Тема 2.3. Інтегральне числення

2.3.1. Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості.
2.3.2. Знаходження інтегралів. Основні методи інтегрування.

Кожна математична дія має обернену дію. Яка дія обернена до додавання, віднімання,ділення, множення, піднесення до степеня, логарифмування? Яка дія буде оберненою до диференціювання функції? Ч можна, знаючи миттєву швидкість руху V(t) точки, визначити пройдений нею шлях S(t)?

2.3.1. Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості.

У диференціальному численні ми розв'язували задачу відшукання похідної або диференціала заданої функції. Практика показує, що часто доводиться за заданою похідною $F'(x) = f(x)$ або, що те саме, за заданим диференціалом $dF(x) = f(x)dx$ знаходити функцію, від якої взято похідну, тобто розв'язувати задачу, обернену до задачі диференціювання. Наприклад, якщо нам відома швидкість υ руху матеріальної точки, тобто $\upsilon = \upsilon(t), t \in [a;b]$, а ми повинні визначити шлях s, пройдений цією точкою, то, знаючи, що $\frac{ds}{dt} = \upsilon$, ми саме й маємо за заданою похідною $\frac{ds}{dt} = \upsilon(t)$, або $ds = \upsilon(y)dt$, знайти функцію s. Знаходження функцій за її похідною або диференціалом розглядають в інтегральному численні. Функцію, відновлену за заданою її похідною або диференціалом, називають первісною.

Функція F(x) називається первісною функції f(x) на даному проміжку, якщо для будь-якого x з цього проміжку F'(x) = f(x).

Приклад 2.3.1.

Перевірити, чи буде функція $F(x)=\sin x+2{,}5x^2$ первісною функції $f(x)= \cos x+5x$ на множині дійсних чисел?

Знайдемо похідну функції F(x), F‘(x) = cosx+2,5·2x, отже F(x)називається первісною функції f(x) на множині дійсних чисел

Основна властивість первісної

Якщо функція F(x) є первісною для функції f(x) на даному проміжку, а C — довільна стала, то F(x)+C є також первісною для функції f(x), при цьому будь-яка первісна для функції f(x) на даному проміжку може бути записана у вигляді F(x)+C , де С – довільна стала.

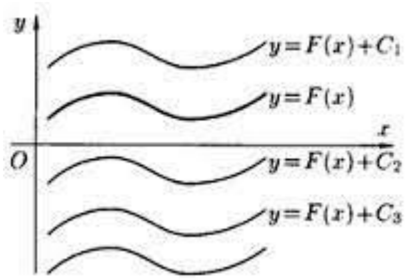

Рис. 2.3.1

Графіки будь-яких первісних одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ОУ (Рис. 2.3.1).

Означення. Якщо F(x) – первісна f(x), x є I, то вираз F(x)+c, де c – будь-яке число називається невизначеним інтегралом функції f(x) (або виразу f(x)dx) і записується $\int f(x)dx = F(x) + c.$.

Вираз $f(x)dx$ називається підінтегральним виразом, $f(x)$ називається підінтегральною функцією.

Приклад 2.3.2.

$$\int 1dx = x + c\,,\ \int xdx = \frac{x^2}{2} + c\,,\ \int e^x dx = e^x + c$$

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Припустимо, що всі функції в кожній з наведених нижче формул 1-6 визначені на одному й тому самому інтервалі і мають на цьому інтервалі первісні.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

4. $\int df(x) = f(x) + C$

5. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$ де $a \neq 0$ - стала.

6. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

Оскільки формула для диференціалу $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ інваріантна відносно х і значки $\int$, d взаємно скорочуються то, взявши з обох боків інтеграли отримаємо, що формула для інтеграла має таку ж властивість, тобто $\int f(x)dx = F(x) + c$ правильна і тоді коли х є внутрішня функція, тобто $\int f(x(t))dx(t) = F(x(t)) + c$

$$\int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + c, \quad \int tgx d(tgx) = \frac{tg^2 x}{2} + c.$$

2.3.2. Знаходження інтегралів. Основні методи інтегрування.

