Контрольная работа 1.

Тема: «Случайные события, их вероятности. Дискретные случайные величины».

Типовой вариант

1. В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила 5 договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит ровно один раз.

2. Среди 16 лотерейных билетов находятся 4 выигрышных билета. Найти вероятность того, что среди четырех купленных билетов, случайным образом выбранных: а) ровно один выигрышный; б) хотя бы один выигрышный.

3. Найти вероятность того, что наудачу поставленная в данном круге точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника. Найти вероятность того, что из 5 точек, случайным образом помещенных в круг, 3 точки окажутся внутри вписанного в круг правильного шестиугольник.

4. Среди населения 5 % мужчин и 0,25 % женщин являются дальтониками. Случайным образом выбранное лицо страдает дальтонизмом. Найти вероятность того, что это мужчина (считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).

5. Заданы числовые характеристики независимых случайных величин X и Y:

$M(X) = 2{,}4$; $D(X) = 0{,}5$; $M(Y) = 3{,}8$; $D(Y) = 0{,}9$.

Случайная величина Z является функцией случайных величин X и Y: $Z = 6X - 8Y - 9$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

6. В цехе 10 независимо работающих станков. Вероятность отказа каждого из станков одинакова и равна 0,1. Найти вероятность выполнения цехом задания, если для этого достаточно, чтобы работало не менее 7 станков из 10.

7. Найти надежность системы приборов изображенной на рис. 2.6, если $p_1=0{,}6$; $p_2=0{,}8$; $p_3=0{,}75$.

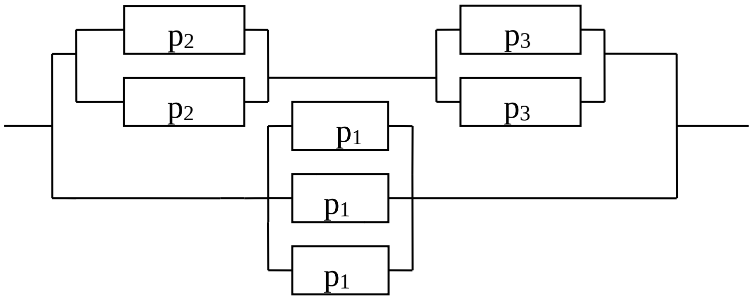


Рис. 2.6.

8. Стрелок, попадающий в цель с вероятностью 0,6, стреляет до первого попадания, но не более четырех раз, X – число выстрелов. Найти вероятность события: $2 \le X \le 3$. Вычислить $M(X)$ – математическое ожидание, $D(X)$ – дисперсию и σ_X – среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа выстрелов.

Решение типового варианта.

1. По условию вероятность события A – договор завершился выплатой – равна 0,1. Соответственно, вероятность противоположного события $P(\bar{A}) = q = 1 - 0{,}1 = 0.9.$ По формуле Бернулли имеем: $P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 \approx 0{,}328.$

Ответ: 0,328.

2. а) Найдем вероятность события: первый купленный билет выигрышный, а остальные – невыигрышные. Такое событие, обозначим его B_1, является совмещением четырех событий $B_1 = A_1 A_2 A_3 A_4$, где A_1 – первый купленный билет выигрышный, A_2, A_3, A_4, соответственно, второй, третий и четвертый купленные билеты невыигрышные. Вероятность совмещения этих событий найдем по формуле (1.11):

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 A_2)) \cdot P(A_4/(A_1 A_2 A_3)).$$

В силу равной возможности исходов, обеспеченной перемешиванием билетов, для вычисления как безусловных, так и условных вероятностей можно воспользоваться формулой вероятности в классической модели (1.1).

$P(A_1) = \dfrac{4}{16}$. Всего билетов 16 – общее число исходов. Выигрышных билетов 4 – число исходов, благоприятствующих событию куплен выигрышный билет.

$P(A_2/A_1) = \dfrac{12}{15}$. Найдена вероятность того, что второй билет невыигрышный, если первый был выигрышный. Общее число исходов 15, так как один билет уже куплен, осталось 15. Число исходов, благоприятствующих событию, равно 12, так как первым куплен выигрышный билет, а все невыигрышные остались.

