ЛЕКЦИЯ 10

- Предмет линейной алгебры.
- Матрицы. Алгебра матриц .
- Подстановки из n элементов. Их четность, сигнатура, произведение подстановок.
- Транспозиции. Разложение всякой подстановки в произведение транспозиций.
- Обратная подстановка, ее четность.
- Определители n–ого порядка и их свойства.

Матрицы.

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элементы матрицы A, где i – номер строки, j – номер столбца.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*.

Пусть A- квадратная матрица, тогда $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ – элементы *главной диагонали*.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной*.

Квадратная матрица называется диагональной, если

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j$$

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы совпадают.

Квадратная матрица называется

-верхней треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$,

-нижней треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Матрицей A^t размера $n \times m$, *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, называется матрица, которая получается из матрицы A заменой строк на столбцы, т. е. строки матрицы A являются столбцами матрицы A^t.

$W_{m\times n}(\mathfrak{R})$– множество матриц размера $m\times n$ над множеством действительных чисел.

Операции над матрицами.

1. *Суммой матрицы A* размера $m \times n$ и матрицы B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, n$.

2. *Произведением матрицы A* размера $m \times n$ на число α называется матрица B размера $m \times n$, каждый из элементов которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, n$.

Свойства операций сложения матриц и умножения на число.

$$\forall \; A, B, C \in W_{m \times n}(\Re), \; \forall \; \alpha, \beta \in \Re :$$

$$1)\; A + B = B + A,$$

$$2)\; (A + B) + C = A + (B + C),$$

$$3)\; \exists O \in W_{m \times n}(\Re) : A + O = A,$$

$$4)\; \forall A \quad \exists (-A) \in W_{m \times n}(\Re) : A + (-A) = 0,$$

$$5)\; \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

$$6)\; (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A,$$

$$7)\; \alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A,$$

$$8)\; 1 \cdot A = A.$$

Таким образом, множество $W_{m\times n}(\Re)$ матриц размера $m\times n$ с введенными выше операциями сложения матриц и умножения на число образует линейное пространство.

3. *Произведением матрицы A* размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, k$$

(сумма попарных произведений элементов i-ой строки и j-ого столбца).

Пример.

$$A \in W_{2\times 3}(\Re),\ B \in W_{3\times 2}(\Re),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB \in W_{2\times 2}(\Re),\ AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц.

1. $AB \neq BA$ (произведение матриц не коммутативно).
2. $A(BC)=(AB)C$, для $\forall\ A \in W_{m\times n}(\mathfrak{R}),\ B \in W_{n\times k}(\mathfrak{R}),$
   $C \in W_{k\times s}(\mathfrak{R}).$
3. $(A+B)C=AC+BC$, для $\forall\ A, B \in W_{m\times n}(\mathfrak{R}),\ C \in W_{n\times k}(\mathfrak{R}).$
   $D(A+B)=DA+DB$, для $\forall\ A.B \in W_{m\times n}(\mathfrak{R}),\ D \in W_{k\times m}(\mathfrak{R}).$
4. $AO=OA=O$, для $\forall\ A \in W_{n\times n}(\mathfrak{R}),\ O \in W_{n\times n}(\mathfrak{R}).$
5. $AE=EA=A$, для $\forall\ A, E \in W_{n\times n}(\mathfrak{R}).$
6. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A\alpha B$, для $\forall\ A \in W_{m\times n}(\mathfrak{R}),\ B \in W_{n\times k}(\mathfrak{R}).$

Перестановки и подстановки из n элементов.

Определение. Пусть каждое из чисел $(k_1, k_2, ..., k_n)$ принимает одно из значений 1,2,…,n, причем среди этих чисел нет совпадающих. Тогда говорят, что числа $(k_1, k_2, ..., k_n)$ являются некоторой перестановкой чисел 1,2,…,n.

Заметим, что k_1 может принимать n различных значений, тогда k_2 при заданном k_1 может принимать n-1 значение, k_3 при заданных k_1 и k_2 может принимать n-2 значения и т.д.. Следовательно, всего существует $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$ перестановок из n элементов.

Определение. Перестановка (1,2,…,n) называется тривиальной.

Обозначение: S_n- множество всех перестановок на множестве первых n натуральных чисел.

Определение.

Пусть дана перестановка $(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots\ k_n)$. Говорят, что пара чисел (k_i, k_j) образуют инверсию (беспорядок) в заданной перестановке, если $k_i > k_j$ при $i < j$.

Перестановка называется четной, если число инверсий в ней четное, и нечетной, если число инверсий нечетное.

Обозначение: $\varepsilon(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - число инверсий в заданной перестановке.

Например, $\varepsilon(1,2,3,4) = 0$ (четная); $\varepsilon(4,1,3,2) = 4$ (четная); $\varepsilon(4,3,2,1) = 6$ (четная); $\varepsilon(4,1,2,3) = 3$ (нечетная).

Определение.

Транспозицией двух определенных элементов в перестановке называется замена их местами.

Утверждение. Любая транспозиция меняет четность перестановки.

Доказательство.

1. Транспозиция соседних элементов.

В перестановке $\tau = (k_1, k_2, ..., k_i, .k_j, ..., k_n)$ поменяем два соседних элемента местами . Число инверсий изменится на единицу. Действительно, если пара (k_i, k_j) инверсию образует, то пара (k_j, k_i) не образует инверсию, и наоборот, если пара (k_i, k_j) инверсию не образует, то пара (k_j, k_i) образует инверсию.

