

# 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$5.21. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+2\ln x}}.$$

$$5.22. \int \frac{\sqrt{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$5.23. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$5.24. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$5.25. \int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 12)}.$$

$$5.26. \int \frac{\sqrt[3]{1+3\ln x} dx}{x}.$$

$$5.27. \int \cos x (3 - 5 \sin x)^4 dx.$$

$$5.28. \int \frac{dx}{x(8+3\ln x)}.$$

$$5.29. \int \frac{3^x dx}{\sqrt{4-9^x}}.$$

$$5.30. \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{8-e^{-4x}}}.$$

$$6.1. \int (\cos 2x + 1)^3 \sin 2x dx.$$

$$6.2. \int x^4 e^{5-3x^5} dx.$$

$$6.3. \int \frac{\sin 2x}{e^{3\cos^2 x}} dx.$$

$$6.4. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} \cos^2 \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$6.5. \int \sqrt{1-3\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$6.6. \int \sqrt{1-5\sin 3x} \cos 3x dx.$$

$$6.7. \int \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{1+4x^2}.$$

$$6.8. \int \frac{dx}{x^9 \sqrt{\ln 9x+5}}.$$

$$6.9. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 3x} dx}{\sin^2 3x}.$$

$$6.10. \int \frac{\cos 3x}{e^{\sin 3x}} dx.$$

$$6.27. \int \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - 3x \right) dx.$$

$$6.28. \int \left( \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \right)^2 dx.$$

$$6.29. \int \frac{\operatorname{arctg}^3(x/3) dx}{9+x^2}.$$

$$6.30. \int \frac{2-3\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$9.11. \int (2-3x)e^{-x/2} dx.$$

$$9.12. \int \arcsin x dx.$$

$$9.13. \int (3-x) \sin \pi x dx.$$

$$9.14. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$9.15. \int (1-2x)\sqrt{5-x} dx.$$

$$9.16. \int (x^2+x-4) \log_4 x dx.$$

$$9.17. \int (x+5) \cos 7x dx.$$

$$9.18. \int (x+2) \ln x dx.$$

$$12.1. \int \frac{x^2}{x^2+2x+2} dx.$$

$$12.2. \int \frac{2^x dx}{2^{2x}+2^x+1}.$$

$$12.3. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

$$12.4. \int \frac{(\ln x - 1) dx}{x \sqrt{2 \ln x - \ln^2 x + 8}}.$$

$$12.5. \int \frac{x dx}{\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$12.6. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5 \sin x + 2}.$$

$$12.7. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$12.8. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}.$$

## 2. Приложение определенного интегралы

А) вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

5.13.  $y = -\sqrt[3]{x}, x + y = 6, x = 0.$

5.14.  $y = 2^x, y = 2^{-x}, x = -1, x = 2, y = 0.$

5.15.  $y = -4x - x^2, y = x.$

5.16.  $y = \sqrt{x+4}, x + y = 2, y = 0.$

5.17.  $y = -2, y = 3, x = \frac{y^2}{2}, x = 0.$

5.18.  $y = (x+2)^2, y = 4-x, y = 0.$

5.19.  $yx = 1, y = x, x = 4, y = 0.$

5.20.  $y = \sin x, y = 5 \sin x, (0 \leq x \leq \pi).$

5.21.  $x = -2y^2, x = 1 - 3y^2.$

5.22.  $y = x^2 - 6x + 10, y = 6x - x^2.$

Б) Вычислить длину дуги кривой

9.3.  $y = 2 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6.$

9.4.  $y = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1.$

9.5.  $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, 1/4 \leq x \leq 1.$

9.6.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$

9.7.  $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

9.8.  $y^2 = x^3$  от начала координат до точки  $B(4;8).$

9.9.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq 7/9.$

10.12.  $x = 8(\cos t + t \sin t); y = 8(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi/4.$

10.13.  $x = 9e^t(\cos t + \sin t); y = 9e^t(\cos t - \sin t), 0 \leq t \leq 3\pi/2.$

10.14.  $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), \pi \leq t \leq 2\pi.$

10.15.  $x = e^{2t} \cos t; y = e^{2t} \sin t, 0 \leq t \leq \pi/4.$

10.16.  $x = 3 \sin t + 4 \cos t; y = 4 \sin t - 3 \cos t, \pi/4 \leq t \leq 3\pi/2.$

10.17.  $x = 5 \cos^3 t; y = 5 \sin^3 t; 0 \leq t \leq \pi/2.$

10.18.  $x = 3(\cos t + t \sin t); y = 3(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi/3.$

10.19.  $x = 2 \cos^3 t; y = 2 \sin^3 t; \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$

В) Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями вокруг ОХ

12.10.  $y = 2x - x^2, y = x.$

12.11.  $y = \ln x, y = 0, x = 2.$

12.12.  $y^2 = 6x, y = \sqrt{6}x^2.$

12.13.  $3x - y = 0, 3x - 4y = 0, y = 3.$

12.14.  $y = xe^x, x = 1, y = 0.$

12.15.  $y = x^2/2, 2y + 2x = 3.$

12.16.  $y = \arcsin x, y = 0, x = 1.$

Г) Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями вокруг ОУ

13.10.  $y = \ln x, y = 0, y = 2, x = 0$ .