$P(A_3/(A_1A_2)) = \dfrac{11}{14}$. Найдена вероятность того, что третий билет

невыигрышный, если первый был выигрышный, а второй – невыигрышный. После покупки двух билетов осталось 14, среди них 11 невыигрышных.

$P(A_4/(A_1A_2A_3)) = \dfrac{10}{13}$. Найдена вероятность того, что четвертый билет невыигрышный, если первый был выигрышный, а второй и третий – невыигрышные. После покупки трех билетов осталось 13, среди них 10 невыигрышных.

Тогда

$$P(B_1) = P\,(A_1A_2A_3A_4) = \frac{4}{16}\,\frac{12}{15}\,\frac{11}{14}\,\frac{10}{13}. \qquad (2.1)$$

Итак, найдена вероятность, что первый купленный билет выигрышный, остальные – невыигрышные. Но выигрышным может быть второй, третий или четвертый купленный билет при остальных невыигрышных. Возникают еще три несовместных события B_2, B_3 и B_4, вероятности каждого из которых равны (2.1) с точностью до перестановки множителей. Например, вероятность события B_2 , второй купленный билет выигрышный, остальные невыигрышные, равна

$$P(B_2) = \frac{12}{16}\,\frac{4}{15}\,\frac{11}{14}\,\frac{10}{13}.$$

Искомое событие, куплен ровно один выигрышный билет, равно сумме событий $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Так как события B_i, i =1, 2, 3, 4, попарно несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей событий B_i (формула (1.4)). Но вероятность каждого из событий B_i одинакова и равна (2.1). Поэтому искомая вероятность равна вероятности (2.1), умноженной на 4, т.е. $4\frac{4}{16}\frac{12}{15}\frac{11}{14}\frac{10}{13} \approx$ 0,4835.

б) Для нахождения вероятности покупки хотя бы одного выигрышного билета (событие C) сначала найдем вероятность противоположного события – все купленные билеты невыигрышные (событие $\overline{C}$). Это событие соответствует совмещению событий – каждый из купленных билетов невыигрышный. Вероятность такого события вычисляется по формуле (1.11):

$$P(\overline{C}) = \frac{12}{16}\frac{11}{15}\frac{10}{14}\frac{9}{13} \approx 0{,}272.$$

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}272 = 0{,}728$.

Ответ: а) 0,4835; б) 0,728.

3. Пусть сторона правильного шестиугольника равна a. Правильный шестиугольник можно разбить на шесть равносторонних треугольников со стороной a (рис. 2.7). Высота равностороннего треугольника равна $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, его площадь $S_{тр} = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. тогда площадь шестиугольника равна $S_{шест} = 6S_{тр} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Площадь вписанного круга равна $S_{кр} = \pi a^2$, так как его радиус равен стороне правильного треугольника.

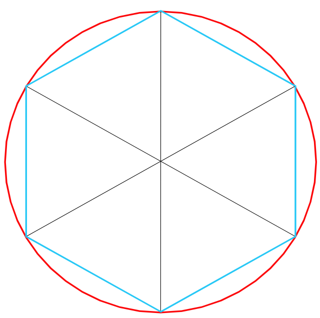


Рис.2.7.

Вероятность попадания «случайной точки» во вписанный правильный шестиугольник, согласно формуле (1.2)

$$P = \frac{S_{шест}}{S_{кр}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot\pi a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,827\,.$$

Найдем вероятность того, что из 5 случайно помещенных в круг точек внутри правильного шестиугольника окажутся 3 точки. Воспользуемся формулой Бернулли.

Здесь $p = 0,827$, $q = 1 - p = 1 - 0,827 = 0,173.$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!}\cdot 0,827^3\cdot 0,173^2 = 10\cdot 0,827^3\cdot 0,173^2 \approx 0,1693.$$

Ответ: 0,827; 0,1693.

