ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.

1. Проверка гипотез о дисперсии нормального распределения.

Пусть задана выборка X_1, X_2, ..., X_n из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Значение дисперсии неизвестно. Проверим *гипотезу о равенстве дисперсии заданному числу:* H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 – некоторое заданное число). Математическое ожидание неизвестно.

Гипотезу проверяют с помощью функции критерия

$$Z = k\,S^2 / \sigma_0^2, \tag{1.27}$$

которая имеет χ^2- распределение с числом степеней свободы k, то есть $Z = \chi^2(k)$. S^2 – несмещенная оценка дисперсии σ^2 (1.5); $k = n-1$ – число степеней свободы оценки S^2. Рассмотрим проверку нуль-гипотезы при трех различных альтернативных гипотезах H_1.

1. H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Критерий двусторонний. H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$\chi^2_{\alpha/2}(k) < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}(k), \tag{1.28}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

2. H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$. Критерий односторонний (левосторонний). H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$Z > \chi^2_{\alpha}(k) \tag{1.29}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

3. H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. Критерий односторонний (правосторонний). H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$Z < \chi^2_{1-\alpha}(k) \tag{1.30}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

Замечание. Если проверку гипотезы H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ проводят при известном математическом ожидании, то вместо (1.27) используют функцию критерия

$$Z = n\,S_0^2 / \sigma_0^2, \tag{1.31}$$

где S_0^2 – оценка дисперсии σ^2 (1.4) при известном математическом ожидании; n – объем выборки. Гипотезу проверяют полностью аналогично алгоритму, описанному выше, только в формулах (1.28) – (1.30) число степеней свободы k заменяют на объем выборки n.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, $X_i^{(1)} \sim N(a_1; \sigma_1)$, вторая – n_2, $X_i^{(2)} \sim N(a_2; \sigma_2)$. Проверить *гипотезу о равенстве дисперсий* этих двух генеральных совокупностей, то есть H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

В этом случае по каждой выборке находят несмещенные оценки дисперсий S_1^2 и S_2^2 с числами степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ соответственно. Гипотезу проверяют по критерию Фишера, функция критерия

$$F = S_1^2 \big/ S_2^2 \tag{1.32}$$

имеет F-распределения Фишера с $к_1$ и $к_2$ степенями свободы, то есть $F = F(k_1, k_2)$. Рассмотрим проверку нуль-гипотезы, как и в предыдущей задаче, при трех различных альтернативных гипотезах H_1.

1. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. В этом случае критерий Фишера рассчитывают, как отношение большей по величине оценки дисперсии к меньшей:

$$F = S_{большая}^2 \big/ S_{меньшая}^2 > 1 \tag{1.33}$$

Критерий двусторонний. Гипотезу H_0 принимают при выполнении неравенства:

$$F < F_{1-\alpha/2}(k_{S_{бол}}, k_{S_{мен}}) \tag{1.34}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается. Здесь $k_{S_{бол}}$ – число степеней свободы большей оценки дисперсии; $k_{S_{мен}}$ – число степеней свободы меньшей оценки дисперсии.

2. H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Критерий Фишера равен $F = S_1^2 \big/ S_2^2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотезу H_0 принимают при выполнении неравенства:

$$F < F_{1-\alpha}(k_1, k_2) \tag{1.35}$$

в противном случае гипотезу H_0 отвергают.

3. H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$. В этом случае следует поменять нумерацию выборок и, соответственно, оценок дисперсии S_1^2 и S_2^2 и осуществить проверку, как указано в пункте 2.

Замечание. Если проверку гипотезы о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проводят при известных математических ожиданиях, то вместо (1.32) используют функцию критерия

$$F = S_{01}^2 \big/ S_{02}^2 , \qquad (1.36)$$

где S_{01}^2 и S_{02}^2 – оценки дисперсии σ^2 (1.4) при известном математическом ожидании. В этом случае критерий Фишера имеет F-распределение Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы, то есть $F = F(n_1, n_2)$. Гипотезу проверяют полностью аналогично алгоритму, описанному выше, только в формулах (1.33) – (1.35) числа степеней свободы κ_1 и κ_2 заменяют на объемы выборок n_1 и n_2.

