Тема 2.1. Диференціальне числення функції однієї змінної

2.1.1. Неперервність функції в точці і на проміжку.

2.1.2. Похідні елементарних функцій та їх знаходження.

2.1.3. Застосування диференціала до наближених обчислень.

2.1.4. Опуклість та точки перегину графіка функції.

2.1.1. Неперервність функції в точці і на проміжку.

Функція називається **неперервною** в точці x_o, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_o.

Отже, функція $y = f(x)$ в точці x_o, буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_o, ;

2) для функції існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_o, дорівнює значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку, то її називають **неперервною** на даному проміжку.

Справедливі такі теореми.

Теорема 1. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є неперервними в точці x , то в цій точці будуть неперервними й функції $y = f(x) \pm g(x)$ та $y = f(x) – g(x)$.

Теорема 2. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є неперервними в точці x_o і $g(x_0) \neq 0$, то в точці x_o, буде неперервною також і функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Виходячи з теорем 1 та 2, можна стверджувати:

1) Многочлен $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 +... + a_nx^n$ – неперервна функція в

будь-якій точці $x_0 \in R$.

2) Дробово-раціональна функція $y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^x}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}$

неперервна в усіх точках числової осі, крім тих точок, у яких знаменник дорівнює нулю.

Крім того, слід зазначити, що вивчені нами функції y = sin x, y = cos x, y = tgx, y = ctgx, y = a^x, y = $\log_a x$, y = $\sqrt{x}$, y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arcctg x, y = |x| є також неперервними в усіх точках області визначення.

Приклад 2.1.1.

Доведіть неперервність функцій

а) $y = \sqrt{x}$ при $x > 0$; б) $y = \sin x$ при x є R.

Розв'язання

а) Доведемо, що $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при $a > 0$.

Оцінимо різницю $\sqrt{x} - \sqrt{a}$:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x - a|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Легко бачити: $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, якщо взяти $|x - a|$ менше $\sqrt{a}\varepsilon$. Таким чином, для всякого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ таке, що із нерівності $|x - a| < \delta$ випливає $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a} \cdot \varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ тобто функція y = $\sqrt{x}$ неперервна для всіх $\chi > 0$.

б) Доведемо, що $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ для x є R.

Оцінимо різницю $\sin x - \sin a$:

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \left|\sin \frac{x - a}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x + a}{2}\right| < 2 \cdot \left|\sin \frac{x - a}{2}\right| < 2 \cdot \left|\frac{x - a}{2}\right| = |x - a|$$

Легко бачити: |sin x - sin α| < ε, ε > O, якщо взяти |x - a| менше ε.

Таким чином, для всякого ε > 0 існує δ = ε таке, що із нерівності |x — a| < δ випливає |sin x — sin a| < |x — α| < δ = ε.

Отже, $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$, тобто функція $y = sin\ x$ неперервна для всіх x є R.

2.1.2. Похідні елементарних функцій та їх знаходження.

Таблиця похідних

1. $c' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
7. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(e^x)' = e^x$
13. $(a^x)' = a^x \ln a$
14. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
15. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Теорема про похідну суми.

Теорема: Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то

їхня сума диференційована в цій точці і $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, або коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Наслідки:

а) Похідна різниці дорівнює різниці похідних: $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$;

б) Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто: $(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))' = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)$.

Приклад 2.1.2.

Знайдіть похідні функцій

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$;

Розв'язання

$f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 =$
$= 3x^2 - 2x + 1$;

Теорема про похідну добутку.

Теорема : Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхній добуток також диференційована функція в цій точці і $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$,

або коротко говорять: похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну другої функції.

Наслідки:

а) Постійний множник можна виносити за знак похідної: $(cf(x))' = cf'(x)$.

б) Похідна добутку декількох співмножників дорівнює сумі добутків похідної кожного із них на всі останні.

наприклад: $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$.

Приклад 2.1.3.

Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x \cdot \sin x$; б) $y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\text{tg } x$; в) $y = (x-1)(x+2)\cdot\cos x$.

Розв'язання

а) $y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$;

б) $y' = (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\,\mathrm{tg}\, x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7\,\mathrm{tg}\, x)' =$

$=5\cdot(x^5)' +6\cdot(x^2)' +2\cdot x' -7\cdot(\mathrm{tg}\, x)' =5\cdot5x^4+6\cdot2\cdot x+2\cdot1-7\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=25x^4+12x+2-\frac{7}{\cos^2 x}$;

в) $y' = ((x-1)(x+2)\cos x)' = (x-1)'(x+2)\cos x+(x-1)(x+2)'\cos x+$

$+(x-1)(x+2)\cdot(\cos x)' = 1\cdot(x+2)\cos x+(x-1)\cdot1\cdot\cos x+$

$(x-1)(x+2)\cdot(-\sin x)= (x+2)\cos x+(x-1)\cos x-(x-1)(x+2)\sin x=$

$=(2x+1)\cos x-(x-1)(x+2)\sin x$.

Теорема про похідну частки.

Теорема : Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x і $g(x)\neq 0$, то функція $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ диференційована в цій точці і

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Приклад 2.1.4.

Знайдіть похідні функцій

а) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x^3}{\sin x}$.

Розв'язання

а) $$y' = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

б) $$y' = \left(\frac{x^3}{\sin x}\right)' = \frac{(x^3)'\sin x - x^3(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}.$$

2.1.3. Застосування диференціала до наближених обчислень.

