Тема 2.2. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

2.2.1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних
2.2.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних
2.2.3. Екстремальні значення функції багатьох змінних

Для чого треба впроваджувати функції багатьох змінних?Як диференціюють такі функції? Як визначають екстремальні значення цих функцій?Яке геометричне застосування функції багатьох змінних?

На практиці часто доводиться зустрічатись з ситуаціями, коли функціональна залежність вимагає врахування більше ніж одного аргументу. Наприклад, попит на товар, як правило, залежить не тільки від його ціни, але й від ціни конкуруючого товару, добробуту покупців та ін., об'єм випуску продукції визначається вкладеними фінансовими, людськими, технологічними ресурсами. Дослідження таких залежностей вимагає подальшого розвитку нашого математичного апарату – запровадження **функцій багатьох змінних**.

2.2.1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних

Нехай $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$ - елемент n-вимірного простору R^n і кожному такому елементу з деякої множини X поставлено у відповідність певне число u , тоді <u>*кажуть*</u>, що задано **функцію** n **-змінних** $u=f\left(M\right)=f(x_1,\ldots,x_n)$**.**

При цьому $x_1,\ldots,x_n$ - <u>*називаються*</u> **незалежними змінними** або **аргументами**, u **-залежною змінною**, символ f означає функціональну залежність, X **-область** визначення функції. Надалі, в основному обмежимось розглядом **функції двох змінних** $u=f(x_1,x_2)$ або $z=f(x,y)$, що дозволяє аналізувати основні властивості функцій багатьох змінних, уникаючи при цьому надмірної громіздкості у міркуваннях. В такому випадку X є підмножина координатної площини Oxy **околом точки** $M_0(x_0,y_0)$ – є круг, для якого ця точка – внутрішня (рис 7.1.1).

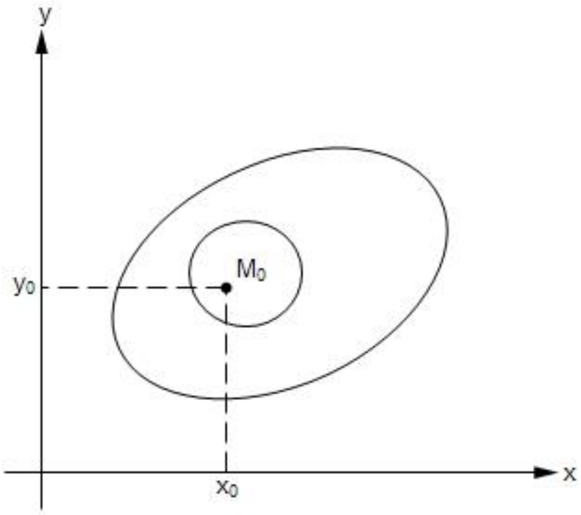

Рис. 2.2.1.

Приклад 2.2.1. Нехай функцію $z = f(x, y)$ задано рівністю $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$. Тоді її областю визначення буде множина точок на координатній площині, координати яких задовольняють нерівність $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$ або, що те ж саме $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$. Це є множина точок, обмежених еліпсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$включно зі самим еліпсом (рис. 2.2.2):

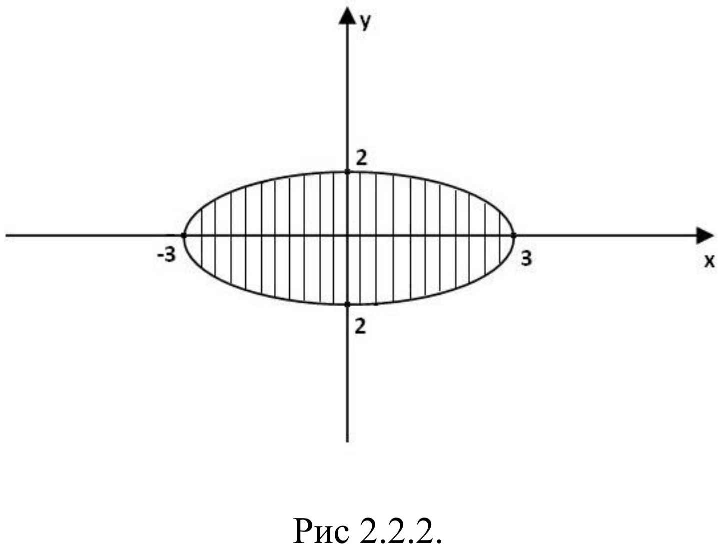

Рис 2.2.2.

