**4. Квадратичные формы и их приложения к упрощению линий второго порядка на плоскости и уравнений поверхностей второго порядка в пространстве**

**4.1. Квадратичная форма. Основные понятия и определения**

Уравнение

 (4.1)

определяет на плоскости кривую 2-го порядка. При помощи поворота и параллельного переноса уравнение (4.1) приводится к одному из канонических уравнений

, ,

, ,

, .

Уравнение

 (4.2)

определяет в пространстве поверхность 2-го порядка. Элементарными преобразованиями уравнение (4.2) приводится к одному из канонических уравнений:

, ,

, ,

, ,

, ,

, .

Возникает вопрос: существует ли общий метод приведения уравнений (4.1) и (4.2) к каноническому виду? Такой метод существует. Он опирается на понятия квадратичная форма и линейное преобразование.

Для уравнения (4.1) квадратичной формой будет

,

а для (4.2)

.

**Определение.** *Квадратичной формой п* переменных  над полем комплексных или действительных чисел называется сумма вида

, (4.3)

где  ‑ коэффициент квадратичной формы.

Квадратичная форма над полем комплексных чисел называется *комплексной квадратичной формой*, а над полем действительных чисел – *действительной квадратичной формой*.

Так как



,

то коэффициенты  и  можно считать равными, т.е.

. (4.4)

*Матрицей квадратичной формы* называется матрица, составленная из её коэффициентов

.

В силу условия (4.4) матрица *А* является симметрической.

*Рангом квадратичной формы* называется ранг её матрицы *А*.

Квадратичная форма *п* переменных – *невырожденная*, если .

Квадратичная форма *п* переменных – *вырожденная*, если .

*Пример.* Записать матрицу квадратичной формы



и найти её ранг.

*Решение.* В данном случае , , , , , , поэтому

.

Вычислим определитель этой матрицы: . Так как , то . Квадратичная форма невырожденная.

Квадратичную форму (4.3) можно записать в матричном виде. Действительно, если

 , то .

Распишем подробно сумму













Итак,

 (4.5)

**4.2. Линейное преобразование переменных. Эквивалентные квадратичные формы**

От переменных

 (4.6)

перейдём к переменным

 (4.7)

по формулам

 (4.8)

или в матричном виде

. (4.9)

Переход от переменных (4.6) к переменным (4.7) с помощью формул (4.8) называется *линейным преобразованием переменных*.

Линейное преобразование *невырожденное*, если матрица *В* невырожденная, т.е. .

Если преобразование (4.8) невырожденное, то можно выразить переменные (4.7) через (4.6). Действительно, умножая обе части равенства (4.9) на матрицу  получим:  или

. (4.10)

Преобразование (4.10) называется *обратным преобразованием*.

Рассмотрим квадратичную форму

.

Вместо переменных  подставим их выражения через . Так как , то  и, следовательно,

.

Получили новую квадратичную форму  с матрицей

.

Итак, линейное преобразование  переводит квадратичную форму  с матрицей *А* в квадратичную форму  с матрицей *С*.

Две квадратичные формы одного и того же числа переменных называются *эквивалентными*, если существует невырожденное линейное преобразование, переводящее одну из них в другую. Эквивалентные квадратичные формы обозначают:

.

*Примечание*. Так как ранг матрицы не меняется при умножении её слева и справа на невырожденную матрицу, то эквивалентные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.

**4.3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи преобразования Лагранжа**

Квадратичная форма  называется *канонической*, если её матрица диагональная.

Например, квадратичная форма  является канонической, так как имеет диагональную матрицу

.

*Теорема.* Всякую квадратичную форму можно невырожденным линейным преобразованием переменных привести к каноническому виду.

*Доказательство*. Пусть ,  ‑ квадратичная форма.

Если , то теорема верна, т.к.  имеет канонический вид.

При , то будем считать утверждение теоремы верным для квадратичной формы от меньшего, чем *п*, числа переменных. Рассмотрим три случая:

1) все коэффициенты квадратичной формы равны нулю;

2) среди коэффициентов  есть отличный от нуля;

3) среди коэффициентов квадратичной формы есть отличный от нуля, но все .

В первом случае квадратичная форма нулевая, следовательно, она является канонической.

Рассмотрим второй случай. Пусть, например, , тогда введём вспомогательный многочлен



.

Рассмотрим разность

,

следовательно,



или

,

где  квадратичная форма от  переменных . По индуктивному предположению существует невырожденное линейное преобразование переменных



где

,

приводящее квадратичную форму  к каноническому виду

.

Если обозначить через  сумму , то линейное преобразование

 (4.11)

также является невырожденным, так как определитель его матрицы

.

применив линейное преобразование (4.11) к переменным  квадратичной формы , получим её канонический вид:

.

Для второго случая теорема доказана.

Рассмотрим третий случай. Пусть, например, . Возьмём линейное преобразование переменных



Определитель матрицы этого преобразования

,

следовательно, преобразование невырожденное. Применяя это преобразование к переменным квадратичной формы  получим, что . В эквивалентной квадратичной форме  будут отличны от нуля коэффициенты при  и , поэтому третий случай сводится ко второму случаю. Теорема полностью доказана.

Описанный в доказательстве теоремы алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду носит название *алгоритма Лагранжа*.

*Пример 4.1*. Найти канонический вид квадратичной формы

.

*Решение*. Положим



тогда

 

,

где

 или 

Итак, каноническим видом квадратичной формы будет

.

*Пример 4.2*. Выяснить, какая поверхность определяется уравнением

.

*Решение*. Квадратичная форма уравнения имеет вид , где , , , . Запишем вспомогательный многочлен:





.

Рассмотрим разность

,

тогда



.

Итак,  и уравнение поверхности имеет вид

 или 

Уравнение определяет две плоскости  и .