13.11.  $y = \frac{8}{x^2 + 4}, y = \frac{x^2}{4}$ .

13.12.  $y = 4x^2, y = 8x^2, y = 2$ .

13.13.  $y = 4x - x^2, y = -2x$ .

13.14.  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ .

13.15.  $y^2 = 4x, x = 1$ .

13.16.  $y = \sin x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi)$ .

13.17.  $x = \sqrt[3]{y - 2}, y = 1, x = 1$ .

13.18.  $y = x, y = 3x, x = 3$ .

### 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

1.27.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+3)}$ .

1.28.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2} x \sqrt{x^2 - 1}}$ .

1.29.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$ .

1.30.  $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2+9)}$ .

3.13.  $\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}} dx$ .

3.14.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2}}{x^3+4x+8} dx$ .

3.15.  $\int_2^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{\sqrt[5]{x^6+9x+1}} dx$ .

3.16.  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^3+2x+5}} dx$ .

3.17.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x+4)}$ .

3.18.  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 \sqrt{x^6+9x+1}}$ .

2.1.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$ .

2.2.  $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+1)^3}}$ .

2.3.  $\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$ .

2.4.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ .

2.5.  $\int_0^e x \ln x dx$ .

2.6.  $\int_0^1 \frac{e^x}{x^3} dx$ .

2.7.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ .

2.8.  $\int_{1/3}^2 \frac{dx}{(2-x) \ln^2(2-x)}$ .

### 4. Изменить порядок интегрирования

6.19.  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy$ .

6.20.  $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx$ .

6.21.  $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$ .

6.22.  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$ .

$$6.23. \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f dy.$$

$$6.24. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

$$6.25. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$$

$$6.26. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy.$$

## 5. Двойные интегралы

А) Вычислить двойной интеграл (D- область, ограниченная линиями)

$$\iint_D (12x^2 y^2 + 16x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$\iint_D (9x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$\iint_D (36x^2 y^2 - 96x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

Б) Используя двойной интеграл, вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$6.1. y=3/x, y=4e^x, y=3, y=4.$$

$$6.2. x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}.$$

$$6.3. x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 \quad (y \leq 0).$$

$$6.4. x=8-y^2, x=-2y.$$

$$6.5. y=\frac{3}{x}, y=8e^x, y=3, y=8.$$

6.6.  $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$

6.7.  $x = 5 - y^2, x = -4y.$

6.8.  $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 (y \leq 0).$

6.9.  $y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 (x \geq 0).$

6.10.  $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x = 0 (x \geq 0).$

6.11.  $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, (x \geq 0).$

6.

А) Вычислить криволинейный интеграл

1.1. а) Вычислить  $\int_{AB} \frac{e^{3y}}{\sqrt{1+e^{2y}}} ds$ , где  $AB$  - дуга кривой  $x = 1 + e^y$ , заключенная между точками  $A(2; 0)$  и  $B(3; \ln 2)$ ,

б) Вычислить  $\int_L \left(x + \frac{y}{4}\right)^{-3} dx + \sqrt{y} e^{-(x/4+y/16)} dy$ , где  $L$  - ломаная с вершинами  $A(-2; 0), B(-4; 0), C(-8; 16)$ .

1.2. а) Вычислить  $\int_{AB} (4x^4 y + 2x^2 y^3 + 3y^5) ds$ , где  $AB$  - полуокружность  $y = \sqrt{2x - x^2}$ .

б) Вычислить  $\int_L (x + 5y) dx + (-x + 4y) dy$ , где  $L$  - четверть окружности  $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).$

1.3. а) Вычислить  $\int_{AB} \frac{6xy^4 - 4xy^3}{\sqrt{1+4x^2y^4}} ds$ , где  $AB$  - дуга кривой  $y = \frac{4}{4x^2+1}$ , заключенная между точками  $A(0; 4)$  и  $B\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ ,

б) Вычислить  $\int_L \sqrt{x - \frac{y}{3}} dx + y e^{(x/3-y/9)} dy$ , где  $L$  - ломаная с вершинами  $A(4; 0), B(3; 0), C(6; 9)$ .

