

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра робототехники и автоматизации производственных систем.

ОТЧЁТ
лабораторной работы №3
по дисциплине "Информатика"
Тема: Работа с векторами и матрицами в математическом пакете Scilab

Студент гр. 8871

_____ М. А. Колмагоров

Преподаватель

_____ А. Прокшин

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 2018 г.

1 Цель работы

Освоить процесс выполнения векторных и матричных задач в математическом пакете Scilab.

2 Условие

Решить линейную систему уравнений 3 – го порядка. Коэффициенты задать самим (Решение проверить в ручную, применив один из численных методов). Найти собственные значения и вектор квадратной матрицы A. По уравнению найти обратную матрицу матрице составленной из собственных вектор-столбцов. Доказать, что верны соотношения.

3 Заданные переменные

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 8 & 34 & 8 \\ 14 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4 Используемые формулы

Метод полного исключения Жордана-Гаусса:

$PM = [A_{m \times n} | B] \Leftrightarrow 1, 2, 3 \dots$

Транспонированная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения:

$$A * X = B \Rightarrow [A | B]$$

Метод обратной матрицы:

$$\begin{cases} A_n * Z_n = I_m \\ Z_n = A_n^{-1} \end{cases} \begin{cases} A * x = E \\ [A | B] = A^{-1} \end{cases}$$

Обратная матрица матрица составленной из собственных вектор-столбцов:

$$\tilde{V}_i = \frac{[\vec{V}_k * \vec{V}_i]}{\vec{V}_i * [\vec{V}_k * \vec{V}_i]}$$

Собственные числа и векторы матрицы:

$$\begin{cases} A * \vec{x}_\lambda = \lambda * \vec{x}_\lambda \\ \vec{x}_\lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A * \vec{x}_\lambda = \vec{0} \\ \vec{x}_\lambda \neq 0 \end{cases}$$

5 Значения

Система СЛАУ из A1 и B:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2.5 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3.25 \end{cases}$$

Транспонированная матрица A1:

$$A1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение уравнения $x = A1^T * B$:

$$x = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица матрице A1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0.25 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1.5 & -0.25 & -0.875 \end{pmatrix}$$

Матрица $A1^3$:

$$A1^3 = \begin{pmatrix} 308 & 385 & 480 \\ 495 & 618 & 770 \\ 350 & 440 & 548 \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = 18$$

$$\lambda_3 = 42$$

Собственные векторы матрицы A:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.7071068 \\ 0 \\ 0.7071068 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0.5773503 \\ -0.5773503 \\ 0.5773503 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0.4082483 \\ 0.8164966 \\ 0.4082483 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица матрице составленной из собственных вектор-столбцов :

$$xO = \begin{pmatrix} -0.7071068 & 0 & 0.7071068 \\ 0.5773503 & -0.5773503 & 0.5773503 \\ 0.4082483 & 0.8164966 & 0.4082483 \end{pmatrix}$$

6 Листинг программы Scilab

```
-1->A1=[2, 3, 4; 5, 4, 6; 2, 4, 4]
```

```
A1 =
```

```
2. 3. 4.
```

```

5. 4. 6.
2. 4. 4.
-1->B=[5; 3; 4]
B =

5.
3.
4.
-1->C=rref([A1 B])
C =

1. 0. 0. - 2.5
0. 1. 0. - 1.
0. 0. 1. 3.25
-1->[n,m]=size(C);

-1->x=C(:,m)
x =

- 2.5
- 1.
3.25
-1->A1T=A1'
A1T =

2. 5. 2.
3. 4. 4.
4. 6. 4.
-1->C=A1T*B
C =

33.
43.
54.
-1->A1O=inv(A1)
A1O =

- 1. 0.5 0.25
- 1. 0. 1.
1.5 - 0.25 - 0.875
-1->w=A1O*A1
w =

1. 4.441D-16 0.
0. 1. 0.
0. - 4.441D-16 1.
-1->A13=A1^3
A13 =

308. 385. 480.
495. 618. 770.

