ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7.

Равномерное распределение непрерывной случайной величины. Нормальное распределение. Понятие о центральной предельной теореме. Интегральная теорема Лапласа.

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

К часто встречающимся непрерывным распределениям вероятностей относится *равномерное распределение*. Говорят, что случайная величина X распределена равномерно в интервале (a, b), если все ее возможные значения сосредоточены в этом интервале и плотность вероятности в нем постоянна:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases} \tag{1.52}$$

Из условия нормировки находим, что $c = 1/(b-a)$. Тогда вероятность попадания случайной величины X в интервал (x_1, x_2), лежащий внутри интервала (a, b), равна, согласно формуле (1.39),

$$P(X \in (x_1,x_2)) = c(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины, имеющей равномерное распределение, равны, соответственно:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Задача 1.52. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [-4; 2]. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3 - 2X$.

Решение:

Найдем сначала математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1; \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2+4)^2}{12} = 3.$$

Далее по свойствам математического ожидания и дисперсии находим:

$$M(Y)=3-2M(X)=5; \qquad D(Y)=4D(X).$$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

К числу наиболее важных для приложений относится *нормальное распределение.*

Случайная величина U имеет *стандартное нормальное распределение*, если ее плотность задается формулой

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}, \quad (-\infty<u<+\infty). \qquad (1.53)$$

Кривая стандартного нормального распределения представлена на рис. 1.14. Это распределение симметрично. Его параметры: $M(U)=0; \quad D(U)=M(U^2)=1.$

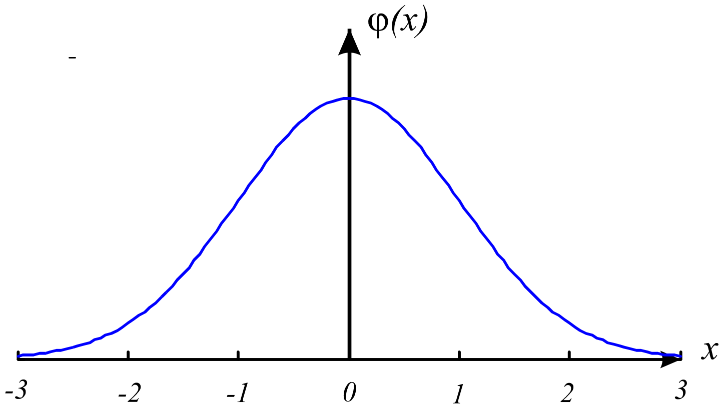

Рис. 1.14. Кривая стандартного нормального распределения.

Расчеты вероятностей для стандартного нормального распределения выполняются с помощью интеграла вероятностей:

$$\Phi(t)=\int_0^t \varphi(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-u^2/2}du \quad (t>0), \quad \Phi(-t)=-\Phi(t). \qquad (1.54)$$

Интеграл вероятностей $\Phi(t)$ связан с функцией распределения $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(u)du$

формулой $F(t)=0{,}5+\Phi(t)$. Поэтому вероятность попадания случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение, в интервал (t_1, t_2) рассчитывают по формуле:

$$P(t_1 < U < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \qquad (1.55)$$

а для симметричного интервала $(-t, t)$, пользуются формулой :

$$P(|U| < t) = 2P(0 < U < t) = 2\Phi(t).$$

Значения интеграла вероятностей представлены в таблице П1 приложения.

Случайная величина X имеет *нормальное распределение с параметрами* a, σ (будем обозначать $X \sim N(a; \sigma)$), если она может быть представлена в виде $X = a + \sigma U$, где U имеет стандартное нормальное распределение, $\sigma > 0$. Для такого распределения $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$, так что параметры распределения представляют собой математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины X.

Функция плотности нормально распределенной случайной величины имеет вид

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \qquad (-\infty < x < +\infty). \qquad (1.56)$$

