ИДЗ №3

Криволинейные интегралы. Тройные интегралы.

Задача 1. Вычислить криволинейные интегралы.

1.1. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \dfrac{e^{3y}}{\sqrt{1+e^{2y}}}\,ds$, где AB - дуга кривой $x=1+e^{y}$, заключенная между точками $A(2\,;0)$ и $B(3\,;\ln 2)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(x+\dfrac{y}{4}\right)^{-3} dx + \sqrt{y}\; e^{-(x/4+y/16)} dy$, где $L-$ломаная с вершинами $A(-2\,;0)$, $B(-4\,;0)$, $C(-8\,;16)$.

1.2. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \left(4x^4 y + 2x^2 y^3 + 3y^5\right) ds$, где AB - полуокружность $y=\sqrt{2x-x^2}$.

b) Вычислить $\int\limits_{L} (x+5y)\,dx + (-x+4y)\,dy$, где $L-$четверть окружности $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.3. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \dfrac{6xy^4 - 4xy^3}{\sqrt{1+4x^2 y^4}}\,ds$, где AB - дуга кривой $y=\dfrac{4}{4x^2+1}$, заключенная между точками $A(0\,;4)$ и $B\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \sqrt{x-\dfrac{y}{3}}\,dx + y\, e^{(x/3-y/9)} dy$, где L - ломаная с вершинами $A(4\,;0)$, $B(3\,;0)$, $C(6\,;9)$.

1.4. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \dfrac{\left(x^2+1\right)}{\left(y^2+1\right)\sqrt{10+9xy-9x^2}}\,ds$, где AB - дуга кубической параболы $y=x^3+3x$, заключенная между точками $A(0\,;0)$ и $B(1\,;4)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(3x^2+y^2\right)dx + (xy-5)\,dy$, где $L-$дуга параболы $y=3x-x^2$, расположенная выше оси OX и пробегаемая по часовой стрелке.

1.5. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \dfrac{y}{\sqrt{(1+x)^4+4}}\,ds$, где AB - дуга гиперболы $y=2+\dfrac{2}{x+1}$, заключенная между точками $A(-3\,;1)$ и $B(-2\,;0)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(x^2+y^2\right)dx + (xy+6)\,dy$, где $L-$дуга параболы $y=-3x-x^2$, расположенная выше оси OX и пробегаемая по часовой стрелке.

1.6.

a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)}{\sqrt{10-9y^2}}\, ds$, где AB - дуга кривой $y=\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$, заключенная между точками $A\left(-\frac{\pi}{12};1\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{6};-1\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(-4x^2+y^2\right)dx+(xy+3)\,dy$, где L – дуга кривой $y=-2x-x^2$, расположенная выше оси OX и пробегаемая по часовой стрелке.

1.7. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y^2-3y+5}{\sqrt{1+e^{2y}}}\, ds$, где AB - дуга кривой $x=2+e^y$, заключенная между точками $A(3;0)$ и $B\left(e^2+2;2\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \frac{x\,dx-y\,dy}{x^2+y^2}$, где L – пробегаемая против часовой стрелки часть окружности $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases} \left(\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.8. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{2xy}{\sqrt{5-4y}}\, ds$, где AB - дуга параболы $y=1-x^2$, заключенная между точками $A(1;0)$ и $B(3;-8)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(x^2-y^2\right)dx+xy\,dy$, где L - отрезок прямой от точки $A(1;1)$ до $B(3;4)$.

1.9. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{(2+x)^4+1}}\, ds$, где AB - дуга гиперболы $y=1+\frac{1}{x+2}$, заключенная между точками $A(-3;0)$ и $B\left(-\frac{5}{2};-1\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} (16x-4y)\,dx+(y-4x)\,dy$, где L – четверть окружности $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$, пробегаемая против часовой стрелки.

1.10. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{arctg\, x}{y}\, ds$, где AB - дуга кривой $y=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$, заключенная между точками A и B с абсциссами 0 и 1 соответственно,

b) Вычислить $\int\limits_{L} (2x+y)dx+(2y-3)dy$, где L – ломаная с вершинами $A\left(\frac{1}{3};0\right)$, $B\left(\frac{1}{3};1\right)$, $C\left(\frac{2}{3};3\right)$.

