Исследование функции

Возрастание и убывание функции

Определение 1:
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (неубывающей) на интервале** $(a; b)$,
если $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a; b)$ таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Определение 2:
Функция $y = f(x)$ называется **убывающей (невозрастающей) на интервале** $(a; b)$,
если $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a; b)$ таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

***Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале*:**

Теорема: Если функция $y = f(x)$, имеющая производную на интервале (a, b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная

$$f'(x) \ge 0 \ (f'(x) \le 0)$$

на этом интервале.

Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

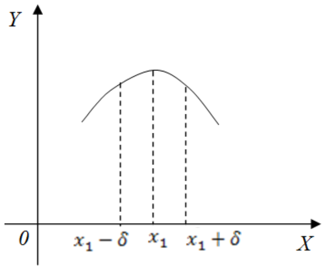
***Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале*:**

Теорема: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

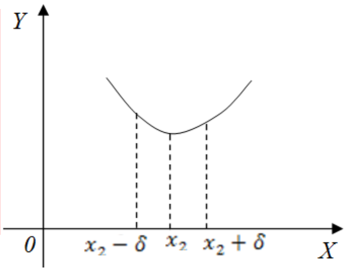
Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа (доказать самостоятельно).

Экстремумы функции

Определение 3. Функция $y = f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.



Определение 4. Функция $y = f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$
.



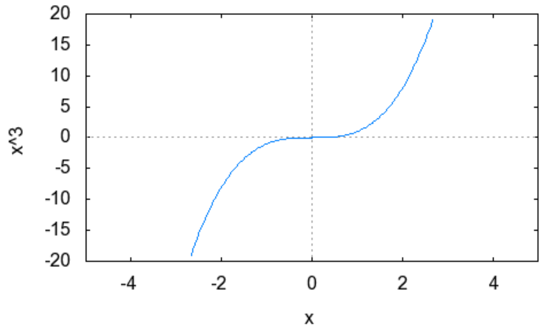
Определение 5. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума функции

Теорема Ферма: Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки области определения непрерывной функции $y = f(x)$, в которых ее производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками**.

Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Достаточные условия экстремума функции

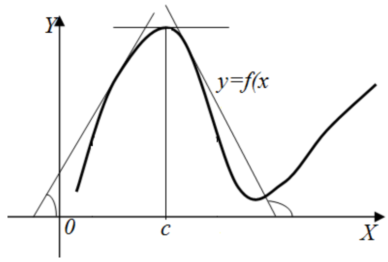
В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Теорема 1 (первое достаточное условие экстремума):
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0) . Тогда, если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с + на –, то это точка локального максимума. Если знак производной меняется с – на +, то это точка локального минимума.

\+ max -

\- min +

Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.



Теорема 2 (второе достаточное условие экстремума):
Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Доказательство.

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$, что следует из условия теоремы, т.е.

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

И т.к. остаточный член по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной.

Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

Пример. Найти экстремумы функции $y=\cos^2 x$.

Решение:

Найдем критические точки этой функции.

Так как

$$y'=-\sin 2x,$$

то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\frac{\pi k}{2}$.

Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что

$$y''(x_k)=-2\cos\pi k,$$

поэтому $x_k=\frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример.

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+1$ на отрезке $\left[1;4\right]$.

Решение.

Находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0,$$

получаем две точки, одна из которых $x = 0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда получим набор точек:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

Определяем в этих точках значения функции

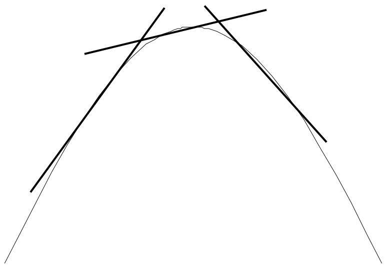
$$y_1 = -1, \quad y_2 = -3, \quad y_3 = 17.$$

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x = 2$, наибольшее (17) при $x = 3$.

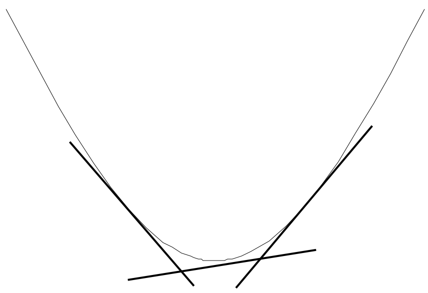
Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение 6. Функция $y = f(x)$, определенная называется на интервале $(a; b)$, называется выпуклой вверх на этом интервале, если точки касательных к функции на этом интервале расположены выше точек функции.

Определение 7. Функция $y = f(x)$, определенная называется на интервале $(a; b)$, называется выпуклой вниз на этом интервале, если точки касательных к функции на этом интервале расположены ниже точек функции.



Выпуклая вверх функция



Выпуклая вниз функция

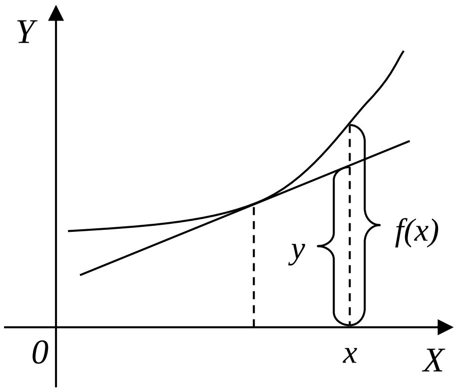
Определение 8. Если при переходе через точку x_0 функция $y = f(x)$ меняет направление выпуклости, то эта точка называется ***точкой перегиба*** функции.

***Необходимое условие выпуклости вверх (вниз) функции на интервале*:**

Теорема: Если функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своей первой и второй производной на интервале $(a;b)$ и она выпуклая вверх (вниз) на этом интервале, то на этом интервале ее вторая производная $f''(x) \le 0$ $(f''(x) \ge 0)$

***Достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции на интервале*:**

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b), причем $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то для $a < x < b$ эта функция выпуклая вверх (вниз) на этом интервале.



Для доказательства теоремы запишем уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0 \in (a;b)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Вспомним также формулу Тейлора, которую представим следующим образом

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Вычитаем эту формулу из формулы касательной, тогда

$$y - f(x) = -\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),$$

где $y -$ ординаты точек касательной. Знак правой части определяется первым ее членом, поскольку остаточный член $o\left((x - x_0)^2\right)$ в окрестности x_0 мал по сравнению с основным членом, таким образом. При условии $f''(x_0) < 0$ разность между значением касательной и функции положительна, следовательно, точки касательной лежат выше точек кривой, и функция выпуклая. Перебирая различные точки x_0 интервала $(a;b)$, убеждаемся, что первая часть теоремы доказана. Аналогично доказывается вогнутость кривой.

***Необходимое условие точки перегиба*:**

Теорема: Если x_0 – точка перегиба, то в этой точке вторая производная функции либо равна нулю $f''(x_0) = 0$, либо не существует.

***Достаточные условия точки перегиба*:**

Точки функции $y = f(x)$, в которых ее вторая производная обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками 2-го рода**.

В силу необходимого условия, точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.

Теорема 1 (первое достаточное условие точки перегиба):
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0) . Тогда, если вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Теорема 2 (второе достаточное условие точки перегиба):
Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до третьего порядка включительно. Тогда, если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

Имеем

$$y' = x^3 - 3x^2. \quad y'' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

$$y''(x) > 0, \text{ при } x < 0,\ x > 2, \quad y''(x) < 0 \text{ при } 0 < x < 2.$$

Следовательно, точки x_1 и x_2 – точки перегиба. В первой вогнутость переходит в выпуклость, во второй – выпуклость в вогнутость.

Исследование функции, построение ее графика

Алгоритм исследования.

I. Исследование самой функции. Необходимо установить

1) Область определения функции, ее особые точки, вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения кривой с осями координат

3) Функция четная, нечетная или общего вида

4) Функция периодическая или не периодическая

II. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$. Асимптоты.

III. Исследование производной функции. Необходимо определить

1) Точки максимума и минимума функции

2) Интервалы возрастания и убывания функции

IV. Исследование второй производной

1) Точки перегиба

2) Интервалы выпуклости и вогнутости функции

Пример 1: Исследовать функцию и построить график этой функции

$$y = \frac{4x}{x^2+1}.$$

I.

