# План

1. Побудова епюр при згині без навантаження.
2. Побудова епюр з рівномірно-розміщеним навантаженням.

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *згинаючий момент.* Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною І протилежні за знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі конструкцій {означення балки відоме з теоретичної механіки). Надалі майже завжди розглядатимемо такі бруси, в яких є хоча б одна площина симетрії і з нею збігається площина дії навантажень. У цьому випадку деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил і згин називають прямим, на відміну від косого згину, який розглянуто в останньому параграфі цього розділу.

Вивчаючи деформації згину, уявлятимемо, що балка складається з незліченної кількості волокон, паралельних осі. Щоб мати уявлення про деформацію згину, поставимо два досліди:

1. Балку, що вільно лежить на двох опорах і має на верхньому і нижньому боках пази, в які вставлено точно підігнані за розміром пазів бруски, піддамо деформації згину (рис. 23.1). У результаті цього бруски, які містяться на опуклому боці, випадуть з пазів, а бруски, які містяться на вгнутому боці, виявляться затиснутими.

2, На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 23.2).

У результаті побачимо, що:

а) поперечні прямі лінії під час деформації залишаться прямими, але повернуться назустріч одна одній;

б) поздовжні прямі лінії, а також вісь бруса викривляться;

в) перерізи бруса стануть ширшими в поперечному напрямі на вгнутому боці і звузяться на опуклому боці.

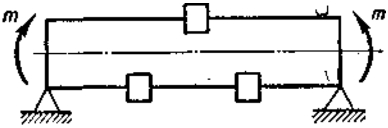


**Рис. 23.1**

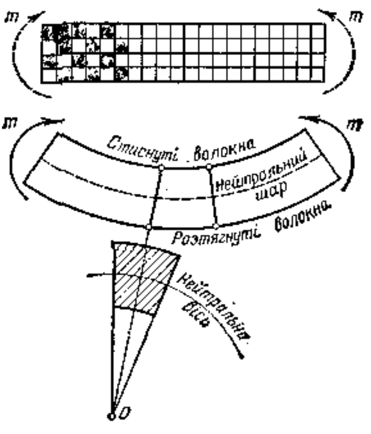


**Рис. 23.2**

З описаних дослідів можна зробити висновок, що *для чистого згину дійсна гіпотеза плоских перерізів',* волокна, які лежать на опуклому боці, *розтягуються,* а ті, що лежать на вгнутому боці — *стискаються.* На межі між ними лежить нейтральний шар волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини. Приймаючи дійсною гіпотезу про ненатискання волокон, можна стверджувати, що *при чистому згині з поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги, розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.*

Викривлення волокон І осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напруг по поперечному перерізу. Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають нейтральною віссю. На нейтральній осі нормальні напруги *дорівнюють нулю.*

## 11.4. Побудова епюр поперечних зусиль і згинальних моментів

***Епюрами поперечних зусиль*** $Q$ та ***згинальних моментів*** $M$ називаються графіки їх зміни (розподілу) вздовж осі балки за її довжиною. Побудова епюр виконується, як правило, одним з трьох методів: ***аналітичним***, ***за характерними точками*** та ***інтегральним***. В усіх випадках спочатку визначають реакції опор, які надалі враховують як зовнішні сили. Методи відрізняються способом обчислення величин поперечних зусиль і згинальних моментів у ***характерних перерізах***, якими є границі ділянок та перерізи, де поперечне зусилля змінює знак у межах ділянки. Останнє можливе при наявності розподіленого навантаження. В ***сингулярних перерізах***, де діють зосереджені навантаження або моменти, на епюрах виникають розриви (стрибки). Тому необхідно визначати зусилля ліворуч і праворуч від перерізу.

Розглянемо порядок побудови епюр $Q$ та $M$ для найхарактерніших випадків навантажування балок.

### *11.4.1. Зосереджена сила на вільному кінці консолі*

Якщо на вільному кінці ***B*** консолі ***AB*** зосереджена вертикальна сила ***P*** (рис. 11.14), то балка має лише одну ділянку. Початок координат вибираємо в крайній лівій точці ***A*** балки, вісь ***X*** напрямляємо вздовж осі балки праворуч.

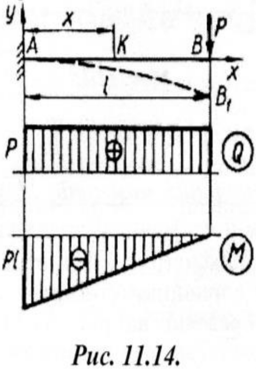


***Рис. 11.14.***

Визначимо $Q$ та $M$ у довільному перерізі ***K*** з абсцисою $x$. Праворуч від перерізу, що розглядається, діє тільки одна сила ***P***, тому:

$$Q(x) = P;\; M(x) = -P \cdot KB = -P \cdot (l - x). \quad (11.8)$$

Із цих рівнянь випливає, що поперечна сила однакова в усіх перерізах балки, тому епюра $Q$ має вигляд прямокутника. Функція $M(x)$ лінійна. Для побудови її епюри досить знайти дві точки — на початку та в кінці ділянки: а) при $x = 0$ (переріз ***A***) $M_A = M(0) = -P \cdot (l - 0) = -P \cdot l$;

б) при $x = l$ (переріз ***B***) $M_B = M(l) = -P \cdot (l - l) = 0$.

За цими даними будуємо епюру $M$. Зазначимо, що додатні ординати епюр $Q$ та $M$ відкладаються вгору від бази. На рис. 11.14 штриховою лінією $\boldsymbol{AB_1}$ зображено балку в деформованому стані. З рисунка видно, що стиснутими є ниж-

3) ***защемлення*** (***жорстке затиснення*** або ***закріплення***), де можуть бути три складові — ***вертикальна*** $R_A$ і ***горизонтальна*** $H_A$ ***реакції*** й ***опорний момент*** (***момент защемлення***) $M_A$ (рис. 11.9, ***в***). Таке закріплення не допускає ні лінійних ні кутових переміщень. Прикладом такої може бути закріплення балконів в будинках. Усі реакції та моменти вважаються прикладеними в ***центрі тяжіння опорного перерізу*** (в точці ***A*** на рис. 11.9).

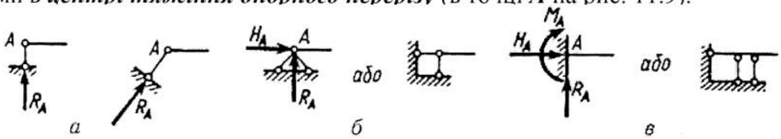


***Рис. 11.9.***

При конструюванні деталей машин, що спираються на опори, як балки, щоб не допускати виникнення температурних напружень, рекомендується застосовувати лише одну шарнірно-нерухому опору або защемлення, а решту опор слід ставити шарнірно-рухомими. ***Балка статично визначувана*** тоді, коли кількість невідомих опорних реакцій не перевищуватиме трьох; інакше — ***статично невизначувана***. Балка, зображена на рис. 11.10, ***а***, називається ***нерозрізною*** і є статично невизначуваною, оскільки має п'ять невідомих опорних реакцій: три в опорі ***A*** і по одній в опорах ***B*** та ***C***. Поставивши в перерізі балки шарніри, наприклад, в точках ***D*** і ***E*** (рис. 11.10, ***б***), матимемо статично визначувану шарнірну балку, бо кожний такий проміжний шарнір до трьох основних рівнянь статики додає одне додаткове рівняння: ***сума моментів відносно центра шарніра від усіх сил, розміщених по один бік від нього, дорівнює нулю***.

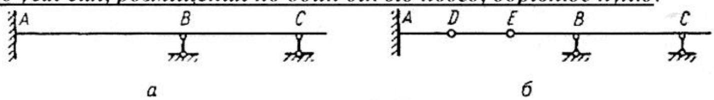


***Рис. 11.10.***

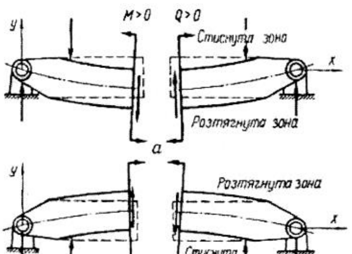


***Рис. 11.11.***

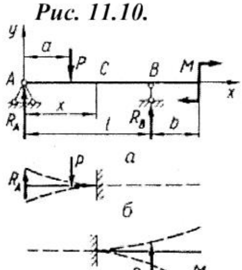


***Рис. 11.12.***

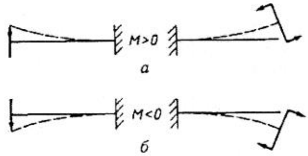


***Рис. 11.13.***

***Правила знаків для поперечних зусиль*** $Q$ ***та згинальних моментів*** $M$ ***у балках:*** 1) поперечна сила $Q$ у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою (рис. 11.11, ***а***); 2) згинальний момент $M$ у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки, і напрямлений так, як зображено на рис. 11.11. Від'ємні напрями $Q$ та $M$ наведено на рис. 11.11, ***б***.