Відзначимо, що фіксуючи значення одного з аргументів, ми отримуємо з функції $z = f(x, y)$ дві функції однієї змінної: $f_1(x) = f(x, y_0)$ та $f_2(x) = f(x_0, y)$.

Графіком функції $z = f(x, y)$ *<u>називається</u>* множина точок тривимірного простору $M(x, y, f(x, y))$, або, що те ж саме, поверхня у тривимірному просторі, задана рівнянням $z = f(x, y)$ (рис. 2.2.3).

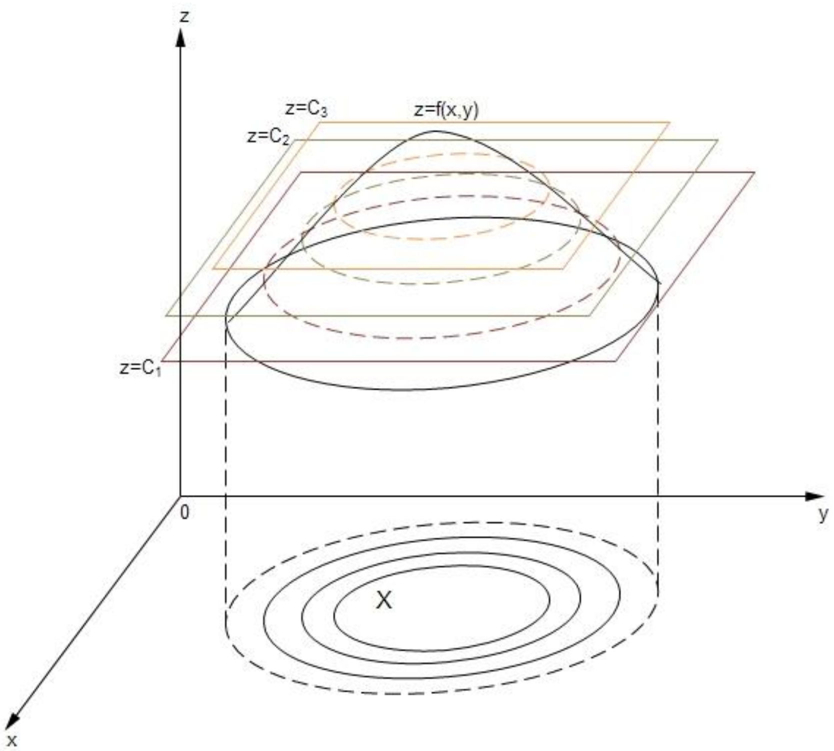

Рис. 2.2.3

Приклад 2.2.2 . Так, для функції $z^2 = x^2 + y^2$ відповідним графіком є параболоїд (рис. 2.2.4).

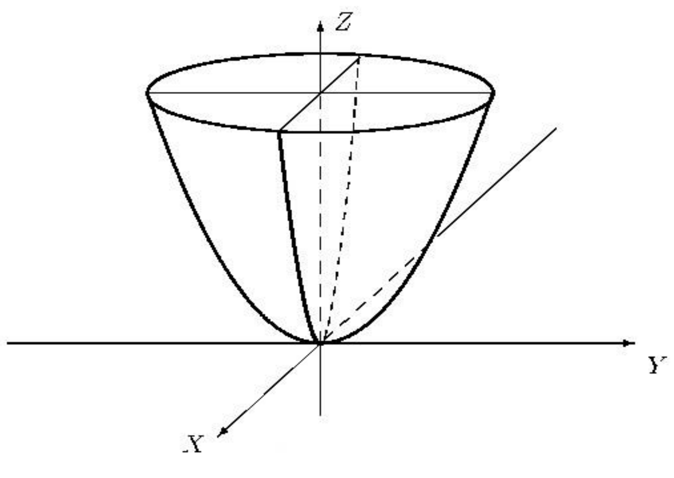

Рис. 2.2.4

Лінією рівняння функції двох змінних $z = f(x, y)$ <u>*називається*</u> множина всіх таких точок на площині, для яких $f\left(x, y\right) = C$ (рис. 2.2.5).

