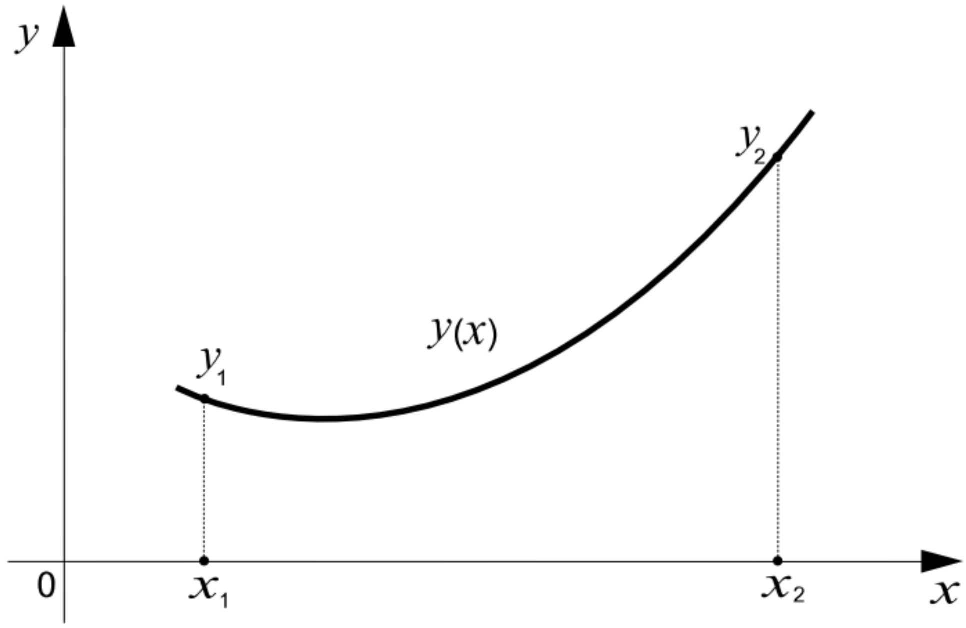
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Для выделения частного решения уравнения n-го порядка нами рассматривалась задача Коши, состоящая в задании *начальных условий*: в некоторой точке $x = x_0$ задаются значения искомой функции и всех ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно.

Однако в ряде практических задач приходится встречаться с условиями другого типа. Например, требуется нахождение частного решения по известным значениям искомой функции в нескольких точках или значения искомой функции и ее производных известны в различных точках x. Подобные задачи носят название *краевые задачи.* Рассмотрим несколько таких задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Для дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ найти частное решение, удовлетворяющее условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $x_1 \neq x_2$. Т.е. требуется найти интегральную кривую, проходящую через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2)



Пример. Решить краевую задачу $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Решение. Имеем линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1 e + C_2 \dfrac{1}{e} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 \dfrac{e^2-1}{e} = 1 \end{cases}$$

Откуда $C_1 = \dfrac{e}{e^2-1}$, $C_2 = -\dfrac{e}{e^2-1}$. Искомое частное решение:

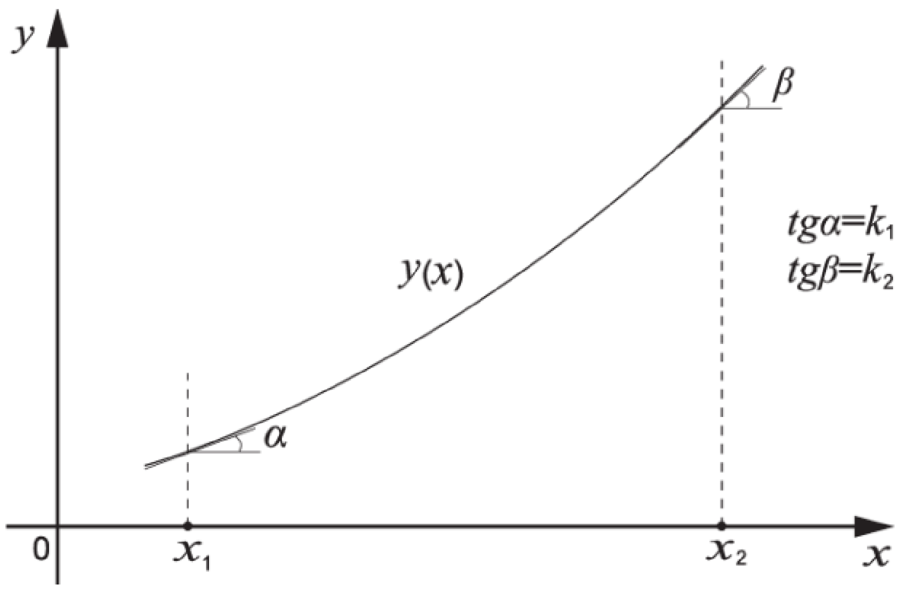
$$y(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x}).$$

