ЛЕКЦИЯ 2

Расчет вероятностей с помощью формул сложения и умножения вероятностей. Независимость случайных событий. Формула полной вероятности и формулы Байеса

1.5. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Напомним основные понятия и термины, введенные на первой лекции.

Совмещением (или *произведением*) двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном наступлении как события A, так и события B. Это событие будем обозначать AB или $A \cap B$.

Аналогично, *совмещением нескольких событий*, например A, B и C, называется событие $D = ABC$, состоящее в совместном наступлении событий A, B и C.

Суммой (или *объединением*) двух событий A и B называется событие С, заключающееся в том, что произойдет хотя бы одно из событий A или B (либо одно из них, либо оба вместе). Это событие обозначается так: $C = A+B$ или $A \cup B$.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Запись $D = A+B+C$ означает, что событие D есть сумма событий A, B и C.

Пусть A и B – два несовместных события, причем в n испытаниях событие A произошло m_1 раз, а событие B произошло m_2 раз. Тогда частоты событий A *и* B соответственно равны $\omega(A) = m_1/n$, $\omega(B) = m_2/n$. Так как события A *и* B несовместны, то событие $A+B$ в данной серии опытов произошло $m_1 + m_2$ раз. Следовательно,

$$\omega(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \omega(A) + \omega(B).$$

Таким образом, частота события $A + B$ равна сумме частот событий A *и* B. Но при больших n частоты $\omega(A)$, $\omega(B)$ и $\omega(A+B)$ мало отличаются от соответствующих вероятностей *P(A), P(B)* и *P(A +B):* Поэтому естественно принять, что если *A* и *B*– несовместные события, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

Правило сложения вероятностей для двух случайных событий по индукции легко распространяется на сумму любого конечного числа случайных событий: *если случайные события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, то вероятность их суммы, т. е. вероятность появления хотя бы одного из этих событий, равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,. \tag{1.4}$$

Задача 1.11. Мишень состоит из центрального круга – “яблочка” и двух концентрических колец. Вероятности попадания в “яблочко” и кольца соответственно равны 0,2; 0,25; 0,35. Найти вероятность попадания в мишень (событие *D*).

Решение:

Событие A_1 = {попадание в “яблочко”}, $A_{2,3}$ = {попадание в одно из колец} попарно несовместны и $D = A_1 + A_2 + A_3$. По правилу сложения вероятностей $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,2 + 0,25 + 0,35 = 0,8$.

События A_1, A_2, ..., A_N образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и одно из них обязательно должно произойти при рассматриваемом испытании, т. е. их сумма $A_1 + A_2 + \ldots + A_N$ есть достоверное событие.

Примеры. Пусть X – число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости. События $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$, $X = 4$, $X = 5$, $X = 6$ образуют полную группу. Точно так же полную группу образуют и события X четно, X нечетно или события $X \le 2$, $X \ge 3$. Из этих примеров видно, что из системы событий, связанных с данным испытанием, можно различным образом конструировать полные группы событий.

Теорема. Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то событие $A_1 + A_2 + ... + A_n$ является достоверным, поэтому $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1$; в то же время попарная несовместность рассматриваемых событий позволяет здесь применить формулу (1.4), что дает требуемое соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \tag{1.5}$$

Два события *A* и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если они образуют полную группу (то есть появление одного из них равносильно непоявлению другого). Так как $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, то по вероятности одного из противоположных событий можно находить вероятность другого:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}), \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.6}$$

Во многих задачах приходится находить вероятность совмещения событий *A* и *B,* если известны вероятности событий *A и B.*

Условной вероятностью $P(B/A)$ будем называть вероятность события *B* при условии осуществления события *A*.

Теорема умножения. Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{1.7}$$

Задача 1.12. Студент знает правильный ответ на 20 экзаменационных вопросов из 30. Какова вероятность того, что он:

а) знает ответ на два заданных ему вопроса;

б) не знает ответа на оба заданных ему вопроса?

