**ЛЕКЦИЯ 1**

**Числовые ряды, их свойства. Признаки сходимости знакоположительных рядов.**

## 1.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

Пусть дана последовательность чисел $a_1, a_2, a_3,..., a_n, a_{n+1},...$

**Определение.** Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

называется *числовым рядом.* Числа $a_1, a_2,..., a_n, ...$ называются *членами (элементами)* ряда; $a_1$ – первый член, $a_2$ – второй член, …, $a_n$ – *n*–ый или *общий член* ряда.

Сумма $S_n$ первых n членов числового ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \qquad (1.2)$$

называется его *частичной суммой.* Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют последовательность частичных сумм: $S_1, S_2, S_3,..., S_n,...$

Числовой ряд, получающийся из ряда (1.1) отбрасыванием его первых *n* членов, называется *остатком* числового ряда (1.1) и обозначается $r_n$:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... \qquad (1.3)$$

**Определение.** Числовой ряд (1.1) называемся *сходящимся,* если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (1.4)$$

Число S в этом случае называется *суммой* ряда (1.1).

Если же предел последовательности частичных сумм $S_n$ равен бесконечности или не существует, то ряд называется *расходящимся.* Расходящийся ряд *суммы не имеет.*

## 1.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ.

**Теорема 1.** Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сходится и его сумма равна *S,* то при умножении всех его членов ряда на число *c* получается сходящийся ряд, сумма которого равна *c·S.*

**Доказательство.** Пусть $S_n$ – частичная сумма исходного ряда. По условию $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Если все члены ряда умножить на число *c*, то частичная сумма $\tilde{S}_n$ нового ряда будет равна

$$\tilde{S}_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ...ca_n = c\cdot(a_1 + a_s + a_3 + ... + a_n) = cS_n$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} c\cdot S_n = c\cdot S$

Таким образом, новый ряд сходится и имеет сумму $c{\cdot}S$.

**Следствие.** Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ расходится, то при умножении всех членов этого ряда на число $c \neq 0$ получается расходящийся ряд.

**Доказательство.** Предположим, что получившийся ряд

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + ...ca_n \tag{1.5}$$

сходится, но исходный ряд получается из него умножением всех членов ряда на число $\frac{1}{c}$ и, по доказанной выше теореме, должен сходиться, что противоречит условию. Следовательно, ряд (1.5) расходится.

Из доказанной теоремы и следствия из нее можно сделать вывод, что при умножении всех членов числового ряда на число $c \neq 0$ сходимость ряда не изменяется.

**Теорема 2.** Если ряды:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1.6}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \tag{1.7}$$

сходятся и имеют, соответственно, суммы $A$ и $B$, то ряд

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ... \tag{1.8}$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $A+B$.

**Доказательство.** Обозначим частичные суммы заданных рядов через $A_n$ и $B_n$ соответственно. Тогда частичная сумма $S_n$ ряда (1.8) равна

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + ...b_n) = A_n + B_n .$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B .$$

Следовательно, ряд (1.8) сходится и его сумма $S = A + B$. Ряд (1.8) называется *суммой* заданных в условиях теоремы рядов (1.6) и (1.7).

**Следствие.** Ряд, получающийся почленным вычитанием рядов, заданных в условиях теоремы 2, сходится и его сумма равна $A - B$.

**Доказательство.** Если ряд (1.7) и его сумма равна В, то по теореме 1 сходится ряд:

$$-b_1 - b_2 - b_3 - ... - b_n - ... , \tag{1.9}$$

получающийся при умножении каждого члена ряда (1.7) на (–1), и его сумма равна $(-B)$. При сложении двух сходящихся рядов (1.6) и (1.9) по теореме 2 получается сходящийся ряд

$$(a_1 + (-b_1)) + (a_2 + (-b_2)) + (a_3 + (-b_3)) + \ldots + (a_n + (-b_n)) =$$

$$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$$

и его сумма $\tilde{S}_n = A + (-B) = A - B$.

Теоремы 1, 2 носят название: *линейные свойства сходящихся рядов.*

**Теорема 3.** Если числовой ряд сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится остаток ряда, то и сам ряд сходится.

**Доказательство.** Обозначим через $S_n$ сумму первых *n* членов ряда, через $\sigma_{k-n}$ – частичную сумму остатка ряда, и зафиксируем значение *n* (*k* > *n*):

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\sigma_{k-n} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_k$$

1.Пусть числовой ряд сходится и имеет сумму *S,* $S_k$ – его частичная сумма

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_k .$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Но $S_k = S_n + \sigma_{k-n}$. Следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k-n} = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_n) = \lim_{k\to\infty} S_k - S_n = S - S_n .$$

То есть, частичная сумма $\sigma_{k-n}$ остатка ряда имеет конечный предел при $k \to \infty$, поэтому остаток ряда сходится.

2. Пусть остаток ряда сходится и имеет сумму $\sigma$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{k-n} = \sigma$. Тогда предел частичной суммы $S_k$ исходного ряда равен

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} (S_n + \sigma_{k-n}) = S_n + \lim_{k\to\infty} \sigma_{k-n} = S_n + \sigma ,$$

т.е. исходный ряд сходится.

Теорему 3 можно сформулировать также следующим образом. *На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых слагаемых.*

## 1.3. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА.

Как мы уже знаем, суммой ряда является предел его частичных сумм. Однако, непосредственное нахождение этого предела часто связано со значительными трудностями. В таких случаях сумму ряда находят приближенно, заменяя ее частичной суммой с достаточно большим номером *n*. Но для этого надо быть уверенным, что ряд сходится. Поэтому изучение рядов распадается на две задачи: 1) исследовать ряд на сходимость; 2) зная, что ряд сходится, найти его сумму с заданной точностью.

Начнем исследование с первой задачи, т.е. установим признаки, по которым можно определить, сходится ряд или расходится. Рассмотрим *необходимый признак сходимости ряда,* который справедлив для любых рядов.

**Теорема.** Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. предел его общего члена равен нулю.

**Доказательство.** Пусть дан сходящийся ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \ldots .$$

имеющий сумму $S$. Рассмотрим его частичные суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{и} \quad S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} .$$

Общий член ряда в этом случае можно записать $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1},$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Последнее равенство будет очевидно, если обозначить $n - 1 = k$, при $n \to \infty$ и $k \to \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$.

