

# **21 Теорії міцності та їх застосування**

(тема 2.7)

## **План**

1. Гіпотези міцності
2. Застосування теорії міцності

## Перевірка міцності й допустимих напружень при чистому зсуві

Перевіримо міцність елемента, що зазнає деформації чистого зсуву. Дотичні напруження на гранях елемента дорівнюють  $\tau$ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні —  $[\sigma]$ .

*Умови міцності залежатимуть від вибору теорії (критерію) міцності.*

1. За II теорією міцності 
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (13.7)$$

Права частина формули (13.7) є *допустимим напруженням при чистому*

*зсуві:* 
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (13.8)$$

Для металів  $\mu = 0,25 \div 0,42$ . Отже, за II теорією міцності

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8) \cdot [\sigma]. \quad (13.9)$$

2. За III теорією міцності 
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \quad (13.10)$$

тобто

$$[\tau] = 0,5 \cdot [\sigma]. \quad (13.11)$$

3. За IV теорією міцності 
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}, \quad (13.12)$$

або,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \cdot [\sigma], \quad (13.13)$$

Одержані значення допустимих напружень застосовують також і при розрахунках на міцність деталей, які зазнають деформації зрізу (болти, заклепки, шпонки). Для пластичних матеріалів найбільше підходить формула (13.13), яка випливає з енергетичної теорії формозміни. При використанні цієї формули для допустимих напружень на розтяг слід вибирати відповідні значення. Наприклад, для сталі марки Ст3 допустиме напруження на розтяг та стиск при статичному навантаженні  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Тоді,  $[\tau] = 0,6 \cdot 160 = 96 \approx 100 \text{ (МПа)}$ .

Умова міцності на зсув (зріз) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (13.14)$$

*Значення допустимих напружень на зріз  $[\tau]$  залежать від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції.*

### Приклад 13.1

Розрахувати допустимі напруження при чистому зсуві для болтового з'єднання (рис. 13.5).

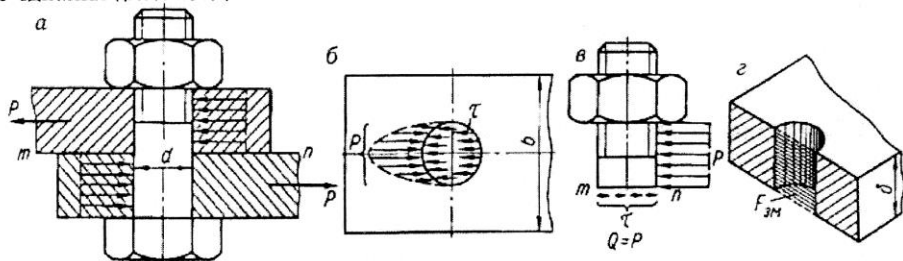


Рис. 13.5.

#### Розв'язання:

Сили  $P$  намагаються зсунути листи один відносно одного. Цьому перешкоджає болт, на який з боку кожного листа передаються розподілені по контактній поверхні сили (рис. 13.5, *a* та *б*). Рівнодійні останніх, що дорівнюють  $P$ , направлені протилежно (рис. 13.5, *a*). Зусилля намагаються зрізати болт по площині поділу листів *m-n*, оскільки в цьому перерізі діє найбільша поперечна сила  $Q=P$  (рис. 13.5, *в*). Вважаючи, що дотичні напруження розподілені по перерізу болта

рівномірно, матимемо:  $\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2}$ . Отже, умова міцності болта на зріз

набирає вигляду:  $\tau_{\max} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} \leq [\tau]. \quad (13.15)$

Звідси можна знайти діаметр болта, який забезпечує міцність болтового

з'єднання:  $d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (13.16)$

Сили  $P$ , прикладені до болта, намагаються також зігнути його. Проте згинальний момент невеликий, і спричиненими ним нормальними напруженнями можна знехтувати, тим більше що при збільшенні зовнішніх сил  $P$  руйнування з'єднання відбудеться від зрізу болта.

