**5. Линейные пространства**

**5.1 Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств**

Пусть *Р* это поле рациональных, действительных или комплексных чисел. *L* – множество, элементы которого будем называть векторами и обозначать , , , ,… Чтобы отличать векторы множества *L* от векторов 3-х мерного пространства, последние будем называть геометрическими векторами.

Множество *L* называется *линейным пространством*, если в нём:

*а*) определена операция сложения, ставящая каждой паре векторов  однозначно определённый вектор , называемый их суммой;

*б*) определена операция умножения элементов множества *L* на числа из поля *Р*, т.е. каждому элементу  и каждому числу  ставится в соответствие элемент , называемый произведением элемента  на число ;

*в*) операции сложения и умножения вектора на число удовлетворяют следующим аксиомам (*аксиомы линейного пространства*):

1)  для ;

2)  для ;

3) в множестве  существует *нулевой* элемент , такой что , ;

4) в множестве  для любого элемента  существует *противоположный* элемент : ;

5)  для  и числа ;

6)  для  и ;

7)  для  и ;

8)  для  и .

Линейное пространство называется *действительным линейным пространством*, если операции определены только для действительных чисел, т.е. .

Линейное пространство называется *комплексным линейным пространством*, если операции определены только для комплексных чисел, т.е. .

В линейном пространстве существует *операция вычитания*, ставящая во взаимно однозначное соответствие каждой паре элементов  и  элемент , называемый *разностью* элементов  и .

Примеры линейных пространств.

**1.** Обозначим  — множество, содержащее один нулевой вектор, с операциями  и . Для указанных операций аксиомы 1-8 выполняются. Следовательно, множество  является линейным пространством над любым числовым полем. Это линейное пространство называется нулевым.

**2.** Обозначим , ,  — множества геометрических векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число. Выполнение аксиом 1-8 линейного пространства следует из курса элементарной геометрии. Следовательно, множества , ,  являются вещественными линейными пространствами.

Вместо свободных векторов можно рассмотреть соответствующие множества радиус-векторов. Например, множество векторов на плоскости, имеющих общее начало, т.е. отложенных от одной фиксированной точки плоскости, является вещественным линейным пространством. Множество радиус-векторов единичной длины не образует линейное пространство, так как для любого из этих векторов сумма  не принадлежит рассматриваемому множеству.

**3.** Множество  всех функций действительного переменного, определённых и непрерывных на отрезке  с обычными правилами сложения функций и умножения их на действительные числа:

,  для  и 

Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Из коммутативности сложения действительных чисел следует справедливость равенства  для любого . По этому , т.е. аксиома 1 выполняется. Аксиома 2 следует аналогично из ассоциативности сложения действительных чисел. Нулевым вектором служит функция , тождественно равная нулю, которая, разумеется, является непрерывной. Для любой функции  выполняется равенство , т.е. справедлива аксиома 3. Противоположным вектором для вектора  будет функция . Тогда  (аксиома 4 выполняется). Аксиома 5 выполняется, так как умножение на единицу не изменяет функцию:  для любого , т.е. . Аксиомы 6, 7 следуют из дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел, а аксиома 8 — из ассоциативности умножения чисел. Таким образом, рассматриваемое множество  с введёнными операциями является вещественным линейным пространством.

Аналогично доказывается, что , ,…,  — множества функций, имеющих непрерывные производные первого, второго и т.д. порядков соответственно, также являются линейными пространствами.

**4.** Множество многочленов  степени не выше  с коэффициентами из поля  с обычными правилами сложения многочленов и умножения их на числа из поля . Аксиомы 1-8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором является многочлен, тождественно равный нулю. Поэтому множество  является линейным пространством над полем .

**5.** Множество  прямоугольных матриц размера  с элементами из поля  с обычными операциями сложения матриц и умножения их на числа из поля . Аксиомы 1-8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором является нулевая матрица  соответствующих размеров. Следовательно, множество  является линейным пространством.

**6.** *Арифметическое (координатное) пространство*  матриц-столбцов



размеров  с компонентами  из поля , в котором операция сложения векторов-столбцов и умножения их на число из поля  осуществляется по правилам:

 для ,

 для  и .