4. Для решения задачи воспользуемся формулой полной вероятности (1.15) и формулой Байеса (1.16). Сформулируем две гипотезы: случайно выбранное лицо является мужчиной (H_1) или женщиной (H_2). Согласно условию $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$. Событие А – случайно выбранное лицо страдает дальтонизмом. Условные вероятности, как следует из условия, равны

$P(A/H_1) = 0,05$; $P(A/H_2) = 0,0025.$

Тогда по формуле полной вероятности (1.15)

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = 0,5\cdot 0,05 + 0,5\cdot 0,0025 = 0,02625.$$

Искомую вероятность найдем по формуле Байеса (1.16):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,5\cdot 0,05}{0,02625} \approx 0,952.$$

Ответ: 0,952.

5. Математическое ожидание обладает свойством линейности (1.28), математическое ожидание константы равно значению этой константы, поэтому

$M(Z) = M(6X - 8Y - 9) = 6M(X) - 8M(Y) - 9 = 6\cdot2,4 - 8\cdot3,8 = -25.$

Для независимых случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий, дисперсия константы равна нулю, при умножении случайной величины на число дисперсия умножается на квадрат этого числа (1.31).

$D(Z) = D(6X – 8Y – 9) = D(6X) + D(–8Y) = 36D(X) + 64D(Y) = 36 \cdot 0,5 + 64 \cdot 0,9 = 75,6.$

Ответ: $M(Z) = –25$; $D(Z) = 75,6$.

6. Рассмотрим случайную величину X – число работающих станков из 10. Цех выполнит задание, если $X \geq 7$, т.е. X примет значение 10, 9, 8 или 7. Величина X имеет биномиальное распределение. $n = 10$, $p = 0,9$ – вероятность того, что станок работает, $q = 1 – p = 0,1$ – вероятность выхода станка из строя. Найдем по формуле (1.21) вероятности того, что X примет интересующие нас значения.

$P(X=10) = 0,9^{10}$;

$P(X=9) = C_{10}^{1} 0,9^{9} 0,1$; $C_{10}^{1} = 10$;

$P(X=8) = C_{10}^{2} 0,9^{8} 0,1^{2}$; $C_{10}^{2} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$;

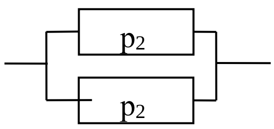
$P(X=7) = C_{10}^{3} 0,9^{7} 0,1^{3}$; $C_{10}^{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120.$

$P(X \geq 7) = P(X=10) + P(X=9) + P(X=8) + P(X=7) =$

$= 0,9^{10} + 10 \cdot 0,9^{9} 0,1 + 45 \cdot 0,9^{8} 0,1^{2} + 120 \cdot 0,9^{7} 0,1^{3} \approx 0,9872.$

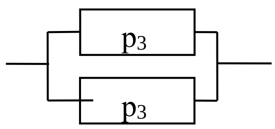
Ответ: 0,9872.

7. Пусть P_I – надежность фрагмента схемы I, где два участка подключены параллельно:



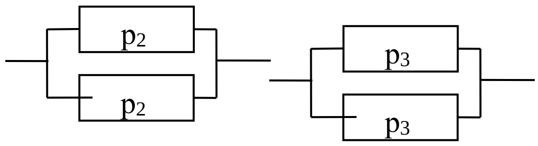
Тогда $P_I = 1 - (1 - p_2)^2 = 1 - 0,2^2 = 0,96$.

Аналогично рассчитывается надежность P_{II} фрагмента II :



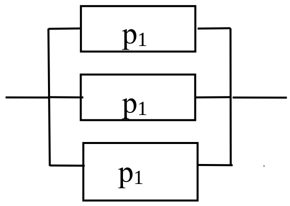
$P_{II} = 1-(1-p_3)^2 = 1-0,25^2 = 0,9375.$

Эти фрагменты подключены последовательно, поэтому надежность цепи *III*



равна $P_{III} = P_I \cdot P_{II} = 0,96 \cdot 0,9375 = 0,9$.

Найдем надежность P_{IV} участка *IV*:



$P_{IV} = 1-(1-p_1)^3 = 1-0,4^3 = 1-0,064 = 0,936.$

Участки *III* и *IV* подключены параллельно, поэтому надежность всей схемы

$P = 1-(1-P_{III}) \cdot (1-P_{IV}) = 1-0,1 \cdot 0,064 = 0,9936$.

