 3rd ed.

Vitali, Giuseppe. 1905. *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*. Bologna: Gamberini e Parmeggiani.

von Neumann, John. 1925. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154: 219–40.

Wang, Hao. 1990. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press.

Weston, Tom. 2003. The Banach-Tarski paradox URL `http://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf`.

Whitehead, Alfred North and Bertrand Russell. 1910. *Principia Mathematica*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.

Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59: 514–516. English translation in (Ebbinghaus et al., 2010, pp. 115–119).

Zermelo, Ernst. 1908a. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65: 261–81.

Zermelo, Ernst. 1908b. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65(2): 261–281. English translation in (Ebbinghaus et al., 2010, pp. 189-229).

Zuckerman, Martin M. 1973. Formation sequences for propositional formulas. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 14(1): 134–138.