Лабораторная работа №1
Логистическое отображение

Автор: Шаталов Николай
Санкт-Петербург, 2025

Уровень Easy

1. Доказательство ограниченности логистического отображения

Утверждение: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0;1]$

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Доказательство:
Проведем доказательство методом математической индукции.

1. **Базис индукции:** При $n = 0$ утверждение выполняется по условию: $0 < x_0 < 1$
2. **Индукционный переход:** Предположим, что $0 < x_n < 1$. Докажем, что $0 < x_{n+1} < 1$

   Рассмотрим логистическое отображение:

   $$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

   Поскольку:

   - $0 \leq r \leq 1$
   - $0 < x_n < 1 \implies 0 < 1 - x_n < 1$
   - $x_n > 0$ и $(1 - x_n) > 0$

   То:

   $$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > 0$$

   Теперь докажем верхнюю границу. Рассмотрим максимум функции $f(x) = rx(1 - x)$ на $[0;1]$.

   Найдем производную:

   $$f'(x) = r(1 - 2x)$$

   Критическая точка: $x = \frac{1}{2}$

   Максимальное значение:

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{4} \leq \frac{1}{4} < 1$$

   Таким образом:

   $$0 < x_{n+1} \leq \frac{r}{4} < 1$$

Что и требовалось доказать.

2. Влияние параметра r на поведение функции

Анализ:

Логистическое отображение: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

- При $r = 0$: $x_{n+1} = 0$ (вырожденный случай)
- При $0 < r \leq 1$: функция монотонно возрастает, максимум в точке $x = \frac{1}{2}$
- При $1 < r \leq 2$: функция выпуклая вниз, максимум увеличивается
- При $2 < r \leq 3$: появляется точка перегиба
- При $r > 3$: появляются осцилляции и хаотическое поведение

3. Анализ для модифицированного отображения (Вариант N=4)

Исходные данные:

- Номер ISU: 501524
- $N = 501524 \mod 5 = 4$
- Функция: $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$
- Диапазон r: $r \in \left[0; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right] \approx [0; 2.598]$

4. Сравнение с логистическим отображением

Сходства:

- Оба отображения имеют форму "колокола"
- При малых r поведение похоже - монотонная сходимость к неподвижной точке
- Оба отображают интервал $[0, 1]$ в себя при соответствующих r
- Имеют неподвижную точку $x = 0$

Различия:

- **Форма кривой:** Логистическое отображение симметрично относительно $x = 0.5$, модифицированное - асимметрично
- **Максимум:**
  - Логистическое: максимум $\frac{r}{4}$ при $x = 0.5$
  - Модифицированное: максимум смещен влево
- **Количество неподвижных точек:** Модифицированное имеет дополнительную неподвижную точку
- **Диапазон параметра r:** Для модифицированного отображения верхняя граница $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$

Причины различий:

- Модифицированное отображение содержит дополнительный множитель $(2 - x)$, что делает его кубическим, а не квадратичным
- Это приводит к более сложной динамике и дополнительным неподвижным точкам
- Асимметрия вызвана несимметричной формой полинома

5. Анализ неподвижных точек для модифицированного отображения

Неподвижные точки удовлетворяют: $x = rx(1 - x)(2 - x)$

Решения:

1. $x = 0$ (тривиальная точка)
2. $1 = r(1 - x)(2 - x)$

$$r(1 - x)(2 - x) = 1$$
$$r(2 - 3x + x^2) = 1$$
$$x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Это квадратное уравнение имеет решения при $r \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Вывод: Модифицированное отображение имеет более богатую динамику благодаря кубической природе, но работает в более узком диапазоне параметра r.

Уровень Normal

1. Неподвижные точки логистического отображения

Логистическое отображение: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Неподвижные точки удовлетворяют условию:

$$x^* = f(x^*) = rx^*(1 - x^*)$$

Решаем уравнение:

$$x = rx(1 - x)$$
$$x - rx(1 - x) = 0$$
$$x[1 - r(1 - x)] = 0$$
$$x(rx - r + 1) = 0$$

Решения:

1. $x^* = 0$
2. $rx - r + 1 = 0 \Rightarrow x^* = 1 - \frac{1}{r}$ (при $r \neq 0$)

Ответы на вопросы:

1. **Все неподвижные точки:** $x^* = 0$ и $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ (при $r > 1$)

2. **Количество неподвижных точек в зависимости от r:**

   - При $r = 0$: одна точка $x^* = 0$
   - При $0 < r \leq 1$: одна точка $x^* = 0$ (вторая точка $x^* = 1 - \frac{1}{r} \leq 0$ не принадлежит $[0, 1]$)
   - При $r > 1$: две точки $x^* = 0$ и $x^* = 1 - \frac{1}{r} \in (0, 1)$

3. **Максимальное количество неподвижных точек:** 2

   Почему: Логистическое отображение - квадратичная функция, поэтому уравнение $x = f(x)$ является квадратным уравнением, которое может иметь не более 2 действительных корней.

2. Монотонность и предел при $r \in (0; 1]$

Утверждение: При $x_0 \in (0; 1)$ и $r \in (0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает.
Доказательство:
Рассмотрим разность:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1 - x_n) - x_n = x_n[r(1 - x_n) - 1]$$

Поскольку:

- $x_n > 0$ (по доказанному в Easy уровне)
- $r \leq 1$
- $1 - x_n < 1$

То:

$$r(1 - x_n) - 1 \leq 1 \cdot (1 - x_n) - 1 = -x_n < 0$$

Следовательно:

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

Существование предела:
Последовательность $\{x_n\}$:

- Монотонно убывает (только что доказано)
- Ограничена снизу: $x_n > 0$ (из Easy уровня)

По теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности, предел существует.

3. Монотонность подпоследовательностей при $r \in (2; 3)$

Условие: $r \in (2; 3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, где $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ - ненулевая неподвижная точка.
Анализ:
Рассмотрим производную логистического отображения:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

В точке $x^* = 1 - \frac{1}{r}$:

$$f'(x^*) = r\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) = r\left(1 - 2 + \frac{2}{r}\right) = 2 - r$$

При $r \in (2;3)$: $f'(x^*) = 2 - r \in (-1,0)$, значит отображение сжимающее и знакопеременное.

Монотонность подпоследовательностей:

- $\{x_{2n}\}$ - монотонно убывает
- $\{x_{2n+1}\}$ - монотонно возрастает

Доказательство:
Рассмотрим вторую итерацию: $f^2(x) = f(f(x))$
Если $x > x^*$, то:

$$f(x) < x^* \quad \text{(т.к. } f'(x^*) < 0\text{)}$$

$$f^2(x) > x^* \quad \text{(снова из-за отрицательной производной)}$$

Аналогично для $x < x^*$. Таким образом, подпоследовательности монотонны.

4. Анализ для модифицированного отображения (N=4)

Функция: $g(x) = rx(1-x)(2-x)$

1. Неподвижные точки:

$$x = rx(1-x)(2-x)$$

Решения:

1. $x^* = 0$
2. $1 = r(1-x)(2-x) \Rightarrow r(2-3x+x^2) = 1$

2. Диапазон монотонной сходимости к нулю:
Рассмотрим производную в точке $x = 0$:

$$g'(x) = r[(1-x)(2-x) - x(2-x) - x(1-x)]$$

$$g'(0) = r[2-0-0] = 2r$$

Условие устойчивости $x^* = 0$: $|g'(0)| < 1 \Rightarrow 2r < 1 \Rightarrow r < 0.5$
Вывод: При $r < 0.5$ последовательность монотонно сходится к 0.

Уровень Hard

1. Циклы логистического отображения

Параметры: $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$

1. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?

