

22 Межі застосування формули Ейлера. Імперичні формули Ясінського

(тема 2.8)

План

1. Критична сила.
2. Допустима стискаюча сила.
3. Гнучкість стержня.
4. Формули Ейлера та Ясінського.

К р и т и ч н о ю с и л о ю називається найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний з втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається **п о з д о в ж н і м з г и н о м**.

Розглянемо тонкий сталевий стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою P , трохи більшою за $P_{кр}$ (рис. 26.1). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори — поздовжня сила $N = P$ і згинаючий момент $M_{зг}$. Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

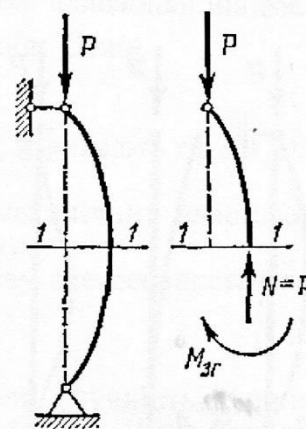


Рис. 26.1

Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції. Тому критичний стан, який безпосередньо передуює руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила P , яка діє на стержень, була менша за критичну $P_{кр}$.

Позначимо допустиму стискаючу силу $[P]$, тоді

$$[P] = P_{кр} / [n_{ст}],$$

де $n_{ст}$ — допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Очевидно, що стійкість стержня достатня, якщо $[n_{ст}] > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно для сталей $[n_{ст}] = 1,8 \div 3$; для чавунів $[n_{ст}] = 5 \div 5,5$; для дерева $[n_{ст}] = 2,8 \div 3,2$.

Формула Ейлера

Для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$.

Вперше стійкість стиснених стержнів дослідив академік Петербурзької Академії наук, швейцарець за національністю, Леонард Ейлер (1707—1783). Л. Ейлер, який прожив у Росії близько 30 років, залишив незгладимий слід у механіці і математиці. Радянський академік С. І. Вавилов писав: «Разом з Петром І і Ломоносовим Ейлер став видатним генієм нашої Академії, який визначив її славу, її міцність, її продуктивність». Пізніше значну роботу в галузі теоретичного і експериментального дослідження питань стійкості виконав російський учений, професор Петербурзького інституту інженерів

шляхів сполучення Ф. С. Ясинський (1856—1899), який у 1893 р. опублікував велику працю «Досвід розвитку теорії позовжнього згину».

Л. Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили $P_{кр}$. Наведемо формулу Ейлера без виведення:

$$P_{кр} = \pi^2 EJ_{min} / l_{зв}^2.$$

Тут E — модуль пружності першого роду; J_{min} — найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стержень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи позовжньою силою слюсарну лінійку; $l_{зв}$ — зведена довжина стержня:

$$l_{зв} = \mu l,$$

де l — довжина стержня, а μ — коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стержня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

На рис. 26.2 зображено способи кріплення кінців стержня, які найчастіше застосовують, і наведено значення μ : 1) обидва кінці стержня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а); 2) нижній кінець жорстко за-