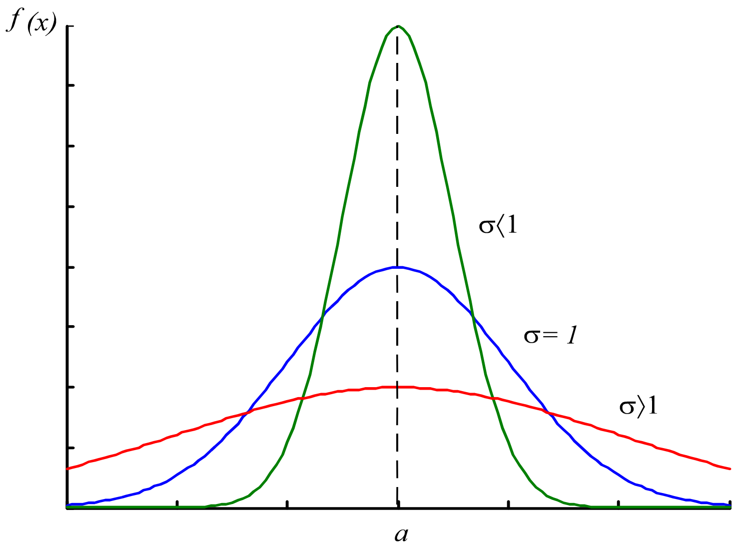

Рис. 1.15. Кривые нормального распределения.

Расчет вероятности попадания в произвольный интервал (x_1, x_2) для нормально распределенной величины X проводится с помощью интеграла вероятностей (1.54):

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \qquad (1.57)$$

В частности, для симметричного интеграла

$$P\left(|X - a| < t\sigma\right) = 2\Phi(t). \qquad (1.58)$$

Случайная величина с нормальным распределением обладает следующими важными свойствами:

1. Сумма двух величин X_1 и X_2, каждая из которых имеет нормальное распределение с произвольными параметрами, также имеет нормальное распределение.

2. При умножении случайной величины, имеющей нормальное распределение, на произвольное число (константу) получившаяся величина также имеет нормальное распределение.

Из этих свойств следует важный вывод. Если есть конечное число случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, каждая из которых имеет нормальное распределение с произвольными параметрами, то их линейная комбинация

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n$$

также имеет нормальное распределение при любых коэффициентах $c_1, c_2, ..., c_n$.

Задача 1.53. Производится взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону $N(0;\ 20)$. Найти вероятность того, что ошибка взвешивания ξ не превзойдет по абсолютной величине 10.

Решение:

$P(|\xi| < 10) = P(|\xi - 0| < 0{,}5\sigma) = 2\Phi(0{,}5) = 0{,}383$ (см. формулу (1.58)).

Задача 1.54. Диаметр D втулок, изготавливаемых цехом, имеет нормальное распределение: $D \sim N\,(2{,}5;\ 10^{-2})$. В каких границах можно практически гарантировать диаметр втулки, если за границу практической достоверности принимается $\mathcal{P} = 0{,}997$?

Решение:

Обозначим через l величину, на которую может отклониться размер диаметра втулки от своего среднего значения a = 2,5, тогда

$$P(a-l<D<a+l)=P(|D-a|<l)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi(l\cdot 100)$$

По условию $2\Phi(l\cdot 100)=0{,}997$ или $\Phi(l\cdot 100)=0{,}4985$. Из таблицы интеграла вероятностей находим, что $100l$ = 2;96. Следовательно l = 0,0296$\approx$0,03. Тогда

$$a+l=2{,}5+0{,}03=2{,}53; \qquad a-l=2{,}5-0{,}03=2{,}47.$$

Ответ: (2,47; 2,53).

Задача 1.55. В нормально распределенной совокупности 15 % значений случайной величины ξ меньше 12 и 40 % значений больше 16,2. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

Решение:

По условию $P(\xi<12)=0{,}15$, отсюда $P(-\infty<\xi<12)=\Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)=0{,}15$ – по формуле (1.53) (см. рис. 1.16).

$$\Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right)=-0,35 \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{a-12}{\sigma}\right)=0,35 \quad \text{и} \quad \frac{a-12}{\sigma}=1,036; \quad a-12=1,036\cdot\sigma.$$

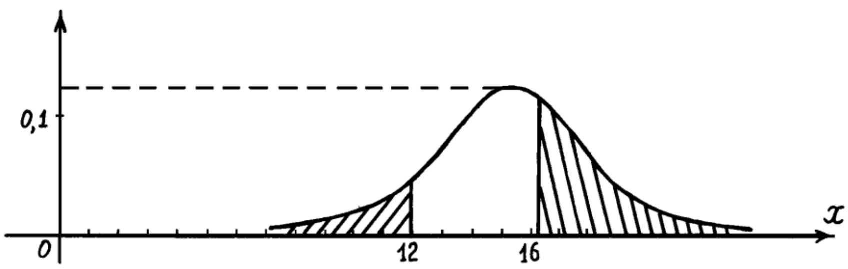

Рис. 1.16. . Иллюстрация к решению задачи 1.55.

