Лёвшина Г.Д.

Высшая математика

Раздел 1.1: Аналитическая геометрия:

Векторная алгебра. Прямая и плоскость в пространстве.

Учебное пособие

по выполнению типовых расчетов

с использованием электронного задачника-тренажера

Введение

Электронный задачник-тренажер по высшей математике обеспечивает самостоятельную работу студентов. Работа с электронным задачником начинается с регистрации студента путем введения номера группы и номера по журналу. С помощью многоуровневого меню, реализованного на экране в виде оглавления, студент выбирает тему и номер задания. Далее студент получает описание задания, условие и требуемую точность получаемого ответа. Выполнив типовой расчет, можно проверить правильность полученного результата.

В подготовленной авторами серии пособий дано подробное описание типовых расчетов. Оно состоит из теоретической части, рекомендаций по выполнению расчета, его оформлению и примеров решения.

Данное пособие посвящено теме 1.1: «Аналитическая геометрия» и включает описание типового расчета:

1.1. Аналитическая геометрия: Векторная алгебра. Прямая и плоскость в пространстве.

Внимание! Чтобы перейти к оглавлению пособия, нажмите **END**. Затем подведите курсор к интересующему Вас разделу и щелкните ссылку. Чтобы перейти из любого раздела к оглавлению, нажмите **END,** к началу пособия, нажмите **HOME.**

1. Аналитическая геометрия:
Векторная алгебра. Прямая и плоскость в пространстве.

1.1. Цель работы.

Цель работы: Решение типовых задач аналитической геометрии на линейные геометрические объекты в трехмерном пространстве с помощью методов векторной алгебры.

1.2. Теоретическое введение.

1.2.1. Векторная алгебра.

Пусть в трехмерном пространстве задана декартова правая прямоугольная система координат *OXYZ*, пусть **i, j, k** - соответствующие единичные орты. Тогда любой вектор, который мы будем обозначать символом **a** (рис. 1.1) однозначно задается в базисе **i**, **j**, **k** координатами (x_a, y_a, z_a), т.е. $\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}$, где числа x_a, y_a, z_a - проекции вектора **a** на соответствующие оси координат. Пусть вектор **b** имеет в том же базисе координаты(x_b, y_b, z_b)

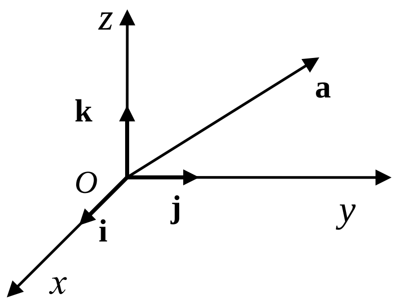

Рис. 1.1

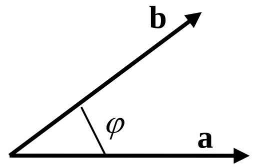

Рис. 1.2.

Скалярное произведение (**a**,**b**) двух векторов **a** и **b** равно произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 1.2) :

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\,\mathbf{a}\,|\cdot|\,\mathbf{b}\,|\cdot \cos\varphi\,, \qquad \pi \ \geq \ \varphi \ \geq \ 0.$$

Скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$(\,\mathbf{a},\,\mathbf{b}\,) = x_a\,x_b \ + \ y_a\,y_b \ + z_a\,z_b\,, \tag{1.1}$$

из которой, в частности, следует формула вычисления длины вектора

$$|\,\mathbf{a}\,| \ = \ \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} \ = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \ . \tag{1.2}$$

Из формул (1.1) и (1.2) вытекает формула вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \qquad (1.3)$$

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется такой вектор **d = [a,b]**, длина и направление которого определяются условиями

1) $|\mathbf{d}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между **a** и **b**,

2) $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{d} \perp \mathbf{b}$,

3) векторы **a**, **b**, **d** образуют ***правую тройку векторов***, т.е. вектор **d** направлен так, что кратчайший поворот от **a** к **b** виден с его конца совершающимся против часовой стрелки.

