ЛЕКЦИЯ 11.

- Построение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований и присоединенной матрицы.
- Ранг матрицы, его инвариантность при элементарных преобразованиях.
- Теорема о ранге матрицы. Ранг системы векторов. Лемма о двух базисах.

Обратная матрица.

Квадратная матрица A^{-1} является *обратной* к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю.

Для каждой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Способы нахождения обратной матрицы.

1. Метод присоединенной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{t},$$ где $A^{\vee}$ – присоединенная матрица.

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$., где M_{ij} - минор элемента a_{ij} .

2 .Метод элементарных преобразований.

Определение.

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие преобразования:

1. перестановка строк (столбцов);
2. умножение строки (столбца) на число, не равное нулю;
3. прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Обратную матрицу также можно найти с помощью элементарных преобразований. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1.Составить расширенную матрицу, приписав к матрице A справа единичную матрицу.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы привести матрицу A к единичному виду:

$$(E \mid \mathrm{A}^{-1}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ... & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

3. Тогда матрица, которая получилась справа и есть обратная к матрице A.

Утверждение. Для каждой невырожденной квадратной матрицы A существует и притом единственная обратная матрица A^{-1}, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{t}, \text{ где } A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} .

Доказательство.

$$1)\ \ C = A\cdot\frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{t} = \frac{1}{\det A}A\cdot(A^{\vee})^{t}, c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Из теоремы об алгебраических дополнениях соседних строк (при $i \neq j$) и теоремы о разложение определителя по элементам i – ой строки (при $i = j$) получим, что

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \Rightarrow C = E.$$

Аналогично, рассмотрим

$$D = \frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{t} \cdot A, \ \ d_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}.$$

Из теоремы об алгебраических дополнениях соседних столбцов (при $i \neq j$) и теоремы о разложение определителя по элементам j – ого столбца (при $i=j$) получим, что

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \Rightarrow D = E.$$

2) Докажем единственность.

Доказываем методом от противного. Предположим, что

$$\exists A_1^{-1}, A_2^{-1} : A \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot A = E, \ \ A \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E.$$

Тогда

$$A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot E = A_2^{-1} \cdot (A \cdot A_1^{-1}) = (A_2^{-1} \cdot A) \cdot A_1^{-1} = E \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1}.$$

Свойства обратной матрицы.

1) $(A^{-1})^{-1} = A.$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$

3) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}.$

4) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$

Ранг матрицы.

Определение. *Минором* k-го порядка матрицы A размера $m\times n$ называется определитель k порядка с элементами , стоящими на пересечении выбранных k строк и k столбцов матрицы A ($k \le \min(m,n)$).

Определение. Рангом матрицы называется наивысший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$ или rang$A$. Таким образом, если ранг матрицы равен r, то среди миноров r-го порядка есть минор, не равный нулю, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.

***Например*,** в матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ все миноры 3-го порядка равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Но, существует минор 2-го порядка (например, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \ne 0$), отличный от нуля.

*Определение***.** Отличный от нуля минор , порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором*.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, но все они имеют один и тот же порядок. Столбцы и строки , на пересечении которых расположен базисный минор, называются *базисными строками* и *столбцами*.

При вычислении ранга матрицы выполняют следующие элементарные преобразования:

1) перестановка двух строк (столбцов);

2) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же, отличное от нуля, число.

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

*Определение***.**

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются эквивалентными. Эквивалентные матрицы не равны между собой, но имеют одинаковые ранги.

Утверждение. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Доказательство.

Пусть M_r – базисный минор, а $M^{/}_r$ - базисный минор после элементарных преобразований.

1) Если в базисный минор не входят строки, над которыми совершаются э.п. , то все доказано.

2) Если в базисный минор входят строки, над которыми совершаются э.п. , то

- для 1 типа э.п. $\det M_r = -\det M^{/}_r$,

-для 2 типа $\det M_r = \lambda \det M^{/}_r$,

-для 3 типа $\det M_r = \det M^{/}_r$.

3) Если в базисный минор входит только одна из строк, над которыми совершаются э.п. ,то заменим базисный минор на минор, отличающийся от исходного не более чем знаком.

Линейная зависимость строк матрицы.

Будем рассматривать строки $A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$ матрицы A размера $m\times n$ как элементы линейного пространства, то есть как множество всевозможных упорядоченных наборов из n вещественных чисел (пространство строк длины n – R^n), где линейные операции над строками введены следующим образом:

$$A_{(i)} + A_{(k)} = (a_{i1} + a_{k1}, a_{i2} + a_{k2}, \dots, a_{in} + a_{kn})$$

$$\alpha A_{(i)} = (\alpha a_{i1}, \alpha a_{i2}, \dots, \alpha a_{in})$$

Строки $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}$ линейно зависимы, если

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \ (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0):$$

$$\alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \dots + \alpha_m A_{(m)} = 0.$$

Замечание. Аналогично вводится понятие линейной зависимости столбцов.

Утверждение. Строки $A_{(1)} = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n})$, $A_{(2)} = (0, a_{22}, \ldots a_{2n}), \ldots,$

$A_{(r)} = (0, 0, \ldots, 0, a_{rr}, \ldots, a_{rn})$,

где $a_{ii} \neq 0$ для $\forall i = 1, 2, \ldots, r$ линейно независимы.