При розрахунку болтових, заклепочних та інших подібних з'єднань слід ураховувати те, що навантаження, прикладені до елементів з'єднань, крім зрізу спричиняють зминання поверхні болта в місті його контакту з листом. Під зминанням розуміють пластичну деформацію, яка виникає на поверхнях контакту. Розрахунок на зминання також виконують наближено, оскільки закон розподілу тиску по поверхні контакту точно невідомий. Як правило, вибирають криволінійний закон розподілу навантажень (рис. 13.6), вважаючи, що тиск  $q$  по діаметру  $d$  змінюється пропорційно зміні проекції площадки  $dF$  циліндричної поверхні на діаметральну площину  $\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}$ . Тоді максимальне напруження

$$\text{зминання на циліндричних поверхнях} \quad \sigma_{зм} = \frac{P}{F_{зм}}. \quad (13.17)$$

де  $F_{зм}$  — площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину листа завтовшки  $\delta$  (рис. 13.5, з):  $F_{зм} = d \cdot \delta$ . (13.18)

$$\text{Умова міцності на зминання має вигляд: } \sigma_{зм} = \frac{P}{d \cdot \delta} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (13.19)$$

Допустиме напруження на зминання визначають дослідженнями і вибирають його таким, що дорівнює  $\sigma_{зм} = (2 \div 2,5) \cdot [\sigma_-]$ .

$$\text{На підставі залежності (13.19) маємо: } d \geq \frac{P}{\delta \cdot [\sigma_{зм}]}. \quad (13.20)$$

Для забезпечення умов міцності на зріз та зминання потрібно з двох знайдених діаметрів взяти більший, округливши його до стандартного значення. Ураховуючи, що отвори для болтів чи заклепок ослаблюють листи, останні перевіряють на розрив у найбільш ослаблених перерізах. Якщо болт один (рис.

$$13.5), \text{ умова міцності матиме вигляд: } \sigma = \frac{P}{F_{\min}} = \frac{P}{\delta \cdot (b - d)} \leq [\sigma_+]. \quad (13.21)$$

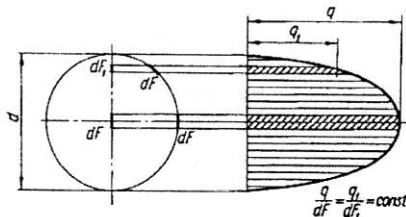


Рис. 13.6.

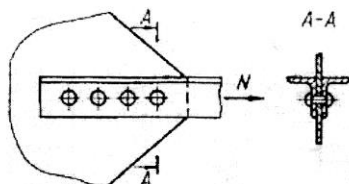


Рис. 13.7.

### Приклад 13.2

Визначити кількість заклепок діаметром  $d = 23 \text{ мм}$  для закріплення розкошу ферми, який складається з двох нерівнобоких кутників  $90 \times 56 \times 8$ , до фасонного листа (косинки) завтовшки  $\delta = 12 \text{ мм}$  (рис. 13.7). Розтягальне зусилля в розкосі  $N = 300 \text{ кН}$ , матеріал — Ст3, отвори для заклепок продавлено.

#### Розв'язання:

Припускаючи, що зусилля між заклепками розподіляються рівномірно, і зважаючи на те, що вони зазнають подвійного зрізу (одночасно по двох перерізах), кількість заклепок  $z$  знайдемо з умови міцності на зріз:

$$\tau = \frac{N}{2 \cdot z \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\tau], \quad (13.22)$$

$$\text{або з умови міцності на зминання } \sigma_{зм} = \frac{N}{z \cdot d \cdot \delta} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (13.23)$$

Для сталі Ст3 можна взяти  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$  і  $[\sigma_{зм}] = 280 \text{ МПа}$ , тоді:

$$\text{а) з розрахунку на зріз } z \geq \frac{N}{2 \cdot [\tau] \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \approx \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Н}}{2 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{3,14 \cdot 23^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2}{4}} \approx 3,6.$$

б) з розрахунку на зминання

$$z \geq \frac{N}{[\sigma_{зм}] \cdot d \cdot \delta} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Н}}{2,8 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 3,9.$$

Вибираємо кількість заклепок  $z = 4$ . У розрахунку на зминання взято товщину фасонного листа  $\delta = 12 \text{ мм}$ , оскільки сумарна товщина полиць двох кутників  $2 \cdot \delta = 24 \text{ мм}$ , а отже, напруження зминання в заклепках у місцях контакту з кутниками буде меншим, ніж у місцях контакту з косинкою (вважається, що матеріал заклепок м'якший, ніж матеріал з'єднуваних елементів).