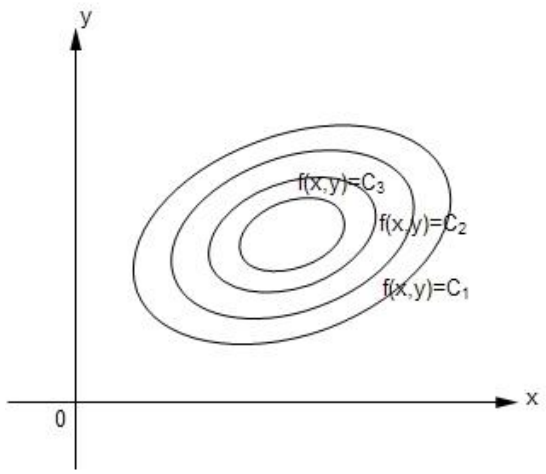

Рис.2.2.5

Прикладами ліній рівняння є ізотерми та ізобари на кліматичних мапах.

Приклад 2.2.3. Для заданої вище функції лініями рівня $x^2 + y^2 = \text{const}$ є концентричні кола з центром у початку координат.

2.2.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних

Якщо надати аргументам x та y функції $z = f(x, y)$ приростів Δx та Δy відповідно, то отримаємо **частинні прирости** цієї функції:

$$\Delta_x z = f\left(x + \Delta x, y\right) - f(x, y)\,;\ \Delta_y z = f\left(x, y + \Delta y\right) - f(x, y)\,;$$

та її **повний приріст**

$$\Delta z = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f(x, y)\,.$$

Частинними похідними такої функції <u>*називають*</u> границі відношень її частинних приростів до приростів відповідних аргументів:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}\,.$$

Для таких частинних похідних використовуються, також, позначення: f_x', z_x', f_y', $\frac{\partial z}{\partial y}$, z_y'. З частинними похідними функції тісно пов'язані її **частинні диференціанали** $d_x f = f_x' dx$, $d_y f = f_y' dy$, та її **повний диференціал** $df = f_x' dx + f_y' dy$.

Аналогічно до функції однієї змінної, **повний диференціал є головною, лінійною відносно приростів аргументів частиною повного приросту функції**:

Якщо повний приріст функції може бути представлений у вигляді $\Delta z = df + \alpha dx + \beta dy$, де α, β - нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функція <u>*називається*</u> **диференційовною.**

Необхідною умовою диференційовності функції є існування її частинних похідних.

Достатня умова диференційовності функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ полягає в тому, що її частинні похідні мають існувати в деякому околі цієї точки і бути неперервними в самій цій точці.

При знаходженні частинної похідної функції по одному з її аргументів решту аргументів вважають сталими величинами і використовують звичайні правила диференціювання та таблицю похідних.

Приклад 2.2.5. Знайдемо частинні похідні функції $z = x^2 + 2y^2 + x - y + 1$. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2\right)'_x + 2\left(y^2\right)'_x + \left(x\right)'_x - \left(y\right)'_x + \left(1\right)'_x = 2x + 0 + 1 - 0 + 0 = 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2\right)'_y + 2\left(y^2\right)'_y + \left(x\right)'_y - \left(y\right)'_y + \left(1\right)'_y = 0 + 2 \cdot 2y + 0 - 1 + 0 = 4y - 1.$$

Приклад 2.2.6. Знайдемо частинні похідні функції $z = y^x$. Зауважимо, що при знаходженні частинної похідної по x функція розглядається як показникові і, відповідно,

$$\frac{z}{\partial x} \quad y^x \ln y.$$

При диференціюванні ж по y функція являє собою степеневу і тому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot y^{x-1}.$$

Специфічним є **правило диференціювання складеної функції багатьох змінних**, яке ми розглянемо, знову ж таки, на прикладі функції двох змінних $z = f(x, y)$:

1) Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ то $\dfrac{dz}{df} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial f} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial f}$;

2) Якщо $x = x(u, v)$, то $y = y(u, v)$, $\dfrac{dz}{du} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$.

