

20 Нормальні та дотичні напруження при згині. Осьові моменти інерції. Розрахунки на міцність при згині.

(тема 2.6)

План

1. Нормальні напруги чистого згину.
2. Дотичні напруги згину.
3. Формула міцності для згину.

Нормальні напруги чистого згину

Як було встановлено раніше, в поперечних перерізах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг по поперечному перерізу, треба розглянути деформації волокон балки.

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перерізами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини (рис. 23.12). Радіус кривизни нейтрального шару позначимо ρ .

Розглянемо шар волокон mn , який знаходиться на відстані y від нейтрального шару NN . Це волокно в результаті деформації згину видовжилось на величину nn_1 . Зважаючи на малість відстані dS , заштриховані трикутники вважатимемо прямокутними; ці трикутники подібні

$$(n_1 F \parallel mE)$$

$$\triangle OEF \sim \triangle Enn_1$$

З подібності трикутників маємо

$$\frac{nn_1}{dS} = \frac{y}{\rho}$$

Через те що ліва частина цієї рівності є відносним видовженням, тобто

$$\frac{nn_1}{dS} = \varepsilon \quad \text{то} \quad \frac{y}{\rho} = \varepsilon$$

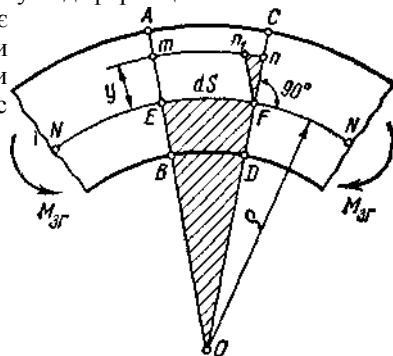


Рис. 23.12

Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E\varepsilon$, матимемо

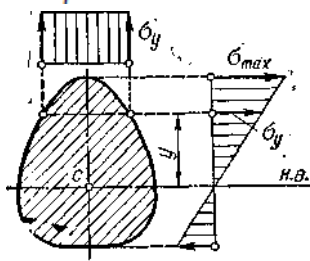
$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$


Рис. 23.13

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені по висоті перерізу нерівномірно: *максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі*. По ширині перерізу нормальні напруги не змінюються. Закон розподілу нормальних напруг зображено на рис. 23.13.

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'яже нормальні напруги і згинаючий момент,

застосуємо метод перерізів і розглянемо рівновагу частини балки, зображеної на рис. 23.14,

У площині поперечного перерізу виділимо нескінченно малу площадку dF , у межах якої вважатимемо нормальні напруги σ сталими; тоді нормальна сила dN яка діє на площадку dF , дорівнюватиме $dN = \sigma dF$

Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \sum Z = 0; \quad \int_F dN = 0 \quad \text{або}$$

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

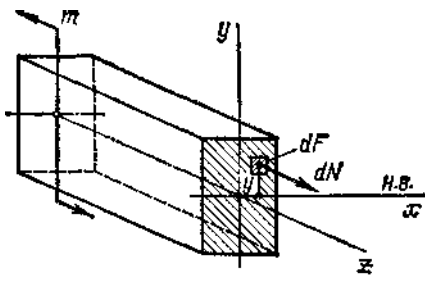


Рис. 23.14

(ρ для даного перерізу є величиною сталою, тому її винесено за знак інтеграла).

Через те що E і ρ не дорівнюють нулю, то

$$\int_F y dF = 0$$

Цей Інтеграл є статичним моментом ПЛОЩІ перерізу ВІДНОСНО ОСІ L' , тобто нейтральної осі x . Те, що статичний момент дорівнює нулю, означає, що під час згину *нейтральна вісь проходить через центр ваги площі поперечного перерізу*;

$$2) \sum M_z = 0; \quad -m + \int_F y dN = 0$$

Оскільки у випадку чистого згину згинаючий момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{зг} = m$, то

$$M_{зг} = \int_F y dN = \int_F y \sigma dF = \int_F y \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF$$

Звідки

$$M_{зг} = EJ/\rho$$

де $J = \int_F y^2 dF$ — момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі, а EJ — жорсткість перерізу при згині.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу

$$M_{зг} = const \quad ; \quad J = const$$

, то

$$\rho = \frac{EJ}{M_{зг}} = const$$

Отже, зігнута вісь такої балки є дугою кола.

Значення радіуса кривизни підставимо в формулу для обчислення нормальних напруг, тоді

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{E y}{\frac{EJ}{M_{зг}}} = \frac{M_{зг} y}{J}$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{зг} y_{max}}{J} = \frac{\frac{M_{зг}}{J}}{y_{max}} = \frac{M_{зг}}{W}$$

де

$W = J/y_{max}$ — момент опору деформації згину (або осьовий момент опору).

Момент опору деформації згину є відношення осьової моменту інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Одиниця моменту опору деформації згину $[W] = \text{м}^2$

Отже, найбільші нормальні напруги у випадку чистого згину визначаються формулою

$$\sigma = M_{\text{зг}}/W$$

Звернемо увагу на ту обставину, що ця формула за структурою подібна до формул для обчислення напруг розтягу, стиску, зсуву і кручення.

§ 23.6. Розрахункова формула на міцність для випадку згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненависання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Питання, що стосуються перевірки міцності балки на дотичні напруги і розрахунку балок на жорсткість розглядатимуться у наступних параграфах.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд

$$\sigma = M_{\text{зг max}}/W \leq [\sigma]$$

Її читають так: *нормальна напруга в небезпечному перерізі, обчислена за формулою*

$$\sigma = M_{\text{зг max}}/W$$

не повинна перевищувати допустиму. Допустиму нормальну напругу для випадку згину беруть такою самою, як для розтягу і стиску.

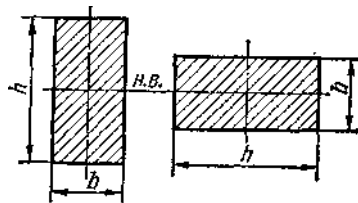


Рис. 23.15

Максимальний згинаючий момент визначають з епюру згинаючих моментів або розраховують.

Оскільки момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то чим більше W , тим *менші розрахункові напруги*.

Визначимо моменти опору деформації згину найбільш поширених перерізів,

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 23.15):

$$W_{\text{пр}} = \frac{J}{y_{\text{max}}} = \frac{bh^3}{12} \div \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то $W'_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{6}$, тоді

$$\frac{W_{\text{пр}}}{W'_{\text{пр}}} = \frac{bh^2}{6} \div \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{b} > 1$$

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруги σ' в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими, ніж у тій самій балці, коли її найбільший габаритний розмір h вертикальний (маєть ся на увазі,

що згин відбувається у вертикальній площині).

Із сказаного випливає правило: для забезпечення максимальної міцності вісь, відносно якої момент інерції максимальний, повинна бути нейтральною.

2. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1 d^3$$

3. Кільце розміром $D \times d$:

$$W = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \div \frac{D}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D} \approx 0.1 \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

Питання для самоконтролю

1. Що означає коли статичний момент $= 0$?
2. Як визначити момент опору деформації ?
3. Які напруги виникають при згині?
4. Пояснити розрахункову формулу на міцність для згину.