**1. Преобразование декартовых координат на плоскости**

Рассмотрим правую декартову систему координат . При решении многих прикладных задач возникает необходимость перехода от данной декартовой прямоугольной системы координат к другой декартовой системе координат , ориентированной относительно правой системы координат определённым образом.

**1.1. Параллельный перенос**

Пусть начало новой системы координат  имеет координаты  в старой системе координат (рис.1.1).

*O***/**

*y* **/**

*b*

*x***/**

*xb*

*ab*

*O*

*y*

*y* **/**

*М(х,у)*

*x***/**

*xb*

*y*

*Рис. 1.1*

Тогда точка  будет иметь новые координаты , определяемые равенством:

 (1.1)

Из (1.1) получаем формулы, выражающие старые координаты через новые:

 (1.2)

**1.2 Поворот**

Новая система координат  получается из старой  поворотом этой системы вокруг точки *О* на угол α (рис.1.2), который считается положительным, если поворот проводится против часовой стрелки и отрицательным – в противоположном случае.

*Рис. 1.2*

*x***/**

*y* **/**

*М(х,у)*

*y* **/**

*xb*

*O*

*y*

*x***/**

*xb*

*y*

α

β

Зафиксируем на плоскости произвольную точку . Обозначим через β угол, образованный радиус-вектором  с осью . Если  повёрнут против часовой стрелки относительно оси , то ; если  повёрнут по часовой стрелке относительно оси , то . Тогда  ‑ угол между вектором  и осью . Обозначив , запишем равенства, определяющие старые координаты точки М:

 (1.3)

Так как новые координаты точки *М* будут

 (1.4)

то подставляя (1.4) в (1.3) получим:

 (1.5)

Равенства (1.5) являются выражением старых координат  через новые .

Для получения обратных выражений можно координаты  считать старыми, а координаты  ‑ новыми. При этом поворот от  к  будет , поэтому по формуле (1.5) имеем:



т.е.

 (1.6)

Равенства (1.6) являются выражением новых координат  через старые .

**1.3 Общий случай**

Пусть начало  новой системы координат имеет в старой системе координат *Оху* координаты , и новая ось  образует со старой осью  угол α. Соединяя соотношения (1.2) и (1.5) получим следующие равенства:

 (1.7)

выражающие старые координаты  через новые .

Для получения обратных выражений новых координат  через старые , опять будем считать, что от  переходим к *Оху* поворотом на угол  и параллельным переносом. По формулам (1.1) и (1.6) имеем:

 (1.8)

**2. Линии второго порядка на плоскости**

**2.1. Стандартное упрощение уравнения линии второго порядка на плоскости**

Пусть

 (2.1)

общее уравнение линии 2-го порядка на плоскости. Покажем, что в этом общем уравнении коэффициент *В,* при произведении  без ограничения общности, можно считать равным нулю.

Установим, что если , то можно повернуть систему координат *Оху* вокруг начала координат *О* на такой угол α, что в новой системе координат коэффициент при произведении  будет равен нулю.

Действительно, если  получается поворотом *Оху* на угол α, то координаты  любой точки *М* в системе *Оху* выражаются через координаты  той же точки в системе *Ох***/***у***/** по формулам:

 (2.2)

Подставляем в (2.1) вместо *х* и *у* их значения, определяемые равенством (2.2) имеем:

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, преобразуем данное выражение к виду

, (2.3)

в котором

,

,

,

,

,

.

Коэффициент , если выражение

.

Преобразуем данное уравнение к виду:

;

;

.

Нужно выбрать угол α так, чтобы

. (2.4)

Проведённое преобразование принято называть стандартным упрощением линии 2-го порядка.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем рассматривать уравнение (2.1) с коэффициентом , т.е.

.

**2.2. Центральные линии второго порядка**

Рассмотрим уравнение

, (2.5)

где  и .

Выделяем полный квадрат по *х* и по *у*:

.