**Замечание 1.** Условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не является достаточным, т.е. из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Покажем это на примере.

**Замечание 2.** Из необходимого признака сходимости следует, что если общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится. Это является *достаточным признаком расходимости ряда.*

Действительно, если бы ряд сходился, то по необходимому признаку сходимости его общий член должен стремиться к нулю, что противоречит условию. Следовательно, ряд расходится.

## 1.4. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ.

В этом пункте рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости для рядов с неотрицательными членами. Такие ряды называются *знакоположительными.*

Для знакоположительных рядов справедливо утверждение: его частичные суммы

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \;\ldots\;;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n .$$

не убывают, так как все слагаемые – неотрицательные числа. Следовательно, частичные суммы ряда образуют неубывающую числовую последовательность:

$$S_1 \le S_2 \le S_3 \le ... \le S_n \le ...$$

При этом возможны два случая.

1. Последовательность частичных сумм неограничена, т.е. для любого положительного числа *C* найдется такой номер частичной суммы *n*, при котором $S_n > C$. В этом случаем $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т.е. существует положительное число *C* такое, что $S_n \le C$ для любого *n*. В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел и, следовательно, ряд сходится. . Существование предела следует из аксиомы Вейерштрасса: любая неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел. Заметим, что часто это утверждение называют *теоремой Вейерштрасса,* так как выводят его из другой аксиомы (аксиомы Ньютона).

Таким образом, если мы установим, что у знакоположительного ряда последовательность частичных сумм ограничена, мы будем делать вывод, что этот ряд сходится. Если же последовательность частичных сумм неограниченна, такой ряд расходится.

Рассмотрим два признака сравнения знакоположительных рядов.

**Первый признак сравнения (связанный с неравенством).** Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ряд *A*) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (ряд *B*) и для всех *n* выполнено неравенство $a_n \ge b_n \ge 0$. Тогда справедливы два утверждения:

1) если ряд (*A*), составленный из больших членов, сходится, то ряд (*B*) также сходится;

2) если ряд (*B*), составленный из меньших членов, расходится, то ряд (*A*) также расходится.

**Доказательство.** Обозначим через $S_n$ и $\sigma_n$ частичные суммы первого (*A*) и второго (*B*) рядов:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n , \qquad \sigma_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n .$$

Так как $a_n \ge b_n$, то $S_n \ge \sigma_n$ для любых *n*.

1) Если ряд (*A*) сходится, то существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. При этом, поскольку члены ряда неотрицательны, очевидно, что $S_n < S$, а, следовательно, и $\sigma_n < S$. Таким образом, частичные суммы ряда (*B*) ограничены и, следовательно, ряд (*B*) сходится.

2) Пусть ряд (*B*) Расходится. Как было показано выше, его частичные суммы $\sigma_n$ не убывают, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = +\infty$. Но $S_n \ge \sigma_n$, поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд (*A*) расходится.

**Замечание 1.** Теорема остается справедливой и в том случае, когда некоторые члены ряда (*B*) равны нулю.

**Замечание 2.** Если ряд (*B*), составленный из меньших членов, сходится, из этого не следует сходимость ряда (*A*). Ряд (*A*) при этом может как сходиться, так и расходиться. Если ряд (*A*), составленный из больших членов, расходится, из этого не следует расходимость ряда (*B*). Ряд (*B*) при этом может как сходиться, так и расходиться.

**Замечание 3.** Теорема остается справедливой, если неравенство $a_n \ge b_n \ge 0$ выполнено для всех $n \ge n_o \in N$. Это следует из теоремы 3 п.1.2.

**Второй признак сравнения (связанный с пределом).** Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (ряд *A*) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (ряд *B*) и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = C$; где *C* – положительное число, т.е. *C*>0. Тогда, если сходится ряд (*B*), то сходится и ряд (*A*). Если расходится ряд (*B*), то расходится и ряд (*A*). Т.е. ряды (*A*) и (*B*) ведут себя одинаково.

**Доказательство.** Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = C$, то на основании определения предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер *N*, зависящий от $\varepsilon$, такой, что для всех членов ряда, номер которых $n \ge N$, выполняется неравенство $\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \varepsilon$. Раскрыв модуль, получим:

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - C < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon .$$

Умножим все части неравенства на положительное число $b_n$:

$$(C-\varepsilon)\cdot b_n < a_n < (C+\varepsilon)\cdot b_n$$

1) Пусть известно, что ряд (*B*) с элементами $b_n$ сходится. Выберем произвольное положительное $\varepsilon$, найдем соответствующий номер *N*. Тогда по теореме 1 пункта 1.2 ряд с элементами $(C+\varepsilon)\cdot b_n$ также будет сходиться. Но для всех $n \ge N$ выполняется неравенство $a_n < (C+\varepsilon)\cdot b_n$. Т.е. все элементы ряда (*A*) начиная с номера *N*, меньше соответствующих элементов сходящегося ряда с элементами $(C+\varepsilon)\cdot b_n$. По признаку сравнения, связанному с неравенством (см. также замечание 3 к этому признаку), ряд (*A*) сходится.

2) Пусть известно, что ряд ($B$) расходится. Выберем положительное $\varepsilon$ так, чтобы число $C-\varepsilon$ было положительным. Это возможно, так как $C$ – число положительное. Тогда по теореме 1 пункта 1.2. ряд с элементами $(C-\varepsilon)\cdot b_n$ будет расходящимся, оставаясь знакоположительным. Но для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $a_n > (C-\varepsilon)\cdot b_n$, т.е. все элементы ряда ($A$), начиная с номера $N$, больше соответствующих элементов расходящегося ряда с элементами $(C-\varepsilon)\cdot b_n$. По признаку сравнения, связанному с неравенством, ряд ($A$) будет расходящимся.

**Замечание.** Признак сравнения, связанный с пределом, справедлив, в частности, в том случае, когда $a_n$ и $b_n$ эквивалентные последовательности, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. При этом удобно воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых функций.

**Пример 1.9.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$.

**Решение.** Обозначим элементы исходного ряда $a_n=\sin\frac{\pi}{3^n}$. Так как последовательность $\frac{\pi}{3^n}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3^n}=0\right)$, то $a_n=\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\frac{\pi}{3^n}=b_n$ при $n\to\infty$ (напоминаем, что значком ~ обозначаются эквивалентные функции или последовательности). Но ряд с элементами $b_n$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{1}{3}<1$ и, следовательно, сходится. Тогда, на основании признака сравнения, связанного с пределом, исходный ряд с элементами $a_n$ также сходится.

**Пример 1.10.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

**Решение.** Обозначим элементы исходного ряда $a_n=tg\frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Последовательность $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n}}=0\right)$, поэтому $a_n=tg\frac{\pi}{\sqrt{n}}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n}}=b_n$. Но ряд с элементами $b_n$ расходится, так как он отличается только множителем π от элементов расходящегося ряда $\frac{1}{\sqrt{n}}$, рассмотренного в примере 1.5., а умножение всех элементов ряда на одно и то же число не меняет сходимость ряда (теорема 1, п.1.2). Следовательно, на основании признака сравнения, связанного с пределом, исходный ряд с элементами $a_n$ расходится.

Существуют достаточные признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно делать вывод о сходимости или расходимости данного ряда, не сравнивая его с другим рядом, относительно которого известно, сходится он или расходится. На практике такие признаки также часто используются. Рассмотрим три из них.

**Признак Даламбера.** Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$. Тогда при $\rho<1$ ряд сходится, при $\rho>1$ ряд расходится.

**Доказательство.** Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, то на основании определения предела последовательности для любого $\varepsilon>0$ существует номер *N*, зависящий от $\varepsilon$, такой, что для всех членов ряда, номер которых $n\ge N$, выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon$. Раскрыв модуль, получим:

$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho<\varepsilon \qquad \text{или} \qquad \rho-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon .$$

1) Пусть $\rho<1$. Покажем, что в этом случае ряд сходится. Положим $\rho+\varepsilon=q$. Так как по предположению $\rho<1$, можно выбрать $\varepsilon$ такое, чтобы *q* было бы меньше 1, и подобрать *N* такое, что для всех $n\ge N$ выполняются неравенства: $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1$.

Тогда $\frac{a_{N+1}}{a_N}<q$, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q$, $\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<q$, …,

или $a_{N+1}<a_Nq$; $a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq^2$; $a_{N+3}<a_{N+2}q<a_Nq^3$; …

Рассмотрим два ряда:

$$a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots, \tag{1.10}$$

$$a_N+a_Nq+a_Nq^2+a_Nq^3+\ldots \tag{1.11}$$

Ряд (1.11) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$. Члены ряда (1.10) не превосходят членов ряда (1.11), тогда на основании признака сравнения, связанного с неравенством, ряд (1.10) также сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. (см. теорему 3, п.1.2).

2) Пусть $\rho>1$. Покажем, что ряд расходится. Положим $\rho-\varepsilon=q$ и выберем такое $\varepsilon$, чтобы *q* было бы больше 1. Согласно определению предела найдем *N* такое, что при всех $n\ge N$ выполняется неравенство:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1 \text{ или } a_{n+1} > a_n q .$$

Так как $q$>1, то члены ряда возрастают с увеличением номера элемента $n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не может быть равен нулю. По достаточному признаку расходимости ряд расходится.

**Замечание 1.** Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд также расходится, так как и в этом случае $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ для достаточно больших $n$ и, поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

**Замечание 2.** При $\rho = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос сходится ряд или расходится. В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться, как это будет показано ниже на примерах:

**Радикальный признак Коши.** Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$. Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ ряд расходится.

**Доказательство.** Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$, то из определения предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N$, зависящий от ε, такой, что для всех членов ряда, номер которых $n \ge N$, выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - \rho\right| < \varepsilon$. Раскрывая модуль получим:

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - \rho < \varepsilon \quad \text{или} \quad \upsilon - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon .$$

1. Пусть $\rho < 1$. Покажем, что в этом случае ряд сходится. Положим $\rho + \varepsilon = q$. Так как в данном случае $\rho < 1$, можно выбрать $\varepsilon$ такое, чтобы $q$ было бы меньше единицы. Тогда $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ или $a_n < q^n$ для всех $n \ge N$. Но ряд, составленный из элементов $b_n = q^n$ сходится, так как является геометрической прогрессией при 0<q<1. На основании признака сравнения, связанного с неравенством, в этом случае сходится ряд

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + ...$$

Этот ряд является остатком ряда, заданного в условии теоремы. Тогда по теореме 3 п.1.2 сходится и весь ряд.

2. Пусть $\rho > 1$. В этом случае ряд расходится. Действительно, положим $\rho - \varepsilon = q$ и выберем ε такое, чтобы $q$ было больше единицы. Тогда

$$\sqrt[n]{a_n} > q > 1 \text{ и } a_n > q^n > 1.$$

Из этих неравенств следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ не может быть равен нулю и по достаточному признаку расходимости ряд расходится.

**Замечание 1.** Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$, то ряд также расходится, так как и в этом случае $a_n>1$ для достаточно больших *n* и, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\neq 0$.

**Замечание 2.** При $\rho$=1, как и в признаке Даламбера, вопрос о поведении ряда остаётся открытым. Ряд в этом случае может как сходиться, так и расходиться.

**Интегральный признак Коши.** Пусть члены знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.12}$$

являются значениями при $x$=1, 2, 3, …, $n$, … некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной, убывающей на промежутке $[1,+\infty)$, так что $a_n = f(n)$ для любого натурального $n$. Тогда:

1) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1.12);

2) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд (1.12).

**Доказательство.** Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$, с боков прямыми $x$=1 и $x=n$, снизу осью $Ox$. Впишем в эту трапецию и опишем около неё две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями [1;2], [2;3], [3;4],…, [$n$–1; $n$].

Высотами прямоугольников описанной фигуры служат значения функции $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, …, $f(n–1)$, а высотами прямоугольников вписанной фигуры – значения функции $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, …, $f(n)$ (рис.1.1).