Приклад 2.2.7. Знайдемо частинні похідні функції $z = x + y$, якщо $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$. В цьому випадку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \frac{dx}{dt} = 2\cos t \cdot (-\sin t), \frac{dy}{dt} = 2\sin t \cdot \cos t.$$

Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 1 \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) + 1 \cdot 2\sin t \cdot \cos t = 0.$$

Приклад 2.2.8. Знайдемо частинні похідні функції $z = x^2 + y^2$, якщо $x = u + v, y = u - v$. Тут

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\,, \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \frac{\partial y}{\partial v} = -1.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot 1 = 2(u+v) + 2(u-v) = 4u\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot (-1) = 2(u+v) - 2(u-v) = 4v\,.$$

Розглянуті вище частинні похідні *називають* також **частинними похідними першого порядку**. Аналогічно до попереднього, частинні похідні вищих порядків визначаються як похідні похідних нижчих порядків. Наприклад, для функції $z = f(x, y)$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,.$$

Якщо для похідної вищого порядку послідовності диференціювання виконуються по різних аргументах то вона *називається* **мішаною**. Для неперервних мішаних похідних справедлива теорема Шварца: **значення мішаної похідної залежить від порядку диференціювання.**

Так, наприклад,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,,$$

якщо ці похідні неперервні.

Приклад 2.2.9. Знайдемо частинні похідні другого порядку функції

$\frac{\partial}{\partial} = \qquad , \frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot y^{x-1}$, тому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y^x \ln y\right)'_x = y^x \ln^2 y\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^x \ln y\right)'_y = \left(y^x\right)'_y \ln y + y^x \left(\ln y\right)'_y = xy^{x-1}\ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = y^{x-1}(x\ln y + 1)\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x \cdot y^{x-1}\right)'_y = x \cdot (x-1) \cdot y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x \cdot y^{x-1}\right)'_x = \left(x\right)'_x \cdot y^{x-1} + x \cdot \left(y^{x-1}\right)'_x = y^{x-1} + xy^{x-1} \cdot \ln y = y^{x-1}(1 + x \ln y).$$

Очевидно, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2.2.3. Екстремальні значення функції багатьох змінних

Функція багатьох змінних $u = f(M)$ має максимум **(**мінімум**)** в точці M_0 якщо існує такий окіл M (сукупність точок, відстань яких до M_0 менша за певне додатне число a), для всіх точок M якого виконується нерівність $f\left(M\right) < \left(>\right) f(M_0)$ при M відмінному від M_0.

Приклад**2.2.10.** Розглядаючи функцію $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$, відзначаємо, що $z = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 2$. Тобто $z \geq 2$ при всіх значеннях x та y, причому найменше значення функції $z = -2$ досягається при $x = -1, y = 1$.

Екстремумами *називають* максимуми та мінімуми функції багатьох змінних її, а точки, в яких вони мають місце – точками екстремуму.

Критичними точкам для функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *називають* точки, в яких всі її частинні похідні рівні нулю або не існують.

Приклад **2.2.11.** Знайдемо стаціонарні точки функції з попереднього прикладу $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M(-1;1)$ є єдиною стаціонарною точкою даної функції.

Приклад 2.2.12. Знайдемо стаціонарні точки функції $z = x^2 - y^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M(0;0)$ є єдиною стаціонарною точкою даної функції.

Необхідна умова існування екстремуму функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ полягає в тому, що точка «підозріла на екстремум» обов'язково повинна бути критичною.

Таким чином, при знаходженні екстремумів функції багатьох змінних перш за все визначають її критичні точки. Проте визначення того, чи є критична точка точкою екстремуму, і якщо є – то якого саме, виявляється більш складною процедурою, ніж для функції однієї змінної.

Наведемо **достатні умови екстремуму для функції двох змінних**:

Теорема

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - критична точка функції $z = f(x, y)$, в деякому околі якої її другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ неперервні, якщо $a_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), a_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), a_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$ то:

1) ***При $\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11} > 0 \end{cases}$, точка M_0 є точкою максимуму;***
2) ***При $\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11} < 0 \end{cases}$, точка M_0 є точкою мінімуму;***
3) ***При $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ точка M_0 не є точкою екстремуму;***
4) ***В інших випадках функція вимагає поглибленого дослідження, на методах якого ми зупинятись не будемо.***

Приклад 2.2.13. Дослідимо стаціонарну точку функції .

