

10 Плоско-паралельний рух

(тема 1.2.4)

План

1. Плоско-паралельний рух
2. Методи плоско-паралельного руху

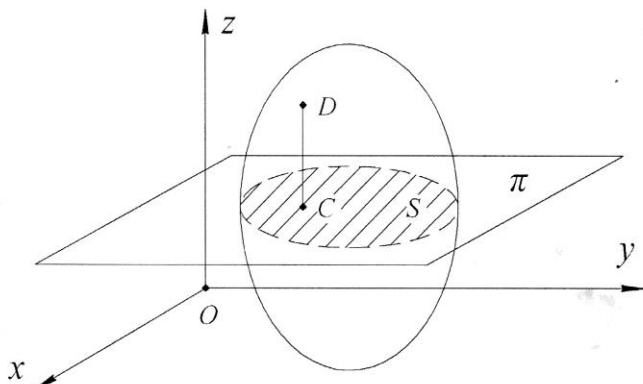


2.7 Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоско паралельним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині.

(приклад – кочення циліндра по горизонтальній площині так, що його основи залишається весь час паралельною до площини yOz).

З визначення плоско паралельного руху – будь-яка пряма проведена в тілі перпендикулярно до площини xOy буде рухатись наступально, тобто траєкторії, швидкості та прискорення всіх точок цієї прямої будуть однаковими.



Для визначення руху тіла необхідно знати рух лише однієї точки на кожній такій прямій.

Якщо взяти точки в одній площині, яка є паралельною до нерухомої координатної площини xOy , точки стверджувати, що вивчення плоско паралельного руху тіла зводиться до вивчення руху плоскої фігури, тобто перерізу тіла площиною, паралельною нерухомій координатній площині xOy .

Таким чином, надалі кажучи про плоско паралельний рух твердого тіла будемо мати на увазі рух його перерізу.

Тверде тіло здійснює плоско паралельний рух відносно нерухомої системи координат.

Довільна точка O_1 – полюс. Система координат $O_1x_2y_2$ здійснює рух разом з тілом і залишається завжди паралельною до нерухомої системи Oxy .

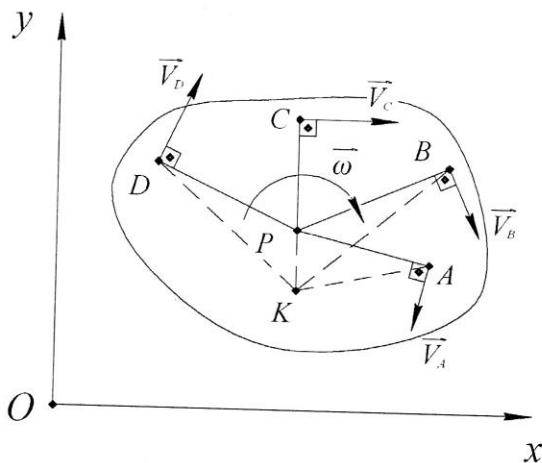
Друга система координат $O_1x_1y_1$, здійснюючи рух разом з тілом розвертається відносно системи координат $O_1x_2y_2$ або, що те саме відносно системи Oxy .

Координати довільної точки M твердого тіла, яке здійснює плоско паралельний рух, і отже положення самого тіла відносно нерухомої системи координат Oxy будуть визначатися за формулами:

$$x_M = x_{01} + x_1 \cdot a_{11} + y_1 a_{12};$$

$$y_M = y_{01} + x_1 \cdot a_{21} + y_1 a_{22}, \quad (2.10)$$

де $a_{11} = a_{22} = \cos \varphi$; $a_{12} = -\sin \varphi$; $a_{21} = \sin \varphi$



$$\vec{v}_p = 0;$$

Якщо $\vec{v}_p \neq 0$, то \vec{v}_p повинен бути одночасно перпендикулярним pA , pB , pC і pD , що неможливо. Точка p - єдина. Якщо взяти т. K то проєкції векторів на відрізки не $\neq 0$.

Якщо за полюс при плоско паралельному русі тіла взяти миттєвий центр швидкостей, то швидкість довільної точки визначиться виразом:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{Mp}$$

або

$$v_M = \omega \cdot pM,$$

де \vec{v}_{Mp} - вектор швидкості довільної точки M тіла при його обертанні навколо миттєвого центра швидкостей;

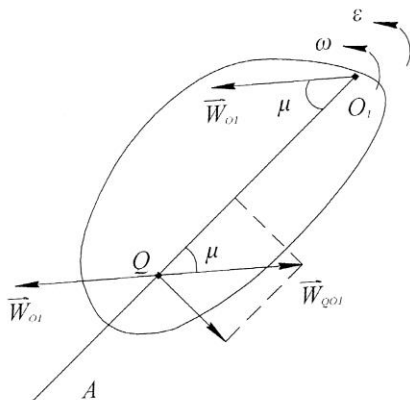
ω - кутова швидкість обертання тіла;

pM - вітань від миттєвого центра швидкостей до довільної точки M тіла.