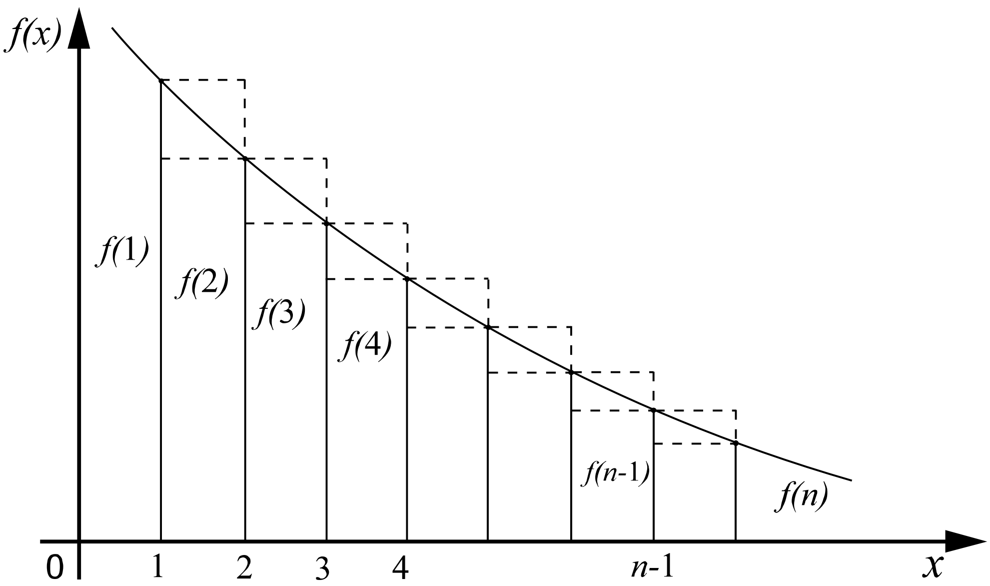


Рис. 1.1.

Площадь вписанной фигуры можно записать

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+f(4)\cdot 1+\ldots+f(n)\cdot 1=a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n=S_n-a_1\ ,$$

в свою очередь площадь описанной фигуры равна:

$$f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\ldots+f(n-1)\cdot 1=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=S_n-a_n,$$

где $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ – частичная сумма ряда (1.12).

Как видно из рисунка, площадь криволинейной трапеции, равная интегралу $\int_1^n f(x)dx$, заключается между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур. Поэтому справедлива система неравенств:

$$S_n-a_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-a_n.$$

Отсюда получаем:

$$S_n<a_1+\int_1^n f(x)dx \tag{1.13}$$

$$S_n>a_n+\int_1^n f(x)dx \tag{1.14}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Это означает, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx = J$. Так как $f(x)>0$, то с возрастанием $n$ интеграл $\int\limits_1^{n} f(x)dx$ возрастает, но ограничен сверху своим пределом:

$$\int\limits_1^{n} f(x)dx < J$$

Тогда из неравенства (1.13) следует, что $S_n < a_1 + J$. Следовательно, возрастающая последовательность частичных сумм ограничена сверху и, поэтому, имеет предел, т.е. ряд (1.12) сходится.

2) Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Так как $f(x)$ положительная функция, то последовательность $\int\limits_1^{n} f(x)dx$ возрастает, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx = +\infty$. Из неравенства (1.14) в этом случае следует, то предел частичной суммы $S_n$ при $n\to\infty$ так же равен $+\infty$, т.е. ряд (1.12) расходится.

**Пример 1.22.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p>0$.

**Решение.** Для исследования ряда используем интегральный признак сходимости. Рассмотрим в качестве $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^p}$ $(x\ge 1)$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, так как она положительна и монотонно убывает на $[1, +\infty)$. Члены ряда равны значениям этой функции при $x=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ . Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$. Из курса интегрального исчисления известно (см. ), что этот интеграл сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. Следовательно, на основании интегрального признака Коши рассматриваемый ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

**Замечание.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ называется *гармоническим рядом.* Он является частным случаем ряда (1.15) при $p=1$ и, как показано выше, расходится. Ряд (1.15) в общем виде называют *обобщенным гармоническим рядом.*

Обобщенный гармонический ряд часто используется при исследовании рядов с помощью признаков сравнения. При этом удобно использовать следующее свойство многочленов: многочлен $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$ при $x\to+\infty$ эквивалентен своему слагаемому $a_0x^m$, т.е. $P_m(x)\sim a_0x^m$. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{a_0x^m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{a_0x^m}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{a_0}\cdot\frac{1}{x^m}\right)=1.$$

Аналогично показывается, что алгебраическая сумма степенных функций с различными положительными степенями эквивалентна при $x\to+\infty$ своему слагаемому, в котором степень наибольшая. Например, при $x\to+\infty$

$$3\sqrt{x}-4x\sqrt[3]{x}+5x^2\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}=3x^{1/2}-4x^{4/3}+5x^{5/2}-7x^{3/4}\sim 5x^2\sqrt{x}$$

**Пример 1.23.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n-1}{6n^4+3n^2+7}$.

**Решение.** В нашем случае $a_n=\frac{3n^2+5n-1}{6n^4+3n^2+7}$. Воспользуемся признаком сравнения, связанным с пределом. Согласно приведенному выше свойству многочленов, числитель рассматриваемой дроби $3n^2+5n-1$ при $n\to\infty$ эквивалентен слагаемому $3n^2$, знаменатель дроби $6n^4+3n^2+7$ при этом эквивалентен слагаемому $6n^4$, тогда

$$a_n=\frac{3n^2+5n-1}{6n^4+3n^2+7}\sim\frac{3n^2}{6n^4}=\frac{1}{2n^2}=b_n.$$

Ряд из $b_n$ отличается от обобщенного гармонического при $p=2>1$ только множителем $\frac{1}{2}$ и поэтому сходится. Следовательно, ряд из $a_n$ сходится по признаку сравнения, связанному с пределом.

**Пример 1.24.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2\sqrt[3]{n}+5n\sqrt[4]{n^3}+2n\sqrt{n}+9}{4n^3+3n^2\sqrt{n}+7n\sqrt[5]{n}+2}$.