2. Поменяем в перестановке местами не соседние элементы:

$$(k_1, k_2, ..., k_i, ..., k_j, ...\ k_n) \to (k_1, k_2, ..., k_j, ..., k_i, ...\ k_n).$$

Сначала, совершив s транспозиций соседних элементов, поставим элемент k_i на j-1- ое место. Затем поменяем элементы k_i и k_j местами, при этом мы совершим еще одну транспозицию соседних элементов. И, наконец, совершив еще s транспозиций соседних элементов, поставим элемент k_j на i- тое место. Всего мы совершили $2s$+1 транспозицию соседних элементов. Значит, изменится четность перестановки.

Определение. Подстановкой из n элементов $\{1,2,\dots,n\}$ называется взаимно однозначное отображение множества первых n натуральных чисел в себя.

Произвольную подстановку $\sigma : k \to \sigma(k)$, принято записывать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & ,n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$

Определение. Определителем n-ого порядка, соответствующим квадратной матрице А, называется алгебраическая сумма n! слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения из n элементов матрицы А, взятые по одному из каждой строки и каждого столбца $a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$. Причем со знаком «+» входят те слагаемые, у которых индексы $(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_n)$ составляют четную перестановку и со знаком « - » те слагаемые, у которых эти индексы составляют нечетную перестановку.

$$\det A = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$$

Пример.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma)\underset{a_{21}}{3}\cdot\underset{a_{34}}{2}\cdot\underset{a_{43}}{5}\cdot\underset{a_{15}}{(-1)}\cdot\underset{a_{52}}{(-7)} = -210$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Инверсии:

$(5\ 1), (5\ 4), (5\ 3), (5\ 2), (4\ 3), (4\ 2), (3\ 2).$

$\varepsilon(\sigma) = 7$

Подстановка нечетная.

Свойства определителя.

1)При транспонировании определитель не меняется.

Доказательство.

Пусть $A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1,2,\ldots,n}$, $A^t = \left\| a^*_{ij} \right\|_{i,j=1,2,\ldots,n}$, где $a^*_{ij} = a_{ji}$.

Тогда

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a^*_{1\sigma_1} \cdot a^*_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a^*_{n\sigma_n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{\sigma_1 1} \cdot a_{\sigma_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma_n n}.$$

Упорядочим по первым индексам, при этом совершим $\varepsilon(\sigma)$ транспозиций.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_n \end{pmatrix}$$

Тогда перестановка вторых индексов $(1\,2 \ldots n) \to (\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n)$, причем $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$. Тогда

$$\det A^t = \sum_{\tau \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\tau)} a_{1\tau_1} \cdot a_{2\tau_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau_n} = \det A.$$

Замечание. Из доказанного свойства следует, что если для определителей выполнено какое-то свойство относительно строк (столбцов), то оно имеет место и относительно столбцов (строк).

2)При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Доказательство.

Пусть матрица A' получена из матрицы A перестановкой i -ой и j-ой строк. Тогда

$$\det A' = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma_i} \cdot \ldots a_{j\sigma_j} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{j\sigma_j} \cdot \ldots a_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} =$$

$$= -\sum_{\tau \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\tau)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{j\sigma_j} \cdot \ldots a_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} = -\det A,$$

так как перестановки $\sigma = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots., k_j, \ldots, k_n)$ и $\tau = (k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ отличаются на транспозицию, а любая транспозиция меняет знак перестановки.

3. Если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю.

Доказательство.

Пусть в матрице A совпадают i– ая и j – ая строки. Тогда, если поменять эти строки местами данная матрица не изменится.

Тогда $$\det A = -\det A = 0.$$

4)Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором - вторые слагаемые.

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot (a'_{i\sigma_i} + a''_{i\sigma_i}) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a'_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a''_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} = \det A' + \det A''.$$

5)Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) на число не равное нулю равносильно умножению определителя на это число.

Доказательство.

Пусть
$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$\det A' = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot \lambda a_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} = \lambda \det A.$$

6) Определитель не изменится, если к одной его строке (столбцу) прибавить любую другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.

7) Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

8) Определитель единичной матрицы равен 1.

9) Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

10) Определитель верхней треугольной (нижней треугольной) матрицы равен произведению
элементов, стоящих на главной диагонали.

Определение.

Минором элемента a_{ij} матрицы A размера $n \times n$ называется определитель порядка n-1 , соответствующий квадратной матрице A' размера n-1 $\times$ n-1, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i – ой строки и j-ого столбца (обозначают M_{ij}).

Определение.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} .

Теорема (разложение определителя по элементам *i* – ой строки).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ ,$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

Доказательство.

1) Докажем, что

$$\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}$$

$$\det \tilde{A} = \sum_{\sigma \in s_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} = \left| \ a_{1\sigma_1} = \begin{cases} a_{11}, \sigma_1 = 1, \\ 0, \sigma_1 \neq 1. \end{cases} \right| =$$

$$= \sum_{\sigma \in s_n / \sigma_1 = 1} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{11} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} = a_{11} \sum_{\sigma \in s_n / \sigma_1 = 1} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} .$$

Заметим, что совокупность всех перестановок $\sigma \in S_n$, оставляющих на месте символ 1, отождествляется с множеством перестановок, действующих на множестве (2,3,…,n). Тогда

$$\det \tilde{A} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}.$$

2) Разложим определитель матрицы A на сумму определителей, в каждом из которых в i-ой строке есть только один ненулевой элемент.

$$2)\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots a_{ij} & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.
$$

Теорема (разложение определителя по элементам j – ого столбца).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .
Следует из первого свойства определителя и предыдущей теоремы.

Теорема (об алгебраических дополнениях соседних строк).
Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов, какой-либо другой строки равна нулю.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу A', у которой совпадают i-ая и k-ая строки. Определитель такой матрицы равен нулю. Разложим данный определитель по элементам k – ой строки.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0.$$