# 2 Решение матричных уравнений

## 2.1 Цель работы

1. Нахождение обратной матрицы.
2. Решение матричного уравнения с помощью обратной матрицы.

## 2.2 Теоретическое введение

***Матрицей*** называется прямоугольная таблица чисел. При сложении матриц складываются их соответствующие элементы,а при умножения матрицы на число на него умножается каждый элемент этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

***Произведение матрицы** A **на матрицу** B* определено только в том случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$. В результате умножения получается матрица $C = A \cdot B$, у которой столько же строк, сколько в матрице $A$, и столько же столбцов, сколько в матрице $B$ :

| Матрица | $A$ | $B$ | $C = A \cdot B$ |
|---|---|---|---|
| Число строк | $m$ | $n$ | $m$ |
| Число столбцов | $n$ | $l$ | $l$ |

Запишем матрицы $A$ и $B$ в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{il} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Обозначим элементы матрицы $C = A \cdot B$ через $c$, $1 \le i \le m$.

Тогда

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{il} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{il} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}.$$

По определению элемент $c_{ij}$, матрицы $C = A \cdot B$ равен скалярному произведению $i$-й строки матрицы $A$ ($i$ – первый индекс элемента $c_{ij}$) на $j$-й столбец матрицы $B$ ( $j$ - второй индекс элемента $c_{ij}$ ), т.е.

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj} \tag{2.2}$$

Наряду с матрицей $A$ будем рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы $A$. Эту матрицу называют ***транспонированной*** к $A$ и обозначают через $A^T$.

Совокупность элементов $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{nn}$, квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, $n = m$, называется ***главной диагональю матрицы***.

Матрица, у которой моменты, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, называется ***единичной матрицей***, и обозначается буквой $E$. Так, единичная матрица 3-го порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица обладает замечательным свойством:
умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную не меняет исходную матрицу т.е. $A \cdot E = E \cdot A = A$. Это свойства и объясняет ее название.

Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной матрицей*** к квадратной матрице $A$, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \tag{2.3}$$

Если определитель $|A|$ квадратной матрицы $A$ не равен нулю, то существует и, притом единственная, матрица $A^{-1}$.

## *Правило нахождения обратной матрицы*

***Дополнительным минором*** $M_{ij}$ ***к элементу*** $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ $n$-го порядка называется определитель матрицы $n$ - 1-го порядка, которая получается из матрицы $A$ путем вычеркивания $i$-ой строки и $j$-го столбца (на пересечении которых стоит элемент $a_{ij}$).

***Алгебраическим дополнением*** $A_{ij}$***, элемента*** $a_{ij}$ называется величина

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Через $A^v$ обозначим матрицу (называемую присоединенной к матрице $A$), элементами которой являются алгебраические дополнения $A_{ij}$:

$A^v = (A_{ij})$;  $i = \overline{1,n}$;  $j = \overline{1,n}$.

Тогда обратная матрица $A^{-1}$ находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^v\right)^T \tag{2.4}$$

Для матрицы $A$ третьего порядка (3x3) обратная матрица $A^{-1}$ имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В типовом расчете рассматриваются матричные уравнения двух типов: $X \cdot A = B$ и $A \cdot X = B$, где $A$ – квадратная матрица с $|A| \neq 0$.

Рассмотрим сначала уравнение $X \cdot A = B$. Умножим обе части этого уравнения справа на матрицу $A^{-1}$, тогда по определению обратной матрицы уравнение $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ равносильно уравнению

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1} \quad \text{или} \quad X = B \cdot A^{-1} \tag{2.5}$$

Если в условии варианта дано уравнение $A \cdot X = B$, то умножим обе части этого уравнения слева на матрицу $A^{-1}$, тогда уравнение $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ равносильно уравнению

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{или} \quad X = A^{-1} \cdot B \tag{2.6}$$

### 2.3 Содержание типового расчета

Заданы квадратная матрица $A$ и прямоугольная матрица $B$. Решить матричное уравнение вида $X \cdot A = B$ или $A \cdot X = B$, где $X$ – искомая матрица. Конкретный вид уравнения задан в каждом варианте. Провести поэтапный контроль: расчета обратной матрицы $A^{-1}$ умножением $A$ на $A^{-1}$; найденного решения $X$ подстановкой в исходное уравнение.

### 2.4 Пример выполнения типового расчета

**Условие типового расчета**

| **Вариант** | **Матрица *A*** | **Матрица *B*** |
|---|---|---|

| **Уравнение** | | |
|---|---|---|
| 930207<br>$A * X = B$ | -2 -8 11<br>-14 7 16<br>-10 -11 -16 | 6 -297 -366<br>122 159 -52 |

## Выполнение типового расчета

1. Найдем обратную матрицу $A^{-1}$ по формуле (4)

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -14 & 16 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} = -2\cdot 16\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -11 & -1 \end{vmatrix} + 8\cdot 2\cdot 16\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 11\cdot 2\cdot 7\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 5408.$$

При вычислении определителя использовано разложение его по первой строке. Получившиеся определители второго порядка упрощены вынесением общего множителя из какой-либо строки или столбца. Затем найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$A^{V} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -8 & 11 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -8 & 11 \\ 7 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -14 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -14 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -384 & 224 \\ -249 & 142 & 58 \\ -205 & -122 & -126 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$A^{-1} = \frac{1}{5408}\begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix}$$

Для удобства дальнейших расчетов не будем умножать матрицу на множитель, стоящий перед ней.

Проведем контроль расчетов, для этого перемножим матрицы $A$ и $A^{-1}$. Если расчеты проведены верно, результатом должна быть единичная матрица.

| | |
|---|---|
| $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 11 \\ -11 & 7 & 16 \\ -10 & -11 & -16 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5408 & 0 & 0 \\ 0 & 5408 & 0 \\ 0 & 0 & 5408 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| | $\begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408}$ |

При умножении использована удобная форма записи, при которой вторая матрица-сомножитель записывается правее и ниже первой, а правее первой и выше второй записывается результат умножения. При такой записи каждое число матрицы–результата стоит на пересечении той строки первой матрицы и того столбца второй матрицы, скалярное произведение которых дает искомое число.

3) Решение $X$ уравнения $A \cdot X = B$ найдем по формуле (2.5).

| | |
|---|---|
| $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -297 & -366 \\ 122 & 159 & -52 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 32448 & -64896 & 81120 \\ -64896 & -10816 & -37856 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ |
| | $\begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408}$ |

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим матрицу *X* в исходное уравнение для проверки полученного результата:
$X \cdot A = B$

| | |
|---|---|
| $X{\cdot}A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 6 & -297 & -366 \\ 122 & 159 & -52 \end{pmatrix} = B$ |
| | $\begin{pmatrix} -2 & -8 & 11 \\ -14 & 7 & 16 \\ -10 & -11 & -16 \end{pmatrix}$ |

## 2.5 Оформление отчета

В отчете по ТР должны быть представлены: расчет обратной матрицы $A^{-1}$, проверка ее умножением матриц $A$ на $A^{-1}$, расчет искомой матрицы $X$, проверка найденного результата подстановкой матрицы $X$ в исходное уравнение.
В ответе необходимо записать определитель матрицы $A$ и матрицу $X$ :

$|A| = 5408$ $\quad X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$