Замечание: Если векторы **a**, **b**, **c** приведены к общему началу и кратчайший поворот от **a** к **b** виден с конца вектора **c** совершающимся по часовой стрелке, то векторы **a**, **b**, **c** образуют ***левую тройку векторов***.

Если известны координаты векторов **a** и **b**, то координаты их векторного произведения [**a,b**] можно найти по формуле:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = (y_a z_b - z_a y_b)\cdot\mathbf{i} - (x_a z_b - x_b z_a)\cdot\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\cdot\mathbf{k}. \qquad (1.4)$$

Геометрический смысл векторного произведения состоит в том, что модуль вектора **d** = [**a**,**b**] численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, вектор **d** направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b** (рис. 1.3):

$$S = \left|[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right|. \qquad (1.5)$$

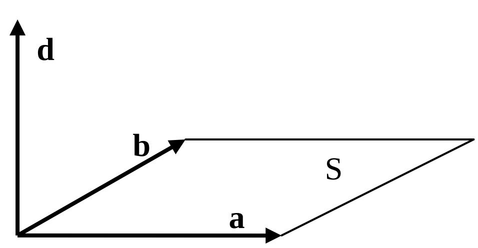

Рис. 1.3

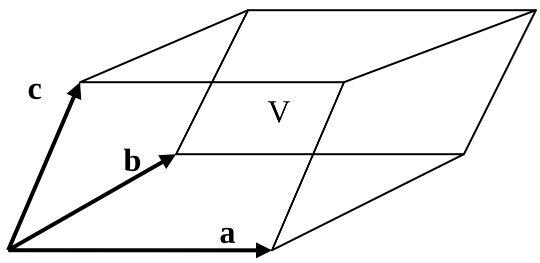

Рис. 1.4

Пусть даны три произвольных вектора **a**, **b**, **c**. Если вектор **a** векторно умножить на вектор **b**, а затем получившийся при этом вектор [**a**,**b**] скалярно умножить на вектор **c**, то в результате получится число ([**a**,**b**],**c**), называемое ***смешанным произведением*** векторов **a**, **b**, **c** и обозначаемое **abc**.

Смешанное произведение равно объему *V* параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах **a**, **b**, **c**, взятому со знаком "плюс", если тройка векторов **a**, **b**, **c** -правая и со знаком "минус", если эта тройка левая (рис. 1.4). Если же векторы **a**,**b**,**c** компланарны, то **abc** равно нулю.

Пусть векторы **a**, **b**, **c** определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\mathbf{a} = \left(x_a, y_a, z_a\right); \qquad \mathbf{b} = \left(x_b, y_b, z_b\right); \qquad \mathbf{c} = \left(x_c, y_c, z_c\right).$$

Тогда смешанное произведение **abc** равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

1.2.2. Прямая и плоскость в пространстве.

Пусть в пространстве фиксирована точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\mathbf{n} = (A,B,C)$; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. (Напомним, что координатами точки M_0 называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{OM_0}}$, где O – начало координат). Тогда в пространстве однозначно определена плоскость π, проходящая через точку M_0 перпендиулярно вектору **n** (рис. 1.5).

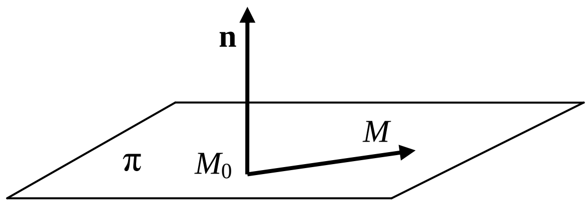

Рис. 1.5.

Уравнение этой плоскости имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (1.7)$$

где (x,y,z) - координаты произвольной точки M на плоскости π. Верно и обратное: если плоскость π задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1.8)$$

то вектор $\mathbf{n} = (A,B,C)$ ортогонален плоскости π. Вектор **n** называется ***нормальным вектором*** плоскости (1.8).

