Тема 1.4. Елементи векторної алгебри

1.4.1. Базис на площині і в просторі. Система координат. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів.

1.4.2. Застосування скалярного, векторного і мішаного добутку векторів до розв'язування прикладних задач.

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який із його кінців є початком, а який – кінцем.

Відстань від початку вектора до його кінця називають довжиною вектора або його абсолютною величиною і позначають $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називається **одиничним вектором** або **ортом.**

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих, називаються **колінеарними.**

Колінеарні вектори бувають однаково напрямленні і протилежно напрямлені

Вектори, які лежать в одній площині або паралельних площинах, називаються **компланарними**

Критерій колінеарності двох векторів**: колінеарні вектори є лінійно залежними.**

1.4.1. Базис на площині і в просторі. Система координат. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів.

Означення . Лінійно залежними називають вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, якщо існує хоч би одне дійсне число α_i (i = 1,2,…, n), що не дорівнює нулю і виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n = 0$$

Означення . Лінійно незалежними називають вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, якщо рівність виконується тільки тоді, коли усі $\alpha_i = 0 (i = 1,2,\ldots,n)$.

На площині 2 неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють базис. Це означає, що довільний вектор $\vec{d}$ можна представити у вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Де x, y - координати вектора $\vec{d}$ в даному базисі

Декартова система координат на площині (рис.1.4.1) вважається заданою, якщо на площині вказано:

а) дві взаємно перпендикулярні прямі, на кожній із яких вибрано додатній напрям - осі ординат (вісь абсцис і вісь ординат). Точка О перетину цих координат називається початком координат;

б) одиничний відрізок.

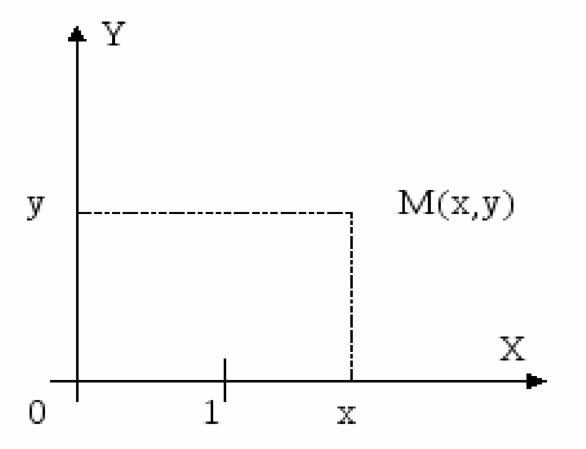


Рис.1.4.1

Прямокутними декартовими координатами довільної точки М площини називається впорядкована пара чисел x і y, де x - координата проекції точки на вісь абсцис, а y - координата проекції точки на вісь ординат. Той факт, що точка М має координати x і y , записується так: M(x;y).

Довільна впорядкована (взята в певному порядку) трійка некомпланарних векторів називається базисом простору.

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{k}$

Якщо деякий вектор представити як лінійну комбінацію інших векторів, то говорять, що він розкладений за цими векторами.

Система координат, в якій вектори i, j, k утворюють праву трійку векторів, називається правою.

Декартова система координат в просторі (рис.1.4.2) вважається заданою, якщо в просторі вказано:

а) три взаємно перпендикулярні прямі, на кожній із яких вибрано додатній напрям - осі ординат (вісь абсцис, вісь ординат і вісь аплікат). Точка О перетину цих координат називається початком координат;

б) одиничний відрізок.

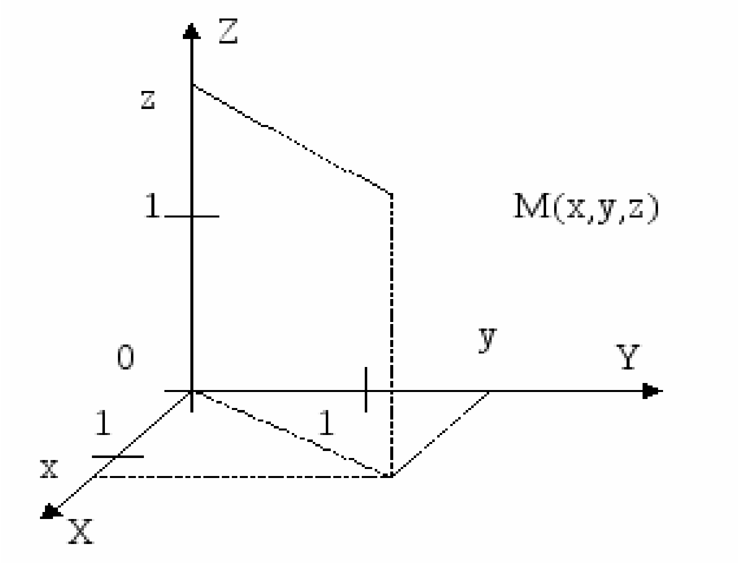


Рис.1.4.2

Прямокутними декартовими координатами довільної точки M простору називається впорядкована трійка чисел *x* і *y*, z, де *x* - координата проекції точки на вісь абсцис, а *y* - координата проекції точки на вісь ординат, z- координата проекції точки на вісь аплікат.

