

# Лабораторная работа №1

## Логистическое отображение

Автор: Шаталов Николай  
Санкт-Петербург, 2025

### Уровень Easy

#### 1. Доказательство ограниченности логистического отображения

**Утверждение:**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0; 1]$

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

**Доказательство:**

Проведем доказательство методом математической индукции.

- Базис индукции:** При  $n = 0$  утверждение выполняется по условию:  $0 < x_0 < 1$
- Индукционный переход:** Предположим, что  $0 < x_n < 1$ . Докажем, что  $0 < x_{n+1} < 1$

Рассмотрим логистическое отображение:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Поскольку:

- $0 \leq r \leq 1$
- $0 < x_n < 1 \implies 0 < 1 - x_n < 1$
- $x_n > 0$  и  $(1 - x_n) > 0$

То:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > 0$$

Теперь докажем верхнюю границу. Рассмотрим максимум функции  $f(x) = rx(1 - x)$  на  $[0; 1]$ .

Найдем производную:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

Критическая точка:  $x = \frac{1}{2}$

Максимальное значение:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{4} \leq \frac{1}{4} < 1$$

Таким образом:

$$0 < x_{n+1} \leq \frac{r}{4} < 1$$

Что и требовалось доказать.

## 2. Влияние параметра $r$ на поведение функции

**Анализ:**

Логистическое отображение:  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

- При  $r = 0$ :  $x_{n+1} = 0$  (вырожденный случай)
- При  $0 < r \leq 1$ : функция монотонно возрастает, максимум в точке  $x = \frac{1}{2}$
- При  $1 < r \leq 2$ : функция выпуклая вниз, максимум увеличивается
- При  $2 < r \leq 3$ : появляется точка перегиба
- При  $r > 3$ : появляются осцилляции и хаотическое поведение

## 3. Анализ для модифицированного отображения (Вариант N=4)

**Исходные данные:**

- Номер ISU: 501524
- $N = 501524 \bmod 5 = 4$
- Функция:  $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$
- Диапазон  $r$ :  $r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right] \approx [0; 2.598]$

## 4. Сравнение с логистическим отображением

**Сходства:**

- Оба отображения имеют форму “колокола”
- При малых  $r$  поведение похоже - монотонная сходимость к неподвижной точке
- Оба отображают интервал  $[0, 1]$  в себя при соответствующих  $r$
- Имеют неподвижную точку  $x = 0$

**Различия:**

- **Форма кривой:** Логистическое отображение симметрично относительно  $x = 0.5$ , модифицированное - асимметрично
- **Максимум:**
  - Логистическое: максимум  $\frac{r}{4}$  при  $x = 0.5$
  - Модифицированное: максимум смешен влево
- **Количество неподвижных точек:** Модифицированное имеет дополнительную неподвижную точку
- **Диапазон параметра  $r$ :** Для модифицированного отображения верхняя граница  $r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$

### Причины различий:

- Модифицированное отображение содержит дополнительный множитель  $(2 - x)$ , что делает его кубическим, а не квадратичным
- Это приводит к более сложной динамике и дополнительным неподвижным точкам
- Асимметрия вызвана несимметричной формой полинома

## 5. Анализ неподвижных точек для модифицированного отображения

Неподвижные точки удовлетворяют:  $x = rx(1 - x)(2 - x)$

Решения:

1.  $x = 0$  (тривиальная точка)

2.  $1 = r(1 - x)(2 - x)$

$$r(1 - x)(2 - x) = 1$$

$$r(2 - 3x + x^2) = 1$$

$$x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Это квадратное уравнение имеет решения при  $r \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Вывод:** Модифицированное отображение имеет более богатую динамику благодаря кубической природе, но работает в более узком диапазоне параметра  $r$ .

## Уровень Normal

### 1. Неподвижные точки логистического отображения

**Логистическое отображение:**  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Неподвижные точки удовлетворяют условию:

$$x^* = f(x^*) = rx^*(1 - x^*)$$

Решаем уравнение:

$$x = rx(1 - x)$$

$$x - rx(1 - x) = 0$$

$$x[1 - r(1 - x)] = 0$$

$$x(rx - r + 1) = 0$$

**Решения:**

1.  $x^* = 0$

2.  $rx - r + 1 = 0 \Rightarrow x^* = 1 - \frac{1}{r}$  (при  $r \neq 0$ )

**Ответы на вопросы:**

1. **Все неподвижные точки:**  $x^* = 0$  и  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$  (при  $r > 1$ )

## 2. Количество неподвижных точек в зависимости от $r$ :

- При  $r = 0$ : одна точка  $x^* = 0$
- При  $0 < r \leq 1$ : одна точка  $x^* = 0$  (вторая точка  $x^* = 1 - \frac{1}{r} \leq 0$  не принадлежит  $[0, 1]$ )
- При  $r > 1$ : две точки  $x^* = 0$  и  $x^* = 1 - \frac{1}{r} \in (0, 1)$

## 3. Максимальное количество неподвижных точек: 2

**Почему:** Логистическое отображение - квадратичная функция, поэтому уравнение  $x = f(x)$  является квадратным уравнением, которое может иметь не более 2 действительных корней.