Тоді: $v_D = \omega \cdot pD$; $v_C = \omega \cdot pC$; $v_B = \omega \cdot pB$; $v_A = \omega \cdot pA$.

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей, можна визначити швидкість усіх точок тіла, що здійснює плоско паралельний рух, якщо відома швидкість будь-якої точки тіла (модуль вектора швидкості і його напрям).

$$\vec{v}_D - \text{відома; тоді } \omega = \frac{v_D}{pD}; v_B = \omega \cdot pB = \frac{v_D}{pD} pB.$$



\vec{W}_{O1} - прискорення полюса O_1
 ω - кутова швидкість тіла;
 ϵ - кутове прискорення тіла;
 μ - кут на пряму на МЦП

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\epsilon}{\omega^2}.$$

Уздовж прямої O_1A відкидаємо відрізок O_1Q

$$O_1Q = \frac{W_{O1}}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}};$$

Точка Q – миттєвий центр прискорень;

На підставі формули прискорення Q :

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_{O1} + \vec{W}_{QO1}^{об} + \vec{W}_{QO1}^{доос} = \vec{W}_{O1} + \vec{W}_{QO1}$$

Величина прискорення \vec{W}_{QO1}

$$\vec{W}_{QO1} = QO_1 \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = \frac{W_{O1}}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = W_{O1};$$

Кут між вектором \vec{W}_{QO1} і відрізком O_1Q визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$$

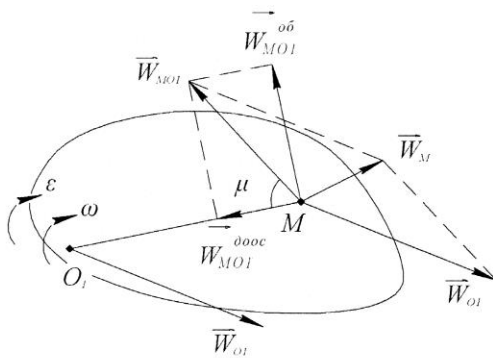
і підліковується від вектора \vec{W}_{QO1} проти руху стрілки годинника. Тобто

$$\vec{W}_{QO1} = -\vec{W}_{O1}; \text{ звідси } \vec{W}_Q = 0;$$

Точка Q , прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю називається **миттєвим центром прискорень**.

Якщо за полюс взяти миттєвий центр прискорень, то прискорення довільної точки M твердого тіла визначиться за формулою

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = \vec{W}_{MQ}^{об} = \vec{W}_{MQ}^{доос}$$



Кути μ між векторами \vec{W}_{MO1} і $\vec{W}_{MO1}^{\text{доос}}$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\vec{W}_{MO1}^{\text{об}}|}{|\vec{W}_{MO1}^{\text{доос}}|} = \frac{\rho \cdot \varepsilon}{\rho \cdot \omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2};$$

Щоб визначити вектор прискорення довільної точки тіла при плоско паралельному русі, необхідно знати напрям і величину вектора прискорення полюса, а також напрям і величину кутової швидкості і кутового прискорення тіла.

Далі на підставі векторної рівності: $\vec{W}_M = \vec{W}_{O1} + \vec{W}_{MO1}^{\text{об}} + \vec{W}_{MO1}^{\text{доос}}$

Побудувати в довільній точці M відповідні вектори і визначити величину і напрям вектора прискорення довільної точки тіла як геометричну суму трьох векторів.

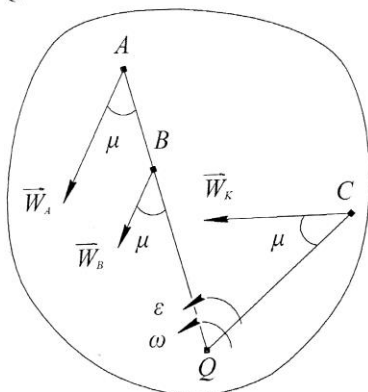
Визначення прискорення точок твердого тіла за допомогою миттєвого центра прискорень (МЦП).

Прискорення довільної точки тіла, що здійснює плоско паралельний рух, визначається як геометрична сума прискорень полюса і прискорення довільної точки при обертанні тіла навколо полюса.

