# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.

## Классическое определение вероятности. Расчет вероятностей с помощью теорем сложения и умножения вероятностей

### КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Пусть события $E_1, E_2, ..., E_N$ в данном опыте равновозможны, попарно несовместны, в результате любого опыта одно из них обязательно должно произойти. Будем называть их *исходами* испытания. Предположим, что событию $A$ благоприятствуют $M$ исходов испытания. Тогда вероятностью события $A$ в данном опыте называют отношение $M/N$. Итак, мы приходим к следующему определению.

*Вероятностью P (A) события в данном опыте называется отношение числа M исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу N равновозможных исходов опыта:*

$$P(A) = \frac{M}{N} \qquad (1.1)$$

**Пример**: Пусть испытание состоит в подбрасывании двух монет: 5 и 10 рублей. Тогда множество исходов будет содержать четыре события: {ГГ, ГР, РГ, РР}, Г – герб, Р – решка, первая буква относится к монете 5 рублей, вторая - к монете 10 рублей, N = 4. Пусть событие A = {ГГ} (выпадение двух гербов), тогда $M_A = 1$; B = {ГР, РГ} (выпадение ровно одного герба), в этом случае $M_B = 2$, C = {ГГ, РГ, ГР} (выпадение хотя бы одного герба), здесь $M_C = 3$. Тогда по формуле (1.1) вероятности событий равны:

P(A) = 1/4, P(B) =2/4 = 1/2, P(C) = 3/4.

**Задача 1.1.** 13 человек рассаживается за круглым столом случайным образом. Найти вероятность того, что Иванов и Петров окажутся рядом.

**Решение**

Пусть Иванов сел на произвольное место за столом. Для Петрова осталось 13 – 1 = 12 мест, $N$ = 12, около Иванова есть только два соседних места, слева и справа, т. е. $M$ = 2, поэтому

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}..$$

**Задача 1.2.** Брошены два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

**Решение**

Число возможных исходов при бросании двух игральных кубиков равно $N = 6 \cdot 6 = 36$. Выпишем благоприятные исходы: (1,6); (2,5); (3, 4); (4,3); (5,2); (6,1). Значит $M$ = 6 и $P(A)$ = 6/36 =1/6.

**Задача 1.3.** Случайно открывают книгу, в которой 185 страниц. Найти вероятность того, что номер страницы оканчивается на цифру “2”.

**Решение**

$M$ = 18 + 1 = 19, $N$ = 185, $P(A)$ = 19/185.

**Задача 1.4.** Брошены 3 игральных кубика. Найти вероятность того, что на них выпадет одинаковое количество очков.

**Решение**

Число возможных исходов при бросании трех игральных кубиков равно $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Выпишем благоприятные исходы: (1, 1, 1); (2, 2, 2), ..., (6, 6, 6), поэтому $M$ = 6 и $P(A)$ = 6/216 = 1/36.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**3.1.** На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, ..., 9. 3 карточки выбирают случайным образом и раскладывают в порядке выбора. Найти вероятность того, что полученное при этом число (от 012 до 987) делится на 36.

**3.2.** Брошены две игральных кости (кубика). Найти вероятность того, что на одной из них число выпавших очков на 3 больше, чем на другой.

**3.3.** Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном числе (от 100 до 999) все цифры разные.

**3.4.** Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Все получившиеся кубики перемешаны. Найти вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенных грани.

**3.5.** В урне 4 черных и 6 белых шаров. Из урны не глядя вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

## РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Совмещением* (или *произведением*) двух событий $A$ и $B$ называется событие, состоящее в совместном наступлении как события $A$, так и события $B$. Это событие будем обозначать $AB$ или $A \cap B$.

Аналогично, *совмещением нескольких событий*, например $A$, $B$ и $C$, называется событие $D = ABC$, состоящее в совместном наступлении событий $A$, $B$ и $C$.

*Суммой* (или *объединением*) двух событий $A$ и $B$ называется событие С, заключающееся в том, что произойдет хотя бы одно из событий $A$ или $B$ (либо одно из них, либо оба вместе). Это событие обозначается так: $C = A+B$ или $A \cup B$.

*Суммой* нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Запись $D = A+B+C$ означает, что событие $D$ есть сумма событий $A$, $B$ и $C$.

Пусть $A$ и $B$ – два несовместных события, причем в $n$ испытаниях событие $A$ произошло $m_1$ раз, а событие $B$ произошло $m_2$ раз. Тогда частоты событий $A$ *и* $B$

соответственно равны $\omega(A) = m_1/n$, $\omega(B) = m_2/n$. Так как события *A и B* несовместны, то событие *A+B* в данной серии опытов произошло $m_1 + m_2$ раз. Следовательно,

$$\omega(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \omega(A) + \omega(B).$$

Таким образом, частота события *A + B* равна сумме частот событий *A и B.* Но при больших *n* частоты $\omega(A)$, $\omega(B)$ и $\omega(A+B)$ мало отличаются от соответствующих вероятностей *P(A), P(B)* и *P(A +B):* Поэтому естественно принять, что если *A* и *B*– несовместные события, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

Правило сложения вероятностей для двух случайных событий по индукции легко распространяется на сумму любого конечного числа случайных событий: *если случайные события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, то вероятность их суммы, т. е. вероятность появления хотя бы одного из этих событий, равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.4}$$

**Задача 1.11.** Мишень состоит из центрального круга – “яблочка” и двух концентрических колец. Вероятности попадания в “яблочко” и кольца соответственно равны 0,2; 0,25; 0,35. Найти вероятность попадания в мишень (событие *D*).