Полагаем: , , , тогда последнее уравнение примет вид

. (2.6)

Линию 2-го порядка принято называть *центральной*, если она имеет единственный центр симметрии, т.е. такую точку , относительно которой все точки кривой располагаются симметричными парами.

Прямые  и , параллельные осям  и  соответственно, являются *осями симметрии* линии определяемой уравнением (2.6).

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что центр симметрии линии находится в начале координат, т.е. ,  (этого всегда можно добиться параллельным переносом). При этом уравнение (2.6) примет вид

. (2.7)

***Линии эллиптического типа.***

Линия 2-го порядка, определяемая уравнением (2.7), называется *линией эллиптического типа*, если коэффициенты *А* и *С* имеют одинаковые знаки (т.е. если ).

Не ограничивая общности, будем считать, что  и  (в противном случае меняются все знаки в уравнении (2.7) на противоположные).

Возможны три случая: 1) ; 2) ; 3) .

При  для уравнения (2.7) на плоскости нет никакого геометрического образа, поэтому говорят, что уравнение определяет *мнимый эллипс*.

При  геометрическим образом уравнения (2.7) является точка на плоскости, поэтому говорят, что уравнение определяет *вырожденный эллипс*.

В случае  говорят, что уравнение (2.7) определяет *действительный эллипс*. Если положить , , то уравнение (2.7) запишется в виде

. (2.8)

Уравнение (2.8) называется *каноническим уравнением эллипса*, а числа  и  ‑ его *полуосями*.

Обычно считают, что , тогда эллипс будет вытянут вдоль оси  (рис. 2.1).





Рис. 2.1

*В*(*0*,*b*)

*В’*(*0*,-*b*)

*A*(*a*,*0*)

*A’*(-*a*,*0*)

*x*

*y*

*Lx*



*M*(*x,y*)

Точки , , ,  называются *вершинами эллипса*, а отрезки  и  ‑ его *осями*.

Свойства эллипса:

1) оси координат – оси симметрии эллипса;

2) начало координат – центр симметрии эллипса;

3) координаты  всех точек эллипса удовлетворяют неравенствам , , т.е. эллипс ограничен прямоугольником;

4) эллипс имеет два фокуса  и , где  и ;

5) отношение  называется *эксцентриситетом*; для эллипса  и при , т.е. когда , эллипс превращается в окружность, определяемую уравнением ;

6) прямые  и , заданные, соответственно, уравнениями  и , называются *директрисами эллипса*.

Важным свойством отличного от окружности эллипса и его директрисы является соотношение

,

где  расстояние между точкой эллипса  и фокусом , а  расстояние между точкой эллипса  и директрисой .

*Пример.1*. Определить вид линии второго порядка, заданной уравнением .

*Решение.* Приведём данное уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные *x* и *y*:

.

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

;

.

Тогда исходное уравнение примет вид

;

;

.

Введём обозначения



Произведённую замену переменных будем рассматривать как переход от декартовых координат  к координатам  при помощи параллельного переноса, причём новое начало координат находится в точке . В новой системе координат уравнение примет вид

.

Исходное уравнение определяет окружность. В системе координат эта окружность имеет центр в точке и радиус .

*Пример 2*. Показать, что уравнение  представляет собой уравнение эллипса. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и директрисы этого эллипса. Сделать чертёж.

*Решение*. Приведём данное уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные *x* и *y*:

.

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

;

.

Тогда исходное уравнение примет вид

, или ,

т.е.

.

Введём обозначения



Произведённую замену переменных будем рассматривать как переход от декартовых координат  к координатам  при помощи параллельного переноса, причём новое начало координат находится в точке . В этой системе координат уравнение примет вид

.

Таким образом, в новой системе координат заданное уравнение определяет эллипс с центром в точке  и полуосями ,  (рис. 2.2).

Рис. 2.2

*O’*

*O*

*F*

*F’*

*В*

*В’*

*A*

*A’*

*x’*

*y’*

*y*

*x*

*L*

*L’*

Кроме того, ; отсюда находим эксцентриситет .