1.11. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \left(x^3y-3xy^3\right)ds$, где AB - полуокружность $y=\sqrt{4x-x^2}$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(-2xy+y^2\right)dy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ $(-1 \le x \le 1)$, пробегаемая в направлении возрастания x.

1.12. а) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y^2 \cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{17-16y^2}}\, ds$, где AB – дуга кривой $y = \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$, заключенная между точками $A\left(\frac{\pi}{6}\,;0\right)$ и $B\left(\frac{5\pi}{24}\,;1\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} x\, e^y\, dx + xy\, dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1\,;1)$ до $B(2\,;4)$.

1.13. а) Вычислить $\int\limits_{AB} (x+2)\sqrt{4y+5}\, ds$, по дуге параболы $y = x^2 + 4x + 3$, заключенная между точками $A(-1\,;0)$ и $B(1\,;8)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} \frac{(x+y-1)\,dx + (x-y)\,dy}{(x+y)^2}$, где L – отрезок прямой от точки $A(0\,;2)$ до $B(1\,;3)$.

1.14. а) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{2xy}{\sqrt{17-4y}}\, ds$, где AB - дуга параболы $y = 4 - x^2$, заключенная между точками $A(3\,;-5)$ и $B(5\,;-21)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} e^{x+y}\, dx + y\, dy$, где L – ломаная с вершинами $O(0\,;0)$, $A(4\,;0)$, $B(0\,;2)$.

1.15. а) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{2xy^2}{\sqrt{1+4x^2y^4}}\, ds$, где AB - дуга кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$, заключенная между точками $A(0\,;1)$ и $B\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} (2x+y)\,dx + \left(2y - \frac{3}{5}\right) dy$, здесь L – ломаная ABC, причем $A(2\,;0)$, $B(2\,;3)$, $C(4\,;5)$.

1.16. а) Вычислить $\int\limits_{AB} \sqrt{256x^2 + 81y^2}\, ds$, где AB - дуга эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, расположенная в первом квадранте,

b) Вычислить $\int\limits_{L} (x-y)\,dx + (y-x)\,dy$, где L – пробегаемая против часовой стрелки четверть окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

1.17. а) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{1+(x+1)^4}}\, ds$, где AB - дуга кривой $x + 1 = \frac{1}{y-2}$, заключенная между точками $A(-2\,;1)$ и $B\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L} x \ln y\, dx + \frac{x^2}{2y}\, dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(1\,;e)$ до $B(2\,;2e)$.

1.18. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{xy^3}{\sqrt{16x^2+64y^2}}\,ds$, где AB - дуга гиперболы $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$, заключенная между точками $A\left(2\sqrt{2}\,;0\right)$ и $B\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L}(9x+y)\,dx-x\,dy$, здесь $L-$ пробегаемая против часовой стрелки часть окружности $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

1.19. a) Вычислить $\int\limits_{AB} 2x\sqrt{4y+17}\,ds$, по дуге параболы $y=x^2-4$, заключенной между точками $A(0\,;-4)$ и $B(2\,;0)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L}(10-y)\,dx+x\,dy$, где $L-$арка циклоиды $\begin{cases} x=5\,(t-\sin t) \\ y=5\,(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.

1.20. a) Вычислить $\int\limits_{AB}\left(3x^2-2x\right)y\,ds$ по полуокружности $y=\sqrt{2x-x^2}$,

b) Вычислить $\int\limits_{L}\frac{(x+y+2)\,dx-(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}$, где $L-$отрезок прямой от точки $A(-1\,;-2)$ до $B(0\,;-4)$.

1.21. a) Вычислить $\int\limits_{AB}(x+1)\sqrt{4y-3}\,ds$, по дуге параболы $y=x^2+2x+2$, заключенной между точками $A(1\,;5)$ и $B(3\,;17)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L}(x+2y)\,dx+(x+y)\,dy$, здесь $L-$ пробегаемый против часовой стрелки полуэллипс $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}(0\le t\le\pi)$.

