**4.7 Собственные значения и собственные векторы симметрической матрицы**

*Теорема*. Корни характеристического уравнения действительной симметрической матрицы являются действительными числами.

*Доказательство*. Если  ‑ действительная симметрическая матрица, то  и . где  ‑ матрица сопряжённая матрице *А*;  ‑ матрица, полученная транспонированием матрицы *А*.

Пусть  ‑ корень характеристического уравнения,

 ‑ собственный вектор данной матрицы, координаты которого могут быть и комплексными числами. Обозначим  ‑ матрицу сопряжённую матрице . Для  справедливо равенство .

Найдём произведение . применяя свойства транспонированных и сопряжённых матриц:



.

Из полученных равенств имеем:

,

или .

Можно утверждать, что . Действительно,

,

так как ‑ ненулевой столбец.

Из равенства  и условия  получаем, что  или . Следовательно,  ‑ действительное число. □

*Следствие*. Действительная симметрическая матрица имеет только действительные собственные векторы.

*Доказательство*. Это вытекает из того, что система



для определения координат собственного вектора матрицы в этом случае имеет только действительные решения, так как  и  ‑ действительные числа. □

**4.8 Ортогональные матрицы**

Невырожденная квадратная матрица *В* называется *ортогональной*, если.

Для ортогональной матрицы справедливо равенство .

Основные свойства ортогональных матриц.

*Свойство 1*. Квадратная матрица В ортогональна тогда и только тогда, когда сумма квадратов всех элементов любого её столбца (строки) равна единице, а сумма попарных произведений элементов двух любых столбцов (строк) равна нулю.

*Доказательство*.



,

где  при , и  при , , . □

*Свойство 2*. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1.

*Доказательство*. .□

*Свойство 3*. Матрица, обратная ортогональной матрице, ортогональная.

*Доказательство.* Так как , то  ‑ ортогональная.□

*Свойство 4*. Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

*Доказательство*. Пусть  и  ‑ ортогональные матрицы, тогда

, следовательно,  и матрица  ‑ ортогональная.□

**4.9. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных**

Линейное преобразование переменных называется *ортогональным*, если его матрица ортогональная.

Докажем, что действительную квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

*Теорема 1*. Если существует ортогональное преобразование с матрицей *В*, приводящее действительную квадратичную форму  к каноническому виду , то  ‑ характеристические числа матрицы *А* квадратичной формы , причём столбцами матрицы *В* являются собственные векторы-столбцы матрицы *А* с собственными числами .

*Доказательство*. Пусть ортогональное преобразование  приводит квадратичную форму  к каноническому виду , тогда матрица квадратичной формы  имеет вид:

.

Поскольку  и  ‑ ортогональная матрица, то  и . Следовательно,





.

Из равенства  вытекает, что  ‑ характеристические числа матрицы .

Принимая во внимание выражения ,  имеем

.

Запишем равенство  в матричной форме

.

Приравнивая столбцы, получим:

, , …, ,

где каждый -й столбец матрицы *В* является собственным вектором матрицы *А* с собственным значением .□

*Теорема 2*. Для любой действительной квадратичной формы существует ортогональное преобразование, приводящее её к каноническому виду.

*Доказательство.* Индукция по числу переменных квадратичной формы. При  квадратичная форма имеет канонический вид . Искомым ортогональным преобразованием будет тождественное преобразование.

Предположим, что теорема верна для квадратичных форм от  переменной. Докажем её для квадратичных форм от  переменных.

Пусть ‑ квадратичная форма с матрицей *А*,

 – собственное значение матрицы *А* и  ‑ собственный вектор матрицы *А*, соответствующий собственному значению .

Построим ортогональную матрицу *В* так, чтобы первым столбцом её был столбец .

Рассмотрим преобразование , переводящее квадратичную форму  в квадратичную форму . Если *С* матрица квадратичной формы , то . Вычислим матрицу *С*. Так как

,

то

.

Запишем произведение  в матричной форме:

.

Вычислим элементы первой строки матрицы *С*:



;



;

… … … … … … … …



.

Вычислим элементы первого столбца матрицы С:

;



*;*

… … … … … … … …



**.

Следовательно, матрица *С* имеет вид



и квадратичную форму  можно записать так:

.

Согласно индуктивному предположению для квадратичной формы  от  переменных существует ортогональное преобразование



приводящее её к каноническому виду .

Преобразование

 (4.12)

является ортогональным. Оно приводит квадратичную форму  к каноническому виду  ортогональным преобразованием, равным произведению преобразований  и (4.12).□

Из доказанных теорем получаем правило нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму  переменных к каноническому виду. Это правило состоит в следующем:

1) записать матрицу данной квадратичной формы, найти её собственные значения  ;

2) для каждого собственного значения найти собственный вектор; ;

3) собственные векторы нормируют ;

4) матрица ортогонального преобразования составляется из нормированных собственных векторов; координаты этих векторов записываются в столбцы матрицы ;

5) записать искомое ортогональное преобразование с помощью последней матрицы.

*Пример 1*. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму двух переменны

.

*Решение*. Выпишем матрицу квадратичной формы и найдём её собственные значения:

 ‑ матрица квадратичной формы;

 ‑ характеристический многочлен;

 ‑ собственные значения.

Найдём собственные вектора.

Для  имеем:



.

Для  имеем:



.

Выпишем собственные вектора при  и : , .

Собственные вектора нормируем:

так как , то ;

так как , то .

Ортогональная матрица:

.

Искомое ортогональное преобразование:



Это преобразование приводит данную квадратичную форму к каноническому виду: .

*Пример 2*.Привести к каноническому виду уравнение поверхности

.

*Решение.*

Выпишем квадратичную форму уравнения , её матрица имеет вид

.

Найдём собственные значения матрицы:



Для собственных значений найдём соответствующие собственные вектора.

При  имеем:



.

Выпишем нормированный собственный вектор:

т.к. , то .

При  имеем:



.

Выпишем нормированный собственный вектор:

т.к. , то .

При  имеем:



.

Выпишем нормированный собственный вектор:

т.к. , то .

Ортогональная матрица имеет вид:



Искомое ортогональное преобразование



Это преобразование приводит уравнение поверхности к виду:





.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены в уравнении, получим:

.

Выделяем полные квадраты относительно переменных:

;

;

.

Введём обозначения:



Получили каноническое уравнение эллипсоида

.

Выпишем итоговое линейное преобразование как композицию поворота



и параллельного переноса



а именно:

