Лекция 12

- Условие существования решений матричных уравнений.
- Системы линейных алгебраических уравнений и матричные уравнения.
- Правило Крамера их решения.
- Условие существования решений систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).
- Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).
- Структура множества решений однородных и неоднородных систем линейных уравнений как линейных подпространств и линейных многообразий соответственно.

Решение матричных уравнений

Рассмотрим матричные уравнения, в которых неизвестной является матрица.

1. $AX = B$.

В этом уравнении матрица A – квадратная матрица порядка n. Количество строк матрицы В также должно быть равно n. Число столбцов матрицы B может быть любым. Очевидно, что в случае невырожденной матрицы A данное уравнение имеет единственное решение. Умножим обе части уравнения слева на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

тогда $X = A^{-1}B$ – решение данного уравнения.

2. $XA = B$.

В этом уравнении матрица A – квадратная матрица порядка n. Количество столбцов матрицы В также должно быть равно n. Число строк матрицы B может быть любым. Очевидно, что в случае невырожденной матрицы A данное уравнение имеет единственное решение.

$XA = B$.

Умножим обе части уравнения справа на A^{-1}:

$$XA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

тогда $X = B \cdot A^{-1}$.

3. $AXB = C$.

Умножим обе части уравнения слева на A^{-1}, справа на B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

тогда $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Зам. A и B – квадратные матрицы и $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Решение систем линейных уравнений.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В матричном виде это уравнение может быть записано в виде:
$AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы ; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Матрица

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется расширенной матрицей системы .

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор чисел $(x_1,...,x_n)$, при подстановке которых в систему вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы обращается в истинное равенство.

Решить систему линейных уравнений – значит найти все её решения.

Система линейных уравнений может быть *однородной* (если все $b_i = 0$) и неоднородной (если хотя бы один из $b_i \neq 0$).

По количеству решений системы линейных уравнений делятся на:

–совместные (существует решение);

- несовместные (нет решений).

Совместные системы линейных уравнений делятся на:

–определенные (имеет ровно одно решение);

–неопределенные (имеет более одного решения).

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как всегда имеет тривиальное решение ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ...$x_n = 0$).

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными,* если множества их решений совпадают.

Элементарными преобразованиями системы называются элементарные преобразования строк расширенной матрицы. Элементарные преобразования приводят к эквивалентным системам.

Формулы Крамера.

Если число уравнений и число неизвестных совпадают ($m = n$) и $\det A \neq 0$, то система линейных уравнений $AX = B$ имеет и притом единственное решение, которое может быть найдено с помощью формул Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где $\det A$ – определитель матрицы A; а $\det A_i$ – определитель,который получен из определителя матрицы A заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Доказательство.

1.Докажем существование решения.

$AX = B,\ \det A \neq 0 \ \Rightarrow \exists \ A^{-1}$.

Умножим обе части исходного уравнения слева на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B\ .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{t} \Rightarrow$$

$$\bar{X} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & A_{21}b_2 + & \dots & +A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + & A_{22}b_2 + & \dots & +A_{n2}b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}b_1 + & A_{2n}b_2 + & \dots & +A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j.$$

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni} = \sum_{j=1}^{n} b_jA_{ji} \Rightarrow$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

2.Докажем единственность.

Доказываем методом от противного. Предположим, что существует два решения: $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Подставим их в *i* уравнение:

$$\xi_1 a_{i1} + \xi_2 a_{i2} + \ldots + \xi_n a_{in} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\eta_1 a_{i1} + \eta_2 a_{i2} + \ldots + \eta_n a_{in} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(\xi_1 - \eta_1) a_{i1} + (\xi_2 - \eta_2) a_{i2} + \ldots + (\xi_n - \eta_n) a_{in} = 0.$$

Если решения $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ не совпадают, то хотя бы одна из разностей $(\xi_i - \eta_i) \neq 0$ $\Rightarrow$столбцы

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, а значит, detA=0, что противоречит условию теоремы.

Критерий совместности системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

Для того что бы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ был равен рангу матрицы A (rang $\tilde{A}$ = rang$A$).

Доказательство.

Элементарные преобразований приводят нас к эквивалентным системам. При помощи элементарных преобразований строк и перестановки столбцов расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы $AX=B$ можно привести к одному из следующих видов:

$$1.\ \tilde{A} \sim \tilde{A}' = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & * & * & \dots & * & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & * & \dots & * & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

где $\exists\, b'_k \neq 0$ при $k > r$.

