Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале, тогда ее производная $f'(x)$ является функцией x. Если эта функция имеет производную, то она называется **второй производной** или **производной второго порядка** функции $y = f(x)$ и обозначается

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

При этом $f'(x)$ называется *первой производной*, или *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение.

Производная второй производной функции $y = f(x)$ называется *третьей производной*, или *производной третьего порядка* данной функции и обозначается $y'''(x)$ или $f'''(x)$:

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'.$$

В общем случае, *производной n – го порядка* функции $y = f(x)$ называется первая производная производной $(n-1)$ – го порядка данной функции и обозначается $y^{(n)}(x)$ или $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Производные порядка выше первого называются *производными высшего порядка*.

Примеры.

1) Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$ и так далее. Заметим, что производные высших порядков степени с натуральным показателем обращаются в ноль, если порядок производной выше показателя степени.

2) Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x,\quad y'' = -\sin x,\quad y''' = -\cos x,\quad y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к.

$$df(x) = f(x)'dx,$$

тогда

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx,$$

dx – бесконечно малое приращение, не зависящее от x, поэтому производная от dx вычисляется, как от постоянной. Т.е.

$$\boxed{d^2 f(x) = (f'(x))'dx^2 = f''(x)\,dx^2.}$$

Подобным образом получим

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n.}$$

Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция задана в неявном виде $F(x, y) = 0$. Продифференцировав это равнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка. Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное y', вычислим значение второй производной через x и y.

Пример.

Найдем первую и вторую производную, заданную в неявном виде уравнением

$$x + \sin x + y + \sin y = 0$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения, считая x независимым переменным, а y – функцией от x.

$$1 + \cos x + y' + \cos y \cdot y' = 0.$$

Выражаем из полученного уравнения y':

$$1+\cos x+y'(1+\cos y)=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{1+\cos x}{1+\cos y}.$$

Далее используем правило нахождения второй производной и подставляем в полученное выражение уже имеющееся значение y':

$$y''=(y')'=\left(-\frac{1+\cos x}{1+\cos y}\right)'=-\frac{(1+\cos x)'(1+\cos y)-(1+\cos x)(1+\cos y)'}{(1+\cos y)^2}=$$

$$=-\frac{-\sin x(1+\cos y)-(1+\cos x)(-\sin y)\cdot y'}{(1+\cos y)^2}=\frac{\sin x(1+\cos y)-(1+\cos x)\sin y\left(-\frac{1+\cos x}{1+\cos y}\right)}{(1+\cos y)^2}=$$

$$=\frac{\sin x(1+\cos y)^2+\sin y(1+\cos x)^2}{(1+\cos y)^3}$$

Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически.

Из определения второй производной следует, что

$$\boxed{y''_{xx}=(y'_x)'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx}=\frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \ldots$$

Пример 1.

Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение:

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Пример 2.

Написать уравнение касательной и уравнение нормали к кривой $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t = \pi/6$.

Решение

Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

уравнение нормали

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

Найдем значение функции $x(t)$ при $t = \pi/6$:

$$x(\pi / 6) = \sin^2(\pi / 6) = (1 / 2)^2 = 1 / 4.$$

Следовательно, $x_0 = 1/4$.

Найдем значение функции $y(t)$ при $t = \pi/6$:

$$y(\pi / 6) = \cos^2(\pi / 6) = \left(\sqrt{3} / 2\right)^2 = 3 / 4.$$

Следовательно, $y_0 = f(x_0) = 3/4$.
Вычислим производную функции по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Для этого найдем производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t:

$$x'_t = 2\sin t\cos t;$$
$$y'_t = 2\cos t(-\sin t).$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\cos t\sin t}{2\sin t\cos t} = -1.$$

Следовательно,

$$y'_x = -1;\ \ y'_x\big|_{t=\pi/6} = -1.$$

Напишем уравнение касательной:

$$y = \frac{3}{4} - \left(x - \frac{1}{4}\right);$$
$$y = -x + 1.$$

Напишем уравнение нормали:

$$-\left(y - \frac{3}{4}\right) + x - \frac{1}{4} = 0;$$
$$x - y + \frac{1}{2} = 0.$$

Итак, $y = -x + 1$ − уравнение касательной, $2x - 2y + 1 = 0$ − уравнение нормали в точке $M(2;\ 1)$.

