Приложения интеграла Римана

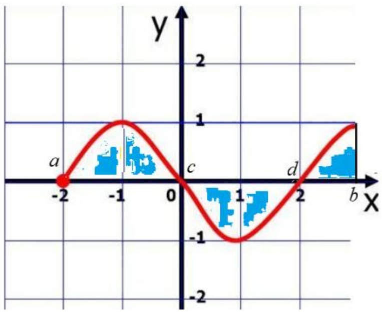
Интеграл Римана по отрезку был нами введен как площадь криволинейной трапеции. Понятие площади неотделимо от понятия интеграла. С его помощью можно вычислять площади любых плоских областей, а также длины дуг, площади поверхностей и объемы тел.

1. Площадь фигуры (явное задание функции).

Поскольку значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ может быть как отрицательным, так и положительным, а площадь фигуры – величина положительная, следует руководствоваться следующим правилом:

Если подынтегральная функция на интервале (a, b) меняет знак, скажем, в точках c и d, причем $c < d$, площадь фигуры определяется формулой

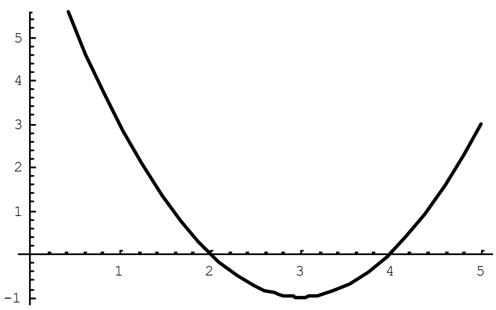
$$S = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \left|\int_d^b f(x)dx\right|.$$



Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0.$$

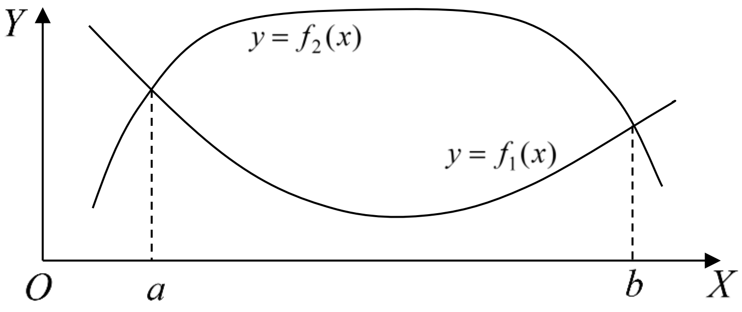
Кривая пересекает ось абсцисс при $x = 2$ и $x = 4$.



Очевидно, интересующая нас фигура находится в области $x \in [2, 4]$, причем подынтегральная функция в этой области отрицательна

$$S = \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right)\Bigg|_2^4\right| = \left|\frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 48 + 12 + 32 - 16\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}.$$

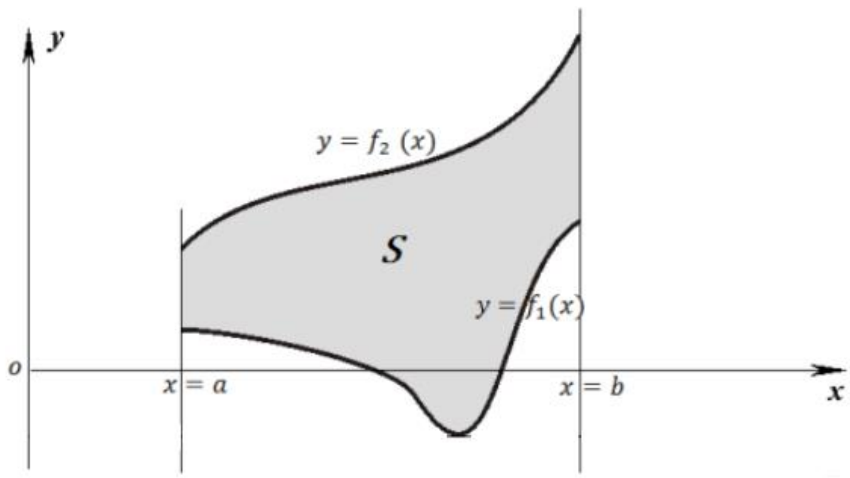
Вычислим **площадь области, ограниченной двумя кривыми** $y = f_1(x)$ **и** $y = f_2(x)$**,** такой что $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$.



Очевидно, что площадь области между кривыми равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций, поэтому

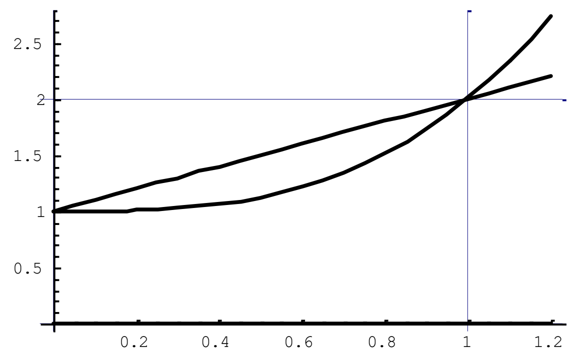
$$\boxed{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.}$$

Эта формула сохраняет свой вид и в случае, если функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ принимают отрицательные значения во всем интервале или в некоторой его части.