***Рекомендації для практичних розрахунків:***

1. Якщо зовнішня сила намагається повернути балку відносно розглядуваного перерізу за годинниковою стрілкою, то у виразі для $Q$ в цьому перерізі вона

момент у довільному перерізі ***K*** як наслідок дії сил ліворуч від перерізу ***K***, матимемо:

$$Q(x) = R_A - q \cdot x = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), \tag{11.11}$$

$$M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot x - x^2\right). \tag{11.12}$$

Очевидно, що епюра $Q$ буде прямолінійна, а епюра $M$ — параболічна. Для побудови епюр дістаємо: $Q(0) = q \cdot \frac{l}{2}$; $Q\left(\frac{l}{2}\right) = 0$; $Q(l) = -q \cdot \frac{l}{2}$;

$$M(0) = 0; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}; \quad M(l) = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot l - l^2\right) = 0.$$

Щоб визначити екстремальне значення згинального моменту, прирівняємо до нуля похідну від згинального моменту $M(x)$ по абсцисі $x$ перерізу: $\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot x - x^2\right)\right] = \frac{q}{2} \cdot \left(l - 2 \cdot x\right) = 0$, звідси $x_{екст} = \frac{l}{2}$. Оскільки друга похідна згинального моменту $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dM(x)}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{q}{2} \cdot \left(l - 2 \cdot x\right)\right] = -q$ — від'ємна, то в перерізі балки при $x_{екст} = \frac{l}{2}$ згинальний момент буде максимальний: $M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}$. Побудовані епюри поперечного зусилля та згинального моменту для даної двохопорної балки також наведено на рис. 11.16.

### *11.4.4. Зосереджена сила прикладена до двохопорної балки*

Якщо до двохопорної балки ***AB*** в точці ***C*** прикладено зосереджену силу ***P*** (рис. 11.17), то, передусім, слід знайти опорні реакції, для чого складаємо рівняння рівноваги:

1. $M_B\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_B\left(\overrightarrow{P}\right) + M_B\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= -R_A \cdot l + P \cdot b + 0 = 0; \Rightarrow R_A = P \cdot \frac{b}{l};$

2. $M_A\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= 0 - P \cdot a + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = P \cdot \frac{a}{l}.$

У цьому разі маємо на балці дві ділянки.

Знаходимо $Q$ та $M$ у довільному перерізі $K_1$ розміщеному на ділянці ***AC*** $(0 \le x < a)$:

$$Q_1(x) = R_A = P \cdot \frac{b}{l}. \tag{11.13}$$

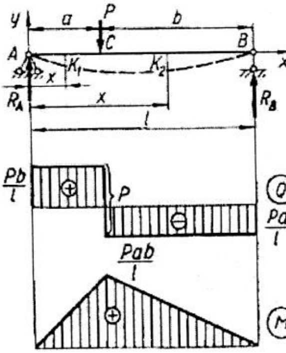


***Рис. 11.17.***

Отже, в усіх перерізах ділянки ***AC*** поперечні зусилля однакові й епюра $Q$ має вигляд прямокутника. Згинальний момент $M(x)$ на ділянці ***AC*** змінюється за лінійним законом:

$$M_1(x) = R_A \cdot x = P \cdot \frac{b}{l} \cdot x. \tag{11.14}$$

Для побудови епюри згинального моменту визначимо ординати на межах ні волокна балки. Якщо сумістити базову лінію епюри згинальних моментів з віссю балки, то епюра **M** буде мовби побудованою на стиснутих волокнах.

### *11.4.2. Рівномірно розподілене навантаження на консолі*

Якщо на консоль діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q, \frac{H}{м}$ (рис. 11.15), то поперечне зусилля $Q$ та згинальний момент $M$ у довільному перерізі **K** визначатимемо як наслідок дії розподіленого навантаження ліворуч від перерізу:

$$Q(x) = -q \cdot AK = -q \cdot x\,, \qquad (11.9)$$

$$M(x) = -q \cdot AK \cdot LK = -\frac{q \cdot AK^2}{2} = -\frac{q \cdot x^2}{2}. \qquad (11.10)$$

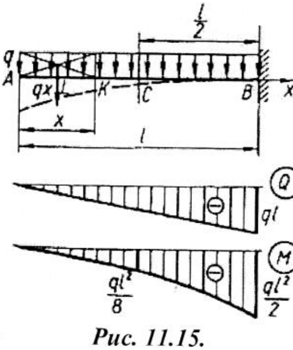

*Рис. 11.15.*

Отже, поперечна зусилля $Q(x)$ змінюється за законом прямої лінії, а згинальний момент $M(x)$ — за параболічним законом. Для побудови епюри $Q$ визначаємо ординати в двох точках: а) при $x = 0$ (переріз **A**) $Q_A = Q(0) = -q \cdot 0 = 0$; б) при $x = l$ (переріз **B**) $Q_B = Q(l) = -q \cdot l$; і проводимо пряму.