**Решение:**

Событие $A_1$ = {попадание в “яблочко”}, $A_{2,3}$ = {попадание в одно из колец} попарно несовместны и $D = A_1 + A_2 + A_3$. По правилу сложения вероятностей $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 = 0{,}8$.

События $A_1$, $A_2$, ..., $A_N$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и одно из них обязательно должно произойти при рассматриваемом испытании, т. е. их сумма $A_1 + A_2 + ... + A_N$ есть достоверное событие.

**Примеры**. Пусть $X$ – число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости. События $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$, $X = 4$, $X = 5$, $X = 6$ образуют полную группу. Точно так же полную группу образуют и события $X$ четно, $X$ нечетно или события $X \leq 2$, $X \geq 3$. Из этих примеров видно, что из системы событий, связанных с данным испытанием, можно различным образом конструировать полные группы событий.

**Теорема**. Если случайные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

Два события $A$ и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если они образуют полную группу (то есть появление одного из них равносильно непоявлению другого). Так как $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, то по вероятности одного из противоположных событий можно находить вероятность другого:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}), \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.6}$$

Во многих задачах приходится находить вероятность совмещения событий $A$ и $B$, если известны вероятности событий *A и B.*

*Условной вероятностью* $P(B/A)$ будем называть вероятность события $B$ при условии осуществления события $A$.

**Теорема умножения**. Вероятность совмещения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (1.7)$$

**Задача 1.12.** Студент знает правильный ответ на 20 экзаменационных вопросов из 30. Какова вероятность того, что он:

а) знает ответ на два заданных ему вопроса;

б) не знает ответа на оба заданных ему вопроса?

**Решение**

Пусть событие $A$ = {студент знает ответ на первый вопрос}, $B$ = {студент знает ответ на второй вопрос}.

$P(A)$ = 20/30. $P(B/A)$ = 19/29 (из 29 оставшихся вопросов студент знает ответ на 19, так как на один из известных ему вопросов он уже ответил). Тогда $P(A \cdot B)$ = $P$(студент знает два вопроса) = $P(A) \cdot P(B/A)$ = $\frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} = \frac{38}{87} \approx 0{,}437$.

Пусть событие $C$ = {студент не знает ответ на первый вопрос}, $D$ = {студент не знает ответ на второй вопрос}.

$P(C)$ = 10/30. $P(C/\mathrm{D})$ = 9/29 (из 29 оставшихся вопросов студент не знает ответ на 9, так как на один из вопросов он уже не ответил). Тогда $P(A \cdot B)$ = $P$(студент не знает два вопроса) = $P(A) \cdot P(B/A)$ = $\frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{9}{87} \approx 0{,}103$.

*Теорема умножения* легко обобщается на любое конечное число событий. Так, например, в случае трех событий $A$, $B$, $C$:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cdot B)). \qquad (1.10)$$

В общем случае

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cdot A_2)) \ldots P(A_n/(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})). \qquad (1.11)$$

**Задача 1.13.** Из колоды в 52 карты случайным образом берут 3 карты. Найти вероятность того, что все три карты – тузы (событие $D$).

**Решение**

$D = A \cdot B \cdot C$, где $A$ = { первая карта – туз}, $B$ = { вторая карта – туз}, $C$ = {третья карта – туз}. В силу равной возможности исходов, обеспеченной перемешиванием карт, здесь можно воспользоваться классической формулой (1.1), как для расчета безусловных, так и для расчета условных вероятностей.

$P(A) = 4/52$ (в колоде из 52 карт 4 туза), $P(B/A) = 3/51$ (осталась 51 карта, среди них – 3 туза), $P(C/(A \cdot B)) = 2/50$ (осталось 50 карт, среди них – 2 туза). Тогда по формуле (1.10)

$P(D) = P$ (три туза) $= 4/52 \cdot 3/51 \cdot 2/50 = 0{,}00018$.

Для вычисления вероятности появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ можно найти сначала вероятность противоположного события, которое заключается в том, что не произойдет ни одно из указанных событий. Это событие соответствует совмещению событий, противоположных рассматриваемым: $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$.

Окончательная формула будет:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \qquad (1.12)$$

**Задача 1.14.** В группе 10 студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадают дни рождения (событие $A$). Считаем, что в году 365 дней.