Пример 3.

Написать уравнение касательной и уравнение нормали к линии $2^{\frac{x}{y}} + 2^{\frac{2y}{x}} = 6$ в точке $M(2;\ 1)$.

Решение

Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

уравнение нормали

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

Необходимо написать уравнение касательной в точке $M(2;\,1)$. Следовательно, $x_0 = 2$, а $y_0 = f(x_0) = 1$.

Найдем производную, продифференцировав тождество $2^{\frac{x}{y}} + 2^{\frac{2y}{x}} = 6$ по переменной x, имея в виду, что y есть функция от x:

$$2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \left(\frac{x}{y}\right)' + 2^{\frac{2y}{x}} \ln 2 \left(\frac{2y}{x}\right)' = 0;$$

$$2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \left(\frac{x'y - xy'}{y^2}\right) + 2^{\frac{2y}{x}} \ln 2 \left(\frac{2(y'x - yx')}{x^2}\right) = 0;$$

$$2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) + 2^{\frac{2y}{x}} \ln 2 \left(\frac{2(y'x - y)}{x^2}\right) = 0.$$

Разделим получившееся тождество на ln2 и подставим вместо x и y координаты точки $M(2;\,1)$:

$$2^2 \left(\frac{1 - 2y'}{1}\right) + 2^1 \left(\frac{2(2y' - 1)}{2^2}\right) = 0;$$

$$4(1 - 2y') + 2y' - 1 = 0;$$

$$4 - 8y' + 2y' - 1 = 0;$$

$$3 = 6y'.$$

Тогда производная функции в точке M равна

$$y'(M) = \frac{1}{2}.$$

Напишем уравнение касательной:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 2);$$

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Напишем уравнение нормали:

$$\frac{1}{2}(y - 1) + x - 2 = 0;$$

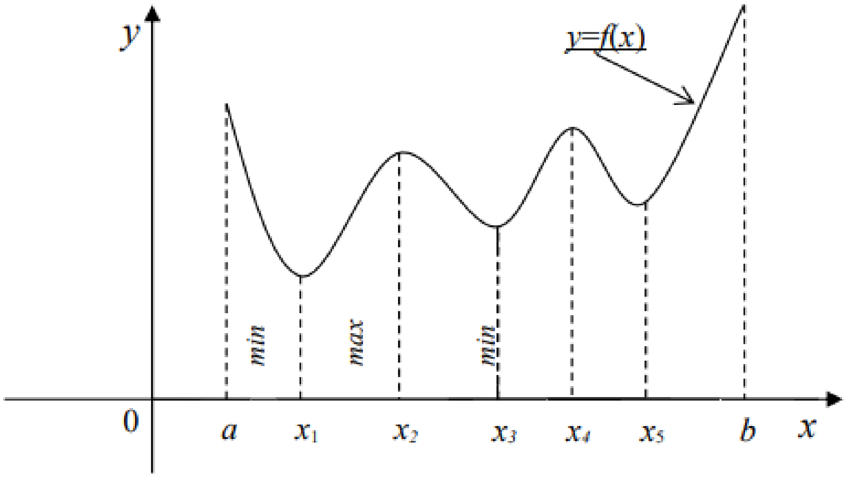
$$y - 1 + 2x - 4 = 0;$$

$$y + 2x = 5.$$

Итак, $y = \frac{1}{2}x$ − уравнение касательной, а $y + 2x = 5$ − уравнение нормали в точке $M(2;\,1)$.

Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$. При этом говорят, что функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке x_0.



Определение. Непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$, при этом точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$.

Для точек максимума и минимума существует объединяющий их термин – *точки экстремума*, а значения функции этих точках называются *экстремумами* функции.

Из приведенных определений следует, что экстремум функции имеет локальный характер – это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с близлежащими значениями. На промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может оказаться, что какой–либо минимум функции больше какого–либо максимума.

Теорема Ферма (необходимый признак экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x = x_0$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности точка x_0 является точкой максимума функции. Тогда для достаточно малых Δx (положительных и отрицательных) справедливо неравенство

$$f(x_0+\Delta x) < f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0, \quad \text{при } \Delta x < 0$$

и

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0, \quad \text{при } \Delta x > 0$$

Так как по условию теоремы в точке x_0 существует производная

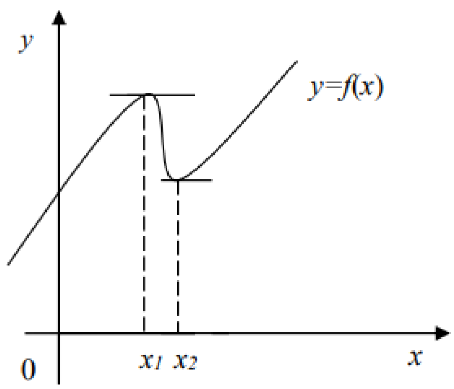
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то, переходя в неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ при } \Delta x < 0 \text{ и } f'(x_0) \leq 0 \text{ при } \Delta x > 0.$$

Однако $f'(x_0)$ есть определенное число, не зависящее от способа стремления Δx к нулю (оставаясь положительным или отрицательным), поэтому два последних неравенства должны быть совместны. Это возможно лишь в том случае, если $f'(x_0) = 0$. Аналогично доказывается теорема для случая минимума функции.

Теорема Ферма имеет простое геометрическое истолкование. Так как производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, то равенство $f'(x_0) = tg\alpha = 0$ означает, что $\alpha = 0$, т. е. *касательная к кривой в точке экстремума дифференцируемой функции параллельна оси Ox*

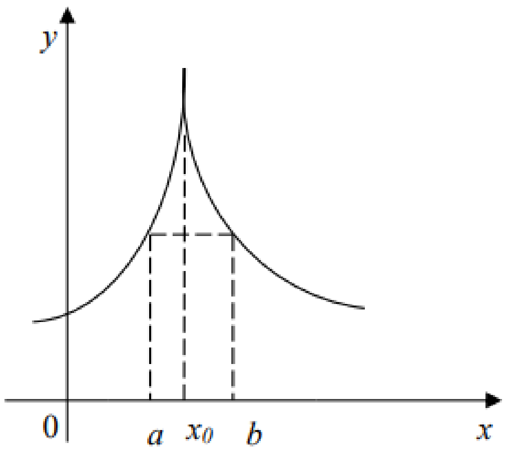


Следствие. *Дифференцируемая функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю.*

Однако функция может иметь экстремум и в тех точках области определения, где производная не существует.

Пример . Функция $y=|x|$ в точке $x=0$ достигает минимума, но не дифференцируема при $x=0$

Пример. Функция, изображенная на рис., имеет в точке x_0 максимум, но не дифференцируема в этой точке. так как при $x=x_0$ касательная к кривой образует с осью Ox угол 90° ($f'(x_0)=tg90^\circ=\infty$).



Замечание. Условия $f'(x_0)=0$ и $f'(x_0)$ не существует являются необходимыми условиями экстремума, но не достаточными, поскольку можно привести примеры функций, для которых эти условия выполняются, но экстремума в соответствующей точке функция не имеет.

Пример. Функция $f(x)=x^3$ имеет производную $f'(x)=3x^2$, которая обращается в нуль при $x=0$, однако в точке $x=0$ функции экстремума не имеет .

