## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4.

## ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайные величины могут описываться числовыми характеристиками, среди которых различают характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана) и характеристики рассеяния (дисперсия, среднеквадратическое отклонение).

Пусть $X$ – дискретная случайная величина с заданным законом распределения $P(X=x_i) = p_i$ ($i$ = 1, 2,..., $N$; $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$). *Математическое ожидание* $M(X)$ представляет собой среднее ожидаемое значение случайной величины. Эта величина вычисляется по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \,, \tag{1.26}$$

*Свойства математического ожидания*:

1) $M(C) = C$, где $C = const$,

2) $M(CX) = CM(X)$, (1.27)

3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ для любых случайных величин $X$ и $Y$,

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ если $X$ и $Y$ независимы.

Таким образом, если случайная величина $X$ представлена в виде линейной комбинации величин $X_1$, $X_2$, ..., $X_L$, то ее математическое ожидание вычисляют ,пользуясь свойством линейности:

$$M(X) = M\left(\sum_{i=1}^{L} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{L} c_i M(X_i)\,. \tag{1.28}$$

Если известен закон распределения дискретной случайной величины, то математическое ожидание любой ее функции может быть вычислено по формуле:

$$M(f(X)) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot p_i \,. \tag{1.29}$$

Для характеристики степени отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания $M(X)$ = $a$ вводятся понятия *дисперсии* $D(X)$ и *среднего квадратического отклонения* $\sigma(X)$ по формулам:

$$D(X) = M(X-a)^2; \qquad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{1.30}$$

*Свойства дисперсии и среднего квадратического отклонения*:

1) $D(C) = 0$; $\sigma(C) = 0$,

2) $D(X+C) = D(X)$; (1.31)

3) $D(CX) = C^2 D(X)$; $\sigma(CX) = |C|\sigma(X)$,

4) если $X$ и $Y$ независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, .

где $C = const$

Можно доказать, что дисперсия для дискретной случайной величины $X$ может быть найдена по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2 \,. \tag{1.32}$$

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины $X$, имеющей *биномиальное распределение*, могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq \,, \tag{1.33}$$

где $p$ – вероятность того, что событие $A$ произойдет, $q$ – вероятность того, что событие $A$ не произойдет в каждом из независимых испытаний.

Для распределения Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

**Задача 1.41**. Пользуясь условием задачи 1.27, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины – числа вынутых белых шаров при повторной и бесповторной выборках.

**Решение:**

Расчет приведен в таблицах 1.5 и 1.6. В столбцах $X\mathcal{P}$ и $X^2\mathcal{P}$ записаны значения произведений $X_i p_i$ и $X_i^2 p_i$. В последних строках – суммы элементов в соответствующих столбцах.

*Таблица 1.5.*

Результаты расчетов к задаче 1.41.

| $X$ | $\mathcal{P}$ (Повторная выборка) | $X \cdot \mathcal{P}$ | $X^2 \cdot \mathcal{P}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0 | 0 |
| 1 | 0,441 | 0,441 | 0,441 |
| 2 | 0,189 | 0,378 | 0,756 |
| 3 | 0,027 | 0,081 | 0,243 |
| $\Sigma$ | 1,000 | 0,900 | 1,440 |

$M(X) = 0{,}9$;  $M(X^2) = 1{,}44$

$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 1{,}44 - 0{,}9^2 = 0{,}63$;  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}794$.

*Таблица 1.6.*

Результаты расчетов к задаче 1.41.

| $X$ | $\mathcal{P}$ (Бесповторная выборка) | $X \cdot \mathcal{P}$ | $X^2 \cdot \mathcal{P}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,2917 | 0 | 0 |
| 1 | 0,5250 | 0,5250 | 0,5250 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,1750 | 0,3500 | 0,7000 |
| 3 | 0,0083 | 0,0249 | 0,0747 |
| Σ | 1,000 | 0,8999 | 1,2997 |

$M(X) = 0{,}9$; $M(X^2) = 1{,}3$;   $D(X) = 1{,}3 - 0{,}9^2 = 0{,}49$;   $\sigma = 0{,}7$.

**Задача 1.42.** В первой урне лежит 10 белых шаров и 6 черных, во второй – 5 белых и 2 черных. Из первой урны во вторую перекладывают 2 шара неизвестного цвета, затем, после перемешивания, из второй урны вынимают 2 шара. Пусть дискретная случайная величина $X$ – число вынутых белых шаров. Найти распределение $X$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, σ(X).

**Решение**:

*Таблица 1.7.*

Распределение случайной величины X – числа вынутых шаров.(к задаче 1.42)

| $X$ | $p$ | $X \cdot p$ | $X^2 p$ |
|---|---|---|---|
| 0 | (3/8)(2/9)(1/8) + (1/2)(3/9)(2/8) + (1/8)(4/9)(3/8) = 0,0729 | 0 | 0 |
| 1 | 2[(3/8)(7/9)(2/8) + (1/2)(6/9)(3/8) + (1/8)(5/9)(4/8)]=0,4653 | 0,4653 | 0,4653 |
| 2 | (3/8)(7/9)(6/8) + (1/2)(6/9)(5/8) + (1/8)(5/9)(4/8) = 0,4618 | 0,9236 | 1,8472 |
| Σ | 1,000 | 1,3889 | 2,3125 |

Сформулируем три гипотезы о перекладывании шаров из первой урны во вторую: $H_1$ = {переложены 2 белых шара}, $H_2$ = {переложены 1 белый и 1 черный шар}, $H_3$ = {переложены 2 черных шара}. Вероятности этих гипотез равны:

$$P(H_1)=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}=\frac{3}{8};\quad P(H_2)=2\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}=\frac{1}{2};\quad P(H_3)=\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{18}=\frac{1}{8}.$$

Вероятности события $\{X = k\}$ ($k = 0, 1, 2$) рассчитываем по формуле полной вероятности (1.15):

$$P(X=k)=\frac{3}{8}\cdot P\left(X=k\middle|H_1\right)+\frac{1}{2}P\left(X=k\middle|H_2\right)+\frac{1}{8}P\left(X=k\middle|H_3\right).$$

Результаты расчета приведены в виде таблицы распределения (табл. 1.7).

$M(X) \approx 1{,}39$; $M(X^2) \approx 2{,}31$; $D(X) \approx 2{,}31 - 1{,}39^2 \approx 0{,}378$; $\sigma(X) \approx 0{,}615$.

Рассмотрим теперь обратную задачу нахождения таблицы распределения по известным числовым характеристикам случайной величины.

**Задача 1.43.** Дискретная случайная величина $X$ принимает два значения $X_1$ и $X_2$, причем $X_1 < X_2$. Найти распределение величины $X$, если известно, что $P(X = X_1) = 0{,}6$; $M(X) = 3{,}4$; $D(X) = 0{,}24$.

**Решение**:

$P_1 + P_2 = 1$, поэтому $P_2 = 1 – P_1 = 1 – 0{,}6 = 0{,}4$.По определению $M(X) = X_1P_1 + X_2P_2 = 0{,}6X_1 + 0{,}4X_2 = 3{,}4$ или $3X_1 + 2X_2 = 17$. Дисперсия $D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2$, поэтому $M(X^2) = D(X) + [M(X)]^2 = 0{,}24 + (3{,}4)^2 = 11{,}8$.

По таблице распределения $M(X^2) = X_1^2P_1 + X_2^2P_2 = 0{,}6X_1^2 + 0{,}4X_2^2 = 11{,}8$, или $3X_1^2 + 2X_2^2 = 59$. Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными $X_1$ и $X_2$:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 = 17 \\ 3X_1^2 + 2X_2^2 = 59 \end{cases}$$

Система имеет два решения: (3; 4) и (3,8; 2,8). Второе решение не удовлетворяет условию $X_1 < X_2$.

**Ответ:** $X_1 = 3$, $X_2 = 4$, $P_2 = 0{,}4$.

**Задача 1.44.** Пользуясь условием задачи 1.31, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

**Решение:**

Дискретная случайная величина *X* имеет биномиальное распределение, где $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, тогда по формулам (1.33.):

$$M(X) = np = 5 \cdot 0{,}6 = 3; \quad D(X) = npq = (np)q = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2 .$$

## *ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.*

**10.1.** Подбрасывают 3 монеты, *X* – число выпадающих гербов. Составить таблицу распределения величины *X* и вычислить вероятность $P(X \geq 1)$.

**10.2.** В урне лежат 5 шаров, из них 3 белых. Из урны вынимают 3 шара без возвращения, *X* – число вынутых белых шаров. Составить таблицу распределения вероятностей величины *X* и вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma_X$.

**10.3.** Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0,8. Он делает 9 бросков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* – количества попаданий.