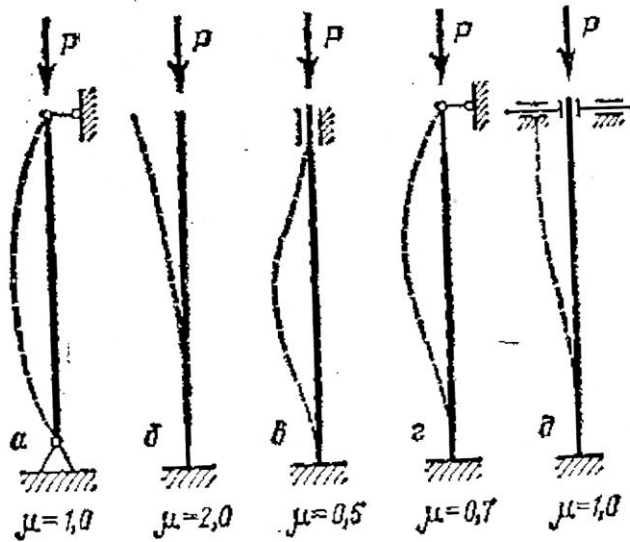


Рис. 26.2

кріплений, верхній вільний (б); 3) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (в); 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній — шарнірно, кінці можуть зближуватися (г); 5) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (д). Зазначимо, що чим менше μ , тим більша критична сила, а отже, і допустиме стискаюче навантаження. Наприклад, стискаюче навантаження стержня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 раз більше від навантаження стержня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стержня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруга не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичну напругу $\sigma_{кр}$, тобто напругу, яка виникає в поперечному перерізі F стержня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F = \pi^2 EJ_{min} / [(\mu l)^2 F].$$

Введемо поняття найменшого радіуса інерції поперечного перерізу стержня i_{min} :

$$i_{min} = \sqrt{J_{min} / F}.$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu l / i_{\min})^2.$$

Вираз $\mu l / i_{\min}$ називають гнучкістю стержня. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стержня і способу закріплення його кінців. Остаточно

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пл},$$

де $\sigma_{пл}$ — границя пропорційності матеріалу стержня. Отже,

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пл}}.$$

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають *г р а н и ч - н о ю г н у ч к і с т ю* і позначають $\lambda_{гр}$.

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня і стала для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{гр},$$

тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо як приклад значення $\lambda_{гр}$ для маловуглецевої сталі Ст3. Для сталі Ст3 $\sigma_{пл} = 200$ МПа, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, тоді

$$\lambda_{гр} = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формула Ейлера застосовна, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_{гр} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{гр} = 110$.

Якщо гнучкість стержнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовна і в розрахунках користуються формулою Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

де a і b — коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть з довідкових таблиць. Зокрема, для сталі Ст3 при гнучкостях від $\lambda = 40 \div 100$ можна брати $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стержні можна розраховувати на міцність при простому стисканні, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулою $\sigma = P/F$.

Отже, при малих значеннях λ ($\lambda < 40$) стержні з маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; при середніх значеннях ($40 \leq \lambda <$

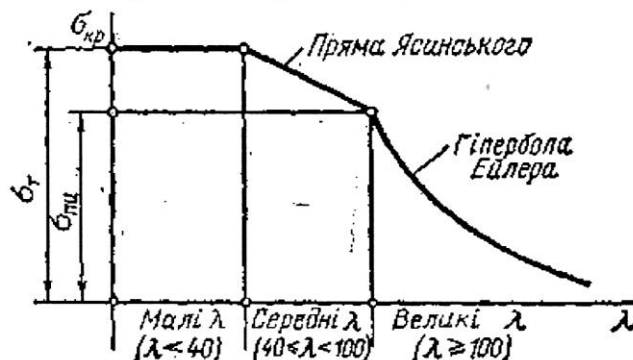


Рис. 26.3

< 100) розраховують за формулою Ясинського, а при великих ($\lambda \geq 100$) — за формулою Ейлера. Графік залежності критичної напруги від гнучкості для стержнів з маловуглецевої сталі зображено на рис. 26.3. Зазначимо, що

1) при малих значеннях λ критична напруга $\sigma_{кр}$ дорівнює границі текучості σ_T ;

2) при середніх значеннях λ критична напруга менша від границі текучості σ_T , але більша, ніж границя пропорційності ($\sigma_{пл} < \sigma_{кр} < \sigma_T$);

3) при великих значеннях λ критична напруга менша від границі пропорційності.

Питання для самоконтролю

1. Що називають критичною силою?
2. Як визначити допустиму спускаючи силу?
3. Пояснити формулу Ейлера.
4. Способи кріплення кінців стержня.
5. Гранична гнучкість — формула Ясинського