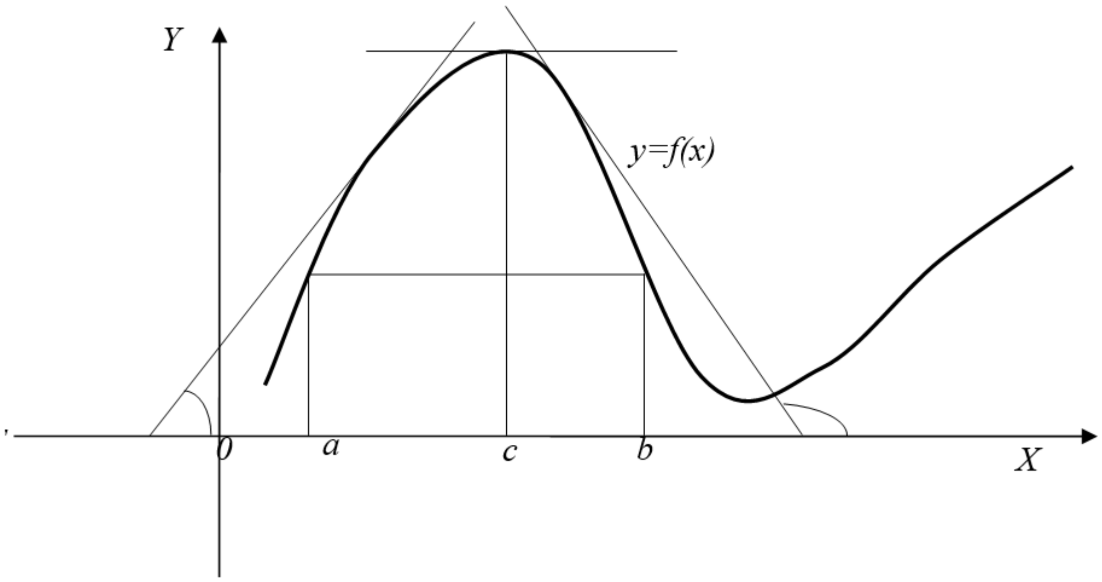
Те значения аргумента, при которых функция *f (x)* сохраняет непрерывность, а ее производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками* (или критическими значениями аргумента).

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), а на концах отрезка имеет равные значения $f(a)=f(b)$, то в интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, в которой производная равна нулю.

Доказательство. Так как функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений m и M.

Может оказаться, что $M=m$; тогда функция постоянна на отрезке $[a,b]$ и ее производная $f'(x)=0$ в любой точке отрезка.

Если $M \neq m$, то хотя бы одно из этих чисел, например M, не равно $f(a)=f(b)$. Пусть x_0 – значение x, при котором $f(x_0)=M$. Так как $M \neq f(a)=f(b)$, то $f(x_0) \neq f(a)$ и $f(x_0) \neq f(b)$. Поэтому точка x_0, принадлежит интервалу (a,b) и в этой точке дифференцируемая функция имеет максимум. Значит, согласно теореме Ферма, $f'(x)=0$, т.е. x_0 и есть искомая точка c, в которой $f'(c)=0$.



Теорема Коши. Если функции *f*(*x*)и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы в интервале (a,b), $g'(x) \neq 0$ во всех точках интервала (a,b), то в интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]}[g(x) - g(a)].$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные.

Найдем

$$\Phi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(a) - g(a)] = f(a),$$

$$\Phi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = f(a),$$

то есть $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, значит функция $\Phi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\Phi'(c) = 0$.

