13 Елементи динаміки системи

(тема 1.3.5)

План

1. Механічна система.
2. Рівняння поступального руху твердого тіла.
3. Рівняння обертального руху твердого тіла.
4. Моменти інерції для однорідних тіл.
5. Маховий момент.

Механічною системою матеріальних точок називають, сукупність матеріальних точок, певним способом зв'язаних між собою. Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок. Сили взаємодії точок даної системи називають внутрішніми; сили, з якими діють на дану систему Інші точки, що не належать до цієї системи,— зови і ш н іми.

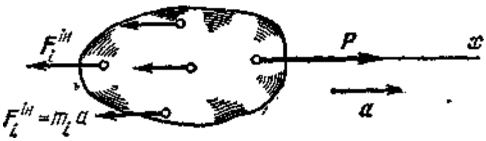

Рис. 17.1

Нехай тверде тіло, маса якого *m,* під дією сили *P* рухається поступально з прискоренням *a* (рис, 17.1). Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок, що мають маси по m_i кожна, і застосуємо принцип д'Аламбера (зазначимо, що внутрішні сили до рівняння рівноваги не входять, бо за третім законом Ньютона їх сума для системи в цілому дорівнює нулю). До кожної матеріальної точки прикладемо силу інерції $F_i^{ін} = -m_i a$ і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad P - \sum F_i^{ін} = 0,$$

звідки

$$P = \sum F_i^{ін} = \sum (m_i a)$$

Через те що в поступальному русі всі точки тіла мають однакові прискорення, то *a* можна винести за знак суми, тобто

$$P = a \sum m_i = am$$

Відповідно до другого закону Ньютона, вектори сили *P* і прискорення « збігаються за напрямом, тому

$$P = ma.$$

Це і є рівняння поступального руху твердого тіла. Воно нічим не відрізняється ВІД основного рівняння динаміки точки, отже, *всі формули динаміки точки застосовні до тіла, яке рухається поступально.*

Нехай тверде тіло під дією системи сил обертається навколо нерухомої осі г з кутовим прискоренням в (рис. 17.2). Розіб'ємо це тіло на ряд матеріальних точок, маса кожної з яких m_i і застосуємо принцип д'Аламбера. До кожної матеріальної точки прикладено дотичну І нормальну сили інерції. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_z = 0, \quad \sum M_z(P_i) - \sum M_z\left(F_{ni}^{\text{ін}}\right) = 0.$$

Моменти реакцій підшипника, а також сили $F_{ni}^{\text{ін}}$відносно осі z дорівнюють нулю, бо лінії дії цих сил перетинають вісь. Суму моментів зовнішніх сил відносно осі обертання називають обертаючим моментом. Тоді

$$\sum M_z(P_i) = T = \sum M_z\left(F_{ti}^{\text{ін}}\right) = \sum(m_i r_i \varepsilon r_i) = \varepsilon \sum(m_i r_i^2)$$

Вираз $\sum(m_i r_i^2)$називають моментом Інерції тіла відносно о с і і позначають ,j:

$$J = \sum(m_i r_i^2)$$

Момент інерції тіла відносно осі — це сума добутків мас матеріале- них точок, які утворюють це тіло, на квадрат відстаней їх до цієї осі.

В результаті маємо формулу

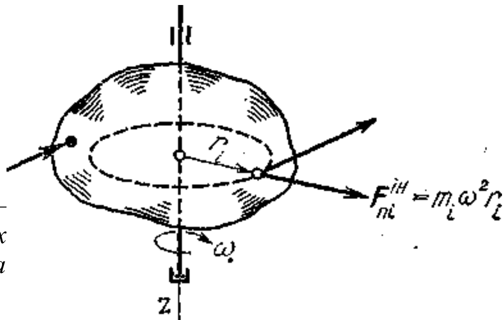

Рис. 17.2

,

$$T = J\varepsilon,$$

яку називають *рівнянням обертального руху твердого тіла.* У цій формулі j - момент Інерції тіла відносно осі обертання. Пояснимо докладніше нове поняття моменту інерції тіла.