1.22. a) Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{y^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{5-4y^2}}\,ds$, где AB- дуга синусоиды $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, заключенная между точками $A\left(\frac{\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{12}\,;1\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_{L}\left(x+\frac{y}{2}\right)^{-2}dx+y\,e^{-(x/2+y/4)}dy$, где $L-$ломаная с вершинами $A(-1\,;0)$, $B(-2\,;0)$, $C(-4\,;4)$.

1.23. a) Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{3y}\,ds$, где AB - дуга кривой $y=\frac{1}{6}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)$, заключенная между точками A и B с абсциссами 0 и 1 соответственно,

b) Вычислить $\int\limits_{L}2xy\,dx-x^2\,dy$, здесь $L-$ дуга параболы $x=2y^2$ от точки $A(0\,;0)$ до $B(2\,;1)$.

1.24. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \sqrt{9x^2 + y^2}\ ds$, по дуге эллипса $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, расположенной в первом квадранте,

b) Вычислить $\int\limits_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, где L – ломаная с вершинами $O(0\,;0)$, $A(\ 2;0)$, $B(4\,;2)$.

1.25. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{xy\left(1-8y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, где AB - дуга гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, заключенная между точками $A(2\,;0)$ и $B\left(\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$,

b) Вычислить $\int\limits_L x^2 y\ dx - xy^2\ dy$, здесь L – пробегаемая против часовой стрелки окружность

$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

1.26. a) Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{arctg\ x}{y} ds$, где AB - дуга кривой $y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$, заключенная между точками A и B с абсциссами 0 и 1 соответственно,

b) Вычислить $\int\limits_L (2x+y)dx + (2y-3)dy$, где L – ломаная с вершинами $A\left(\frac{1}{3}\,;0\right)$, $B\left(\ \frac{1}{3};1\right)$, $C\left(\frac{2}{3}\,;3\right)$.

Задача 2.

Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл. Область интегрирования ограничена контуром L, пробегаемым в положительном направлении.

2.1. a) $\int\limits_L \left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} + xy^2 + e^y\right) dx + \left(x^2 y - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(3\,;3)$, $B(3\,;1)$, $C(6\,;2)$,

b) $\int\limits_L \left(y\,3^{xy} - 4y\right)dx + \left(x\,3^{xy} + 2x\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = x$.

2.2. a) $\int\limits_L \left(x^2 y + x\,e^{\left(x^2 - y^2\right)}\right) dx + \left(e^y + x - y\,e^{\left(x^2-y^2\right)}\right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y = -2x^2$, $x = y^2$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 y - \frac{y}{x^2}\,tg\frac{y}{5x}\right) dx + \left(\frac{1}{x}\,tg\frac{y}{5x} - xy^2\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

2.3. $\int\limits_L \left(\frac{8x}{y} + y \arcsin\left(\frac{xy}{50}\right)\right) dx + \left(x \arcsin\left(\frac{xy}{50}\right) - e^{x^2+y}\right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0\,;2)$, $B(0\,;4)$, $C(2\,;4)$, $D(2\,,2)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 y + 3 - x\sqrt{x^2 - y^2}\right) dx + \left(y + y\sqrt{x^2 - y^2}\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 5$.

2.4. $\int\limits_L \frac{y^2 e^{xy} + 6x}{y} dx + \left(x e^{xy} + e^{\left(x^2+y\right)}\right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0\,;1)$, $B(0\,;3)$, $C(-1\,;3)$, $D(-1\,,1)$,

b) $\int\limits_L \left(y - x e^{\left(x^2+y^2\right)}\right) dx + \left(3x - y e^{\left(x^2+y^2\right)}\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 9y$.

2.5. a) $\int\limits_L \left(\frac{y}{x^2 y^2 + 7} + \frac{3x}{y}\right) dx + \left(e^{x^2+y} + \frac{x}{x^2 y^2 + 7}\right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0\,;1)$, $B(0\,;3)$, $C(\sqrt{2}\,;3)$, $D(\sqrt{2}\,,1)$,

b) $\int\limits_L \left(xy + x\cos\left(x^2 + y^2\right)\right) dx + \left(y\cos\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 16$.

