Тема 1.3. Елементи лінійної алгебри.

1.3.1. Визначники другого і третього порядків. Правило Крамера.

1.3.2. Розв'язуваннясистем лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса.

Поняття визначників другого і третього порядків зустрічаються у темі «Векторна алгебра» при вивченні добутків векторів і обчисленні площ многокутників та об'ємів многогранників; при вивченні теми «Аналітична геометрія» досліджується взаємне розміщення прямих і площин, обчислення кутів між прямими за допомогою систем рівнянь.

1.3.1. Визначники другого і третього порядків. Правило Крамера.

Означення. Визначником другого порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ називається число $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$

Означення. Визначником третього порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ називається число $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3$

У визначнику можна визначити дві діагоналі. Головну діагональ визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}. Побічну діагональ цього визначника складають елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}.

Для обчислення визначника третього порядку існує правило трикутників (рис. 1.3.1). Визначник є сумою 6-и добутків, з яких три беруться зі знаком

„+” і три – зі знаком „–”. Зі знаком „+” береться добуток елементів головної діагоналі і добуток елементів, які знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними головній діагоналі. Зі знаком „–” береться добуток елементів побічної діагоналі і добутки елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі.

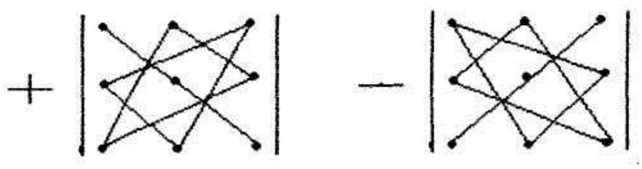

Рис. 1.3.1.

Приклад 1.3.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-8)\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 9 + 6\cdot 3\cdot(-3) - (-3)\cdot(-8)\cdot 9 - 6\cdot 5\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 1 =$$
$$= -8 + 90 - 54 - 216 - 30 - 6 = -224$$

Нехай дана система лінійних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \beta_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \beta_2 \end{cases}$$

Головним визначником системи називається визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, для розв’язання системи існують **формули Крамера**. Домножимо перше рівняння системи на α_{22}, а друге рівняння - на α_{12} і віднімемо з першого рівняння друге. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком рівнянь системи, в цьому рівнянні залишається одна змінна *x*

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})x = \beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}$$

Згадуючи означення визначника другого порядку, це рівняння можна записати так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Повернемось до початкової системи: помножимо перше рівняння на α_{12}, друге – на α_{11} і віднімемо від другого рівняння перше. Одержимо рівняння, в якому лише одна змінна *y*.

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})y = \alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1$$

Або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

то з одержаних рівнянь знаходимо єдиний розв’язок початкової системи:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Позначаючи

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix},$$

остаточно отримаємо

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_{\boldsymbol{x}}}{\Delta}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\Delta_{\boldsymbol{y}}}{\Delta}.$$

Ці формули є **формулами Крамера** для системи лінійних рівнянь другого порядку.

Перейдемо до систем лінійних рівнянь третього порядку:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z=\beta_1 \\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z=\beta_2 \\ \alpha_{31}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=\beta_3 \end{cases}$$

Аналогічно системам другого порядку, визначником системи називається визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Покажемо, що при $\Delta \neq 0$ для розв'язування системи третього порядку також існують формули Крамера.

Помножимо перше рівняння системи на число $(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})$, друге рівняння помножимо на $(\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})$, третє рівняння – на $(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{33})$ і всі рівняння додамо. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком системи і містить лише одну змінну x.

$$(\alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{31}\alpha_{13}\alpha_{22})x=$$
$$\beta_1\alpha_{22}\alpha_{33}-\beta_1\alpha_{23}\alpha_{32}+\beta_2\alpha_{13}\alpha_{32}-\beta_2\alpha_{12}\alpha_{33}+\beta_3\alpha_{12}\alpha_{23}-\beta_3\alpha_{13}\alpha_{22}$$

Згадуючи означення визначника третього порядку, перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Нехай

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і при $\Delta \neq 0$ одержуємо $x= \Delta_x/\Delta$.