### Приклад 13.3

Вал передає крутний момент  $M_{кр} = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}$  за допомогою шліцьового з'єднання (рис. 13.8). Діаметр вала  $D = 80 \text{ мм}$ , внутрішній діаметр  $d = 68 \text{ мм}$ , висота шліца  $h = 6 \text{ мм}$ , ширина шліца  $b = 12 \text{ мм}$ , довжина з'єднання  $l = 100 \text{ мм}$ . Кількість шліців  $z = 6$ . Визначити напруження зрізу та зминання шліца.

#### Розв'язання:

Вважаючи, що всі шліці навантажені однаково, знайдемо зусилля, яке припадає на один

$$\text{шліць: } P_1 = \frac{M_{кр}}{\frac{d}{2} \cdot z} = \frac{2,7 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}}{\frac{6,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{2} \cdot 6} \approx 132353 \text{ Н}.$$

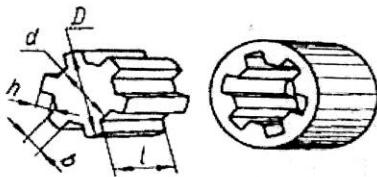


Рис. 13.8.

$$\text{Напруження зрізу } \tau = \frac{P_1}{b \cdot l} = \frac{132353 \text{ Н}}{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1 \cdot 10^{-1} \text{ м}} \approx 110,3 \text{ МПа}.$$

$$\text{Напруження зминання } \sigma_{зм} = \frac{P_1}{l \cdot h} = \frac{132353 \text{ Н}}{1 \cdot 10^{-1} \text{ м} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \approx 220,6 \text{ МПа}.$$

**На зріз** прийнято (також умовно) розраховувати і деякі зварні з'єднання. Виготовляючи металеві конструкції, часто застосовують зварювання електричною дугою. Якщо конструкцію з'єднання, матеріали та технологію зварювання вибрано правильно, то зварне з'єднання за надійністю не поступається заклепочному при дії як статичних, так і динамічних навантажень. Крім того, з'єднання елементів конструкцій за допомогою зварювання має багато переваг, основна з яких — економічність. Найпоширенішими є стикові з'єднання та за допомогою кутових або валикових швів. Стикові з'єднання застосовують, якщо листи розміщені в одній площині. Якщо листи завтовшки  $\delta \leq 8 \text{ мм}$ , їхні кромки не обробляють (рис. 13.9, а); при  $\delta = 8 \div 20 \text{ мм}$  кромки скошують і заварюють листи з одного боку (V-подібний шов, рис. 13.9, б); при  $\delta \geq 20 \text{ мм}$  кромки скошують з двох боків (X-подібний шов, рис. 13.9, в). Розрахункову товщину шва вибирають такою, що дорівнює товщині листа  $\delta$ , напливи не враховують.

З'єднання за допомогою кутових швів роблять, коли з'єднані листи паралельні або перпендикулярні. До них належать з'єднання внапусток і таврові. Якщо напрям кутового шва перпендикулярний до напрямку дії зусилля, то шов називається лобовим (торцевим). Шви, паралельні зусиллям, мають назву флангових (бокових). Застосовують також скісні шви (рис. 13.10), напрямлені під кутом до напрямку дії зусилля. Нарис. 13.11 зображено з'єднання листів внапусток лобовими швами, на рис. 13.12 — з'єднання з накладками, які приварено фланговими швами, а на рис. 13.13 — таврове з'єднання.