Пусть заданы $n > 2$ независимых выборок из n нормальных генеральных совокупностей (n серий экспериментов). Для проверки гипотезы H_0 об однородности дисперсий: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ можно воспользоваться критерием Кохрена G. В случае равенства чисел степеней свободы $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ (= k) несмещенных оценок дисперсий $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_n^2$ рассматривается отношение наибольшей из этих дисперсий $S_{\max}^2$ к сумме всех дисперсий:

$$G = S_{\max}^2 \big/ (S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2) . \qquad (1.37)$$

Согласно критерию Кохрена гипотезу H_0 принимают с уровнем значимости α, если $G < G_{1-\alpha}(k, n)$, и отвергают в противоположном случае. Квантили распределения Кохрена $G_p(k, n)$ приведены в табл. П8 Приложения.

Задача 1.13. В двух сериях независимых экспериментов (двух выборках из нормальных ГС) получены несмещенные оценки дисперсии: S_1^2 = 1,95 с k_1 = 15 степенями свободы и S_2^2 = 0,75 с k_2 = 20 степенями свободы. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий при альтернативной гипотезе $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ с уровнем значимости α = 0,05.

Решение

Вычислим значение критерия Фишера (1-33) F = 1,95/0,75 = 2,60 и сравним его с квантилью распределения Фишера по таблице П5 (двусторонний критерий) $F_{0,975}(15; 20) = 2,57$. Так как $F = 2,60 > 2,57$, то гипотезу о равенстве дисперсий в двух сериях экспериментов следует отвергнуть.

Задача 1.14. Партия чугунных отливок принимается, если дисперсия контролируемого размера не превышает 0,15 с уровнем значимости 0,01. Из партии отливок произвели случайную выборку объемом n = 46. Оценка дисперсии получилась равной 0,23. Можно ли принять эту партию отливок, если генеральная совокупность имеет нормальное распределение?

Решение

Объем выборки n = 46; S^2 = 0,23; α = 0,01; σ_0^2 = 0,15. Надо проверить гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. Математическое ожидание ГС неизвестно. Критерий односторонний (правосторонний). Вычислим значение критерия Z по формуле (1.27):

$$Z = \frac{kS^2}{\sigma_0^2} = \frac{45 \cdot 0,23}{0,15} = 69.$$

и сравним его с критическим значением $\chi^2_{1-\alpha}(k) = \chi^2_{0,99}(45) \approx 70$, который найден по таблице квантилей χ^2 – распределения (табл. П3). Так как Z = 69 < 70, то гипотеза H_0 принимается с уровнем значимости α = 0,01 (см. (1.30)) и данную партию отливок можно принять.

Задача 1.15. Сравнивается точность штамповки деталей на двух станках. Из продукции первого станка было отобрано 13 деталей, второго – 15 деталей. Оценки дисперсии этих выборок оказались равны S_1^2 = 3,24 и S_2^2 = 1,2. При уровне значимости α = 0,05 проверяем гипотезу о том, что оба станка обеспечивают одинаковую точность, причем в качестве альтернативной выбираем две гипотезы: а) станки обеспечивают неодинаковую точность; б) второй станок обеспечивает более высокую точность.

Решение

Из условия задачи следует, что математические ожидания выборок не известны.

а) Вычислим значение критерия F по формуле (1.33):

$$F = S^2_{большая} \big/ S^2_{меньшая} = S_1^2 / S_2^2 = 3{,}24/1{,}2 = 2{,}7.$$

Критерий двусторонний, так как альтернативная гипотеза H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Критическое значение критерия F

$$F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2) = F_{0,975}(12; 14) = 3{,}05.$$

$F = 2{,}7 < 3{,}05$, следовательно, гипотеза о равенстве дисперсий принимается с уровнем значимости α = 0,05. Принимаем утверждение, что станки обеспечивают одинаковую точность.

б) Альтернативная гипотеза H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, поэтому критерий односторонний, критическая область правосторонняя. Значение критерия Фишера $F = S_1^2 \big/ S_2^2$ = 3,24/1,2 = 2,7. Критическое значение критерия Фишера

$$F_{1-\alpha}(k_1, k_2) = F_{0,95}(12; 14) = 2{,}53.$$

$F = 2{,}7 > 2{,}53$, следовательно, гипотезу о равенстве дисперсий отвергаем с уровнем значимости $\alpha =$ 0,05 (1.35) и принимаем утверждение, что второй автомат обеспечивает более высокую точность.

