**Лекция 12**

**8. Евклидовы пространства**

**8.1. Определение евклидова пространства**

В линейном пространстве  над полем  введём операцию *скалярного произведения векторов*, поставив в соответствие каждой упорядоченной паре векторов  действительное число, которое обозначим . Потребуем, чтобы для  и  выполнялись следующие аксиомы:

1) ;

2) ;

3) ;

4)  для всех ,  для .

Очевидно, что скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой: .

Скалярное произведение вектора  на себя называется *скалярным квадратом*: .

*Определение 8.1.1.* Евклидовым пространством  называется линейное действительное пространство, в котором задана операция скалярного произведения векторов, удовлетворяющая аксиомам 1 - 4.

*Примеры:*

1. В арифметическом пространстве  столбцов высоты *n* скалярное произведение векторов  и  можно определить формулой . Нетрудно проверить выполнение аксиом 1 – 4.

2. В пространстве геометрических векторов  скалярное произведение определяется как . Аксиомы 1 - 4 доказывались при изучении геометрических векторов.

3. В линейном пространстве  функций действительного переменного, непрерывных на отрезке  скалярное произведение можно определить как . Проверка аксиом 1 – 4 сводится к свойствам определённого интеграла.

**8.2. Норма вектора евклидова пространства**

*Определение 8.2.1.* Нормой вектора евклидова пространства  называется арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого вектора. Норму вектора  обозначим , тогда по определению .

Норма обладает следующими свойствами:

1) ;

2) , ;

3)  (неравенство Коши- Буняковского);

4) .

Докажем эти свойства.

1. Из аксиомы скалярного произведения  для  получим, что

. □

2. Применяя аксиомы 1 и 3 скалярного произведения имеем, что  выполнятся равенство



. □

3. В соответствии с аксиомой 4 скалярного произведения

,

поэтому

.

Так как квадратный трёхчлен относительно  неотрицательный , то его дискриминант неположителен, т.е.

.

В силу того, что  и , имеем . □

4. Применяя свойства скалярного произведения и неравенство Коши-Буняковского имеем



и , откуда следует, что . □



**8.3. Угол между векторами евклидова пространства**

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что при  и 

  или .

Отношение  можно рассматривать как косинус некоторого угола.

*Определение 8.3.1.* Угол между двумя векторами  и  евклидова пространства  называется угол , для которого , .

*Определение 8.3.2*. Два вектора  и  евклидова пространства  называются *коллинеарными*, если существует действительное число  такое, что .

*Утверждение 8.3.1.* Для того чтобы ненулевые векторы  и  были коллинеарными, необходимо и достаточно чтобы .

*Доказательство*. Необходимость. Пусть вектора  и  коллинеарные, т.е. , тогда ,

 и . Поэтому  и .

Достаточность. Если , то  и . Предположим, что вектора  и  не являются коллинеарными, т.е.  и  для . Рассмотрим скалярное произведение . Получим положительный квадратный трёхчлен относительно . Его дискриминант будет отрицательным, т.е. , откуда имеем . Из последнего неравенства вытекает, что , а это противоречит условию , поэтому наше предположение о том, что вектора  и  не являются коллинеарными неверное. Следовательно, вектора  и  - коллинеарные. □

**8.4. Матрица Грама**

Пусть  базис в *n*-мерном евклидовом пространстве , тогда вектора  и  имеют в нём разложение

 и ,

где  и  координатные столбцы. Рассмотрим скалярное произведение: 























Для скалярного произведения получили выражение

. (8.4.1)

Матрицу

 (8.4.2)

называют *матрицей Грама*.

И.П. Грам (1850-1916) датский математик.

*Пример 8.4.1.* В евклидовом пространстве  задан базис  в котором матрица Грама имеет вид . Записать формулу скалярного произведения и вычислить , если  и . Найдите скалярные произведения , , .

*Решение.* Запишем формулу скалярного произведения

 или . Вычислим скалярное произведение векторов  и :

.

Так как , то , , .

**Лекция 13**

**8.5. Свойства матрицы Грама**

Пусть в *n*-мерном евклидовом пространстве  задан базис  и  - матрица Грама в этом базисе.

*Свойство 8.5.1.* Матрица Грама симметрическая и 

*Доказательство.* Из свойства 4 скалярного произведения  при  вытекает, что . Применяя свойство 1 скалярного произведения  , получим  для , и , поэтому матрица Грама симметрическая. □

*Свойство 8.5.2.* Пусть  - матрица Грама в базисе  и  - матрица Грамав базисе  *n*-мерного евклидова пространства , тогда матрицы Грама связаны соотношением , где  - матрица перехода от базиса  к базису .

*Доказательство.* При переходе от базиса  к базису  координаты векторов  и  в этих базисах связаны формулами  и , поэтому

.

