Тема 2.5. Ряди

2.5.1. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність рядів.

Окрім знакододатних рядів на практиці зустрічаються знакозмінні та знакопочергові ряди.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

називається **знакозмінним,** якщо частина його членів приймає додатні значення, а решта - від'ємні.

Знакопочерговим називається ряд, сусідні члени якого мають протилежні знаки. У випадку, коли перший член знакопочергового ряду додатний, його можна подити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2k+1} - a_{2k+2} + \ldots, \left(a_n > 0,\ n \in N\right).$$

Для дослідження збіжності ряду використовують **ознаку Лейбніца:**

якщо члени знакопочергового ряду спадають по абсолютній величині та

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

то ряд збіжний. При цьому сума ряду не перевищує значення його першого члена, якщо він додатній.

Для знакозмінного ряду існують поняття абсолютної та відносної збіжності.

Знакозмінний (знакопочережний) ряд збіжний абсолютно, якщо цей ряд та ряд утворений з модулів членів цього ряду збіжні одночасно.

Ряд називають умовно або неабсолютно збіжним у випадках, коли збіжний лише знакозмінний ряд, а ряд складений з абсолютних величин членів ряду розбігається.

Приклад и

Дослідити які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються

2.5.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

Даний ряд знакопочережний, а також кожен наступний член по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

За ознакою Лейбніца ряд збіжний. Перевіримо ряд, складений модулів членів, на абсолютну збіжність. Застосуємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1.$$

Дана ознака відповіді не дає. Застосуємо інтегральну ознаку Коші

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Ряд розбіжний. Оскільки знакопочережний ряд збіжний, а ряд з модулів розбіжний, то роглянутий ряд умовно збіжний.

2.5.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2};$$

Кожен наступний член ряду по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{(2n-1)^2} > \frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Границя рівна нулеві

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0.$$

Ознака Лейбніца виконується. Перевіримо на абсолютну збіжність. Застосуємо інтегральну ознаку Коші

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{(2x-1)^2} = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2(2x-1)}\Big|_1^b = 0 + \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Вона підтверджує збіжність ряду. Вихідний ряд абсолютно збіжний.

2.5.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+1};$$

Необхідна ознака збіжності не виконується, оскільки кожен наступний член ряду по модулю більший за попередній

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+5}.$$

Ряд розбіжний.

2.5.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\sqrt{2n+1}};$$

Члени ряду спадають

$$\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3}} > \frac{1}{(2n+3)\sqrt{2n+5}}.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = 0.$$

Отже ряд збіжний за ознакою Лейбніца.

Перевіримо на абсолютну збіжність. З вигляду бачимо, що ознака Делабера нічого не дасть. Застосуємо інтегральну ознаку Коші

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x+1}} = \begin{Bmatrix} 2x+1=t^2 \\ dx = tdt \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^b \frac{udu}{u\left(u^2-2\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{b\to\infty} \operatorname{arctan h}\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} \approx 0{,}81.$$

Даний ряд збіжний. Отже, ряд абсолютно збіжний.

Контрольні запитання.

1. Який ряд називається збіжним, розбіжним?
2. Який ряд називається абсолютно збіжним, а який умовно збіжним?
3. Чи можна розв’язати питання про збіжність ряду, не користуючись необхідною ознакою збіжності?