```

```

350. 440. 548.
-1->A=[12, 8, 14; 8, 34, 8; 14, 8, 12]
A =

```

```

12. 8. 14.
8. 34. 8.
14. 8. 12.
-1->[X,Y]=spec(A)
Y =

```

```

- 2. 0. 0.
0. 18. 0.
0. 0. 42.
X =

```

```

- 0.7071068 0.5773503 0.4082483
8.925D-17 - 0.5773503 0.8164966
0.7071068 0.5773503 0.4082483
-1->XO=inv(X)
XO =

```

```

- 0.7071068 0. 0.7071068
0.5773503 - 0.5773503 0.5773503
0.4082483 0.8164966 0.4082483
-1->w2=XO*X
w2 =

```

```

1. - 1.110D-16 - 1.110D-16
0. 1. - 1.388D-16
0. - 5.551D-17 1.

```

7 Решение приведённое в ручную.

7.1 Решение СЛАУ из A1 и B.

По имеющимся матрицам A1 и B составляем расширенную матрицу и решаем её методом Жардана-Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Первую строку делим на два.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 5. От 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & -3.5 & -4 & -9.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на -3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.5. От 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

3-ую строку делим на $-\frac{8}{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3.25 \end{pmatrix}$$

От 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на $\frac{2}{7}$. От 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на $\frac{8}{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.25 \end{pmatrix}$$

И того получим значение х.

$$\begin{pmatrix} -2.5 \\ -1 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

7.2 Решение уравнения $x=A1^T*B$

Для начала произведём транспонирование матрицы A1.

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Следственно матрица обратная $A1^T$ будет равна матрице A1 с замененными строками и столбцами друг с другом.

$$A1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Далле перемножаем матрицы $A1^T$ и B. В следствии чего получим.

$$A1^T * B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*5 + 5*3 + 2*4 \\ 3*5 + 4*3 + 4*4 \\ 4*5 + 6*3 + 4*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 54 \end{pmatrix}$$

7.3 Решение поиска собственных чисел и векторов матрицы A

Из условия что $A * \vec{x}_\lambda = \lambda * \vec{x}_\lambda$ Получаем что собственные векторы матрицы получаются при $(A - \lambda I) * \vec{x}_\lambda = 0$. А из этого следует что собственные числа матрицы находятся через определитель матрицы A и произведения λ с единичной матрицей. Из данных выводов следует что:

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 8 & 34 & 8 \\ 14 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 12 - \lambda & 8 & 14 \\ 8 & 34 - \lambda & 8 \\ 14 & 8 & 12 - \lambda \end{pmatrix}$$

Из чего в следствии получим:

$$\begin{aligned} (12 - \lambda)((34 - \lambda)(12 - \lambda) - 64) - 8(8(12 - \lambda) - 112 + 14(64 - 14(34 - \lambda))) &= 0 \\ -\lambda^3 + 58\lambda^2 - 636\lambda - 1512 &= 0 \\ \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 18 \quad \lambda_3 = 42 \end{aligned}$$

Теперь имея собственные числа найдём три собственных вектора матрицы:

При $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 12 - (-2) & 8 & 14 \\ 8 & 34 - (-2) & 8 \\ 14 & 8 & 12 - (-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 32 & 1 & 0 \\ 0 & -55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_1 = 18$

$$\begin{pmatrix} 12 - (18) & 8 & 14 \\ 8 & 34 - (18) & 8 \\ 14 & 8 & 12 - (18) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -80 & -80 & 0 \\ 14 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_1 = 42$

$$\begin{pmatrix} 12 - (42) & 8 & 14 \\ 8 & 34 - (42) & 8 \\ 14 & 8 & 12 - (42) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 88 & -176 & 0 \\ 14 & 8 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{matrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следственно:

$$V_3 = \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

