Последовательности

Функция, заданная на множестве натуральных чисел N, называется ***последовательностью***.

Аргумент этой функции обозначается n, а сама функция x_n.

Таким образом, числовая последовательность задана, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное число x_n.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются **членами последовательности**.

Принято обозначать последовательность символом $\{x_n\}$.

Последовательности бывают числовыми, если все ее элементы – числа и функциональными, когда ее элементы – функции.

Примеры.

1. $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n\in N} = 1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \dots\dots$ – числовая последовательность,

2. $\left\{\dfrac{\sin(nx)}{n}\right\}_{n\in N} = \sin x, \dfrac{\sin(2x)}{2}, \dfrac{\sin(3x)}{3}, \dfrac{\sin(4x)}{4}, \dfrac{\sin(5x)}{5}, \dots\dots, x\in[0, 2\pi],$ – функциональная последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists$ число m $: \forall\, n \in N \;\Rightarrow a_n \geq m.$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists$ число M $: \forall n \in N \;\Rightarrow a_n \leq M.$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$\exists \quad m$ и $M \quad : \forall n \in N \ \Rightarrow \ m \le a_n \le M.$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если
$\forall\, n \in N$ выполняется $a_{n+1} > a_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если
$\forall\, n \in N$ выполняется $a_{n+1} < a_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если
$\forall\, n \in N$ выполняется $a_{n+1} \ge a_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если
$\forall\, n \in N$ выполняется $a_{n+1} \le a_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **монотонной**, если она возрастающая, убывающая, невозрастающая или неубывающая.

Предел числовой последовательности

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$ или $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

или

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a} \Leftrightarrow \boxed{\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right)}$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся последовательностью***. В противном случае последовательность называют ***расходящейся***.

Рассмотрим

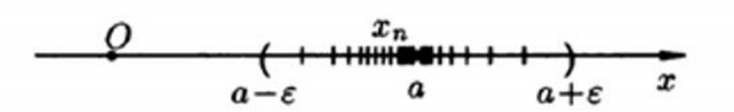
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\text{или} \quad x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

Интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ называется $\varepsilon -$ окрестностью числа a.

Значит, определение предела последовательности можно сформулировать так:

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если в любую $\varepsilon -$ окрестностью числа a попадают все члены последовательности, кроме, может быть, конечного их числа.



Теорема Вейерштрасса *(без доказательства)*:

Любая ограниченная сверху монотонно возрастающая (или ограниченная снизу монотонно убывающая) последовательность имеет предел, причём этот предел равен её точной верхней (или нижней) грани.

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называет ***бесконечно большой***, если

$$\forall M > 0 \quad \exists N = N(M): \quad \forall n \geq N \Rightarrow \quad |x_n| > M,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называет ***бесконечно малой***, если

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(M): \quad \forall n > N \Rightarrow \quad |x_n| < \varepsilon,$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Число *e*

Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ \dots$ возрастает и ограниченна сверху, а значит по теореме Вейерштрасса сходится. Ее пределом является иррациональное число $e = 2{,}718281828\dots$ - число Непера. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Примеры.

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-10n^2+1}{3n^3+4n^2-n+1}$.

   Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-10n^2+1}{3n^3+4n^2-n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{10}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{3}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{3n}$

   Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{3n} = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{4n-3}{4n+7}-1\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-10}{4n+7}\right)^{3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-10}{4n+7}\right)^{\frac{4n+7}{-10}\cdot\left(\frac{-10}{4n+7}\right)\cdot 3n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-30n}{4n+7}} = e^{-\frac{30}{4}} = e^{-7.5}.$$

3. Последовательность $(-1)^{n+1} = 1, -1, 1, -1\dots\dots$ не имеет предела, и значит, расходится.

Последовательность $b_n = b_1, b_2, b_3........$ называется **подпоследовательностью** последовательности $a_n = a_1, a_2, a_3........$, если все ее элементы b_n являются элементами последовательности a_n.

К примеру, последовательность $\left\{\frac{1}{3^{2n}}\right\} = \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^6}, ...$ является подпоследовательностью последовательности $\left\{\frac{1}{3^n}\right\} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{3^6}, ...$

Существует теорема, доказывающая, что если последовательность сходится к некоторому значению, то все ее подпоследовательности сходятся и к тому же значению.

Предел функции.

Если при вычислении предела последовательности всегда $n \to \infty$, то, вычисляя предел функции $f(x)$, следует оговаривать, к чему стремится ее аргумент. Рассмотрим, в чем различие между пределами последовательности и функции

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

Если в последовательности n возрастает, принимая только значения из множества натуральных чисел, то x может возрастать, принимая любые вещественные значения. Пределы последовательности и функции в этом случае равны нулю.