**10.4.** Стрелок делает 3 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6; *X* – число попаданий. Составить таблицу распределения величины *X* и вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma_X$.

**10.5.** Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу, вероятности попадания в цели равны соответственно 0,8 и 0,6; *X* – число попаданий в цель. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma_X$.

**10.6.** В первой урне находятся 20 шаров, из них 5 белых, во второй – 18 шаров, из них 8 белых. Из первой урны во вторую перекладывают 2 шара и, после перемешивания, вынимают из второй урны тоже 2 шара. Найти математическое ожидание *X* вынутых белых шаров и вероятность того, что оба вынутых шара – белые.

**10.7.** Два стрелка произвели по одному выстрелу независимо друг от друга. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; а вторым – 0,6. Пусть дискретная случайная величина $X$ – число пробоин в мишени. Найти распределение $X$, $M(X)$, $D(X)$.

**10.8.** Задан закон распределения вероятностей случайной величины $X$:

| $x_i$ | –4 | –3 | –1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | ? | 0,2 | 0,1 |

$X$ и $Y$ – независимые случайные величины. Восстановить пропущенное в таблице значение вероятности. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин $X$ и $Z$, если известно, что

$$Z = 3X - 2Y + 4; \quad M(Y) = 2,3; \quad D(Y) = 4,25.$$

**10.9.** Задан закон распределения вероятностей случайной величины $X$:

| $x_i$ | -1 | 0 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,3 | 0,1 | 0,1 | ? | 0,2 |

$X$ и $Y$ – независимые случайные величины. Восстановить пропущенное в таблице значение вероятности. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $X$ и $Z$, если известно, что

$$Z = 2Y - 5X - 7; \quad M(Y) = -6,2; \quad D(Y) = 3,75.$$

**10.10.** .Студент не знает ответа на 5 вопросов из 30, вынесенных на экзамен. Экзаменационный билет содержит 2 вопроса, которые не повторяются. Если студент не отвечает на один из них, он получает оценку «2». Если отвечает на оба вопроса в билете - преподаватель задаёт дополнительный вопрос .Если студент не отвечает на этот вопрос, то получает «3», если отвечает – опрос продолжается. Второй дополнительный вопрос в случае положительного ответа позволяет поставить оценку «5», в случае неудачи – «4».

Найти распределение случайной величины $X$ – оценки, полученной студентом на экзамене. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.Какова средне-ожидаемая оценка?

**10.11.** Среднее число самолётов, прибывающих в аэропорт за один час, равно 4. Найти вероятность того, что за два часа в аэропорт прибудут а) 5 самолётов; б) более 5 самолётов?

**10.12.** На станцию скорой помощи в течение часа в среднем поступает 20 вызовов. Найти вероятность того, что в течение 15 минут будет принято не менее 4 вызовов.

## Ответы

**10.1.** $P(X \geq 1) = 7/8$. **10.2.** $M(X) = 1,8$; $D(X) = 0,36$; $\sigma_x = 0,6$.

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,3 | 0,6 | 0,1 |

**10.3.** $M(X) = 7,2$; $D(X) = 1,44$; $\sigma(X) = 1,2$. **10.4.** $M(X) = 1,8$; $D(X) = 0,72$.

**10.5.** $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,4$.

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,08 | 0,44 | 0,48 |

**10.6.** $M(X) = 0,85$; $P(X = 2) = 0,169$. **10.7.** $M(X) = 1,3$; $D(X) = 0,45$. **10.8.** $M(X) = –1,2$; $D(X) = 2,76$; $\sigma_x = 1,66$; $M(Z) = –4,2$; $D(Z) = 41,84$; $\sigma_z = 6,47$. **10.9.** $M(X) = 1,8$; $D(X) = 5,16$; $M(Z) = –28,4$; $D(Z) = 144$. **10.10.** $M(X) = 3,719$; $D(X) = 1,746$; $\sigma(X) = 1,32$.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,310 | 0,123 | 0,105 | 0,462 |

**10.11.** а) 0,1954; б) 0,5665. **10.12.** 0,7350.

**11.1.** $M = 2$; $\mathrm{cov}(X, Y) = 1$; $r(X, Y) = 0,5$. **11.2.** $M(Z) = 9$; $D(Z) = 24,2$; $M(W) = 78,64$. **11.3.** $M(Y) = 11$; $D(Y) = 76$. **11.4.** $M(V) = –0,4$; $D(V) = 2,5$; $M(W) = 47,2$.