Одиниця моменту інерції:

$$[J] = [mr^2] = [m][r^2] = \text{кг} \times \text{м}^2$$

Розглянемо такий приклад, Однаковим кулям, зображеним на рис. 17.3 треба надати однакове кутове прискорення ε. Оскільки $r_1 > r_2$, то $J_1 > J_2$

На досліді І з рівняння обертального руху можна переконатися в тому, що для надання цим системам однакового кутового прискорення е треба прикласти різні обертаючі моменти:

$$T'/T'' = J_1/J_2.$$

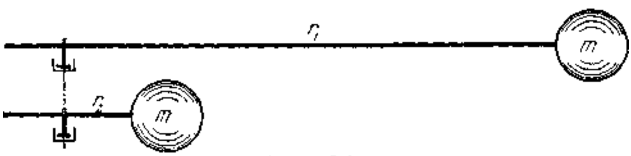

Рис. 17.3

$$T' = J_1\varepsilon, \; T'' = J_2\varepsilon$$

Розділимо перше рівняння на друге:

Виходить, чим більший момент інерції тіла, тим більший обертаючий момент треба прикласти, щоб надати тілу задане кутове прискорення. З викладеного видно, що момент Інерції для обертального руху має таке саме значення, як маса для поступального руху, отже, *момент інерції — це міра інертності обертового тіла.*

Для прикладу обчислимо момент Інерції тонкого однорідного суцільного диска радіусом /?, завтовшки з і масою *m* відносно осі, яка проходить через центр диска *O* і перпендикулярна до його площини (рис. 17.4). Розіб'ємо диск на елементарні кільця змінного радіуса *r,* що мають ширину *dr* і товщину s. За означенням, момент Інерції такого кільця

$$dJ = d\sum(m_i r^2) = r^2 d\sum m_i = r^2 dm = r^2 2\pi r dr s\rho = 2\pi s\rho r^3 dr$$

,

де *р* — густина матеріалу диска. Візьмемо суму моментів інерції усіх елементарних кілець, тоді момент інерції диска

$$J = \int_0^R 2\pi s\rho r^3 dr = 2\pi s\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi s\rho \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \pi s\rho \frac{R^4}{2}$$

Оскільки маса диска $m = \pi R^2 s\rho$, то

$$J = m\frac{R^2}{2}$$

що й потрібно було довести. Неважко зрозуміти, що момент інерції однорідного суцільного прямого кругового циліндра радіусом R і масою *m* будь-якої висоти можна обчислити за тією са
мою формулою. Для цього досить уявно весь циліндр порізати площинами, паралельними основі, на тонкі диски і взяти суму моментів Інерції усіх дисків.

Моменти Інерції для деяких інших однорідних тіл мають такі вирази, подані тут без доведень:

1) куля, маса якої *m* І радіус R, відносно діаметра

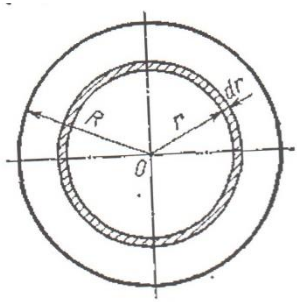

Рис. 17.4

$$J = \frac{2}{5}mR^2$$

2) тонкий стержень m, завдовжки *l* відносно осі, яка проходить перпендикулярно до стержня через його кінець:

$$J = ml^2/3$$

3) тонка сферична оболонка масою m, радіусом R відносно діасментра

$$J = 2mR^2/3$$

4) порожнистий вал масою m з зовнішнім радіусомR і радіусом отвору r відносно осі

$$J = m(R^2 + r^2)/2$$

Момент інерції J_z тіла відносно осі z, паралельної центральній (що проходить через центр ваги C тіла), дорівнює центральному моменту інерції J_C, доданому до добутку маси тіла на квадрат відстані *a* між цими осями:

$$J_z = J_C + ma^2$$

З цієї формули виходить, що усіх моментів інерції тіла відносно паралельних осей найменшим буде момент інерції відносно центральної осі, тобто центральний момент інерції. Іноді момент інерції визначається за формулою

$$J = mr_i^2$$

де r_i - радіус тіла;

$$r_i = \sqrt{J/m}$$

Фізичний зміст радіуса Інерції полягає в такому: якщо масу тіла зосередити в одній точці (таку масу називають зведеною) і розмістити її від осі обертання на відстані, яка дорівнює радіусу інерції, то момент інерції зведеної маси дорівнюватиме моменту інерції даного тіла відносно тієї самої осі. Подвоєний радіус інерції називають діаметром інерції:

$$D_i = 2r_i$$

На практиці іноді замість моменту Інерції користуються поняттям махового моменту GD_i^2

Маховим моментом *називають добуток сили тяжіння О обертового тіла на квадрат його діаметра інерції.*

Одиниця махового моменту

$$[GD_i^2] = [G] \times [D_i^2] = H \times \text{м}^2$$

Між маховим моментом і моментом Інерції існує проста залежність

$$GD_i^2 = mg(2r_i)^2 = 4gmr_i^2$$

або

$$GD_i^2 = 4gJ = 39{,}24J$$

.

Питання для самоконтролю

1. Що таке механічна система ?
2. Рівняння поступального руху
3. Яка формула рівняння обертального руху ?
4. Що таке маховий момент?