

ТЕМА 1.1 КІНЕМАТИКА

Тема 1.1.1 Вільне падіння тіл. Прискорення вільного падіння.

ПІДРУЧНИК Л. Е. Генденштейн, І. Ю. Ненашев Фізика 10 клас
§3 ст. 38-39

Ви ознайомились з рівнозмінним рухом та основними його видами. Одним з явищ, які підпадають під модель рівноприскореного руху є падіння тіла на землю.

Вільне падіння – це рух тіла без початкової швидкості тільки під дією сили тяжіння.



Цікавою особливістю цього руху є те, що тіла різної маси падають у вакуумі з однаковим прискоренням.

Це прискорення позначають g , і $g = 9,81 \frac{м}{с^2}$.

Прискорення вільного падіння (g) — прискорення, яке отримує тіло, рухаючись під впливом сили тяжіння Землі. Воно однакове для всіх тіл, залежить від географічної широти місцезнаходження тіла, його висоти підняття над рівнем моря та інших факторів.

Прискорення вільного падіння не залежить від маси тіл, але сильно змінюється в залежності від маси самої планети (і навіть від положення на ній, від полюса до екватора).

Для проведення розрахунків, згідно з рішенням третьої Генеральної конференції з мір та ваг у 1901 році, було прийняте стандартне значення прискорення вільного падіння $g = 9,80665 \frac{m}{c^2}$.

Прискорення вільного падіння також використовується як позасистемна одиниця виміру прискорення.

Падіння тіл є вільним лише в тому випадку, коли на тіло, що падає, діє лише сила тяжіння. Падіння тіл у повітрі можна приблизно вважати вільним лише за умови, що опір повітря незначний і ним можна знехтувати.

Історія відкриття вільного падіння

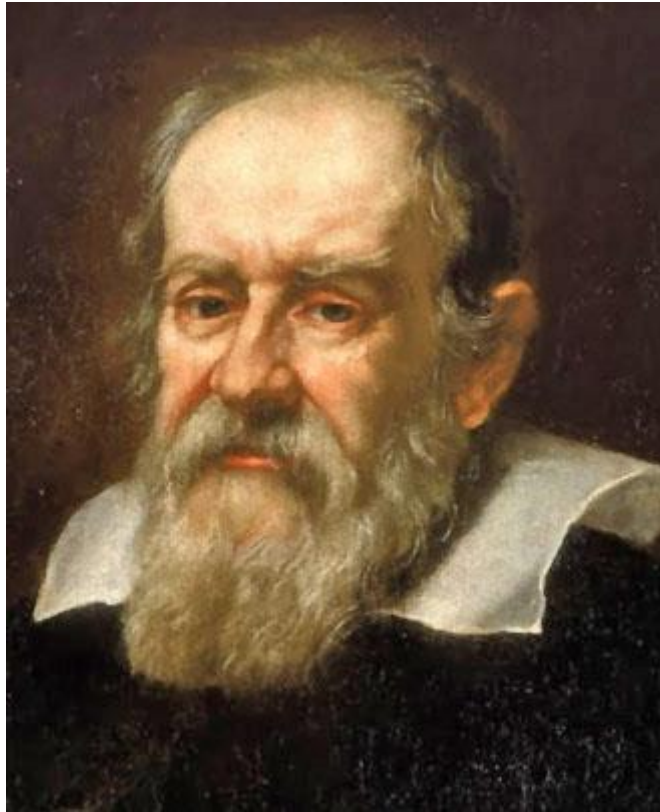
До нашої ери один із найвеличніших філософів античності Аристотель помітив те, що всі тіла, під якими немає опори, обов'язково падають на землю. Він припустив, що чим більша маса тіла, тим сильніше Земля його притягуватиме і тим швидше тіло впаде на Землю, але Аристотель ніколи дослідно не перевіряв своїх припущень. Незважаючи на це, аксіома Аристотеля проіснувала в науці аж до XVII століття, коли Галілео Галілей вперше наважився її експериментально перевірити. Він провів чимало дослідів з тілами різної маси, кидаючи їх з Пізанської вежі. Результатом чисельних спостережень стало те, що Галілей заперечив гіпотезу Аристотеля і довів, що тіла різної маси, кинуті з однієї і тієї ж висоти, падають на землю одночасно.

