Omówienie zadania rolki

Adam Furtak

27 listopada 2018

1 Wprowadzenie

W zadaniu Rolki na wejściu dostajemy informację o tym, na jaką długość rozwinięte są poszczególne rolki papieru oraz na jaką długość moga maksymalnie zostać rozwinięte. To o co jesteśmy pytani w zadaniu, to w ilu najmniej ruchach możemy doprowadzić do stanu, gdzie wsyzstkie rolki rozwinięte są dokładnie na tą samą długość. Jeden ruch polega na zwinięciu/rozwinięciu jednej rolki papieru o jedną jednostkę.

2 Oznaczenia

n - liczba rolek podanych na wejście.
$\Phi(x)$ - minimalna ilość operacji, które należy wykonać, aby doprowadzić wszystkie rolki do rozwinięcia równego x.
$m(x)$ - liczba rolek, które są rozwinięte na conajwyżej x jednostek.
$w(x)$ - liczba rolek, które są rozwinięte na więcej niż x jednostek.
$T[i]$ - długość rozwinięcia $i-tej$ rolki podana na wejściu.
MIN - długość rozwinięcia najkrótszej rolki.
MAX - minimalna długość rozwinięcia rolki po całkowitym rozwinięciu.

3 Rozwiązanie brutalne

Pierwszym rozwiązaniem tego zadania, które każdemu powinno przyjść do głowy, oraz takim, które najłatwiej zaimplementować, to rozwiązanie polegające na sprawdzaniu wartości $\Phi(x)$ dla kolejnych możliwych wartości x. Odpowiednik funkcji Φ w pseudokodzie wyglądałby mniej więcej tak:

```
function Phi(x):
    sum = 0
    for (i in 0..n - 1):
        sum = sum + abs(x - T[i])
    return sum
```

Zatem główna funkcja, zwracająca wynikw pseudokodzie będzie wyglądała mniej więcej tak:

```
function Solve():
    result = INFINITY
    for (x in MIN..MAX):
        result = min(result, Phi(x))
    return result
```

Czy jest to rozwiązanie, które przechodzi na maksymalną ilość punktów? Oczywiście nie, jego złożoność to $O(n*MAX)$. Da się to zrobić lepiej, natomiast warto spróbować zaimplementować to rozwiązanie samemu, jako ćwiczenie.

4 Rozwiązanie wzorcowe

Przyjmijmy na chwilę, że rolki mogą rozwinąć się na dowolnie długą odległość. Spróbujmy zwinąć wszystkie rolki tak, aby wyrównać je do tej najkrótszej. Zatem liczba ruchów potrzebna do takiego zwinięcia wszystkich rolek to $\Phi(MIN)$. Spróbujmy teraz zaobserwować jak liczba ruchów zmieni się jeżlie wyrównamy wszystkie rolki do długości $MIN+1$. Rolki które są rozwinięte na mniejszą długość niż $MIN+1$ należy rozwinąć o jedną jednostkę, zatem nowe $\Phi(MIN+1)$ zwiększy się o wartosć $m(MIN+1)$ ale widzimy, że jednocześnie wszystkie rolki dłuższe niż $MIN+1$ należy zwinąć o jedną jednostkę mniej niż wcześniej. To znaczy, że liczba ruchów zmniejszy się o $w(MIN+1)$. Z tego możemy dojść do rekurencyjnej formuły na $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+1) = \Phi(x) + m(x+1) - w(x+1)$$

Jednocześnie można zauważyć że wartości $\Phi(x)$ będą się zmniejszać dopóki $m(x) < w(x)$. Zatem funkcja $\Phi(x)$ osiągnie swoje minimum dla mediany z początkowych wartości podanych na wejściu (liczba krótszych rolek jest taka sama jak dłuższych). Zauważamy też, na podstawie powyższej rekurencyjnej formuły, że gdy liczba rolek jest parzysta, to należy wziąć dowolną z 2 środkowych wartości.
Teraz jeszcze należy zastanowić się co jeśli mediana jest większa niż MAX. Również ze względu na powyższą formułę, należy wziąć wartość najbliższą medianie, czyli MAX.
Kod rozwiazania wzorcowego nie jest skomplikowany i kluczowe fragmenty są podobne do kodu rozwiązania brutalne, zatem jego implementację pozostawiam jego pełną implementacje pozostawiam jako ćwiczenie. Warto jeszcze wspomnieć w jakiej złożoności będzie działać to rozwiązanie. Będzie to $O(nlogn)$ ze względu na sortowanie potrzebne do wyciągnięcia mediany.