2. Для дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ поставлены условия $y'(x_1) = k_1$, $y'(x_2) = k_2$, $x_1 \neq x_2$. В этом случае требуется найти интегральную кривую, обладающую свойством: при $x = x_1$ и $x = x_2$ угловой коэффициент касательной равен, соответственно, k_1 и k_2 .

Пример. Решить краевую задачу $y''+y=0$, $y'(0)=0$, $y'(1)=1$.

Решение. Имеем линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm i$. Общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \cos x.$$



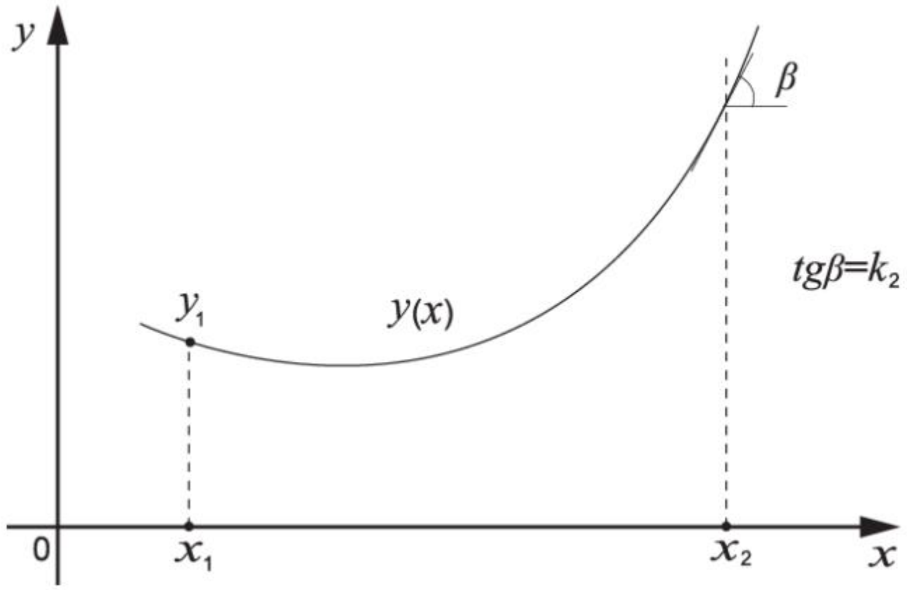
Для решения краевой задачи найдем производную общего решения и воспользуемся краевыми условиями:

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \sin x$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ -C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\dfrac{1}{\sin 1} \end{cases}$$

Искомое частное решение $y(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin 1}$.

3. Для дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ поставлены условия $y(x_1) = y_1$, $y'(x_2) = k_2$. Имеем смешанную краевую задачу. Требуется найти интегральную кривую, проходящую через точку (x_1, y_1) и имеющую при $x = x_2$ угловой коэффициент, равный k_2 .



Пример. Решить краевую задачу

$y''-2y'+y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(1)=1.$

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет равные корни $\lambda_1=\lambda_2=1$. Общее решение уравнения

$$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Для решения краевой задачи найдем производную общего решения и воспользуемся краевыми условиями:

$$y'(x)=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0 \\ C_1e+2C_2\cdot e=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=\dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

Искомое частное решение $y(x)=\dfrac{xe^x}{2e}$.

4. Общий вид линейной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка может иметь одну из следующих двух форм:

$$\begin{cases} \alpha_1y(x_1)+\beta_1y'(x_1)=\gamma_1 \\ \alpha_2y(x_2)+\beta_2y'(x_2)=\gamma_2 \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \alpha_1y(x_1)+\alpha_2y(x_2)=\delta_1 \\ \beta_1y'(x_1)+\beta_2y'(x_2)=\delta_2 \end{cases}$$

Рассмотренные выше краевые условия являются частными случаями общего вида линейной краевой задачи. Так краевые условия первого вида получены из первой формы общего вида при $\beta_1=\beta_2=0$, второго вида - при $\alpha_1=\alpha_2=0$, смешанные краевые условия возникают при $\alpha_2=\beta_1=0$.