Досліджуючи вільне падіння тіл, Галілео Галілей встановив:

- для всіх тіл, що вільно падають, прискорення однакове і дорівнює $g = 9,81 \frac{m}{c^2}$.;
- прискорення вільного падіння напрямлено вертикально вниз, задаючи вертикаль;
- прискорення вільного падіння не залежить від напрямку руху, швидкості тіла, маси тіла його форми та розмірів;

- прискорення вільного падіння залежить від географічної широти, висоти та неоднорідностей земної кулі.

- Відкриття Галілея було згодом підтверджено в багатьох дослідах



Галілео ді Вінченцо Бонайоті де Галілей (1564 — 1642) — італійський мислитель епохи Відродження, засновник класичної механіки, фізик, астроном, математик, поет і літературний критик, один із засновників сучасного експериментально-теоретичного природознавства

Вимірювання показують, що поблизу поверхні Землі $g=9,8 \text{ м/с}^2$ (у різних точках земної поверхні залежно від географічної широти й висоти над рівнем моря числове значення g виявляється неоднаковим, змінюючись приблизно від $9,83 \text{ м/с}^2$ на полюсах до $9,78 \text{ м/с}^2$ на екваторі). Стандартне значення приблизно відповідає прискоренню падіння тіла на широті 45° і на **висоті рівня моря**. Відхилення від стандартної величини обумовлено низкою причин:

- Обертанням Землі. Внаслідок обертання Землі, за рахунок дії **доцентрової сили**, прискорення вільного падіння тіла на полюсах вище, ніж на екваторі.

- Формою Землі. Земля не ідеальна сфера, а має сплюснуту на полюсах форму.
- Висотою над рівнем моря.
- Неоднорідністю Землі.
- Значення g більше на довільній широті, там, де містяться поклади залізної й інших важких руд, менше — над родовищами газу.

Для опису руху тіла запишемо для даного руху рівняння руху та швидкості. Оскільки рух є одномірним, то достатньо буде одного рівняння руху (для осі ОУ) та рівняння швидкості (для цієї ж осі).

Запишемо рівняння руху в загальному вигляді:

$$\boxed{y = y_0 + v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}} \quad v = v_0 + gt$$

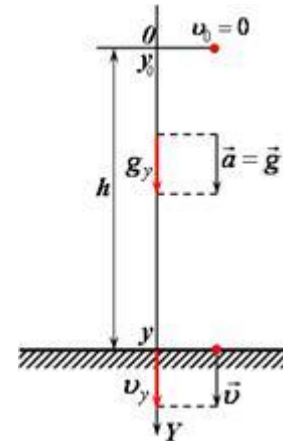


Рис. 1

$$(y = h; y_0 = 0; v_{0y} = 0; g_y = g)$$

Розпишемо, чому дорівнюють відповідні коефіцієнти в рівнянні для нашої конкретної моделі руху (рис 1):

$$(y = h; y_0 = 0; v_{0y} = 0; g_y = g)$$

Підставивши відповідні значення в рівняння отримаємо:

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = gt, \quad v_y = \sqrt{2gh}$$

Рекорди вільного падіння

1. Згідно Книзі рекордів Гіннеса, Євген Андрєєв встановив світовий рекорд вільного падіння, що становить 24500 м, під час парашутного стрибка з висоти 25457 м, вчиненого неподалік від Саратова, 1 листопада 1962. При цьому він не використовував гальмівний парашут.

2. 16 серпня 1960 Джозеф Кіттінгер здійснив рекордний стрибок з висоти 31 км з використанням гальмівного парашута.
3. У 2005 році Луїджі Кані встановив світовий рекорд швидкості (стрибок в тропосфері), досягнутої у вільному падінні - 553 км / год.

Рух тіла, кинутого вертикально вгору

Рух тіла, кинутого вертикально вгору,— це рух з прискоренням вільного падіння, яке, як завжди, напрямлене вертикально вниз. Під час піднімання напрям швидкості протилежний до напрямку прискорення, отже, швидкість зменшується від початкового значення 0 до нуля. У цьому разі під час розв’язування задач можна початок координат осі Оу поєднати з початком положення тіла на поверхні Землі і спрямувати вісь вертикально вгору. Тоді загальне рівняння руху матиме вигляд:

$$y = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Отже, якщо тіло, кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю , його миттєва швидкість за модулем зменшується (під час піднімання до найвищої точки), і рух описується так:

$$v = v_0 - gt ; h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} ; v^2 = v_0^2 - 2gh .$$