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad .$$

Угол φ между этими плоскостями очевидно равен углу между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ и определяется по формуле (1.3):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (1.9)$$

Плоскость M_1M в пространстве можно однозначно задать с помощью трех ее различных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащих на одной прямой. Уравнение указанной плоскости можно записать, используя формулу (1.7), где за нормальный вектор $\mathbf{n}$ можно взять векторное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_3}}$ или любой вектор, коллинеарный этому векторному произведению; а за точку M_0 - любую из точек M_1, M_2, M_3.

Другой прием получения уравнения плоскости π состоит в том, что записывается условие компланарности векторов $\overrightarrow{\mathbf{M_1M}}$, $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_3}}$, где M - произвольная точка плоскости с координатами (x, y, z) (рис.1.6):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.10)$$

Расстояние h от точки $P(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (1.8), вычисляется по формуле:

$$h = \frac{|\, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (1.11)$$

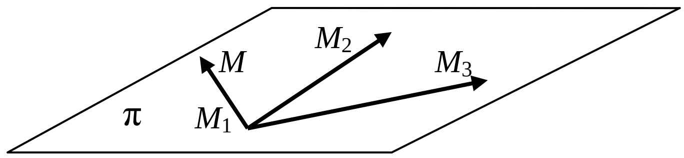

Рис. 1.6

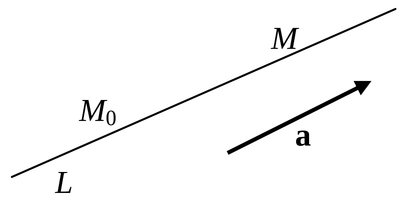

Рис. 1.7

Пусть в пространстве фиксирована точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\mathbf{a} = (p, q, r)$; $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$. Тогда в пространстве однозначно определена прямая *Г*, проходящая через точку M_0 параллельно вектору $\mathbf{a}$ (рис. 1.7). Вектор $\mathbf{a}$ называется ***направляющим вектором*** этой прямой. Уравнения данной прямой имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}, \qquad (1.12)$$

где точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой *Г*. Уравнения (1.12) принято называть ***каноническими уравнениями*** прямой. Заметим, что в уравнениях (1.12) одно или два из чисел p, q и r могут оказаться равными нулю. Тогда пропорцию (1.12) понимают так: обращение в нуль одного из знаменателей пропорции означает обращение в нуль и соответствующего числителя.

Из канонических уравнений прямой легко получаются ***параметрические уравнения***:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty , \tag{1.13}$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$.

Вычисление угла между прямыми в пространстве сводится к вычислению угла между их направляющими векторами $\mathbf{a}_1 = (p_1, q_1, r_1)$ и $\mathbf{a}_2 = (p_2, q_2, r_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \tag{1.14}$$

Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.15}$$

Угол α между плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ находится с помощью угла β между нормалью к плоскости $\mathbf{n}$ и направляющим вектором прямой **a:**

$$\cos\beta = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{a})}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|}.$$

Если $\cos\beta > 0$, т.е. угол β острый (рис. 1.8), то $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ и $\sin\alpha = \cos\beta$. Если $\cos\beta < 0$, т.е. угол β тупой (рис. 1.9), то $\alpha = \beta - \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = -\cos\beta$. Объединяя оба случая, получаем:

$$\sin\alpha = |\cos\beta| = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{a})|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|} = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \tag{1.16}$$