Для обчислення невизначених інтегралів використовуються таблиця основних формул інтегрування, метод підстановки (або формула заміни змінної), метод інтегрування частинами

Таблиця невизначених інтегралів (первісних)

(отримується із таблиці похідних)

1) $\int d(x) = x + c$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n є R, $n \neq -1,$ $\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + c,$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c,$ $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c.$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}, \quad (a > 0, a \neq 1)$ $\qquad \int e^x dx = e^x + c$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ 6) $\int \cos x dx = \sin x + c$

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$ 8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$ а) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, \ (a > 0)$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + c \\ -arcctgx + c \end{cases}$ а) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c, \ (a \neq 0)$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, \ (a \neq 0)$ 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm b} \right| + c, \ (b \neq 0)$

Знаходження функції за її похідною або за її диференціалом називається інтегруванням функції. Інтегрування – дія, обернена до диференціювання. Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням.

Приклад 2.3.3.

$\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C$, бо

$(x^2 + 3x + C)' = 2x + 3$.

Ми знаємо, що похідна елементарної функції завжди елементарна функція (видно з таблиці похідних).

Для інтегрування це не виконується, тобто інтеграл елементарної функції не завжди є елементарною функцією.

Приклади функцій, інтеграли від яких не є елементарними функціями

1) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - інтегральний синус; 2) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - інтегральний косинус;

3) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - інтегральна експонента,

4) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм;

5) $\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона; 6) $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ - інтеграли Френеля.

Теорема (про існування первісної)

Якщо f(x) неперервна на інтервалі, то існує її первісна на цьому інтервалі, але не обов'язково це буде елементарна функція.

Знайти невизначений інтеграл означає або знайти первісну, звівши інтеграл до табличних, або довести, що первісна не є елементарною функцією, звівши інтеграл до цих відомих інтегралів.

Безпосереднє інтегрування і метод розкладу

$$\int (3x^5 + 4x^2 + 7x + 1)dx = 3\frac{x^6}{6} + 4\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + c$$

$$\int \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}\right| + c$$

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = tgx - x + c$$

Метод підведення під знак диференціалу

Базується на властивості інваріантності інтегралу, диференціалу та властивостях диференціалу 1) $du = d(u \pm b)$, 2) $du = \frac{1}{a}dau$ 3) $dcu = cdu$ і формули підведення під знак диференціалу $f(x)dx = dF(x)$ (тут x може бути внутрішньою функцією).

Приклади:

2.3.4. $\int (x+5)^{10}dx = \int (x+5)^{10}d(x+5) = \frac{(x+5)^{11}}{11} + c$

2.3.5. $\int \cos(3x-7)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x-7)d(3x-7) = \frac{1}{3}\sin(3x-7) + c$

2.3.6. $\int \sin x^2 \cdot xdx = \int \sin x^2 d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int \sin x^2 dx^2 = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$

Отже, за цим методом ми змінюємо вираз під знаком диференціалу за правилами, стараючись його зробити таким як внутрішня функція в підінтегральному виразі.

Метод підстановки (заміни змінної)

Цей метод містить два прийоми.

а) Якщо для знаходження заданого інтеграла ∫f(x)dx зробити підстановку x = φ(t), тоді має місце рівність:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\dot{\varphi}(t)\,dt$$

Після знаходження останнього інтеграла треба повернутись до початкової змінної інтегрування x. Для застосування цього прийому треба, щоб функція x - φ (t) мала обернену t = ψ(x).

