ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9.

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

На практическом занятии 7 были рассмотрены точечные оценки параметров Напомним, что точечная оценка $\tilde{\beta}$ неизвестного параметра β для каждой случайной выборки дает лишь одно числовое значение, которое мы принимаем за приближенное значение этого параметра. Важная задача – определить точность полученного приближения, то есть на сколько точечная оценка может отклоняться от истинного значения параметра. Ответить на этот вопрос позволяют доверительные интервалы.

Доверительным интервалом параметра β называется интервал со случайными границами $(\tilde{\beta}-\varepsilon_1;\ \tilde{\beta}+\varepsilon_2)$, который накрывает истинное значение параметра β с заданной вероятностью Р, которая называется *доверительной вероятностью.* Величина $\alpha = 1-\mathrm{P}$ называется *уровнем значимости*. При этом обычно требуют, чтобы вероятности выхода за границы доверительного интервала в обе стороны были равны между собой, а именно:

$$P(\beta < \tilde{\beta}-\varepsilon_1) = P(\beta > \tilde{\beta}+\varepsilon_2) = (1-\mathrm{P})/2 = \alpha/2\,.$$

Это дополнительное требование обеспечивает единственность решения задачи.

Пусть задана повторная случайная выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из нормальной генеральной совокупности. Это означает, что результаты эксперимента независимы и подчиняются нормальному закону распределения с одинаковыми параметрами $X_i \sim N(a;\sigma)$. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения находят следующим образом.

Доверительный интервал для математического ожидания a.

С вероятностью Р математическое ожидание a принадлежит интервалу

$$a \in (\overline{X}-\varepsilon;\ \overline{X}+\varepsilon)\,, \tag{1.19}$$

– если σ известно, то

$$\varepsilon = u_{1-\alpha/2}\,\sigma\big/\sqrt{n}\,, \tag{1.20}$$

– если σ не известно, то

$$\varepsilon = t_{1-\alpha/2}(k)\ S\big/\sqrt{n}\,, \tag{1.21}$$

где $\overline{X}$ – оценка математического ожидания (1.3); $S = \sqrt{S^2}$ – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6) при неизвестном математическом ожидании; $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения; $t_{1-\alpha/2}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с $к$ степенями свободы; n – объем выборки; $к$ – число степеней свободы при вычислении оценки S.

Часто доверительный интервал для математического ожидания записывают символически:

$$a = \overline{X} \pm \varepsilon . \qquad (1.22)$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при доверительной вероятности $\mathrm{P} = 1 - \alpha$ имеет вид:

– если математическое ожидание a известно, то

$$S_0 \sqrt{\frac{n}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}} < \sigma < S_0 \sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}} , \qquad (1.23)$$

где S_0 – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6) при известном математическом ожидании;

– если математическое ожидание a неизвестно, то

$$S \sqrt{\frac{k}{\chi^2_{1-\alpha/2}(k)}} < \sigma < S \sqrt{\frac{k}{\chi^2_{\alpha/2}(k)}} , \qquad (1.24)$$

где S – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6) при неизвестном математическом ожидании; $\chi^2_P(k)$ – квантиль распределения Пирсона с k степенями свободы; k – число степеней свободы оценки S.

Доверительный интервал для дисперсии

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 при доверительной вероятности Р $= 1 - \alpha$, соответственно, находится по формулам:

– если математическое ожидание a известно, то

$$S_0^2 \frac{n}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < S_0^2 \frac{n}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} , \qquad (1.25)$$

– если математическое ожидание a неизвестно, то

$$S^2 \frac{k}{\chi^2_{1-\alpha/2}(k)} < \sigma^2 < S^2 \frac{k}{\chi^2_{\alpha/2}(k)} \qquad (1.26)$$

Задача 1.6. Случайная выборка из нормальной генеральной совокупности состоит из одного элемента $X = 12{,}7$. Значение параметра σ известно, $\sigma = 0{,}3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью P = 0,95.

Решение

По формуле (1.20) $\varepsilon = u_{1-\alpha/2}\sigma$, где $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения, α = 1– P = 0,05; 1–$\alpha/2$ =0,975; $u_{0,975}$ = 1,96. $\varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}3 \approx 0.6$. По формуле (1.22) $a = 12{,}7 \pm 0{,}6$.

Замечание. Задача демонстрирует смысл коэффициента σ. Полуширина доверительного интервала для одного измерения с доверительной вероятностью P = 0,95 приблизительно равна 2σ (правило двух сигм).

Задача 1.7. Случайная выборка из нормальной генеральной совокупности состоит из 16 элементов. По ним найдено среднее арифметическое $\overline{X} = 12{,}56$ (1.3). Значение параметра σ известно, $\sigma = 0{,}3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью P = 0,95.

Решение

По формуле (1.20) $\varepsilon = u_{1-\alpha/2}\,\sigma\big/\sqrt{n}$, где $u_{1-\alpha/2}$ = $u_{0,975}$ = 1,96. $\varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}3/\sqrt{16} \approx 0.15$. По формуле (1.22) находим $a = 12{,}56 \pm 0{,}15$.

Задача 1.8. В задаче 1.1 для n = 18 результатов независимых измерений величины заряда электрона $q = x \cdot 10^{-10}$ были вычислены $\overline{X}$ = 4,7807 и S = 0,0191. Предполагая, что величины ошибок измерений подчиняются нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием (то есть, что систематические ошибки отсутствуют), построить доверительные интервалы для математического ожидания (истинного значения) заряда электрона $q_{ист} = a \cdot 10^{-10}$ и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью $\mathcal{P}$ = 0,95.