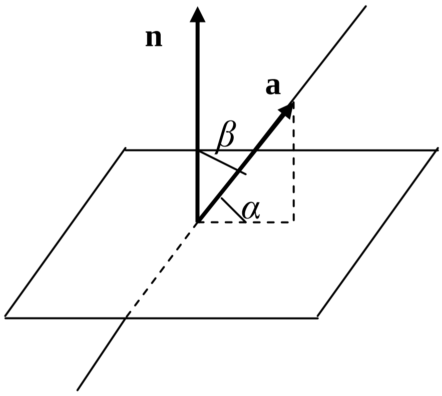

Рис. 1.8

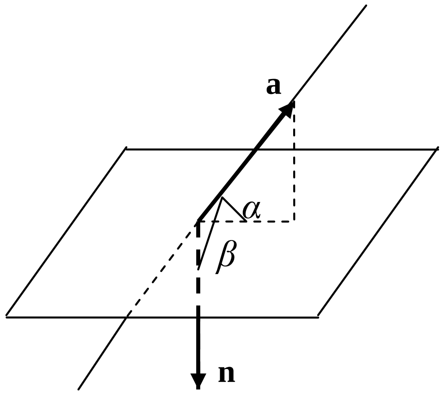

Рис. 1.9

Расстояние L от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой, заданной уравнением (1.12), вычисляется по формуле:

$$L = \frac{\left|[\overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1}, \mathbf{a}]\right|}{|\mathbf{a}|} \tag{1.17}$$

Две прямые

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$$

лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда равно нулю смешанное произведение:

$$\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} \cdot \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В противном случае прямые скрещиваются. Расстояние между скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}\mathbf{a_1}\mathbf{a_2}\right|}{\left|[\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}]\right|}. \tag{1.18}$$

1.2.3. Система линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1.19}$$

Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

Различают следующие случаи (***теорема Крамера***):

1) Если определитель Δ системы (1.19) отличен от нуля, то система имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{1.21}$$

где определитель третьего порядка Δ_i (i = 1, 2, 3) получается из Δ путем замены i-того столбца свободными членами b_1, b_2, b_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$ (i = 1, 2, 3), то система (1.19) несовместна (не имеет решений).

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0$ (i = 1, 2, 3), то система (1.19) либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений.

1.3. Содержание типового расчета.

Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ в декартовой прямоугольной системе координат. Требуется найти:

1) косинус угла α между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$;
2) синус угла β между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
3) S – площадь грани $A_1A_2A_3$;
4) V – объем пирамиды;
5) H – длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6) координаты точки A_5, симметричной точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
7) координаты точки A_6, симметричной точке A_4 относительно прямой A_2A_3;
8) L – расстояние между точкой A_4 и прямой A_2A_3 ;
9) D – расстояние между ребрами A_1A_3 и A_2A_4;
10) радиус шара, описанного около пирамиды, и координаты центра этого шара.

Точность расчетов – три значащие цифры. Ответы записывать в десятичных дробях.

1.4. Порядок выполнения работы.

Для контроля получаемых результатов рекомендуется следующий порядок выполнения работы.

После выполнения пунктов 1, 2, 3, 4 высота h пирамиды рассчитывается тремя способами:

– используя угол β,
– используя объем пирамиды и площадь грани $A_1A_2A_3$;
– как расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

При совпадении результатов работу можно продолжить.

Выполнив пункт 6, следует вновь вычислить высоту h - как половину длины отрезка A_4A_5. Совпадение результата с полученными ранее свидетельствует о правильности нахождения точки A_5.

Выполнив пункт 7, следует вычислить расстояние от точки A_4 до прямой A_2A_3 (пункт 8) двумя способами: как половину длины отрезка A_4A_6 и по формуле расстояния от точки до прямой. Совпадение результатов свидетельствует о правильном нахождении координат точки A_6.

1.5. Пример выполнения типового расчета.

Условие типового расчета.

По условию имеем следующие координаты вершин пирамиды:

A_1 (9; 4; 4), A_2 (1; 5; 2), A_3 (7; 2; 5), A_4 (0; -1; -3).

