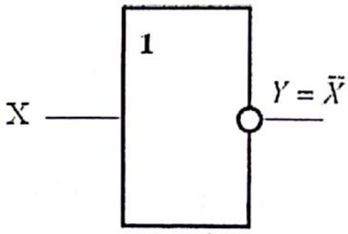
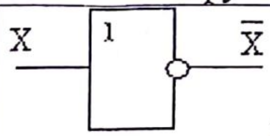
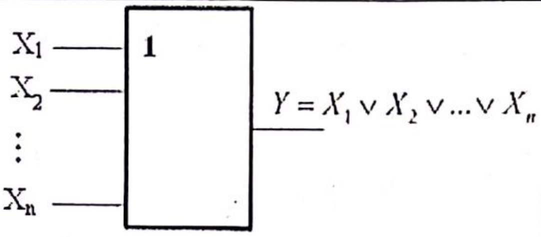
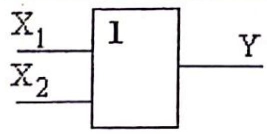
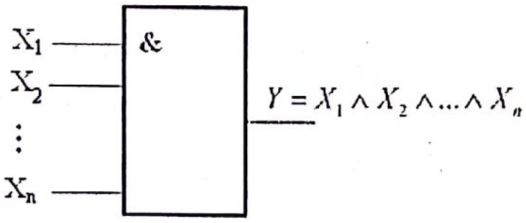
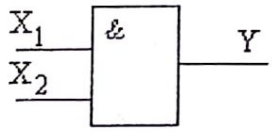
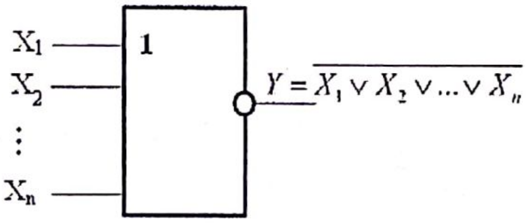
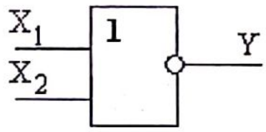
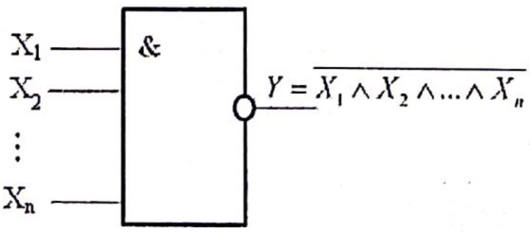
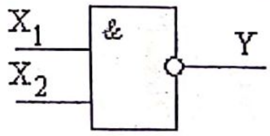
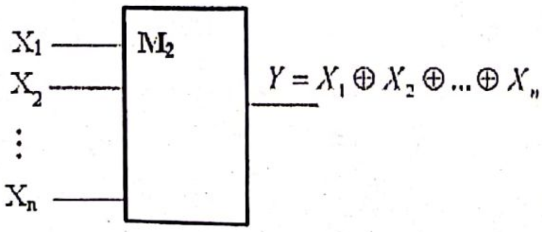
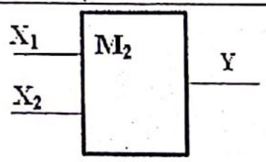
Основные типы логических вентилей.

<table>
<tr><th>Название вентиля</th><th>Схемное обозначение</th><th>Пример реализуемой функции</th></tr>
<tr><td>Инвертор
НЕ</td><td></td><td>$Y = \overline{X}$
$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline \overline{X} & 1 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Дизъюнктор
ИЛИ</td><td></td><td>$Y = X_1 \vee X_2$
$\begin{array}{c|cccc} X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline Y & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Конъюнктор
И</td><td></td><td>$Y = X_1 \wedge X_2$
$\begin{array}{c|cccc} X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline Y & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Дизъюнктор с отрицанием
ИЛИ- НЕ</td><td></td><td>$Y = X_1 \downarrow X_2 = \overline{X_1 \vee X_2}$
$\begin{array}{c|cccc} X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline Y & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Конъюнктор с отрицанием
И- НЕ</td><td></td><td>$Y = X_1 \mid X_2 = \overline{X_1 \wedge X_2}$
$\begin{array}{c|cccc} X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline Y & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Сумматор по модулю 2</td><td></td><td>$Y = X_1 \oplus X_2$
$\begin{array}{c|cccc} X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline Y & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$</td></tr>
</table>

Двухместные булевы функции

Число булевых функций двух переменных равно $2^{2^2} = 16$.

