**7. Линейные подпространства**

**7.1. Основные понятия и определения**

*Определение 7.1.1.* Подмножество  линейного пространства  над полем  называют *линейным подпространством* этого пространства, если оно само является линейным пространством относительно введённых в  операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Иначе говоря, подмножество  линейного пространства  образует линейное подпространство, если

1)  их сумма ;

2)  и  вектор .

Условие 1) и 2) можно объединить в одно условие:  и  линейная комбинация .

*Примеры линейных подпространств*.

1. В  подпространством будет множество векторов на прямой или плоскости.

2. Множество многочленов степени не выше второй является подпространством в линейном пространстве многочленов степени не выше третьей.

Поскольку любое подпространство само по себе является линейным пространством, то все такие понятия, как базис, размерность пространства и т.д., которые были введены выше, применимы к подпространствам. Так как в подпространстве не может быть больше линейно независимых векторов, чем во всем пространстве, то *размерность любого подпространства не превосходит размерность всего пространства*.

*Определение 7.1.2.* Пусть в линейном пространстве  над полем  дана система векторов . Множество всевозможных линейных комбинаций  этой системы называют *линейной оболочкой системы* векторов  и обозначают .

*Утверждение*. Линейная оболочка системы векторов  является подпространством пространства .

*Доказательство*. Действительно, если векторы  и  принадлежат , то они имеют представление  и , поэтому

,

.

Следовательно,  подпространство в . □

**7.2. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений как подпространство **

Однородная система линейных уравнений (ОСЛУ)

 или 

имеет единственное решение , если ; имеет бесконечное множество решений, если . В последнем случае главных неизвестных будет , а свободных .

Множество решений в матричной форме имеет вид:

,

где  ‑ произвольные значения  свободных неизвестных, а  ‑ матрицы-столбцы, которые являются частными решениями.

*Определение 7.2.1.* Матрицы столбцы  составляют *фундаментальную систему решений ОСЛУ*.

*Утверждение*. Множество всех решений ОСЛУ с  переменными есть подпространство арифметического пространства 

*Доказательство*. Если матрица-столбец  ‑ решение ОСЛУ, то  также решение. Действительно, т.к. , то . Следовательно,  ‑ решение ОСЛУ.

Пусть  и  ‑ решение ОСЛУ, т. е.  и , покажем, что  тоже решение. Так как , то  ‑ решение ОСЛУ.

Таким образом,  и  ‑ решение ОСЛУ, поэтому множество решений ОСЛУ является линейным подпространством пространства . □

*Примечание 1*. Линейное подпространство решений ОСЛУ имеет базис – это фундаментальная система решений ОСЛУ.

*Примечание 2*. Имеет место и обратное утверждение: любое подпространство арифметического пространства  можно задать ОСЛУ.

*Пример 1*. Подпространство  в  задано системой



Найти какой-либо базис подпространства , определить его размерность.

*Решение*. Решая систему относительно неизвестных , находим:

.

Базис в подпространстве  образуют вектора , .

Подпространство  имеет размерность равную двум, т.е. .

*Пример 2*. Задать подпространство  ОСЛУ, если

, .

*Решение*. В нашем случае  подпространство арифметического пространства . Из примечания 2 следует, что  и  образуют фундаментальную систему решений ОСЛУ, поэтому подставляя координаты этих векторов в любое уравнение искомой системы  получим верное числовое тождество:





Решая систему относительно 



находим:

,

откуда подставляя соответствующие значения для  в уравнение  получаем ОСЛУ, задающую подпространство :



*Определение 7.2.2.* Пусть в линейном пространстве  даны подпространства  и . Множество  векторов, принадлежащих как , так и , является подпространством в линейном пространстве . Его называют *пересечением подпространств*  *и* .

По двум подпространствам  *и*  можно построить ещё одно подпространство, которое называют суммой подпространств  и .

*Определение 7.2.3.* Множество всех векторов вида , где ,  называют *суммой подпространств*  и  и обозначают . Если при этом пересечение  ‑ нулевое подпространство, то сумму  называют *прямой суммой* и обозначают .













Сумма подпространств

Прямая сумма подпространств

**7.3. Связь между решениями однородной и неоднородной систем**

Пусть  ‑ неоднородная система линейных уравнений. Однородная система линейных уравнений, полученная из неоднородной системы заменой свободных членов нулями, называется *приведённой однородной системой* .

*Теорема 1*. Сумма  любого решения  неоднородной системы  и любого решения  приведённой системы  является решением неоднородной системы 

*Доказательство*. Так как  и , то , поэтому  ‑ решение неоднородной системы . □

*Теорема 2*. Разность  любых двух решений неоднородной системы  является решением её приведённой системы .

*Доказательство*. Так как  и , то , поэтому  ‑ решение неоднородной системы . □

*Теорема 3*. Общее решение неоднородной системы  можно представить формулой , где  ‑ общее решение приведённой однородной системы , а  ‑ какое-либо частное решение неоднородной системы .

*Доказательство*. Пусть  ‑ произвольное решение неоднородной системы , тогда по теореме 2 вектор  является решением однородной системы . Таким образом, произвольное решение неоднородной системы  содержится в множестве решений, определённых формулой , где  ‑ общее решение приведённой однородной системы . □

*Пример 1*. Зная частное решение  системы



найти общее решение.

