**5.4. Свойства координат вектора линейного пространства**

Пусть в  зафиксирован базис . Запишем разложение вектора  по этому базису в матричной форме

,

где  ‑ заданный базис, записанный в виде матрицы-строки, а  ‑ координатный столбец вектора в базисе .

Итак, всякому вектору  взаимно однозначно соответствует столбец его координат, т.е.

.

Операции над векторами сводятся к операциям над их координатами на основании следующих свойств.

*Свойство 1*. Вектор является нулевым вектором линейного пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.

*Доказательство*.Необходимость.Пусть  и в базисе  имеет разложение , тогда  и в силу линейной независимости системы векторов  получим, что , , …, .

Достаточность. Пусть в базисе  вектор  имеет разложение , тогда , т.е.  ‑ нулевой вектор.

Итак, в любом базисе имеем

. □

*Свойство 2*. Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме соответствующих координат данных векторов в том же базисе.

*Доказательство*. Если в базисе 

 и , то



.

Поскольку разложение по базису определяется однозначно, то вектор  имеет координаты , , …, . Таким образом, получаем, что

.□

*Свойство 3*. Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат на это число в одном и том же базисе.

*Доказательство*. Если в базисе  , то. Так как разложение по базису определяется однозначно, то вектор  имеет координаты , , …, . Итак,

. □

*Свойство 4*. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе.

*Доказательство.* Если в базисе 

 и , то условие  равносильно условию  или . В силу линейной независимости системы векторов  имеем , , …,  или , , …, . Таким образом,

. □

Из свойств 1-4 вытекает следующее правило:

,

т.е. вектор  является линейной комбинацией векторов  тогда и только тогда, когда каждая координата вектора  является такой же линейной комбинацией соответствующих координат этих векторов в одном и том же базисе.

*Пример 1.* В некотором базисе даны векторы и их координатные столбцы

, . Найти  

*Решение*. Поскольку

, , то

.

**5.5. Ранг системы векторов линейного пространства**

Рассмотрим систему  векторов  линейного -мерного пространства, координатные столбцы которых заданы в одном и том же базисе :

, , …, . (5.1)

Системе векторов (5.1) поставим в соответствие матрицу

 (5.2)

в -ом столбце которой записаны координаты вектора , . Матрицу (2.5) называют *матрицей системы* *векторов* (5.1) в данном базисе, а ранг этой матрицы – *рангом системы* *векторов* .

Обратно, если задана матрица (5.2), то ей можно поставить в соответствие систему (5.1)  векторов линейного -мерного пространства.

Будем говорить, что столбцы матрицы (5.2) линейно зависимы, если векторы (5.1) линейно зависимы и обратно.

Приведём без доказательства теорему, которая позволяет судить о линейной независимости векторов, заданных своими координатами.

*Теорема.* Для того, чтобы  векторов линейного -мерного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен .

*Следствие 1.* Система  векторов -мерного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда матрица этой системы векторов является невырожденной.

*Следствие 2.* Если ранг матрицы системы  векторов линейного пространства равен , то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно .

*Пример 1.* Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе , координатные столбцы которых в некотором базисе имеют вид:

, , , , .

*Решение*. Матрица данной системы векторов имеет вид:

.

Методом Гаусса приведём матрицу к ступенчатому виду:



.

Ранг матрицы равен трём, следовательно, максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно трём.

*Пример 2*. Найти базис и ранг системы многочленов , , , , .

*Решение.* Система  является каноническим базисом пространства . В этом базисе каждому многочлену данной системы соответствует координатный столбец:

, ,

, ,

.

Матрица данной системы векторов имеет вид:

.

Так как её миноры , , , то ранг этой матрицы равен 3. Следовательно, ранг системы многочленов равен 3. Один из базисов составляют те многочлены, координатные строки которых вошли в минор М3, т.е. , , .

**5.6. Преобразование координат вектора при изменении базиса**

Пусть

, (5.3)

 (5.4)

два различных базиса в .

Каждый вектор базиса (5.4) можно разложить по базису (5.3):

 (5.5)

Выпишем координаты-столбцы векторов :

, , …, .

Запишем систему (5.5) в матричной форме:

 или ,

где ,  и . Матрица  называется *матрицей перехода от базиса* (5.3) *к базису* (5.4).

*Теорема*. Если в базисе (5.3) координаты вектора ,

а в базисе (5.4) координаты вектора ,

то

 (5.6)

где  ‑ матрица перехода от базиса (5.3) к базису (5.4).

*Доказательство*. Из условия теоремы следует, что

,

,

поэтому . Так как  ‑ матрица перехода от базиса (5.3) к базису (5.4), то . Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим , откуда . □

*Пример 1*. Найти координаты геометрического вектора  в базисе , состоящем из векторов , , .

*Решение*. Каждый вектор базиса  разложен по базису :

 или .

Отсюда матрица перехода имеет вид:

.

Так как , то .

Ищем обратную матрицу:



.

Получаем, что .

Проверка обратной матрицы:



Так как , то координаты вектора . Ищем координаты геометрического вектора  в базисе  по формуле :

.

Таким образом, .

*Пример 2.* Показать, что система матриц  ‑ базис в пространстве матриц второго порядка. Найти в этом базисе координаты матрицы , если:

, , , , .

*Решение*. Проверим линейную независимость системы матриц. Для этого составим линейную комбинацию:

;

;

.

Решаем систему:



Равенство нулю вех чисел  устанавливает линейную независимость системы векторов .

Определим координаты матрицы  в базисе :

;

;

.

Решаем систему:



Таким образом,

.

*Пример 3.* Доказать, что многочлены  составляют базис пространства . Найти координаты вектора  в этом базисе.

*Решение.* Выпишем в каноническом базисе  пространства  координатные столбцы многочленов :

;

;

.

Составим определитель из координатных столбцов этих векторов:



Так как этот определитель отличен от нуля, то система векторов  линейно независима. Так как пространство имеет размерность 3, то всякая линейно независимая система из трёх векторов составляет базис. Поэтому  – базис пространства .

Найдём координаты вектора  в этом базисе :



или

.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного



Решая систему, получаем , ,  – координаты многочлена  в базисе .