**Решение.** Запишем общий член ряда

$a_n=\frac{3n^2\sqrt[3]{n}+5n\sqrt[4]{n^3}+2n\sqrt{n}+9}{4n^3+3n^2\sqrt{n}+7n\sqrt[5]{n}+2}=\frac{3n^{2\frac{1}{3}}+5n^{1\frac{3}{4}}+2n^{1\frac{1}{2}}+9}{4n^3+3n^{2\frac{1}{2}}+7n^{1\frac{1}{5}}+2}$. Согласно свойству алгебраической суммы степенных функций числитель рассматриваемой дроби при $n\to\infty$ эквивалентен слагаемому с наибольшей степенью, т.е. $3n^{2\frac{1}{3}}$, а знаменатель – слагаемому $4n^3$, тогда

$$a_n=\frac{3n^{2\frac{1}{3}}+5n^{1\frac{3}{4}}+2n^{1\frac{1}{2}}+9}{4n^3+3n^{2\frac{1}{2}}+7n^{1\frac{1}{5}}+2}\sim\frac{3n^{2\frac{1}{3}}}{4n^3}=\frac{3}{4n^{2/3}}=b_n.$$

Ряд из $b_n$ отличается от обобщенного гармонического при $p = \frac{2}{3} < 1$ только множителем $\frac{3}{4}$ и поэтому расходится. Следовательно, ряд из $a_n$ расходится по признаку сравнения, связанному с пределом.

**Пример 1.25.** Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\sin n}{n\sqrt{n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\sin n}{\sqrt[3]{n}}$.

**Решение.** Числителем общего члена каждого из рядов является выражение, удовлетворяющее системе неравенств $2 \le 5+3\sin n \le 8$, так как $-1 \le \sin n \le 1$.

а) Общий член ряда $a_n = \frac{5+3\sin n}{n\sqrt{n}}$. Если бы в числителе дроби было число, то ряд бы сходился, так как отличался бы только числовым множителем от обобщенного гармонического ряда при $p = \frac{3}{2} > 1$. Укажем сходящийся ряд из $b_n$, удовлетворяющий условно $a_n \le b_n$. В нашем случае

$$a_n = \frac{5+3\sin n}{n\sqrt{n}} \le \frac{8}{n\sqrt{n}} = b_n.$$

Ряд из $b_n$ сходится, следовательно, по признаку сравнения, связанному с неравенством, ряд из $a_n$ тоже сходится.

б) общий член ряда $a_n = \frac{5+3\sin n}{\sqrt[3]{n}}$. Если бы числителем дроби было число, то ряд бы расходился, так как отличался бы только числовым множителем от обобщенного ряда при $p = \frac{1}{3} < 1$. Укажем расходящийся ряд из $b_n$, удовлетворяющий условию $a_n \ge b_n$. В данном случае

$$a_n = \frac{5+3\sin n}{\sqrt[3]{n}} \ge \frac{2}{\sqrt[3]{n}} = b_n.$$

Ряд из $b_n$ расходится, следовательно, по признаку сравнения, связанному с неравенством, ряд из $a_n$ тоже расходится.

**Пример 1.26.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

**Решение.** Воспользуемся интегральным признаком сходимости. В качестве $f(x)$ рассмотрим функцию $\frac{1}{x\ln x}$, которая удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, так как она положительна и монотонно убывает на промежутке $[2;+\infty)$. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = n, \quad n \geq 2$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \lim_{b\to+\infty} \ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b\to+\infty} (\ln\ln b - \ln\ln 2) = +\infty .$$

Т.е. несобственный интеграл расходится. Согласно интегральному признаку Коши рассматриваемый ряд также расходится.

**Пример 1.27.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(3n^2+5n+7)\ln^2(n+6)}$.

**Решение.** Общий член ряда $a_n = \frac{2n+3}{(3n^2+5n+7)\ln^2(n+6)}$. Согласно свойству многочленов, заменим множители числителя и знаменателя на эквивалентные последовательности при $n \to \infty$:

$$2n+3 \sim 2n; \quad 3n^2+5n+7 \sim 3n^2; \quad n+6 \sim n,$$

тогда

$$a_n = \frac{2n+3}{(3n^2+5n+7)\ln^2(n+6)} \sim \frac{2n}{3n^2\ln^2 n} = \frac{2}{3}\frac{1}{n\ln^2 n} = b_n .$$

Исследуем на сходимость ряд с элементами $c_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$. Воспользуемся интегральным признаком сходимости Коши. В качестве $f(x)$ используем функцию $\frac{1}{x\ln^2 x}$, которая положительна и монотонно убывает на промежутке $[2;+\infty)$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{e^2} = \lim_{b\to+\infty} (-\frac{1}{t}) \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b\to+\infty} (-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}) = \frac{1}{\ln 2} .$$

Так как предел равен конечному числу, то несобственный интеграл сходится, а значит по интегральному признаку Коши сходится ряд из $c_n$. Тогда ряд из $b_n$ также сходится, так как отличается от ряда из $c_n$ числовым множителем. И, наконец, ряд из $a_n$ сходится по признаку сравнения, связанному с пределом.

**Пример 1.28.** Исследовать сходимость и найти сумму числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+24}{n(n+3)(n+4)}$.

**Решение.** а) Исследуем сходимость ряда:

$$a_n=\frac{6}{9n^2+6n-8}\sim\frac{6}{9n^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}=b_n,\quad n\to\infty.$$

Ряд с общим членом $b_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд при $p=2>1$, значит и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ сходится по признаку сравнения, связанному с пределом.