Эти операции удовлетворяют аксиомам 1-8 линейного пространства. Нулевым вектором в этом множестве служит нулевой столбец . Следовательно, множество  является линейным пространством над полем .

Линейное пространство  над полем обозначают  и называют *пространством арифметических векторов.*

**5.2. Линейная зависимость векторов. Свойства линейной зависимости и линейной независимости**

Пусть  ‑ линейное пространство над полем . Если  ‑ произвольная конечная система векторов из линейного пространства , и  ‑ произвольные числа из поля , то вектор



называется *линейной комбинацией* векторов  с коэффициентами .

Систему векторов  назовём *линейно зависимой*, если найдутся числа  такие, что

а) не все  равны нулю (хотя бы один элемент  отличен от нуля, т.е. );

б) .

Система векторов  называется *линейно независимой*, если линейная комбинация

,

будет нуль-вектором только когда .

Свойства линейной зависимости и линейной независимости.

*Свойство 1*. Если в системе  есть нуль-вектор, то система линейно зависима.

*Доказательство*. Пусть , рассмотрим линейную комбинацию . Если взять , ,…,, то , т.е. подобрались числа , не все равные нулю, для которых линейная комбинация есть нуль-вектор. Следовательно, система векторов  ‑ линейно зависима. □

*Свойство 2*. Если среди векторов  часть векторов  линейно зависима, то векторы  ‑ линейно зависимы.

*Доказательство.* Так как  ‑ линейно зависимы, то найдутся числа , не все равные нулю такие, что . Рассмотрим линейную комбинацию векторов :

.

Нашлись числа, не все равные нулю, для которых линейная комбинация векторов  есть нуль-вектор. Следовательно, система  ‑ линейно зависима. □

*Пример.* Выяснить вопрос о линейной зависимости векторов пространства :

, , .

*Решение.* Составим векторное равенство  и от него перейдём к покомпонентным равенствам

 или .

Решим систему



Эта система имеет ненулевое решение, поэтому система векторов  ‑ линейно зависима, причём .

*Теорема*. Для того чтобы векторы  были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них был линейной комбинацией остальных.

*Доказательство*. Необходимость. Пусть система векторов  ‑ линейно зависима, тогда в линейной комбинации  хотя бы одно . Предположим, что  и выразим вектор  через вектора :

 или .

Получили, что вектор  есть линейная комбинация векторов .

Достаточность. Пусть  есть линейная комбинация векторов , тогда . Нашлись числа , не все равные нулю, для которых линейная комбинация векторов  будет нуль-вектором. Следовательно, система  ‑ линейно зависима. □

Алгоритм исследования системы векторов  на линейную зависимость:

1. Проверяем, не содержит ли система  нулевого вектора, равных векторов, пропорциональных векторов. Если такие имеются, то делаем вывод о линейной зависимости системы.

2. Если предыдущий пункт не дал результата, то составляем линейную комбинацию векторов , которая в координатной форме представляя собой однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных .

2. Записываем матрицу *A*, столбцами которой являются векторы исследуемой системы .

3. Методом Гаусса приводим матрицу к ступенчатому виду.

4. Делаем вывод о ранге матрицы и существовании ненулевых решений однородной системы уравнений: а) если ранг равен числу векторов , то система имеет только нулевое решение и система векторов  линейно независима; б) если ранг меньше числа векторов , то система имеет ненулевые решения и система векторов  линейно зависима.

*Пример.* Является ли система векторов

, , 

линейно независимой в ?

*Решение.* Составим векторное равенство  и от него перейдём к покомпонентным равенствам:

 или .

Выпишем матрицу, столбцами которой являются данные векторы:



Методом Гаусса найдём ранг данной матрицы:

.

Так как , то исходная система векторов  является линейно зависимой.

*Пример.* Докажите, что система векторов , , ,  линейно независима в пространстве .

*Решение.* Составим векторное равенство  и от него перейдём к покомпонентным равенствам

.

Выпишем матрицу, столбцами которой являются данные векторы:



Покажем, что ранг этой матрицы равен количеству векторов исходной системы.