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

$$\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} \tilde{A}' > r,$$
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A' = r.$$

Получили, что $\operatorname{rang} \tilde{A} \neq \operatorname{rang} A$. В новой системе, эквивалентной исходной системе, уравнение в котором $b'_k \neq 0$ $(k > r)$ имеет вид: $x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \ldots + x_n \cdot 0 = b'_k \neq 0 \implies$ система несовместная.

$$2.\ \tilde{A} \sim \tilde{A}' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & & b'_n \end{array}\right)$$

Такой случай возможен, если $m = n$.

$$\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} \tilde{A}' = n,$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A' = n \implies$ существует и притом единственное решение этой системы (так как $\det A \neq 0$), которое можно найти с помощью формул Крамера.

$$3.\ \tilde{A} \sim \tilde{A}' = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & * & \ldots & * & * & \ldots & * & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & * & * & \ldots & * & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{rr} & * & \ldots & * & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

где все

$b'_k = 0$ при $k > r$.

$\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} \tilde{A}' = r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$. Переставим столбцы, с которых начинаются ступеньки, на первые r мест и с помощью элементарных преобразований строк добьемся того, чтобы на главной диагонали базисного минора стояли 1, а все остальные элементы базисного минора были равны 0.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получили систему, эквивалентную исходной. Система **совместная неопределенная**, т. е. имеет множество решений. Неизвестные $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_r$, столбцы которых находятся в базисном миноре, называются базисными неизвестными; все остальные неизвестные ($\widetilde{x}_{r+1}, \dots, \widetilde{x}_n$) – свободные неизвестные.

Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = -\tilde{a}_{1r+1}\tilde{x}_{r+1} - \ldots - \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n + \tilde{b}_1 \\ \tilde{x}_2 = -\tilde{a}_{2r+1}\tilde{x}_{r+1} - \ldots - \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n + \tilde{b}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}_r = -\tilde{a}_{rr+1}\tilde{x}_{r+1} - \ldots - \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n + \tilde{b}_r. \end{cases}$$

Тогда решение нашей системы

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = -\tilde{a}_{1r+1}c_1 - \ldots - \tilde{a}_{1n}c_{n-r} + \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_2 = -\tilde{a}_{2r+1}c_1 - \ldots - \tilde{a}_{2n}c_{n-r} + \tilde{b}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}_r = -\tilde{a}_{rr+1}c_1 - \ldots - \tilde{a}_{rn}c_{n-r} + \tilde{b}_r, \\ \tilde{x}_{r+1} = c_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}_n = c_{n-r}, \end{cases}$$

где $c_1 \ldots c_{n-r} \in R$.

Свойства решений однородной системы линейных уравнений (О.С.Л.У.).

1. О.С.Л.У. всегда совместна, так как всегда имеет тривиальное решение ($x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$).
2. Если число уравнений О.С.Л.У. меньше числа неизвестных, то эта система имеет ненулевое решение. (так как rang $A \le m < n$)
3. Сумма решений О.С.Л.У. также является ее решением.

   Доказательство.

   Пусть M_0 - множество решений О.С.Л.У.,

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in M_0 \Rightarrow$$

$$A(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = A\vec{\xi} + A\vec{\eta} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{\xi} + \vec{\eta} \in M_0$$

4. Произведение решения О.С.Л.У. на любое действительное число также является решением этой системы.

Доказательство.

$$\vec{\xi} \in M_0 \Rightarrow A(\lambda\vec{\xi}) = \lambda A\vec{\xi} = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\vec{\xi} \in M_0.$$

Определение. Совокупность линейно независимых решений О.С.Л.У. $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}$ образует базис в пространстве всех решений и называется *фундаментальной системой решений* (*r=rang A*), если любое решение $\vec{\eta} \in M_0$ может быть представлено в виде линейной комбинации решений $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}$:

$$\vec{\eta} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + \ldots + c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}.$$

5. Если rang $A = r < n$, то фундаментальная система решений состоит из (n-r) линейно независимых решений.

Доказательство.

1) Приведем матрицу к следующему виду:

$$A \sim A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1\,r+1} & \dots & \tilde{a}_{1\,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2\,r+1} & \dots & \tilde{a}_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r\,r+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Выразим базисные неизвестные:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = -\tilde{a}_{1r+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n \\ \tilde{x}_2 = -\tilde{a}_{2r+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{x}_r = -\tilde{a}_{rr+1}\tilde{x}_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_m . \end{cases}$$

Покажем, что в M_0 существует совокупность из (n-r) линейно независимых решений. Обозначим

$$\tilde{x}_{r+1} = c_1, \tilde{x}_{r+2} = c_2, \ldots, \tilde{x}_n = c_{n-r}.$$

$$\vec{X} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1\,r+1} \\ \ldots \\ -\tilde{a}_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1\,r+2} \\ \ldots \\ -\tilde{a}_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}_2} + \ldots + c_{n-r} \underbrace{\begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1\,n} \\ \ldots \\ -\tilde{a}_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}_{n-r}}$$