1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть $(-\infty\,;\infty)$. Следовательно, у этой кривой нет особых точек, нет и вертикальных асимптот.

2. Кривая пересекает оси координат в начале координат. Следовательно, первая характерная точка графика $(0\,;0)$.

3. Кривая нечетная: $\frac{4(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{4x}{x^2+1}$, следовательно, она симметричная относительно начала координат.

4. Функция непериодическая.

II.

Вертикальных асимптот нет.

Определяем наклонные асимптоты кривой, уравнение асимптоты $y=kx+b$, причем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x^2+1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0,$$

Поскольку уравнение асимптоты $y=0$, асимптотой функции является ось OX.

III.

1. Определим первую производную

$$y'=\frac{4(x^2+1-2xx)}{(x^2+1)^2}=-\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2},$$

приравниваем ее нулю, откуда получаем еще две характерные (критические) точки $x=-1$, $x=1$, координаты этих точек на плоскости $(-1;-1)$, $(1;1)$. Рассмотрим первую из этих точек $x=-1$, левее ее производная $y'<0$, правее $y'>0$, следовательно, это точка минимума функции. Левее точки $x=1$ производная $y'>0$ правее она отрицательна, значит это точка максимума функции.

2. Знак первой производной определяется выражением $(-(x^2-1))$, следовательно, она положительна на интервале $(-1;1)$, в остальных областях она отрицательна. Итак, функция убывает на интервале $(-\infty;-1)$, возрастает на интервале $(-1;1)$, затем опять убывает на $(1;\infty)$.

IV.

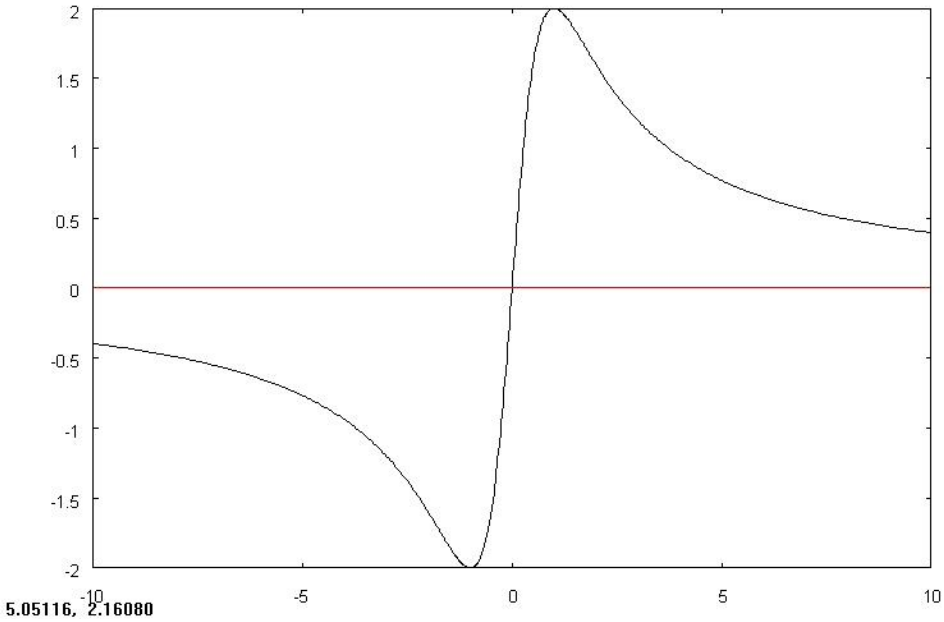
1. Определяем вторую производную функции:

$$y'=-4\frac{2x(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)^4}=-8x\frac{x^2+1-2x^2+2}{(x^2+1)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Приравниваем производную нулю и получаем еще три характерные точки функции, одна из которых $x=0$ уже известна. Две другие $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. На координатной плоскости они имеют координаты $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$. Знак второй производной определяется ее числителем. Левее точки $x=-\sqrt{3}$ она отрицательна, правее $y''>0$. Следовательно, это точка перегиба. Левее точки $x=0$ имеем $y''>0$, правее $y''<0$., еще одна точка перегиба. Левее точки $x=\sqrt{3}$ получаем $y''<0$, правее $y''>0$, третья точка перегиба.