Той факт, що точка M має координати *x* і y, z , записується так: M(x;y;z).

Декартова система координат у просторі дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і впорядкованими трійками чисел, а на площині — взаємно однозначну відповідність між точками площини і впорядкованими парами чисел.

Координатами вектора називаються величини його проекцій на відповідні осі координат. Координати вектора позначимо через (x;y) на площині або через (x;y;z) у просторі. Тоді будемо записувати $\overrightarrow{OM}$ (x;y;z), або $\overrightarrow{OM}$ =xi+yj+zk

Де i, j, k –орти відповідно осей OX, OY, OZ - одиничні базисні вектори прямокутної декартової системи координат

Умови, за яких вектори утворюють базис

$$\vec{a}(x_1;y_1),\vec{b}(x_2;y_2)\Rightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1),\vec{b}(x_2;y_2;z_2),\vec{c}(x_3;y_3;z_3)\Rightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\neq 0$$

Приклад 1.4.1.

Довести, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис у просторі, якщо

$\vec{a}$ (3;-2;1), $\vec{b}$ (2; -5; 4) , $\vec{c}$ (2; -3; -1)

Розв'язання:

Записуємо координати у визначник та застосовуємо правило трикутників для визначника

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -5 & 4\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=3(-5)(-1)+(-2)\cdot 4\cdot 2+1\cdot 2\cdot(-3)-(1\cdot(-5)\cdot 2+(-2)\cdot 2\cdot(-1)+$$

$$+3\cdot 4\cdot(-3))=15-16-6+10-4+36=35$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю то вектори утворюють базис в просторі.

Дії над векторами, заданими своїми координатами

Якщо вектори задано своїми координатами в базисі e_1 e_2, e_3, то дії над ними виконуються за такими правилами:

1. При додаванні двох (або більшої кількості) векторів відповідні координати їх додають:

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 + x_2;\ \ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

2. При відніманні векторів відповідні координати їх віднімають:

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) - (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 - x_2;\ y_1;\ - y_2;\ z_1 - z_2).$$

3. При множенні вектора на число всі координати його множать на це число.

$$\lambda\ (x_1;\ y_1;\ z_1) = \lambda\ (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3) = \\ = (\lambda x_1)\ \boldsymbol{e}_1 + (\lambda y_1)\ \boldsymbol{e}_2 + (\lambda z_1)\ \boldsymbol{e}_3 = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1).$$

Приклад 1.4.2.

За координатами векторів a=(-4; 6; 0), b(1; —1; 7) знайти координати векторів a + b; a — b; 5a; 3b-0,5a.

Використовуючи правила 1—3, маємо

a-b = (-3; 5; 7);   a - b = (-5; 7; - 7); 5a=(-20; 30; 0); 3b – 0,5a=(5; -6; 21).

4. Скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком двох векторів a і b називається добуток їх модулів (довжин) на косинус кута між ними

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Враховуючи, що

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha, \quad a\,np_{\vec{a}}\,\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cos\alpha$$

можна записати

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \left|\vec{b}\right| np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\,\vec{b}.$$

Властивості скалярного добутку

1. $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})$.
2. $((\alpha\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})$.
4. $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = \left|a\right|^2$, *або* $\sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \left|\vec{a}\right|$.

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0,\ \text{то}\ \vec{a}\perp\vec{b},$$

Якщо під дією сили $\vec{F}$ точка переміщається з положення В в положення С, то виконана при цьому робота А дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ і вектора переміщення $\overrightarrow{BC}$:

$$A = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{C}\right|\cdot\cos(\vec{F},\overrightarrow{BC})$$

1.4.2. Застосування скалярного, векторного і мішаного добутку векторів до розв'язування прикладних задач.

Приклад 1.4.3.

До точки прикладено 2 сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$, які діють під кутом 120º, причому $\left|\vec{P}\right| = 7$, $\left|\vec{Q}\right| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\vec{R}$.

Розв'язання.