В кожний момент часу існує точка, прискорення якої дорівнює нулю – миттєвий центр прискорень.

Модуль вектора прискорення довільної точки М

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



В даний момент часу прискорення будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух визначається як прискорення цієї точки при обертанні тіла відносно МЦП.

$$W_A = QA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_B = QB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_C = QC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{QB}{QA}, \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Аналітичний спосіб визначення прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух.

Швидкість довільної точки М (проекції швидкості)

$$\dot{x}_M = \dot{x}_{01} - \dot{\varphi}(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi)$$

$$\dot{y}_M = \dot{y}_{01} + \dot{\varphi}(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi)$$

Прискорення т. М визначається як похідні за часом від проекцій вектора швидкості

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}_{01} - \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi)$$

$$\ddot{y}_M = \ddot{y}_{01} + \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi)$$

Отримані рівності визначають проекції прискорення довільної точки М на осі нерухомої системи координат Оху.

Модуль прискорення точки М

Напрямок вектора швидкості т. М визначається за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\vec{v}_M, x) = \frac{\dot{x}_M}{v_M}; \quad \cos(\vec{v}_M, y) = \frac{\dot{y}_M}{v_M};$$

Визначення прискорення довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі.

На підставі формули швидкості т. М при плоско паралельному русі:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

і за визначенням прискорення, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{W}_M &= \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{v}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \\ &= \vec{W}_{O_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO_1} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}^{об} + \vec{W}_{MO_1}^{доос} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}; \end{aligned}$$

де $\frac{d\vec{v}_{O_1}}{dt} = \vec{W}_{O_1}$ - прискорення полюса O_1 ;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення твердого тіла при обертанні навколо полюса O_1

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO_1}$ - швидкість т.М твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1 .

Векторний добуток $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{W}_{MO_1}^{об}$ - вектор обертального прискорення т.М при обертанні тіла навколо полюса O_1 .

Вектор $\vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}^{об} + \vec{W}_{MO_1}^{доос}$ - повне прискорення т.М при обертанні тіла навколо O_1 .

Векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{v}_{MO_1} = \vec{W}_{MO_1}^{доос}$ - вектор до осевого прискорення т.М при обертанні тіла навколо полюса O_1 ;

За модулем прискорення $\vec{W}_{O_1}, \vec{W}_{MO_1}^{об}, \vec{W}_{MO_1}^{доос}$ дорівнюють:

$$\vec{W}_{MO_1}^{об} = \varepsilon \cdot \rho = \varepsilon \cdot O_1M;$$

$$\vec{W}_{MO_1}^{доос} = \omega^2 \cdot \rho = \omega^2 \cdot O_1M;$$

$$\vec{W}_{MO_1} = \sqrt{(W_{MO_1}^{об})^2 + (W_{MO_1}^{доос})^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot \rho)^2 + (\omega^2 \rho)^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} =$$

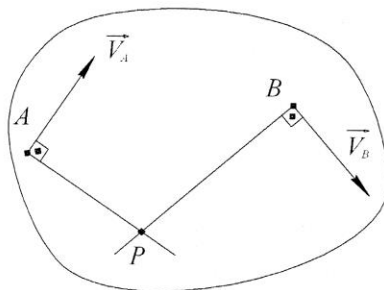
$$= \sqrt{\left[\ddot{x}_{O_1} - \ddot{\phi}(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi) - \dot{\phi}^2(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) \right]^2 + \left[\ddot{y}_{O_1} + \ddot{\phi}(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi) - \dot{\phi}^2(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) \right]^2}$$

Напрям вектора прискорення точки М визначається за допомогою напрямних косинусів

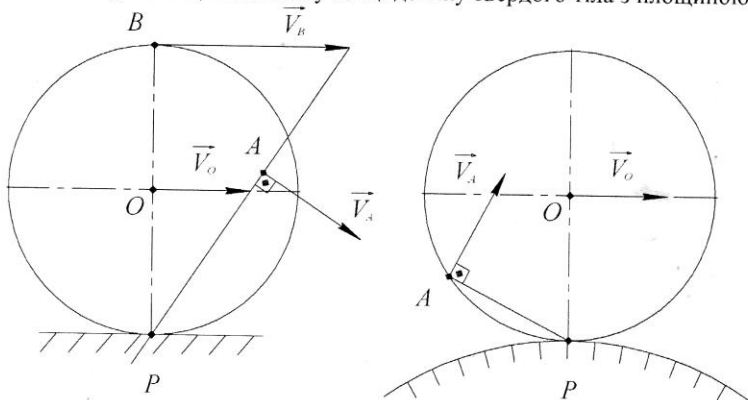
$$\cos(\vec{W}_M, \hat{x}) = \frac{\ddot{x}_M}{W_M}; \quad \cos(\vec{W}_M, \hat{y}) = \frac{\ddot{y}_M}{W_M}$$