В то же время имеет смысл рассмотреть предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Стоящая под знаком предела функция увеличивается с приближением ее аргумента x к нулю, оставаясь положительной, причем, при x сколь угодно близких к нулю, ее значение становится все большим и большим. Ясно, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

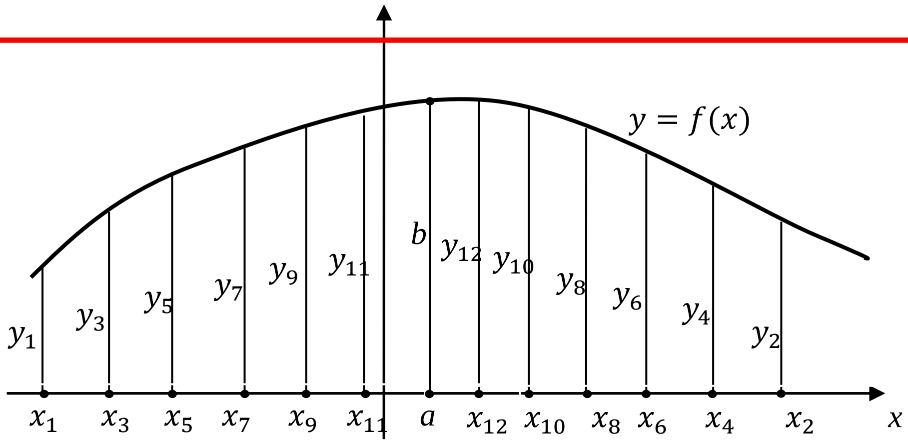
Поскольку при $x=0$ рассматриваемая функция не существует, этот ее предел дает важнейшую информацию – показывает поведение функции в окрестности предельной точки. При подходе к этой точке она уходит в бесконечность.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Определение 1 (на «языке последовательностей» или «по Гейне»):

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n, n \in N$ $(x_n \neq a)$ стремящейся к a (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$, $n \in N$ сходится к b (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$).



$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Приведенное определение предела функции в точке, связанное с рассмотрением числовых последовательностей, неудобно тем, что реально невозможно изучить все числовые последовательности, сходящиеся к числу a. Поэтому для исследования существования предела пользуются вторым определением, равносильным первому.

Определение 2 (на «языке $\varepsilon - \delta$» или «по Коши»):

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{если } \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\text{:}\ \forall x\text{: } \underbrace{|x-a| < \delta,\ x \neq a}_{\text{или }\ 0 < |x-a| < \delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Словесная формулировка приведенной фразы такова:

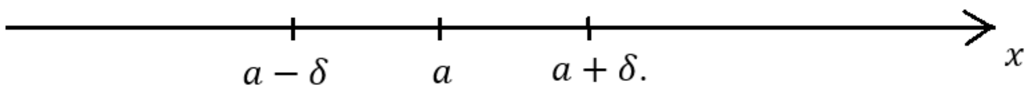
Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого положительного ε существует такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что для любого x такого, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Выясним геометрический смысл определения предела. Неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно следующим неравенствам:

$$-\delta < x - a < \delta$$

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

Интервал $(a - \delta, a + \delta)$ называется δ – окрестностью точки a.



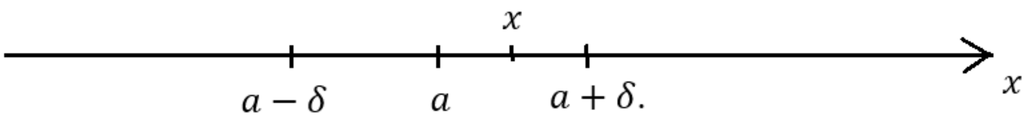
Неравенство

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

а, следовательно, и неравенство

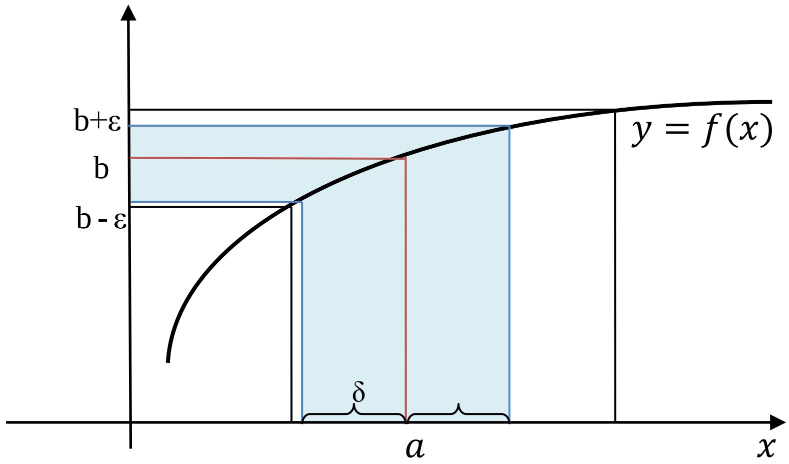
$$0 < |x - a| < \delta$$

означает, что точка x лежит в δ – окрестностью точки a.



