

# МАТЕМАТИКА, 3-ий семестр

## Типовые задачи

### I. Числовые ряды

1. Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , если:

$$1) a_n = \frac{7n+5}{2n-1}; \quad 2) a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+3n+5}}; \quad 3) a_n = \frac{n+3}{2n^3-1}.$$

Ответ обосновать.

2. Исследовать на сходимость в зависимости от параметра  $\alpha$  числовой ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ .

3. Исследовать на сходимость числовой ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(2n+1)}{n!}$	2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+2)\ln(3n+2)}$	3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2+5n+3}{2n^2-1} \right)^{2n}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$
5) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$	6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \right)$	7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{3^n}$	8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$	10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n-1} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \right)$	11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{3^n(n+1)^3}$	12) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+7) \sin \left( \frac{1}{n+3} \right)$
13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{\sqrt[3]{3n+2}}$	14) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+2}{(2n^2+3)\ln(n+4)}$	15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n+2)}{n^2+1}$	16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3 \cdot (-1)^n}{5^n}$

### II. Функциональные ряды

1. Применяя признак Вейерштрасса, доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$  сходится равномерно на

всей числовой прямой.

2. Доказать, что функция  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx^3+5)}{n(n+2)}$  непрерывна на всей числовой прямой.

3. Найти область абсолютной и условной сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+5}(x+3)^n}{(n^2+5n+13)2^n}$	2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x-5)^n}{(n^2+2n+3)2^n}$	3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(3n-1)5^n}$	4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+2)(x+3)^n}{(n+2)4^n}$	6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} \cdot e^{-nx}$	7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{(x-1)^n}$	8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n-5}}{n+1} (x+7)^n$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням  $x$  функцию  $f(x)$  и указать область сходимости полученного ряда:

1) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$	2) $f(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$	3) $f(x) = \ln^3 \sqrt{\frac{2+5x}{5-2x}}$	4) $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$
5) $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$	6) $f(x) = \frac{5-2x}{x^2-5x+6}$	7) $f(x) = xe^{-x^2}$	8) $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}$

5. Используя возможность почленного интегрирования, разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = \arcsin(3x)$ .

6. Найти сумму ряда: 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$ .

### III. Ряды Фурье

- Разложить в ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$  функцию  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ 2, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$  Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-4)$ .
- Разложить в ряд Фурье на  $[-2, 2]$  функцию  $f(x) = 1 - x$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(4)$ .
- Разложить в ряд Фурье на  $(-3, 3)$  функцию  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-3, 0], \\ 1, & x \in (0, 3). \end{cases}$  Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-6)$ .
- Разложить в ряд Фурье на  $[-4, 4]$  функцию  $f(x) = \frac{x}{2}$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-4)$ .
- Разложить в ряд Фурье на  $[-3, 3]$  функцию  $f(x) = 3 - |x|$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-5)$ .
- Разложить в ряд Фурье на  $[-2, 2]$  функцию  $f(x) = 4 - x^2$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(4)$ .
- Разложить функцию  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi] \end{cases}$  в ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-3\pi)$ .
- Разложить в ряд Фурье по синусам на  $[0, 3]$  функцию  $f(x) = 3 - x$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-3)$ .
- Разложить в ряд Фурье по синусам на  $[0, 1]$  функцию  $f(x) = x - x^2$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-2)$ .

10. Разложить в ряд Фурье на  $[0, 2]$  по синусам функцию  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$  Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(3)$ .
11. Разложить в ряд Фурье по синусам на  $[0, \pi]$  функцию  $f(x) = \begin{cases} \pi/2, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$  Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-\pi/2)$ .
12. Разложить функцию  $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \in (2, 4] \end{cases}$  в ряд Фурье по синусам на  $[0, 4]$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-5)$ .
13. Разложить в ряд Фурье по косинусам на  $[0, 2]$  функцию  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1], \\ x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$  Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-3)$ .
14. Разложить функцию  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi/2], \\ 0, & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$  в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-3\pi/2)$ .
15. Разложить функцию  $f(x) = x - 1$  в ряд Фурье по косинусам на  $[0, 2]$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(-4)$ .
16. Разложить в ряд Фурье на  $[-1, 3]$  функцию  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы полученного ряда  $S(x)$ . Найти  $S(7)$ .
17. Разложить в ряд Фурье на  $(2, 4)$  функцию  $f(x) = x - 3$ . Построить графики заданной функции  $f(x)$  и суммы ряда  $S(x)$ . Найти  $S(5)$ .