Остаётся найти координаты вершин, фокусов эллипса и уравнения директрис. В новой системе координат вершины таковы: , , , ; координаты фокусов , ; уравнения директрис  и .

Так как старые координаты выражаются через новые по формулам



то, возвращаясь к первоначальной системе координат, окончательно получим: , , , , ; координаты фокусов , ; уравнения директрис  и .

***Линии гиперболического типа.***

Линия 2-го порядка, определяемая уравнением (2.7), называется *линией гиперболического типа*, если коэффициенты *А* и *С* имеют противоположные знаки (т.е. если ).

Для определённости будем считать, что , .

Возможны три случая: 1) ; 2) ; 3) .

При , положив , , уравнение (2.7) перепишется в виде

. (2.9)

Линия, определяемая уравнением (2.9), называется *гиперболой* (рис.2.3), а уравнение (2.9) – *каноническим уравнением гиперболы.*

*y*

Рис. 2.3

*F’*(-c,0)

*В*(*0*,*b*)

*В’*(*0*,-*b*)

*A*(*a*,*0*)

*A’*(-*a*,*0*)

*x*

*F*(c,0)

*М*(*х*,*у*)

*L*

*L’*

Числа  и  называют соответственно её *действительной* и *мнимой* полуосями, точки ,  ‑ её *вершинами*, а отрезки  и  ‑ её *действительной* и *мнимой* *осями* соответственно.

При  гипербола, определяемая уравнением (2.9), называется *равнобочной*.

Свойства гиперболы:

1) оси координат – оси симметрии гиперболы;

2) начало координат – центр симметрии гиперболы;

3) координаты  всех точек гиперболы удовлетворяют неравенству , т.е. гипербола расположена вне прямоугольника с координатами , ;

4) диагонали прямоугольника  являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы;

5) гипербола имеет два фокуса  и , где и ;

6) отношение  называется *эксцентриситетом*; для гиперболы ;

7) прямые  и , заданные, соответственно, уравнениями  и , называются *директрисами гиперболы*.

Важным свойством гиперболы и её директрисы является соотношение

,

где  расстояние между точкой гиперболы  и фокусом , а  расстояние между точкой гиперболы  и её директрисой .

При  уравнение (2.7) определяет пару пересекающихся прямых  и , которые называются *вырожденной гиперболой*.

При , положив , , перепишем уравнение (2.7) в виде

. (2.10)

Уравнение (2.10) определяет гиперболу, которая называется *сопряжённой* к гиперболе, определяемой уравнением (2.9). Её вершины – это точки ,  (рис. 2.4).

*В*(*0*,*b*)

Рис. 2.4

*В’*(*0*,-*b*)

*A*(*a*,*0*)

*A’*(-*a*,*0*)

*x*

*y*

*F’*(*0,-c*)

*F*(*0,c*)

*Пример 3*. Показать, что уравнение  представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет, асимптоты и директрисы этой гиперболы. Сделать чертёж.

*Решение*. Приведём данное уравнение к каноническому виду:

;

;

;

.

Положим



В новой системе координат исходное уравнение примет вид

,

т.е. определяет гиперболу с центром в точке  и полуосями ,  (рис. 2.5). Учитывая, что , получим .

В новой системе координат найдём: координаты вершин , ; координаты фокусов , ; уравнения асимптот , т.е. ; уравнения директрис , т.е. .

Так как старые координаты выражаются через новые по формулам



то, возвращаясь к первоначальной системе координат, получим:  , , , . Сделав замену  и , получим уравнения асимптот  и директрис  в первоначальной системе координат.

Рис. 2.5

*x’*

*y’*

*О’*

*A*

*A’*

*F’*(-6,1)

*F*(0,1)

*О*(0,0)

*y*

*x*

*L’*

*L*

**2.3. Нецентральные линии второго порядка**

Рассмотрим уравнение , но теперь положим, что один из коэффициентов *А* или *С* равен нулю, т.е. . Для определённости будем считать, что , . Тогда уравнение примет вид .