Таблица 3.5.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3.6.

№	*Двоичный набор функции*	*Формула*	*Название функции*
1.	$f_0(x_1,x_2)=(0000)$	$f_0(x_1,x_2)=0$ (x_1, x_2 – фиктивные переменные)	Константа 0
2.	$f_1(x_1,x_2)=(0001)$	$f_1(x_1,x_2)=x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 \,\&\, x_2$	Конъюнкция (функция «И», логическое умножение)
3.	$f_2(x_1,x_2)=(0010)$	$f_2(x_1,x_2)=\overline{x_1 \to x_2}$	Отрицание импликации «из x_1 следует x_2»
4	$f_3(x_1,x_2)=(0011)$	$f_3(x_1,x_2)=x_1$ (x_2 – фиктивная переменная)	Тождественная функция x_1
5.	$f_4(x_1,x_2)=(0100)$	$f_4(x_1,x_2)=\overline{x_2 \to x_1}$	Отрицание импликации «из x_2 следует x_1»
6.	$f_5(x_1,x_2)=(0101)$	$f_5(x_1,x_2)=x_2$ (x_1 – фиктивная переменная)	Тождественная функция x_2
7.	$f_6(x_1,x_2)=(0110)$	$f_6(x_1,x_2)=x_1 \oplus x_2$	Сумма по модулю 2 (неравнозначность)
8.	$f_7(x_1,x_2)=(0111)$	$f_7(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$	Дизъюнкция (функция «ИЛИ», логическое сложение)
9.	$f_8(x_1,x_2)=(1000)$	$f_8(x_1,x_2)=\overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$	Стрелка Пирса (логическая функция «ИЛИ-НЕ»)
10.	$f_9(x_1,x_2)=(1001)$	$f_9(x_1,x_2)=x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$	Эквивалентность (равнозначность)
11.	$f_{10}(x_1,x_2)=(1010)$	$f_{10}(x_1,x_2)=\overline{x_2} = \neg x_2$ (x_1 – фиктивная переменная)	Отрицание x_2
12.	$f_{11}(x_1,x_2)=(1011)$	$f_{11}(x_1,x_2)=x_2 \to x_1$	Импликация «из x_2 следует x_1»
13.	$f_{12}(x_1,x_2)=(1100)$	$f_{12}(x_1,x_2)=\overline{x_1} = \neg x_1$ (x_2 – фиктивная переменная)	Отрицание x_1
14.	$f_{13}(x_1,x_2)=(1101)$	$f_{13}(x_1,x_2)=x_1 \to x_2$	Импликация «из x_1 следует x_2»
15.	$f_{14}(x_1,x_2)=(1110)$	$f_{14}(x_1,x_2)=\overline{x_1 \cdot x_2} = x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера (логическая функция «И-НЕ»)
16.	$f_{15}(x_1,x_2)=(1111)$	$f_{15}(x_1,x_2)=1$ (x_1, x_2 – фиктивные переменные)	Константа 1

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Законы и теоремы булевой алгебры

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными* (обозначаются =).

Основные законы булевой алгебры.

1. *Коммутативность:*

а) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$, б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ в) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$, г) $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_2 \leftrightarrow x_1$.

2. Ассоциативность:

а) $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$,

б) $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$,

в) $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

3. *Дистрибутивность:*

а) $x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$,

б) $x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$,

в) $x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3$.

4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$

Теорема двойственности (правила де Моргана): а) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$, б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

5. *Законы поглощения:*

а) $x \cdot x = x \cdot 1 = x \vee x = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$,

б) $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = x \to x = 1$,

в) $x \cdot \overline{x} = x \cdot 0 = x \oplus x = 0$,

г) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \mid x = x \downarrow x = \overline{x}$.

Свойства констант 0 и 1: $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$.

6.

а) $x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$,

б) $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$,

в) $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 = ((x_1 \cdot x_2) \oplus x_1) \oplus 1$,

г) $x_1 \oplus x_2 = (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$,

д) $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \cdot x_2) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = \overline{x_1 \oplus x_2} = (x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2)$.

Все эти равенства остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и, следовательно, любых формул, представляющих эти функции. Наряду с основными соотношениями для упрощения формул часто используются следующие правила:

1. Правила поглощения:

а) $x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$, б) $x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1$.

2. Правила склеивания:

а) $x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1$ б) $(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1$.

3. Правило обобщенного склеивания: $x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}$.

4. Правило вычеркивания $x_1 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$.