

МАТЕМАТИКА, 3-ий семестр

Типовые задачи

I. Числовые ряды

1. Исследовать на сходимость числового ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

$$1) \ a_n = \frac{7n+5}{2n-1}; \quad 2) \ a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 3n + 5}}; \quad 3) \ a_n = \frac{n+3}{2n^3 - 1}.$$

Ответ обосновать.

2. Исследовать на сходимость в зависимости от параметра α числового ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

3. Исследовать на сходимость числового ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(2n+1)}{n!}$	2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+2)\ln(3n+2)}$	3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n + 3}{2n^2 - 1} \right)^{2n}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$
5) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$	6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} \right)$	7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{3^n}$	8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$	10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + n - 1} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \right)$	11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{3^n (n+1)^3}$	12) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+7) \sin \left(\frac{1}{n+3} \right)$
13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{\sqrt[3]{3n+2}}$	14) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+2}{(2n^2+3)\ln(n+4)}$	15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+2)}{n^2 + 1}$	16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3 \cdot (-1)^n}{5^n}$

II.Функциональные ряды

1. Применяя признак Вейерштрасса, доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}$ сходится равномерно на

всей числовой прямой.

2. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx^3 + 5)}{n(n+2)}$ непрерывна на всей числовой прямой.

3. Найти область абсолютной и условной сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+5}(x+3)^n}{(n^2 + 5n + 13)2^n}$	2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x-5)^n}{(n^2 + 2n + 3)2^n}$	3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(3n-1)5^n}$	4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+2)(x+3)^n}{(n+2)4^n}$	6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} \cdot e^{-nx}$	7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{(x-1)^n}$	8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n-5}}{n+1} (x+7)^n$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x)$ и указать область сходимости полученного ряда:

1) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$	2) $f(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$	3) $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{2+5x}{5-2x}}$	4) $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$
5) $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$	6) $f(x) = \frac{5-2x}{x^2-5x+6}$	7) $f(x) = xe^{-x^2}$	8) $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}$

5. Используя возможность почлененного интегрирования, разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \arcsin(3x)$.

6. Найти сумму ряда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$.

III. Ряды Фурье

1. Разложить в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ 2, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$ Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-4)$.
2. Разложить в ряд Фурье на $[-2, 2]$ функцию $f(x) = 1 - x$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(4)$.
3. Разложить в ряд Фурье на $(-3, 3)$ функцию $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-3, 0], \\ 1, & x \in (0, 3). \end{cases}$ Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-6)$.
4. Разложить в ряд Фурье на $[-4, 4]$ функцию $f(x) = \frac{x}{2}$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$. Найти $S(-4)$.
5. Разложить в ряд Фурье на $[-3, 3]$ функцию $f(x) = 3 - |x|$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$. Найти $S(-5)$.
6. Разложить в ряд Фурье на $[-2, 2]$ функцию $f(x) = 4 - x^2$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(4)$.
7. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi] \end{cases}$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-3\pi)$.
8. Разложить в ряд Фурье по синусам на $[0, 3]$ функцию $f(x) = 3 - x$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-3)$.
9. Разложить в ряд Фурье по синусам на $[0, 1]$ функцию $f(x) = x - x^2$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-2)$.

10. Разложить в ряд Фурье на $[0, 2]$ по синусам функцию $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2-x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(3)$.
11. Разложить в ряд Фурье по синусам на $[0, \pi]$ функцию $f(x) = \begin{cases} \pi/2, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$ Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-\pi/2)$.
12. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \in (2, 4] \end{cases}$ в ряд Фурье по синусам на $[0, 4]$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-5)$.
13. Разложить в ряд Фурье по косинусам на $[0, 2]$ функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1], \\ x-1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$ Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$. Найти $S(-3)$.
14. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi/2], \\ 0, & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$ в ряд Фурье по косинусам на $[0, \pi]$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$. Найти $S(-3\pi/2)$.
15. Разложить функцию $f(x) = x - 1$ в ряд Фурье по косинусам на $[0, 2]$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(-4)$.
16. Разложить в ряд Фурье на $[-1, 3]$ функцию $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы полученного ряда $S(x)$. Найти $S(7)$.
17. Разложить в ряд Фурье на $(2, 4)$ функцию $f(x) = x - 3$. Построить графики заданной функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$. Найти $S(5)$.
- IV. Интегралы, зависящие от параметра**
- Найти $J'(y)$, если $J(y) = \int_1^2 e^{yx^2} \frac{dx}{x}$.
 - Найти $J(y)$, если $J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$.
 - Доказать, что интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(13xy + 5)}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру y на интервале $(-\infty, +\infty)$.
 - С помощью дифференцирования по параметру вычислить $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-yx}}{xe^{3x}} dx$, $y > -3$.
 - Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-7x^2} - e^{-yx^2}}{x} dx, y > 0.$$

6. С помощью дифференцирования несобственного интеграла по параметру вычислить интеграл

Дирихле. Используя полученный результат, вычислить $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0$.