Для вычисления суммы ряда преобразуем $a_n$ в сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n=\frac{6}{9n^2+6n-8}=\frac{6}{(3n+4)(3n-2)}=\frac{A}{3n+4}+\frac{B}{3n-2}=\frac{A(3n-2)+B(3n+4)}{(3n+4)(3n-2)} \Rightarrow$$

$$A(3n-2)+B(3n+4)=6 \iff \quad 3(A+B)n+(4B-2A) \iff$$

$$\begin{cases}A+B=0\\4B-2A=6\end{cases} \iff \begin{cases}A=-B\\6B=6\end{cases} \iff \begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases} \Rightarrow \quad a_n=\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+4}.$$

Поэтому:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=$$

$$=\left(\frac{1}{3\cdot1-2}-\frac{1}{3\cdot1+4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot2-2}-\frac{1}{3\cdot2+4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot3-2}-\frac{1}{3\cdot3+4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4-2}-\frac{1}{3\cdot4+4}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{3\cdot(n-2)-2}-\frac{1}{3\cdot(n-2)+4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot(n-1)-2}-\frac{1}{3\cdot(n-1)+4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot n-2}-\frac{1}{3\cdot n+4}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-8}-\frac{1}{3n-2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}.$$

Сумма ряда $S$ по определению равна:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}\right)=1\frac{1}{4}-0=1{,}25.$$

Ответ: Ряд сходится, его сумма $S$ = 1,25.

б) Исследуем сходимость ряда:

$$a_n=\frac{9n+24}{n(n+3)(n+4)}\sim\frac{9n}{n^3}=9\cdot\frac{1}{n^2}=b_n.$$

Ряд с общим членом $b_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд при $p=2>1$, следовательно, ряд с общим членом $a_n$ сходится по признаку сравнения, связанному с пределом.

Преобразуем $a_n$ в сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{9n+24}{n(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} + \frac{C}{n+4}.$$

Приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители полученных дробей, так как знаменатели у них одинаковые:

$$9n+24 = A(n+3)(n+4) + Bn(n+4) + Cn(n+3).$$

Полученное равенство должно выполнять тождественно, т.е. оно должно быть справедливо не только для любого натурального *n*, но и для любого действительного переменного. Подставив в это равенство корни знаменателя исходной дроби, получим значения коэффициентов *A, B, C*:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 = 12A \quad \Rightarrow \quad A = 2;$$

$$n = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = -3B \quad \Rightarrow \quad B = 1;$$

$$n = -4 \quad \Rightarrow \quad -12 = 4C \quad \Rightarrow \quad C = -3;$$

Таким образом $\quad a_n = \dfrac{9n+24}{n(n+3)(n+4)} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{3}{n+4}.$

Запишем частичную сумму ряда:

$$S_n = \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}\right) +$$

$$+\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{3}{n}\right) + \left(\frac{2}{n-3} + \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1}\right) +$$

$$+\left(\frac{2}{n-2} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right) + \left(\frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{n+3}\right) + \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n+3} - \frac{3}{n+4}\right).$$

Нетрудно заметить, что дроби со знаменателями 5; 6; 7; …; *n* взаимно сокращаются. После сокращения в выражении $S_n$ остаются только дроби со знаменателями меньше 5 и больше *n*:

$$S_n = \frac{2}{1} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{n+3} + \frac{1}{n+3} - \frac{3}{n+4} =$$

$$= 4\frac{5}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} - \frac{3}{n+4}.$$

Сумма ряда $S$ в этом случае равна:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(4\frac{5}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} - \frac{3}{n+4}\right) = 4\frac{5}{12} \approx 4{,}417.$$

Ответ: ряд сходится, его сумма равна $4\dfrac{5}{12} \approx 4{,}417$.

**Пример 1.29.** Исследовать сходимость и найти сумму числового ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n+2}-2\cdot 5^{n+1}}{10^n}.$$

**Решение.** Общий член нашего ряда $a_n$ равен разности членов убывающих геометрических прогрессий:

$$a_n = 3\cdot 2^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^n - 2\cdot 5\cdot\left(\frac{5}{10}\right)^n = 6\cdot(0{,}2)^n - 10\cdot(0{,}5)^n,$$

т.е. $a_n = 6\cdot q_1^n - 10\cdot q_2^n$, ăäĺ $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}5$; $q_1, q_2 < 1$. Следовательно, по линейным свойствам сходящихся рядов ряд $\sum a_n$ сходится.

Сумму ряда $S$ находим как разность сумм геометрических прогрессий:

$$S = \frac{6}{1-q_1} - \frac{10}{1-q_2} = \frac{6}{1-0{,}2} - \frac{10}{1-0{,}5} = \frac{6}{0{,}8} - \frac{10}{0{,}5} = 7{,}5 - 20 = -12{,}5\,.$$

Ответ: Ряд сходится, его сумма $S = -12{,}5$.

## 1.5. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ.

До сих пор мы рассматривали только ряды, все члены которых положительны. Если все члены ряда – отрицательные числа, то такой ряд получается умножением всех членов знакоположительного ряда на (–1), что не изменяет сходимости ряда (теорема 1, п.1.2). Поэтому, для исследования такого ряда достаточно исследовать соответствующий знакоположительный ряд.

Теперь перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные слагаемые. Такие ряды называются *знакопеременными*. Изучение таких рядов начнем с частного случая *знакочередующихся* рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный. В качестве примера знакочередующегося ряда приведем ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \qquad (1.16)$$

Для удобства будем считать, что первый член знакочередующегося ряда положителен. Такой ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\,, \qquad (1.17)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – положительные числа. Исследование знакочередующегося ряда с отрицательным первым членом сводится к исследованию ряда (1.17) умножением всех его членов на –1.

Знакочередующиеся ряды удобно исследовать с помощью *достаточного* признака сходимости Лейбница.

**Признак Лейбница.** Если в знакочередующемся ряде (1.17) абсолютные величины членов не возрастают: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge ... \ge a_n \ge ...$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

**Доказательство.** Рассмотрим частичную сумму ряда с четным числом членов

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2m-1} - a_{2m}.$$

Сгруппируем слагаемые попарно:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Все разности в скобках неотрицательны, так как по условию абсолютные величины членов ряда не возрастают. Поэтому сумма $S_{2m}$ неотрицательна и при увеличении $m$ не убывает.

Запишем $S_{2m}$, группируя слагаемые иным способом:

$$S_{2m} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}).$$

Сумма в больших скобках также неотрицательна. Поэтому $S_{2m} \le a_1$, для любого $m$, т.е. является неубывающей последовательностью, ограниченной сверху и, следовательно, (по аксиоме Вейерштрасса) имеет неотрицательный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. При этом, так как $0 \le S_{2m} \le a_1$, то из свойств пределов следует, что $0 \le S \le a_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечетного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

Найдем предел $S_{2m+1}$.