Решение

Пусть событие A = {студент знает ответ на первый вопрос}, B = {студент знает ответ на второй вопрос}.

$P(A) = 20/30$. $P(B/A) = 19/29$ (из 29 оставшихся вопросов студент знает ответ на 19, так как на один из известных ему вопросов он уже ответил). Тогда $P(A \cdot B)$ = P(студент знает два вопроса) = $P(A) \cdot P(B/A) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} = \frac{38}{87} \approx 0{,}437$.

Пусть событие C = {студент не знает ответ на первый вопрос}, D = {студент не знает ответ на второй вопрос}.

$P(C) = 10/30$. $P(C/\mathrm{D}) = 9/29$ (из 29 оставшихся вопросов студент не знает ответ на 9, так как на один из вопросов он уже не ответил). Тогда $P(A \cdot B)$ = P(студент не знает два вопроса) = $P(A) \cdot P(B/A) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{9}{87} \approx 0{,}103$.

Теорема умножения легко обобщается на любое конечное число событий. Так, например, в случае трех событий A, B, C:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cdot B)). \qquad (1.10)$$

В общем случае

$$P\,(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cdot A_2)) \ldots P(A_n/(A_1A_2 \ldots A_{n-1})). \qquad (1.11)$$

Задача 1.13. Из колоды в 52 карты случайным образом берут 3 карты. Найти вероятность того, что все три карты – тузы (событие D).

Решение

$D = A \cdot B \cdot C$, где A = { первая карта – туз}, B = { вторая карта – туз}, C = {третья карта – туз}. В силу равной возможности исходов, обеспеченной перемешиванием карт, здесь можно воспользоваться классической формулой (1.1), как для расчета безусловных, так и для расчета условных вероятностей.

$P(A)$ = 4/52 (в колоде из 52 карт 4 туза), $P(B/A)$ = 3/51 (осталась 51 карта, среди них – 3 туза), $P(C/(A \cdot B))$ =2/50 (осталось 50 карт, среди них – 2 туза). Тогда по формуле (1.10)

$P(D) = P$ (три туза) = 4/52 · 3/51 · 2/50 = 0,00018.

Для вычисления вероятности появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ можно найти сначала вероятность противоположного события, которое заключается в том, что не произойдет ни одно из указанных событий. Это событие соответствует совмещению событий, противоположных рассматриваемым: $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$.

Окончательная формула будет:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \qquad (1.12)$$

Задача 1.14. В группе 10 студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадают дни рождения (событие A). Считаем, что в году 365 дней.

Решение

Противоположное событие A можно представить себе так: если предложить каждому студенту заштриховать в календаре года дату своего рождения, то ни одна дата в календаре не окажется заштрихованной дважды, т. е. первый студент может заштриховать любой день из 365 дней, второй – один из 364 оставшихся, третий – один из 363 оставшихся и т. п. Тогда

$$P(\overline{A}) = \underbrace{\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{356}{365}}_{10\ \text{сомножителей}}$$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}889$.

1.6. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Два события A и B называются *независимыми,* если предположение о том, что произошло одно из них, не изменяет вероятность другого, т. е. если

$$P(B/A) = P(B); \qquad P(A/B) = P(A).$$

Из соотношения (1.9) вытекает, что из двух записанных выше равенств одно является следствием другого.

Пример. Пусть событие A – появление герба при однократном бросании монеты, а событие B – появление карты бубновой масти при вынимании карты из колоды. Очевидно, что события A и B независимы.

В случае независимости событий A и B формула (1.7) примет более простой вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.13}$$

т. е. *вероятность совмещения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

События $A_1; A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности,* если вероятность наступления каждого из них не меняет своего значения после того, как одно или несколько из остальных событий осуществились.