2.6. a) $\int\limits_L \left(2x + 2y + x\sqrt{9 - x^2 + y^2}\right) dx + \left(xy - y\sqrt{9 - x^2 + y^2}\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 9$.

b) $\int\limits_L \left(3^{\sin x} - xy^2\right) dx + \left(x^2 y + e^{y^3}\right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(1\,;0)$, $B(4\,;0)$, $C(4\,;3)$.

2.7. a) $\int\limits_L \left(x^2 + x\sqrt{3 + x^2 + y^2}\right) dx + \left(y\sqrt{3 + x^2 + y^2} + x + e^y\right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y = -x^2$, $x = y^2$,

b) $\int\limits_L \left(xy + x e^{\left(x^2+y^2+3\right)}\right) dx + \left(y^2 + y e^{\left(x^2+y^2+3\right)}\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 3y$.

2.8. a) $\int\limits_L \left(\frac{2xy}{x^2 y + 3} + x^2 y\right) dx + \left(\frac{x^2}{x^2 y + 3} + x\right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y = 2x^2$, $x = y^2$,

b) $\int\limits_L \left(-x^2 y + x\sqrt{5 - x^2 - y^2}\right) dx + \left(y\sqrt{5 - x^2 - y^2} + xy^2\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 4y$.

2.9. a) $\int\limits_L \frac{6y + 4x\ln x - 2x\ln y}{y} dx + \frac{xy^2 + x^2\ln y - 2x^2\ln x}{y^2} dy$, L – треугольник с вершинами $A(4\,;3)$, $B(5\,;5)$, $C(6\,;4)$,

b) $\int\limits_L \left(-x^2 y + x\sqrt{4 + x^2 + y^2}\right) dx + \left(y\sqrt{4 + x^2 + y^2} + xy^2\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 8y$.

2.10. a) $\int\limits_L \left(\frac{12x}{y} + x\,e^{\left(x^2+y^2\right)}\right)dx + \left(e^{x^2} + y\,e^{\left(x^2+y^2\right)}\right)dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0\,;6)$, $B(0\,;8)$, $C(1\,;8)$, $D(1\,,6)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 y + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + xy^2\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 6$.

2.11. a) $\int\limits_L \left(x^2 + 7y + x\sqrt{x^2 - y^2}\right)dx + \left(e^{y^2} + x - y\sqrt{x^2 - y^2}\right)dy$, L – треугольник с вершинами $A(8\,;1)$, $B(9\,;3)$, $C(10\,;2)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 3^{\left(x^3+y^3\right)} - 4y\right)dx + \left(y^2 3^{\left(x^3+y^3\right)} + e^y + 2x\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 10y$.

2.12. a) $\int\limits_L \left(xy\,e^{x^2 y} + xy^2\right)dx + \left(\frac{x^2}{2}e^{x^2 y} + e^y\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 + 5x = 0$,

b) $\int\limits_L \left(\frac{1}{x}\ln\frac{x}{y} + e^y + x\right)dx + \left(3x - \frac{1}{y}\ln\frac{x}{y}\right)dy$, L – треугольник с вершинами $A(1\,;2)$, $B(4\,;2)$, $C(3\,;5)$.

2.13. a) $\int\limits_L \left(x^3 + x\sqrt{4 + x^2 + y^2} + y\right)dx + \left(y\sqrt{4 + x^2 + y^2} + 5xy\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 6$,

b) $\int\limits_L \left(x\,arctg\left(x^2 + y^2\right) - 3xy\right)dx + \left(y\,arctg\left(x^2 + y^2\right) + e^x\right)dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(2\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(6\,;4)$, $D(2\,,4)$.

2.14. a) $\int\limits_L \left(\frac{4x}{y}\ln x - \frac{2x}{y}\ln y + e^y\right)dx + \left(\frac{x^2}{y^2}\ln y - \frac{2x^2}{y^2}\ln x\right)dy$, L – треугольник с вершинами $A(4\,;1)$, $B(4\,;5)$, $C(8\,;3)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 + x\sqrt{9 - x^2 + y^2} - y^2\right)dx + \left(xy - y\sqrt{9 - x^2 + y^2} + xy^2\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = x$.

