Правила вычисления предела

Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо.

1. Попробовать подставить в функцию, стоящую под знаком предела, $x=a$. Если функция в этой точке непрерывна, в соответствии формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ предел равен числу $f(a)$.

2. Если точка a не входит в область определения функции, то конечный предел может не существовать, и если абсолютная величина функции неограниченно увеличивается при стремлении переменной к a, то пределом является бесконечность.

3. Если в результате подстановки получается неопределенность, то есть выражение вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}$, следует раскрыть эту неопределенность, сделав сокращения, или привести получаемое выражение к замечательному пределу или его следствию.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)}=\frac{2\left(3+\frac{1}{2}\right)}{1}=7.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ показывает, что в числителе и знаменателе присутствуют бесконечно большие функции. Чтобы избавиться от них следует вынести самую большую величину в числителе и знаменателе за скобки, произвести сокращение, после чего еще раз применить пункт 1 правил.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=1.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=0.$$

Неопределенности $\infty-\infty, 0\cdot\infty$ приводятся вначале к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, затем раскрываются одним из перечисленных выше способов.

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{6}$$

2) $$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=1.$$

Неопределенность вида 1^∞ раскрывается приведением ко второму замечательному пределу.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^{-1}}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^{-2}}{\sin^2 x^{-1}}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{\sin x^{-1}}\right)^2}=e^1=e.$$

2. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=\left[\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Эквивалентности

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\sin x \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=1$	$tgx \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}=1$	$1-cosx \sim \frac{x^2}{2}$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\arcsin x \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}=1$	$\mathrm{arctg}\, x \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=$	$a^x-1 \sim xlna$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$e^x-1 \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\ln(1+x) \sim x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log_a(1+x)}{\frac{x}{lna}}=1$	$log_a(1+x) \sim \frac{x}{lna}$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$	$(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x$, при $x \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=1$	$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$, при $x \to 0$

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{\ln(1-5x)}$.

Решение.

$$\mathrm{tg}4x \sim 4x; \quad \ln(1-5x) \sim -5x, \text{ при } x\to 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{\ln(1-5x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{-5x} = -\dfrac{4}{5} = -0,8$.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x - \sin 2x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^3\cos 2x}$$

$$\sin 2x \sim 2x; \quad 1-\cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, \text{ при } x\to 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^3\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot 2x^2}{x^3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x} = 4$.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{e^{-4x}-1}$.

Решение. $e^{-4}-1 \sim -4x$, при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{e^{-4x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}{\left(e^{-4x}-1\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1+3x}{-4x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{-4x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)} = -\frac{5}{8} = -0,625.$$

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если предел этой функции при $x \to a$ равен значению функции в предельной точке, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Применяя второе определение предела функции в точке, получим

Определение 2. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, где Δx – приращение аргумента функции ($x = a + \Delta x$), а $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ – приращение функции, соответствующее приращению ее аргумента Δx.

Доказательство следует из первого определения непрерывной функции $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(f(a+\Delta x) - f(a) \right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) - \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a) = f(a) - f(a) = 0.$ Здесь первый из пределов вычисляется с помощью определения 1, второй – как предел постоянной, поскольку $f(a)$ не зависит от Δx.

Определение 4. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.

Определение 5. Функция $f(x)$ непрерывна в некоторой области, если она непрерывна во всех точках этой области.

Все степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции непрерывны в областях существования.

Свойства функций непрерывных в точке

1) Сумма непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Действительно, из определения 1 непрерывности следует, что если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \text{ то}$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a).$$

2) Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное непрерывных функций – функция непрерывная, если знаменатель в предельной точке не равен нулю.

Доказательства второго и третьего свойств также следует из свойств пределов.

4) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, пусть функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Очевидно, что

$$\Delta z = h(a+\Delta x) - h(a) = g(f(a+\Delta x)) - g(f(a)) =$$
$$= g(f(a) + f(a+\Delta x) - f(a)) - g(f(a)) = g(b+\Delta y) - g(b).$$

Так как согласно определению 3 непрерывности $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta z \to 0$ при $\Delta y \to 0$, получим: $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

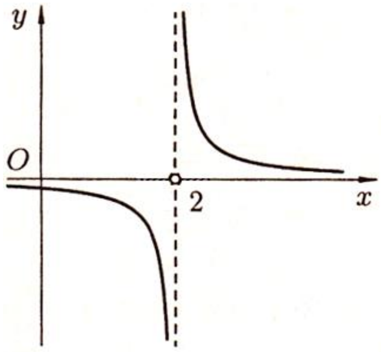
Пример. Функция $z = \sin\left(x^2\right)$ непрерывна во всех точках числовой оси, так как функция $y = x^2$ непрерывна на R, а функция $z = \sin y$ непрерывна на множестве неотрицательных чисел.

Точки разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции**. Если $x = x_0$ – точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

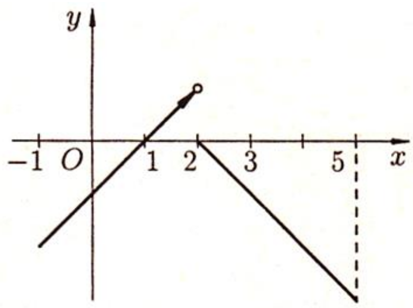
Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$.



2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$



определена в точке $x_0 = 2$ ($f(2) = 0$), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв, т.к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0)$.

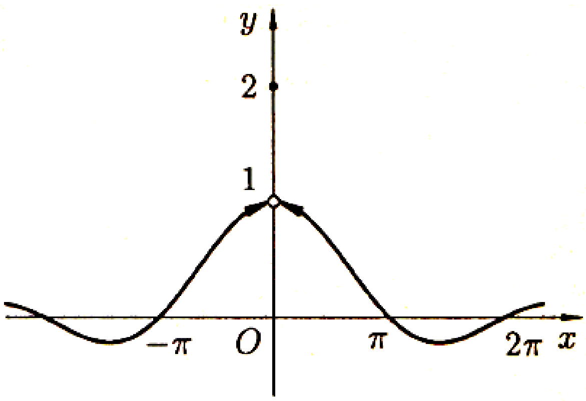
Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \ne 0, \\ 2, \quad \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ – точка разрыва:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.



Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точки разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, Если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва**.

Величину $|A_1 - A_2|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше.

   $y = \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{ если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1-0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 2, \quad\quad \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 3, \\ -1 \text{ при } x < 3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1-(-1) = 2$.

Исследование непрерывности функции в точке.

Пример.

Проверить непрерывность функции $y=\begin{cases} x+4, & x\le -1 \\ x^2+2 & -1<x\le 1. \\ 2x & x>1 \end{cases}$

Поскольку функции $x+4$, x^2+2 и $2x$ непрерывны в областях их задания, достаточно рассмотреть функцию y в точках стыковки этих функций. Итак, для $x=-1$ имеем $\lim\limits_{x\to -1-0} y=\lim\limits_{x\to -1}(x+4)=3$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2)=3$, $y(-1)=-1+4=3$.

Функция в этой точке непрерывна согласно определению 4.

Для $x=1$ имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)=3$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$, $y(1)=1^2+2=3$.

Условие непрерывности в точке $x=1$ не выполняется.

Следовательно, функция y непрерывна на всей числовой оси за исключением точки $x=1$, где она имеет конечный разрыв со скачком (-1).