Важно иметь в виду, что условия существования и единственности решения краевой задачи существенно отличаются от условий существования решения задачи Коши. Даже простейшие краевые задачи могут не иметь решения, могут иметь несколько или бесконечно много решений. Покажем это на примере.

Пример. Для дифференциального уравнения $y''+y=0$ решить краевую задачу при краевых условиях

а) $y(0)=y(\pi)=0$;

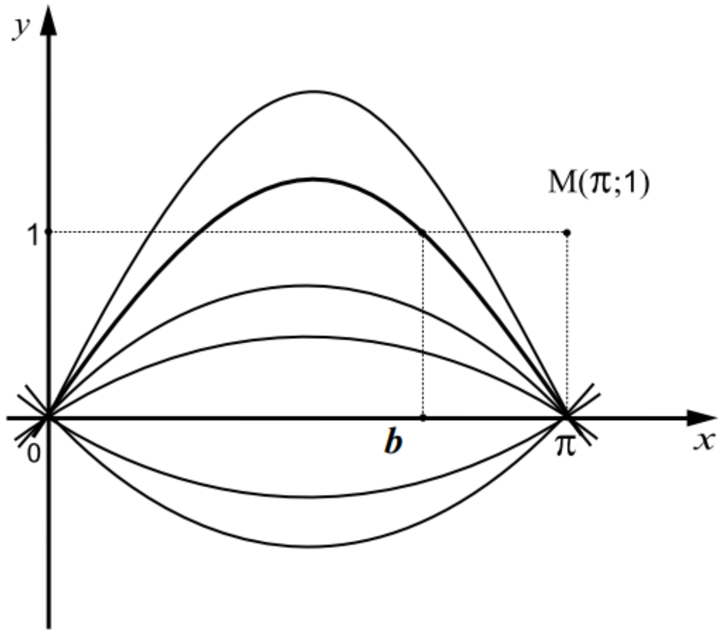
б) $y(0)=0, \quad y(\pi)=1$;

в) $y(0)=0; \quad y(b)=1, \quad b\in(1;\pi)$.

Решение. Общее решение дифференциального уравнения

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

а) Условие $y(0)=0$ приводит к уравнению $C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0$, откуда $C_1=0$ и $y(x)=C_2\sin x$. Второе условие $y(\pi)=0$ при этом выполняется при любом C_2: $C_2\cdot\sin\pi=0$. Следовательно, краевая задача имеет бесконечное множество решений: функция $y=C_2\sin x$ удовлетворяет заданным краевым условиям для любого C_2. Геометрически это означает, что через две точки $(0;0)$ и $(\pi;0)$, заданные в краевых условиях, проходит бесконечное множество интегральных кривых данного дифференциального уравнения .



б) Условию $y(0)=0$, как показано в пункте а), удовлетворяют функции $y(x)=C_2\sin x$. Но при этом второе условие $y(\pi)=1$ не может быть выполнено, так как $C_2\sin\pi=0$ для любых C_2. Следовательно, краевая задача не имеет решения. Через две точки $(0;0)$ и $(\pi;1)$ не проходит ни одна интегральная кривая .

в) Условию $y(0)=0$ удовлетворяет функция $y(x)=C_2\sin x$. Подстановка второго условия $y(b)=1$ приводит к уравнению $C_2\sin b=1$, откуда $C_2=\dfrac{1}{\sin b}$ и мы получаем единственное частное решение $y=\dfrac{\sin x}{\sin b}$. Данная краевая задача имеет единственное решение .

Вопросы существования и единственности решения краевых задач в общем случае являются гораздо более сложными, чем решение задачи Коши. В нашем курсе мы эти вопросы опускаем. Решение же конкретных краевых задач, которые часто встречаются на практике, осуществляется так, как было показано выше, и приводит к решению системы линейных уравнений относительно произвольных постоянных.

Замечание. Постановка краевых задач и их решение для систем дифференциальных уравнений осуществляется аналогично соответствующим задачам для одного уравнения.

Шарнирно-опертая	*Консольная*