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$.

Мы показали, что частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел $S$. Из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд сходится. При этом сумма ряда $S$ не превосходит первого члена ряда $a_1$.

**Следствие.** Из доказанного выше следует, что для произвольного знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница, выполняется оценка: $|S| \le |a_1|$.

**Пример 1.30.** Исследовать на сходимость ряд (1.16).

**Решение.** Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;

Следовательно, ряд сходится.

Перейдем к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда, в котором положительные и отрицательные слагаемые следуют в произвольном порядке. Для таких рядов справедлив признак абсолютной сходимости.

**Признак абсолютной сходимости.** Если для знакопеременного ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1.18}$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \tag{1.19}$$

то заданный ряд (1.18) также сходится.

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (1.18) и (1.19):

$$\frac{a_1+|a_1|}{2}+\frac{a_2+|a_2|}{2}+\ldots+\frac{a_n+|a_n|}{2}+\ldots \tag{1.20}$$

Слагаемые этого ряда

– при $a_n>0$ $|a_n|=a_n$ и $\frac{a_n+|a_n|}{2}=|a_n|$;

– при $a_n<0$ $|a_n|=-a_n$ и $\frac{a_n+|a_n|}{2}=0$.

Как мы видим, слагаемые ряда (1.20) неотрицательны и либо равны слагаемым сходящегося ряда (1.19), либо меньше их. Поэтому ряд (1.20) сходится на основании признака сравнения, связанного с неравенством.

Умножив все члены сходящегося ряда (1.19) на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд (см. теорему 1 п. 1.2):

$$\frac{|a_1|}{2}+\frac{|a_2|}{2}+\ldots+\frac{|a_n|}{2}+\ldots. \tag{1.21}$$

Построим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (1.20) и (1.21):

$$\left(\frac{a_1+|a_1|}{2}-\frac{|a_1|}{2}\right)+\left(\frac{a_2+|a_2|}{2}-\frac{|a_2|}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}\right)+\ldots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п.1.2. Но ряд (1.18) получается из записанного ряда умножением всех его слагаемых на 2:

$$2\left(\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}\right)=2\frac{a_n}{2}=a_n.$$

Следовательно, на основании теоремы 1 п. 1.2 исходный ряд (1.18) также сходится.

**Пример 1.31.** Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\ldots$$

**Решение.** Ряд является знакопеременным. Воспользуемся признаком абсолютной сходимости. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$. Следовательно, на основании признака абсолютной сходимости данный ряд сходится.

**Пример 1.32.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$.

**Решение.** Ряд является знакопеременным, так как выражение $\sin n$ может принимать как положительное, так и отрицательное значения. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда

$$a_n=\frac{\sin n}{n\sqrt{n}};\quad |a_n|=\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}.$$

Мы получили знакоположительный ряд, для слагаемых которого справедливы неравенства:

$$|a_n|=\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}\le\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}=b_n.$$

Ряд из $b_n$ сходится как обобщенный гармонический с показателем $p={}^3\!/_2>1$. Тогда ряд из $|a_n|$ сходится по признаку абсолютной сходимости.

Признак абсолютной сходимости является достаточным, но не необходимым. Это означает, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их слагаемых, расходятся. Ряд (1.16) как раз такого типа. Он сходится на основании признака Лейбница (пример 1.30). Между тем ряд, составленный из абсолютных его величин, является гармоническим и, следовательно, расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Абсолютно сходящимися являются ряды, рассмотренные в примерах 1.31 и 1.32.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Ряд (1.16) является условно сходящимся.

Следует заметить, что деление сходящихся знакопеременных рядов на абсолютно и условно сходящиеся весьма существенно. Абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды. Это свойство, которое мы приведем без доказательства, формулируется следующим образом.

**Теорема.** Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.

В условно сходящихся рядах нельзя переставлять члены. Можно показать, что в случае их перестановки может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд. Заметим, что когда говорят о перестановке членов, подразумевают, что меняются местами бесконечное множество членов. При перестановке конечного числа членов сумма ряда не изменится.

**Пример 1.31.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(2n+1)3^{2n-1}};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+5}{4n+7}\right)^n;\qquad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n+1}{(4n^2+3)\sqrt{n}}.$$

**Решение.** *а*) Общий член ряда $a_n=\dfrac{(-1)^n n^2}{(2n+1)3^{2n-1}}$. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда.

$$|a_n|=\frac{n^2}{(2n+1)3^{2n-1}}$$

Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|a_{n+1}|=\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)+1)3^{2(n+1)-1}}=\frac{(n+1)^2}{(2n+3)3^{2n+1}}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n+1)3^{2n-1}}{(2n+3)3^{2(n+1)}n^2}=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{2+1/n}{2+3/n}=\frac{1}{9}<1$$

Ряд составленный из модулей $|a_n|$ сходится по признаку Даламбера. Исходный ряд сходится по признаку абсолютной сходимости и является *абсолютно сходящимся.*

*б*) В нашем случае $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{3n+5}{4n+7}\right)^n$. Ряд, составленный из модулей членов данного ряда имеет общий член $|a_n| = \left(\dfrac{3n+5}{4n+7}\right)^n$. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+5}{4n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+5/n}{4+7/n} = \dfrac{3}{4} < 1$.

Ряд, составленный из модулей $|a_n|$, сходится по радикальному признаку Коши. Исходный ряд сходится по признаку абсолютной сходимости и является *абсолютно сходящимся.*

*в*) составим ряд из модулей элементов данного ряда $|a_n| = \dfrac{5n+1}{(4n^2+3)\sqrt{n}}$. Воспользуемся признаком сравнения, связанным с пределом.

$$|a_n| = \frac{5n+1}{(4n^2+3)\sqrt{n}} \sim \frac{5n}{4n^2\sqrt{n}} = \frac{5}{4}\frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Ряд из $b_n$ с точностью до коэффициента является обобщенным гармоническим с показателем степени $p = \dfrac{3}{2} > 1$ и, поэтому, сходится. Ряд из $|a_n|$ сходится по признаку сходимости, связанному с пределом. Ряд из $a_n$ сходится по признаку абсолютной сходимости и является *абсолютно сходящимся.*

**Пример 1.34.** Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1)^2}; \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}.$$

**Решение.** *а*) рассмотрим ряд из модулей членов данного ряда $|a_n| = \dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$.