Ответ: 0,9936.

8. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины *X* – числа выстрелов.

P(*X*= 1) = 0,6 (стрелок попал с первого раза).

P(*X*= 2) = $0{,}4 \cdot 0{,}6$ (при первом выстреле попадания не было, при втором выстреле цель поражена).

P(*X*= 3) = $0{,}4^2 \cdot 0{,}6$ (при первом и втором выстрелах попадания не было, при третьем выстреле цель поражена).

P(*X*= 4) = $0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^4$ (результат достигается при двух вариантах; первый: первые три раза попадания не было, при четвертом выстреле цель поражена; второй: все четыре раза стрелок в цель не попал, но по условию он стреляет не более четырех раз; эти два варианта являются несовместными событиями, по правилу сложения вероятностей вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна сумме их вероятностей).

Распределения вероятностей случайной величины X приведено во втором столбце табл. 2.1. В последней строке для контроля посчитана сумма вычисленных вероятностей, которая в таких таблицах всегда должна быть равна единице.

Таблица 2.1.

Результаты расчетов к задаче 8.

X	P	$X\,P$	$X^2\,P$
1	0,6	0,6	0,6
2	$0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$	0,48	0,96
3	$0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$	0,288	0,864
4	$0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0{,}44 = 0{,}064$	0,256	1,024
Σ	1,000	1,624	3,448

Вероятность события: $2 \le X \le 3$ равна

$P(2 \le X \le 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}336.$

Расчет числовых характеристик случайной величины X приведен в третьем и четвертом столбцах таблицы 2.1. В столбцах $X\,P$ и $X^2\,P$ записаны значения произведений $X_i\,P_i$ и $X_i^2\,P_i$. В последней строке – суммы элементов соответствующих столбцов.

Математическое ожидание вычисляем по формуле (1.26)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\,p_i = 1{,}624.$$

Дисперсию и среднее квадратическое отклонение находим, соответственно, по формулам (1.32) и (1.30).

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\,p_i - 1{,}624^2 = 3{,}448 - 1{,}624^2 \approx 0{,}81;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}9.$$

Ответ: $P = 0{,}336$; $M(X) = 1{,}624$; $D(X) = 0{,}81$; $\sigma(X) = 0{,}9$.

Варианты контрольных работ для самостоятельной работы.

Вариант 1

1. Оптовая база обслуживает шесть магазинов. Вероятность поступления заявки на данный день от каждого из магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что на данный день на базу поступит 1) четыре заявки; 2)не менее пяти; 3) хотя бы одна заявка.

2. На полигоне расставлены 4 мишени первого типа, 1 второго, 5 третьего и 10 четвертого. Вероятность поражения мишени различных типов равны, соответственно, 0,4; 0,2; 0,08 и 0,03. Найти вероятность поражения мишени, если сделан один выстрел, а мишень выбирается наудачу. Какова вероятность, что стреляли во вторую мишень, если попадания не было?

3. В коробке находятся семена циннии, астры и бархатцы в соотношении 1:2:5. Вероятности всхожести этих семян равны соответственно 0,65, 0,75 и 0,8. Найти вероятность того, что наугад взятое семечко не взойдёт.

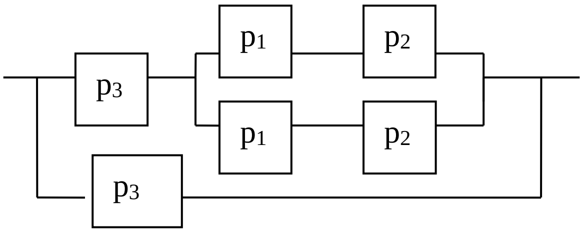
4. Контролер берет из партии изделие и проверяет его качество. Если изделие нестандартно, то испытания прекращаются и партия задерживается. Если изделие стандартно, контролер берет следующее изделие. Вероятность того, что изделие нестандартно, равно 0,1. Контролер проверяет не более четырех изделий. Найти распределение вероятностей случайной величины X – числа проверенных изделий. M(X), D(X). Построить график функции распределения.

