ЛЕКЦИЯ 6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.

1. Основные понятия.

На практике часто встречаются задачи, в которых необходимо проверить предположение (гипотезу) о тех или иных свойствах распределения генеральной совокупности, имея в распоряжении случайную выборку (результаты экспериментов). Задачи такого типа возникают при сравнении параметров различных технологических процессов или характеристик материалов.

Пусть X – наблюдаемая случайная величина. *Статистической гипотезой* H называется предположение относительно параметров или вида распределения случайной величины X. Статистическая гипотеза называется *простой*, если она однозначно определяет распределение случайной величины X, в противном случае она называется *сложной*. Например, предположение о том, что случайная величина X распределена по нормальному закону с известными параметрами a, σ, является простой гипотезой. Если же высказывается предположение о том, что случайная величина X имеет нормальное распределение $N(a;\ \sigma)$, где $a \in (\alpha;\beta)$, то это сложная гипотеза. Если вид распределения случайной величины X известен, но не все его параметры известны, то гипотеза о значении этих параметров называется *параметрической*.

Проверяемая гипотеза называется *нуль-гипотезой* и обозначается H_0. При постановки нуль-гипотезы сразу ставится *альтернативная гипотеза* H_1, то есть то предположение, которое следует принять, если нуль-гипотеза будет отвергнута. Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра β заданному значению β_0, то есть H_0: $\beta = \beta_0$, то в качестве альтернативной гипотезы можно рассматривать одну из следующих гипотез: $H_1^{(1)}$: $\beta < \beta_0$; $H_1^{(2)}$: $\beta > \beta_0$; $H_1^{(3)}$: $\beta \neq \beta_0$; $H_1^{(4)}$: $\beta = \beta_1$, где β_1– заданное значение $\beta_1 \neq \beta_0$. Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной задачей.

Правило, позволяющее принять или отвергнуть гипотезу H_0 в соответствии с данными эксперимента, называется *критерием*. Рассматривается *функция критерия* – некоторая функция результатов эксперимента $Q(X_1, X_2, ..., X_n)$, *распределение которой вполне определено при условии истинности гипотезы* H_0.

