ЛЕКЦИЯ 1

Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Ряды с комплексными членами. Элементарные функции комплексного переменного и их приложения.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (a; b). Геометрической интерпретацией комплексного числа называется точка плоскости z, где (a; b) – ее декартовы координаты (рис. 1.1). Такая плоскость называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной*, а ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости. Другая удобная геометрическая форма представления комплексного числа – *радиус–вектор точки* z, т.е. вектор, проведенный из начала координат в точку z, тогда (a; b) – координаты этого радиус–вектора.

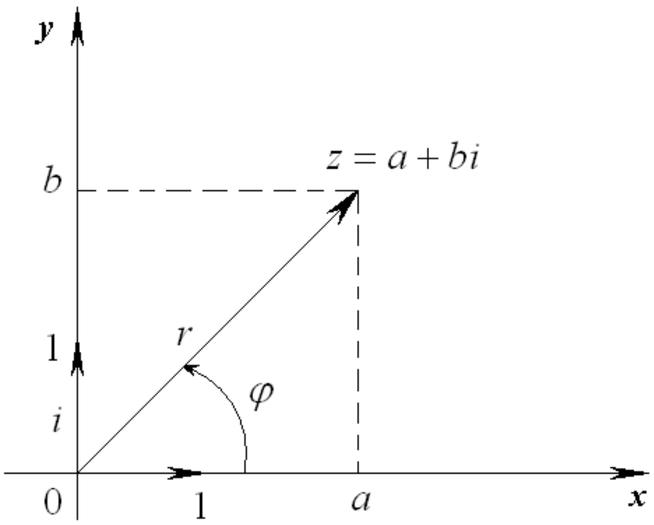

Рис. 1.1

Если точка z лежит на действительной оси, т.е. соответствующее комплексное число имеет вид (a; 0), то такое число отождествляется с *действительным числом* a. Таким образом (a; 0) = a. Если точка z лежит на мнимой оси, не совпадая с началом координат, т.е. комплексное число имеет вид (0; b), $b \neq 0$, то она называется *мнимым числом*. Если точка z совпадает с началом координат, то такое комплексное число называется нулем: (0; 0) = 0.

Единичный вектор действительной оси называется *действительной единицей* и обозначается 1, т.е. (1; 0) = 1. Единичный вектор мнимой оси называется *мнимой единицей* и обозначается i, т.е. (0; 1) = i. Тогда радиус–вектор комплексного числа z = (a; b) в ортонормированном базисе векторов 1 и i можно написать $z = a\cdot 1 + b\cdot i$. При этом действительную единицу принято не писать:

$$z = a + bi \tag{1.1}$$

Запись комплексного числа по формуле (1.1) называется алгебраической формой комплексного числа. При этом a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается *Re z*, число b – *мнимой частью* z и обозначается *Im z*.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равен между собой их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$.

Действиям сложения и вычитания комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует сложение и вычитание их радиус-векторов:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\cdot i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)\cdot i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Разность комплексных чисел $z_1 - z_2$ можно рассматривать как вектор, проведенный из точки z_2 в точку z_1 комплексной плоскости. Тогда модуль этого вектора равен расстоянию между точками z_2 и z_1.

Умножение комплексного числа $z = a + bi$ на действительное число $\lambda = \lambda + 0i$ определяется по аналогии с умножением вектора на действительное число:

$$\lambda z = \lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi\,. \tag{1.3}$$

Определим теперь действия умножения и деления комплексных чисел. По определению

$$(i)^2 = -1 \tag{1.4}$$

и умножение комплексных чисел проводится по правилу умножения алгебраических многочленов:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (i)^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\,. \tag{1.5}$$

Два комплексных числа $a + bi$ и $a - bi$, отличающиеся только знаком при мнимой части, называются сопряженными и обозначаются $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$. Произведение сопряженных комплексных чисел является действительным числом. Действительно

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 (i)^2 = a^2 + b^2\,. \tag{1.6}$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Число z называется частным комплексных чисел z_1 и z_2 $\left(z = \dfrac{z_1}{z_2}\right)$, если $z_1 = z z_2$. Отметим, что при $z_2 \neq 0$ деление всегда выполнимо. Для того чтобы разделить комплексное число z_1 на z_2, числитель и знаменатель дроби умножают на число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}. \qquad (1.7)$$

Тогда деление чисел z_1 на z_2 сводится к умножению чисел z_1 и $\overline{z_2}$ и умножению полученного результата на действительное число $\frac{1}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$.

Весьма важной является также другая форма представления комплексных чисел. Для определения положения точки на плоскости можно воспользоваться полярными координатами (r, φ), где r – расстояние точки от начала координат, а φ – угол, который составляет радиус–вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс (см. рис. 1.1). Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки.

Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

можно комплексное число $z = a + bi$ записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1.8)$$

где $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Эта форма записи называется *тригонометрической формой* комплексного числа. При этом r называется *модулем*, а φ – *аргументом* комплексного числа и обозначается $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Легко выразить модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = \frac{b}{a} \qquad (1.9)$$

Заметим, что аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где k – любое целое число. Выделим из всех значений аргумента одно , которое удовлетворяет неравенствам $-\pi < \varphi \le \pi$. Это значение называется *главным* и обозначается $\varphi = \arg z$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще не определен, а его модуль равен нулю.

Два отличительных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число, кратное 2π .

Перемножим комплексные числа z_1 и z_2 , заданные в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда, согласно формуле (1.5)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (1.10)$$

Из формулы (1.10) следует, что *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются , а аргументы складываются*. Это правило сохраняется для любого конечного числа n множителей. В частности, когда все n множители одинаковы, получим

$$z^n = (r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.11)$$

Формула (1.11) называется *формулой Муавра*.

Поделим комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Воспользуемся формулой (1.7):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \qquad (1.12)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Из формулы (1.12) следует, что *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Извлечение корня n–й степени из комплексного числа есть действие, обратное возведению комплексного числа в n–ю степень. Следовательно, если $\omega = \sqrt[n]{z}$, то $z = \omega^n$. Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ и } \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

По формуле Муавра (1.11) получим

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Отсюда $r = \rho^n, n\theta = \varphi + 2\pi k.$ Так как r и ρ – положительные числа, то $\rho = \sqrt[n]{r}$, где корень понимается в арифметическом смысле.

Из равенства $n\theta = \varphi + 2\pi k$ получим $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$. Следовательно

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (1.13)$$

Придавая κ последовательно значения 0, 1, 2,…, n–1, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$. Все они имеют одинаковый модуль. Если взять $k > n$–1, то значения θ будут отличаться от полученных ранее на числа, кратные 2π , т.е. значения $\sqrt[n]{z}$ будут повторятся. Таким образом, корень n–й степени из комплексного числа имеет ровно n разных значений.

Как известно, квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ в случае, когда его дискриминант $D=b^2 - 4ac$ отрицателен, не имеет действительных корней. Покажем, что в этом случае уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. Действительно, по формуле решения квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Считая, что $D < 0$ и полагая $D = -d^2$ $(d > 0)$, получаем

$$\sqrt{-d^2} = \sqrt{d^2(-1)} = \sqrt{d^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm di.$$

Следовательно:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-d^2}}{2a} = \frac{-b \pm di}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{d}{2a} i.$$

В заключение приведем соотношения, называемые формулами Эйлера. Эти формулы будут выведены позже. Для любого действительного числа x справедливы формулы

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{1.14}$$

1.2. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Выше было введено понятие комплексного числа. Дадим теперь понятие функции комплексной переменной. Рассмотрим множество G комплексных чисел $z=x+yi$ и множество W комплексных чисел $w=u+vi$. *Функцией комплексной переменой* называется правило, по которому каждому комплексному числу $z \in G$ соответствует одно или несколько значений $w \in W$.

Множество G называется *областью определении* функции, z – *независимой переменной*, w – *зависимой переменной*, или *функцией*. Геометрически область определения функции является множеством точек комплексной плоскости. Функция комплексной переменной обозначается так же, как и функция действительной переменной: $w = f(z)$

В дальнейшем мы будем рассматривать только *однозначные* функции, т.е. такие, для которых каждому значения $z \in G$ соответствует *единственное* значение $w \in W$.

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y, являющихся соответственно его действительной и мнимой частями ($z = x + yi$), а числу w точно так же однозначно соответствует пара действительных чисел u и ($w = u + vi$), то зависимость $w = f(z)$ между комплексный функцией w и комплексной переменной z равносильна двум зависимостям

$$u = u(x; y), \quad v = v(x; y). \tag{1.15}$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных переменных x и y.

Например, если $w = z^2$, то, полагая,

$$z = x+yi, \quad w = u + vi$$

получаем

$$u + vi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

и , следовательно , равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

На функции комплексной переменной распространяется понятие предела и непрерывности. Введем предварительно понятие окрестности точки комплексной плоскости.

Определение. *δ – окрестностью точки* z_0 (обозначается $U_\delta(z_0)$) называется внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0 .*Проколотой δ – окрестностью точки* z_0 (обозначается $\overset{o}{U}_\delta(z_0)$) называется δ – окрестность точки z_0 , из которой удалена сама точка z_0.