Замечание. Как видно из рассмотренной выше задачи, *разные альтернативные гипотезы могут привести к разным выводам о H_0 – гипотезе.*

Задача 1.16. Для оценки погрешности нового измерительного прибора на нем была проведена серия измерений эталонной величины (то есть математическое ожидание было известно). Число измерений n = 45. Оценка дисперсии оказалась равной 0,21. Прибор считается годным, если дисперсия не превышает 0,15 при уровне значимости $\alpha =$ 0,05. Можно ли принять прибор в эксплуатацию, если генеральная совокупность нормальна?

Решение

Следует проверить гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ при $\sigma_0^2 =$ 0,15; $S_0^2 =$ 0,21; n = 45 и альтернативной гипотезе H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. Математическое ожидание известно. Критерий односторонний (правосторонний).

Вычислим значение критерия Z по формуле (1.31):

$$Z = n\, S_0^2 \,/\, \sigma_0^2 = 45 \cdot 0{,}21 / 0{,}15 = 63$$

и сравним с критическим значением $\chi^2_{1-\alpha}(n) = \chi^2_{0{,}95}(45) = 61{,}7$. Расчетное значение Z = 63 больше критического, поэтому гипотезу H_0 отвергаем и делаем вывод, что прибор не может быть принят в эксплуатацию.

Задача 1.17. До наладки электронных весов на них была проведена серия повторных измерений эталонного образца, состоящая из 15 испытаний. Получена оценка дисперсии $S_{01}^2 =$ 0,020. После наладки провели еще 20 испытаний того же образца. Получили новое значение оценки дисперсии $S_{02}^2 =$ 0,012. Можно ли считать, что в результате наладки весов точность взвешивания увеличилась? Принять $\alpha =$ 0,05. Генеральная совокупность нормальна.

Решение

Надо проверить гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Математическое ожидание известно. $S_{01}^2 =$ 0,020; $n_1 =$ 15; $S_{02}^2 =$ 0,012; $n_2 =$ 20. Критерий односторонний (правосторонний).

Вычислим значение критерия Фишера по формуле (1.36):

$$F = S_{01}^2 / S_{02}^2 = 0{,}020 / 0{,}012 = 1{,}67$$

и сравним эту величину с критическим значением

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = F_{0,95}(15;\, 20) = 2{,}20\,,$$

которое находим по таблице квантилей распределения Фишера (табл. П4). Поскольку вычисленное значение F меньше критического значения, гипотезу H_0 принимаем с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Можно сделать вывод, что точность взвешивания не изменилась.

Задача 1.18. Проведено шесть серий независимых измерений значений функции в шести точках, по три измерения в каждой. В каждой точке результаты измерений предполагаются равноточными и распределенными по нормальному закону. При первичной обработке этих результатов получены следующие несмещенные оценки дисперсии: $S_1^2 = 0{,}04$; $S_2^2 = 0{,}26$; $S_3^2 = 0{,}12$; $S_4^2 = 0{,}08$; $S_5^2 = 0{,}06$; $S_6^2 = 0{,}04$. Можно ли считать все измерения равноточными при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

Решение

Вычисляем отношение (1-37):

$$G = 0{,}26/(0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}04) = 0{,}433$$

и сравниваем его с квантилью распределения Кохрена (табл. П8): $G_{0,95}(2;\, 6) = 0{,}616$. Так как $0{,}433 < 0{,}616$, то нет оснований отвергать гипотезу о равноточности всех измерений.

2. Проверка гипотез о математических ожиданиях нормального распределения.

Пусть задана выборка X_1, X_2, ..., X_n из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Значение математического ожидания неизвестно. Найдена оценка математического ожидания $\overline{X}$. Проверяем *гипотезу о равенстве математического ожидания заданному числу.* $H_0 : a = a_0$ (a_0 – некоторое заданное число). Рассмотрим два случая.

Первый случай: дисперсия σ^2 известна.

