**4.4. Нормальный вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел**

Канонический вид квадратичной формы не определён однозначно, т.е. различные канонические квадратичные формы могут оказаться эквивалентными, например, квадратичные формы  над полем комплексных чисел , так как невырожденное линейное преобразование переменных



переводит первую из этих форм во вторую

.

Иногда удаётся среди канонических видов квадратичной формы выбрать наиболее простой.

Если  ‑ квадратичная форма над полем имеет канонический вид

,

то применив невырожденное линейное преобразование переменных



к каноническому виду квадратичной формы, получим

,

где .

Канонический вид комплексной квадратичной формы называется *нормальным,* если все его ненулевые коэффициенты равны 1.

Из вышесказанного вытекает следующее утверждение.

*Утверждение 4.1*. Всякая комплексная квадратичная форма эквивалентна некоторой нормальной форме. При этом число единиц среди коэффициентов соответствующей нормальной формы равно рангу исходной формы, так что нормальный вид комплексной квадратичной формы определён однозначно с точностью до наименования переменных.

Перейдём к квадратичным формам над полем действительных чисел . Пусть  ‑ квадратичная форма над полем имеет канонический вид

.

Применив невырожденное линейное преобразование переменных



к каноническому виду квадратичной формы, получим

,

где .

Канонический вид действительной квадратичной формы, каждый ненулевой коэффициент которого равен 1 или -1, называется *нормальным*.

Итак, доказано утверждение.

*Утверждение 4.2*. Всякая действительная квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных над полем действительных чисел может быть приведена к нормальному вид.

Оказывается, что нормальный вид действительной квадратичной формы определён однозначно с точностью до наименования переменных.

*Теорема (закон инерции действительных квадратичных форм)*. Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависит от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.

*Положительным индексом инерции* называется число положительных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы, а *отрицательным индексом инерции* называется число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы.

Если задан ранг и положительный индекс инерции квадратичной формы, можно найти её отрицательный индекс инерции. Поэтому из закона инерции вытекает следующее следствие.

*Следствие (критерий эквивалентности действительных квадратичных форм).* Совпадение рангов и равенство положительных индексов является необходимым и достаточным условием эквивалентности действительных квадратичных форм.

**4.5. Знакоопределённые действительные квадратичные формы**

Пусть задана действительная квадратичная форма  и переменные  принимают лишь действительные значения. Тогда при любом наборе значений переменных  значением формы  будет действительное число.

Квадратичную форму  называют *положительно определённой*, если для любых значений  входящих в неё переменных , среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

,

а *отрицательно определённой*, если для любых значений  входящих в неё переменных , среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

.

Например, квадратичная форма  является положительно определённой, а квадратичные формы  и  таковыми не являются, так как  и .

Опишем эффективный способ распознавания положительной определённости квадратичной формы.

Пусть   ‑ матрица квадратичной формы . Угловым минором матрицы *А* называются все её миноры, расположенные в левом верхнем углу

.

Эти миноры называют ещё *главными минорами квадратичной* формы .

*Критерий положительной определённости действительной квадратичной формы* (*критерий Сильвестра*). Действительная квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы строго положительны.

Из критерия положительной определённости действительной квадратичной формы вытекает, что матрица нормального вида положительно определённой квадратичной формы может быть только единичной. У единичной матрицы все угловые миноры равны единице, т.е.строго положительны. Поэтому можно дать другое определение положительно определённой квадратичной формы.

Действительная квадратичная форма  называется *положительно определённой*, если её нормальный вид состоит из *п* положительных квадратов:

.

*Критерий отрицательной определённости действительной квадратичной формы.* Действительная квадратичная форма является *отрицательно определённой* тогда и только тогда, когда все угловые миноры нечётного порядка её матрицы отрицательны, а все угловые миноры чётного порядка положительны.

Из этого критерия вытекает, что матрица нормального вида отрицательно определённой квадратичной формы может быть только

.

Дадим другое определение отрицательно определённой квадратичной формы.

Действительная квадратичная форма  называется *отрицательно определённой*, если она невырожденная и приводится к нормальному виду:

.

Положительно определённые и отрицательно определённые квадратичные формы называются *знакоопределёнными квадратичными формами*.

*Пример.*

1) ,

, , ,

следовательно, положительно определённая квадратичная форма;

2) ,

, , ,

следовательно, отрицательно определённая квадратичная форма;

3) 

,

, , ,

следовательно, квадратичная форма общего вида.

**4.6. Собственные значения и собственные вектора матрицы**

Пусть *А* ‑ квадратная матрица *п*-го порядка. Матрицу



с переменной λ, принимающей любые числовые значения, называют *характеристической матрицей* матрицы *А*. Её определитель  представляет собой многочлен от переменной λ степени *п*. Этот многочлен называют *характеристическим многочленом* матрицы *А*. Корни характеристического многочлена  называют *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы *А*.

*Пример.* Найти собственные значения матрицы

.

*Решение*. Характеристическая матрица:

.

Характеристический многочлен:

.

Чтобы найти собственные значения, надо решить уравнение  или



Собственные числа: , , .

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений



или

.

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т.е. . Корнями этого уравнения будут собственные значения матрицы *А*. Для каждого собственного значения , матричное уравнение



имеет ненулевое решение

,

причём

.

Ненулевое решение  называется *собственным вектором-столбцом* матрицы *А*, который соответствует собственному значению .

*Нормированным собственным вектором* назовём вектор равный

.

*Пример*. Найти собственные значения и собственные вектора матрицы

.

*Решение.*

1. Найдём собственные значения матрицы *А*.

Характеристическая матрица:

.

Характеристический многочлен:

.

Чтобы найти собственные значения, надо решить уравнение  или



Собственные числа: , , .

2. Ищем собственные вектора.

Для  запишем систему линейных уравнений:

.

Решая методом Гаусса, получим эквивалентную систему:

.

Для  запишем систему линейных уравнений:

.

Решая методом Гаусса, получим эквивалентную систему:

.

Для  запишем систему линейных уравнений:

.

Решая методом Гаусса, получим эквивалентную систему:

.

Каждому собственному значению соответствует семейство собственных векторов, лежащих на одной прямой. Принято выбирать один вектор и считать его собственным, т.к. другие получаются из него умножением на число.

Полагая , ,  выпишем собственные вектора:

, , .

Нормированные собственные вектора имеют вид:

, , .