2.15. a) $\int\limits_L \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\,\ln(xy) + e^y\right)dx + \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\,\ln(xy) + \sin y\right)dy$, L – треугольник с вершинами $A(2\,;1)$, $B(2\,;5)$, $C(4\,;3)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 y + \frac{x}{x^2 - y^2 + 8}\right)dx + \left(x - \frac{y}{x^2 - y^2 + 8}\right)dy$, L – контур, образованный кривыми $x^2 = -2y$, $x = y^2$,

2.16. a) $\int\limits_L \left(\frac{y^2}{2}\cos\left(xy^2\right) - 2x^2 y\right)dx + \left(xy\cos\left(xy^2\right) + 2xy^2\right)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 6x$.

b) $\int\limits_L \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - y^2\right)dx + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sin y\right)dy$, L – треугольник с вершинами $A(4\,;1)$, $B(4\,;5)$, $C(8\,;3)$.

2.17. a) $\int\limits_L \left(x^2 e^{\left(x^3+y^3\right)} + x^2 y \right) dx + \left(y^2 e^{\left(x^3+y^3\right)} + x \right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y = -8x^2$, $x = y^2$,

b) $\int\limits_L \frac{4x \ln x - 4x \ln y + 6x}{y} dx + \left(e^{x^2} - \frac{x^2}{y^2} \ln \frac{x^2}{y^2} \right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0\,;4)$, $B(0\,;6)$, $C(2\,;6)$, $D(2\,,4)$.

2.18. a) $\int\limits_L \left(2xy \arcsin\left(x^2 y + 1\right) - x^2 y\right) dx + \left(x^2 \arcsin\left(x^2 y + 1\right) + xy^2\right) dy$,

L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$,

b) $\int\limits_L \left(e^y - \frac{y}{x^2} tg \frac{y}{5x} \right) dx + \left(\frac{1}{x} tg \frac{y}{5x} + e^{y^2} \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(3\,;0)$, $B(3\,;2)$, $C(6\,;1)$.

2.19. a) $\int\limits_L \frac{y + y^2(xy+2)}{xy+2} dx + \frac{x + 8x(xy+2)}{(xy+2)} dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = x$.

b) $\int\limits_L \left(x\sqrt{3 + x^2 - y^2} + xe^y \right) dx + \left(xy - y\sqrt{3 + x^2 - y^2} + xy^2 \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(1\,;1)$, $B(1\,;5)$, $C(2\,;3)$.

2.20. a) $\int\limits_L \left(x \sin\left(x^2 + y^2\right) + e^y\right) dx + \left(y^3 + y \sin\left(x^2 + y^2\right)\right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(2\,;-2)$, $B(2\,;0)$, $C(4\,;1)$.

b) $\int\limits_L \left(x^2 e^{\left(x^3+y^3\right)} + 2y + e^x \right) dx + \left(y^2 e^{\left(x^3+y^3\right)} + 4x \right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

2.21. a) $\int\limits_L \left(e^{x^2} + x\sqrt{5 + x^2 + y^2} \right) dx + \left(y\sqrt{5 + x^2 + y^2} + x \right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = -4y$.

b) $\int\limits_L \left(\frac{2xy}{x^2 y + 7} + 4x^2 y \right) dx + \left(\frac{x^2}{x^2 y + 7} + xy - 7 \right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$, $C(5\,;4)$, $D(1\,,4)$.

2.22. a) $\int\limits_L \left(x \arccos \frac{x^2 + y^2}{20} + e^y \right) dx + \left(y \arccos \frac{x^2 + y^2}{20} + e^{2y} \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(-1\,;2)$, $B(-1\,;4)$, $C(-2\,;3)$,

b) $\int\limits_L \left(e^x - y^2 + x\, 2^{\left(x^2+y^2\right)} \right) dx + \left(e^{2y} + x + y\, 2^{\left(x^2+y^2\right)} \right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y = 2x^2$, $y = 4x$.

