Тема 1.5. Аналітична геометрія

1.5.1. Предмет і методи аналітичної геометрії. Метод координат. Поняття рівняння лінії на площині.

1.5.2. Застосування рівнянь прямих до дослідження їх взаємного розташування.

1.5.3. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

1.5.4. Застосування властивостей кривих другого порядку до розв’язування прикладних задач.

1.5.1. Предмет і методи аналітичної геометрії. Метод координат. Поняття рівняння лінії на площині.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами.

Для застосування методів алгебри до розв’язування задач геометрії встановлюється зв’язок між геометричним об’єктом та числами. Способом встановлення такого зв’язку є метод координат, який першим систематично використовував французький математик Рене Декарт (1596–1650).

При цьому методі найпростішому геометричному образу – точці ставиться у відповідність упорядкована множина чисел – координат цієї точки. Більш складні геометричні образи розглядають як множину точок, що задовольняє певним умовам. Ці умови зв’язують координати точок у відповідне рівняння.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об’єкта.

Отже, основним методом аналітичної геометрії є **метод координат**.

Основні та найпростіші задачі аналітичної геометрії

В аналітичній геометрії вивчаються дві **основні задачі:**

1. Складання рівняння геометричного об’єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.

2. Дослідження властивостей геометричного об’єкта за його рівнянням і побудова його.

Аналітична геометрія вивчає геометричні об'єкти за допомогою алгебри. Тому кожному геометричному об'єкту відповідає деяке рівняння. Один з основних об'єктів - це лінія.

Рівняння $F(x,y)=0$ називається рівнянням деякої лінії L в заданій системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, яка лежить на лінії L і не задовольняють координати ніякої точки, що не лежить на цій лінії.

1.5.2. Застосування рівнянь прямих до дослідження їх взаємного розташування.

Найбільш важливим для подальшого є рівняння прямої лінії.

Прямі лінії на площині можна задати у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом, у загальному вигляді або в канонічному. Вони можуть бути паралельними, перетинатися або співпадати.

Кутом φ (Рис.1.5.1) — між двома прямими L_1 і L_2 - називається такий найменший кут, на який треба повернути першу пряму навколо точки перетину до її і співпадання з другою прямою L_2 проти ходу годинникової стрілки.

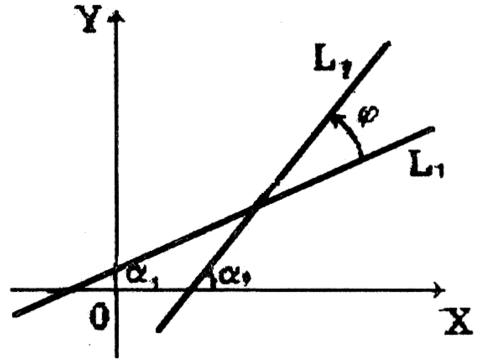

Рис. 1.5.1

З рисунку 1.5.1 видно, що

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Розглянемо умови паралельності і перпендикулярності прямих, заданих різними способами та навчимося визначати кут між прямими.

1. Якщо прямі задані в загальному вигляді: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

- кофіцієнти при відповідних координатах пропорційні у випадку паралельності прямих, тобто виконується рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;

- скалярний добуток їх нормальних векторів дорівнює нулю у випадку перпендикулярності прямих, тобто $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$;

- якщо прямі перетинаються, то кут між ними знаходиться з формули $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 +}}$.

2. якщо прямі задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$, то

- вони паралельні, якщо $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$;

- вони перпендикулярні, якщо $l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0$;

- кут між ними обчислюється по формулі $\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$.

3. Якщо прямі задано у вигляді рівнянь з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$, та $y=k_2x+b_2$, то

- вони паралельні, якщо $k_1=k_2$;

- вони перпендикулярні, якщо $k_1k_2=-1$, або $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

Якщо прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2=0$ перетинаються в деякій точці, то точка перетину належить кожній з цих прямих і її координати є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$.