Максимальна висота піднімання h_{\max} і час t_1 піднімання до цієї висоти:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} ; t_1 = \frac{v_0}{g} .$$

Рівняння вільного падіння

Величина	Прямолінійний рівноприскорений рух	Вільне падіння
Рівняння руху	$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$y = y_0 + v_{0y}t \pm \frac{gt^2}{2}$
Швидкість	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} \pm gt$

Прискорення	$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$	$g = \frac{v_y - v_{0y}}{t}$
Переміщення	$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2};$ $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$	$h_y = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2};$ $h_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{\pm 2g}$

Рух тіла, кинутого горизонтально

Знайдемо дальність польоту тіла, кинутого горизонтально. Для цього зобразимо схему руху (рис 1). Оскільки рух тіла, кинутого горизонтально відбувається у вертикальній площині, то нам знадобляться дві взаємно перпендикулярні осі OX та OY для його описання.

Пов'яжемо систему відліку з землею. Вісь OX спрямуємо вздовж поверхні землі, а вісь OY вертикально вгору перпендикулярно до поверхні землі. Початок координат розташуємо так, як показано на рис 2. Тоді $x_0 = 0, y = 0, y_0 = h, x = l$

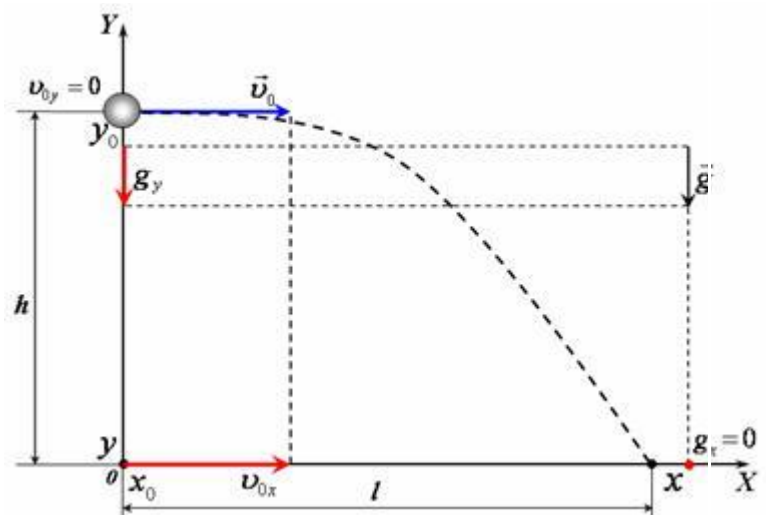


Рис.2

Запишемо рівняння руху в проекціях на кожну вісь:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Оскільки під час польоту на кинуте тіло діє лише сила земного тяжіння, то тіло, кинуте горизонтально рухатиметься з прискоренням вільного падіння g . Спроектувавши вектори початкової швидкості \vec{v}_0 і прискорення \vec{g} на осі OX та OY (рис 2), запишемо рівняння руху для даного випадку:

$$l = v_0 t, 0 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

$$\text{Звідки } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, характеризується:

- часом польоту ($t_{\text{пол.}}$);
- дальністю польоту (L);
- найбільшою висотою підняття тіла над горизонтом (h_{max}).

Від чого будуть залежати ці величини?

Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, – парабола.