Оскільки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0\,, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0\,, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0\,.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,.$$

Отже, в точці дана функція має локальний мінімум. В той же час, оскільки функція має неперервні похідні, то цей локальний мінімум є також глобальним, що було показано у прикладі 10.

Приклад 2.2.14. Дослідимо стаціонарну точку $M(0;0)$ функції $z = x^2 - y^2$. Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y\ ,$$

то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0\,, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0\,, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,,$$

і відповідний визначник

$$\Delta == \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0\,.$$

Отже, точка не є екстремальною. І, взагалі, не має точок екстремуму.

Для функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ питання визначення характеру критичної точки $M_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ вимагає дослідження знаковизначеності квадратичної форми з матрицею $\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, де a_{ij} є значення похідної $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$ в точці M_0. Якщо така квадратична форма виявляється додатновизначеною, то маємо мінімум, від'ємновизначеною – максимум, знаконевизначеною – екстремуму немає.

Специфічним для функції багатьох змінних є поняття **умовного екстремуму**, яке виявляється дуже важливим в економічних дослідженнях.

Нехай, наприклад, **аргументи функції** $z = f(x, y)$ **задовольняють умову** $\varphi(x, y) = 0$, і стоїть задача знаходження **умовних екстремумів,** тобто таких точок, що належать лінії l (з рівняння $\varphi(x, y) = 0$), в яких значення функції $f(x, y)$ більші (менші) ніж в оточуючих точках цієї лінії. В найпростіших випадках вдається виразити з рівності $\varphi(x, y) = 0$ аргумент y через аргумент $x(y = y(x))$ і звести, таким чином задачу до знаходження екстремумів функції однієї змінної $u = f(x, y(x))$.

Приклад 2.2.15. Якщо постає задача пошуку екстремальних значень функції $z = x + y$ на колі $x^2 + y^2 = 1$, то це і є задача пошуку умовного екстремуму вказаної функції за наявності рівняння зв'язку (між невідомими) $x^2 + y^2 = 1$.

В інших випадках користуються **методом Лагранжа знаходження умовного екстремуму**:

Алгоритм	***1) Записується функція Лагранжа*** $l(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$***;*** ***2) Визначаються критичні точки функції Лагранжа з системи рівностей***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

3) ***Обчислюється значення визначника*** $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix}$ ***в кожній з критичних точок, якщо значення додатне – маємо точку максимуму, якщо від'ємне – мінімуму.***

Приклад 2.2.16. Визначимо умовні екстремуми функції за умови . Рівняння зв'язку може бути переписано у вигляді $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Таким чином, функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знайдемо її стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda \cdot 2y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь маємо $x = -\dfrac{1}{2\lambda}, y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$, тобто

$2\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Дослідимо отримані таким чином стаціонарні точки $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Оскільки $\varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y$, $L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = L''_{yx} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$, то визначник Δ має вигляд:

$$\Delta(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -16\lambda xy.$$

У точці M_1 $\Delta(M_1) = 4\sqrt{2}$, отже в цій точці має місце умовний максимум $z_{\max} = \sqrt{2}$, а в точці M_2 $\Delta(M_2) = -4\sqrt{2}$ - умовний мінімум $z_{\min} = -\sqrt{2}$.

Для знаходження **найбільшого та найменшого значень функції в замкненій області функції в замкненій області** визначають її критичні точки, вибирають з них ті, які належать області та обчислюють значення функції в цих точках, після чого знаходять найменше та найбільше значення функції на лінії, що обмежує область. З отриманих значень вибирають найбільше та найменше.