Задача 1. Чтобы найти нормаль $\mathbf{n}_1$ к плоскости $A_1A_2A_3$, найдем сначала векторное произведение векторов $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}} = (-8; 1; -2)\,; \qquad \overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}} = (-2; -2; 1);$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}, \overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 18\mathbf{k}. \qquad (1.22)$$

За нормаль $\mathbf{n}_1$ можно взять любой вектор, коллинеарный вектору (1.22). Для упрощения дальнейших расчетов поделим координаты вектора (1.22) на общий множитель 3, получим коллинеарный вектор, его и примем за вектор $\mathbf{n}_1$.

$$\mathbf{n}_1 = (-1; 4; 6) \qquad (1.23)$$

Аналогично находим нормаль $\mathbf{n}_2$ к плоскости $A_2A_3A_4$:

$$\overrightarrow{\mathbf{A_2A_3}} = (6; -3; 3)\,; \qquad \overrightarrow{\mathbf{A_2A_4}} = (-1; -6; -5);$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}, \overrightarrow{\mathbf{A_2A_4}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 33\mathbf{i} + 27\mathbf{j} - 39\mathbf{k};$$

$$\mathbf{n}_2 = (11; 9; -13).$$

С помощью формулы (1.9) найдем косинус угла между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|} = \frac{(-1)\cdot 11 + 4\cdot 9 + 6\cdot(-13)}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 6^2}\cdot\sqrt{11^2 + 9^2 + (-13)^2}} = .$$

$$= -\frac{53}{\sqrt{53\cdot 371}} \approx -0{,}378.$$

Знак "минус" показывает, что мы нашли косинус тупого угла между плоскостями. Косинус дополнительного ему острого угла равен $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = 0{,}378$. В ответе договоримся писать положительное значение косинуса, т.е. косинус острого угла.

Ответ: 0,378.

Задача **2**. Найдем координаты вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}}$, который является направляющим вектором прямой A_1A_4: $\mathbf{a} = (-9;-5;-7)$. Синус угла β между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ равен:

$$\sin\beta = \frac{|\ (\mathbf{a}, \mathbf{n_1})\ |}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{n_1}|} = \frac{|\ (-1)(-9) + 4(-5) + 6(-7)\ |}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2}\cdot\sqrt{53}} = \frac{|-53\ |}{\sqrt{155}\cdot\sqrt{53}} = 0{,}585.$$

Ответ: 0,585.

Задача **3**. Для нахождения площади грани $A_1A_2A_3$ воспользуемся свойствами векторного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}$, найденного в задаче 1 (см. формулу (1.22)) :

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}, \overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}\right] = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 18\mathbf{k}.$$

Тогда по формуле (1.5)

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\ \left[\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}, \overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}\right]\ \right| == \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{1^2 + 4^2 + 6^2} = \frac{3}{2}\sqrt{53} \approx 10{,}92.$$

Ответ: 10,92

Задача 4. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен 1/6 модуля смешанного произведения векторов $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}$, $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}}$. Координаты первых двух векторов и их векторного произведения уже вычислены – см. (1.22) , найдем $\overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}} = (-9;-5;-7)$. Вычислим смешанное произведение:

$$\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{A_1A_2}}, \overrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}\right], \overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}}\right) =$$

$$= (-3)(-9) + 12(-5) + 18(-7) = -159.$$

Тогда искомый объем равен: $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} \cdot 159 = 26{,}5$.

Ответ: 26,5.

Задача 5. Вычислим длину h высоты пирамиды тремя разными способами (см. рис.1.10)

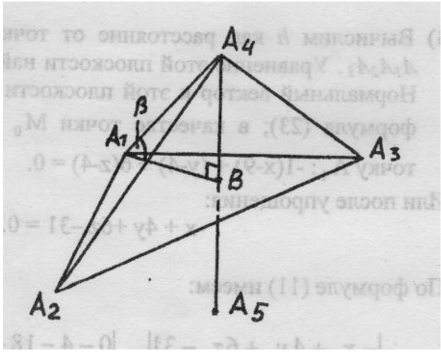

Рис. 1.10.