Пример. Вычислить площадь фигуры, находящейся в правой полуплоскости $(x \geq 0)$ и ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = x + 1$.

Из рисунка следует, что заданная фигура представляет разность двух трапеций и занимает область $x \in [0, 1]$, формула ее площади имеет вид



$$S=\int_a^b (y_n - y_\kappa)dx$$, где $y_n = x+1$, $y_\kappa = x^3+1$. Тогда

$$S=\left|\int_0^1 \left[x+1-(x^3+1)\right]dx\right| = \left|\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\right| = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

2. Площадь фигуры (параметрическое задание функции).

Чтобы получить формулу площади плоской фигуры, когда уравнение кривой, ограничивающей фигуру, задано параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

следует в формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx = \int_a^b y(x)dx$$

произвести замену переменной

$$S=\int_a^b y(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} x = x(t)\ , & dx = x'(t)dt \\ y = y(t) & \end{matrix}\right\} = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$

здесь $\alpha -$значение переменной t, соответствующее $x=a$, $\beta -$значение переменной t, соответствующее $x=b$. Итак, для параметрически заданной функции

$$\boxed{S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.}$$

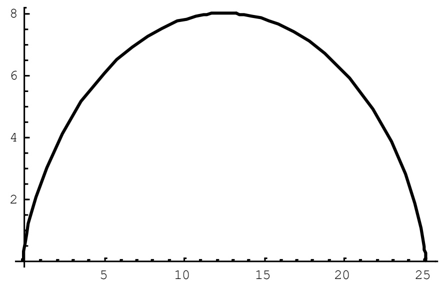
Здесь, как и в предыдущем пункте, необходимо следить за точками, в которых функция меняет знак.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$ и осью абсцисс.

Определим два ближайших друг к другу значения параметра t, при которых $y=0$.

Это $t=0$ $(x=0)$ и $t=2\pi$ $(x=8\pi)$.

Именно в этой области располагается одна арка циклоиды, и в этих пределах нужно производить интегрирование. Сделаем рисунок



$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$$

Из рисунка видно, что внутри области $t \in (0\,,\,2\pi)$ кривая знака не меняет. Тогда по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt,$$

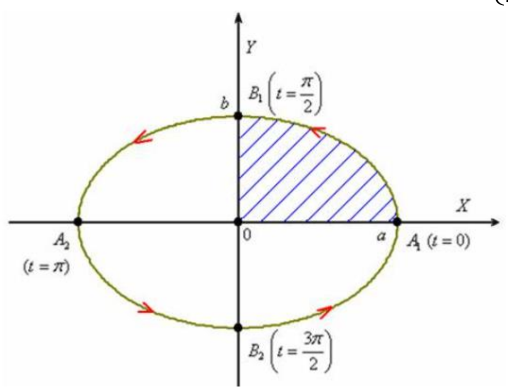
Вычислим площадь арки циклоиды

$$S = \int_0^{2\pi} 4(1-\cos t)4(1-\cos t)dt = 16\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = 16\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = 16\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 48\pi .$$

Пример 2. Вычислить площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.



В силу симметричности фигуры, вычислим часть площади, расположенной в 1-ой четверти и ее умножим ее на 4.

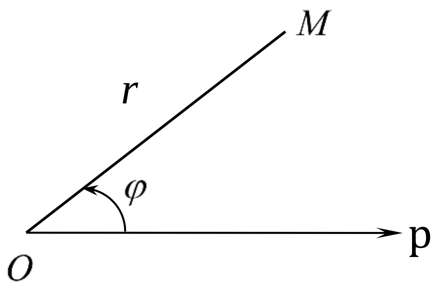
$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,sin\,t\ \ (-a\,sin\,t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2\,t\,dt = -2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-cos\,2\,t)dt =$$

$$= -2ab\left[t-\tfrac{1}{2}sin\,2\,t\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \pi ab.$$

3. Площадь фигуры (полярная система координат).

Полярная система координат

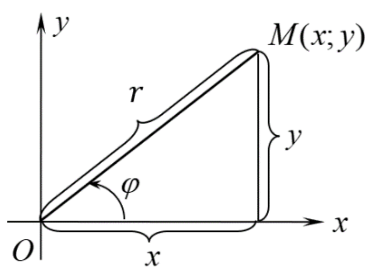
Вводится она следующим образом. Выберем некоторую точку плоскости O и назовем ее полюсом, проведем через нее ось, называют ее полярной осью. Расстояние от полюса до некоторой точки обозначим r, угол между полярной осью и лучом, соединяющим полюс с произвольной точкой плоскости – полярный угол – обозначим φ. Тогда паре чисел (r, φ) соответствует точка плоскости.