Гипотезу проверяется с помощью функции критерия

$$U = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}\,, \qquad (1.38)$$

которая имеет стандартное нормальное распределение, то есть $U \sim N(0;\, 1)$. u_p – квантиль стандартного нормального распределения. Рассмотрим проверку гипотезы H_0 при трех вариантах альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a \neq a_0$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$\left| U \right| < u_{1-\alpha/2}, \tag{1.39}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a < a_0$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U > u_{\alpha}, \tag{1.40}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a > a_0$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U < u_{1-\alpha}, \tag{1.41}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

<u>Второй случай</u>: дисперсия σ^2 неизвестна.

Гипотеза проверяется с помощью функции критерия

$$t = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}, \tag{1.42}$$

которая имеет t-распределение Стьюдента с k степенями свободы, то есть $t = t(k)$. S – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6); k – число степеней свободы при вычислении оценки S. $t_P(k)$ – квантиль распределения Стьюдента. Как и выше, рассматриваем проверку гипотезы H_0 при трех вариантах альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a \neq a_0$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$\left| t \right| < t_{1-\alpha/2}(k), \tag{1.43}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a < a_0$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t > t_{\alpha}(k), \tag{1.44}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a > a_0$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t < t_{1-\alpha}(k), \tag{1.45}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, $X_i^{(1)} \sim N(a_1;\ \sigma_1)$, вторая – n_2, $X_i^{(2)} \sim N(a_2;\ \sigma_2)$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

Проверяем *гипотезу о равенстве математических ожиданий* этих двух генеральных совокупностей, то есть H_0: $a_1 = a_2$. По каждой выборке находим оценки математических ожиданий $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$. Рассмотрим два случая.

<u>Первый случай:</u> дисперсии σ_1 и σ_2 известны.

Гипотеза проверяется с помощью функции критерия

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \tag{1.46}$$

функция имеет стандартное нормальное распределение, то есть $U \sim N(0;\ 1)$. Рассмотрим различные варианты альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a_1 \neq a_2$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|U| < u_{1-\alpha/2}, \tag{1.47}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a_1 < a_2$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U > u_{\alpha}, \tag{1.48}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a_1 > a_2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U < u_{1-\alpha}, \tag{1.49}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

<u>Второй случай:</u> дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но гипотеза о равенстве дисперсий принимается. S_1^2 и S_2^2 – несмещенные оценки дисперсий первой и второй выборок. Находим сводную оценку дисперсии:

$$S_{\text{св}}^2 = (S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2) / (k_1 + k_2).$$

Гипотеза проверяется по критерию Стьюдента, функция критерия

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{\text{св}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \tag{1.50}$$

имеет t-распределение Стьюдента с $k_{св}$ степенями свободы, то есть $t = t(k_{св})$. $k_{св} = k_1 + k_2 = n_1 + n_2 - 2$ – число степеней свободы при вычислении оценки $S_{св} = \sqrt{S_{св}^2}$. Рассмотрим различные варианты альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a_1 \neq a_2$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|t| < t_{1-\alpha/2}(k_{св}), \tag{1.51}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a_1 < a_2$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t > t_{\alpha}(k_{св}), \tag{1.52}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a_1 > a_2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t < t_{1-\alpha}(k_{св}), \tag{1.53}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Рассмотрим примеры проверки статистических гипотез. Во всех нижеприведенных задачах предполагается, что рассматриваемые генеральные совокупности имеют нормальное распределение.

Задача 1.19. Из продукции цеха выбрано n = 60 отливок, средняя масса которых составила $\overline{X}$=2,87. При уровне значимости α= 0,01 проверить гипотезу о том, что математическое ожидание массы чугунной отливки составляет a_0= 3, причем выдвинуты два варианта альтернативной гипотезы первая H_1: $a \neq a_0$ и вторая H_1: $a < a_0$. Решить задачу в двух случаях: а) дисперсия известна: σ^2= 0,16 и б) дисперсия не известна, но оценка дисперсии, найденная по той же выборке, равна S^2=0,16.

Решение

а) По формуле (1.38) вычислим функцию критерия:

$$U = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(2,87 - 3)\sqrt{60}}{0,4} \approx -2,517 .$$

1а) Критическая область двусторонняя. В таблице квантилей стандартного нормального распределения (табл. П1)найдем критическое значение $u_{1-\alpha/2} = u_{0,995} = 2,576$.

Так как $|U| = 2{,}517 < 2{,}576$, то гипотезу H_0 принимается с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ (см. (1.39)).