2. Поскольку других точек, в которых вторая производная меняет знак у функции нет, можно утверждать, что на интервале $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ кривая выпуклая, на интервале $\left(-\sqrt{3};0\right)$ кривая вогнутая, на интервале $\left(0;\sqrt{3}\right)$ кривая опять выпуклая и, наконец, на интервале $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ - вогнутая.

В итоге график функции имеет вид



На рисунке отчетливо наблюдаются точки максимума и минимума функции и три точки перегиба. Видим также, что кривая «прижимается» к оси OX при x, стремящимся как к плюс-, так и к минус- бесконечности, следовательно, асимптота единая.

Пример 2: Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{36x}{(x-1)^2}$.

Область существования данной функции – вся числовая ось, кроме точки $x=1$.
Функция непериодическая (нет тригонометрических функций), общего вида (не четная, не нечетная).
Определим вначале все характерные точки графика, то есть точки пересечения с осями координат, особые точки, точки максимума и минимума, точки перегиба. Для этого вычислим первую и вторую производные

$$y' = 36\frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = 36\frac{(x-1)-2x}{(x-1)^3} = -\frac{36(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$y'' = -36\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = -36\frac{(x-1)-3(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{72(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Исследуя функцию и ее производные, устанавливаем, что имеется одна особая точка $x=1$ и еще три характерных точки $x=-2$, $x=-1$, $x=0$. Составим таблицу по результатам исследования

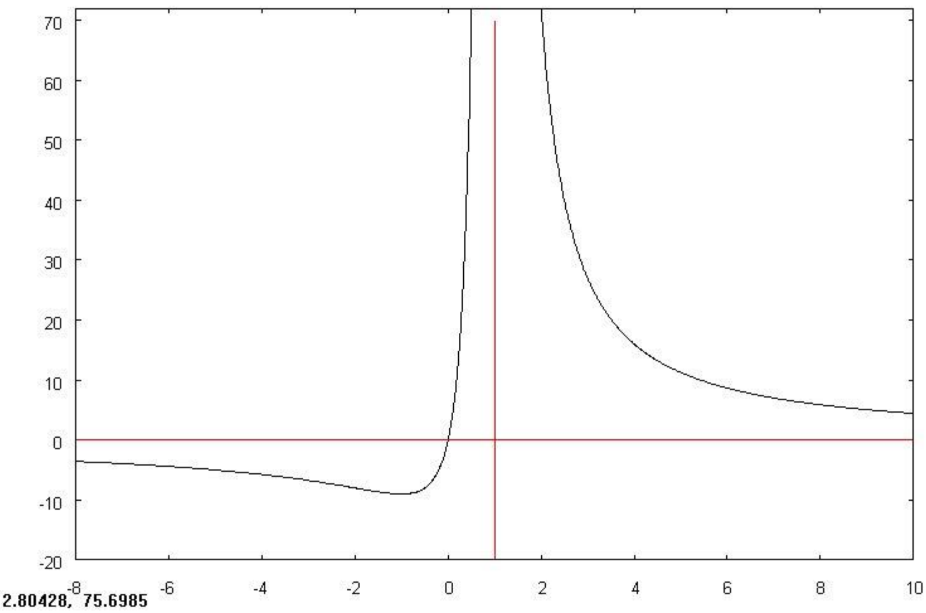
x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y	<0	-8	<0	-9	<0	0	>0	н.с.	>0
y'	<0		<0	0	>0		>0	н.с.	<0
y''	<0	0	>0	>0	>0		>0	н.с.	>0
Примеч.	$y<0$, убыв., выпукл.	Т. Пер.	$y<0$, убыв., вогн.	Min	$y<0$, возр., вогн.		$y>0$, возр., вогн.	Н.с.	$y>0$, убыв., вогн.

В таблице собрана вся информация о функции, примечания позволяют проще построить ее график.

Определим наклонную асимптоту кривой $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{36x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0.$$


70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
2.80428, 75.6985