Получаем, что матрица Грама для базиса  имеет вид

. □

*Свойство 8.5.3.* Определитель матрицы Грама любого базиса положителен, т.е. .

*Доказательство.* Из свойства 2 матрицы Грама имеем , и из свойства определителя имеем . Остаётся учесть, что в качестве матрицы Грама  можно взять единичную матрицу, для которой , тогда . Так как  матрица Грама произвольного базиса  пространства , то третье свойство доказано. □

*Свойство 8.5.4.* Все угловые диагональные миноры матрицы Грама  в базисе  положительные.

*Доказательство.* Все угловые диагональные миноры матрицы Грама можно представить в виде

 , где .

Так как для любого  можно рассмотреть подпространство  как самостоятельное евклидово пространство, то определитель матрицы Грама для базиса будет совпадать с . Согласно свойству 3 матрицы Грама . □



*Пример 8.5.1.* В евклидовом пространстве  выбраны квадратичные формы  и . Если можно с помощью данных квадратичных форм задать скалярные произведения, то вычислить скалярные произведение векторов  и , если  и .

*Решение.* Запишем квадратичную форму  в матричном виде:

.

Так как скалярное произведение в евклидовом пространстве задаётся при помощи матрицы Грама, то проверим, удовлетворяет ли матрица квадратичной формы  свойствам матрицы Грама.

Матрица  - симметрическая. Вычислим её угловые миноры:

, .

Два первых угловых миноры неположительные, следовательно, квадратичная форма  не является положительно определённой и для матрицы  не выполняется свойство 4 матрицы Грама. Задать скалярное произведение задать с помощью данной квадратичной формой нельзя.

Представим квадратичную форму  в матричном виде:





Матрица  - симметрическая и её угловые миноры имеют значения:

, , ,

.

Так как все угловые миноры положительные, то квадратичная форма  является положительно определённой  и для матрицы  выполняются свойства матрицы Грама. Скалярное произведение можно задать с помощью данной квадратичной формы формулой . Вычислим по этой формуле скалярное произведение векторов  и :

.

**8.6. Ортогональность. Процесс ортогонализации**

*Определение 8.6.1*. Два вектора  и  евклидова пространства  называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. .

Нулевой вектор ортогонален любому другому вектору, так как .

*Определение 8.6.2*. Система ненулевых векторов называется *ортогональной системой*, если любые два вектора этой системы ортогональны.

*Теорема 8.6.1.* Любая ортогональная система линейно независима.

*Доказательство.* Пусть  ортогональная система ненулевых векторов, т.е.  и  при . Чтобы доказать линейную независимость векторов , составим линейную комбинацию  и умножим её скалярно на . Получим

.

В силу соотношений  при , равенство упрощается и примет вид . Поскольку , то . Так как номер  выбирался произвольно, то заключаем, что . □

*Определение 8.6.3*. Вектор  называется *нормированным*, или *единичным*, если .

Если , то каждый из векторов

 и  (8.6.1)

будет нормированным. Нахождение для данного вектора , нормированного по формуле (8.6.1), называется *нормированием* данного вектора, а множитель  - *нормирующим множителем*.

*Определение 8.6.4*. Система векторов  называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, т.е.  где , и .

*Примечание.* Любую ортогональную систему можно превратить в ортонормированную простой нормировкой, т.к. нормирование не нарушает ортогональность.

Имеется специальная процедура, которая позволяет преобразовать произвольную линейно независимую систему из  векторов в ортогональную систему, также имеющую  векторов. Эта процедура называется *процессом ортогонализации* и состоит она в следующем:



1) пусть линейно независимы, полагаем ;



2) если найдены ортогональные векторы  , то ищем ненулевой вектор , выбирая коэффициенты  так, чтобы вектор  был ортогонален каждому из векторов , т.е. , , …, ; для нахождения коэффициентов  умножим скалярно на векторы  вектор , получим:

,

,

,

,

,

продолжая процесс находим

,

;

итак, в процессе ортогонализации очередной вектор нужно выбирать согласно формуле

. (8.6.2)

*Пример 8.6.1.* Применяя процесс ортогонализации и нормирования векторов в  , ортонормировать систему векторов

.

*Решение.* Положим , тогда .

По формуле (8.6.2) . Так как  и , то  и .

По формуле (8.6.2) . Вычислив , , , , имеем

 и . По формуле (8.6.2) . Так как , , , , , , получим  и .

Нормируя векторы , получим ортонормированную систему



, ,

, .

*Пример 8.6.2.* В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 ортонормировать систему векторов , , , , если скалярное произведение определено формулой .

*Решение*. Полагаем , тогда

 и .

По формуле (8.6.2) . Так как , то

 и , .

По формуле (8.6.2) . Вычислив , , получим

, , .

По формуле (8.6.2) . Найдя значения , ,

, имеем 

 , .

Нормируя векторы , получим ортонормированную систему , где

, , ,

.