СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \qquad (1)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, x – аргумент.

Такая система, когда в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется ***нормальной***.

Проинтегрировать систему – значит определить функции $y_1, y_2, \dots, y_n$, удовлетворяющие системе уравнений (1).

Начальные условия для системы (1) имеют вид:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \qquad (2)$$

Интегрирование системы (1) производится следующим образом:
Сначала дифференцируем по x первое из уравнений системы (1), получаем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Затем, заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \dots, f_n$ из уравнений (1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Теперь дифференцируем полученное уравнение по x и получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Опять заменяем $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \dots, f_n$ и получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Продолжая далее, таким же образом, получим, наконец, уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Итак, мы получаем следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{3}$$

Из первых n-1 уравнений определим $y_2, y_3, \dots, y_n$, выразив их через x, y_1 и производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots,$ $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений (3), получим уравнение n-го порядка для определения y_1 :

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right) \tag{5}$$

Решая это уравнение, определим y_1:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, \quad C_n). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по x n-1 раз, найдем производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots,$ $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от $x, C_1, C_2, \dots,$ C_n.

Подставляя эти функции в (4), определяем

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, \quad C_n), \\ y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, \dots, \quad C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, \quad C_n). \end{cases} \tag{7}$$

Для того, чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (2), остается лишь найти из уравнений (6) и (7) соответствующие значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Замечание. Если система (1) линейна относительно искомых функций, то уравнение (5) будет линейным.

Пример 1.
Решим систему

$$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = y - 5\sin x \end{cases}$$

Решение:

Продифференцируем первое уравнение:

$$y'' = y' + 2z'.$$

Подставим сюда z' из второго уравнения системы:

$$y'' = y' + 2(y - 5\sin x).$$

В этом примере функцию z исключать не нужно. Решаем полученное уравнение

$$y'' - y' - 2y = -10\sin x.$$

Записываем характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+8}\right) = 2, \quad k_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+8}\right) = -1.$$

Очевидно, что

$$y_{од} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнение будем искать в виде

$$y_ч = A\cos x + B\sin x.$$

Подставляем его в заданное уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x - (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) \equiv -10\sin x.$$

Из этого тождества получаем

$$\begin{array}{l|l} \cos x & -3A-B=0 \\ \sin x & A-3B=-10 \end{array}$$

Из первого уравнения

$$B=-3A,$$

подставляем во второе

$$10A=-10,$$

$$A=-1,\ B=3.$$

Общее решение уравнения

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\cos x+3\sin x.$$

Из первого уравнения решаемой системы получаем

$$z=\frac{1}{2}\left(y'-y\right),$$

тогда

$$z=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}+\sin x+3\cos x-C_1e^{2x}-C_2e^{-x}+\cos x-3\sin x\right]$$

или

$$z=\frac{1}{2}\left[C_1e^{2x}-2C_2e^{-x}-2\sin x+4\cos x\right].$$

Ответ: $\begin{cases} y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\cos x+3\sin x \\ z=\frac{1}{2}C_1e^{2x}-C_2e^{-x}-\sin x+2\cos x \end{cases}.$

Проверка.

$$\begin{cases} y'=y+2z \\ z'=y-5\sin x \end{cases}$$

Проверим первое уравнение

$$y'-y-2z=\underline{2C_1e^{2x}}-\underline{\underline{C_2e^{-x}}}+\sin x+3\cos x-\underline{C_1e^{2x}}-\underline{\underline{C_2e^{-x}}}+\cos x-3\sin x-$$
$$\underline{-C_1e^{2x}}+\underline{\underline{2C_2e^{-x}}}+2\sin x-4\cos x=0.$$

Второе уравнение

$$z'-y+5\sin x=$$
$$=\underline{C_1e^{2x}}+\underline{\underline{C_2e^{-x}}}-\cos x-2\sin x-\underline{C_1e^{2x}}\underline{\underline{-C_2e^{-x}}}+\cos x-3\sin x+5\sin x=0.$$

Пример 2.

Решить систему $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = -2y + z + 18x \end{cases}$.