С другой стороны, $P(\xi > 16{,}2) = 0{,}4 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{16{,}2-a}{\sigma}\right)$, откуда $\Phi\left(\frac{16{,}2-a}{\sigma}\right) = 0{,}1$ и

$\frac{16,2-a}{\sigma} = 0,253;\quad 16,2-a = 0,253\sigma$. Получили систему уравнений относительно

неизвестных a и σ:

$$\begin{cases} 16{,}2 - a = 0{,}253\sigma \\ a - 12 = 1{,}036\sigma \end{cases}.$$

Ее решением является: σ = 3,26; a = 15,37.

Ответ: $\xi \sim N(15,\ 37;\ 3{,}26)$.

ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА.

Часто приходится иметь дело с такими случайными величинами, которые являются суммами большого числа независимых случайных величин. Оказывается, что при некоторых весьма общих условиях закон распределения суммы этих величин чрезвычайно близок к нормальному закону распределения. Установление таких условий и составляет содержание *центральной предельной теоремы*, которая была доказана русским математиком А.М.Ляпуновым в 1900 году. Мы не будем формулировать полностью теорему Ляпунова, формулировка весьма сложна и требует значительных пояснений. Остановимся лишь на ряде частных случаях и общем смысле теоремы.

Если слагаемые суммы независимы, имеют произвольное, но одинаковое распределение, то теорема справедлива, т.е. распределение суммы достаточно большего числа слагаемых близко к нормальному. Причем, чем больше слагаемых в сумме, тем распределение ближе к нормальному (говорят, что оно имеет *асимптотически нормальное распределение*).

Теорема остается справедливой и в том случае, когда слагаемые суммы независимы, имеют произвольные и различные между собой распределения. Но в этом случае распределения слагаемых должны удовлетворять ряду условий. Смысл этих условий грубо можно описать так: вклад каждой случайной величины в рассеяние суммы должен быть мал (сильно не выделяться по сравнения с вкладом остальных слагаемых).

Частным случаем центральной предельной теоремы является *интегральная теорема Лапласа.*

Теорема. Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность наступления события A одна и та же и равна p $(0 < p < 1)$. Пусть m – число появлений события A в n опытах. Тогда случайная величина $X = m$ имеет биномиальное распределение (см. п. 1.8). Но при достаточно больших n распределение случайной величины X близко к нормальному с параметрами $a = M(X) = np$, $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$ $(q = 1 - p)$.

Из интегральной теоремы Лапласа следует, что при достаточно больших n вероятность того, что случайная величина X, т.е. число наступлений события A в n опытах, принадлежит интервалу (x_1, x_2) можно приближенно вычислить по формуле (1.57):

$$P(x_1 < X < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1.66}$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятностей. Условие применения: n велико, а p и q – не очень малы, так что $npq \geq 20$.

Запишем еще два следствия из теоремы Лапласа.

1) Вероятность отклонения числа m наступления события A от математического ожидания np определяется по формуле

$$P(|m - np| \leq \delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{npq}}\right) \tag{1.67}$$

2) Вероятность отклонения относительной частоты события $\frac{m}{n}$ от его вероятности p находится по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \qquad (1.68)$$

Задача 1.60. При установившемся технологическом режиме завод выпускает в среднем 80% продукции первого сорта. Определить вероятность того, что из 1000 изделий число первосортных

а) заключено между 780 и 830;

б) больше 815.

Решение.

Здесь $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$; $n = 1000$; $np = 0,8 \cdot 1000 = 800$;

$\sqrt{npq} = \sqrt{1000\cdot 0,8\cdot 0,2} = \sqrt{160} \approx 12,65.$

Используя формулу (1.66) и значения интеграла вероятностей из табл.П1 приложения, получим:

а) $P(760 < X < 830) = \Phi\left(\frac{830-800}{12,65}\right) - \Phi\left(\frac{780-800}{12,65}\right) =$

$= \Phi(2,37) - \Phi(-1,58) = \Phi(2,37) + \Phi(1,58) = 0,4911 + 0,4429 = 0,934;$

б) $P(X > 815) = P(815 < X < 1000) = \Phi\left(\frac{1000-800}{12,65}\right) - \Phi\left(\frac{815-800}{12,65}\right) =$

$= \Phi(15,8) - \Phi(1,19) = 0,5 - 0,383 = 0,117.$

Ответ: а) 0,934; б) 0,117.

Задача 1.61. В партии из 400 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,8. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9544 заключена доля стандартных деталей.

Решение.