При досить малому прирості x аргументу Δx диференційованої функції *f(x)* приріст у функції Δy буде близький за своєю величиною до диференціала функції. Тому приріст функції можна наближено прирівнювати до диференціала функції

$$\Delta y \approx dy, \text{ або } \Delta f(x_0+\Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

якщо позначити $\Delta x = x - x_0$, то рівняння приймає вигляд

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x-x_0), \text{ або } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Таким чином, для значення де, близьких до x_0, функцію *f (x)* наближено можна замінити лінійною функцією. Геометрично це заміна ділянки кривої *y=f(x),* прилеглої до точки *(x₀,f(x₀),* відрізком дотичної до кривої в цій точці (Рис. 2.1.1):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

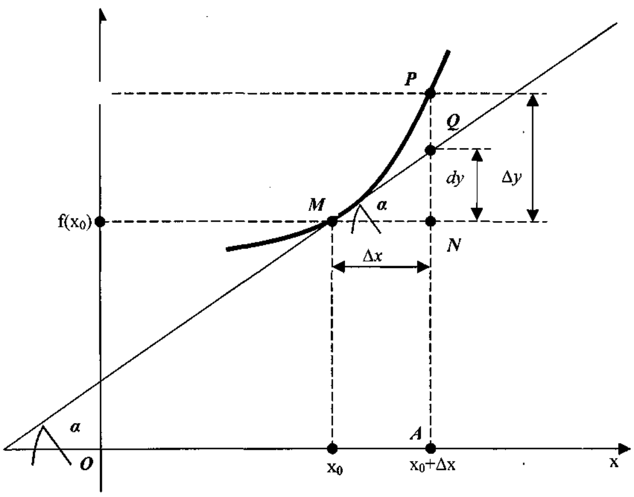

Рис. 2.1.1

Беручи значення $x_0 = 0$ і обмежуючись малими значеннями x, одержимо наближену формулу

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x$$

Звідси, підставляючи замість *f (x)* різні елементарні функції, легко одержати ряд формул

$$(1+x)^{\mu} \approx 1+\mu x; (\text{наприклад } \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x)\ ;$$

$$l^x \approx 1+x; \ln(1+x) \approx x; \sin x \approx x, tgx \approx x.$$

Приклад 2.1.5.

Обчислимо наближено sin 46°.

Приймемо за початкове значення незалежної змінної $x_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$, а за $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$. Тоді

$$\sin 46^0 = \sin(45^0 + 1^0) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{\pi}{4} + soc\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}7194.$$

Приклад 2.1.6.

Обчислити наближено $\sqrt{3{,}9978}$.

Розглянемо функцію $\sqrt{x}$ і приймемо за початкове значення незалежної змінної $x_0 = 4$, а за $\Delta x = -0{,}0022$. Тоді

$$\sqrt{3{,}9978} = \sqrt{4 - 0{,}0022} = 2 - \frac{0{,}0022}{2\sqrt{4}} = 1{,}9945.$$

2.1.4. Опуклість та точки перегину графіка функції.

Графік функції $y = f(x)$ може бути **опуклим** або **угнутим**.

Графік функції $y = f(x)$ є **опуклим** на проміжку $(a; b)$, якщо відповідна дуга кривої лежить нижче дотичної, проведеної в довільній точці $M(x, f(x))$.

Графік функції $y = f(x)$ є **угнутим** на проміжку $(a; b)$, якщо відповідна дуга кривої лежить вище дотичної, проведеної в довільній точці $M(x, f(x))$.

Для дослідження графіка функції на опуклість застосовується друга похідна функції.

Якщо друга похідна двічі диференційовної функції $y = f(x)$ від'ємна $(f''(x) < 0)$ в інтервалі $(a; b)$, тоді графік функції $y = f(x)$ опуклий на

даному проміжку, якщо друга похідна додатна $(f''(x)>0)$, тоді графік функції угнутий на $(a;b)$.

Точка, при переході через яку крива змінює опуклість на угнутість або навпаки, називається **точкою перегину**.

Точками перегину функції $y=f(x)$ можуть бути лише точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує. Такі точки називають **критичними точками другого роду**

Приклад 2.1.7.

Дослідимо функцію $f(x)=\sin x-\ln\sin x$ на опуклість і вгнутість.

Період функції $T=2\pi$. Тому дослідження функції достатньо спочатку провести на проміжку $(0;\pi)$. Крім того, враховуючи, що $\sin(\pi-x)=\sin x$, робимо висновок про симетричність графіка відносно прямої $x=\dfrac{\pi}{2}$ на проміжку $(0;\pi]$. Тому можна обмежитися дослідженням функції на проміжку $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Знайдемо похідні першого і другого порядку функції

$$f'(x)=\cos x-\frac{\cos x}{\sin x}=\cos x\left(1-\frac{1}{\sin x}\right),\quad f''(x)=-\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що для $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $f''(x)>0$. Отже, графік функції опуклий вниз. Тоді і на проміжку $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ він опуклий вниз.

Таким чином, на проміжках $(2\pi k;\pi+2\pi k)$ графік функції опуклий вниз.

Контрольні запитання

1. Які функції називаються неперервними в точці?

Запишіть правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій. Проілюструйте їх застосування на прикладах.

2. Сформулюйте правила знаходження похідноїьсуми, добутку та частки двох функцій.

3. Дайте геометричне тлумачення диференціала функції.
4. Як застосовують диференціал функції в наближених обчисленнях?
5. Який графік називається опуклим вгору (вниз)?
6. Які точки називаються точками перегину?