Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пусть $z = f(x; y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy}$$

Рассмотрим сложную функцию

$$z = f(x; y), \quad \text{где } x = x(u; v),\ y = y(u; v),$$

т. е. функцию

$$\boxed{z = f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v).}$$

Тогда

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv\right).$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы dx и dy функций $x = x(u; v)$ и $y = y(u; v)$. Следовательно, и в этом случае,

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.}$$

Дифференцирование неявно заданной функции

Функция $z = f(x; y)$ называется ***неявной***, если она задается уравнением

$$F(x; y; z) = 0,$$

неразрешенным относительно z.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Для этого, подставив

в уравнение вместо z функцию $f(x; y)$, получим тождество

$$F(x; y; f(x; y)) \equiv 0.$$

Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ (y \text{ — считаем постоянным}),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ (x \text{ — считаем постоянным}),$$

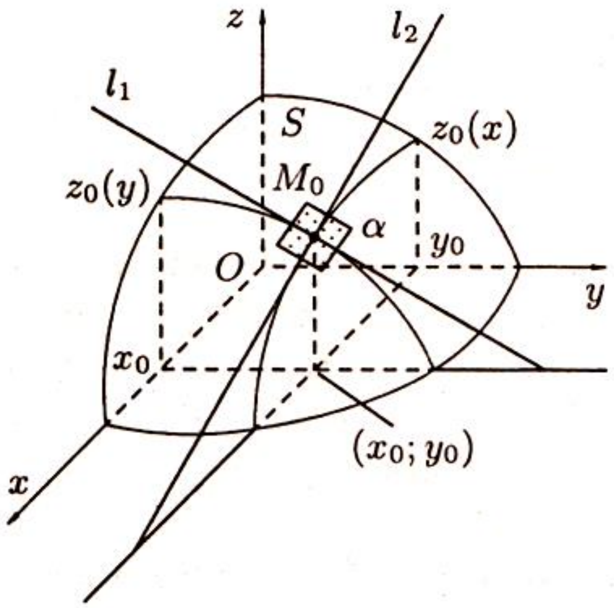
откуда

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \ (F'_z \neq 0).}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$, заданную над плоской областью D.

Определение:
Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 с координатами $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется плоскость, проходящая через точку M_0 и характеризующейся тем свойством, что в этой плоскости лежат касательные ко всем кривым, лежащим на данной поверхности и проходящим через точку M_0. В частности, в касательной плоскости лежат касательные к кривым, полученным в пересечении поверхности с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.



Направляющие векторы этих касательных – векторы $(0,1, f'_y(x_0,y_0))$ и $(1,0, f'_x(x_0,y_0))$. Нормальный вектор $\vec{n}$ к касательной плоскости перпендикулярен каждому из этих направляющих векторов, следовательно, за нормальный вектор можно взять векторное произведение $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \end{vmatrix}$. Таким образом, $\vec{n}=(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0),-1)$. Записывая уравнение плоскости с данным нормальным вектором, проходящей через данную точку, получим:

$$\boxed{z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

уравнение плоскости, касательной к поверхности $z=f(x,y)$ **в точке** (x_0,y_0,z_0)

Определение:

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее *нормалью*.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.}$$

Если поверхность S задана уравнением $\boxed{F(x;y;z)=0}$, то частные производные

$$f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}, \quad f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

и

$$\boxed{\begin{gathered} F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0)\cdot(z-z_0) = 0 \\ \frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}. \end{gathered}}$$

Пример:

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения

$$z = x^2 + y^2 \text{ в точке } M_0(1;-1;2).$$

Решение:

$$f'_x(x;y) = 2x, \quad f'_y(x;y) = 2y,$$

$$f'_x(1;-1) = 2, \quad f'_y(1;-1) = -2.$$

уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = 2\cdot(x-1) - 2\cdot(y+1)$$

уравнение нормали:

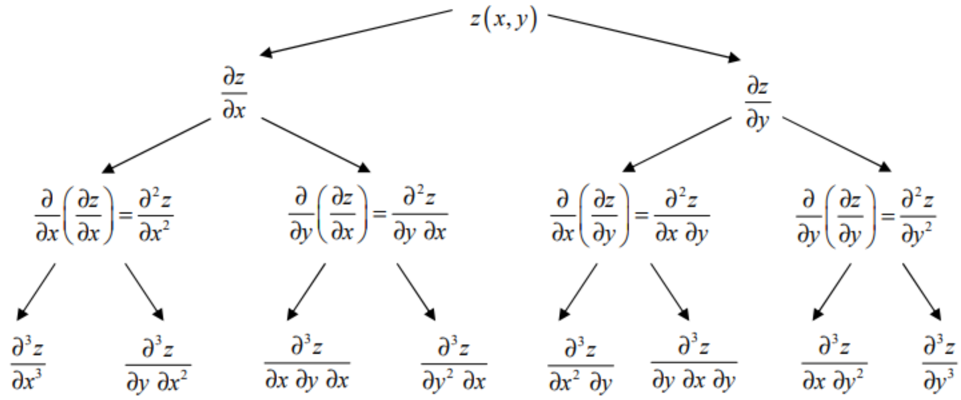
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют **частными производными первого порядка**. Их можно рассматривать как функции от $(x;y)\in D$. Эти функции также могут иметь частные производные, которые называются **частными производными второго порядка**. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков.



…

Пример. Найти частные производные второго порядка функции
$$u=e^x(\cos y+x\sin y).$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y)=e^x[\cos y+(x+1)\sin y],\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{e^x[\cos y+(x+1)\sin y]\right\}=e^x[\cos y+(x+2)\sin y],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x(-\sin y+x\cos y)\right]=-e^x(\cos y+x\sin y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^x(-\sin y+x\cos y)\right]=e^x(-\sin y+(x+1)\cos y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{e^x[\cos y+(x+1)\sin y]\right\}=e^x[-\sin y+(x+1)\cos y].$$

Оказалось, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$. Этот результат не случаен.

Теорема (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.
В частности, для $z=f(x;y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал функции

$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференциал второго порядка определяется по формуле

$$\boxed{d^2z=d(dz).}$$

Найдем его:

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x\cdot dx+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y\cdot dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)\cdot dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)\cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\cdot dy+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для **дифференциала третьего порядка:**

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}dy +$$

$$+3\frac{\partial}{\partial x}dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Дифференциал n-го порядка:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z.$$

Многомерные пространства

Теперь рассмотрим n-мерное пространство R^n, элементами которого являются точки x, каждая из которых задается n координатами $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В случае малой размерности пространства, чтобы не вводить верхние индексы, мы будем использовать традиционные координаты: x, y, z, u, v, w.

Определение: **Расстоянием между точками** x и y n-мерного пространства является величина

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + ... + (x^n - y^n)^2}\ .$$

По аналогии с функцией двух переменных введем основные понятия.

Определение: **Функцией** n **переменных** $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие одно и только одно вещественное число z.

Определение: Число A называется **предел функции многих переменных** $f(x)$, т.е. $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall\ x \in D : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Определение: Функция многих переменных $z = f(x),\ x \in D,$ называется **непрерывной в точке** $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, если точка x_0 входит в область определения функции D и $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Таким образом, **малым приращениям аргумента** (в смысле расстояния в пространстве R^n) у функции, непрерывной в точке, соответствуют **малые приращения функции.**

Как и в случае функций одной переменной, арифметические действия над непрерывными функциями не выводят из класса непрерывных функций, если нет деления на 0.

Дифференцируемость функции многих переменных

Определение: Функции многих переменных $z = f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, если ее приращение записывается в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A_1 \cdot \Delta x^1 + A_2 \cdot \Delta x^2 + \dots + A_n \cdot \Delta x^n + \alpha,$$

где величина $\alpha = \alpha_1 \Delta x^1 + \alpha_2 \Delta x^2 + \dots + \alpha_n \Delta x^n$ настолько мала, что

$$\lim_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \frac{\alpha_1}{\rho(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0, \quad \lim_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \frac{\alpha_2}{\rho(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0, \cdots$$

$$\lim_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \frac{\alpha_n}{\rho(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0.$$

Т.е. α является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0 + \Delta x, x_0)$.

Для удобства записи величины $A_1, A_2, \dots, A_n$ записываются в виде матрицы-строки $\left(A_1, A_2, \dots, A_n\right)$, которая называется производной матрицей.

Очевидно, что

$$\left(A_1, A_2, \dots, A_n\right) = \left(f'_{x^1}(x_0),\ f'_{x^2}(x_0), \dots, f'_{x^n}(x_0) \right)$$

Главная часть приращения функции многих переменных в точке x_0, называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Т.е. $df(x_0) = f'_{x^1}(x_0)\Delta x^1 + f'_{x^2}(x_0)\Delta x^2 + \ldots + f'_{x^n}(x_0)\Delta x^n$

или $\boxed{df(x_0) = f'_{x^1}(x_0)dx^1 + f'_{x^2}(x_0)dx^2 + \ldots + f'_{x^n}(x_0)dx^n}$

или $df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x^i}(x_0)dx^i$

Таким образом, связь приращения функции в точке и дифференциала в той же точке имеет вид

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \alpha,}$$

где α – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0 + \Delta x, x_0)$.

Любая частная производная f'_{x^k} функции n переменных $f(x) = f(x^1, \ldots, x^n)$ сама также является функцией n переменных.

Частная производная от частной производной функции многих переменных называется **частной производной второго порядка** функции $f(x)$.

При этом, если переменные, по которым берутся производные сначала от функции $f(x)$, а затем от функции f'_{x^k}, не совпадают, такая частная производная называется смешанной. Обозначения частной производной второго порядка:

$$f''_{x^k x^l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}.$$

В том случае, когда $f''_{x^k x^l}$ и $f''_{x^l x^k}$ – непрерывные функции в окрестности некоторой точки, $f''_{x^k x^l} = f''_{x^l x^k}$ в этой точке.

Аналогично вводятся частные производные любого порядка.

Дифференцируемость вектор-функции многих переменных

Определение: Вектор-функцией

$$z = f(x) = (f_1(x^1, x^2, ..., x^n), f_2(x^1, x^2, ..., x^n), ..., f_m(x^1, x^2, ..., x^n)),$$

размерности m, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие точка z из m-мерного пространства ($z \in \mathrm{R}^m$). Каждая из функций, являющихся координатами вектор-функции, называется координатной функцией.

Примером вектор-функции размерности 2 двух переменных служит

$$z = (x(r, \varphi), y(r, \varphi)),$$

где $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$.

Нетрудно видеть, что данная вектор-функция задает соответствие между полярными и декартовыми координатами.

Приращением m-мерной вектор-функции в точке x_0 является m-мерный вектор

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0), ..., f_m(x_0 + \Delta x) - f_m(x_0)).$$

Признаком дифференцируемости вектор-функции в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ является то, что **приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, является результатом линейного преобразования этого бесконечно малого приращения**.

Линейное отображение пространства R^n в пространство R^m задается матрицей размера $m \times n$. Поэтому условием дифференцируемости m-мерной вектор-функции n переменных является существование такой матрицы A размером $m \times n$, что для любого n-мерного вектора приращений аргумента Δx справедливо

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha,}$$

где вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho(x_0 + \Delta x, x_0) \to 0} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_m^2}}{\rho(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0$$

Матрица A называется производной матрицей и состоит из значений всех частных производных всех координатных функций, входящих в вектор-функцию, в данной точке:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{m\,x^1}(x_0) & f'_{m\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{m\,x^n}(x_0) \end{pmatrix}=\left[\, f'_{i\,x^j}(x_0)\right]_{i=1,\,j=1}^{m,\ n}.}$$

Якобиан

Пусть $z=f(x),\ x\in D,$ – n-мерная вектор-функция n переменных, дифференцируемая в точке x_0. В данном случае производная матрица является квадратной, размера $n\times n$. Для такой матрицы может быть вычислен определитель.
Этот определитель

$$\begin{vmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{n\,x^1}(x_0) & f'_{n\,x^2}(x_0) & \ldots & f'_{n\,x^n}(x_0) \end{vmatrix}$$

называется **якобианом** и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^n)}\Big|_{x=x_0}=\frac{D(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{D(x^1,x^2,\ldots,x^n)}\Big|_{x=x_0}.$$

Примеры. 1. Сосчитаем якобиан перехода от полярных координат к декартовым координатам.
Напомним формулы: $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

2. Сосчитаем якобиан перехода от сферических координат к декартовым координатам.
Напомним формулы:

$$x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi,\ z=r\cdot\cos\psi.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cdot\sin\psi & -r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi & r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cdot\sin\psi & r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi & r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\cdot\sin\psi\end{vmatrix}=-r^2\cdot\sin\psi.$$