Відстань d від точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямої $Ax+By+C=0$ можна знайти, користуючись формулою $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Задача 1.5.1.

Знайти паралельні або перпендикулярні прямі серед даних пар прямих:

$$6x-15y+7=0 \quad \text{і} \quad 10x+4y-1=0,$$
$$5x-7y-4=0 \quad \text{і} \quad 3x+2y-13=0,$$
$$x-2y+1=0 \quad \text{і} \quad 2x-4y-1=0.$$

Для першої пари прямих $A_1A_г + B_tB_2 = 6 \cdot 10 + (-15) .4 = 0$, тобто виконано умову перпендикулярності. Прямі перпендикулярні. Для другої пари прямих $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$A_1B_2 + B_1B_2 = 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 \neq 0.$$

Отже, прямі другої пари не паралельні і не перпендикулярні.

Для третьої пари прямих

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто прямі паралельні.

1.5.3. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

1. **Коло**

В аналітичній геометрії лінією на площині називають всі точки площини, координати яких задовільняють F(x, y) = 0, де F(x, y) – многочлен степені n.

Степінь многочлена n називають порядком лінії.

Таке рівняння має вигляд $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Криві другого порядку – це всі точки площини, координати яких задовільняють F(x, y) = 0, де F(x, y) – многочлен другого степеня.

Колом (Рис.1.5.2) називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Рівняння кола з центом у точці $O(a;b)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

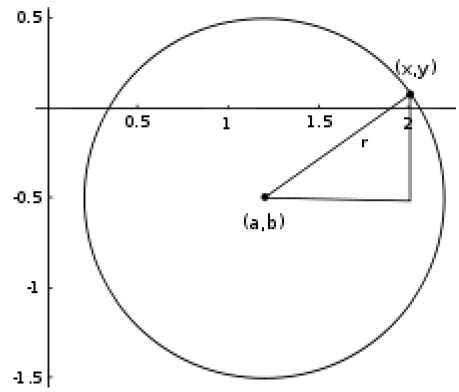

Рис. 1.5.2

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D - сталі коефіцієнти.

Рівняння кола в загальному вигляді записують так:

$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$

де A, B, C і D – сталі коефіцієнти.

Еліпсом (рис. 1.5.3) називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

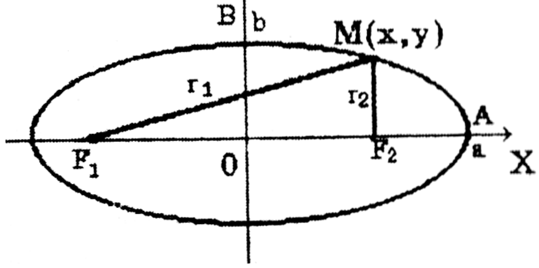

Рис. 1.5.3

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі $\boldsymbol{Ox}$, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b),$$

де $\boldsymbol{a}$ – довжина великої півосі; $\boldsymbol{b}$ – довжина малої півосі/

Залежність між параметрами $\boldsymbol{a,b,c}$ виражається співвідношенням:

$$a^2-b^2=c^2.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані ***2c*** до великої осі ***2a***:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Якщо центр симетрії еліпса знаходиться у точці $C(x_0;y_0)$, а осі симетрії паралельні осямOx,Oy, то рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Гіперболою (Рис. 1.5.4) називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називається фокусами, є величина стала ***(2a),*** менша за відстань між фокусами ***(2c).***

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі на осі $\boldsymbol{Ox}$, має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ де $\boldsymbol{a}$ – довжина дійсної півосі; $\boldsymbol{b}$ – довжина уявної півосі