Проводячи аналогічні міркування для змінних y і z одержимо

$y = \Delta_y/\Delta$, $z = \Delta_z/\Delta$,

$$\text{де}\quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta 3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Таким чином, якщо головний визначник Δ системи лінійних рівнянь третього порядку не дорівнює 0, система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера

$$x = \Delta_x/\Delta \quad y = \Delta_y/\Delta \quad z = \Delta_z/\Delta$$

Нехай дана система лінійних рівнянь *n*-го порядку

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{13}x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{23}x_n=\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{31}x_1+\alpha_{23}x_2+\ldots+\alpha_{33}x_n=\beta_n \end{cases}$$

Для розв'язування подібних систем також існують формули Крамера.

1.3.2. Розв'язуваннясистем лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса.

Приклад 1.3.2.

Розв'яжемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=24+2+6+9-4+8=45;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-4 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 2\\ -4 & -2 & 4\end{vmatrix}=-48+6-8-12-12-16=-90;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -4 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -4 & 4\end{vmatrix}=24+4-24+9+16+16=45;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & 3 & 3\\ 3 & -2 & -4\end{vmatrix}=-24+8+9+36+4+12=45;$$

$$x_1=-\frac{90}{45}=-2;$$

$$x_2=\frac{45}{45}=1;$$

$$x_3=\frac{45}{45}=1;$$

У шкільному курсі математики вивчають метод послідовного вилучення невідомих (метод Гауса).

Розглянемо схему Гауса на прикладі розв’язування конкретної системи.

Приклад 1.3.3.

$$\begin{cases}x+2y-3z=-6\\ 2x-y+z=-1\\ 3x+2y+z=4\end{cases},$$

яку у матричному вигляді записують так: $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$.

Початкова таблиця має такий вигляд:

$$\left.\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{array}\;\begin{array}{l}|-2|-3\\ \\ \\ \end{array}\right. .$$

Числа -2 та -3 - це елементи другого та третього рядка (взяті з протилежним знаком), які розташовані в тому стовпці, де в першому рядку є число 1.

Множимо перший рядок на числа -2 та -3 й отримуємо, відповідно, вектори (-2; -4; 6; 12) та (-3; -6; 9; 18). Додаємо ці вектори до другого і третього рядків:

$$\left.\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \;|:(-5) \\ 0 & -4 & 10 & 22 \end{array}\right. .$$

Ділимо всі елементи другого рядка на -5, роблячи діагональний елемент таблиці одиничним:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \;\; |-2|\,4 \\ 0 & -4 & 10 & 22 \end{array}\right. .$$

Розпочинаємо наступний етап методу. Множимо другий рядок на -2 та на 4 й отримуємо вектори (0; -2; 14/5; 22/5) і (0; 4;-28/5;-44/5). Додаємо ці вектори до першого та третього рядків:

$$\left.\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 22/5 & 66/5 \;|:(22/5) \end{array}\right. ,$$

і робимо ще один діагональний елемент одиницею (ділимо на 22/5):

$$\left.\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 1 & \;\;3 \quad |\; 1/5 \;\;|\;\; 7/5 \end{array}\right. .$$

На останньому кроці множимо третій рядок на 1/5 та 1/7 і додаємо утворені вектори (0;0;1/5;3/5) і (0;0;7/5;21/5) до першого та другого рядка:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$, тобто отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -1 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 3 \end{cases}$$, розв’язками якої є числа x_1= -1; x_2=2; x_3=3.

Якщо під час обчислень у схемі Гауса деякий рядок повністю стає нульовим (0 0 0 | 0), то це є ознакою того факту, що система має безліч розв’язків.

Якщо ж цей рядок стає нульовим за винятком вільного члена

$(0\ \ 0\ \ 0 \mid b_i \neq 0)$, то система розв’язків не має.

Відповідь: (-2;1;1).

Контрольні запитання

1. Які методи обчислення визначників третього порядку ви знаєте?
2. Запишіть формули Крамера для розв’язання систем лінійних рівнянь з трьома змінними.
3. Які переваги метода Гауса при розв’язування систем рівнянь?