Если , то для уравнения  возможны следующие случаи:

1) уравнение не имеет действительных корней, поэтому не определяет никакого геометрического образа;

2) уравнение имеет два действительных корня ,  и может быть записано в виде ; в этом случае уравнение определяет пару параллельных прямых (при ) или пару совпадающих прямых (при ).

Если , то выделяя полный квадрат относительно  получим:

,

.

Если положить , , , то уравнение примет вид:

. (2.11)

Линия, определяемая уравнением (2.11), называется *параболой* (рис.2.6).

Рис. 2.6



*x*

*y*

*О*

*x’*

*y’*





Точка  называется *вершиной* параболы, прямая  называется *осью симметрии* параболы, центра симметрии у параболы нет. Парабола направлена вправо, если , и влево – при .

Параметром параболы назовём число , которое выражается через  по формуле

.

Параметр  в уравнении параболы всегда положительное число, т.е. .

Если вершина параболы находиться в начале координат, то при  уравнение параболы (2.11) примет вид:

, (2.12)

Уравнение (2.12) называется каноническим уравнением параболы.

Парабола, заданная уравнением (2.12), имеет единственный *фокус* с координатами  (рис. 2.7) и *директрису* , заданную уравнением . Эксцентриситет параболы .

Важное свойство параболы и её директрисы определяется соотношением

 или ,

где  расстояние между точкой параболы  и фокусом , а  расстояние между точкой параболы  и её директрисой .

В ряде случаев рассматривают параболы заданные уравнениями:

*а*) , (рис.2.8);

б) , (рис.2.9);

*в*) , (рис.2.10).

Рис. 2.7

Рис. 2.8





*О*

*x*

*y*



*L*

*О*

*x*

*y*



*L*





Рис. 2.10

*О*

*x*

*y*





*L*

Рис. 2.9

*О*

*x*

*y*





*L*

**

**

*Пример 4*. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка . Определить вид и расположение линии, найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

*Решение.* Приведём данное уравнение к каноническому виду:

;

;

;

;

.

Обозначим

 или 

В новой системе координат уравнение примет вид

.

Полученное уравнение является каноническим уравнением параболы.

Найдём параметр параболы:  и .

Таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус  и директрису , осью параболы является ось  (её уравнение ), вершина параболы находится в точке 

Возвращаясь к старой системе координат, получим:

координаты вершины параболы ; координаты фокуса ;

уравнения директрисы  и оси параболы .

**2.4 Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка**

Общее уравнение линии 2-го порядка

,

преобразуется к виду



с помощью стандартного упрощения, т.е. поворота координатных осей на угол α по формулам

 (2.13)

Угол α находится из уравнения

 (2.14)

Оси координат поворачиваются при этом так, чтобы новые оси  и  были параллельны осям симметрии линии второго порядка.

Зная , можно найти  и  по формулам тригонометрии

, .

Если угол α условиться считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для  надо взять также положительное решение уравнения (2.14).

После стандартного упрощения линии 2-го порядка применяется преобразование параллельного переноса, которое приводит уравнение к каноническому виду.

*Пример 5.* Привести к каноническому виду уравнение

.

*Решение*.

**I. Поворот.** В данном случае , , , поэтому угол поворота находится из уравнения



Ограничиваясь острым углом , берём , тогда

, 

и



Подставляем эти значения  и  в данное уравнение:

Раскрывая скобки и приводя подобные получим

.

**II. Параллельный перенос.** Выделяем полные квадраты по  и :



.

Обозначаем

 или 

Тем самым производится параллельный перенос системы координат в точку . После переноса уравнение примет вид



или

.

Отсюда следует, что данная линия есть эллипс.

Соединяя соотношения поворота и параллельного переноса, получим следующие равенства:

