ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6.

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

Случайная величина X имеет *непрерывное распределение*, если она может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Строгое определение *непрерывной случайной величины* следующее: случайная величина называется *непрерывной*, если математическое ожидание любой функции $g(X)$ можно записать в виде:

$$M(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot\varphi(x)dx\,. \qquad (1.41)$$

Под “любой” функций $g(x)$ имеется ввиду такая, для которой интеграл (1.41) существует и сходится абсолютно.

Функция $\varphi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X и обладает следующими свойствами:

1. Вероятность попадания величины X в произвольный интервал A на оси $0x$ равна

$$P(X \in A) = \int_A \varphi(x)dx, \qquad (1.42)$$

т. е. интегралу по A от функции плотности.

Таким образом, функция плотности $\varphi(x)$ полностью характеризует распределение случайной величины X.

2. В частности, для интервала (x_1, x_2), получаем:

$$P(X \in (x_1,\, x_2)) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx\,. \qquad (1.43)$$

3. Так как вероятность неотрицательна, то из (1.42) следует, что $\varphi(x) \geq 0$ для любого x.

4. Вероятность достоверного события равна 1, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = P(X \in (-\infty, +\infty)) = 1. \qquad (1.44)$$

Последнее равенство называется *условием нормировки* функции плотности.

График функции плотности распределения $\varphi(x)$ называется *кривой распределения* (рис. 1.10).

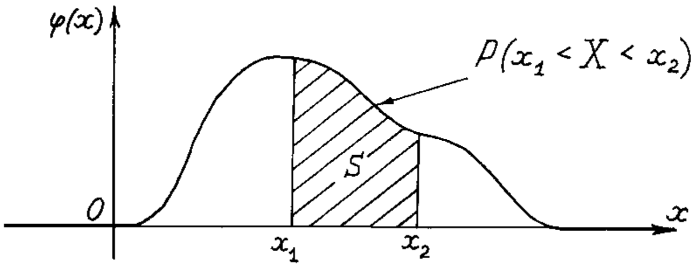

Рис. 1.10. График плотности распределения $\varphi(x)$ (кривая распределения).

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (x_1, x_2) численно равна площади соответствующей криволинейной трапеции. Из условия нормировки следует, что площадь области, ограниченной сверху кривой распределения, а снизу – осью $0x$, равна 1.

Заметим, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в любую отдельную точку равна нулю.

Функцией распределения случайной величины X является функция $F(x)$, равная вероятности события $(X < x)$, т.е. вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее значения аргумента x (см. п. 1.8, формула (1.17)).

Для непрерывной случайной величины функция распределения равна

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \qquad (1.45)$$

и обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для всех x;

2. $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1;$

3. $F(x)$ – неубывающая функция на всей оси;

4. $F(x)$ – непрерывная функция, в точках непрерывности $\varphi(x)$ она имеет производную:

$$F'(x) = \varphi(x)\,. \qquad (1.46)$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в произвольный интервал (x_1, x_2) можно вычислить с помощью функции распределения следующим образом:

$$P(X \in (x_1, x_2)) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)\,. \qquad (1.47)$$

Поэтому функция распределения $F(x)$ так же, как и функция плотности распределения $\varphi(x)$, полностью характеризует распределение вероятностей случайной величины X и даже более удобна для расчетов вероятностей, так как не требует интегрирования. Для многих распределений, встречающихся в статистике, функции распределения табулированы.

В задачах статистики часто бывает нужно найти такое значение x по заданной вероятности $\mathcal{P}$, что

$$\mathcal{P} = P(X < x) = F(x)\,. \qquad (1.48)$$

Данное уравнение может иметь, вообще говоря, множество решений. Но для большинства распределений, встречающихся в статистике, функция плотности распределения $\varphi(x)$ строго положительна для всех X из некоторого интервала и равна нулю вне этого интервала. Поэтому внутри этого интервала функция $F(x)$ строго монотонно возрастает.

В этих случаях решение уравнения (1.43) существует и единственно для всех $\mathcal{P} \in (0; 1)$. Оно называется *квантилью распределения* и обозначается $x_{\mathcal{P}}$ (рис. 1.11). Обычно для квантилей распределения также составляют таблицу, которая представляет собой таблицу значений функции, обратной функции распределения.

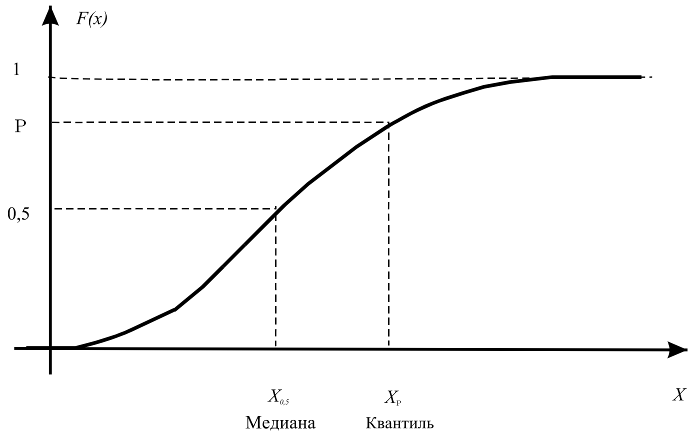

Рис. 1.11. График функции распределения, квантиль и медиана случайной величины X .

Некоторые квантили имеют специальное название. Так, *медианой* непрерывной случайной величины X называется действительное число m_X, удовлетворяющее условию:

$$P(X < m_X) = P(X > m_X) = 0{,}5\,, \tag{1.49}$$

т. е. решение уравнения $F(x) = 0{,}5$.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X находят по формулам, которые следуют из выражения (1.41) :

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx\,. \tag{1.50}$$

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot \varphi(x)dx$$

Дисперсию проще рассчитывать по следующей формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)dx - (M(X))^2. \tag{1.51}$$

Задача 1.49. Функция плотности распределения $\varphi(x)$ непрерывной случайной величины X задана в виде графика на рис. 1.12. Написать формулу плотности, найти $M(X)$, $D(X)$, вычислить $P(-0{,}5 < X < 0{,}5)$.

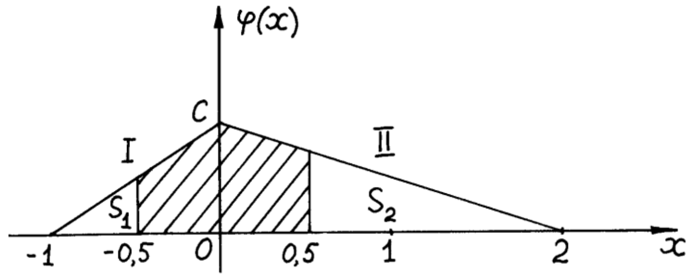

Рис. 1.12. Иллюстрация к решению задачи 1.49.

Решение:

Число c найдем из условия нормировки функции плотности:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 = S_A$ – площадь треугольника на рис. 1.7. $S_A = 3c/2 = 1$, отсюда $c = 2/3$.

Запишем уравнения прямых I и II и получим формулу плотности

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ 2/3(x+1), & -1 \le x \le 0, \\ (1/3)(2-x), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найдем

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int\limits_{-1}^{2} x\varphi(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} x \cdot \frac{2}{3}(x+1)dx + \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{3}(2-x)dx = \frac{1}{3};$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx + \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2}(2x^2-x^3)dx = \frac{11}{6};$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{11}{6} - \frac{1}{9} = \frac{31}{18}.$$

Вычислим $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = S$ – площадь заштрихованной на рисунке фигуры.

$S = 1 - S_1 - S_2$, где S_1 и S_2 – площади треугольников:

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}; \quad S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \quad S = 1 - \frac{1}{12} - \frac{3}{8} = \frac{13}{24} \approx 0{,}4517.$$

Задача 1.50. Функция плотности распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}.$$

Найти: a, $P(\pi/3 \le X \le \pi/2)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, медиану.

Решение:

Кривая распределения представлена на рис. 1.9. Число a находим из условия нормировки $1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_0^{\pi} a \sin x dx = 2a$,откуда $a = 1/2$. Далее вычисляем:

$$P\left(\frac{\pi}{3} \le X \le \frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \varphi(x)dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{4};$$

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx = \frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \frac{1}{2}(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2;$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2; \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2} \approx 0{,}684.$$

Для нахождения медианы решим уравнение:

$$P(X < t) = \int\limits_0^{t} \varphi(x)dx = -\frac{1}{2}(\cos t - 1) = \frac{1}{2} \text{ при } 0 < t < \pi.$$

Отсюда, $\cos t = 0$; $t = \frac{\pi}{2}$ и $X_{1/2} = m_X = \frac{\pi}{2}$, что совпадает с $M(X)$ в силу симметрии распределения относительно $M(X)$.

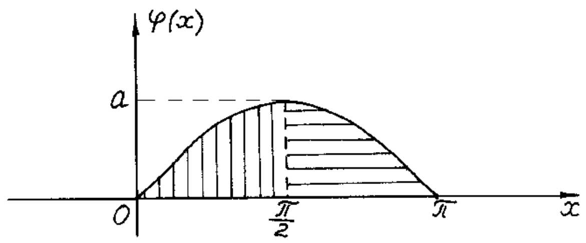

Рис. 1.13. Иллюстрация к решению задачи 1.50.

Задача 1. 51. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в виде $F(x)=\begin{cases} a, & x\le 3 \\ 1-b(x)^{-3}, & x>3 \end{cases}$. Найти параметры *a, b* и функцию плотности распределения *p*(*x*).

Вычислить *M*(*X*), *D*(*X*), *P*(2< *X* <6), *P*(*X*>6).

Решение:

По свойствам функции распределения непрерывной случайной величины (см. п. 1.12, свойства 1 – 4, формулы (1.45) – (1.47)) находим: $a=0$. Так как функция распределения $F(x)$ является непрерывной функцией, то выражение $1-b(x)^{-3}$ при $x=3$ должно быть равно нулю:

$$1-b(3)^{-3}=0; \quad \Rightarrow \quad b=3^3=27.$$

Так как $\varphi(x)=F'(x)$, то $\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ \left(1-\dfrac{27}{x^3}\right)'=\dfrac{81}{x^4}, & x>3 \end{cases}$.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{3}^{+\infty}x\frac{81}{x^4}dx=\int_{3}^{+\infty}\frac{81}{x^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{3}^{b}\frac{81}{x^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{81}{2x^2}\right)\Bigg|_3^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{81}{2b^2}+\frac{81}{2\cdot 9}\right)=4,5$$

$$;M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{3}^{+\infty}x^2\frac{81}{x^4}dx=\int_{3}^{+\infty}\frac{81}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{3}^{b}\frac{81}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{81}{x}\right)\Bigg|_3^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{81}{x}+\frac{81}{3}\right)=27$$

;

$$D(X)=M(X^2)-M(X)^2=27-(4,5)^2=27-20,25=6,75;$$

$$P(2<X<6)=F(6)-F(2)=\left(1-\frac{27}{6^3}\right)-0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0,875;$$

$$P(X>6)=1-F(6)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}=0,125.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

12.1. Плотность распределения величины X имеет вид кривой, показанной на рис. 1.17. Найти значение a, вычислить $M(X)$ и $P(X > M(X))$.

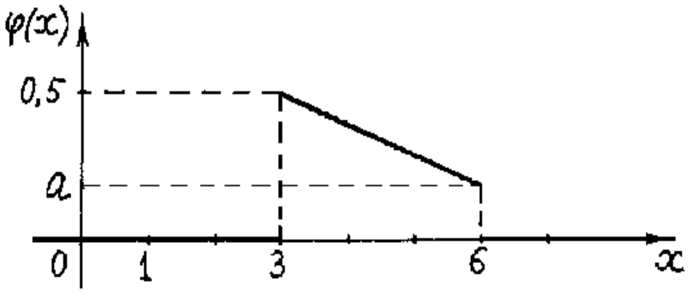

Рис. 1.17. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.1)

12.2. Плотность распределения величины X имеет вид кривой, изображенной на рис. 1.18. Найти значение a, вычислить σ_x и $P(X > \sigma_x)$.