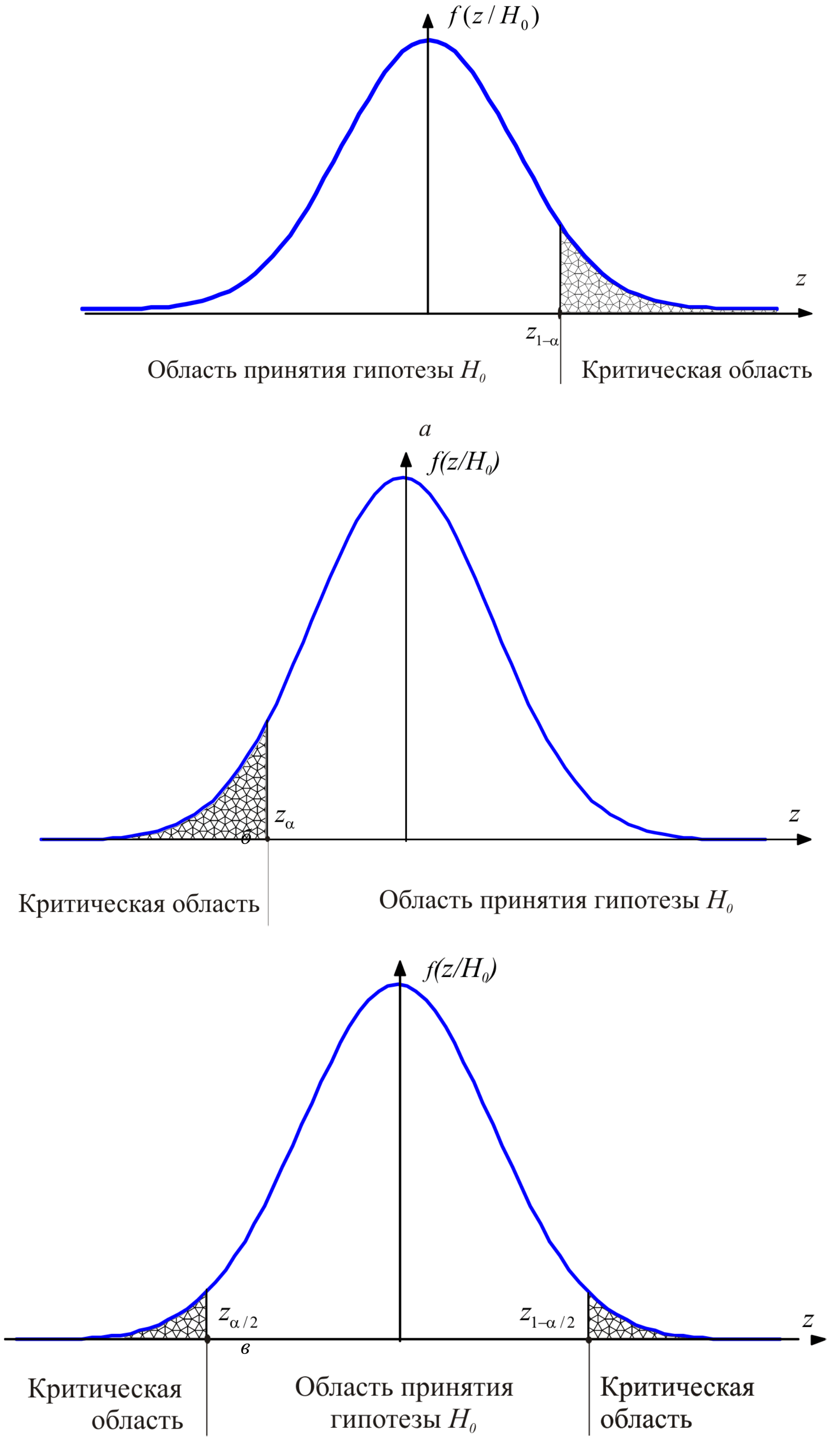

Рис. 1.4. Расположение области принятия гипотезы H_0 и критической области в случае правостороннего критерия (*а*), левостороннего критерия (*б*), двустороннего критерия (*в*)

Проверка статистической гипотезы основывается на принципе, в соответствии с которым события с малой вероятностью считаются невозможными, а события с большой вероятностью – достоверными. Для этого фиксируется некоторая малая вероятность α, называемая *уровнем значимости*. Пусть V – множество значений функции критерия Q. Определяется *критическая область* $V_{кр}$ – подмножество множества V, в которое функция Q попадает с вероятностью α, и соответствует значениям функции Q, при которых альтернативная гипотеза выполняется наиболее явно. Множество значений V, не принадлежащих критической области, называется *областью принятия* гипотезы H_0 и обозначается $V_{пр}$.

Проверку статистической гипотезы проводят следующим образом. По заданной выборке вычисляют значение функции Q и рассматривают два случая:

– если вычисленное значение функции Q не принадлежит критической области, гипотеза H_0 принимается;

– если вычисленное значение функции Q принадлежит критической области, гипотеза H_0 отвергается, то есть принимается гипотеза H_1.

Положение критической области на множестве значений функции критерия Q зависит от формулировки альтернативной гипотезы H_1.

Пусть проверяется параметрическая гипотеза H_0: $\beta = \beta_0$; $f(x)$ – плотность распределения функции критерия Q при условии, что верна гипотеза H_0, q_p – квантиль распределения функции Q.

Возможны различные варианты формулировки альтернативной гипотезы H_1:

1. H_1: $\beta < \beta_0$. Критическая область размещается в левом «хвосте» распределения функции Q, то есть удовлетворяет неравенству $Q < q_\alpha$ (рис. 1.4a).

2. H_1: $\beta > \beta_0$. Критическая область размещается в правом «хвосте» распределения функции Q, то есть удовлетворяет неравенству $Q > q_{1-\alpha}$ (рис. 1.4b).

3. H_1: $\beta \neq \beta_0$. Критическая область размещается в обоих «хвостах» распределения функции Q, то есть удовлетворяет совокупности неравенств $Q < q_{\alpha/2}$ и $Q > q_{1-\alpha/2}$ (рис. 1.4c).