## 2. Монотонность и предел при $r \in (0; 1]$

**Утверждение:** При  $x_0 \in (0; 1)$  и  $r \in (0; 1]$  последовательность  $\{x_n\}$  монотонно убывает.

**Доказательство:**

Рассмотрим разность:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1 - x_n) - x_n = x_n[r(1 - x_n) - 1]$$

Поскольку:

- $x_n > 0$  (по доказанному в Easy уровне)
- $r \leq 1$
- $1 - x_n < 1$

То:

$$r(1 - x_n) - 1 \leq 1 \cdot (1 - x_n) - 1 = -x_n < 0$$

Следовательно:

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

**Существование предела:**

Последовательность  $\{x_n\}$ :

- Монотонно убывает (только что доказано)
- Ограничена снизу:  $x_n > 0$  (из Easy уровня)

По теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности, предел существует.

## 3. Монотонность подпоследовательностей при $r \in (2; 3)$

**Условие:**  $r \in (2; 3)$ ,  $x_{2n} > x^*$ ,  $x_{2n+1} < x^*$ , где  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$  - ненулевая неподвижная точка.

**Анализ:**

Рассмотрим производную логистического отображения:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

В точке  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ :

$$f'(x^*) = r \left( 1 - 2 \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right) = r \left( 1 - 2 + \frac{2}{r} \right) = 2 - r$$

При  $r \in (2; 3)$ :  $f'(x^*) = 2 - r \in (-1, 0)$ , значит отображение сжимающее и знакопеременное.

#### Монотонность подпоследовательностей:

- $\{x_{2n}\}$  - монотонно убывает
- $\{x_{2n+1}\}$  - монотонно возрастает

#### Доказательство:

Рассмотрим вторую итерацию:  $f^2(x) = f(f(x))$

Если  $x > x^*$ , то:

$$\begin{aligned} f(x) &< x^* \quad (\text{т.к. } f'(x^*) < 0) \\ f^2(x) &> x^* \quad (\text{снова из-за отрицательной производной}) \end{aligned}$$

Аналогично для  $x < x^*$ . Таким образом, подпоследовательности монотонны.

## 4. Анализ для модифицированного отображения ( $N=4$ )

**Функция:**  $g(x) = rx(1-x)(2-x)$

#### 1. Неподвижные точки:

$$x = rx(1-x)(2-x)$$

Решения:

1.  $x^* = 0$
2.  $1 = r(1-x)(2-x) \Rightarrow r(2-3x+x^2) = 1$

#### 2. Диапазон монотонной сходимости к нулю:

Рассмотрим производную в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= r[(1-x)(2-x) - x(2-x) - x(1-x)] \\ g'(0) &= r[2 - 0 - 0] = 2r \end{aligned}$$

Условие устойчивости  $x^* = 0$ :  $|g'(0)| < 1 \Rightarrow 2r < 1 \Rightarrow r < 0.5$

**Вывод:** При  $r < 0.5$  последовательность монотонно сходится к 0.

## Уровень Hard

### 1. Циклы логистического отображения

**Параметры:**  $r_\infty \approx 3.5699456\dots$

#### 1. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$ ?

При увеличении  $r$  в интервале  $(3; r_\infty)$  происходит каскад бифуркаций удвоения периода:

- При  $r > 3$ : появляется цикл периода 2
- При  $r \approx 3.449$ : цикл периода 4
- При  $r \approx 3.544$ : цикл периода 8
- Далее: периоды 16, 32, 64, ...

Длина цикла  $m$  удваивается при каждом переходе через точку бифуркации:

$$m = 2^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## 2. Лестница Ламерея

**Алгоритм построения:**

1. От начальной точки  $(x_0; 0)$  вертикально к линии отображения:  $(x_0; x_1)$
2. Горизонтально к диагонали:  $(x_1; x_1)$
3. Вертикально к линии отображения:  $(x_1; x_2)$
4. Повторять шаги 2-3

**Выводы о внешнем виде циклов:**

- **Цикл периода 1 (неподвижная точка):** Лестница сходится к точке пересечения кривой с диагональю
- **Цикл периода 2:** Лестница образует прямоугольник, переключаясь между двумя точками
- **Цикл периода 4:** Образуется замкнутая ломаная из 4 звеньев
- **Хаотический режим:** Лестница заполняет область, не образуя регулярной структуры

## 3. Исследование циклов модифицированного отображения

**Функция:**  $g(x) = rx(1 - x)(2 - x)$

**Сходства с логистическим отображением:**

- Оба отображения демонстрируют бифуркации удвоения периода
- Существует переход к хаосу при некотором критическом  $r$
- При малых  $r$  наблюдается сходимость к неподвижной точке

**Различия:**

- Критическое  $r_\infty$  разное:  $\approx 2.6$  для модифицированного против  $3.57$  для логистического
- Модифицированное отображение имеет более сложную структуру циклов из-за кубической природы
- Диапазон параметров  $r$  ограничен сверху  $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$