Значит, определение 2 еще можно сформулировать так:

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой ε - окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε - окрестности точки b.



Доказана эквивалентность определений *1* и *2*, то есть из *1* следует *2*, и наоборот.

Пример: Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5$.

Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : \ |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$ (по определению),

т.е. $|2x-6| < \varepsilon$ или $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит,
если для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то $\forall x : |x-3| < \delta\left(=\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5$.

Теорема единственности предела:
Если функция имеет предел в точке a, то он единствен.

Доказательство: Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B, \quad A \neq B$.
Предположим, например, что $A > B$.
Возьмем $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$. Из определения предела:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow$ Для $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists \delta_1 > 0 : \ \forall x: \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

или

$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$.

Рассмотрим левую часть неравенства: $-\varepsilon < f(x) - A \quad \Leftrightarrow$

$$f(x) > A - \varepsilon$$

$$f(x) > A - \frac{A-B}{2} = \frac{2A-A+B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

то есть $\quad f(x) > \frac{A+B}{2}$.

Аналогично,

Для $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$. Из определения предела:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = B \Leftrightarrow$ Для $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists \delta_2 > 0$: $\forall x$: $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$.

или

$|f(x) - B| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - B < \varepsilon$.

Рассмотрим правую часть неравенства: $f(x) - B < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$

$$f(x) < B + \varepsilon$$

$$f(x) < B + \frac{A-B}{2} = \frac{2B+A-B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

то есть $\quad f(x) < \frac{A+B}{2}$.

Рассмотрим пересечение δ_1 – окрестности и δ_2 – окрестности.

Пересечение этих окрестностей является непустым множеством, и в этом непустом множестве одновременно выполняются неравенства $f(x) < \frac{A+B}{2}$ и $f(x) > \frac{A+B}{2}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией** (бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Функция $A(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (бесконечно большой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \pm\infty$.

Функция $\frac{1}{A(x)}$ при $x \to x_0$ бесконечно малая, а $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется **бесконечно малыми одного порядка малости** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, причем $0 < /K/ < \infty$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка малости**, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой и конечной величины – величина бесконечно малая.
3) Произведение конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.

Лемма. Значение функции отличается от ее предельного значения на бесконечно малую.
Другими словами, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $f(x) = b + \beta(x)$, то $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$.

<u>Необходимость.</u> Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ и } f(x) = b + \beta(x)$$

докажем, что $\beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.

Из второго определения предела имеем

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{если } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

но $f(x)-b=\beta(x)$, следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\beta(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

следовательно, $\beta(x)-$ бесконечно малая.

Достаточность. Пусть

$$f(x)=b+\beta(x),\quad \text{причем } \lim_{x\to a}\beta(x)=0,$$

нужно доказать, что $\lim_{x\to a} f(x)=b$.

Из $\lim_{x\to a}\beta(x)=0$ следует

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\beta(x)-0|<\varepsilon$$

и поскольку

$$f(x)=b+\beta(x),$$

имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to a}f(x)=b$$

Доказано.

Свойства пределов функций

1) **Предел постоянной равен самой постоянной**. Это свойство следует из определения предела.

2) **Постоянную можно выносить за знак предела**.

В самом деле,

пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b,$$

в соответствии с теоремой

$$f(x)=b+\alpha(x),\ \text{причем } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Очевидно,

$$K\cdot f(x)=K\cdot b+K\cdot\alpha(x),\ \text{ где } K \text{ постоянная.}$$

Но $K\cdot\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, что следует из свойств бесконечно малых, тогда функция $K\cdot f(x)$ отличается от $K\cdot b$ на бесконечно малую величину, следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} K\cdot f(x)=K\cdot b=K\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3) **Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, если они существуют.**

Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=c,$$

Тогда

$$f(x)=b+\alpha(x) \text{и } g(x)=c+\gamma(x),$$

где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=0$,

Рассмотрим

$$f(x)+g(x)=b+c+\underline{\alpha(x)+\gamma(x)}.$$

Но подчеркнутые члены – это бесконечно малая величина, и значит,

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x).$$

4) **Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если они существуют** (доказывается аналогично).

5) **Предел отношения двух функций:** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$**, если оба предела существуют и** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

6) **Если** $f(x)\le g(x)$ **для всех** x **в некоторой окрестности точки** $\boldsymbol{x_0}$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

7) **Если** $h(x)\le f(x)\le g(x)$ **для всех** x **в некоторой окрестности точки** $\boldsymbol{x_0}$ **и** $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ (**принцип двух полицейских**).