*Решение*. Поскольку известно частное решение системы, то можно ограничиться определением общего решения приведённой ОСЛУ. Решая эту систему, получим общее решение ОСЛУ:

.

Теперь по формуле  запишем общее решение неоднородной системы линейных уравнений:

.

Так как решение ОСЛУ задаёт подпространство в , то в примере 1 система



задаёт подпространство в пространстве  с базисом , . Это подпространство можно определить как линейную оболочку . Так как общее решение неоднородной системы линейных уравнений имеет вид: , то оно образует множество  векторов. Его называют *линейным многообразием* полученным сдвигом подпространства  на вектор .

*Определение 7.3.1.* Если  некоторое подпространство линейного пространства , то множество векторов  называется *линейным многообразием*, полученным сдвигом подпространства  на вектор .

*Пример 1*. Написать уравнение геометрического образа линейной оболочки  и многообразия , если ,  и .

*Решение.* Так как , то для любого вектора  имеем . Векторное уравнение в координатах имеет вид:



или



Эта система называется *параметрическими уравнениями подпространства*  в координатной форме.

Исключим из параметрических уравнений подпространства  параметры  и :

.

Получим общее уравнение подпространства : .

Так как , то  имеем . Векторное уравнение в координатах имеет вид:



или



Исключим из параметрических уравнений линейного многообразия  параметры  и :

.

Получим общее уравнение линейного многообразия :

.

*Пример 2*. Найти размерность и базис линейного подпространства  натянутого на систему векторов

, , . .

Составить однородную систему линейных уравнений, описывающую данное подпространство .

*Решение*.

1. Найдём базис подпространства . Для этого составим матрицу:

.

Проводя элементарные преобразования строк матрицы, приведём её к ступенчатому виду:



.

Видим, что ранг матрицы равен трём, следовательно,  и один из её базисных миноров располагается на векторах .

2. Составим ОСЛУ, описывающую подпространство.

*I способ*. Так как , то  имеем  или в координатах

.

Параметрические уравнения подпространства  имеют вид:



Исключая параметры , получим:



*II способ*. Однородная система линейных уравнений, описывающая подпространство , состоит из уравнений вида . При подстановке координат векторов базиса подпространства  в любое уравнение этой системы, оно превращается в верное числовое равенство. Следовательно,







Решая эту систему относительно  получим:



Однородная система линейных уравнений, описывающая подпространство , задаётся одним уравнением:  или .

**7.4. Ядро и образ линейного оператора**

Пусть  произвольный линейный оператор в -мерном линейном пространстве. С линейным оператором  связаны два важных подпространства – *ядро* и *образ* этого оператора.

*Определение 7.4.1.* *Образом* линейного оператора  называется множество  векторов вида , где  пробегает всё пространства .

Покажем, что  есть подпространство пространства . Действительно, пусть  и . Это значит, что существуют  и  такие, что  и . Но тогда  и, значит . Аналогично, если  то , т.е. .

*Определение 7.4.2.* *Ядром* линейного оператора  называется множество  векторов  таких, что .

Покажем, что  есть подпространство пространства . Пусть  и , тогда ,  и , поэтому . Точно так же, если  и , то , т.е. .

*Пример 1.* Рассмотрим пространство многочленов степени  и оператор дифференцирования, т.е. .

Ядро  этого преобразования состоит из многочленов, для которых , т.е. констант. Таким образом, ядро  здесь одномерное.



Образ  состоит из многочленов  степени  и имеет размерность .

Рассмотрим теперь оператор , который задаётся формулой . Ядро этого оператора состоит из всех многочленов степени не выше первой и имеет размерность 2. Образ этого оператора состоит из многочленов степени  и имеет размерность .

Продолжая процесс возведения оператора в степень получим, что оператор  имеет ядро  размерности  и образ, состоящий только из нулевого вектора.

На этом примере видно, что при возведении линейного оператора в степень его ядро расширяется, а образ, наоборот, уменьшается. При этом размерность ядра характеризует как бы степень вырожденности оператора. Чем больше ядро, тем меньше образ и тем «более вырожденным» является оператор.

*Определение 7.4.3.* Размерность ядра оператора  назовём *дефектом* оператора , а размерность образа оператора  - *рангом* оператора .

*Примечание 7.4.1.* Обратим внимание на то, что сумма размерностей ядра и образа линейного оператора  всегда остаётся постоянной величиной размерности всего пространства, т.е. .

*Пример 2.* Для линейного оператора  действующего в , определить ранг и дефект, а также найти базис образа и ядра.

Решение. В каноническом базисе пространства  матрица оператора имеет вид

.

По определению и , если существует  такой, что . Запишем это равенство в матричном виде:

. (а)

Равенство (а) означает, что образ  совпадает линейной оболочкой столбцов матрицы . Следовательно, ранг оператора  совпадает с рангом его матрицы, т.е. равен двум, а в качестве базиса  может быть выбран любой из базисов системы столбцов матрицы , например,

 и .

Аналогично , если . Или в матричной форме

. (б)

Отсюда следует, что ядро  совпадает с подпространством решений однородной системы (б), т.е. дефект оператора  равен . В качестве базиса в  может быть выбрана фундаментальная система решений системы (б), например, .