5. Случайная точка (X, Y, Z) характеризуется центром рассеивания (3,2; 4; 1,5) и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$. Случайные величины X и Z независимы.

$V = 4X - 5Y - 3$. $W(X) = 3XZ - 4X^2Z^2$. Найти *M(V), D(V), M(W).*

6. В отделе работают 7 мужчин и 5 женщин. Наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 или 4 женщины.

7.Найти вероятность безотказной работы прибора, схема которого изображена на рисунке, если надежности узлов прибора равны p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,85. Ответ представить с точностью 10^{-4}.



8. Автобусы маршрутов № 1 и № 2 следуют строго с интервалами 6 мин. и 8 мин. соответственно. Найти вероятность того, что пассажир, не знающий расписания, будет ожидать на остановке автобус менее двух минут (его устраивает любой из этих маршрутов).

Вариант 2

1. В цель стреляют четыре человека, независимо друг от друга, вероятности попадания каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,6; 0,5. Какова вероятность того, что при одном выстреле в цель попадут: а) два стрелка; б) хотя бы один стрелок?

2. Из урны, в которой 3 белых и 5 черных шаров, вынули одновременно 3 шара. Пусть дискретная случайная величина X – число вынутых белых шаров. Найти распределение д. с. в. X, $M(X)$, $D(X)$, $P(X < M(X))$.

3. Вероятность изготовления детали отличного качества равна 0,9. Найти вероятность того, что среди десяти случайно отобранных изделий не менее девяти отличного качества.

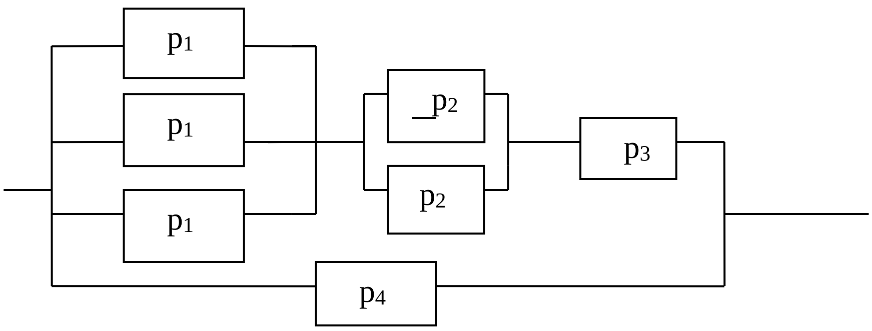
4. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит в период экономического роста, равна 0,05, а в период экономического кризиса – 0,15. По мнению экспертов, вероятность того, что предстоящий год будет годом экономического роста, равна 0,8. 1) Какова вероятность, что случайно выбранный клиент банка, получивший кредит в этом году, не вернет его в предстоящем году. 2) Клиент не вернул кредит. Найти вероятность того, что это произошло в период экономического кризиса.

5. Задан закон распределения вероятностей случайной величины X:

X	–4	–1	0	1	2
P	0,15	0,2	0,3	0,2	?

Восстановить пропущенное в таблице значение вероятности. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Построить график функции распределения для этой величины.

6. Найти вероятность безотказной работы прибора, схема которого изображена на рисунке, если надежности узлов прибора равны p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,9, p_4=0,6. Ответ представить с точностью 10^{-4}.



7. В автобусе находятся 5 пассажиров, причем каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из оставшихся 7 остановок автобуса. Найти вероятности того, что: а) все пассажиры выйдут на одной остановке; б) все пассажиры выйдут на конечной остановке; в) все выйдут на разных остановках; г) на одной остановке выйдут три, а на другой два пассажира.

8. Найти вероятность того, что наудачу поставленная в данном равностороннем треугольнике точка окажется внутри вписанного в треугольник круга. Найти вероятность того, что из 7 наудачу поставленных таким образом точек внутри круга окажется 5 точек.