Контрольні запитання до другого розділу

1. Як визначається вектор швидкості довільної точки тіла, що обертається і навколо нерухомої осі?
2. Як визначається вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
3. Як визначити величину і напрям обертального прискорення точки тіла, що і обертається навколо нерухомої осі?
4. Як визначити величину і напрям до осевого прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
5. Яким є обертання тіла, якщо обертальне прискорення точок тіла дорівнює нулю?
6. Як записується закон рівномірного обертання твердого тіла навколо і нерухомої осі?
7. Як записується закон зміни кутової швидкості і закон рівнозмінного руху твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?
8. Який рух твердого тіла називається плоско паралельним?
9. До вивчення руху якої фігури зводиться кінематика плоско паралельного руху?
10. Як записуються кінематичні рівняння плоско паралельного руху твердого тіла?
11. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що рухається плоско паралельно?
12. Чи можна розглядати плоско паралельний рух тіла, як складний рух?
13. Чи залежить обертальна частина плоско паралельного руху твердого тіла від вибору полюса?
14. Як визначити швидкість довільної точки тіла при плоско паралельному русі?
15. Чому дорівнюють проєкції швидкостей кінців незмінного відрізка на його напрям?
16. Що таке миттєвий центр швидкостей при плоско паралельному русі твердого тіла?
17. За якою формулою визначається величина швидкості точки тіла при застосуванні поняття миттєвого центра швидкостей?



4. Якщо тверде тіло, що здійснює плоско паралельний рух, котиться без ковзання по нерухомій поверхні (прямолінійній чи криволінійній), то МЦШ лежить у точці дотику твердого тіла з площиною.



5. Якщо вектори швидкостей двох точок A і B паралельні і не перпендикулярні до відрізка AB, або вектори швидкостей двох точок паралельні і рівні між собою, то МЦШ у даний момент не існує, кутова швидкість дорівнює нулю і тверде тіло здійснює миттєво – поступальний рух.

Для аналітичного визначення швидкості довільної точки M необхідно її координати за формулами:

$$x_M = x_{O1} + x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi$$

$$y_M = y_{O1} + x_1 \cdot \sin \varphi - y_1 \cdot \cos \varphi$$

Диференціюючи ці вирази, отримаємо проекції швидкості довільної т. M на осі нерухомої системи відліку Oxy:

$$\dot{x}_M = \dot{x}_{O1} - \dot{\varphi}(x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi)$$

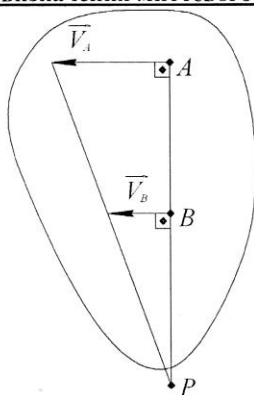
$$\dot{y}_M = \dot{y}_{O1} + \dot{\varphi}(x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi)$$

Модуль швидкості т. M:

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{[\dot{x}_{O1} - \dot{\varphi}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi)]^2 + [\dot{y}_{O1} + \dot{\varphi}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)]^2}$$

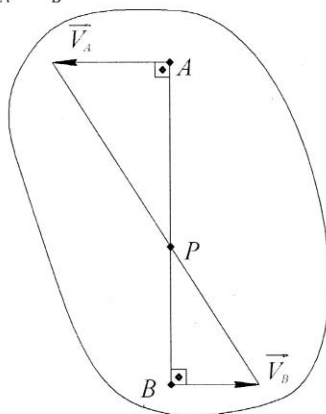
18. Які є способи визначення положення миттєвого центра швидкостей?
19. Як визначити аналітично швидкість довільної точки тіла, що здійснює
20. плоско паралельний рух?
21. Як визначити прискорення довільної точки тіла при плоско паралельному русі?
22. Що таке складний рух точки?
23. Який рух називається абсолютним?
24. Який рух називається відносним?
25. Який рух називається переносним?
26. Як визначити відносну і переносну швидкість точки в складному русі?
27. Як формулюється теорема про додавання швидкостей у складному русі точки?
28. Як формулюється теорема про додавання прискорення у складному русі точки?
29. Як визначається за величиною і напрямом прискорення Коріоліса?
30. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
31. Назвіть дві фізичні причини появи прискорення Коріоліса?

