МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра робототехники и автоматизации производственных систем.

ОТЧЁТ

лабораторной работы №10
по дисциплине "Информатика"
Тема: Работа с векторами и матрицами в математическом пакете Scilab

Студент гр. 8871 ________________ М. А. Колмагоров

Преподаватель ________________ А. Прокшин

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 2018 г.

1 Цель работы

Освоить процесс выполнения векторных и матричных задач в математическом пакете Scilab.

2 Условие

Решить линейную систему уравнений 3 – го порядка. Коэффициенты задать самим (Решение проверить в ручную, применив один из численных методов). Найти собственные значения и вектор квадратной матрицы А. По уравнению найти обратную матрицу матрице составленной из собственных вектор-столбцов. Доказать, что верны соотношение.

3 Заданные переменные

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 8 & 34 & 8 \\ 14 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4 Используемые формулы

Метод полного исключения Жордана-Гаусса:
PM=$[A_{m*n}|B] \Leftrightarrow 1, 2, 3...$
Транспонированная матрица:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Матричные уравнения:
$A * X = B \Rightarrow [A|B]$
Метод обратной матрицы:

$$\begin{cases} A_n * Z_n = I_m \\ Z_n = A_n^{-1} \begin{cases} A * x = E \\ [A|B] = A^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

Обратная матрица матрица составленной из собственных вектор-столбцов:
$\tilde{V_i} = \frac{[\vec{V_k} * \vec{V_l}]}{\vec{V_i} * [\vec{V_k} * \vec{V_l}]}$
Собственные числа и векторы матрицы:

$$\begin{cases} A * \vec{x_\lambda} = \lambda * \vec{x_\lambda} \\ \vec{x_\lambda} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A * \vec{x_\lambda} = \vec{0} \\ \vec{x_\lambda} \neq 0 \end{cases}$$

5 Значения

Система СЛАУ из A1 и B:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2.5 \\ x_2 = -1 \\ x = 3.25 \end{cases}$$

Транспонированная матрица A1:

$A1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Решение уравнения x=$A1^T$*B:

$x = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 54 \end{pmatrix}$

Обратная матрица матрице A1:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0.25 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1.5 & -0.25 & -0.875 \end{pmatrix}$

Матрица $A1^3$:

$A1^3 = \begin{pmatrix} 308 & 385 & 480 \\ 495 & 618 & 770 \\ 350 & 440 & 548 \end{pmatrix}$

Собственные числа матрицы A:

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 18$

$\lambda_3 = 42$

Собственные векторы матрицы A:

$x_1 = \begin{pmatrix} -0.7071068 \\ 0 \\ 0.7071068 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0.5773503 \\ -0.5773503 \\ 0.5773503 \end{pmatrix}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0.4082483 \\ 0.8164966 \\ 0.4082483 \end{pmatrix}$

Обратная матрица матрице составленной из собственных вектор-столбцов :

$xO = \begin{pmatrix} -0.7071068 & 0 & 0.7071068 \\ 0.5773503 & -0.5773503 & 0.5773503 \\ 0.4082483 & 0.8164966 & 0.4082483 \end{pmatrix}$

6 Листинг программы Scilab

```
-1->A1=[2, 3, 4; 5, 4, 6; 2, 4, 4]
A1 =

  2. 3. 4.
```

```
   5. 4. 6.
   2. 4. 4.
-1->B=[5; 3; 4]
B =

   5.
   3.
   4.
-1->C=rref([A1 B])
C =

   1. 0. 0. - 2.5
   0. 1. 0. - 1.
   0. 0. 1. 3.25
-1->[n,m]=size(C);

   -1->x=C(:,m)
x =

   - 2.5
   - 1.
   3.25
-1->A1T=A1'
A1T =

   2. 5. 2.
   3. 4. 4.
   4. 6. 4.
-1->C=A1T*B
C =

   33.
   43.
   54.
-1->A1O=inv(A1)
A1O =

   - 1. 0.5 0.25
   - 1. 0. 1.
   1.5 - 0.25 - 0.875
-1->w=A1O*A1
w =

   1. 4.441D-16 0.
   0. 1. 0.
   0. - 4.441D-16 1.
-1->A13=A1^3
A13 =

   308. 385. 480.
   495. 618. 770.
```

350. 440. 548.
-1->A=[12, 8, 14; 8, 34, 8; 14, 8, 12]
A =

12. 8. 14.
8. 34. 8.
14. 8. 12.
-1->[X,Y]=spec(A)
Y =

- 2. 0. 0.
0. 18. 0.
0. 0. 42.
X =

- 0.7071068 0.5773503 0.4082483
8.925D-17 - 0.5773503 0.8164966
0.7071068 0.5773503 0.4082483
-1->XO=inv(X)
XO =

- 0.7071068 0. 0.7071068
0.5773503 - 0.5773503 0.5773503
0.4082483 0.8164966 0.4082483
-1->w2=XO*X
w2 =

1. - 1.110D-16 - 1.110D-16
0. 1. - 1.388D-16
0. - 5.551D-17 1.