Воспользуемся формулой (1.68). Для данной задачи событие A – деталь стандартная; $n = 400$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; ε – величина отклонения относительной частоты (доли) m/n от вероятности p. $P = 0{,}9544$, величину ε нужно найти. Записываем для ε уравнение:

$$0{,}9544 = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{400}}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right); \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(50\varepsilon) = 0{,}4772.$$

По таблице значений интеграла вероятностей (табл. П1 приложения) находим

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Rightarrow \quad 50\varepsilon = 2; \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 0{,}04.$$

Таким образом

$$|m/n - 0{,}8| < 0{,}04, \quad \text{и} \quad 0{,}76 < m/n < 0{,}84.$$

Ответ: $0{,}76 < m/n < 0{,}84$.

Очень важную роль центральная предельная теорема играет в *теории ошибок*.

Когда мы производим некоторое измерение, то на его результат влияет большое количество факторов, которые порождают ошибки измерений. Ошибки измерений в основном можно подразделить на три группы: 1) грубые ошибки; 2) систематические ошибки; 3) случайные ошибки.

Грубые ошибки возникают от невнимательности при чтении показателей прибора, неправильной записи показаний, неправильном использовании прибора. Эти ошибки могут быть исключены соблюдением правил измерений.

Систематические ошибки искажают обычно результат измерения в определенную сторону. Они происходят, например, от несовершенства приборов, от личных качеств наблюдателя и могут быть устранены соответствующими поправками.

Случайные ошибки вызываются большим числом отдельных причин, не поддающихся точному учету и действующих в каждом отдельном случае различным образом. Эти ошибки возникают от незаметных механических причин, из-за изменения параметров измерительных приборов, зависящих от метеорологических условий, и т. д. Каждая из этих причин в отдельности порождает при измерении малую ошибку v_i. Складываясь, эти малые ошибки порождают суммарную ошибку $v = \Sigma v_i$, которой уже нельзя пренебречь. Эта суммарная ошибка v есть случайная величина, являющаяся суммой огромного числа незначительных, независимых друг от друга случайных величин и имеет, согласно теореме Ляпунова, нормальное распределение. Предполагая измерение свободным от грубых и систематических ошибок, можно считать, что возможный результат измерения есть случайная величина $X = a + v$, математическое ожидание которой равно истинному значению a измеряемой величины: $M(X) = a$, а математическое ожидание суммарной ошибки равно нулю $M(v) = 0$. Так как суммарная ошибка v подчиняется нормальному закону распределения, то возможный результат измерения $X = a + v$ также подчиняется нормальному закону распределения. В этом заключается *основной закон ошибок.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

14.1. Случайная величина X – размер диаметра детали, изготовленной на некотором станке, распределяется по нормальному закону с $M(X) = 5$ см и $D(X) = 0{,}25$ см^2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали колеблется от 4 до 7 см;

14.2. В некоторой партии 300 изделий. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,75. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий стандартных окажется больше 240.

14.3. По статистическим данным за 2000 г. средний рост мужчин (в возрасте от 18 до 59 лет) в Москве равен 172,5 см. Предположив, что рост является случайной величиной, распределённой по нормальному закону и приняв среднее квадратическое отклонение приближённо равным 6 см, найти вероятность того, что рост наудачу выбранного мужчины будет составлять от 168 до 170 см.

14.4. В некоторой партии 100 изделий. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий стандартных окажется от 70 до 85.

14.5. Заряд охотничьего пороха взвешивается на весах, имеющих среднюю квадратическую ошибку взвешивания 0,15 г (систематическая ошибка взвешивания отсутствует). Номинальный вес порохового заряда 2,3 г. Найти вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда составляет 2,5 г.

14.6. Вероятность точной сборки прибора на некотором производстве постоянна и равна 0,9. Найти вероятность того, что в партии продукции, состоящей из 3000 единиц, число неточных приборов окажется от 270 до 280.

14.7. Длина втулки, изготовленной некоторым автоматом, является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с M(X) = 20 см и D(X) = 0,09 см^2. Какова вероятность того, что длина втулки, наудачу выбранной из большой партии, будет меньше 19,5 см?

14.8. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных окажется от 485 до 515 мальчиков.

14.9. Сколько осветительных ламп нужно подключить в городе N, чтобы с вероятностью 0,9 быть уверенным в том, что число исправных ламп к концу гарантийного срока будет не менее 250, если вероятность бесперебойной работы лампы в течение гарантийного срока равна 0,8.

Ответы

14.1. 0,6833. **14.2.** 0,9544. **14.3.** 0,1104. **14.4.** 0,8882. **14.5.** 0,0918. **14.6.** 0,078. **14.7.** 0,0475. **14.8.** 0,5684. **14.9.** $n \geq 324$.