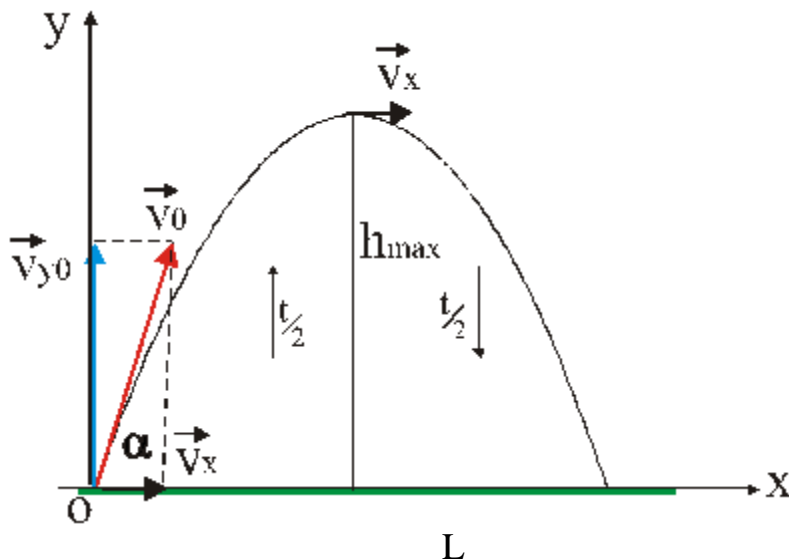


Рис. 3

Нехай тіло кинули зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. З'єднаємо початок координат з початковим положенням тіла, спрямуємо вісь ОУ вертикально вгору, а вісь ОХ – горизонтально.

У обраній системі координат

$$x_0 = 0; y_0 = 0; v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha; v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha; g_x = 0; g_y = -g$$

Рахуємо, що рух відбувається біля поверхні Землі, тому прискорення тіла – прискорення вільного падіння ($a = g$) Ми нехтуємо опором повітря, $g_x = 0$.

По осі ОХ рівномірний рух: $x = x_0 + v_x t$; $x = v_{0x} t = v_0 \cdot \cos \alpha t$.

По осі ОУ рівноприскорений рух: $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$; $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

Знайдемо час польоту тіла.

Коли тіло перебуває на тій висоті, його швидкість спрямована горизонтально, тобто проекція швидкості на вісь ОУ дорівнює нулю. ($v_y = 0$). Оскільки

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$0 = v_{0y} - gt$$

$$t_{\text{під.}} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \text{ - час підйому тіла на максимальну висоту.}$$

Оскільки час підйому дорівнює часу падіння, то час польоту вдвічі більший за час підйому:

$$t_{\text{пол.}} = 2t_{\text{під.}} = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \text{ - час польоту тіла.}$$

$$t_{\text{пол.}} = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \text{ - час польоту тіла.}$$

Виведемо формулу дальності польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту, знаючи формулу часу польоту тіла і рахуючи, що по осі ОХ тіло рухається рівномірно.

$$x = x_0 + v_x t; \quad x_0 = 0; \quad x = v_{0x} t = v_0 \cdot \cos \alpha t; \quad L = x.$$

$$L = x = v_0 \cdot \cos \alpha t = v_0 \cdot \cos \alpha \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

$$L = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \text{ - дальність польоту тіла.}$$

Виведемо формулу максимальної висоти підйому тіла, кинутого під кутом до горизонту, знаючи формулу часу польоту тіла і рахуючи, що по осі ОУ тіло рухається рівноприскорено.

$$t_{\text{під.}} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \text{ - час підйому тіла на максимальну висоту.}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \quad y_0 = 0; \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}; \quad h_{\text{max}} = y.$$

$$h_{\text{max}} = y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g}$$

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} \text{ - максимальна висота підйому тіла.}$$

Приклади розв'язування задач

1. На деякій ділянці шляху швидкість тіла, що вільно падає, збільшилась від 7 м/с до 21 м/с. Знайти час, протягом якого відбулась зміна швидкості, і шлях, пройдений тілом за цей час.

Розв'язання:

Дано:
$v_0 = 7 \text{ м/с}$
$v = 21 \text{ м/с}$
$t - ?$
$h - ?$

Час руху знайдемо за формулою: $t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{21 - 7}{10} = 1,4 \text{ с}$

Пройдений тілом шлях знайдемо за формулою:

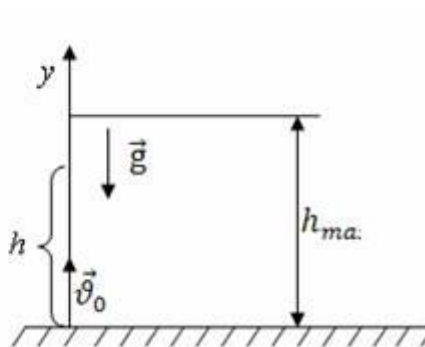
$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 7 \cdot 1,4 + \frac{10 \cdot 1,4^2}{2} = 19,6 (\text{м})$$

Відповідь: $t = 1,4 \text{ с}$, $h = 19,6 \text{ м}$.

2. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю 30 м/с. Знайти, через який час тіло буде на висоті 25 м; максимальну висоту підняття; час піднімання і час падіння; висоту, на якій швидкість тіла зменшиться у два рази.