Непрерывность функции на отрезке

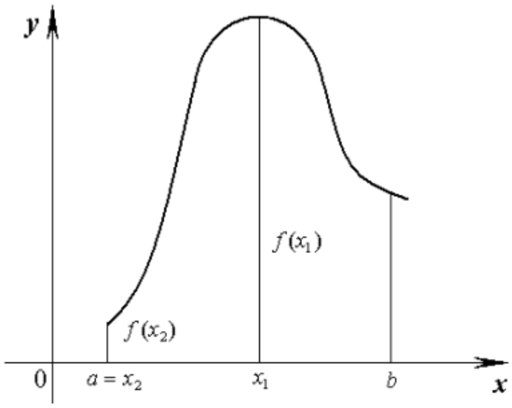
Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на концах отрезка, т.е. в точках a и b, непрерывна, соответственно, справа и слева.

Теорема . Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Эта теорема утверждает, что

$$\exists x_1\in[a,b]:\quad \forall x\in[a,b] \;\Rightarrow\; f(x_1)\ge f(x).$$

$$\exists x_2\in[a,b]:\quad \forall x\in[a,b] \;\Rightarrow\; f(x_2)\le f(x).$$



Если нарушается условие непрерывности функции на отрезке, то утверждение теоремы может быть неверным. Например, если функция $y = x^2$ определена только на интервале $(0; 1)$, то она не достигает на этом интервале наибольшего значения. Она принимает значения, сколь угодно близкие к 1, однако в интервале $(0;1)$ нет точки, в которой функция равнялась бы 1 (точка $x = 1$ не принадлежит интервалу). Эта функция не принимает и наименьшего значения в интервале $(0; 1)$, так как точка $x = 0$ также не принадлежит интервалу.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ то она ограничена на этом отрезке.

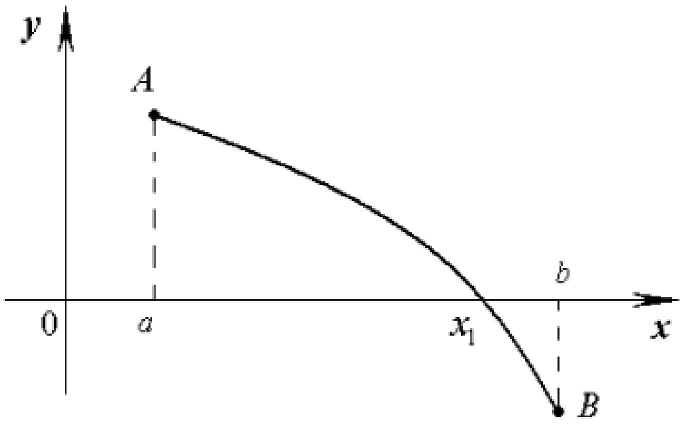
Доказательство. Обозначим через M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда из теоремы следует

$$\forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad m \le f(x) \le M ,$$

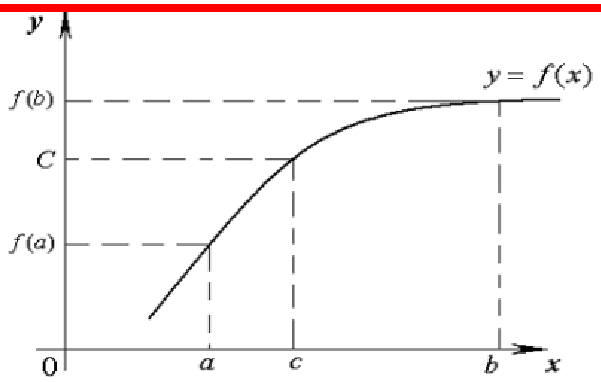
что и означает ограниченность функции на этом отрезке

Теорема . Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю.

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$ A и B, соответствующие концам отрезка $[a,b]$, лежат по разные стороны от оси Ox, то этот график хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox. Действительно, соединяя точки A и B линией и не отрывая ручку от листа бумаги, нельзя не пересечь ось Ox.



Теорема . (Теорема о промежуточных значениях). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется внутри этого отрезка хотя бы одна точка c такая, что $f(c) = C$.



В заключение приведем без доказательства теорему о непрерывности обратной функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и возрастает (или убывает) на этом отрезке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем отрезке оси Oy существует и является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.