7. С помощью интегрирования несобственного интеграла по параметру вычислить интеграл

Пуассона. Используя полученный результат, вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+4x} dx$

V. Элементы ТФКП

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа z :

$$1) z = \frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}; 2) z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

2. Найти все корни уравнений и изобразить их на комплексной плоскости:

1) $z^4 = 16$	2) $\sqrt{2}z^2 = 1+i$	3) $z^3 = 8i$	4) $z^4 = 81i$
5) $z^4 = -1$	6) $z^3 = -27$	7) $z^3 = 125$	8) $z^6 = 1 - i\sqrt{3}$

3. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

1) $1 \leq z \leq 4, 0 \leq \arg z \leq \pi/3$	2) $ z + 2i > 1, z \leq 4$	3) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$	4) $\operatorname{Re}(z(1-i)) < \sqrt{2}$
5) $1 < z + 2i \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 0$	6) $ z - 1 > z + 1 $	7) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$	8) $ z - 1 > 3, \arg z < \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить значения функции $f(z) = e^z$ в точках:

1) $z = 2\pi i$	2) $z = \pi i$	3) $z = \pi i/2$	4) $z = -\pi i/2$	5) $z = \pi i/4$
-----------------	----------------	------------------	-------------------	------------------

5. Найти все точки комплексной плоскости, в которых дифференцируема функция $f(z)$:

1) $f(z) = \cos(2z+3i)$	2) $f(z) = \sin(\bar{z}-z)$	3) $f(z) = \operatorname{ch}(2i\bar{z}+5)$	4) $f(z) = z+2i ^2 + iz$
5) $f(z) = 2\bar{z} + \operatorname{Im}(iz)$	6) $f(z) = \sin(iz+3)$	7) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$	

6. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части u и значению $f(z_0)$:

$$1) u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1;$$

$$2) u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0;$$

7. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной мнимой части v и значению $f(z_0)$:

$$1) v = 2xy + x, f(0) = 0;$$

$$2) v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$$

8. Разложить в ряд Лорана по степеням z в области $1 < |z| < 3$ функцию $f(z) = \frac{2z-2}{z^2-2z-3}$.

9. Разложить в ряд Лорана по степеням z в области $2 < |z| < 3$ функцию $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-6}$

10. Разложить в ряд Лорана по степеням z в области $|z| > 3$ функцию $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$.

11. Разложить в ряд Лорана по степеням $|z-1|$ функцию $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$.

12. Разложить в ряд Лорана по степеням $|z-3|$ функцию $f(z) = \operatorname{sh}\left(\frac{2}{3-z}\right)$. Найти вычет функции в точке $z = 3$.

13. Определить тип особых точек функции $f(z) = \frac{z^3}{z-1} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ и найти вычет в этих точках

14. Вычислить интегралы от ФКП:

1) $\int_{ABC} \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, где ABC – ломаная $z_A = 0, z_B = i, z_C = 2 + i$.	2) $\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z + 1}{4z^2 + \pi^2} dz$, где $\Gamma = \{z : z - i = 2\}$.	3) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos(3z+1)}{z(z^2+2z+5)} dz$, где $\Gamma = \{z : z - 2 - 3i = 1\}$	4) $\int_{\Gamma} \overline{(z+2)} dz$, где Γ – дуга $y = x^2$ между $z = 0$ и $z = -1+i$.
5) $\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch}(z)}{z^2 + 9} dz$, где $\Gamma = \{z : z + 1 + i = 1\}$	6) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z-i)} dz$, где $\Gamma = \{z : z = 3\}$	7) $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$, где $AB = \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$	

15. С помощью вычетов вычислить несобственный интеграл:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+2}{x^4+5x^2+4} dx$	2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x}{x^4+10x^2+9} dx$	3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+49)^2}$	4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+2x+17} dx$
5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4x^2+3} dx$	6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$	7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9} dx$	

VI. Преобразование Лапласа

1. Вывести формулу для изображения функции $f(t) = t^2 \cos 5t$.

2. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t} t^2 + \sin^3 t + 1$.

3. Решить операционным методом задачу Коши для ДУ:

1) $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

2) $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$

3) $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

4) $y'' + y = 2\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

5) $y'' - y' = 2(1-t)$, $y(0) = y'(0) = 0$

4. Операционным методом решить задачу Коши для системы ДУ:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 3, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y + 2, \\ \frac{dy}{dt} = 4y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$