Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем

$$f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta,$$

где β – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Поэтому для точек x, близких к точке a справедлива формула

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),}$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример.

$\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}} \approx 2\cdot\left[1+\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot(-\frac{1}{16})\right] = \frac{63}{32}$. Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x},\ a=0,\ x=-\frac{1}{16}$.

Поэтому $f(a)=1,\quad f'(a)=\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a)=-\frac{1}{16}$.

Возникают вопросы:

1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции?

2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $n+1$ порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива формула

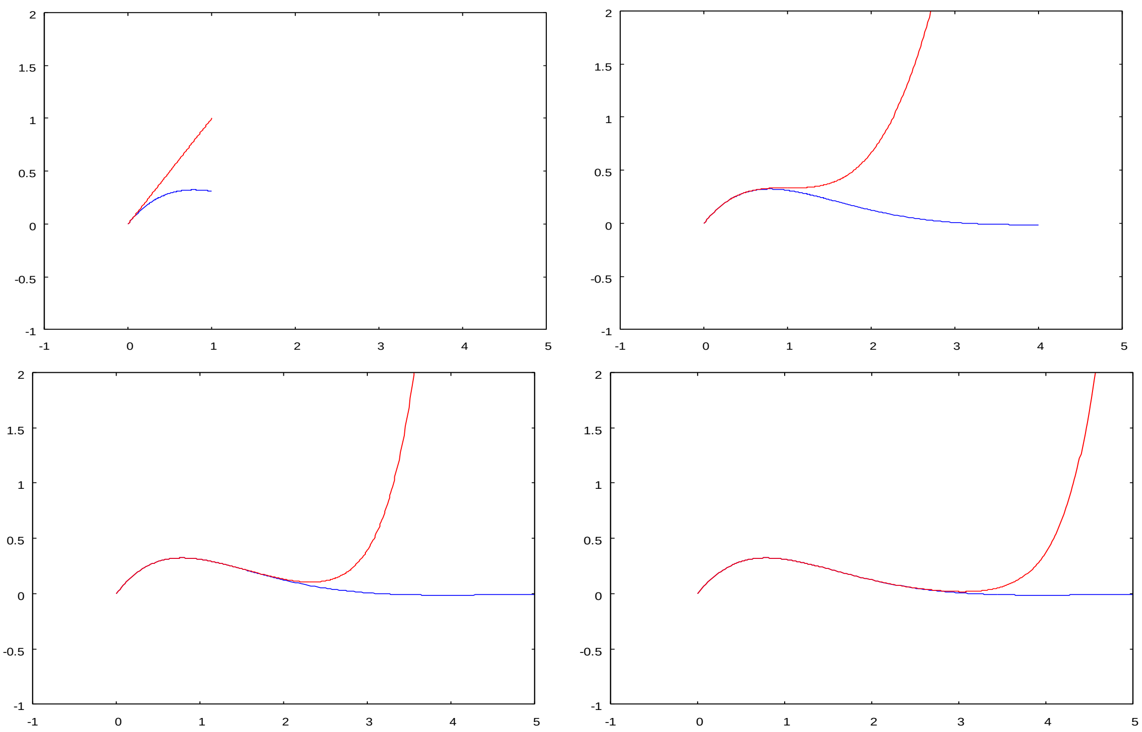
$$\boxed{\begin{gathered}f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\\+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x),\end{gathered}}$$

где остаточный член $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta\in(0,1)$

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta\in(0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки.

Остаточный член, записанный в таком виде, называется остаточным членом Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$ (синяя линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в правой части окрестности точки $a=0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{1!} + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \frac{d^3 f(a)}{3!} + \frac{d^4 f(a)}{4!} + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} + r_n(x)$$

.

Для приложений к вычислению пределов используют **локальную** формулу Тейлора, имеющую вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$. **Это остаточный член в форме Пеано.**

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x - x_0$, где x_0 — произвольное число, т. е. представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n. \qquad (1)$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ продифференцируем n раз равенство (1):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \ldots + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 2\cdot 3A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4(x-x_0) + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1A_n.$$

Подставляя $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (1), имеем:

$$P_n(x_0) = A_0, \qquad \text{т. е.} \quad A_0 = P_n(x_0),$$

$$P_n'(x_0) = A_1, \qquad \text{т. е.} \quad A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!},$$

$$P_n''(x_0) = 2A_2, \qquad \text{т. е.} \quad A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!},$$

$$P_n'''(x_0) = 2\cdot 3A_3, \qquad \text{т. е.} \quad A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\dots 2\cdot 1A_n, \qquad \text{т. е.} \quad A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения $A_0, A_1, \dots, A_n$ в равенство (1), получим разложение многочлена n-й степени $P_n(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формула Маклорена

При $a = 0$ формула Тейлора называется **формулой Маклорена:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad \text{и} \quad \theta \in (0,1)$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).}$$

Оценим $r_n(x)$: Т.к. $f^{(n+1)}(x)=e^x$

$$|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В свою очередь для оценки величины $e^{\max\{x,0\}}$ можно брать 1 при $x<0$ и 3^x при $x>0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. Так как $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$ и т.д., получим

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\boxed{\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+r_{2n}(x).}$$

Оценим $r_{2n}(x)$:

$$r_{2n}(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{2n+1} \quad \text{и} \quad \theta\in(0,1)$$

Мы знаем, что

$$f^{(n)}=sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

тогда

$$f^{(2n+1)} = sin\left(x + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Так как $\left|sin\left(x + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$, то

$$|r_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Пример 3. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f'''(x) = \sin x,\quad f^{IV}(x) = \cos x,$$
$$f^{V}(x) = -\sin x,\quad f^{VI}(x) = -\cos x.$$

Очевидно, что

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = 0,\quad f''(0) = -1,\quad f'''(0) = 0,$$
$$f^{IV}(0) = 1,\quad f^{V}(0) = 0,\quad f^{VI}(0) = -1.$$

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\boxed{cosx = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2} + r_{2n-1}(x)}$$

Оценим $r_{2n-1}(x)$:

$$|r_{2n-1}(x)| \le \frac{|x|^{2n}}{(2n-2)!},$$

так как $\left|cos\left(x + 2n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$

Пример 4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0! = 1)$, имеем $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).}$$

Оценим $r_n(x)$. Согласно приведенной формуле остаточного члена имеем $|r_n(x)|=\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$. Поэтому для $x>0$ получим оценку

$|r_n(x)|\le\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, но для $x<0$ использование приведенной формулы остаточного члена не годится. Для таких значений x используют другие формы остаточного члена.

Пример 5. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\boxed{\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},}$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$, и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, приведенная форма остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае оценка следующая: $|r_n(x)|\le\dfrac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$.

Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Разложение по формуле Маклорена

Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций имеют вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

В частности $(\alpha = -1)$, $\quad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

Пример: Разложить по формуле Маклорена функцию

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Решение:

Очевидно, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Мы знаем, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Значит,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots) - $$

$$-(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots)$$