Враховуючи, що епюра $M$ криволінійна, для її побудови знаходимо ординати в трьох точках: а) при $x = 0$ (переріз **A**) $M_A = M(0) = -\frac{q \cdot 0^2}{2} = 0$;

б) при $x = \frac{l}{2}$ (переріз **C**) $M_C = M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{q \cdot l^2}{8}$;

в) при $x = l$ (переріз **B**) $M_B = M(l) = -\frac{q \cdot l^2}{2}$,

і проводимо через добуті три точки криву. Це й буде епюра $M$.

### *11.4.3. Навантаження рівномірно розподілене по всій довжині прогону двохопорної балки*

Якщо навантаження інтенсивністю $q, \frac{H}{м}$, рівномірно розподілено по всій довжині прогону двохопорної балки (рис. 11.16), то у цьому разі треба спочатку визначити опорні реакції. Рівнодійна всього розподіленого навантаження дорівнює $q \cdot l$, а лінія її дії проходить через середину балки. Тому рівняння рівноваги балки:

1. $M_B\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_B\left(\overrightarrow{q \cdot l}\right) + M_B\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= -R_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 0 = 0\,; \Rightarrow R_A = q \cdot \frac{l}{2}$;

2. $M_A\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{q \cdot l}\right) + M_A\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= 0 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0\,; \Rightarrow R_B = q \cdot \frac{l}{2}$.

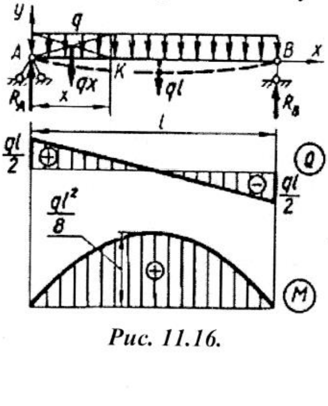

*Рис. 11.16.*

Обчислюючи поперечне зусилля і згинальний ділянки $AC$: а) при $x = 0 \Rightarrow M_A = M(0) = P \cdot \frac{b}{l} \cdot 0 = 0$;

б) при $x = a \Rightarrow M_C = M(a) = P \cdot \frac{b}{l} \cdot a$.

У довільному перерізі $K_2$ на ділянці **CB** $(a < x \le l)$, розглядаючи дію сил, розміщених праворуч від нього, для поперечного зусилля та згинального моменту дістанемо:

$$Q_2(x) = -R_B = -P \cdot \frac{a}{l}, \tag{11.15}$$

$$M_2(x) = R_B \cdot K_2 B = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - x). \tag{11.16}$$

До такого самого результату можна дійти, розглядаючи дію сил, розміщених ліворуч: $Q_2(x) = R_A - P = P \cdot \frac{b}{l} - P = P \cdot \left(\frac{b}{l} - \frac{l}{l}\right) = -P \cdot \frac{a}{l}$,

$$M_2(x) = R_A \cdot AK_2 - P \cdot CK_2 = P \cdot \frac{b}{l} \cdot x - P \cdot (x - a) = P \cdot \left(\frac{b \cdot x}{l} - \frac{l \cdot x - l \cdot a}{l}\right) =$$

$$= P \cdot \frac{b \cdot x - l \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{(b - l) \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{-a \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - x).$$

Епюра $Q$ на ділянці **CB**, як і на ділянці **AC**, має вигляд прямокутника. Для побудови епюри $M$ знайдемо значення ординат моментів у перерізах **C** та **B**:

а) при $x = a \Rightarrow M_C = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - a) = P \cdot \frac{a}{l} \cdot b$;

б) при $x = l \Rightarrow M_B = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - l) = 0$.

У результаті дістанемо епюри, які наведено на рис. 11.17. Вони показують, що при $x = a$ функція $Q(x)$ розривається і на епюрі $Q$ має місце ***стрибок***, що за модулем дорівнює зовнішній силі ***P*** у цьому перерізі:

$$P \cdot \frac{b}{l} + P \cdot \frac{a}{l} = P \cdot \frac{(b + a)}{l} = P \cdot \frac{l}{l} = P.$$

На епюрі ***M*** у цьому перерізі є ***перелом*** (***кутова точка***).