Розв'язання:

Дано:
$v_0 = 30 \text{ м/с}$
$g = 10 \text{ м/с}^2$
$v_1 = 0 \text{ м/с}$
$v_2 = \frac{v_0}{2} \text{ м/с}, h = 25 \text{ м}$
$t_1 - ?, t_2 - ?, h - ?, h_{\text{max}} - ?$



Початок координат розмістимо у точці на Землі, з якої тіло кинуто вгору. Координата y тіла збігається з висотою h . Прискорення g направлене вниз.

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Підставивши числові значення і розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо:

$$5t^2 - 30t + 25 = 0, \quad D = 400$$

$$t_1' = \frac{30 + 20}{10} = 5 \text{ с} \quad t_2' = \frac{30 - 20}{10} = 1 \text{ с}$$

Дві відповіді говорять про те, що на даній висоті тіло побувало двічі: один раз - при підніманні, а другий - при падінні.

У найвищій точці кінцева швидкість дорівнює нулю.

$$\frac{v^2 - v_0^2}{-2g} = h_{\max}, \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} = 45(\text{м})$$

Час піднімання - це буде інтервал часу, через який миттєва швидкість стане рівною нулю.

$$v = v_0 - gt, \quad v_0 = gt_2, \quad t_2 = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{10} = 3(\text{с})$$

Час падіння дорівнює часу піднімання.

Для визначення висоти, на якій швидкість зменшиться вдвічі, використаємо формулу: $v_0^2 - v_2^2 = 2gh$, $v_2 = \frac{v_0}{2}$

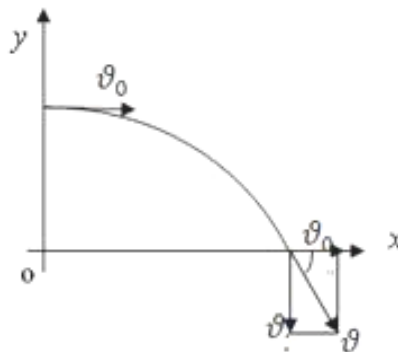
$$v_0^2 - \frac{v_0^2}{4} = 2gh, \quad h = \frac{v_0^2 - \frac{v_0^2}{4}}{2g} = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3 \cdot 30^2}{8 \cdot 10} = 33,75(\text{м})$$

Відповідь: $t'_1 = 5\text{с}$, $t'_2 = 1\text{с}$, $h_{\max} = 45\text{м}$, $t_2 = 3\text{с}$, $h = 33,75\text{м}$.

3. Тіло, що було кинуте горизонтально з висоти 19,6м, впало на землю на відстані 80м від місця кидання. Визначити швидкість кидання і кут, який утворює швидкість в момент падіння з горизонтом.

Розв'язання:

Дано:
 $H = 19,6\text{м}$
 $S = 80\text{м}$
 $\vartheta_0 = ?$, $\alpha = ?$



В даному випадку - складний рух. Рух по горизонталі - рівномірний, із швидкістю $v_x = v_0$, а рух по вертикалі - рівноприскорений $a_y = g$.

Для рівномірного руху:
 $v_0 = v_x = \frac{S}{t}$

Час руху по горизонталі буде такий самий, як і по вертикалі.

Враховавши, що $H = \frac{gt^2}{2}$, виключимо час $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ і визначимо

$$\text{початкову швидкість } v_0 = \frac{S}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} = \frac{80}{\sqrt{\frac{2 \cdot 19,6}{9,8}}} = 40 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

$$v_y = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 19,6} = 19,6 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

Кут, який утворює швидкість в момент падіння з горизонтом знайдемо з формули $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{19,6}{40} = 0,49$, $\alpha = \operatorname{arctg} 0,49 = 26^{\circ}10'$

Відповідь: $v_0 = 40 \text{ м/с}$, $\alpha = 26^{\circ}10'$.

4. Тіло кинуто під кутом 60° до горизонту із швидкістю 20 м/с . Визначити швидкість тіла через 2 с , а також модуль його переміщення за цей інтервал часу.