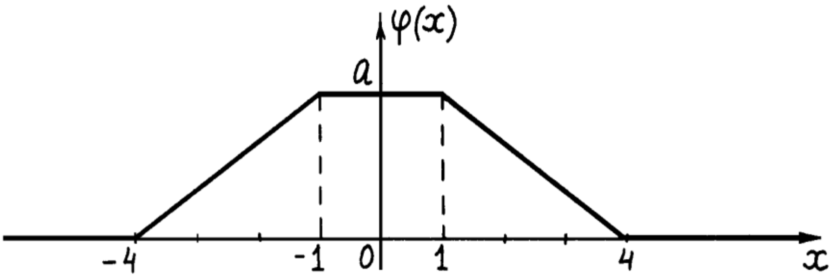

Рис. 1.18. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.2).

12.3. Плотность распределения $\varphi(x)$ величины X равна 0 при $X < 0$ и $\varphi(x) = Cxe^{-5x}$ при $X > 0$. Найти значение C, вычислить $M(X)$, σ_x, $P(X \geq 2\sigma_x)$.

12.4 Задана функция плотности непрерывной случайной величины (рис. 1.19). Записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X < M(X))$, медиану m_x.

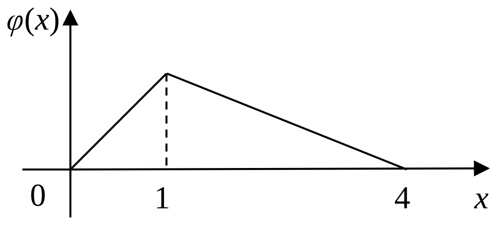

Рис. 1.19. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.4).

12.5. Задана функция плотности непрерывной случайной величины (рис. 1.20). Записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X < M(X))$, медиану m_x.

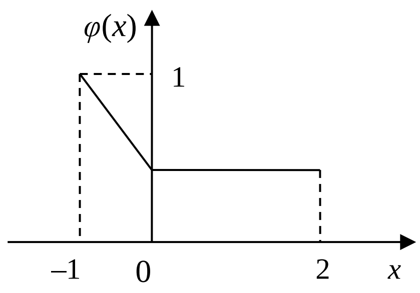

Рис. 1.20. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.5).

12.6. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в виде

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ ax^2 + b & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$. Найти параметры a и b. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $P(X > 1)$.

12.7. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в виде

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 4 \\ a(x-4)^3 + b & 4 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$. Найти параметры a и b. Вычислить $M(X)$, $P(X > 4{,}5)$.

12.8. Задан график функции плотности непрерывной случайной величины (рис. 1.21). Записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X > M(X))$, медиану m_x.

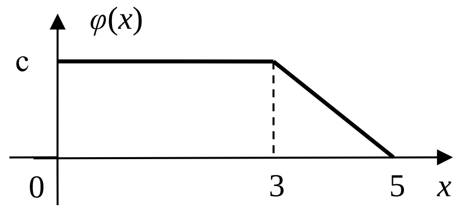

Рис. 1.21. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.8).

12.9. Задан график функции плотности непрерывной случайной величины (рис. 1.22). Записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X < M(X))$, медиану m_x..

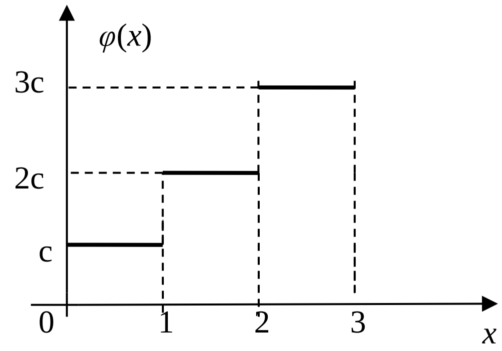

Рис. 1.22. Кривая плотности распределения случайной величины X (к задаче 12.9).

12.10. Задан график функции распределения непрерывной случайной величины (рис. 1.23). Записать уравнения функции распределения и функции плотности. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $P(X < 2)$.

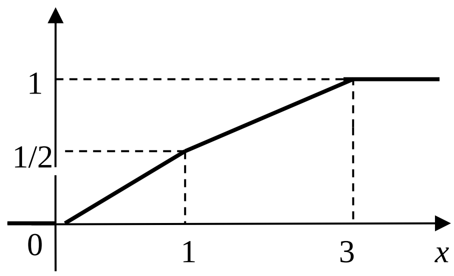

Рис. 1.23. Кривая распределения случайной величины X (к задаче 12.10).

12.11. Задан график функции распределения непрерывной случайной величины (рис. 1.24). Записать уравнения функции распределения и функции плотности. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $P(X < 1{,}5)$.

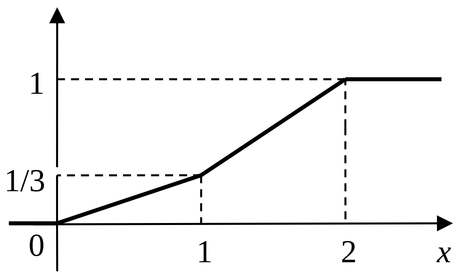

Рис. 1.24. Кривая распределения случайной величины X (к задаче 12.11).

Ответы

12.1. a = 1/6; $.M(X)=4\frac{1}{4}$; $P\left(X>4\frac{1}{4}\right)=0,462$

12.2. a = 0,2; σ_x = 1,70; $P(X>\sigma_x)$ = 0,176.

12.3. c = 25; $M(X)$ = 0,4; σ_x = 0,283; $P(X>2\sigma_x)$ = 0,226.

12.4. $M(X)$ = 5/3; $D(X)$ = 0,722. $P(X<M(X))$ = 0,546; $m_x=4-\sqrt{6}\approx 1{,}55$.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0; & x\notin[0;4]\\ x/2; & x\in[0;1]\\ (4-x)/6; & x\in(1;4]\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty;0)\\ x^2/4; & x\in[0;1)\\ (-x^2+8x-4)/12; & x\in[1;4]\\ 1; & x\in(4;+\infty)\end{cases}$$

12.5. $M(X)$ = 1/30; $D(X)$ = 0,799. $P(X<M(X))$ = 0,607; $m_x=0,25(1-\sqrt{5})\approx -0,309$.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0; & x\notin[-1;2]\\ 0,2-0,8x; & x\in[-1;0]\\ 0,2; & x\in(0;2]\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty;-1)\\ 0,2(-2x^2+x+3); & x\in[0;1)\\ 0,2(x+3); & x\in[0;2]\\ 1; & x\in(2;+\infty)\end{cases}$$

12.6. a =0,25; b = 0; $M(X)$ = 4/3; $D(X)$ = 2/9; P = 3/4.

12.7. a =1; b = 0; $M(X)$ = 4,75; P = 0,875.

12.8. $M(X)$ = 2,041; $D(X)$ = 1,49. $P(X>M(X))$ = 0,49; m_x = 2.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0; & x\notin[0;5]\\ 0,25; & x\in[0;3]\\ 0,125(5-x); & x\in(3;5]\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty;-1)\\ x/4; & x\in[0;3)\\ (-x^2+10x-9)/16; & x\in[3;5]\\ 1; & x\in(5;+\infty)\end{cases}$$

12.9. $M(X)$ = 11/6 $\approx$ 1,833; $D(X)$ = 0,64. $P(X<M(X))$ = 4/9; m_x = 2.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0; & x\notin[0;3]\\ 1/6; & x\in[0;1]\\ 1/3; & x\in(1;2]\\ 1/2; & x\in(2;3]\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty;0)\\ x/6; & x\in[0;1)\\ x/3-1/6; & x\in[1;2)\\ x/2-1/2; & x\in[2;3)\\ 1; & x\in[5;+\infty)\end{cases}$$

12.10. $F(x)=\begin{cases} 0; & x\in(-\infty;0) \\ x/2; & x\in[0;1) \\ (x+1)/4; & x\in[1;3] \\ 1; & x\in(3;+\infty) \end{cases}$ $M(X)$ = 1,25; $D(X)$ = 0,7675. P = 0,75.

12.11. $F(x)=\begin{cases} 0; & x\in(-\infty;0) \\ x/3; & x\in[0;1) \\ (2x-1)/3; & x\in[1;2] \\ 1; & x\in(2;+\infty) \end{cases}$ $M(X)$ = 7/6; $D(X)$ = 0,306. P = 2/3.