Тема 2.4. Диференціальні рівняння.

2.4.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку.
2.4.2. Задачі на складання диференціальних рівнянь.

З найпростішими диференціальними рівняннями ви вже зустрічалися при розв'язанні задач на знаходження рівняння кривої за кутовим коефіцієнтом дотичної, проведеної в точку дотику (наприклад, $y'=x$). І на визначення закону руху точки за даною функцією швидкості (наприклад, $S'=t^2$). В обох випадках по заданому рівнянню, що містить похідну шуканої функції, потрібно знайти цю функцію. А це означає розв'язати диференціальне рівняння.

2.4.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку.

Розв'язування багатьох фізичних, біологічних, технічних і інших практичних задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння $y' = ky$, де k — задане число. Розв'язками цього рівняння є функції $y = Ce^{kx}$, де C — постійна, яка визначається умовами конкретної задачі.

Задача 2.4.1.

Швидкість (t) розмноження бактерій пов'язана з масою m(t) бактерій в момент часу t рівнянням $m'(t) = km(t)$, де k — додатне число, яке залежить від виду бактерій і зовнішніх умов. Розв'язком цього рівняння є функції $m(t) = Ce^{kt}$, де C – довільна стала

Задача 2.4.2.

Якщо $m'(t)$ — швидкість радіоактивного розпаду в момент часу t, то $m'(t) = -km(t)$, де k — постійна, яка залежить від радіоактивної речовини. Розв'язками цього рівняння є функції $m(t) = Ce^{-kt}$. Якщо в момент часу t маса дорівнювала m_0, то С = m_0 і тому $m(t) = m_0e^{-kt}$. Слід зазначити, що на практиці швидкість розпаду радіоактивної речовини характеризується періодом піврозпаду, тобто, проміжком часу, за який розпадається половина даної речовини. Нехай T — період піврозпаду, тоді при t = T маємо $\frac{m_0}{2} = m_0e^{-kT}$,

звідси $k = \frac{\ln 2}{T}$. Отже, $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$

Поняття про диференціальні рівняння

Ми розглядали рівняння, в яких невідомими були числа. В математиці приходиться розглядати рівняння, в яких невідомими є функції. Так задача про знаходження шляху $S(t)$ за заданою швидкістю $v(t)$ зводиться до розв'язування рівняння $S(t) = v(t)$, де $v(t)$ — задана функція, а $S(t)$ — шукана функція. Наприклад, якщо $v(t) = 3 - 4t$, то для знаходження $S(t)$ треба розв'язати рівняння $S'(t) = 3-4t$.

Це рівняння містить похідну невідомої функції. Такі рівняння називаються диференціальними рівняннями.

Диференціальними називаються рівняння, які пов'язують між собою незалежну змінну, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним. Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в дане рівняння.

Диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язане відносно найвищої похідної, в загальному вигляді подається так

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Диференціальне рівняння **першого порядку** має вигляд

$F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$.

Так як

$y' = \frac{dy}{dx}$, то рівняння $y' = f(x, y).$ можна записати у вигляді

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, або $dy = f(x, y)dx$.

Якщо функція *f*(x, y) є дробом

$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$,

то рівняння можна записати у симетричній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція y = φ(x, C), яка в результаті підстановки в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність по x при будь-яких допустимих значеннях сталої C.

Процес знаходження розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

Приклад 2.4.1.

Розв'яжіть диференціальне рівняння $y'=2x+1$.

Розв'язання

Треба знайти функцію $y(x)$, похідна якої дорівнює $2x + 1$, тобто, знайти первісну функції $2x + 1$. Отже

$y = \int (2x - 1)dx = x^2 + x + C$, де C — довільна постійна.

Розв'язок диференціального рівняння визначається неоднозначне, з точністю до постійної. Як правило до диференціального рівняння додається умова, із якої ця постійна визначається.

2.4.2. Задачі на складання диференціальних рівнянь.

Приклад 2.4.2.

Другий закон Ньютона можна записати у формі диференціального рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t),$$

де m — маса тіла, x — його координата, $F(x,t)$ — сила, діюча на тіло з координатою x у момент часу t. Його розв'язком є траєкторія руху тіла під дією вказаної сили.

Приклад 2.4.3.

Коливання струни задається рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де $u = u(x,t)$ — відхилення струни в точці з координатою x у момент часу t, параметр a задає властивості струни.

Розв’яжемо задачу

Задача 2.4.3.

Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a = 6t - 4$ з початковою швидкістю 4м/с. В початковий момент часу знаходилося в початку координат. Знайти швидкість руху тіла і відстань, яку воно пройшло через 3 с.

Розв’язання

Запишемо прискорення руху тіла через похідну швидкості за часом

$$a(t) = \frac{dV}{dt}$$

Отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dV}{dt} = 6t - 4$$

Відокремимо змінні і отримаємо рівняння виду

$$dV = (6t - 4)dt$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння

$$\int dV = \int (6t - 4)dt$$

Отримаємо загальну формулу швидкості $V = 3t^2 - 4t + C_1$. Звідки $C_1 = V - 3t^2 + 4t$

Згідно початковим умовам, в початковий момент часу $t_0 = 0$ початкова швидкість $V_0 = 4$. Тоді $C_1 = 4 - 0 = 4$

Отже формула швидкості прийме вигляд $V = 3t^2 - 4t + 4$

Швидкість руху тіла через 3с буде $V(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 19(m/c)$

Обчислимо відстань, яку пройшло тіло за час 3 с.

Для цього скористуємося механічним змістом першої похідної

$$V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$$

Запишемо формулу швидкості у вигляді

$$\frac{dS}{dt} = 3t^2 - 4t + 4$$

Для того, щоб розв’язати таке рівняння, спочатку відокремимо змінні і тоді його проінтегруємо

$$dS = (3t^2 - 4t + 4)dt, \quad \int dS = \int (3t^2 - 4t + 4)dt$$

В результаті маємо загальну формулу відстані $S = t^3 - 2t^2 + 4t + C_2$

Звідки константа $C_2 = S - t^3 + 2t^2 - 4t$

Оскільки за умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ відстань $S = 0$ то $C_2 = 0$

Отже формула відстані в довільний момент часу матиме вигляд $S = t^3 - 2t^2 + 4t$

Знайдемо відстань, яку пройшло тіло за час $t = 3c$

$S = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 4 = 13$ (м)

У житті часто зустрічаються процеси, які періодично повторюються, наприклад коливальний рух маятника, струни, пружини і т. д.; процеси, пов'язані з електричним струмом, магнітним полем тощо. Розв'язування багатьох таких задач зводиться до розв'язування рівняння $y'' = -\omega^2 y$, де ω — задане додатне число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$.

Функцію $(y'(x))'$ називають другою похідною функції $y(x)$ і позначають $y''(x)$ або коротко y''.

Розв'язком рівняння $y'' = -\omega^2 y$ є функції $y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2)$,

де C_1 C_2 — постійні, що визначаються умовами конкретної задачі. Рівняння $y'' = -\omega^2 y$ називають диференціальним рівнянням гармонічних коливань, а $y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2)$ — розв'язком гармонічних коливань.

Контрольні запитання.

1. Наведіть приклади задач, що приводять до складання і розв’язання диференціальних рівнянь.
2. Дайте визначення диференціального рівняння.
3. Що називається розв’язком диференціального рівняння?