**6. Алгебра линейных операторов**

**6.1. Понятие линейного оператора**

*Линейным оператором* в линейном  называется всякое отражение  пространства  в себя, обладающее свойствами:

1) ;

2) .

Пусть  линейный оператор в -мерном линейном пространстве с базисом . Оператор  переводит базисные векторы  в векторы .

Разложим векторы ,  по базису :

 (6.1)

или в матричной форме

,

. (6.2)

Матрица

**

называется *матрицей оператора*  в базисе .

*Пример*. Пусть в некотором базисе пространства геометрических векторов  задан произвольный вектор . Является ли линейным оператор  такой, что .

*Решение*. Пусть  и  произвольные векторы . Проверим линейность оператора:

1) ,



;

2) ,



.

Условия линейности выполнено.

Выпишем матрицу линейного оператора . Выберем канонический базис в : , , .

,

,

.

.

*Утверждение 1.* Пусть  линейный оператор в -мерном линейном пространстве с базисом  и . Если , то , где  и  координатные столбцы векторов  и , а  ‑ матрица оператора  в базисе .

*Доказательство*. Напишем разложение векторов  и  по базису :

;

.

Так как оператор  линейный, то по свойствам линейности имеем:





.

Получили, что

,

,

следовательно, . □

*Утверждение 2*. Если  и  два базиса -мерного линейного пространства и  ‑ матрица линейного оператора  в базисе , то матрица  линейного оператора  в базисе  имеет вид

,

где  матрица перехода от базиса  к базису .

*Доказательство*. Пусть  и , тогда  в базисе  и  в базисе .

Так как  и , где  ‑ матрица перехода от  к , то умножив первое равенство на матрицу  получим

.

Подставив в это равенство выражение , получим .

Из равенств  и , имеем  или . Таким образом, получили:

 и .

Следовательно, . □

*Пример 2*. Найти матрицу оператора  в базисе , где



Если в базисе  его матрица имеет вид .

Решение.

1. Находим матрицу перехода .

2. Находим обратную матрицу .

Убеждаемся, что .

3. Находим матрицу 

.

**6.2. Действия над линейными операторами**

Пусть  ‑ линейное пространство.

*Суммой линейных операторов*  и  называется линейный оператор , действующий по формуле:

, .

*Утверждение 1*. Если линейные операторы  и  в некотором базисе пространства  имеют соответственно матрицы  и , то оператор  в том же базисе имеет матрицу .

*Доказательство*. Пусть , тогда , где  ‑ матрица оператора ,

. Следовательно, .□

*Произведением линейного оператора*  на число  называется линейный оператор , действующий по формуле:

, .

*Утверждение 2*. Если линейный оператор  в некотором базисе пространства  имеет матрицу , то оператор  в том же базисе имеет матрицу .

*Доказательство*. , тогда

. где  ‑ матрица оператора ,

.

Следовательно, . □

*Произведением линейных операторов*  и  называется линейный оператор , действующий по формуле:

, ,

т.е. сначала действует оператор , а затем оператор  применяется к полученному вектору .

*Утверждение 3*. Если в некотором базисе пространства  линейные операторы  и  имеют соответственно матрицы  и , то оператор  в том же базисе имеет матрицу .

*Доказательство*. Пусть , тогда

, где  матрица оператора ,

. Следовательно, . □

*Тождественным оператором*  будем называть линейный оператор, переводящий каждый элемент в себя, т.е. . Линейный оператор  в некотором базисе пространства  имеет единичную матрицу.

*Линейный оператор  называется* *обратным* к линейному оператору , если

, ,

т.е. операторы  и  ‑ тождественные .

*Утверждение 4*. Линейные операторы  и ** в некотором базисе пространства  имеют взаимно обратные матрицы.

*Доказательство*. Если  ‑ матрица оператора  и  ‑ матрица оператора **, то

,

.

Имеем , следовательно, . □

*Пример 3*. В некотором базисе геометрических векторов  заданы операторы  и , где  ‑ произвольный вектор. Найти координаты вектора  в том же базисе.

*Решение*.

1. Выпишем матрицы линейных операторов  и  в каноническом базисе , , .

Для оператора  имеем: , , ,

.

Для оператора  имеем: , , 

.

2. Вычислим матрицу :



.

3. Находим столбец координат вектора :

.

Получаем .

*Пример 4*. Показать, что линейный оператор  является невырожденным в . Найти явный вид обратного оператора.

*Решение*.

1. Для  выпишем матрицу в каноническом базисе , , :

, , ,

.

Так как , то оператор вырожденный, поэтому у него нет обратного.

2. Для  выпишем матрицу в каноническом базисе , , :

, , ,

.

Так как , то  невырожденный, следовательно, существует обратный оператор .

Ищем обратную матрицу:

.

Запишем явный вид обратного оператора.

,

получаем  и .

**6.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора**

Пусть линейный оператор , действующий в линейном пространстве  над полем , имеет в некотором базисе матрицу .

Характеристический многочлен матрицы  данного линейного оператора  называется *характеристическим многочленом линейного оператора*, а его корни – *характеристическими корнями линейного оператора*.