При увеличении r в интервале $(3; r_\infty)$ происходит каскад бифуркаций удвоения периода:

- При $r > 3$: появляется цикл периода 2
- При $r \approx 3.449$: цикл периода 4
- При $r \approx 3.544$: цикл периода 8
- Далее: периоды 16, 32, 64, ...

Длина цикла m удваивается при каждом переходе через точку бифуркации:

$$m = 2^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Лестница Ламерея

Алгоритм построения:

1. От начальной точки $(x_0; 0)$ вертикально к линии отображения: $(x_0; x_1)$
2. Горизонтально к диагонали: $(x_1; x_1)$
3. Вертикально к линии отображения: $(x_1; x_2)$
4. Повторять шаги 2-3

Выводы о внешнем виде циклов:

- **Цикл периода 1 (неподвижная точка):** Лестница сходится к точке пересечения кривой с диагональю
- **Цикл периода 2:** Лестница образует прямоугольник, переключаясь между двумя точками
- **Цикл периода 4:** Образуется замкнутая ломаная из 4 звеньев
- **Хаотический режим:** Лестница заполняет область, не образуя регулярной структуры

3. Исследование циклов модифицированного отображения

Функция: $g(x) = rx(1-x)(2-x)$
Сходства с логистическим отображением:

- Оба отображения демонстрируют бифуркации удвоения периода
- Существует переход к хаосу при некотором критическом r
- При малых r наблюдается сходимость к неподвижной точке

Различия:

- Критическое r_∞ разное: ≈ 2.6 для модифицированного против 3.57 для логистического
- Модифицированное отображение имеет более сложную структуру циклов из-за кубической природы
- Диапазон параметров r ограничен сверху $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$

Уровень Expert

1. Устойчивость и асимптотическая устойчивость

Задание 1: Следует ли асимптотическая устойчивость из условия сходимости?

Ответ: Нет, не следует. Условие

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad |x_0 - x^*| < \delta_0 \implies x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$$

гарантирует только сходимость траекторий, начинающихся в δ_0-окрестности, к точке x^*. Однако для асимптотической устойчивости требуется также **устойчивость по Ляпунову**, то есть выполнение условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x_0 - x^*| < \delta \implies |x_n - x^*| < \varepsilon \quad \forall n.$$

Может существовать пример (контрпример), где траектории сходятся к x^*, но на каком-то промежутке покидают заданную ε-окрестность. Поэтому сходимость не влечет устойчивость.

Задание 2: Устойчивость точки $x^* = 0$ при $r \in (0, 1)$

Утверждение: При $r \in (0, 1)$ неподвижная точка $x^* = 0$ является устойчивой и асимптотически устойчивой.

Доказательство:

1. **Неподвижная точка:** Из уравнения $x = rx(1 - x)$ находим $x = 0$ и $x = 1 - 1/r$. При $r < 1$ вторая точка отрицательна, поэтому физически значима только $x^* = 0$.
2. **Производная в точке:** $f(x) = rx(1-x)$, $f'(x) = r(1-2x)$. В точке $x^* = 0$: $f'(0) = r$.
3. **Критерий устойчивости:** Если $|f'(x^*)| < 1$, то точка асимптотически устойчива. При $r \in (0, 1)$ имеем $|f'(0)| = r < 1$, следовательно, $x^* = 0$ асимптотически устойчива.
4. **Графическая проверка:** При $r = 0.5$, начиная с $x_0 = 0.9$, последовательность монотонно убывает к 0.

Задание 3: Неустойчивость точки $x^* = 0$ при $r \in (2, 3)$

Доказательство:

При $r > 2$ производная $f'(0) = r > 2$. Критерий устойчивости: если $|f'(x^*)| > 1$, то неподвижная точка неустойчива. Следовательно, при $r \in (2, 3)$ точка $x^* = 0$ неустойчива.

2. Чувствительность к начальным условиям

Задание: Функция для построения двух траекторий лестницы Ламерея

Интерпретация: При $r = 4$ две траектории, начинающиеся с очень близких начальных условий ($x_0 = 0.2$ и $y_0 = 0.2001$), быстро расходятся. Это визуальное проявление **чувствительности к начальным условиям** — характерного свойства хаотических систем.