Исходя из этого определения, в случае независимости событий $A_1; A_2, ..., A_n$ между собой в совокупности на основании формулы (1.11) имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \tag{1.14}$$

Кроме того, вероятность совмещения любой комбинации из событий $A_1; A_2, ..., A_n$ равна произведению их вероятностей. В частности, независимость трех событий A, B и C в совокупности означает выполнимость четырех условий:

$$\begin{aligned}
&P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \\
&P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) \\
&P(A \cdot C) = P(A) \cdot P(C)
\end{aligned}$$

Рассмотрим примеры, где применяются правила сложения и умножения независимых событий. Отметим одно полезное при решении задач свойство: если события

A и B независимы, то будут независимыми следующие пары событий: 1) A и $\overline{B}$; 2) $\overline{A}$ и B; 3) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и тогда

$$P(\overline{A}\cdot B)=P(\overline{A})\cdot P(B);\ P(A\cdot\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B}); P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}).$$

1.7. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть случайное событие A может произойти при наступлении одного из *попарно несовместных* событий $H_1, H_2, ..., H_N$, называемых “гипотезами”, которые *образуют полную группу*. Тогда, если произошло событие A, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий $H_1A, H_2 A, ..., H_NA$. Следовательно,

$$A=H_1A+H_2A+... + H_NA.$$

Применяя правило сложения вероятностей, имеем

$$P(A)=P(H_1A+H_2A+... + H_NA)= P(H_1A)+P(H_2A)+... +P(H_NA).$$

Но $P(H_iA) = P(H_i)\ P(A/H_i)$ $(i = 1, 2, \dots, N),$ поэтому

$$P(A)=\sum_{i=1}^{N}P(H_i)\cdot P(A/H_i)\,. \tag{1.15}$$

Формула (1.15) называется *формулой полной вероятности.*

Предположим, что производится некоторый опыт, причем об условиях его проведения можно высказать N гипотез $H_1, H_2, ..., H_N$, , которые *образуют полную группу*., имеющих вероятности $P(H_j)$. Пусть в результате опыта может произойти или не произойти событие A, причем, если опыт происходит при выполнении гипотезы H_j, то вероятности $P(A/H_j)$ известны ($j = 1, 2,..., N$).

Спрашивается, как изменятся вероятности гипотез, если стало известным, что событие A произошло? Иными словами, нас интересуют значения вероятностей $P(Hj/A)$.

На основании соотношений (1.7) и (1.8) имеем

$P(HjA) = P(Hj)\ P(A/H_j) = P(A)\ P\ (Hj/A)$, (j = 1, 2, ..., N),

откуда

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A/H_j)}{P(A)}. \tag{1.16}$$

Формула (1.16) называется *формулой Байеса*.

Задача 1.21. Случайно оказались смешанными две партии изделий, причем известно, что число изделий в первой партии втрое больше, чем во второй, а дефектные изделия составляют 3 % в первой партии и 2 % – во второй партии. Какова вероятность того, что взятое наудачу из смеси изделие будет дефектным (событие A)?

Решение

Выдвинем гипотезу H: $H=${изделие относится к первой партии}, тогда $\overline{H}$ = {изделие относится ко второй партии}, $P(H)$ = 3/4, $P(\overline{H})$ = 1/4; условные вероятности события A равны $P(A/H)$ = 0,03; $P(A/\overline{H})$ = 0,02; это следует из условия задачи. Тогда по формуле (1.15) получаем $P(A)$ = (3/4) · (3/100) + (1/4) · (2/100) = 0,0275.

Задача 1.22. В условиях предыдущей задачи взятое изделие подвергли проверке, и оно оказалось дефектным. Какова вероятность того, что изделие было взято из первой партии.

Решение

Воспользуемся результатом предыдущей задачи, где найдена $P(A)$ = 0,0275 и формулой Байеса (1.16):

$$P(H/A) = \frac{P(H)\cdot P(A/H)}{P(A)} = \frac{0{,}75\cdot 0{,}03}{0{,}0275} = 0{,}82\,.$$