В первых двух вариантах критерий называется *односторонним*, соответственно левосторонним и правосторонним. В случае третьего варианта критерий называется *двусторонним*.

Результат проверки статистической гипотезы может быть ошибочен. При этом различают ошибки первого и второго рода. Если гипотеза отвергается, в то время как она верна, совершается *ошибка первого рода*. Вероятность ошибки первого рода равна вероятности попадания функции Q в критическую область при условии, что верна гипотеза

H_0, то есть равна уровню значимости α. Если же гипотеза H_0 принимается, а в действительности верна гипотеза H_1, то совершается *ошибка второго рода*. Вероятность ошибки второго рода, как правило, не известна, но известно, что при уменьшении ошибки первого рода α, ошибка второго рода, как правило, возрастает.

2. Проверка гипотез о дисперсии нормального распределения.

Пусть задана выборка X_1, X_2, ..., X_n из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Значение дисперсии неизвестно. Проверим *гипотезу о равенстве дисперсии заданному числу:* H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 – некоторое заданное число). Математическое ожидание неизвестно.

Гипотезу проверяют с помощью функции критерия

$$Z = k\, S^2 / \sigma_0^2, \tag{1.27}$$

которая имеет χ^2- распределение с числом степеней свободы k, то есть $Z = \chi^2(k)$. S^2 – несмещенная оценка дисперсии σ^2 (1.5); $k = n-1$ – число степеней свободы оценки S^2. Рассмотрим проверку нуль-гипотезы при трех различных альтернативных гипотезах H_1.

1. H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Критерий двусторонний. H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$\chi^2_{\alpha/2}(k) < Z < \chi^2_{1-\alpha/2}(k), \tag{1.28}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

2. H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$. Критерий односторонний (левосторонний). H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$Z > \chi^2_{\alpha}(k) \tag{1.29}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

3. H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. Критерий односторонний (правосторонний). H_0-гипотезу принимают при выполнении неравенства:

$$Z < \chi^2_{1-\alpha}(k) \tag{1.30}$$

в противном случае гипотезу отвергают.

Замечание. Если проверку гипотезы H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ проводят при известном математическом ожидании, то вместо (1.27) используют функцию критерия

$$Z = n\, S_0^2 / \sigma_0^2, \tag{1.31}$$

где S_0^2 – оценка дисперсии σ^2 (1.4) при известном математическом ожидании; n – объем выборки. Гипотезу проверяют полностью аналогично алгоритму, описанному выше, только в формулах (1.28) – (1.30) число степеней свободы k заменяют на объем выборки n.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, $X_i^{(1)} \sim N(a_1;\ \sigma_1)$, вторая – n_2, $X_i^{(2)} \sim N(a_2;\ \sigma_2)$. Проверить *гипотезу о равенстве дисперсий* этих двух генеральных совокупностей, то есть H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

В этом случае по каждой выборке находят несмещенные оценки дисперсий S_1^2 и S_2^2 с числами степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ соответственно. Гипотезу проверяют по критерию Фишера, функция критерия

$$F = S_1^2 \big/ S_2^2 \qquad (1.32)$$

имеет F-распределения Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы, то есть $F = F(k_1, k_2)$. Рассмотрим проверку нуль-гипотезы, как и в предыдущей задаче, при трех различных альтернативных гипотезах H_1.

1. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. В этом случае критерий Фишера рассчитывают, как отношение большей по величине оценки дисперсии к меньшей:

$$F = S_{\textit{большая}}^2 \big/ S_{\textit{меньшая}}^2 > 1 \qquad (1.33)$$

Критерий двусторонний. Гипотезу H_0 принимают при выполнении неравенства:

$$F < F_{1-\alpha/2}(k_{S_{\textit{бол}}}, k_{S_{\textit{мен}}}) \qquad (1.34)$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается. Здесь $k_{S_{\textit{бол}}}$ – число степеней свободы большей оценки дисперсии; $k_{S_{\textit{мен}}}$ – число степеней свободы меньшей оценки дисперсии.