2.8 Окремі випадки визначення миттєвого центра швидкостей:



1. Якщо вектори швидкостей точок A і B твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, паралельні і одночасно перпендикулярні до відрізка AB, мають однаковий напрям і не рівні між собою, то МЦШ розміщений на продовженні AB у точці перетину з прямою, яка сполучає кінці векторів швидкостей цих точок.

2. Якщо вектори швидкостей точок A і B паралельні і перпендикулярні до відрізка AB, мають протилежні напрями, то МЦШ лежить на відрізку AB у точці його перетину з відрізком, який сполучає кінці векторів швидкостей \vec{v}_A і \vec{v}_B точок A і B.



3. Якщо відомі напрями векторів швидкостей двох точок A і B твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, то МЦШ розміщений у точці перетину перпендикулярів, проведено з т.А і В до векторів швидкостей \vec{v}_A і \vec{v}_B .

У формулах (2.10) x_1, y_1 - сталі величини, а $x_{01}, y_{01}, a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ - функції часу.

Отже, маємо

$$x_{01} = f_1(t); y_{01} = f_2(t); \varphi = \varphi(t) \quad (2.11)$$

Таким чином, плоско паралельний рух твердого тіла визначається трьома незалежними параметрами: двома координатами полюса O_1 і кутом повороту тіла навколо полюса O_1 .

Тіло, що здійснює плоско паралельний рух, має три ступеня вільності.

Функції (2.11) називаються кінематичними рівняннями плоско паралельного руху твердого тіла.

Плоско паралельний рух твердого тіла розкладається на два рухи: поступальний, який визначається першими двома рівностями і обертальний навколо полюса, який визначається третьою рівністю.

При цьому кут повороту тіла φ не залежить від вибору полюса. Тоді вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ є вільними векторами.

Визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоско паралельному русі.

Радіус - вектор \vec{r}_M , який визначає положення довільної точки М:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{01} + \vec{\rho},$$

де \vec{r}_{01} - радіус-вектор положення полюса O_1 в системі координат Ox_1y_1 ;

$\vec{\rho}$ - радіус- вектор положення довільної точки М у системі координат $O_1x_2y_2$;

Тоді швидкість точки М визначається:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{01} + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad (2.12)$$

Похідні $\frac{d\vec{r}_{01}}{dt}$ визначає швидкість полюса O_1

$$\text{Тобто } \vec{v}_{01} = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt};$$

Похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки М відносно рухомої системи координат $O_1x_2y_2$.

$$\vec{v}_{M01} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Рух твердого тіла відносно системи координат $O_1x_2y_2$ є обертанням навколо полюса O_1 :

$$\vec{v}_{M01} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (\text{ф-ла Ейлера})$$

і модуль швидкості

$$v_{M01} = \omega \cdot \rho = \omega \cdot O_1M$$

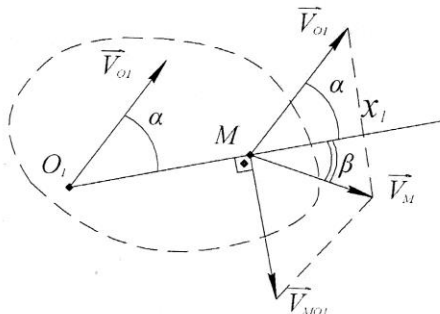
Тоді формула (2.12) набуває вигляду:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

Або

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{MO_1} \quad (2.13)$$

Швидкість довільної точки M твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух дорівнює геометричній сумі швидкості полюса \vec{v}_{O_1} і швидкості \vec{v}_{MO_1} точки M при обертанні тіла навколо полюса.



Щоб визначити вектор швидкості довільної точки M при плоско паралельному русі необхідно знати напрям і величину кутової швидкості тіла.

Три способи визначення швидкості точок тіла:

1-й спосіб полюса – на підставі векторної рівності (2.13) побудувати в довільній точці тіла відповідні вектори і визначити величини і напрям вектора швидкості довільної точки тіла як геометричну суму двох векторів.

2-й спосіб проекції – швидкостей двох точок тіла напрямом, що сполучає ці точки, рівні між собою

$$v_M \cdot \cos \beta = v_{O_1} \cdot \cos \alpha$$

3-й спосіб – визначення швидкості довільної точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, ґрунтується на понятті миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

Миттєвим центром швидкостей (миттєвим центром обертання) твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, називається точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

P – миттєвий центр швидкостей.

При плоско паралельному русі миттєвий центр швидкостей існує і ця точка в даний момент часу єдина.

Питання для самоконтролю

1. Який рух називається ППР?
2. Назвіть методи визначення ППР.