Решение:

Дифференцируем первое уравнение системы

$$y'' = 2y' - z'$$

и исключаем z':

$$y'' = 2y' + 2y - z - 18x.$$

Из первого уравнения определяем

$$z = -y' + 2y,$$

после чего

$$y'' = 2y' + 2y + y' - 2y - 18x$$

или

$$y'' - 3y' = -18x.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k = 0,$$

откуда следует

$$k_1 = 0,\ k_2 = 3.$$

Тогда

$$y_{од} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_ч = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx.$$

Подставляем в уравнение

$$2A - 3(2Ax + B) \equiv -18x,$$

откуда имеем

$$-6A = -18,\quad 2A - 3B = 0, \text{ или } A = 3,\ B = 2.$$

Итак, $y = C_1 + C_2 e^{3x} + 3x^2 + 2x$.

Теперь из $z = -y' + 2y$ получаем

$$z = -3C_2 e^{3x} - 6x - 2 + 2C_1 + 2C_2 e^{3x} + 6x^2 + 4x.$$

Ответ: $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{3x} + 3x^2 + 2x \\ z = 2C_1 - C_2 e^{3x} + 6x^2 - 2x - 2 \end{cases}$

Проверка. Поскольку z определяли из первого уравнения системы, проверим только второе уравнение

$$z' + 2y - z - 18x = -3C_2e^{3x} + 12x - 2 + 2C_1 + 2C_2e^{3x} + 6x^2 + 4x -$$
$$- 2C_1 + C_2e^{3x} - 6x^2 + 2x + 2 - 18x = 0\,.$$

Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots n)$ – постоянные, t – аргумент, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ – искомые функции.

Система (1) называется системой линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Хорошо разработаны два метода решения таких систем:

- метод приведения системы уравнений к одному уравнению n-го порядка, которое в данном случае будет линейным (этот метод мы рассматривали выше)

- метод непосредственного интегрирования системы (метод Эйлера)

Продемонстрируем второй метод.

Будем искать частное решение системы в виде:

$$x_1 = \propto_1 e^{kt},\ x_2 = \propto_2 e^{kt}, \ldots, x_n = \propto_n e^{kt}. \qquad (2)$$

Определим $\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n$ и k, так чтобы функции $\propto_1 e^{kt}, \propto_2 e^{kt}, \ldots, \propto_n e^{kt}$ удовлетворяли системе уравнений (1). Подставляя их в (1), получим

$$\begin{cases} k \propto_1 e^{kt} = a_{11} \propto_1 e^{kt} + a_{12} \propto_2 e^{kt} + \dots + a_{1n} \propto_n e^{kt}, \\ k \propto_2 e^{kt} = a_{21} \propto_1 e^{kt} + a_{22} \propto_2 e^{kt} + \dots + a_{2n} \propto_n e^{kt}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ k \propto_n e^{kt} = a_{n1} \propto_1 e^{kt} + a_{n2} \propto_2 e^{kt} + \dots + a_{nn} \propto_n e^{kt}, \end{cases}$$

Сократим на e^{kt}. Перенесем все члены в одну сторону:

$$\begin{cases} (a_{11} - k) \propto_1 + a_{12} \propto_2 + \dots + a_{1n} \propto_n = 0, \\ a_{21} \propto_1 + (a_{22} - k) \propto_2 + \dots + a_{2n} \propto_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1} \propto_1 + a_{n2} \propto_2 + \dots + (a_{nn} - k) \propto_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Получили линейную однородную систему уравнений. Составим определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix}.$$

Если k таково, что определитель $\Delta \neq 0$, то система (3) имеет только нулевое (тривиальное) решение. Ненулевое решение мы получим только, если $\Delta = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Мы приходим к уравнению n- го порядка для определения k.

Это уравнение называется характеристическим уравнение для системы (1), его корни называются корнями характеристического уравнения.

Систему линейных однородных дифференциальных уравнений (1) можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица из коэффициентов системы,

$X(t)$ – вектор неизвестных функций $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$\dot{X}(t)$ – вектор производных функций $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$.

Корни характеристического уравнения являются собственными числами матрицы A.