Покажем, что решения $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}$ линейно независимы. Составим их линейную комбинацию:

$$\alpha_1 \vec{\xi}_1 + \alpha_2 \vec{\xi}_2 + \ldots + \alpha_{n-r} \vec{\xi}_{n-r} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 \tilde{a}_{1\,r+1} - \alpha_2 \tilde{a}_{1\,r+2} - \ldots - \alpha_{n-r} \tilde{a}_{1\,n} \\ \ldots \\ -\alpha_1 \tilde{a}_{r\,r+1} - \alpha_2 \tilde{a}_{r\,r+2} - \ldots - \alpha_{n-r} \tilde{a}_{r\,n} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\alpha_i = 0, i = 1, 2, .., n - r \Rightarrow \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r} - \text{Л.Н.З.}$$

2. Пусть $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in M_0$. Покажем, что любое решение $\vec{\eta} \in M_0$ может быть представлено в виде линейной комбинации решений $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}$ то есть

$$\vec{\eta} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + \ldots + c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}.$$

Умножим $\vec{\xi}_1$ на η_{r+1}, $\vec{\xi}_2$ на $\eta_{r+2}, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}$ на η_n.
Сложим их и вычтем

$$\eta_{r+1}\vec{\xi}_1 + \eta_{r+2}\vec{\xi}_2 + \ldots + \eta_n \vec{\xi}_{n-r} - \vec{\eta} =$$

$$\begin{pmatrix} -\widetilde{a}_{1\,r} \cdot \eta_{r+1} \\ \ldots \\ -\widetilde{a}_{r\;r+1} \cdot \eta_{r+1} \\ \eta_{r+1} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\widetilde{a}_{1\,r+2} \cdot \eta_{r+2} \\ \ldots \\ -\widetilde{a}_{r\;r+2} \cdot \eta_{r+2} \\ 0 \\ \eta_{r+2} \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} -\widetilde{a}_{1\,n} \cdot \eta_n \\ \ldots \\ -\widetilde{a}_{r\,n} \cdot \eta_n \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \ldots \\ \eta_r \\ \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1r}\cdot\eta_{r+1}-\tilde{a}_{1\,r+2}\eta_{r+2}-\ldots-\tilde{a}_{1n}\cdot\eta_n \\ \ldots \\ -\tilde{a}_{r\,r+1}\cdot\eta_{r+1}-\tilde{a}_{r\,r+2}\cdot\eta_{r+2}-\ldots-\tilde{a}_{rn}\cdot\eta_n \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\delta}$$

Так как $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}, \vec{\eta}$ - решения О.С.Л.У., то линейная комбинация решений также является решением системы. Следовательно, $\vec{\delta} \in M_0 \Rightarrow b_1, b_2, \ldots, b_r$ являются линейной комбинацией свободных неизвестных $b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n$, которые равны нулю $\Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0 \Rightarrow$

$$\vec{\delta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\eta} = \eta_{r+1}\vec{\xi}_1 + \eta_{r+2}\vec{\xi}_2 + \ldots + \eta_n\vec{\xi}_{n-r}.$$

Следствие. Пусть $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}\}$ - Ф.С.Р. системы $AX=0$. Тогда

$$\forall \vec{\eta} \in M_0$$

$$\vec{\eta} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + \ldots + c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}.$$

Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений (Н.С.Л.У.).

Пусть M - множество решений Н.С.Л.У. $AX=B$, а M_0 - множество решений соответствующей О.С.Л.У. $AX=0$.

1. Для любых решений $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in M$ разность $\vec{\xi} - \vec{\eta} \in M_0$.

Доказательство.

$$\vec{\xi}, \vec{\eta} \in M \Rightarrow A(\vec{\xi}) = B, A(\vec{\eta}) = B \Rightarrow$$

$$A(\vec{\xi} - \vec{\eta}) = A\left(\vec{\xi}\right) - A\left(\vec{\eta}\right) = B - B = 0 \Rightarrow \vec{\xi} - \vec{\eta} \in M_0$$

2. Для любых решений $\vec{\xi} \in M$ и $\vec{\eta} \in M_0$ сумма $\vec{\xi} + \vec{\eta} \in M$.

Доказательство.

$$\vec{\xi} \in M, \vec{\eta} \in M_0 \Rightarrow A(\vec{\xi}) = B, A(\vec{\eta}) = 0 \Rightarrow$$

$$A(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = A\left(\vec{\xi}\right) + A\left(\vec{\eta}\right) = B + 0 = B \Rightarrow \vec{\xi} + \vec{\eta} \in M.$$

Из доказанного утверждения следует, что найдя одно решение неоднородной системы и складывая его с каждым решением однородной системы, мы получим все решения системы $AX=B$.

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений состоит из суммы частного решения неоднородной системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.