Вычислим $\Phi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$

$$\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]} g'(c) = 0,$$

Отсюда

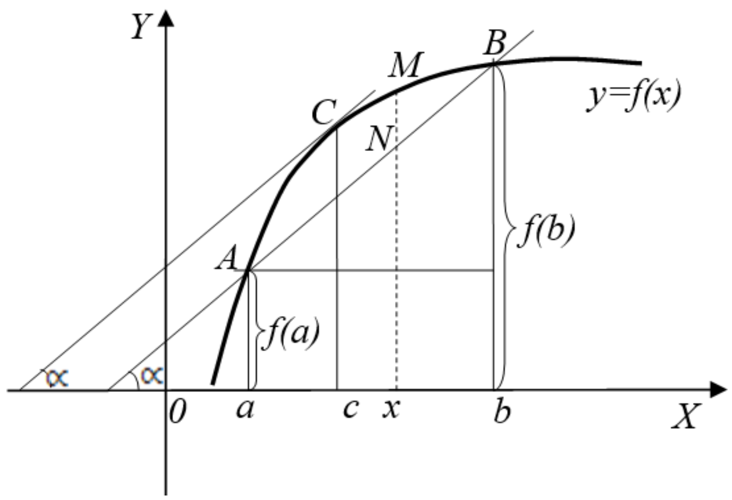
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$ является

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ дифференцируема в интервале (a, b), то в интервале (a, b) найдется хотя бы одна точка c, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производных.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке, т.е.
$f(x_0) = g(x_0)$=0.
Пусть $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство:

Применим к функциям $f(x)$ и $g(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0. Тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c $\in [x_0; x]$. Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0)$=0, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При $x \to x_0$ величина c $\to x_0$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: Теорема верна и в случае $x \to \infty$

Действительно, если сделать замену переменных $x = \frac{1}{z}$, то получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)'} = \lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить еще раз.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0), в этой окрестности

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \text{ и } g'(x) \neq 0.$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{2x} = \dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{-1}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{4x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{7+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{7-x}}}{4} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{7}}}{4} = \dfrac{1}{4\sqrt{7}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}.$

Эти пределы также можно вычислять с помощью тождественных преобразований, предлагаемых выше при вычислении пределов, но на этот раз приведенные здесь решения проще.

Замечание. Правило Лопиталя не является панацеей от всех бед и не всегда приводит к упрощению вычисления пределов точно так же, как и тождественные преобразования, использованные выше. Наибольший успех при

вычислении сложных пределов достигается при совместном использовании правила Лопиталя и тождественных преобразований.

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x - x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x\cos x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

Как уже говорилось выше, правило Лопиталя можно применять только при раскрытии неопределенностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Если есть желание использовать это правило для раскрытия других видов неопределенности, следует вначале привести эти неопределенности к одному из указанных видов, затем применять правило Лопиталя.

6. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x - x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+4\dfrac{x}{\sin x}\cos x - x^2}=\frac{1}{6}.$$

При решении примера вначале привели выражение под знаком предела к общему знаменателю затем дважды использовали правило Лопиталя, произвели сокращение на $\sin x$ и применили первый замечательный предел.

7. Докажем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Известно, что с его помощью раскрывается неопределенность $\{1^\infty\}$.

Пусть

$$y=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Логарифмируем обе части этого выражения и переходим к пределу, применяя правило Лопиталя, поскольку после логарифмирования появилась неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$:

$$\ln y=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)}}{1} = 1.$$

Так как

$$\ln y = 1, \text{ то} \qquad y = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

что требовалось доказать.

Отметим, что в ходе решения необходимо было осуществить операцию $\ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Покажем, что это возможно. Из первого определения непрерывности функции имеем $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, откуда следует $\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right)$. Поскольку логарифмическая функция непрерывна в области существования, законность вышеупомянутой процедуры очевидна.

Замечание. Согласно правилу Лопиталя, если существует предел отношения производных функций, то существует и предел отношения самих функций. Если же предел отношения производных не существует, то это еще не означает, что не существует предел отношения самих функций. Рассмотрим такую ситуацию на примере.

Пример 2. Найдем $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$.

Решение. Правило Лопиталя неприменимо в данном случае, так как отношение производных $\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ не имеет предела при $x \to \infty$ (является периодической функцией)

Предел данной функции, тем не менее может быть

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} = 1$$

так как $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cos x = 0$ и $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$, как произведение бесконечно малой функции на ограниченную