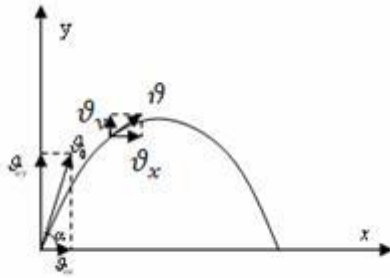
Розв'язання:

Дано:

$$\alpha = 60^{\circ}$$

$$v_0 = 20 \text{ м/с}$$

$$v - ?, S - ?$$



Рівняння руху у проекціях на координатні осі мають вигляд

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$S_y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}$$

З рисунка видно: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $a_x = 0$, $S_x = l$, $S_y = h$

$$a_y = -g, v_x = v_{0x}, v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha - gt, l = v_0 t \cos \alpha$$

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Швидкість v і модуль переміщення S визначимо за теоремою Піфагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

$$S = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{(v_0 t \cos \alpha)^2 + \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{(20 \cdot 0,5)^2 + (20 \cdot 0,866 - 9,8 \cdot 2)^2} = 10,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$S = \sqrt{(20 \cdot 2 \cdot 0,5)^2 + \left(20 \cdot 2 \cdot 0,866 - \frac{9,8 \cdot 2^2}{2}\right)^2} = 25 \text{ м}$$

Відповідь: $S = 25 \text{ м}$, $v = 10,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Питання для самоконтролю

Виберіть правильну відповідь

1. Три тіла, маси яких 2 кг, 6 кг, 8 кг кидають з однакової висоти без початкової швидкості. Яке з тіл першим впаде на землю. Опір повітря не враховувати.

А масою 2 кг, Б масою 6 кг, В масою 8 кг, Г одночасно

2. Оберіть правильне означення вільного падіння:

А це рух тіла без початкової швидкості

Б це рух тіла у вертикальній площині

В це рух тіла без початкової швидкості під дією сили тяжіння

Г це рух тіла під дією сили тяжіння у вертикальній площині

3. Оберіть правильне значення величини прискорення вільного падіння на Землі в метрах на секунду в квадраті.

А 9,8 Б 8,9 В 9 Г 1,6

4. Тіло вільно падає з прискоренням вільного падіння. Знайдіть швидкість тіла через секунду після початку падіння (в метрах за секунду).

А 1 Б 9,8 В 19,6 Г 3

Розв'яжіть задачі

Якісні задачі

1. Чи зміниться прискорення тіла, кинутого вертикально вниз, якщо збільшити його початкову швидкість?
2. Три тіла кинуті наступним чином: перше – вниз без початкової швидкості, друге – вниз з початковою швидкістю, третє – вгору. Що можна сказати про прискорення цих тіл (опором повітря знехтувати);
3. Як спрямовані вектори швидкості та прискорення тіла, кинутого вертикально вгору? Чи змінюються вони з часом?
4. Як спрямовані вектори швидкості та прискорення тіла, кинутого вертикально вниз? Чи змінюються вони з часом?

Розрахункові задачі

1. М'яч кидають із даху, розташованого на висоті 20 м від землі. Його початкова швидкість дорівнює 25 м/с і напрямлена горизонтально. Якою є дальність польоту м'яча?

2. Під яким кутом до горизонту потрібно кинути тіло з початковою швидкістю 20 м/с, щоб тіло впало на відстані 40 м від точки кидка? Опором повітря знехтуйте.

Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$. 9. З якої висоти падає тіло, якщо політ тривав 4с ($g = 10 \text{ м/с}^2$)

Творче завдання

Написати рівняння залежності проекції швидкості від часу і координати від часу для тіла, що рухається. Визначити швидкість і координату через 2 с після початку спостереження. Заповнити таблицю.

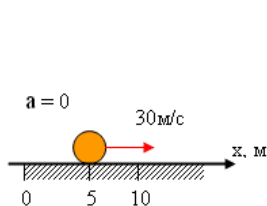


Рис. 1

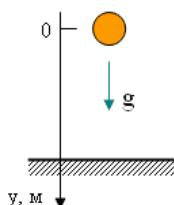


Рис. 2

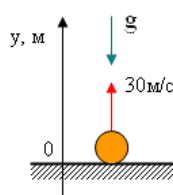


Рис. 3

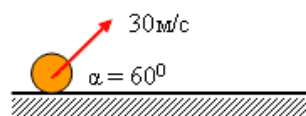


Рис. 4

№ малюнку	Рівняння швидкості	Рівняння координат	Час, с	Швидкість, м/с	Координата, м
1			2		
2			2		
3			2		
4			2		