### *11.4.5. Зосереджений момент у прогоні двохопорної балки*

Якщо у прогоні двохопорної балки **AB** прикладено зосереджений момент $M_1$ (рис. 11.18), то для побудови епюр $Q$ і $M$ спершу знаходимо опорні реакції, напрямляючи їх угору. Для цього складемо рівняння рівноваги, як суми моментів відносно точок ***A*** і ***B***:

1. $M_B\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_1 + M_B\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= -R_A \cdot l - M_1 + 0 = 0; \Rightarrow R_A = -\frac{M_1}{l}$;

2. $M_A\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_1 + M_A\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$

$= 0 - M_1 + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = \frac{M_1}{l}$.

Змінюємо напрям $R_A$ на обернений.

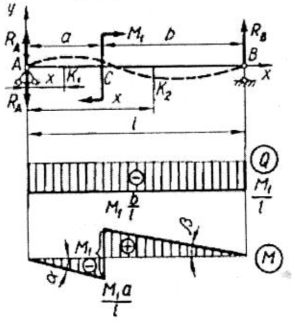


*Рис. 11.18.*

Помітивши на ділянках **AC** і **CB** довільні перерізи $K_1$ і $K_2$, запишемо рівняння для функцій $Q(x)$ та $M(x)$:

а) для ділянки **AC** $(0 \le x \le a)$ у перерізі $K_1$ (ліворуч) —

$$Q(x) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -R_A \cdot x = -\frac{M_1}{l} \cdot x. \tag{11.17}$$

б) для ділянки **CB** $(a \le x \le l)$ у перерізі $K_2$ (праворуч) —

$$Q(x) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2 B = \frac{M_1}{l} \cdot (l - x). \tag{11.18}$$

На підставі цих рівнянь будуємо епюри $Q$ та $M$. Епюра згинального моменту $M$ розміщена частково під віссю, частково над віссю. Оскільки вона побудована на стиснутих волокнах (рис 11.18), бачимо, що на ділянці **AC** стиснутими є нижні волокна, а на ділянці **CB** — верхні. Цьому відповідає зображена штриховою кривою деформована вісь балки. У тому перерізі, де згинальний момент змінює знак, на осі буде точка перегину.

Тангенси кутів нахилу ділянок епюри згинального моменту до осі епюри ($\alpha$ і $\beta$ на рис 11.18) рівні між собою: $tg\alpha = \dfrac{\frac{M_1 \cdot a}{l}}{a} = tg\beta = \dfrac{\frac{M_1 \cdot b}{l}}{b} = \dfrac{M_1}{l}$, (11.19)

а тому прямі на епюрі $M$ на ділянках **AC** та **CB** паралельні. Там, де прикладений зовнішній момент (переріз **C**), на епюрі $Q$ ніяких змін немає, функція $M(x)$ розривається, а на епюрі $M$ має місце ***стрибок***, що дорівнює значенню зовнішнього моменту. У тому разі коли момент прикладений в опорному перерізі, на підставі (11.17) і (11.18) при $a = 0$, дістанемо епюри, які зображено на рис. 11.19.

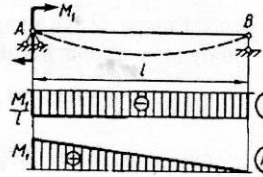

***Рис. 11.19.***

### *11.4.6. Зосереджені моменти на опорах однопрогонової балки*

У випадку, коли на опорах однопрогонної балки **AB** діють зосереджені моменти $M_1 = M_2 = M$ (рис. 11.20), то для побудови епюр $Q$ і $M_z$ спершу знаходимо опорні реакції з рівнянь рівноваги балки:

1. $M_B\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_1 + M_2 + M_B\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$
   $= -R_A \cdot l - M + M + 0 = 0; \Rightarrow R_A = 0;$
2. $M_A\left(\overrightarrow{R_A}\right) + M_1 + M_2 + M_A\left(\overrightarrow{R_B}\right) =$
   $= 0 - M + M + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = 0.$

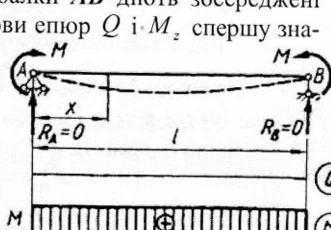

***Рис. 11.20.***

Тоді для довільного перерізу на відстані $\boldsymbol{x}$ від лівої опори

$$Q(x) = R_A = 0; \quad M_z(x) = M = const. \tag{11.20}$$

Отже, в будь-якому перерізі $Q = 0$, а згинальний момент однаковий по всій довжині балки. Таке згинання балки має назву ***чистого згинання***.