#### IV. Интегралы, зависящие от параметра

1. Найти  $J'(y)$ , если  $J(y) = \int_1^2 e^{yx^2} \frac{dx}{x}$ .
2. Найти  $J(y)$ , если  $J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$ .
3. Доказать, что интеграл  $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(13xy+5)}{1+x^2} dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .
4. С помощью дифференцирования по параметру вычислить  $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-yx}}{xe^{3x}} dx, y > -3$ .
5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-7x^2} - e^{-yx^2}}{x} dx, y > 0.$$

6. С помощью дифференцирования несобственного интеграла по параметру вычислить интеграл

Дирихле. Используя полученный результат, вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0.$

7. С помощью интегрирования несобственного интеграла по параметру вычислить интеграл

Пуассона. Используя полученный результат, вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+4x} dx$

## V. Элементы ТФКП

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z$ :

$$1) z = \frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}; 2) z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

2. Найти все корни уравнений и изобразить их на комплексной плоскости:

1) $z^4 = 16$	2) $\sqrt{2}z^2 = 1+i$	3) $z^3 = 8i$	4) $z^4 = 81i$
5) $z^4 = -1$	6) $z^3 = -27$	7) $z^3 = 125$	8) $z^6 = 1-i\sqrt{3}$

3. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

1) $1 \leq  z  \leq 4, 0 \leq \arg z \leq \pi/3$	2) $ z+2i  > 1,  z  \leq 4$	3) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$	4) $\operatorname{Re}(z(1-i)) < \sqrt{2}$
5) $1 <  z+2i  \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 0$	6) $ z-1  >  z+1 $	7) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$	8) $ z-1  > 3,  \arg z  < \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить значения функции  $f(z) = e^z$  в точках:

1) $z = 2\pi i$	2) $z = \pi i$	3) $z = \pi i/2$	4) $z = -\pi i/2$	5) $z = \pi i/4$
-----------------	----------------	------------------	-------------------	------------------

5. Найти все точки комплексной плоскости, в которых дифференцируема функция  $f(z)$ :

1) $f(z) = \cos(2z+3i)$	2) $f(z) = \sin(\bar{z}-z)$	3) $f(z) = \operatorname{ch}(2i\bar{z}+5)$	4) $f(z) =  z+2i ^2 + iz$
5) $f(z) = 2\bar{z} + \operatorname{Im}(iz).$	6) $f(z) = \sin(iz+3)$	7) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$	

6. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части  $u$  и значению  $f(z_0)$ :

1)  $u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1;$

2)  $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0;$

7. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части  $v$  и значению  $f(z_0)$ :

1)  $v = 2xy + x, f(0) = 0;$

2)  $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$

8. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в области  $1 < |z| < 3$  функцию  $f(z) = \frac{2z-2}{z^2-2z-3}.$

9. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в области  $2 < |z| < 3$  функцию  $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-6}$

10. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в области  $|z| > 3$  функцию  $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}.$

11. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z-1$  функцию  $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}.$

12. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z-3$  функцию  $f(z) = \operatorname{sh}\left(\frac{2}{3-z}\right).$  Найти вычет функции в точке  $z = 3.$

13. Определить тип особых точек функции  $f(z) = \frac{z^3}{z-1} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$  и найти вычет в этих точках

14. Вычислить интегралы от ФКП:

1) $\int_{ABC} \bar{z} \operatorname{Re} z dz$ , где $ABC$ – ломаная $z_A = 0, z_B = i, z_C = 2 + i.$	2) $\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z + 1}{4z^2 + \pi^2} dz$ , где $\Gamma = \{z :  z - i  = 2\}.$	3) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos(3z+1)}{z(z^2+2z+5)} dz$ , где $\Gamma = \{z :  z - 2 - 3i  = 1\}$	4) $\int_{\Gamma} \overline{(z+2)} dz$ , где $\Gamma$ – дуга $y = x^2$ между $z = 0$ и $z = -1 + i.$
5) $\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch}(z)}{z^2+9} dz$ , где $\Gamma = \{z :  z+1+i  = 1\}$	6) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z-i)} dz$ , где $\Gamma = \{z :  z  = 3\}$	7) $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$ , где $AB = \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$	

15. С помощью вычетов вычислить несобственный интеграл:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+2}{x^4+5x^2+4} dx$	2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x}{x^4+10x^2+9} dx$	3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+49)^2}$	4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+2x+17} dx$
5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4x^2+3} dx$	6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$	7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9} dx$	

## VI. Преобразование Лапласа

1. Вывести формулу для изображения функции  $f(t) = t^2 \cos 5t$ .

2. Найти изображение функции  $f(t) = e^{-t} t^2 + \sin^3 t + 1$ .

3. Решить операционным методом задачу Коши для ДУ:

1)  $y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ .

2)  $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 1$

3)  $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$

4)  $y'' + y = 2 \cos t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

5)  $y'' - y' = 2(1 - t)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

4. Операционным методом решить задачу Коши для системы ДУ:

1) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 3, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$$

2) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y + 2, \\ \frac{dy}{dt} = 4y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

3) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$$