1) Из прямоугольного треугольника A_1A_4B найдем катет A_1B, зная гипотенузу A_1A_4 и острый угол β (см. рис. 1.10):

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}}\right| = \sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{155} \approx 12{,}45,$$

$$h = \left|\overrightarrow{\mathbf{A_4B}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{A_1A_4}}\right| \sin\beta = \sqrt{155}\,\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{155}} = \sqrt{53} \approx 7{,}28.$$

Заметим, что округление результата следует производить только на заключительном этапе, промежуточные выкладки необходимо выполнять с точными значениями переменных.

2) Используем объем пирамиды и площадь грани. Имеем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} h,$$

откуда

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot 26{,}5}{1{,}5\sqrt{53}} = \frac{53}{\sqrt{53}} = \sqrt{53} \approx 7{,}28.$$

3) Вычислим h как расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.. Уравнение этой плоскости найдем по формуле

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - координаты произвольной точки на плоскости, **n** = (*A*,*B*,*C*) – нормальный вектор к плоскости. Нормальный вектор получен в задаче 1, формула (1.23); в качестве точки M_0 возьмем, например, точку A_1:

$$-1(x-9) + (y-4) + 6(z-4) = 0.$$

Или после упрощения:

$$-x + 4y + 6z - 31 = 0. \qquad (1.24)$$

Расстояние h от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле (1.11):

$$h = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

В нашем случае имеем:

$$h = \frac{|-x_4 + 4y_4 + 6z_4 - 31|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{|0 - 4 - 18 - 31|}{\sqrt{53}} = \frac{53}{\sqrt{53}} \approx 7{,}28.$$

Поскольку результаты всех трех способов совпали, делаем вывод о правильности наших вычислений.

Ответ: 7,28.

Задача 6. Точка A_5, симметричная точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, определяется следующим образом (рис. 1.10): прямая A_4A_5 перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_4A_5}} = 2\overrightarrow{\mathbf{A_4B}}$,где B - точка пересечения вышеуказанной прямой и плоскости. Напишем параметрическое уравнение прямой A_4A_5 по формуле:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}$$

где (x_0, y_0, z_0) произвольная точка прямой, $\mathbf{a} = (p, q, r)$ – направляющий вектор прямой.

Воспользуемся тем фактом, что нормальный вектор плоскости $\mathbf{n_1} = (-1;\ 4;\ 6)$ (см. задачу 1), является направляющим вектором искомой прямой:

$$x = 0 - t; \qquad y = -1 + 4t; \qquad z = -3 + 6t. \qquad (1.25)$$

Найдем координаты точки $B(x_b, y_b, z_b)$. Для этого подставим (x, y, z) из формулы (1.25) в уравнение плоскости (1.24):

$$-(-t) + 4(-1 + 4t) + 6(-3 + 6t) - 31 = 0; \qquad 53t = 53; \qquad t = 1.$$

Следовательно,

$$x_b = 0 - 1 = -1; \quad y_b = -1 + 4 \cdot 1 = 3; \quad z_b = -3 + 6 \cdot 1 = 3.$$

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{A_4B}} = (-1;\ 4;\ 6)$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_4A_5}} = 2\overrightarrow{\mathbf{A_4B}} = (-2;\ 8;\ 12)$. Зная координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{A_4A_5}}$ и координаты его начала A_4, легко найти координаты конца $A_5(x_5, y_5, z_5)$:

$$x_5 = 0 - 2 = -2; \qquad y_5 = -1 + 8 = 7; \qquad z_5 = -3 + 12 = 9.$$

Для контроля полученного результата вновь вычислим высоту пирамиды h как половину отрезка $\mathrm{A_4A_5}$ (рис. 1.10):

$\overrightarrow{\mathbf{A_4A_6}}$ = (-2; 8; 12); h = $\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{212} \approx$ 7,28.

