

Тема 1.3. Елементи лінійної алгебри.

1.3.1. Визначники другого і третього порядків. Правило Крамера.

1.3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса.

Поняття визначників другого і третього порядків зустрічаються у темі «Векторна алгебра» при вивченні добутків векторів і обчисленні площ многокутників та об'ємів многогранників; при вивченні теми «Аналітична геометрія» досліджується взаємне розміщення прямих і площин, обчислення кутів між прямими за допомогою систем рівнянь.

1.3.1. Визначники другого і третього порядків. Правило Крамера.

Означення. Визначником другого порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

називається число $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$

Означення. Визначником третього порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ називається

число $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 z_3 - x_1 z_2 y_3$

У визначнику можна визначити дві діагоналі. Головну діагональ

визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} . Побічну діагональ

цього визначника складають елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} .

Для обчислення визначника третього порядку існує правило трикутників (рис. 1.3.1). Визначник є сумою 6-и добутків, з яких три беруться зі знаком

„+” і три – зі знаком „-”. Зі знаком „+” береться добуток елементів головної діагоналі і добуток елементів, які знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними головній діагоналі. Зі знаком „-” береться добуток елементів побічної діагоналі і добутки елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі.

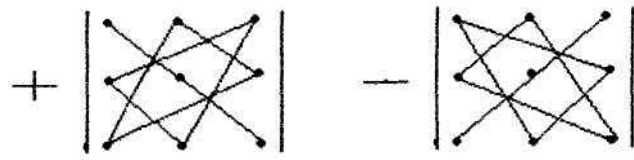


Рис. 1.3.1.

Приклад 1.3.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 9 + 6 \cdot 3 \cdot (-3) - (-3) \cdot (-8) \cdot 9 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= -8 + 90 - 54 - 216 - 30 - 6 = -224$$

Нехай дана система лінійних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \beta_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \beta_2 \end{cases}$$

Головним визначником системи називається визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, для розв'язання системи існують **формули Крамера**. Домножимо перше рівняння системи на α_{22} , а друге рівняння - на α_{12} і віднімемо з першого рівняння друге. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком рівнянь системи, в цьому рівнянні залишається одна змінна x

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})x = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}$$

Згадуючи означення визначника другого порядку, це рівняння можна записати так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Повернемося до початкової системи: помножимо перше рівняння на a_{12} , друге – на a_{11} і віднімемо від другого рівняння перше. Одержимо рівняння, в якому лише одна змінна y .

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}\beta_2 - a_{21}\beta_1$$

Або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

то з одержаних рівнянь знаходимо єдиний розв'язок початкової системи:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Позначаючи

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix},$$

остаточно отримаємо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Ці формули є **формулами Крамера** для системи лінійних рівнянь другого порядку.

Перейдемо до систем лінійних рівнянь третього порядку:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = \beta_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = \beta_3 \end{cases}$$

Аналогічно системам другого порядку, визначником системи називається визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Покажемо, що при $\Delta \neq 0$ для розв'язування системи третього порядку також існують формули Крамера.

Помножимо перше рівняння системи на число $(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})$, друге рівняння помножимо на $(\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})$, третє рівняння – на $(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})$ і всі рівняння додамо. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком системи і містить лише одну змінну x .

$$(\alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{13}\alpha_{22})x = \\ \beta_1\alpha_{22}\alpha_{33} - \beta_1\alpha_{23}\alpha_{32} + \beta_2\alpha_{13}\alpha_{32} - \beta_2\alpha_{12}\alpha_{33} + \beta_3\alpha_{12}\alpha_{23} - \beta_3\alpha_{13}\alpha_{22}$$

Згадуючи означення визначника третього порядку, перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Нехай

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і при $\Delta \neq 0$ одержуємо $x = \Delta_x / \Delta$.

Проводячи аналогічні міркування для змінних y і z одержимо

$$y = \Delta_y / \Delta, \quad z = \Delta_z / \Delta,$$

$$\text{де} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Таким чином, якщо головний визначник Δ системи лінійних рівнянь третього порядку не дорівнює 0, система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера

$$x = \Delta_x / \Delta \quad y = \Delta_y / \Delta \quad z = \Delta_z / \Delta$$

Нехай дана система лінійних рівнянь n -го порядку

[illegible]

Для розв'язування подібних систем також існують формули Крамера.

1.3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса.

Приклад 1.3.2.

Розв'язжемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 2 + 6 + 9 - 4 + 8 = 45;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -48 + 6 - 8 - 12 - 12 - 16 = -90;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 4 - 24 + 9 + 16 + 16 = 45;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 8 + 9 + 36 + 4 + 12 = 45;$$

$$x_1 = -\frac{90}{45} = -2;$$

$$x_2 = \frac{45}{45} = 1;$$

$$x_3 = \frac{45}{45} = 1;$$

У шкільному курсі математики вивчають метод послідовного вилучення невідомих (метод Гауса).

Розглянемо схему Гауса на прикладі розв'язування конкретної системи.

Приклад 1.3.3.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases},$$

яку у матричному вигляді записують так: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Початкова таблиця має такий вигляд:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} | -2| -3 \\ \\ \end{array}.$$

Числа -2 та -3 - це елементи другого та третього рядка (взяті з

протилежним знаком), які розташовані в тому стовпці, де в першому рядку є число 1.

Множимо перший рядок на числа -2 та -3 й отримуємо, відповідно, вектори (-2; -4; 6; 12) та (-3; -6; 9; 18). Додаємо ці вектори до другого і третього рядків:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \\ 0 & -4 & 10 & 22 \end{array} \begin{array}{l} \\ | :(-5) \\ \end{array} .$$

Ділимо всі елементи другого рядка на -5, роблячи діагональний елемент таблиці одиничним:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \\ 0 & -4 & 10 & 22 \end{array} \begin{array}{l} \\ | -2 | 4 \\ \end{array} .$$

Розпочинаємо наступний етап методу. Множимо другий рядок на -2 та на 4 й отримуємо вектори (0; -2; 14/5; 22/5) і (0; 4; -28/5; -44/5). Додаємо ці вектори до першого та третього рядків:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 22/5 & 66/5 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ | : (22/5) \end{array} ,$$

і робимо ще один діагональний елемент одиницею (ділимо на 22/5):

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ | 1/5 | 7/5 \end{array} .$$

На останньому кроці множимо третій рядок на 1/5 та 1/7 і додаємо утворені вектори (0;0;1/5;3/5) і (0;0;7/5;21/5) до першого та другого рядка:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} , \text{ тобто отримуємо систему рівнянь}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3 \end{cases} , \text{ розв'язками якої є числа } x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Якщо під час обчислень у схемі Гауса деякий рядок повністю стає нульовим (0 0 0 | 0), то це є ознакою того факту, що система має безліч

розв'язків.

Якщо ж цей рядок стає нульовим за винятком вільного члена

$(0 \ 0 \ 0 \mid b_i \neq 0)$, то система розв'язків не має.

Відповідь: $(-2; 1; 1)$.

Контрольні запитання

1. Які методи обчислення визначників третього порядку ви знаєте?
2. Запишіть формули Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними.
3. Які переваги метода Гауса при розв'язування систем рівнянь?