Вариант 3

1. В среднем 20% открывающихся малых предприятий становятся банкротами в течение первого года своей деятельности. Найти вероятность того, что из 7 малых предприятий, открывшихся в начале года, к концу года обанкротятся 1) три предприятия; 2) менее трех.

2. По оценке кредитной компании 20% ее потенциальных клиентов относится к группе лиц с повышенным риском невозврата кредита. Лицам, входящим в эту группу, удается получить кредит в 25% случаев; остальные клиенты кредитной компании получают кредит в 70% случаев. Найти: а) вероятность того, что клиент, обратившийся в компанию, получит кредит; б)вероятность того, что клиент, не получивший кредит, относится к группе лиц с повышенным риском невозврата кредита.

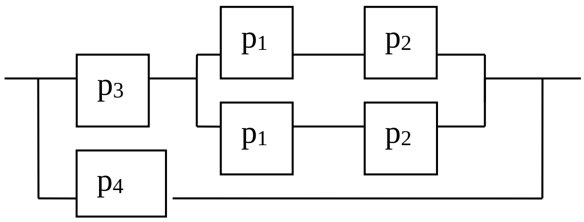
3. В трех урнах имеются белые и черные шары. В первой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 1 черный шар, в третьей – 4 белых и 2 черных шара. Из первой урны один шар перекладывается во вторую, из второй после этого в третью, затем из третьей в первую. Найти вероятность того, что состав шаров во всех урнах не изменится.

4. Торговый агент обращается к пяти потенциальным покупателям по списку с предложением купить товар фирмы. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как 0,5; 0,4; 0,4; 0,3; 0,2. Покупатели принимают решение о покупке независимо друг от друга . Агент обращается к ним в указанном порядке пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Найти распределение вероятностей случайной величины X –числа покупателей, к которым обратится агент. Найти M(X). Построить график функции распределения.

5. Случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X) = -1$ и $M(Y) = -2$. Ковариация этих величин равна 4. Найти математическое ожидание величины $Z = 5XY - 3X + 4Y - 2$.

6. Достаточным условием сдачи зачета является ответ хотя бы на один из двух вопросов, предлагаемых студенту преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность, что студент сдаст зачет?

7. Найти надежность системы приборов, если p_1=0,6; p_2=0,8; p_3=0,9; p_4=0,7.



8. Двое договорились о встрече между 9.00 и 9.40 часами. Время прихода каждого заранее неизвестно и является равномерно распределенной случайной величиной. Какова вероятность того, что встреча состоится, если пришедший первым ждет второго 15 мин., после чего уходит?

Ответы

Вариант 1.

1. 1) 0,3110; .2) 0,2333; 3) 0,9959. **2.** 8/175 = 0,0457. **3.** 0,23125.

4.

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,09	0,081	0,729

$M(X)$=3,439; $D(X)$ = 1,026; $\sigma(X)$ = 1,013.

5. $M(V)$ = –10,2; $D(V)$ = 10,8; $M(W)$ = –100,44.

6. 0,6629. **7**. 0,9528. **8.** 0,5.

Вариант 2.

1. а) 0,32; .б) 0,988. **2.** $M(X)$=1,125; $D(X)$ = 0,502; P = 0,714. **3.** 0,736.

4. 1) 0,07; .2) 0,4286. **5.** P_5 = 0,15. $M(X)$= – 0,3; $D(X)$ = 3,31; $\sigma(X) \approx$1,8193.

6. 0,945. **7.** а) $\frac{1}{7^4} \approx 0{,}0004$; б) $\frac{1}{7^5} \approx 0{,}00006$; в) $\frac{360}{7^4} \approx 0{,}1499$; г) $\frac{60}{7^4} \approx 0{,}02499$.

8. $p_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}6046$; $P_7(5) = 21 \cdot p_0^5 (1 - p_0)^2 \approx 0{,}4387$.

Вариант 3.

1. 1) 0, 1147; .2) 0,8520. **2.** а) 0,61; .б) 0,3846. **3.** 0,331.

4.

X	1	2	3	4	5
P(X)	0,5	0,2	0,12	0,054	0,126

$M(X)$=2,106.

5. 3. **6**. 0,9641. **7**. 0,593. **8.** 0,6094.