Решение

По формуле (1.21) $\varepsilon = t_{1-\alpha/2}(k)\,S\big/\sqrt{n}$. Из табл. П2 приложения находим: $t_{1-\alpha/2}(k)$ = $t_{0,975}(17)$ = 2,11.

$$\varepsilon = 2{,}11 \cdot 0{,}0191\big/\sqrt{18} \approx 0{,}0095.$$

По формуле (1.22) $a = 4{,}7807 \pm 0{,}0095$, то есть с вероятностью $\mathcal{P}$ = 0,95 выполняется неравенство: 4,7712 < a < 4,7902.

Из табл. П3 приложения находим:

$$\chi^2_{\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,025}(17) = 7{,}56;$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,975}(17) = 30{,}2.$$

По формуле (1.24) получаем:

$$0{,}0191\sqrt{\frac{17}{30{,}2}} < \sigma < 0{,}0191\sqrt{\frac{17}{7{,}56}},$$

откуда

$$0{,}0143 < \sigma < 0{,}0287,$$

то есть среднее квадратическое отклонение заключено между 0,0143 и 0,0287 с вероятностью 0,95.

Задача 1.9. В задаче 1.2 для n = 52 измерений были вычислены приближенно $\overline{X}$ = 24,70 и S = 0,77. Предполагая, что величины ошибок измерения подчиняются нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием, построить доверительные интервалы для математического ожидания a и дисперсии σ^2 с доверительной вероятностью $\mathcal{P}$ = 0,99.

Решение

Из табл. П2 приложения находим (интерполируя): $t_{1-\alpha/2}(k) = t_{0,995}(51) = 2{,}68$. По формулам (1.21) и (1.22) получаем: $\varepsilon = 2{,}68 \cdot 0{,}77 / \sqrt{52} = 0{,}29$, откуда $a = 24{,}70 \pm 0{,}29$ или $24{,}41 < a < 24{,}99$.

Из табл. П3 приложения находим (интерполируя): $\chi^2_{\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,005}(51) = 28{,}8$; $\chi^2_{1-\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,995}(51) = 80{,}7$. Из формулы (1.26) следует $0{,}77^2 \cdot 51/80{,}7 < \sigma^2 < 0{,}77^2 \cdot 51/28{,}8$, откуда $0{,}375 < \sigma^2 < 1{,}051$. Заметим, что округлять границы следует в сторону увеличения доверительного интервала, чтобы заведомо обеспечить требуемую надежность.

Задача 1.10. Для оценки погрешности нового измерительного прибора на нем была проведена серия повторных измерений эталонной величины (то есть, математическое ожидание было известно). Число измерений n = 40. По формуле (1.4) была найдена оценка дисперсии $S_0^2 = 0{,}0216$. Предполагая, что измерения имеют нормальный закон распределения, найти доверительный интервал для σ с доверительной вероятностью $\mathcal{P}$ = 0,95.

Решение

Из табл. П3 приложения при числе степеней свободы $n = 40$ находим: $\chi^2_{\alpha/2}(n) = \chi^2_{0,025}$ (40) = 24,4; $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ = $\chi^2_{0,975}$(40) = 59,3. По формуле (1.24) находим: $S_0 = \sqrt{0,0216} \approx 0,147$; $0,147 \cdot \sqrt{40/59,3} < \sigma < 0,147 \cdot \sqrt{40/24,4}$. Окончательно,

$$0,121 < \sigma < 0,188.$$

Задача 1.11. В задаче 1.4 в первой строке табл. 1.5 по $n = 5$ измерениям была вычислена оценка σ равная $S_1 = 0,19$. Найти оценку математического ожидания Y_1 по этой строке. Построить доверительные интервалы для $M(y_1)$ и σ с доверительной вероятностью $\mathcal{P} = 0,95$.

Решение

Используя формулу (1.7) находим оценку математического ожидания y_1 при $D = 20$: $\overline{Y_1} = C + h\overline{U}$ = 8,9 + 0,1·1/5 = 8,92. Предполагая, как и выше, что результаты измерения Y_{1i} подчиняются нормальному закону распределения, находим: $t_{1-\alpha/2}(k) = t_{0,975}(4) = 2,78$. По формулам (1.21) и (1.22) получаем: $\varepsilon = 2,78 \cdot 0,19 / \sqrt{5} = 0,24$; $M(y_1) = 8,92 \pm 0,24$. Из табл. П3 приложения находим: $\chi^2_{\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,025}(4) = 0,484$; $\chi^2_{1-\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,975}(4) = 11,1$. Согласно формуле (1.24): $0,19 \cdot \sqrt{4/11,1} < \sigma < 0,19 \cdot \sqrt{4/0,484}$, откуда $0,114 < \sigma < 0,545$.

Задача 1.12. Решить задачу 1.11, используя для построения доверительных интервалов вместо эмпирической дисперсии S_1^2 подсчитанную в задаче 1.4 сводную оценку дисперсии $S^2_{\text{св}} = 0,0364$ с $k_{\text{св}} = 19$ степенями свободы.

Решение

Здесь $t_{0,975}(19) = 2,09$, $\chi^2_{0,025}(19) = 8,91$, $\chi^2_{0,975}(19) = 32,9$ и поэтому все доверительные интервалы значительно уже: $\varepsilon = 2,09 \cdot 0,191/\sqrt{5} = 0,18$, то есть $M(Y_1) = 8,92 \pm 0,18$.

$0,191 \cdot \sqrt{19/32,9} < \sigma < 0,191 \cdot \sqrt{19/8,91}$, то есть $0,145 < \sigma < 0,279$.