**Решение**

Противоположное событие $A$ можно представить себе так: если предложить каждому студенту заштриховать в календаре года дату своего рождения, то ни одна дата в календаре не окажется заштрихованной дважды, т. е. первый студент может заштриховать любой день из 365 дней, второй – один из 364 оставшихся, третий – один из 363 оставшихся и т. п. Тогда

$$P(\overline{A}) = \underbrace{\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{356}{365}}_{10 \text{ сомножителей}}$$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}889$.

**Задача 1.15.** Из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара, два игрока поочередно извлекают наудачу шары без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша игрока, первым начавшего игру.

**Решение**

Обозначим события: $A_i$ = {первый игрок в $i$-той попытке вынимает белый шар}, $i$ = 1, 2, 3, $B_i$ = {второй игрок в $i$-той попытке вынимает белый шар}, $i$ = 1, 2, П = {выигрыш всей игры первым игроком}. Тогда $\overline{A_i}$ = {первый игрок в $i$-той попытке вынимает черный шар}. $\overline{B_i}$ {Второй игрок в $i$-той попытке вынимает черный шар}. Заметим, что для осуществления первым игроком второй попытки, он и в первой попытке вынимает черный шар, и второй игрок в своей попытке вынимает черный шар, иначе игра бы уже закончилась. Аналогично, для осуществления первым игроком третьей попытки необходимо, чтобы он и второй игрок во всех предыдущих попытках вынули черные шары, четвертой попытки у первого игрока нет, так как в урне 4 черных шара. Таким образом, первый игрок может вынуть белый шар или с первой, или со второй, или с третьей попытки, значит

$$\text{П} = A_1 + A_2 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} + A_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}.$$

Тогда 1-ая попытка 1 игрока: $P(A_1) = 2/6 = 1/3; \quad P(\overline{A_1}) = 2/3;$

1-ая попытка 2 игрока: $P(B_1) = 2/5; \quad P(\overline{B_1}) = 3/5;$

2-ая попытка 1 игрока: $P(A_2) = 2/4 = 1/2; \quad P(\overline{A_2}) = 1/2;$

2-ая попытка 2 игрока: $P(B_2) = 2/3; \quad P(\overline{B_2}) = 1/3;$

3-я попытка 1 игрока: $P(A_3) = 2/2 = 1.$

В этом случае

$$P(\Pi)= P(A_1)+P(A_2)\cdot P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{B}_1)+P(A_3)\cdot P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=0,6.$$

Задачи для самостоятельного решения.

**5.1.** Телефонный номер состоит из 7 цифр. Найти вероятность того, что в нём есть одинаковые цифры.

**5.2.** Среди 20 лотерейных билетов находятся 5 выигрышных. Найти вероятность того, что среди 4 купленных билетов имеется а) хотя бы один выигрышный билет ; б) ровно один выигрышный?

**5.3.** Студент разыскивает нужную ему формулу в четырех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем и четвертом справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

**5.4.** Среди десяти приборов три бракованных. Для эксперимента  взято три прибора. Определить вероятность того, что взят: а) хотя бы один бракованный прибор; б) только один бракованный прибор.

**5.5.** В магазин от разных поставщиков поступают четыре партии мебели. Вероятности того ,что партии будут доставлены в срок, соответственно равны 0,9; 0,8; 0,85 и 0,7. Найти вероятность того, что из этих четырех партий хотя бы одна не будет доставлена в срок.

**5.6.** Владелец пластиковой карточки банкомата забыл последние три цифры кода и набрал их наугад. Какова вероятность набора верного номера, если известно, что все эти три цифры различны?

**5.7.** Из колоды в 36 карт вынимают карты без возврата до первого появления туза, но не более четырех. Найти вероятность того, что вынуто не менее трех карт.

**5.8.** В автобусе находятся 7 пассажиров, причем каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из оставшихся 7 остановок автобуса. Найти вероятности того, что все выйдут на разных остановках.

**5.9.** Кубик бросают до тех пор, пока не выпадут две «шестерки» подряд (одна за другой). Какова вероятность того, что кубик придется бросать 4 раза?

**5.10.** В системе имеется элемент с малой надежностью $p$ = 0,5, имеются запасные элементы той же надежности. Сколько раз надо дублировать указанный элемент, чтобы повысить надежность построенного таким образом блока до величины $\mathcal{P}$ = 0,9?

## Ответы

**3.1.** 0,0306. **3.2.** $\frac{1}{6} \approx 0,1667$. **3.3.** 0,72. **3.4.** 0,064. **3.5.** $\frac{8}{15} \approx 0,5333$.

**5.1.** 0,93952. **5.2.** а) $\frac{232}{323} \approx 0,7183$; б) $\frac{363}{969} \approx 0,3756$. **5.3.** 0,9976. **5.4.** а) $\frac{17}{24} \approx 0,708$; б) $\frac{21}{40} \approx 0,525$. **5.5.** 0,5716. **5.6.** $\frac{1}{720} \approx 0,00139$. **5.7.** 0,7873. **5.8.** 0,0061. **5.9.** $\frac{5}{216} \approx 0,02315$. **5.10.** 4.