2.23. a) $\int\limits_L \left(2x + x\sqrt{4 - x^2 + y^2} + 2y \right) dx + \left(xy - y\sqrt{4 - x^2 + y^2} \right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 4$,

b) $\int\limits_L \left(xy\, e^{x^2 y} - 2xy + y^3 \right) dx + \left(e^{2y} + \frac{x^2}{2} e^{x^2 y} \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(1;5)$.

2.24. a) $\int\limits_L \left(\frac{y^2}{2} \cos(xy^2) + \frac{x+3y}{2} \right) dx + \left(4xy + xy \cos(xy^2)\right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = 3$,

b) $\int\limits_L \left(x\sqrt{x^2 + y^2 - 4} - ye^x \right) dx + \left(y\sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 2x \right) dy$, L – прямоугольник с вершинами $A(0;1)$, $B(0;6)$, $C(4;6)$, $D(4,1)$.

2.25. a) $\int\limits_L \left(\frac{1}{y} \cos\frac{x}{y} + e^y + xy^2 \right) dx + \left(x\, e^y + x^3 - \frac{x}{y^2} \cos\frac{x}{y} \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 y + \frac{x}{x^2 + y^2 + 4} \right) dx + \left(x + \frac{y}{x^2 + y^2 + 4} \right) dy$, L – контур, образованный кривыми $y^2 = x$, $y = x^3$,

2.26. a) $\int\limits_L \left(\frac{4x}{y} \ln x - \frac{2x}{y} \ln y + e^y \right) dx + \left(\frac{x^2}{y^2} \ln y - \frac{2x^2}{y^2} \ln x \right) dy$, L – треугольник с вершинами $A(4;1)$, $B(4;5)$, $C(8;3)$,

b) $\int\limits_L \left(x^2 + x\sqrt{9 - x^2 + y^2} - y^2 \right) dx + \left(xy - y\sqrt{9 - x^2 + y^2} + xy^2 \right) dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = x$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

3.1. $z = 0$, $z = 2x$, $x + y = 3$, $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$.

3.2. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $y = \sqrt{1 - z}$.

3.3. $z = 0$, $y = 0$, $z = 1 - x^2$, $y = 3 - x$.

3.4. $x = 1$, $z = 0$, $x = y^2$, $z = 2 - x$.

3.5. $z = 0$, $z = 1 - y$, $y = x^2$.

3.6. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x^2 + 3y^2$.

3.7. $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $y + z = 1$, $x = y^2 + 1$.

3.8. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $x + y = 2$, $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$.

3.9. $z = 0$, $z = 1 - y^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$.

3.10. $z = 0$, $y = x^2$, $z = \sqrt{1 - y}$.

3.11. $z = 0$, $y = 0$, $z = x^2$, $y = 1 - x$.

3.12. $x = 0$, $z = 0$, $z = y^2$, $2x + y = 2$.

3.13. $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $z = \sqrt{y}$, $y = x$.

3.14. $z=0$, $z=y$, $y=\sqrt{1-x^2}$.

3.15. $z=0$, $z=x$, $y^2=1-x$.

3.16. $x=1$, $z=0$, $z=\sqrt{y}$, $y=x$.

3.17. $z=0$, $y=2x$, $x=1$, $z=y^2$.

3.18. $y=1$, $z=0$, $y=x$, $z=x^2$.

3.19. $z=0$, $z=x$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

3.20. $z=0$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$, $z=x^2+y^2$.

3.21. $z=0$, $x=0$, $z=y^2$, $2x+3y=6$.

3.22. $y=0$, $z=0$, $z=x^2$, $3x+2y=6$.

3.23. $z=0$, $y=1$, $z=x^2+y^2$, $y=x^2$.

3.24. $z=0$, $z=5x$, $y=\sqrt{9-x^2}$.

3.25. $z=0$, $x=0$, $y=0$, $z=2x^2+3y^2$, $x+y=1$.

3.26. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $y=\sqrt{1-z}$.