1.4. а) Вычислить  $\int_{AB} \frac{(x^2 + 1)}{(y^2 + 1)\sqrt{10 + 9xy - 9x^2}} ds$ , где  $AB$  - дуга кубической параболы  $y = x^3 + 3x$ , заключенная между точками  $A(0; 0)$  и  $B(1; 4)$ ,

б) Вычислить  $\int_L (3x^2 + y^2) dx + (xy - 5) dy$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = 3x - x^2$ , расположенная выше оси  $OX$  и пробегаемая по часовой стрелке.

Б) Вычислить с помощью формулы Грина

2.4.  $\int_L \frac{y^2 e^{xy} + 6x}{y} dx + \left( x e^{xy} + e^{(x^2+y)} \right) dy$ ,  $L$  – прямоугольник с вершинами  $A(0;1), B(0;3), C(-1;3), D(-1,1)$

б)  $\int_L \left( y - x e^{(x^2+y^2)} \right) dx + \left( 3x - y e^{(x^2+y^2)} \right) dy$ ,  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 9y$ .

2.5. а)  $\int_L \left( \frac{y}{x^2 y^2 + 7} + \frac{3x}{y} \right) dx + \left( e^{x^2+y} + \frac{x}{x^2 y^2 + 7} \right) dy$ ,  $L$  – прямоугольник с вершинами  $A(0;1), B(0;3), C(\sqrt{2};3), D(\sqrt{2},1)$ ,

б)  $\int_L \left( xy + x \cos(x^2 + y^2) \right) dx + \left( y \cos(x^2 + y^2) + x^2 y \right) dy$ ,  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 16$ .

2.6. а)  $\int_L \left( 2x + 2y + x \sqrt{9 - x^2 + y^2} \right) dx + \left( xy - y \sqrt{9 - x^2 + y^2} \right) dy$ ,  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 9$ .

б)  $\int_L \left( 3^{\sin x} - xy^2 \right) dx + \left( x^2 y + e^{y^3} \right) dy$ ,  $L$  – треугольник с вершинами  $A(1;0), B(4;0), C(4;3)$ .

2.7. а)  $\int_L \left( x^2 + x \sqrt{3 + x^2 + y^2} \right) dx + \left( y \sqrt{3 + x^2 + y^2} + x + e^y \right) dy$ ,  $L$  – контур, образованный кривыми  $y = -x^2, x = y^2$ ,

б)  $\int_L \left( xy + x e^{(x^2+y^2+3)} \right) dx + \left( y^2 + y e^{(x^2+y^2+3)} \right) dy$ ,  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 3y$ .

2.8. а)  $\int_L \left( \frac{2xy}{x^2 y + 3} + x^2 y \right) dx + \left( \frac{x^2}{x^2 y + 3} + x \right) dy$ ,  $L$  – контур, образованный кривыми  $y = 2x^2, x = y^2$ ,

б)  $\int_L \left( -x^2 y + x \sqrt{5 - x^2 - y^2} \right) dx + \left( y \sqrt{5 - x^2 - y^2} + xy^2 \right) dy$ ,  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 4y$ .

2.9. a)  $\int_L \frac{6y + 4x \ln x - 2x \ln y}{y} dx + \frac{xy^2 + x^2 \ln y - 2x^2 \ln x}{y^2} dy, \quad L - \text{треугольник с вершинами}$   
 $A(4; 3), B(5; 5), C(6; 4),$

b)  $\int_L \left( -x^2 y + x \sqrt{4 + x^2 + y^2} \right) dx + \left( y \sqrt{4 + x^2 + y^2} + xy^2 \right) dy, \quad L - \text{окружность } x^2 + y^2 = 8y.$

2.10. a)  $\int_L \left( \frac{12x}{y} + x e^{(x^2 + y^2)} \right) dx + \left( e^{x^2} + y e^{(x^2 + y^2)} \right) dy, \quad L - \text{прямоугольник с вершинами}$   
 $A(0; 6), B(0; 8), C(1; 8), D(1, 6),$

b)  $\int_L \left( x^2 y + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx + \left( \sqrt{\frac{x}{y}} + xy^2 \right) dy, \quad L - \text{окружность } x^2 + y^2 = 6.$

2.11. a)  $\int_L \left( x^2 + 7y + x \sqrt{x^2 - y^2} \right) dx + \left( e^{y^2} + x - y \sqrt{x^2 - y^2} \right) dy, \quad L - \text{треугольник с вершинами}$   
 $A(8; 1), B(9; 3), C(10; 2),$

b)  $\int_L \left( x^2 3^{(x^3 + y^3)} - 4y \right) dx + \left( y^2 3^{(x^3 + y^3)} + e^y + 2x \right) dy, \quad L - \text{окружность } x^2 + y^2 = 10y.$