2а) Критическая область левосторонняя. Найдем критическое значение $u_\alpha = u_{0,01} = -u_{0,99} = -2{,}326$. Так как $U = -2{,}517 < -2{,}326$, то гипотезу H_0 отклоняется с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ (см. (1.40)).

б) По формуле (1.42) вычислим функцию критерия:

$$t = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S} = \frac{(2{,}87 - 3)\sqrt{60}}{0{,}4} \approx -2{,}517 .$$

1б) Критическая область двусторонняя. В таблице квантилей распределения Стьюдента (табл. П2) найдем критическое значение $t_{1-\alpha/2}(k) = t_{0,995}(59) = 2{,}66$. Так как $|t| = 2{,}517 < 2{,}66$, то гипотеза H_0 принимается с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ (см. (1.43)).

2б) Критическая область левосторонняя. Найдем критическое значение $t_\alpha(k) = t_{0,01}(59) = -t_{0,99}(59) = -2{,}39$. Так как $t = -2{,}517 < -2{,}39$, то гипотеза H_0 отклоняется с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ (см. (1.44)).

Задача 1.20. Номинальный диаметр шариков, изготовленных станком-автоматом, равен $d_0 = 10$ мм. В выборке из 36 шариков средний диаметр $\overline{d}$ оказался равным 10,4 мм. Используя односторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$,проверить гипотезу H_0: $d = d_0$, рассмотрев два случая: а) дисперсия известна и равна $\sigma^2 = 2{,}1$ мм^2; б) дисперсия неизвестна; оценка дисперсии, определенная по той же выборке, равна $S^2 = 2{,}1$ мм^2.

Решение

Альтернативная гипотеза H_1: $d > d_0$.

а) По формуле (1.38) вычислим функцию критерия

$$U = \frac{(\overline{d} - d_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(10{,}4 - 10)\sqrt{36}}{\sqrt{2{,}1}} \approx 1{,}656 .$$

В таблице квантилей стандартного нормального распределения найдем критическое значение $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1{,}645$. Так как $U = 1{,}656 > 1{,}645$, то гипотеза H_0 отклоняется с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. (1.41)).

б) По формуле (1.42) вычислим функцию критерия:

$$t = \frac{(\overline{d} - d_0)\sqrt{n}}{S} = \frac{(10{,}4 - 10)\sqrt{36}}{\sqrt{2{,}1}} \approx 1{,}656 .$$

В таблице квантилей распределения Стьюдента найдем критическое значение $t_{1-\alpha}(k) = t_{0,95}(35) = 1{,}69$. Так как t = 1,656 < 1,69, то гипотеза H_0 принимается с уровнем значимости α = 0,01 (см. (1.45)).

Задача 1.21. Цех выплавляет по старой технологии в среднем 1000 кг за смену со средним квадратическим отклонением σ = 60 кг. Новая технология производства в среднем дает 1050 кг за смену с тем же средним квадратическим отклонением. Можно ли считать, что новая технология обеспечивает повышение производительности при уровне значимости α = 0,05, имея в распоряжении данные о двадцати пяти плавках, проведенных по старой технологии (n_1 = 25) и данные о двадцати плавках, проведенных по новой технологии (n_2 = 20).

Решение

Проверим гипотезу о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей. H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 < a_2$; дисперсии $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ – известны. Критерий односторонний (левосторонний). Вычислим функцию критерия (1.46):

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1000 - 1050}{60\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}} \approx -2{,}778.$$

Найдем критическое значение $u_\alpha = u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}645$. Так как U = –2,778 < –1,645, то гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α = 0,05 (см. (1.48)). Следовательно, можно считать, что новая технология обеспечивает повышение производительности.

Задача 1.22. Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий контролируемой массы изделий, изготовленных на первом и втором станках, если по выборке объема n_1 = 20 найдена средняя масса $\overline{X}_1$ = 198 г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема n_2 = 42 найдена средняя масса $\overline{X}_2$ = 193 г изделий, изготовленных на втором станке. Оценки дисперсий, найденные по тем же выборкам, равны, соответственно, 50 г^2 и 64 г^2. Гипотеза о равенстве дисперсий принята. Уровень значимости α = 0,01. Рассмотреть два случая: а) альтернативная гипотеза: масса изделий первого станка больше, чем второго; б) альтернативная гипотеза: массы изделий первого и второго станков различны.