Определение. Комплексное число $c = a + bi$ называется *пределом функции* $w = f(z)$ *при* $z \to z_0$, если для любого положительного числа ε существует такая проколотая δ – окрестность точки z_0, что для всех точек z комплексной плоскости , лежащих в этой окрестности, выполняется равенство $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$. С помощью кванторов определение предела можно записать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall z \in \overset{o}{U}_\delta(z_0) \Rightarrow | f(z) - c | < \varepsilon . \qquad (1.16)$$

Введенное определение предела функции ничем не отличается от определения предела функции действительного переменного. Поэтому, все доказанные в курсе математического анализа теоремы о пределах остаются в силе для функции комплексного переменного.

Определение. Функция $f(z)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0 .$$

Справедливы и все доказанные для функций действительного переменного теоремы о бесконечно малых функциях.

Определение. Если функция $w = f(z)$ определяется в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не только существует, но равен значению функции $f(z)$в точке z_0 т.е.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) ,$$

то функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0. Определение непрерывности можно записать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall z \in \overset{o}{U}_\delta(z_0) \Rightarrow | f(z) - f(z_0) | < \varepsilon . \qquad (1.17)$$

Так как сформулированное определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функций действительного переменного, то доказанные в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного (если делитель не обращается в нуль) непрерывной функции, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функции комплексного переменного.

Как указывалось выше, равенство $w = f(z)$, где $w = u + iv$, $z = x + iy$, равносильно системе равенств

$$u = u(x; y), \quad v = v(x; y).$$

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = (u(x; y) - u(x_0; y_0)) + i(v(x; y) - v(x_0; y_0))$$

и

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u(x; y) - u(x_0; y_0))^2 + i(v(x; y) - v(x_0; y_0))^2}. \tag{1.18}$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 следует, что для любого положительного ε существует положительное значение δ такое, что для любого z, принадлежащего $\mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняет неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. И, следовательно, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &|u(x; y) - u(x_0; y_0)| < \varepsilon; \\ &|v(x; y) - v(x_0; y_0)| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.19}$$

которые означают, что функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$. Таким образом, из непрерывности функции комплексного переменного следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных x и y. Справедливо и обратное утверждение. Из неравенств (1.19) и равенства (1.18) непосредственно следует, что непрерывность функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

1.3. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим последовательность , членами которой являются комплексные числа z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_n, \ldots$, где $z_n = x_n + iy_n$. Обобщим понятие предела последовательности для этого случая.

Определение. Комплексное число $c = a + ib$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что для всех натуральных чисел $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - c| < \varepsilon$. То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n \geq \mathrm{N} \ \Rightarrow \ |z_n - c| < \varepsilon.$$

Записывается $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$.

Так как $z_n - c = (x_n + iy_n) - (a + ib) = (x_n - a) + i(y_n - b)$, то

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon.$$

Но выражение $\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$ равно расстоянию между точками $(x_n; y_n)$ и $(a; b)$, т.е. между точками z_n и c. Следовательно, если c есть предел последовательности $\{z_n\}$, то с возрастанием n точки z_n неограниченно приближаются к точке c.

Определение. Пусть дан ряд, членами которого является комплексные числа

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots, \tag{1.20}$$

где $z_n = x_n + iy_n$. Если существует предел частичной суммы ряда $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ при $n \to \infty$, то ряд (1.20) называется *сходящимся*, а предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – его *суммой*. Если частичная сумма не имеет конечного предела, то ряд называется *расходящимся.*

Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема. Пусть дан ряд с комплексными членами $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$. Тогда, если ряд

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| + \ldots,$$

составленный из модулей членов данного ряда, сходится, то и данный ряд также сходится.

Ряд с комплексными членами называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов. Абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами обладают теми же свойствами, что и абсолютно сходящиеся ряды с действительными членами.

Пусть дан степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1.21}$$

где $z = x + iy$, а коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – комплексные или действительные числа. Аналогично тому, как это было сделано для степенных рядов в действительной области, можно установить следующие утверждения.

1. Для каждого степенного ряда существует такое число $R > 0$, что для всех $|z| < R$ ряд (1.21) сходится, а для $|z| > R$ ряд расходится. Точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, для которых $|z| < R$, лежат внутри круга радиусом R с центром в начале координат. Это следует из определения $|z|$, как расстояния от точки z до начала координат. Такой круг называется *кругом сходимости* степенного ряда, а его радиус R – радиусом сходимости. Вне круга сходимости, т.е. в точках, где $|z| > R$, степенной ряд расходится. На границе круга сходимости, т.е. в точках, для которых $|z| = R$, в зависимости от конкретных случаев может иметь место сходимость или расходимость.