Рассмотрим несколько случаев:

1. ***Корни характеристического уравнения действительные и различные:*** $\boldsymbol{k_1, \dots, k_n}$

   Для каждого собственного значения k_i найдем соответствующие собственные векторы $\propto^i = \begin{pmatrix} \propto_1^i \\ \vdots \\ \propto_n^i \end{pmatrix}$, тогда общее решение системы (1) можно записать:

   $X(t) = C_1 e^{k_1 t} \propto^1 + C_2 e^{k_2 t} \propto^2 + \dots + C_n e^{k_n t} \propto^n$,

   при этом функции $X_i(t) = e^{k_i t} \propto^i$, $i = 1,2, \dots n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

№ 798 [Ф]: $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$

Найдем собственные значения матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - kE| = 0 \Longrightarrow (k-1)(k-2)(k-3) = 0 \quad \Longrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3 \,.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор.

$$k_1 = 1, \ \propto^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_2 = 2, \ \propto^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad , \quad k_3 = 3, \ \propto^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$x(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t},$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t},$$

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$$

2. ***Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные.***

   В этом случае строится соответствующее такому собственному значению собственные векторы через комплексные функции. Чтобы выразить решение через вещественные функции (в случае вещественной матрицы A), надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая часть комплексного решения, соответствующему собственному числу $k = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$, являются линейно независимыми решениями.

№ 801 [Ф]: $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

Найдем собственные значения матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - kE| = 0 \implies k_1 = 1, \qquad k_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор.

$$k_1 = 1,\ \propto^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k_2 = 1 + 2i,\ \propto^2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad , \quad k_3 = 1 - 2i,\ \propto^3 = \cdots.$$

Комплексному собственному значению $k_2 = 1 + 2i$ соответствует решение

$$X_2(t) = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t(cos2t + i\,sin2t)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -2sin2t \\ cos2t \\ 3cos2t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 2cos2t \\ sin2t \\ 3sin2t \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} -2sin2t \\ cos2t \\ 3cos2t \end{pmatrix} + C_3e^t\begin{pmatrix} 2cos2t \\ sin2t \\ 3sin2t \end{pmatrix}.$$

3. Если для собственного значения k ***кратности*** s ***имеется только*** m ***(***$m<s$***) линейно независимых собственных векторов,*** *то решение соответствующее* k, *можно искать в виде*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^1_{s-m}(t) \\ \vdots \\ P^n_{s-m}(t) \end{pmatrix} e^{kt}, \qquad\qquad (*)$$

где $P^i_{s-m}(t)$ многочлены порядка $s - m$ с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты определяются подстановкой (*) в (1).

№ 808 [Ф]: $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y. \end{cases}$

Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ характеристическим урав-

нением будет уравнение

$$|A - kE| = 0 \implies (1-k)^2(2-k) = 0 \implies k_{1,2} = 1, \qquad k_3 = 2.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор.

$$k_1 = 2,\ \propto^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_{2,3} = 1 \text{ – один собственный вектор } \propto^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее решение буде искать в виде:

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+g \end{pmatrix} \cdot e^t.$$

Подставим эти значения в данную систему, получим

$$\begin{cases} at + b + a = at + b - ct - d + et + g, \\ ct + d + c = at + b + ct + d - et - g, \\ et + g + e = 2et + 2g - ct - d. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях уравнений, получим:

$$\begin{cases} a = a - c + e, \\ b + a = b - d + g, \\ c = a + c - e, \\ d + c = b + d - g, \\ e = 2e - c, \\ g + e = 2g - d, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = e, \\ a = e, \\ d = g - e, \\ b = e + g. \end{cases}$$

Пусть

$$e = C_2,\ g = C_3.$$

Тогда

$$X_2 = \begin{pmatrix} C_2t + C_2 + C_3 \\ C_2t - C_2 + C_3 \\ C_2t + C_3 \end{pmatrix} \cdot e^t.$$

Сложив полученное решение и решение X_1, умноженное на произвольную постоянную C_1, получим общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2t + C_2 + C_3 \\ C_2t - C_2 + C_3 \\ C_2t + C_3 \end{pmatrix} \cdot e^t.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = C_1 e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t, \quad y = (C_2t - C_2 + C_3)e^t, \\ z = C_1 e^{2t} + (C_2t + C_3)e^t. \end{array}}$$

Системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

Систему можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица из коэффициентов системы, а $X(t)$ – вектор неизвестных функций $x_i(t)$, $\dot{X}(t)$ – вектор производных функций $x_i(t)$, $F(t)$ – вектор-функция с компонентами $f_i(t)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет следующую структуру

$$X(t) = X_{одн}(t) + X_{ч}(t),$$

где $X_{одн}$ – общее решение соответствующей однородной системы

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

$X_{ч}$ – какое-нибудь частное решение неоднородной системы .