Ранг найдём методом окаймляющих миноров. В качестве минора первого порядка, отличного от нуля, возьмём элемент . Окаймляющий его минор второго порядка  также отличен от нуля. Переходим к поиску окаймляющего минора третьего порядка: . Осталось найти отличный от нуля минор четвёртого порядка. Вычислим определитель:

.

Таким образом,  что доказывает линейную независимость исходной системы векторов.

**5.3. Размерность и базис линейного пространства**

Пусть  ‑ линейное пространство над полем . Упорядоченная система векторов  называется *базисом* пространства , если:

а)  ‑ максимальная линейно независимая система векторов;

б) для любого вектора  найдутся числа  такие, что

. (5.1)

Формула (5.1) называется *разложением вектора * по базису , а числа  называются *координатами вектора*  в базисе .

*Примечание*. В определении базиса слово «упорядоченная» означает, что если две максимальных линейно независимых системы векторов состоят из одних и тех же векторов, но записанных в разном порядке, то они являются различными базисами. Выражение «максимальная линейно независимая система векторов» подразумевает, что базис — это линейно независимая система векторов, которая при добавлении к ней любого вектора становится линейно зависимой.

*Размерностью* линейного пространства  называется число векторов в базисе пространства . Размерность обозначается .

Если , то пространство  называется *п*-мерным и обозначается .

Если пространство имеет конечный базис, то оно называется *конечномерным*. Если конечного базиса нет, то такое линейное пространство называют *бесконечномерным*.

*Пример 1.* Доказать, что многочлены  cоставляют базис пространства . Указать размерность этого пространства и координаты произвольного многочлена  из  в этом базисе.

*Решение.* Система многочленов  является линейно независимой, так как линейная комбинация равна нулю  тогда и только тогда, когда . Если к этой системе многочленов добавить произвольный многочлен  из , то получим линейно зависимую систему, так как многочлен  является линейной комбинацией многочленов  т.е.

.

Следовательно, система многочленов  является базисом линейного пространства , размерность которого равна .

Координатами многочлена  в этом базисе являются числа .

Отметим, что система  называется каноническим базисом пространства .

*Пример 2.* Доказать, что матрицы

   

составляют базис линейного действительного пространства  матриц второго порядка. Указать размерность пространства . Найти координаты вектора  в этом базисе.

*Решение.* Система  линейно независима, так как линейная комбинация равна нулевой матрице  только при . Если к системе  добавить произвольную матрицу  из пространства , то получим линейно зависимую систему  так как

.

или

.

Следовательно, система  ‑ базис пространства  и .

Так как

 то координатами вектора  в базисе  будут числа 2, (−3), 0, 4.

*Теорема*. Пусть  ‑ базис, тогда координаты любого вектора  в данном базисе определяются единственным образом.

*Доказательство*. От противного. Пусть вектор  имеет два разных разложения в базисе :

 и ,

где  при .

Из первого равенства вычтем второе

.

Так как система  ‑ линейно независимая, то , ,  или , , …, , т.е.  при . А это противоречит предположению, что два разложения вектора  являются разными.

Итак, наше предположение неверно, поэтому координаты вектора  определяются однозначно. □

*Следствие*. Пусть  ‑ базис. Два вектора  и  пространства  равны тогда и только тогда, когда их координаты в данном базисе равны, т.е. , , …,.

*Пример.* Может ли система векторов

, , , 

быть базисом пространства ?

*Решение.* Так как максимальное число линейно независимых векторов пространства  равно трём, то система , состоящая из четырёх векторов, линейно зависима. Поэтому данная система векторов не может быть базисом пространства , хотя подсистема  исходной системы векторов является базисом.

*Пример.* Составляют ли векторы

, , ,

базис векторного пространства ?

*Решение.* Даже если исходная система векторов линейно независима, количество векторов в ней недостаточно для того, чтобы быть базисом четырёхмерного пространства. Базис такого пространства состоит из четырёх векторов, следовательно, система  не является базисом пространства .

*Пример.* Убедитесь, что векторы

, , , .

могут быть базисом пространства .

*Решение.*

Составим матрицу, столбцами которой являются данные векторы:



Методом Гаусса найдём ранг данной матрицы:

.

Ранг матрицы *А* равен четырём, что доказывает линейную независимость исходной системы . Так как количество векторов системы равно размерности векторного пространства , то  ‑ базис.