Совпадение с предыдущими расчетами говорит о правильности нахождения координат точки A_5.

Ответ: (-2; 7; 9).

Задача *7*. Точка A_6, симметричная точке A_4 относительно прямой A_2A_3, определяется следующим образом: прямая A_4A_6 перпендикулярна прямой A_2A_3 и пересекает ее и $\overrightarrow{\mathbf{A_4A_6}} = 2\overrightarrow{\mathbf{A_4C}}$, где C - точка пересечения этих прямых (см.рис. 1.11). Заметим, что прямая A_4A_6 с нужными нам свойствами принадлежит плоскости π, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_2A_3, так как плоскость π содержит все прямые, проходящие через точку A_4 перпендикулярно A_2A_3. Нормальным вектором к плоскости π можно считать вектор $\overrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{\mathbf{A_2A_3}} = (6; -3; 3) = 3(2; -1; 1).$$

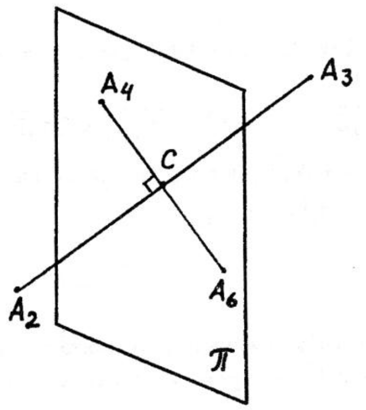

Рис. 1.11.

Напишем уравнение плоскости π, используя формулу (1.7):

$$2(x-0) - 1(y+1) + 1(z+3) = 0. \qquad (1.26)$$

Напишем параметрические уравнения прямой A_2A_3, зная ее направляющий вектор (2;–1; 1)

$$x = 1 + 2t; \quad y = 5 - t; \quad z = 2 + t. \qquad (1.27)$$

Найдем координаты точки $C(x_c, y_c, z_c)$, подставляя выражения (1.27) в формулу (1.26):

$$2(1+2t) - (5-t) + (2+t) + 2 = 0, \quad 6t + 1 = 0, \quad t = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $$\begin{cases} x_c = 1 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \\ y_c = 5 + \frac{1}{6} = 5\frac{1}{6} \\ z_c = 2 - \frac{1}{6} = 1\frac{5}{6} \end{cases}.$$

Тогда $\overrightarrow{\mathbf{A_4C}}=\left(\frac{2}{3};6\frac{1}{6};4\frac{5}{6}\right)$ и $\overrightarrow{\mathbf{A_4A}_6}=2\overrightarrow{\mathbf{A_4C}}=\left(\frac{4}{3};\frac{37}{3};\frac{29}{3}\right)$.

Окончательно находим координаты точки $A_6(x_6,y_6,z_6)$:

$$x_6=0+\frac{4}{3}\approx 1{,}33;\qquad y_6=-1+\frac{37}{3}=\frac{34}{3}\approx 11{,}33;\qquad z_6=-3+\frac{29}{3}=\frac{20}{3}\approx 6{,}67.$$

Ответ: (1,33; 11,33; 6,67).

Задача 8. Вычислим расстояние L между точкой A_4 и прямой A_2A_3 двумя способами:

1) $\mathrm{L}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{A_4A_6}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(1{,}33-0)^2+(11{,}33+1)^2+(6{,}67+3)^2}\approx \mathbf{7,}86.$

2) Расстояние L от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямой, заданной уравнением $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – произвольная точка прямой, $\mathbf{a}=(p,q,r)$ – направляющий вектор прямой, вычисляется по формуле:

$$L=\frac{\left|[\overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1},\mathbf{a}]\right|}{|\mathbf{a}|}$$

В этой формуле положим $M_1=A_4$, $M_0=A_2$, $\mathbf{a}=\overrightarrow{\mathbf{A_2A_3}}$, тогда

$$\overrightarrow{\mathbf{M_0M_1}}=(-1;-6;-5);\qquad \mathbf{a}=(6;-3;3);$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{M_0M_1}},\mathbf{a}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & -6 & -5\\ 6 & -3 & 3\end{vmatrix}=-33\mathbf{i}-27\mathbf{j}+39\mathbf{k};$$

$$\left|[\overrightarrow{\mathbf{M_0M_1}},\mathbf{a}]\right|=\sqrt{33^2+27^2+39^2}=\sqrt{3339}\approx 57{,}78;$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{6^2+3^2+3^2}=\sqrt{54}\approx 7{,}35;\qquad \mathrm{L}=\frac{57{,}78}{7{,}35}\approx 7{,}86.$$

Совпадение результатов расчета двумя способами свидетельствует о правильности нахождения координат точки A_6.

Ответ: 7,86.

Задача 9: Расстояние между скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}\mathbf{a_1a_2}\right|}{\left|[\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}]\right|},$$

где M_1 и M_2 произвольные точки первой и второй прямой, $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a}_2$ – их направляющие вектора. Для вычисления расстояния между ребрами A_1A_3 и A_2A_4 воспользуемся формулой (1.18), в которой положим

$$M_1 = A_1; \qquad M_2 = A_2, \qquad \mathbf{a}_1 = \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3}; \qquad \mathbf{a}_2 = \overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_4};$$

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3} = (-2; -2; 1); \qquad \overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_4} = (-1; -6; -5);$$

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3}, \overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_4}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 10\mathbf{k};$$

$$\left| [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \right| = \sqrt{16^2 + 11^2 + 10^2} = \sqrt{477}; \quad \left| \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \right| = 159.$$

(см. задачу 4). Окончательно получаем:

$$d = \frac{159}{\sqrt{477}} \approx 7{,}28.$$

Ответ: 7,28.

Задача 10. Центр описанного около пирамиды шара является точкой, равноудаленной от его вершин A_1, A_2, A_3, A_4. Обозначим координаты этой точки $O(x, y, z)$. Имеем

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{OA}_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathbf{OA}_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathbf{OA}_3}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathbf{OA}_4}\right|^2$$

или

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 \\ (x-9)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2. \end{cases}$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 16x - 2y + 4z = 83 \\ 2x - y + z = 8 \\ 7x + 3y + 8z = 34. \end{cases}$$

Решим эту систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -106; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 83 & -2 & 4 \\ 8 & -1 & 1 \\ 34 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -621;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 83 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \\ 7 & 34 & 8 \end{vmatrix} = -219; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & -2 & 83 \\ 2 & -1 & 8 \\ 7 & 3 & 34 \end{vmatrix} = 175.$$

$$x = \frac{-621}{-106} \approx 5{,}86; \quad y = \frac{-219}{-106} \approx 2{,}07; \quad z = \frac{175}{-106} \approx -1{,}65.$$

Радиус описанной сферы вычислим как расстояние от его центра до вершины, например, вершины A_1:

$$R = \sqrt{(5{,}86 - 9)^2 + (2{,}07 - 4)^2 + (-1{,}67 - 4)^2} \approx 6{,}75.$$

Ответ: (5,86; 2,07; –1,65), R=6,75.

1.6. Оформление отчета.

По каждой задаче необходимо выполнить аккуратный чертеж. Привести все проделанные выкладки. В ответе все расчетные величины записать в десятичных дробях с тремя значащими цифрами. В конце отчета записать сводку ответов, как показано ниже.

Сводка ответов по типовому расчету:

1. $\cos\alpha$ = 0,378;
2. $\sin\alpha$ = 0,586;
3. S = 10,92;
4. V = 26,5;
5. h = 7,28;
6. A_5(-2; 7; 9);
7. A_6(1,33; 11,33; 6,67);
8. L = 7,86;
9. d = 7,28;
10. O (5,86; 2,07; -1,65); R = 6,75.

Оглавление