7 Решение приведённое в ручную.

7.1 Решение СЛАУ из A1 и B.

По имеющимся матрицам A1 и B составляем расширенную матрицу и решаем её методом Жардана-Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Первую строку делим на два.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 5. От 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & -3.5 & -4 & -9.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на -3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.5. От 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

3-ую строку делим на $-\frac{8}{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3.25 \end{pmatrix}$$

От 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на $\frac{2}{7}$. От 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на $\frac{8}{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.25 \end{pmatrix}$$

И того получим значение x.

$$\begin{pmatrix} -2.5 \\ -1 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

7.2 Решение уравнения x=$A1^T$*B

Для начала произведём транспонирование матрицы A1.

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Следственно матрица обратная $A1^T$ будет равна матрице A1 с замененными строками и столбцами друг с другом.

$$A1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Далле перемножаем матрицы $A1^T$ и B. В следствии чего получим.

$$A1^T * B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*5+5*3+2*4 \\ 3*5+4*3+4*4 \\ 4*5+6*3+4*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 54 \end{pmatrix}$$

7.3 Решение поиска собственных чисел и векторов матрицы А

Из условия что $A*\vec{x_\lambda} = \lambda*\vec{x_\lambda}$ Получаем что собственные векторы матрицы получаются при $(A-\lambda I)*\vec{x_\lambda} = 0$. А из этого следует что собственные числа матрицы находятся через определитель матрицы А и произведения λ с единичной матрицей. Из данный выводов следует что:

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 8 & 34 & 8 \\ 14 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 12-\lambda & 8 & 14 \\ 8 & 34-\lambda & 8 \\ 14 & 8 & 12-\lambda \end{pmatrix}$$

Из чего в следствии получим:

$$\begin{gathered} (12-\lambda)((34-\lambda)(12-\lambda)-64)-8(8(12-\lambda)-112+14(64-14(34-\lambda))=0 \\ -\lambda^3+58\lambda^2-636\lambda-1512=0 \\ \lambda_1=-2\ \lambda_2=18\ \lambda_1=42 \end{gathered}$$

Теперь имея собственные числа найдём три собственных вектора матрицы:
При $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 12-(-2) & 8 & 14 \\ 8 & 34-(-2) & 8 \\ 14 & 8 & 12-(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 32 & 1 & 0 \\ 0 & -55 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & -x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_1 = \frac{\vec{x_1}}{||\vec{x_1}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_1 = 18$

$$\begin{pmatrix} 12-(18) & 8 & 14 \\ 8 & 34-(18) & 8 \\ 14 & 8 & 12-(18) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -80 & -80 & 0 \\ 14 & 8 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 & = & -x_3 \\ x_1 & = & x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_2 = \frac{\vec{x_2}}{||\vec{x_1}||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_1 = 42$

$$\begin{pmatrix} 12-(42) & 8 & 14 \\ 8 & 34-(42) & 8 \\ 14 & 8 & 12-(42) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 88 & -176 & 0 \\ 14 & 8 & -30 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 & = & 2x_3 \\ x_1 & = & x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_3 = \frac{\vec{x_3}}{||\vec{x_1}||} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.4 Решение обратной матрицу матрице составленной из собственных вектор-столбцов

Матрица вектор столбцов:

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее находим её определитель.

$$det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

После чего транспортируем данную матрицу.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

После чего находим алгебраические уравнения каждого элемента матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{12} = (-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{13} = (-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{21} = (-1)^{2+1} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{22} = (-1)^{2+2} det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{23} = (-1)^{2+3} det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_{31} = (-1)^{3+1} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A_{32} = (-1)^{3+2} det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A_{33} = (-1)^{3+3} det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее составляем транспонированную матрицу из алгебраических дополнений и делим их на определитель, получая нашу обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8 Вывод