2. H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Критерий Фишера равен $F = S_1^2 \big/ S_2^2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотезу H_0 принимают при выполнении неравенства:

$$F < F_{1-\alpha}(k_1, k_2) \qquad (1.35)$$

в противном случае гипотезу H_0 отвергают.

3. H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$. В этом случае следует поменять нумерацию выборок и, соответственно, оценок дисперсии S_1^2 и S_2^2 и осуществить проверку, как указано в пункте 2.

Замечание. Если проверку гипотезы о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проводят при известных математических ожиданиях, то вместо (1.32) используют функцию критерия

$$F = S_{01}^2 / S_{02}^2, \tag{1.36}$$

где S_{01}^2 и S_{02}^2 – оценки дисперсии σ^2 (1.4) при известном математическом ожидании. В этом случае критерий Фишера имеет F-распределение Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы, то есть $F = F(n_1, n_2)$. Гипотезу проверяют полностью аналогично алгоритму, описанному выше, только в формулах (1.33) – (1.35) числа степеней свободы κ_1 и κ_2 заменяют на объемы выборок n_1 и n_2.

Пусть заданы $n > 2$ независимых выборок из n нормальных генеральных совокупностей (n серий экспериментов). Для проверки гипотезы H_0 об однородности дисперсий: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ можно воспользоваться критерием Кохрена G. В случае равенства чисел степеней свободы $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ (= k) несмещенных оценок дисперсий $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_n^2$ рассматривается отношение наибольшей из этих дисперсий $S_{\max}^2$ к сумме всех дисперсий:

$$G = S_{\max}^2 / (S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2). \tag{1.37}$$

Согласно критерию Кохрена гипотезу H_0 принимают с уровнем значимости α, если $G < G_{1-\alpha}(k, n)$, и отвергают в противоположном случае. Квантили распределения Кохрена $G_p(k, n)$ приведены в табл. П8 Приложения.

3. Проверка гипотез о математических ожиданиях нормального распределения.

Пусть задана выборка X_1, X_2, ..., X_n из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Значение математического ожидания неизвестно. Найдена оценка математического ожидания $\overline{X}$. Проверяем *гипотезу о равенстве математического ожидания заданному числу.* $H_0 : a = a_0$ (a_0 – некоторое заданное число). Рассмотрим два случая.

Первый случай: дисперсия σ^2 известна.

Гипотезу проверяется с помощью функции критерия

$$U = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}, \tag{1.38}$$

которая имеет стандартное нормальное распределение, то есть $U \sim N(0;\, 1)$. u_p – квантиль стандартного нормального распределения. Рассмотрим проверку гипотезы H_0 при трех вариантах альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a \neq a_0$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|U| < u_{1-\alpha/2}, \tag{1.39}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a < a_0$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U > u_{\alpha}, \tag{1.40}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a > a_0$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U < u_{1-\alpha}, \tag{1.41}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Второй случай: дисперсия σ^2 неизвестна.

Гипотеза проверяется с помощью функции критерия

$$t = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}, \tag{1.42}$$

которая имеет t-распределение Стьюдента с k степенями свободы, то есть $t = t(k)$. S – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6); k – число степеней свободы при вычислении оценки S. $t_P(k)$ – квантиль распределения Стьюдента. Как и выше, рассматриваем проверку гипотезы H_0 при трех вариантах альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a \neq a_0$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|t| < t_{1-\alpha/2}(k), \tag{1.43}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a < a_0$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t > t_{\alpha}(k), \tag{1.44}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a > a_0$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t < t_{1-\alpha}(k), \tag{1.45}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, $X_i^{(1)} \sim N(a_1; \sigma_1)$, вторая – n_2, $X_i^{(2)} \sim N(a_2; \sigma_2)$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

Проверяем *гипотезу о равенстве математических ожиданий* этих двух генеральных совокупностей, то есть H_0: $a_1 = a_2$. По каждой выборке находим оценки математических ожиданий $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$. Рассмотрим два случая.

<u>Первый случай:</u> дисперсии σ_1 и σ_2 известны.