Решение

а) Проверим гипотезу о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 > a_2$; дисперсии неизвестны. Критерий односторонний (правосторонний).

Найдем сводную оценку дисперсии

$$S_{\text{св}}^2 = (S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2) \big/ (k_1 + k_2) = (50 \cdot 19 + 64 \cdot 41)/(19 + 41) \approx 59{,}57\,,$$

где $k_1 = n_1 - 1 = 19$; $k_2 = n_2 - 1 = 41$. Вычислим функцию критерия (1.50):

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{св}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{198 - 193}{\sqrt{59{,}57}\sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{42}}} \approx 2{,}384. \qquad (1.54)$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента найдем критическое значение $t_{1-\alpha}(k_{св}) = t_{0,99}(60) = 2{,}390$, где $k_{св} = k_1 + k_2 = 19 + 41 = 60$. Так как $t = 2{,}384 < 2{,}390$, то принимаем нуль-гипотезу (см. (1.53)) с уровнем значимости α = 0,01.

б) Проверим гипотезу о равенстве математических ожиданий при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$; дисперсии неизвестны. Критическая область двусторонняя. Значение критерия Стьюдента вычисляется, как и в первой части задачи (1.54).

По таблице квантилей распределения Стьюдента найдем критическое значение $t_{1-\alpha/2}(k_{св}) = t_{0,995}(60) = 2{,}660$. Так как $|t| = 2{,}384 < 2{,}660$, то гипотеза принимается (см. (1.51)) с уровнем значимости α = 0,01.

Задача 1.23. Из двух партий изделий, изготовленных на разных станках, извлечены две выборки с объемами n_1= 12 и n_2= 15. Результаты представлены в таблицах 1.7 и 1.8. При уровне значимости α = 0,02 проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий контролируемых размеров изделий, изготовленных на первом и втором станках.

Таблица 1.7

Размер изделий, изготовленных на первом станке (к задаче 1.23)

Размер изделий первого станка, X_{1i}	5,4	5,5	5,5	5,7
Частота (число изделий), n_{1i}	2	5	4	1

Таблица 1.8

Размер изделий, изготовленных на втором станке (к задаче 1.23)

Размер изделий второго станка, X_{2i}	5,2	5,3	5,4
Частота (число изделий), n_{2i}	2	4	9

Решение

Сначала найдем оценки математических ожиданий и дисперсий для каждой выборки:

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{4} X_{1i} n_{1i} = \frac{1}{12}(5,4\cdot 2 + 5,5\cdot 5 + 5,6\cdot 4 + 5,7) \approx 5,53;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{4} X_{1i}^2 n_{1i} - n_1 \overline{X}_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{11}(5,4^2\cdot 2 + 5,5^2\cdot 5 + 5,6^2\cdot 4 + 5,7^2 - 12\cdot 5,53^2) = 0,0120.$$

Аналогично: $\overline{X}_2 = 5,35$; $S_2^2 = 0,0055$.

Проверим гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Найдем значение критерия Фишера (1.33) (отношение большей оценки дисперсии к меньшей):

$$F = S_1^2 / S_2^2 \approx 2,18.$$

Критическое значение (квантиль распределения Фишера):

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,99}(11{,}14) = 3,87.$$

Так как $F = 2,18 < 3,87$, то принимаем гипотезу о равенстве дисперсий . Найдем сводную оценку дисперсии

$$S_{\text{св}}^2 = (S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2)/(k_1 + k_2) = (0,012\cdot 11 + 0,0055\cdot 14)/(11 + 14) \approx$$

$\approx 0,0084$, где $k_1 = n_1 - 1 = 11$; $k_2 = n_2 - 1 = 14$.

Вычислим функцию критерия (1.50):

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{св}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{5,53 - 5,35}{\sqrt{0,0084}\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}}} \approx 4,901.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента найдем критическое значение $t_{1-\alpha/2}(k_{св}) = t_{0,99}(25) = 2,485$, где $k_{св} = k_1 + k_2 = 11 + 14 = 25$. Так как $|t| = 4,901 > 2,485$, то гипотеза H_0 отвергается (см. (1.51)) с уровнем значимости $\alpha = 0,02$. Делаем вывод, что математические ожидания размеров изделий различаются.