Ненулевой вектор  называют *собственным вектором* *оператора* , если этим оператором он переводится в вектор , т.е. , где  ‑ некоторое число из поля , называемое *собственным значением оператора* . При этом говорят, что собственный вектор  принадлежит собственному значению .

*Теорема.* Собственными значениями линейного оператора , действующего в линейном пространстве  над полем , являются характеристические корни этого оператора, принадлежащие , и только они.

*Доказательство*. Пусть  в некотором базисе имеет матрицу . Вектор  является собственным вектором линейного оператора , если выполняется равенство , где  ‑ собственное значение оператора , отвечающее собственному вектору . Это равенство можно записать в виде , где  ‑ тождественный оператор. Запишем это равенство в матричном виде , где  ‑ столбец координат вектора .

Матричное равенство  представляет собой однородную систему линейных уравнений относительно элементов столбца . Так как вектор , т.е. , система имеет ненулевое решение, а для этого необходимо и достаточно, чтобы . Это означает, что число  является корнем характеристического многочлена.

Если число  ‑ корень характеристического многочлена, то выполняется равенство . Следовательно, в однородной системе  определитель равен нулю и эта система имеет ненулевые решения. Каждому такому решению соответствует вектор , удовлетворяющий условию , а потому по определению являющийся собственным вектором, которому отвечает собственное значение .□

*Следствие*. В конечномерном комплексном линейном пространстве собственными значениями линейного оператора являются все его характеристические корни, и только они. В конечномерном действительном линейном пространстве собственными значениями линейного оператора являются все его действительные характеристические корни и только они.

Из следствия вытекает *правило*: для нахождения собственных значений оператора с матрицей  нужно найти все характеристические числа этой матрицы и из них выбрать лишь те, которые принадлежат основному полю; для отыскания всех собственных векторов оператора с матрицей  нужно для каждого собственного значения  найти все ненулевые решения системы .

*Алгебраической кратностью собственного значения* линейного оператора называют кратность соответствующего корня характеристического многочлена.

*Пример*. Для оператора  с матрицей



найти собственные значения и собственные вектора.

*Решение*. Характеристический многочлен матрицы  имеет вид:

.

Ищем собственные значения:



Так как оператор действует в действительном линейном пространстве, то его собственным значением будет лишь .

Ищем собственные вектора для . Запишем систему линейных уравнений:

.

Решая методом Гаусса, получим:

.

 ‑ собственный вектор, соответствующий собственному значению . Других собственных векторов оператор с матрицей  не имеет.

*Теорема*. Собственные векторы  линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям  линейно независимы.

*Доказательство*. Доказательство проводится индукцией.

При  утверждение теоремы очевидно, т.к. . Допустим, что утверждение верно для  собственных векторов. Рассмотрим систему  и её линейную комбинацию, равную нулю:

. (6.3)

Применим к этому равенству оператор :

;

. (6.4)

Из равенства (6.4) вычтем равенство (6.3), умноженное на :

.

Так как векторы  ‑ линейно независимы, то все коэффициенты   для . С учётом различия всех собственных значений  делаем вывод, что , но тогда в равенстве (6.3) можно опустить все слагаемые, кроме последнего, т.е. . Так как все собственные вектора ненулевые и , то .

Итак, линейная комбинация  при , т.е. система векторов  линейно независимая. □

**6.4. Линейные операторы простой структуры**

Линейный оператор, действующий в линейном пространстве , называется *оператором простой структуры*, если в  существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

*Теорема*. Линейный оператор  в заданном базисе  имеет диагональную матрицу



тогда и только тогда, когда векторы этого базиса являются собственными векторами, отвечающими собственным значениям .

*Доказательство*. Пусть  базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора , отвечающий собственным значениям , тогда



или в матричной форме

.

Матрица оператора  в базисе  будет

.

Пусть в базисе  оператор  имеет матрицу

,

тогда и для вектора , , с координатным столбцом



образ  будет иметь координатный столбец

.

Следовательно, , , поэтому векторы  являются собственными векторами оператора , отвечающими собственным значениям . □

*Следствие*. Линейный оператор простой структуры в базисе, состоящем из собственных векторов, имеет диагональную матрицу, в которой по диагонали стоят собственные значения этого оператора.

Пусть линейный оператор  в базисе  имеет матрицу , а в базисе  состоящем из собственных векторов диагональную матрицу . Тогда учитывая связь между матрицами оператора в разных матрицах, имеем , где  матрица перехода от базиса  к . Или , это соотношение называют *каноническим* или *спектральным разложением матрицы* .

Таким образом, матрица оператора простой структуры имеет каноническое разложение. Каноническое разложение матриц широко используется в теории и вычислительной практике. Например, если известно каноническое разложение  матрицы , то её -я степень при натуральном числе  легко находится по формуле

, (6.5)

так как . Формула (6.5) сохраняется при  целом отрицательном для невырожденной матрицы . В частности,

. (6.6)

Один из корней -й степени из матрицы  определяется формулой

. (6.7)

Действительно, возведя правую часть равенства (6.7) по формуле (6.5) в -ю степень, получим .