Доказательство. Доказываем методом от противного. Предположим, что

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_r^2 > 0):$$

$$\alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \ldots + \alpha_r A_{(r)} = 0.$$

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} = 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 a_{1r} + \alpha_2 a_{2r} + \ldots + \alpha_r a_{rr} = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_r a_{rn} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0 \Rightarrow$$

строки линейно независимы.

Определение. Матрица А называется ступенчатой, если
1) номера ведущих элементов ее строк образуют строго возрастающую последовательность,
2) нулевые строки, если они есть стоят в конце.

$$\begin{pmatrix} a_{1k_1} & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & a_{2k_2} & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема . Каждую матрицу A ранга r с помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Теорема . Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство: Минор, стоящий в r столбцах и r строках ступенчатой матрицы A :

$$M_r = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{1k_1} & * & \dots & * \\ 0 & \tilde{a}_{2k_2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rk_r} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{1k_1}\tilde{a}_{2k_2}\dots\tilde{a}_{rk_r} \neq 0,$$

а все миноры $r+1$ порядка и выше будут содержать нулевую строку, а значит будут равны 0. Следовательно, rang $A = r$.

Теорема о базисном миноре

Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы A являются линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).

Доказательство:

1. Предположим для определенности, что базисный минор матрицы A расположен в ее левом углу.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \\ \hline a_{r+11} & \ldots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \ldots & a_{r+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{mr+1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Докажем, что первые r строк $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(r)}$ Л.Н.З.

Доказываем методом от противного. Предположим, что строки $A_{(1)}, A_{(2)},\ldots, A_{(r)}$ Л.З. Тогда одна из них является линейной комбинацией оставшихся. Предположим, что это *j*-ая строка:

$A_{(j)} = \alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \ldots + \alpha_{j-1} A_{(j-1)} + \alpha_{j+1} A_{(j+1)} + \ldots + \alpha_r A_{(r)}.$

Тогда в базисном миноре $M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$ *j*-ая строка

является линейной комбинацией остальных строк. Из свойств определителя следует, что $M_r=0$, что противоречит выбору базисного минора. Следовательно, мы доказали, что базисные строки линейно не зависимы.

2. Для любых i, j где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ рассмотрим определитель вида

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{array}\right|.$$

Покажем, что такой определитель равен 0.

Если $i \le r$, то у определителя есть 2 одинаковые строки, а если $j \le r$ у определителя есть 2 одинаковых столбца. А значит, он равен 0.

В остальных случаях ($i > r, j > r$) Δ является минором r+1 матрицы A, а значит, он равен 0, так как $rang\ A=r$ и все миноры более высокого порядка равны 0.

Разложим определитель Δ по последнему столбцу:

$a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{rj} A_{rj} + a_{ij} A_{ij} = 0$, , где $A_{ij} = M_r \neq 0$.

Разделим на M_r и выразим a_{ij}.

$$a_{1j} A_{1j} / M_r + a_{2j} A_{2j} / M_r + \ldots + a_{rj} A_{rj} / M_r + a_{ij} = 0,$$

$$a_{ij} = -a_{1j} A_{1j} / M_r - a_{2j} A_{2j} / M_r - \ldots - a_{rj} A_{rj} / M_r .$$

Полученное равенство выполняется для любого j $(1 \le j \le n)$, а числа

$$\lambda_1 = -A_{1j} / M_r ,\ \lambda_2 = -A_{2j} / M_r ,\ \ldots,\ \lambda_r = -A_{rj} / M_r$$

не зависят от i.

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \ldots + \lambda_r a_{rj}, \; j = 1,2,\ldots n.$$

$A_{(i)} = \lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} + \ldots + \lambda_r A_{(r)}$, то есть i строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(r)}$. В виду произвольности выбора i ($1 \leq i \leq m$) любая строка матрицы A являются линейной комбинацией базисных строк.

Способы нахождения ранга матрицы.

1.Метод элементарных преобразований.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы. Следовательно, ранг матрицы A равен числу ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы.

2. Метод окаймляющих миноров.

Выберем какой-нибудь отличный от нуля минор первого порядка и рассмотрим все миноры второго порядка, которые окаймляют минор , т. е. содержат его внутри себя. Если все эти миноры второго порядка равны нулю, то - базисный минор и ранг матрицы равен 1. Если среди указанных миноров второго порядка есть отличный от нуля минор , то рассмотрим его окаймляющие миноры третьего порядка. Если все миноры третьего порядка, окаймляющие минор равны нулю, то - базисный минор и ранг матрицы равен 2. Если же среди указанных миноров третьего порядка существует минор не равный нулю, то рассматриваем окаймляющие его миноры четвертого порядка и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока не найдется отличный от нуля минор порядка r, а все окаймляющие его миноры $(r+1)$ порядка будут равны нулю. Такой минор и есть базисный, а число r-ранг матрицы.

Теорема (об определителе).

det A = 0 тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно зависимы.

Доказательство.

1. $\det A \neq 0 \Rightarrow r = n \Rightarrow$все строки базисные, а значит, л.н.з.
2. $\det A = 0 \Rightarrow r < n \Rightarrow$при элементарных преобразованиях получим нулевую строку, а значит, строки линейно зависимы.

Теорема о ранге матрицы.

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.