при поперечному згинанні балки її матеріал перебуває в неоднорідному плоскому напруженому стані. При цьому умова міцності має бути записана для так званої небезпечної точки балки, тобто тієї точки, де матеріал перебуває в найбільш напруженому стані. Небезпечною буде одна з таких трьох точок: а) точка, де нормальне напруження досягає найбільшого значення; б) точка, де дотичне напруження досягає найбільшого значення; в) точка, де  $\sigma$  та  $\tau$  хоч і не набувають найбільших значень, але в своїй сукупності створюють найвигіднішу комбінацію, тобто найбільше еквівалентне напруження за прийнятою для розрахунку теорією міцності. При цьому таких точок може виявитися кілька. Якщо орієнтуватися на першу небезпечну точку, розміщену в крайніх волокнах того перерізу балки, де згинальний момент  $M$  набирає максимального значення, а елемент перебуває в лінійному напруженому стані (наприклад, точки **2** та **14** на рис. 15.15), умову міцності можна записати у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (15.28)$$

Друга небезпечна точка лежить на нейтральній лінії того перерізу, де поперечна сила найбільша (на рис. 15.15 це точка **6** і взагалі будь-яка точка на ділянці нейтрального шару, де  $Q = Q_{\max}$ ). У такій точці спостерігається чистий зсув (рис. 15.16, в), тому умова міцності набирає вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J} = k \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (15.29)$$

Положення третьої небезпечної точки чітко не визначене. Проте де б її не було вибрано, в ній завжди буде плоский напружений стан, при якому по гранях виділеного елемента діятимуть нормальні та дотичні напруження (рис. 15.16, в). Головні напруження визначатимуться за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}); \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}). \quad (15.30)$$

Тоді **умови міцності**, в контексті еквівалентних напружень за різними теоріями міцності, будуть:  $\sigma_{еквI} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}) \leq [\sigma];$  (15.31)

$$\sigma_{еквII} = \frac{1-\mu}{2} \cdot \sigma + \frac{1+\mu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.32)$$

$$\sigma_{еквIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.33)$$

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.34)$$

$$\sigma_{еквM} = \frac{1-m}{2} \cdot \sigma + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma], \text{ де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}. \quad (15.35)$$

Для **розрахунку балок з пластичних матеріалів** рекомендується користуватись **умовами міцності**, виходячи з **третьої або четвертої теорії міцності** [формули (15.33) та (15.34)].

**Здебільшого небезпечною є крайня точка того перерізу, де  $M = M_{\max}$ .**

**Основні етапи розрахунку балок на міцність:**

- 1) знаходять **небезпечний переріз балки**, тобто той переріз, в якому діє найбільший за абсолютним значенням згинальний момент;
- 2) за таблицею чи розрахунками визначають **момент опору  $W$  перерізу відносно нейтральної лінії**;
- 3) застосовують тільки одну **умову міцності** (15.28), яку тому і називають **основною**.

За цією схемою для більшості профілів легко можна виконати також **проектувальний розрахунок**; тоді **основна умова міцності** (15.28) записується у вигляді:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (15.36)$$

**Визначивши потрібний момент опору балки та вибравши певний профіль поперечного перерізу, добирають його розміри.**

### Приклад 15.2

Для балки (рис. 15.17), вважаючи заданими розміри  $l, D, d$  та допустиме нормальне напруження  $[\sigma]$ , знайдіть допустиме навантаження  $[P]$ .

**Розв'язання:**

Небезпечним перерізом буде, очевидно, місце закріплення балки, де діятиме максимальний згинальний момент  $M_{\max} = P \cdot l$ .

$$\text{Момент опору в цьому разі } W = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Небезпечними точками в балці будуть верхня та нижня точки перерізу в місці закріплення, умова міцності для яких запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{32 \cdot P \cdot l}{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma]. \text{ Звідси } P \leq [P] = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot [\sigma]}{32 \cdot l}.$$

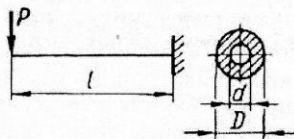


Рис. 15.17.

## Питання для самоконтролю

1. Дати означення гіпотези міцності.
2. Охарактеризувати:
  - 1 теорію міцності
  - Гіпотезу Мора
  - Енергетичну гіпотезу.