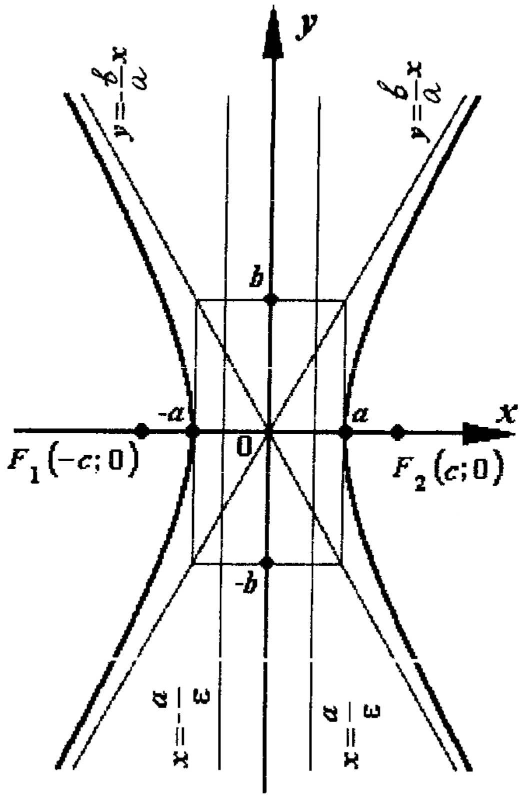

Рис. 1.5.4

Залежність між параметрами ***a, b, c*** виражається співвідношенням:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\ (-c;0)$, $F_2\ (c;0)$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі ***Oy*** (Рис. 1.5.5) у точках $F_1\ (0;-c)$, $F_2\ (0;c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$, а рівняння директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$

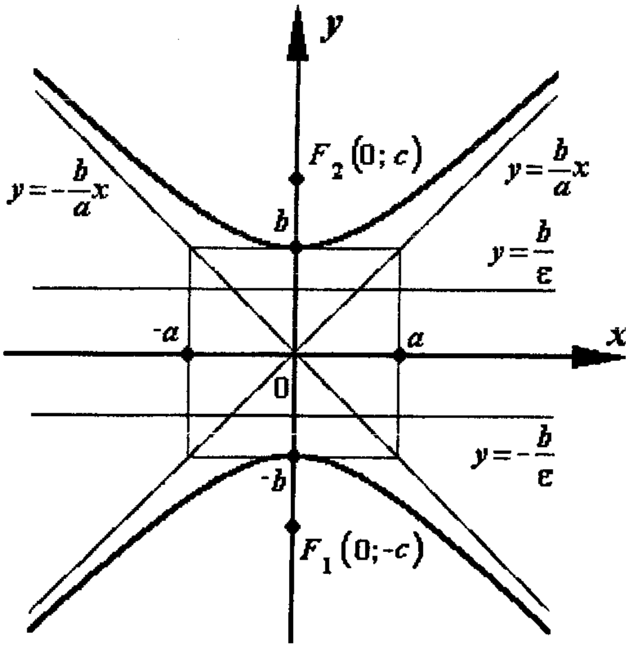

Рис. 1.5.5

Якщо дійсна та уявна півосі рівні ***(a=b),*** то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Рівняння рівносторонньої гіперболи з фокусами на осі ***Oy*** має вигляд:

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться у точці $C(x_0;y_0)$, а осі симетрії паралельні осям ***Ox, Oy***, то рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1.$$

Параболою (Рис. 1.5.6) називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox, має вигляд:

$$y^2 = 2px,$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то вітки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то вітки напрямлені вліво.

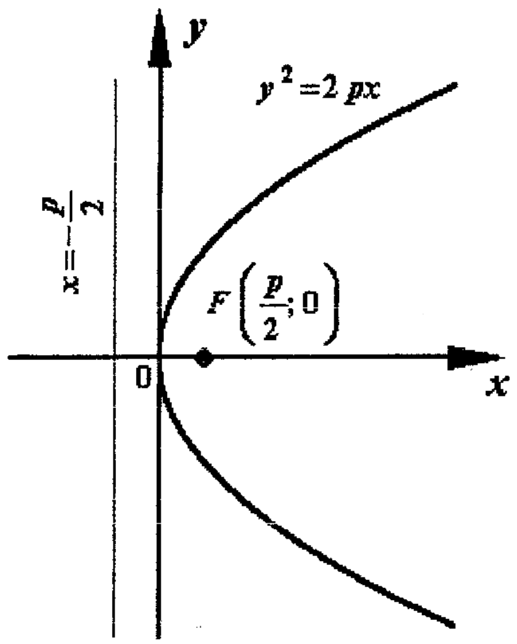

Рис. 1.5.6

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy, має вигляд:

$$x^2 = 2py.$$

Якщо $p > 0$, то вітки направлені вгору, якщо $p < 0$, то вітки направлені вниз. Фокус такої параболи є точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$.

1.5.4. Застосування властивостей кривих другого порядку до розв'язування прикладних задач.

Задача 1.5.2.

Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$.

Розв'язання.

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8$.

Доповнивши двочлени $x^2 - 8x$ і $y^2 - 10y$ до повних квадратів, дістанемо:

$$x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2\cdot 5y + 5^2 = 8 + 4^2 + 5^2$$

або $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49$.

Звідки $a = 4$, $b = 5$, $R = 7$, тобто центр кола – точка ***(4;5)***, а радіус дорівнює ***7***.

Задача 1.5.3.

Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ox***, якщо велика ось дорівнює ***12***, а відстань між фокусами дорівнює ***8***.

Розв'язання.

З умови впливає, що $a = 6$ і ***c=4***.

Підставивши значення a і b в рівняння еліпса, дістанемо $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Задача 1.5.4.

Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо довжина її дійсної осі дорівнює ***16***, і гіпербола проходить через точку

(-10;-3).

Розв'язання.

За умовою ***2a=16***, тобто ***a=8***. Підставивши в рівняння (8.1) значення **a=8** і координати даної точки, дістанемо:

$$\frac{(-10)^2}{8^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1;\quad \frac{100}{64}-\frac{9}{b^2}=1;\quad \frac{9}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16};\quad b^2=16.$$

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Задача 1.5.5.

За даним рівнянням параболи $y^2=-8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси.

Розв'язання.

З рівняння параболи $y^2=-8x$ маємо $2p=-8$, $\frac{p}{2}=-2$.

Парабола симетрична відносно осі ***Ox***, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, тобто $F(-2;0)$. Рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$, тобто

x=2.

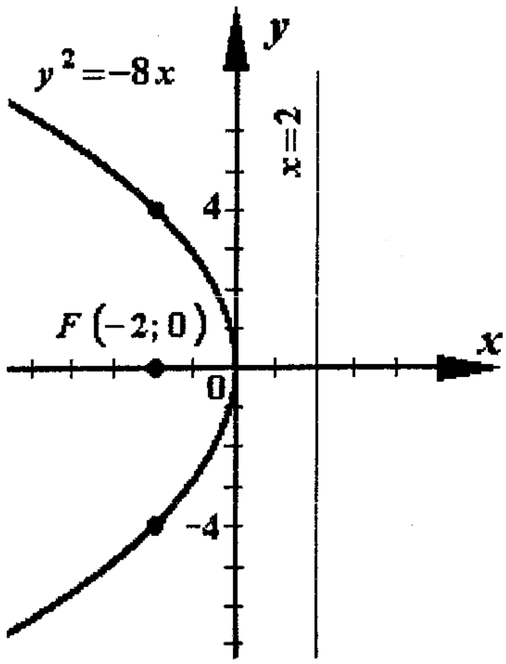

Рис. 1.5.7

Шукана парабола симетрична відносно осі $\boldsymbol{Ox}$, її вітки напрямлені вліво (Рис. 1.5.7). Знайдемо точку, що лежить на параболі. Нехай $\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{y^2 = -8 \cdot (-2) = 16}$, $\boldsymbol{y = \pm 4}$.

Контрольні запитання

1. Що є предметом вивчення аналітичної геометрії?
2. Які умови паралельності і перпендикулярності прямих?
3. Дайте визначення кола, еліпса, гіперболи і параболи.