Приклад 2.3.7. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

Розв'язування. Зробимо підстановку x = 5sint, тоді

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25sin^2t} = 5cost, dx = (5sint)' = 5costdt$$

Отже, одержимо

$$I = \int \frac{25sin^2t \cdot 5costdt}{5cost} = 25\int sin^2tdt = \frac{25}{2}\int(1{-}cos2t)dt =$$

$$= \frac{25}{2}(\int dt{-}\int cos2t\,dt) = \frac{25}{2}t{-}\frac{25}{4}sin2t{+}C$$

Із рівності x = 5sin t одержимо t = arcsin (x/5);

$$sin2t = 2sintcost = 2\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{25-x^2}$$

$$I = \frac{25}{2}arcsin\frac{x}{5} - \frac{25}{4}\cdot\frac{2x}{25}\sqrt{25-x^2} + C$$

Отже,

$$I = \frac{25}{2}arcsin\frac{x}{5} - \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + C$$

b) Якщо зробити заміну змінної, тобто t = φ (x) тоді має місце рівність: $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$

Після знаходження останнього інтеграла треба повернутись до змінної x, використовуючи рівність t = φ (x).

Приклад 2.3.8. Знайти

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx$$

Розв'язування. Нехай $\sqrt{x-3} = t$ тоді $x-3 = t^2 \Rightarrow x = 3+t^2, dx = 2tdt$.

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt = 2\int t^4dt + 6\int t^2dt =$$
$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^2} + C$$

Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується тоді, коли під інтегралом є добуток функцій, і хоча би одна з них є трансцендентною (не степеневою).

Нехай u та v деякі функції x, тобто $u = u(x), v = v(x)$.

Розглянемо диференціал добутку цих функцій.

$d(uv) = udv + vdu$

Інтегруючи обидві частини рівності, одержимо

$$\int d(u\cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du$$

Звідси, враховуючи властивість невизначеного інтеграла, маємо

$$u\cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$$

Отже, одержали формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

яку називають формулою інтегрування частинами.

Ця формула дозволяє звести пошук інтеграла $\int u\,dv$ до пошуку інтеграла $\int v\,du$. Якщо вдало обрати u та dv, інтеграл може бути табличним або простішим, ніж початковий інтеграл $\int u\,dv$

Приклад. 2.3.9. Знайти

$$\int lnx\,dx$$

Розв'язування. Нехай u = lnx, dv = dx. Тоді v = x

За формулою інтегрування частинами одержимо

$$\int lnx\,dx = xlnx - \int dx = xlnx - x + C$$

Інтегрування раціональних дробів

Невизначений інтеграл будь-якого раціонального дробу на будь-якому проміжку, де знаменник дробу не обертається в нуль, існує і подається через елементарні функції, а саме: він є алгебраїчною сумою суперпозиції раціональних дробів, арктангенсів і раціональних логарифмів.

Сам метод полягає в розкладанні раціонального дробу на суму найпростіших.

Усякий правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого розкладено на множники

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

можна подати (лише єдиним способом) у виді наступної суми найпростіших дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} +$$

$$\ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} +$$

$$+ \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} +$$

$$+ \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_m x + q_m)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_{s_m} x + N_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}$$

де $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., C_1, C_2, ..., M_1, N_1, ...$ - деякі дійсні коефіцієнти. Зазвичай невідомі коефіцієнти шукають за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

За допомогою згаданих методів можна знаходити невизначені інтеграли у вигляді скінченних комбінацій елементарних функцій. Проте не всі інтеграли можна виразити через елементарні функції. Відомо небагато класів функцій, інтегрування яких в результаті дає елементарні функції. До цих класів відносяться раціональні,тригонометричні, показникові функції та функції з радикалами.

Якщо ж інтеграл не можна виразити скінченною комбінацією елементарних функцій, тоді його розглядають як нову функцію (яка є інтегралом Рімана зі змінною верхнею межею інтегрування) і обчислюють за допомогою рядів або нескінченних добутків елементарних функцій.

Так, наприклад, інтеграли

$$\int \frac{1}{\ln x}\, dx, \qquad \int e^{x^2}\, dx$$

існують, проте через елементарні функції не виражаються.

Контрольні запитання

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Як довести справедливість кожної формули інтегрування?
4. Які методи інтегрування ви знаєте?