Способы решения системы

1 способ. Систему можно решить путем приведения к одному уравнению более высокого порядка (например, методом исключения).

2 способ. Решить соответствующую однородную систему, а для построения частного решения применить ***метод неопределенных коэффициентов***. Это можно сделать в том случае, если функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + ... + a_1 t + a_0$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$.

В случае, когда $f_i(t) = P^i_{m_i}(t)e^{\alpha t}$, частное решение системы ищем в виде

$$X_{ч}(t) = \begin{pmatrix} Q^1_{m+s}(t)e^{\alpha t} \\ Q^2_{m+s}(t)e^{\alpha t} \\ \vdots \\ Q^n_{m+s}(t)e^{\alpha t} \end{pmatrix},$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ - многочлены порядка $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max\limits_{i=1..n} m_i$, $s = 0$, если α не является собственным значением матрицы A, и $s = k$, если α является собственным значением матрицы A и имеет кратности k.

Неизвестные коэффициенты многочленов $Q^i_{m+s}(t)$ определяются путем подстановки в систему и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда

$$f_i(t) = P^i_{m_i}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R^i_{k_i}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

а комплексное число $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ $(\beta \neq 0)$ является или не является собственным значением матрицы A.

3 способ. Найдя общее решение соответствующей однородной системы, применить ***метод вариации произвольных постоянных***. Если найдены n линейно независимых решений $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ однородной системы , то общее решений неоднородной системы записывается в виде

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t) + ... + C_n(t)X_n(t),$$

где $C_i(t)$ находятся подстановкой данного выражения в заданную неоднородную систему ДУ.

№ 826 [Ф]: $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$

1 способ (метод исключения). Для заданной системы имеем:

$$\begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ x'' - x = 2e^t + t^2. \end{cases}$$

Решаем уравнение $x'' - x = 2e^t + t^2$

…

2 способ (поиск частного решения по виду правой части)

Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Собственными значениями ее матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ являются $\lambda_{1,2} = \pm 1$, и им соответствуют собственные векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тогда общим решением системы будет линейная комбинация функций

$$X_{одн} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Представив $F(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$ в виде суммы функций $F_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ и $F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$, найдем частные решения систем

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = y, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$$

1) Частное решение первой системы будем искать в виде

$$X_ч^1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix}.$$

условия для нахождения коэффициентов a, b, c и d:

$$\begin{cases} (at+b)e^t + ae^t = (ct+d)e^t - 2e^t, \\ (ct+d)e^t + ce^t = (at+b)e^t, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = c, \\ b + a = d - 2, \\ d + c = b, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ a + c = 2, \\ d = b - c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1, \\ d = b - 1. \end{cases}$$

Полагая $b = 0$, получим $X_ч^1 = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t.$

2) Частное решение второй системы будем искать в виде:

$$X_ч^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ a_1t^2 + b_1t + c_1 \end{pmatrix}.$$

условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} 2at + b = a_1t^2 + b_1t + c_1, \\ 2a_1t + b_1 = at^2 + bt + c + t^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0, \\ 2a = b_1, \\ b = c_1, \\ 2a_1 = b, \\ b_1 = c, \\ a + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b = c_1 = 0, \\ a = -1, \\ b_1 = -2, \\ c = -2. \end{cases}$$

Таким образом, $X_ч^2 = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$

Частное решение неоднородной системы найдем, применив принцип суперпозиции:

$$X_ч = X_ч^1 + X_ч^2 = \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}.$$

Общим решением заданной системы будет:

$$X = X_{одн} + X_ч = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}.$$