Задача 4. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела.

4.1. $$64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,$$
$$y=0,\quad z=0\quad \left(y\ge 0,\ z\ge 0\right),$$
$$\mu=5\left(x^2+y^2\right)/4.$$

4.2. $$x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1,$$
$$\left(x^2+y^2\le 1\right),\quad x=0\quad \left(x\ge 0\right);$$
$$\mu=4|z|.$$

4.3. $$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=2z,$$
$$x=0,\ y=0,\ z=0\quad \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right);$$
$$\mu=10x.$$

4.4. $$x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{4}{7}z,$$
$$x=0,\ y=0,\quad \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right);$$
$$\mu=80yz.$$

4.5. $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=4z^2,$

$x=0,\ \ y=0,\ \ (x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0);$

$\mu=20z.$

4.6. $36\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,$

$x=0,\quad z=0\ \ (x\ge 0,\ \ z\ge 0),$

$\mu=\frac{5}{6}\left(x^2+y^2\right).$

4.7. $x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4,$

$\left(x^2+y^2\le 4\right);$

$\mu=2|z|.$

4.8. $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=8z,$

$x=0,\ \ y=0,\ \ z=0\ \ (x\ge 0,\ \ y\ge 0);$

$\mu=5x.$

4.9. $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{2}{5}z,$

$x=0,\ \ y=0,\ \ (x\ge 0,\ \ y\ge 0);$

$\mu=28xz.$

4.10. $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=z^2,$

$x=0,\ \ y=0,\ \ (x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0);$

$\mu=6z.$

4.11. $25\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,$

$x=0,\quad y=0,\ \ z=0$

$(x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0),$

$\mu=2\left(x^2+y^2\right).$

4.12. $x^2+y^2+z^2=9,\quad x^2+y^2=4,$

$\left(x^2+y^2\le 4\right),\quad y=0\ \ (y\ge 0);$

$\mu=|z|.$

4.13. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=6z,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; z=0 \;\; (x \geq 0, \;\; y \geq 0);$
$\mu=90y.$

4.14. $x^2+y^2=\frac{1}{25}z^2, \quad x^2+y^2=\frac{1}{5}z,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; (x \geq 0, \;\; y \geq 0);$
$\mu=14yz.$

4.15. $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=9z^2,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; (x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0);$
$\mu=10z.$

4.16. $9\left(x^2+y^2\right)=z^2, \quad x^2+y^2=4,$
$x=0, \quad y=0, \;\; z=0$
$(x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0),$
$\mu=5\left(x^2+y^2\right)/3.$

4.17. $x^2+y^2+z^2=4,$
$x^2+y^2=1, \quad \left(x^2+y^2 \leq 1\right);$
$\mu=|z|.$

4.18. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=z,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; z=0,$
$(x \geq 0, \;\; y \geq 0);$
$\mu=10y.$

4.19. $x^2+y^2=\frac{1}{49}z^2, \quad x^2+y^2=\frac{1}{7}z,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; (x \geq 0, \;\; y \geq 0);$
$\mu=10xz.$

4.20. $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=4z^2,$
$x=0, \;\; y=0, \;\; (x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0);$
$\mu=10z.$

4.21. $16\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,$

$x=0,\quad y=0,\quad z=0\quad \left(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right),$

$\mu=5\left(x^2+y^2\right).$

4.22. $x^2+y^2+z^2=16,$

$x^2+y^2=4\quad \left(x^2+y^2\leq 4\right);$

$\mu=|z|.$

4.23. $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=4z,$

$x=0,\quad y=0,\quad z=0\quad \left(x\geq 0,\ y\geq 0\right);$

$\mu=5y.$

4.24. $x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2=z,$

$x=0,\quad y=0,\quad \left(x\geq 0,\ y\geq 0\right);$

$\mu=35yz.$

4.25. $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=z^2,$

$x=0,\quad y=0,\quad \left(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right);$

$\mu=32z.$

4.26. $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{4}{7}z,$

$x=0,\quad y=0,\quad \left(x\geq 0,\ y\geq 0\right);$

$\mu=80yz.$