Гипотеза проверяется с помощью функции критерия

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \qquad (1.46)$$

функция имеет стандартное нормальное распределение, то есть $U \sim N(0; 1)$. Рассмотрим различные варианты альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a_1 \neq a_2$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|U| < u_{1-\alpha/2}, \qquad (1.47)$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a_1 < a_2$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U > u_\alpha, \qquad (1.48)$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a_1 > a_2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$U < u_{1-\alpha}, \qquad (1.49)$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

<u>Второй случай:</u> дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но гипотеза о равенстве дисперсий принимается. S_1^2 и S_2^2 – несмещенные оценки дисперсий первой и второй выборок. Находим сводную оценку дисперсии:

$$S_{\text{св}}^2 = (S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2) / (k_1 + k_2).$$

Гипотеза проверяется по критерию Стьюдента, функция критерия

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{св}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \qquad (1.50)$$

имеет t-распределение Стьюдента с $k_{св}$ степенями свободы, то есть $t = t(k_{св})$. $k_{св} = k_1 + k_2 = n_1 + n_2 - 2$ – число степеней свободы при вычислении оценки $S_{св} = \sqrt{S^2_{св}}$. Рассмотрим различные варианты альтернативной гипотезы H_1.

1. H_1: $a_1 \neq a_2$. Критерий двусторонний. Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$|t| < t_{1-\alpha/2}(k_{св}), \tag{1.51}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. H_1: $a_1 < a_2$. Критерий односторонний (левосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t > t_{\alpha}(k_{св}), \tag{1.52}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

3. H_1: $a_1 > a_2$. Критерий односторонний (правосторонний). Гипотеза H_0 принимается при выполнении неравенства:

$$t < t_{1-\alpha}(k_{св}), \tag{1.53}$$

в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

4. Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.

Если распределение случайной величины X не известно, можно рассмотреть гипотезу о том, что X имеет функцию распределения $F(x)$. Критерии значимости для проверки таких гипотез называют *критериями согласия*. Мы рассмотрим два критерия согласия – критерий χ^2 (или критерий Пирсона) и критерий ω^2.

Пусть X_1, X_2, ..., X_n – выборка наблюдений случайной величины X. Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что X имеет функцию распределения $F(x)$.

Проверку гипотезы H_0 при помощи критерия χ^2 проводят следующим образом. По выборке находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения случайной величины X. Область возможных значений случайной величины X разбивают на l интервалов. Подсчитывают числа n_i попаданий результатов экспериментов в каждый i-й интервал. Используя предполагаемый закон распределения случайной величины X, находят вероятности p_i того, что значение X принадлежит i-тому интервалу. Затем сравнивают полученные частоты n_i/n с вероятностями p_i. Критерий согласия Пирсона требует принять гипотезу о пригодности проверяемого распределения с уровнем значимости α, если значение *взвешенной суммы квадратов отклонений*:

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{l}\frac{(n_i/n - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{l}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{1.55}$$

меньше квантиля распределения χ^2-распределения с $k = l - 1$ степенями свободы, то есть

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k),$$

в противном случае эту гипотезу отвергают, как противоречащую результатам эксперимента. Если при этом некоторые параметры распределения оценивают по результатам той же выборки, то квантиль χ^2-распределения следует брать для $k = l - 1 - m$ степеней свободы, где m – число оцениваемых параметров.

По критерию согласия ω^2 оценивают не частоты с вероятностями, а предполагаемую функцию распределения $F(x)$ с функцией эмпирического распределения $F_n(x)$,где

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0, X \le X_{1,} \\ i/n, X_i < x \le X_{i+1}, , \\ 1, x > X_n \end{cases} \tag{1.56}$$

здесь X_1, X_2, ..., X_n – ранжированные результаты эксперимента (расположенные в порядке возрастания).

Критерий согласия ω^2 требует принять гипотезу о пригодности проверяемого распределения с уровнем значимости α, если значение величины

$$n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 \tag{1.57}$$

меньше квантиля предельного распределения величины $n\omega_n^2$ при вероятности $p = 1 - \alpha$, в противном случае гипотеза отвергается, как противоречащую результатам эксперимента. Упомянутые квантили можно найти в специальных таблицах [4], для p = 0,95 и 0,99 квантили равны соответственно 0,461 и 0,742. Предполагается, что проверяемое распределение не содержит неизвестных параметров.