Замечание. Если степенной ряд сходится только в точке $z = 0$, то его радиус сходимости полагают равным нулю: $R = 0$. Если степенной ряд сходится при всех значениях z, т.е. во всей плоскости комплексной переменной, то радиус сходимости полагают равным бесконечности: $R = \infty$.

2. Внутри круга сходимости степенной ряд обладает всеми свойствами, которыми обладают степенные ряды с действительными членами, т.е. внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится и его сумма $S(z)$ есть непрерывная функция комплексной переменной.

Ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \tag{1.22}$$

где a – любое комплексное число, также называется степенным. Этот ряд подстановкой $(z-a) = t$ сводится к ряду (1.21), причем точке $t = 0$ соответствует точка $z = a$. Следовательно, областью сходимости ряда (1.22) является круг радиусом R (радиус сходимости) с центром в точке $z = a$.

Круг сходимости можно найти с помощью признака Даламбера.

1.4. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

С помощью степенных рядов в комплексной области обобщим понятия нескольких основных элементарных функций на случай комплексной переменной.

Как известно, для любого действительного x имеет место разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Заменим в этом ряде действительную переменную x на комплексную переменную z, получим ряд (1.22), который сходится во всей плоскости комплексной переменной. Его сумма является функцией, которая при действительных значениях z совпадает с e^x. Аналогичным образом обозначим сумму этого ряда в случае комплексной переменной через e^z.

Следовательно, по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{1.23}$$

Можно показать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место равенство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Аналогично определим тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ для комплексных значений z:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{1.24}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{1.25}$$

Эти ряды сходятся абсолютно для всех значений z. При $z = x$ (x– действительная переменная) определенные выше функции совпадают соответственно с функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной.

Из формул (1.24) и (1.25) непосредственно видно, что $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ имеется простая связь. Пусть $z = it$, где t – комплексное число. Подставим $z = it$ в ряд (1.23):

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \frac{(it)^6}{6!} + \frac{(it)^7}{7!} + \ldots .$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$ и т.д., то получим

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

Ряд (1.23) сходится абсолютно для любого значения z, следовательно, сумма ряда не изменится от перестановки слагаемых. Поэтому

$$e^{it} = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + - \frac{t^6}{6!} + \ldots) + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots) .$$

Но при любом t справедливы соотношения

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + - \frac{t^6}{6!} + \ldots ; \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

Следовательно,

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \tag{1.26}$$

где t – любое комплексное число.

Заменяя в равенстве (1.26) t на $-t$, найдем

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t.$$

Итак, для любого комплексного числа z имеем (заменяем в написанных выше формулах t на z для единообразия записи)

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z; \qquad e^{-it} = \cos t - i\sin t. \tag{1.27}$$

Формулы (1.27) называется *формулами Эйлера*.

Как было указано выше, равенство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ справедливо для любых комплексных z_1 и z_2. В частности, если $z = x+iy$, где x и y – действительный числа, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Но в силу (1.27)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

следовательно:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{1.28}$$

Равенство (1.28) позволяет вычислять значения показательной функции при любых комплексных значениях показателя. Из равенства (1.28) следует, что функция e^z периодична и имеет период $T = 2\pi i$. Действительно $e^{z+2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$.

Из формул Эйлера легко получить

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.29}$$

Поскольку показательная функция имеет период $2\pi i$, правые части равенств (1.29) не изменяются при замене z и $z+2\pi$:

$$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz}, \qquad e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz-2\pi i} = e^{-iz},$$

следовательно:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z; \sin(z+2\pi) = \sin z,$$

т.е. определенные с помощью формул (1.29) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π.

Легко убедиться в том, что для функций $\cos z$ и $\sin z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное тригонометрическое тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Действительно,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{2i} = 1.$$

Сохраняются также и другие основные тригонометрические формулы. Например:

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_2}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \tag{1.30}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются по формулам

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \tag{1.31}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{1.32}$$

Напомним, что гиперболический синус и косинус для действительного аргумента были введены по формулам

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Гиперболические функции для комплексной переменной введем по аналогичным формулам

$$\text{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \tag{1.33}$$

$$\text{th}\, z = \frac{\text{sh}\, z}{\text{ch}\, z}, \quad \text{cth}\, z = \frac{\text{ch}\, z}{\text{sh}\, z}. \tag{1.34}$$

Заметим, что, используя полученные формулы, легко получить связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Из формулы (1.28) следует:

$$\sin(iz) = \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i^2} i = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} i = i\, \text{sh}\, z; \tag{1.35}$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \text{ch}\, z. \tag{1.36}$$