Оскільки $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$, то

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\vec{R}^2} = \sqrt{\vec{P}\vec{P} + 2\vec{P}\vec{Q} + \vec{Q}\vec{Q}} = \sqrt{\left|\vec{P}\right|^2 + 2\left|\vec{P}\right|\left|\vec{Q}\right|\cos 120^\circ + \left|\vec{Q}\right|^2} = \sqrt{37}\,.$$

Векторний добуток двох векторів.

Векторним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє таким умовам:

1) Довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$$

2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до площини цього паралелограма, тобто перпендикулярний і до вектора $\bar{a}$, і до вектора $\bar{b}$:

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 0 \quad \text{та} \quad \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$$

3) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взяті у такому порядку, утворюють праву трійку векторів. Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається правою, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Для векторного добутку $\bar{c}$ вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ вводиться позначення:

$$\bar{c} = \left[\bar{a}\,\bar{b}\right] \quad \text{або} \quad \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$$

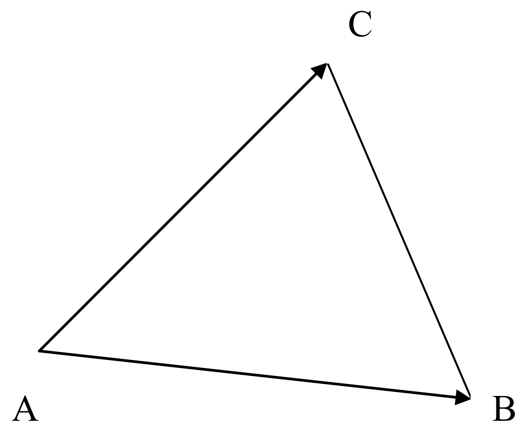
Якщо **векторний добуток** двох векторів записати у **координатній формі,** то маємо:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

Модуль векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Тоді площу трикутника з вершинами у точках A, B, C можна знайти за формулою

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$



Якщо $\overline{F}$ є вектор сили, прикладеної до деякої точки B, а вектор $\overline{AB}$, спрямований з точки A в точку B, то векторний добуток $\left[\overline{AB}, \overline{F}\right]$ буде **моментом** $\overline{M}$ **сили** $\overline{F}$ відносно точки A.

Приклад 1.4.4.

Трикутник задано вершинами A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторонуAC.

Розв'язання:

Знаходимо вектори $\overline{AB} = (4; -5; 0)$ та $\overline{AC} = (0; 4; -3)$. Тоді згідно з формулою $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ дістанемо:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2}\ кв.од.$$

Крім того, з шкільного курсу геометрії відомо, що

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot h, \quad h = \frac{2S}{AC}.$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5, \quad h = 2 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Приклад 1.4.5.

На точку A(4; 2; -3) діють дві сили $\overline{F_1} = (-1; 3; -1)$ та $\overline{F_2} = (3; -1; 10)$. Знайти момент рівнодіючої цих сил та його абсолютну величину відносно точки B(2; 4; 0).

Розв'язання:

Знайдемо рівнодіючу заданих сил

$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = (2; 2; 9)$ та вектор $\overline{AB} = (-2; 2; 3)$.

Згідно зі сказаним вище, момент сили знаходиться за формулою:

$$\overline{M} = \left[\overline{AB}, \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 12\bar{i} + 24\bar{j} - 8\bar{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overline{M}\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = 28.$$

Якщо векторний добуток двох векторів $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]$ помножити скалярно на третій вектор $\bar{c}$, то такий **добуток трьох векторів називається мішаним** (векторно-скалярним) і позначається так:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c} = \bar{a}\left[\bar{b}\,\bar{c}\right] = \left(\overline{abc}\right)$$

Мішаний добуток має просте геометричне тлумачення – це скаляр, який за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних трьох векторах.

Приклад 1.4.6.

Три вершини тетраедра знаходяться в точках A(2; 1; 1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3). Знайти координати четвертої вершини D, яка належить вісі Oy, якщо об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од.

Розв'язання:

Оскільки точка D належить вісі Oy, то її координати $D(0;\ y;\ 0)$. Об'єм тетраедра $ABCD$ можна розглядати як $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ як на ребрах:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right)\right| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix},$$

$$3 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо, що $y_{D1} = -4;\ y_{D2} = 5$ отже $D_1(0;-4;0);\ D_2(0;5;0)$.

Контрольні запитання

1. Які вектори називаються лінійно незалежними, а які – лінійно залежними?
2. Коли вектори є лінійно залежними?
3. Що називається базисом на площині? У просторі?
4. Який геометричний зміст векторного і мішаного добутків векторів?
5. Який фізичний зміст скалярного і векторного добутків векторів?