План

1. Полярний момент інерції.
2. Формула полярного моменту інерції для круга і кілець.

9.3. Моменти інерції площі найпростіших геометричних фігур

Приклад 9.2

Визначити ***моменти інерції площі прямокутника***, ***паралелограма*** та ***квадрата відносно центральних осей Oz*** і ***Oy***, ***паралельних його сторонам***.

Розв'язання:

1. Для визначення ***<u>моменту інерції площі прямокутника відносно центральної осі Oz</u>*** (рис. 9.6) елементарною площадкою вважатимемо безмежно вузький прямокутник, паралельний осі ***Oz***, заввишки dy, завширшки b і площею $dF = b \cdot dy$. Тоді, згідно (9.10), маємо:

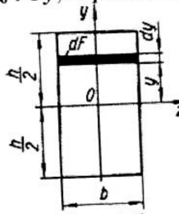

Рис. 9.6.

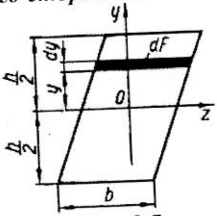

Рис. 9.7.

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2 \cdot b \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2 \cdot b \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot y^3 \right) \Bigg|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}. \qquad (9.16)$$

Для визначення ***<u>моменту інерції площі прямокутника відносно центральної осі Oy</u>*** елементарною площадкою вважатимемо безмежно вузький прямокутник, паралельний осі ***Oy***, заввишки dz, завширшки h і площею $dF = h \cdot dz$. Тоді, згідно (9.10), маємо:

$$J_y = \int_F z^2 \cdot dF = h \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 \cdot dz = 2 \cdot h \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 \cdot dz = 2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot z^3 \right) \Bigg|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{h \cdot b^3}{12}. \qquad (9.17)$$

2. Якщо всі смужки $dF = b \cdot dy$ перемістити паралельно осі ***Oz*** (рис. 9.7), відносно якої визначається момент інерції, то інтеграл J_z не зміниться. Тому, ***<u>момент інерції площі паралелограма висотою</u>*** h ***<u>відносно центральної осі Oz, паралельної основі довжиною</u>*** b, також буде рівний:

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3. \qquad (9.18)$$

3. ***<u>Момент інерції площі квадрата зі стороною</u>*** a ***<u>відносно центральних осей</u> Oz і Oy***, згідно (9.16) і (9.17), буде рівний: $J_z = J_y = \dfrac{a^4}{12}$. (9.19)

Приклад 9.3

Визначити ***момент інерції площі довільного трикутника $A_1B_1C_1$ відносно осі B_1z_1, яка проходить через основу B_1C_1*** (рис. 9.8, ***а***).

Розв'язання:

Виділимо на відстані y_1 від осі ***B_1z_1*** паралельну їй елементарну смужку довжиною z і висотою dy_1, яка має площу $dF = z \cdot dy_1$. Оскільки трикутник ***$A_1B_1C_1$*** подібний трикутнику ***A_1DE***, то

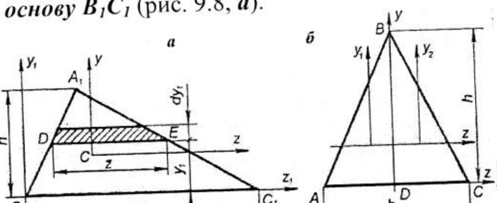

Рис. 9.8.

$\frac{z}{b} = \frac{h - y_1}{h}$, звідки $z = b \cdot \frac{h - y_1}{h}$ і $dF = \frac{b}{h} \cdot (h - y_1) \cdot dy_1$. Таким чином, ***момент інерції площі трикутника висотою*** h ***відносно основи довжиною*** b, буде:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y_1^2 \cdot (h - y_1) \cdot dy_1 = \frac{b}{h} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot h \cdot y_1^3 - \frac{1}{4} \cdot y_1^4 \right\} \Bigg|_0^h = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (9.20)$$

Використовуючи формули переходу (9.35), можна одержати ***момент інерції площі трикутника відносно головної центральної осі Cz, паралельної основі***:

$$J_z = J_{z_1} - a^2 \cdot F = \frac{b \cdot h^3}{12} - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot b = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (9.21)$$

Осьовий момент інерції рівнобедреного трикутника ABC (рис. 9.8, ***б***) ***відносно вертикальної осі Dy*** можна знайти як суму двох моментів інерції малих трикутників ***ABD*** і ***CBD***, для яких вісь ***Dy*** є паралельною центральній:

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} = \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} + \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} = \frac{h \cdot b^3}{96} + \frac{h \cdot b^3}{96} = \frac{h \cdot b^3}{48}. \quad (9.22)$$

Приклад 9.4

Визначити ***полярний момент інерції площі круга діаметром*** D ***(радіусом*** r***) відносно його центра, момент інерції площі круга відносно центральної осі*** а також ***полярний*** і ***осьові коефіцієнти раціональності кругового поперечного перерізу по жорсткості***.