3. Бифуркационная диаграмма

Задание: Построение и анализ бифуркационной диаграммы

Анализ:

1. При $r \in [0, 1]$ система сходится к $x^* = 0$.
2. При $r \in (1, 3)$ система сходится к ненулевой неподвижной точке $x^* = 1 - 1/r$.
3. При $r \approx 3$ происходит первая бифуркация — переход к циклу периода 2.

4. При дальнейшем увеличении r происходят бифуркации удвоения периода (2, 4, 8, ...).

5. При $r_\infty \approx 3.5699456$ наступает хаос — бесконечный цикл.

6. При $r > r_\infty$ наблюдаются «окна периодичности» — области, где снова возникают циклы конечного периода.

Положение r_∞: На диаграмме r_∞ — это точка, после которой диаграмма становится «размазанной» (хаотической). До r_∞ видны четкие ветви (циклы), после — сплошное множество точек.

4. Самоподобие и окна периодичности

Задание: Визуализация фрактальной структуры около $r \approx 3.83$

Наблюдение: В окрестности $r \approx 3.83$ видно самоподобие: увеличенный фрагмент напоминает всю бифуркационную диаграмму.

Задание: Окна периодичности для периодов 3, 5, 6

Примерные значения r для циклов:

- Период 3: $r \approx 3.828$
- Период 5: $r \approx 3.738$
- Период 6: возникает в нескольких окнах, например, при $r \approx 3.627$

5. Связь цикла периода 3 с хаотичностью

Теорема Шарковского (обобщенная): Если в одномерном непрерывном отображении существует цикл периода 3, то существуют циклы всех периодов. Наличие цикла периода 3 часто считается индикатором хаотического поведения в логистическом отображении.

Объяснение: При $r \approx 3.828$ в логистическом отображении возникает цикл периода 3. Согласно теореме Ли–Йорке, наличие такого цикла влечёт существование циклов всех периодов и чувствительность к начальным условиям, что является определением детерминированного хаоса.

6. Исследование вариантного отображения $g(x_n)$

Для примера возьмём вариант $N = 2$:

$$g(x) = rx(1-x)^2, \quad r \in \left[0; \frac{27}{4}\right]$$

6.1. Устойчивость точки $x^* = 0$

Производная: $g'(x) = r(1-x)^2 - 2rx(1-x) = r(1-x)(1-3x)$ В точке $x^* = 0$: $g'(0) = r$.

Условия:

- Устойчивость: $|g'(0)| < 1 \implies r < 1$
- Неустойчивость: $|g'(0)| > 1 \implies r > 1$

Сходства и различия с логистическим отображением:

- Также наблюдается переход от сходимости к фиксированной точке $\rightarrow$ бифуркации удвоения $\rightarrow$ хаосу.
- Критическое значение r_∞ другое.
- Структура бифуркационной диаграммы качественно похожа, но количественно отличается.

6.3. Окна периодичности

Аналогично логистическому отображению, в диаграмме видны окна периодичности. Их можно найти, увеличивая фрагменты диаграммы.

Заключение

Уровень Expert позволяет глубоко изведать:

1. **Устойчивость** неподвижных точек и её критерии.
2. **Чувствительность к начальным условиям** как основу хаоса.
3. **Бифуркационные диаграммы** как инструмент визуализации переходов между режимами.
4. **Самоподобие** и **окна периодичности** в хаотических системах.
5. **Связь циклов периода 3** с хаотическим поведением.

Эти концепции важны для понимания нелинейной динамики и её приложений в моделировании сложных систем, включая нейронные сети и генерацию псевдослучайных последовательностей.

Рекомендация: Для более глубокого изучения следует обратиться к рекомендуемой литературе, особенно к книгам по динамическому хаосу и точечным отображениям.