Приклад 2.2.17. Знайдемо найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$. Зобразимо спершу цю область на координатній площині(рис. 7.3.1):

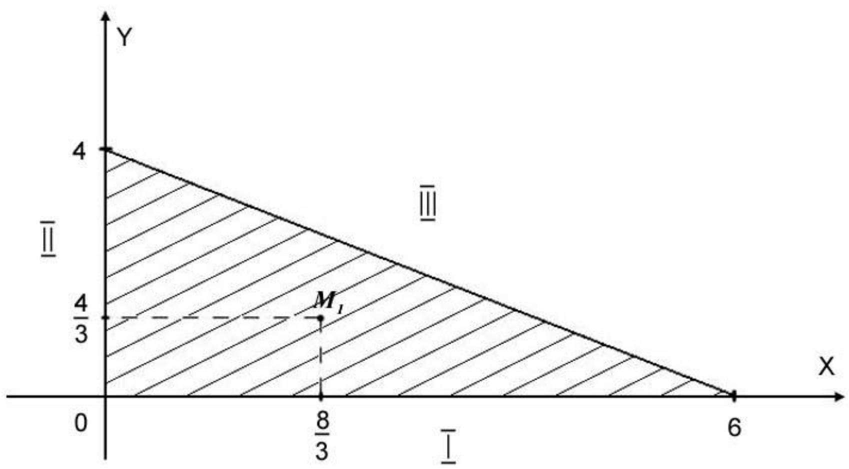

Рис 2.2.6

Знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є $x = {}^{8}\!/_{3},\ y = {}^{4}\!/_{3}$. Отже, єдина стаціонарна точка це $M_1\left({}^{8}\!/_{3};{}^{4}\!/_{3}\right)$ і вона належить області, $z\left(M_1\right) = -{}^{16}\!/_{3}$.

Межа області складається з трьох відрізків: I, II, III. Дослідимо функцію послідовно на кожному з них.

I. На цьому відрізку $y = 0,\ x \in [0;6]$, отже, досліджувана функція має вигляд $z_I = x^2 - 4x$. Проведемо дослідження як для функції однієї змінної:

$$z_I' = 2x - 4 = 0,\ x = 2.$$

Обчислимо значення на кінцях інтервалу $[0;6]$ - $z_I(0) = 0,\ z_I(2) = 4,\ z_I(6) = 12$. Таким чином, при знаходженні найменшого та найбільшого значень функції в області треба враховувати її значення у точках $M_2(0;0),\ M_3(2;0),\ M_4(6;0)$ -

$$z_I(M_2) = 0,\ z_I(M_3) = 4,\ z_I(M_4) = 12.$$

II. Тут $x = 0,\ y \in [0;4],\ z_{II} = y^2$. Оскільки $z_{II}' = 2y$, то маємо обчислити $z_{II}(0),\ z_{II}(4)$. Враховуючи , що значення функції в точці $M_2(0;0)$ вже обчислено,запровадимо лише одну нову точку $M_5(0;4), z_{II}\left(M_5\right) = 16.$

III. На цьому відрізку змінні пов'язані співвідношенням $2x + 3y = 12 = 0$, або, що те ж саме, $y = 4 - \dfrac{2}{3}x,\ z_{III} = \dfrac{19}{9}x^2 - \dfrac{40}{3}x + 16.$ Маємо

$$z_{III}' = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3},\quad z_{III}' = 0,\ x = \frac{60}{19}.$$

Враховуючи, що на кінцях цього відрізку , а саме, у точках M_4, M_5 значення функції вже обчислено, залишається врахувати, що у точці $M_6\left(\dfrac{60}{19};\dfrac{36}{19}\right), z_{III}\left(M_6\right) = -\dfrac{96}{19}.$ Порівнюючи отримані значення функції у шести «підозрілих точках», бачимо, що найменшим значенням функції в області є $-\frac{16}{3}$, яке досягається у точці $M\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$, найбільшим-16, яке досягається у точці $M_5(0;4)$.

Контрольні запитання

1. В яких задачах використовуються функції багатьох змінних? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте означення області визначення, границі та неперервності функції багатьох змінних. Що таке лінії рівня та графік для функції двох змінних?
3. Що таке частинні похідні функції багатьох змінних? За якими правилами їх знаходять?
4. Що таке частинні диференціали функції? Що таке повний диференціал і яке його практичне значення?
5. Як знаходять частинні похідні складеної функції багатьох змінних?
6. Що таке екстремуми функції багатьох змінних? Як визначають стаціонарні точки та точки екстремумів таких функцій?
7. Що таке умовний екстремум функції багатьох змінних і в чому полягає метод Лагранжа знаходження такого екстремуму?