Розв'язання:

При визначенні полярного моменту інерції площі круга виділимо елементарну площадку у вигляді безмежно тонкого кільця радіусом ρ завтовшки $d\rho$ (рис. 9.9). Площа такого елемента $dF = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$. Отже, ***полярний момент інерції площі круга діаметром*** D ***(радіусом*** r***) відносно його центра***:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \rho^4 \right) \Bigg|_0^r = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}. \quad (9.23)$$

Моменти інерції площі круга відносно центральних осей легко знайти, використавши формулу (9.12) — $J_p = J_z + J_y$. У наслідок симетрії $J_z = J_y$,

маємо,
$$J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot D^4. \quad (9.24)$$

Полярний коефіцієнт раціональності даного ***кругового поперечного перерізу по жорсткості***, згідно виразу (9.14), буде:

$$K_{п.р.ж.} = \frac{J_p}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{2}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{2} \cdot r^2 = \frac{1}{8} \cdot D^2. \quad (9.25)$$

Осьові коефіцієнти раціональності даного ***кругового поперечного перерізу по жорсткості***, згідно виразу (9.15), будуть:

$$K_{о.р.ж.} = \frac{J_{z(y)}}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4} \cdot r^2 = \frac{1}{16} \cdot D^2. \quad (9.26)$$

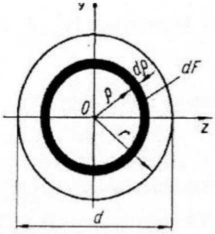

Рис. 9.9.

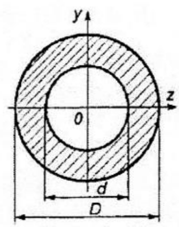

Рис. 9.10.

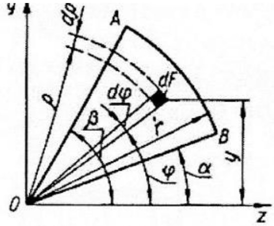

Рис. 9.11.

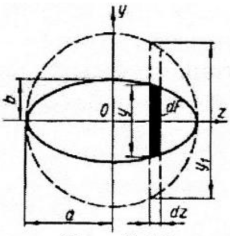

Рис. 9.12.

Приклад 9.5

Визначити ***полярний*** та ***осьовий моменти інерції площі кругового кільця (кільцевого перерізу) із зовнішнім діаметром*** D ***та внутрішнім діаметром*** d, а також ***полярний*** і ***осьові коефіцієнти раціональності кільцевого поперечного перерізу по жорсткості***.

Розв'язання:

<u>Полярний момент інерції площі кругового кільця (кільцевого перерізу)</u> (рис. 9.10) ***<u>із зовнішнім діаметром</u>*** D ***<u>та внутрішнім діаметром</u>*** d знайдемо як різницю полярних моментів інерції площ великого і малого кругів:

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}. \qquad (9.27)$$

Оскільки $J_p = J_z + J_y$, і в наслідок симетрії для кільцевого перерізу $J_z = J_y$, то ***<u>моменти інерції площі кругового кільця відносно центральних осей</u> Oz*** і ***Oy*** будуть:

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32} = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{64}. \qquad (9.28)$$

<u>Полярний коефіцієнт раціональності</u> даного ***<u>кільцевого перерізу по жорсткості</u>***, згідно виразу (9.14), буде:

$$K_{п.р.ж.} = \frac{J_p}{F} = \frac{\dfrac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}}{\dfrac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D^2 - d^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(D^2 - d^2\right) \cdot \left(D^2 + d^2\right)}{D^2 - d^2},$$

$$K_{п.р.ж.} = \frac{1}{8} \cdot \left(D^2 + d^2\right). \qquad (9.29)$$

<u>Осьові коефіцієнти раціональності</u> даного ***<u>кільцевого перерізу по жорсткості</u>***, згідно виразу (9.15), будуть:

$$K_{о.р.ж.} = \frac{J_{z(y)}}{F} = \frac{\dfrac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{64}}{\dfrac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D^2 - d^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\left(D^2 - d^2\right) \cdot \left(D^2 + d^2\right)}{D^2 - d^2},$$

$$K_{о.р.ж.} = \frac{1}{16} \cdot \left(D^2 + d^2\right). \qquad (9.30)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називають полярним моментом інерції ?
2. Чому дорівнює полярний момент інерції для круга ?