Воспользуемся признаком сравнения, связанным с пределом.

$$|a_n| = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \sim \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} = b_n.$$

Ряд из $b_n$ с точностью до коэффициента является гармоническим и, следовательно, расходится. Поэтому ряд из $|a_n|$ по признаку сходимости, связанному с пределом, расходится. В этом случае о поведении ряда из $|a_n|$ ничего сказать нельзя. Применим к этому ряду признак Лейбница.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Покажем, что члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине. Найдем разность

$$|a_n|-|a_{n+1}|=\frac{2n+1}{(n+1)^2}-\frac{2n+3}{(n+2)^2}=\frac{(2n+1)(n+2)^2-(2n+3)(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{2n^2+4n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}>0 \quad \text{äë˙}\ \forall n\geq 0.$$

Мы получили, $|a_n|-|a_{n+1}|>0 \quad => \quad |a_n|>|a_{n+1}|;$ т.е. $|a_n|$ убывают. Следовательно, ряд из $|a_n|$ сходится по признаку Лейбница и является *условно сходящимся.*

*б*) Составим ряд из модулей членов данного ряда: $|a_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Логарифмическая функция $f(x)=\ln(x+1)$ растет медленнее линейной $g(x)=x+1$, поэтому $\ln(n+1)<n+1$, откуда

$$|a_n|=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}.$$

Но мы знаем, что гармонический ряд расходится. Тогда по признаку сравнения, связанному с неравенством, ряд из $|a_n|$ тоже расходится.

Для исследования заданного в условии ряда воспользуемся признаком Лейбница. Так как логарифмическая функция $\ln(n+1)$ монотонно возрастает, то функция $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ монотонно убывает. Значит член ряда по абсолютной величине $|a_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ монотонно убывает. Кроме того $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0$.

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница и является *условно сходящимся.*

**Пример 1.35.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^2-2}{4n^2+5}$$

**Решение.** Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Найдем предел $|a_n|$ при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-{}^{2}\!/_{n^2}}{4+{}^{5}\!/_{n^2}}=\frac{3}{4}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\dfrac{3}{4}\neq 0$, то ряд из $|a_n|$ расходится по достаточному признаку расходимости. Но в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует и, следовательно, не равен нулю. Окончательно получаем, что ряд из $a_n$ *расходится* по достаточному признаку расходимости.

**Пример 1.36.** Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$ŕ)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n}};\quad á)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}.$$

**Решение.** *а*) К ряду, составленному из модулей членов заданного ряда, применим признак сравнения, связанный с неравенством:

$$|a_n|=\frac{\operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n}}<\frac{\pi/2}{n^{3/2}}=b_n$$

Мы воспользовались свойством $\operatorname{arctg} x<\dfrac{\pi}{2}$ для $\forall x$. Ряд из $b_n$ с точностью до числового коэффициента является обобщенным гармоническим с показателем степени $p=\dfrac{3}{2}>1$ и, следовательно, сходится. Тогда ряд из $|a_n|$ сходится по признаку сравнения, связному с неравенством. Ряд из $a_n$ сходится по признаку абсолютной сходимости и является *абсолютно сходящимся.*

*б*) К ряду, составленному из модулей $|a_n|$ применим признак сравнения, связанный с неравенством:

$$|a_n|=\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}\geq\frac{\pi/4}{\sqrt{n}}=b_n\,.$$

Мы воспользовались тем, что $arctg\,1=\dfrac{\pi}{4}$ и $arctg\ x$ является возрастающей функцией. Ряд из $b_n$ с точностью до числового множителя является гармоническим и, следовательно, расходится. Тогда ряд из $|a_n|$ расходится по признаку сравнения, связанному с неравенством. Для исследования ряда из $a_n$ воспользуемся признаком Лейбница

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}=0\,,$$

как произведение ограниченной последовательности *arctg n* на бесконечно малую $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Далее нужно показать, что последовательность $|a_n|=\dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$ является невозрастающей. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$, которая при натуральном $x$ совпадает с нашей последовательностью. Найдем производную функции $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}-\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x-\operatorname{arctg} x(1+x^2)}{2x(1+x^2)\sqrt{x}}=-\frac{\operatorname{arctg} x(1+x^2)-2x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Покажем, что производная отрицательна при всех $x\geq 2$. Действительно, $1+x^2\geq 2x$ при всех $x$, т.к. $1+x^2-2x=(1-x)^2\geq 0$. При этом $\operatorname{arctg} x>1$ при $x\geq 2$. Это следует из того, что $\operatorname{arctg} x>\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}>1$. В числителе дроби выражение $1+x^2$ умножается на $\operatorname{arctg} x$, который больше 1 и в результате $\operatorname{arctg} x(1+x^2)>2x, \quad \operatorname{arctg} x(1+x^2)-2x>0 \quad \forall x\geq 2.$

Дробь положительна, но перед ней минус, следовательно, $f'(x)$ отрицательна, функция $f(x)$ убывает, и последовательность $\dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$ убывающая при $\forall n\geq 2$. Ряд из $a_n$ сходится по признаку Лейбница и является *условно сходящимся.*

**Пример 1.37.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{3n-1}$.

**Решение.** Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|a_n|=\frac{2^n}{3n-1}; \quad |a_{n+1}|=\frac{2^{n+1}}{3n+2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(3n-1)}{(3n+2)2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{3n+2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n}{3+2/n}=2>1.$$

Ряд из $|a_n|$ расходится по признаку Даламбера. Как уже говорилось выше, делать вывод о поведении ряда из $a_n$ мы пока не можем.

Из свойств пределов следует, что, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, то начиная с некоторого номера $N$ для всех $n\geq N$ будет выполняться неравенство $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, т.е. $|a_{n+1}|>|a_n|$. Следовательно, $|a_n|$ является возрастающей последовательностью и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ не может быть равен нулю. Но в этом случае и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ не может быть равен нулю. И по достаточному признаку расходимости ряд из $a_n$ *расходится.*