Если считать $0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$, то в полярной системе координат каждой точке плоскости (кроме полюса!) соответствует единственная пара чисел - полярные координаты точки. За одним исключением - полюсу соответствует бесчисленное множество пар чисел $(0, \varphi)$, причем φ может принимать любые значения в указанной выше области. Это является недостатком полярной системы координат, однако, польза от принятия данной координатной системы часто перекрывает указанный недостаток.

Пример. Паре чисел $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ соответствует точка, лежащая на луче, проведенным под углом $\frac{\pi}{6}$ к полярной оси, причем расстояние от полюса до этой точки равно 2.

Связь между полярной и декартовой системами координат



Совместим две системы координат, как это показано на рисунке, то есть начало декартовой системы координат с полюсом, полярную ось – с осью OX. Тогда точка M имеет декартовы координаты (x, y), полярные ее координаты (r, φ).

Из рисунка следует, что

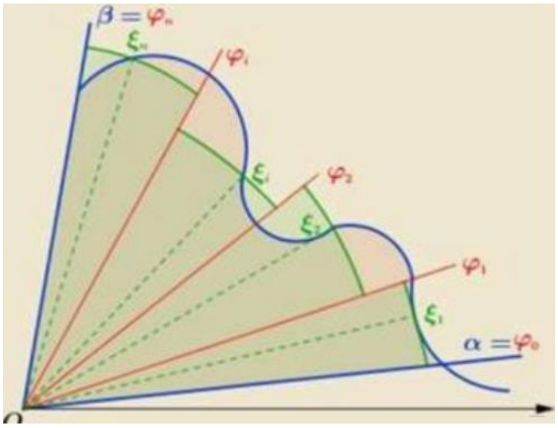
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

в то же время

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

С помощью этих формул в случае необходимости осуществляется переход от одной системы координат к другой. Так, точка с полярными координатами $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, имеет декартовы координаты $x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$.

Пусть задан криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривой, записанной в полярной системе координат $r = r(\varphi)$.



Определим площадь этого криволинейного сектора.

Разобьем область (φ_1, φ_2) на n подобластей – элементарных секторов.

Заменим каждый элементарный сектор сектором круга, радиус которого $r_k = r(\xi_k)$ и угол $\Delta\varphi_k$. Тогда площадь элементарного сектора равна $\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k$. Площадь всего криволинейного сектора приближенно описывается интегральной суммой

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \Delta\varphi_k .$$

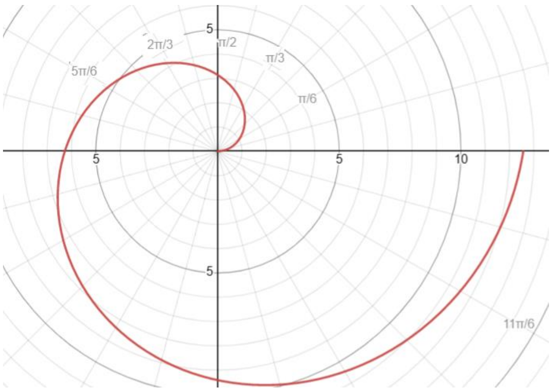
При этом с возрастанием числа разбиений области (φ_1, φ_2) значение интегральной суммы приближается к значению площади криволинейного сектора.

Очевидно, $S = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \Delta\varphi_k$.

Однако, предел интегральной суммы, если он не зависит от способа разбиения области и выбора точек r_k равен определенному интегралу. Следовательно, площадь криволинейного сектора определяется формулой

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi .}$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним витком спирали Архимеда $r = 2\varphi$.

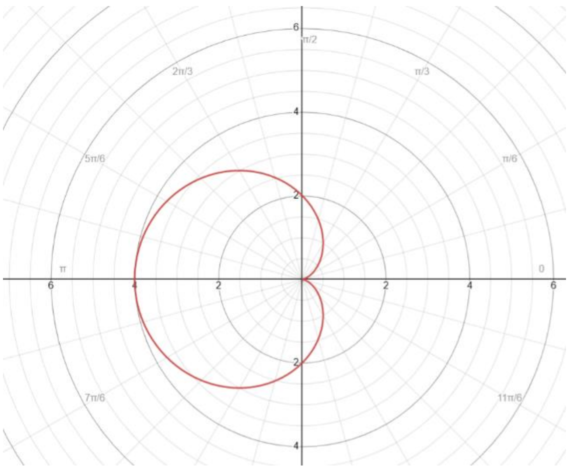


Один виток спирали проходится при изменении угла φ от 0 до 2π.

Тогда

$$S = \frac{4}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{2}{3}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{2(2\pi)^3}{3} = \frac{16}{3}\pi^3.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1-\cos\varphi)$. Рисунок



Очевидно,

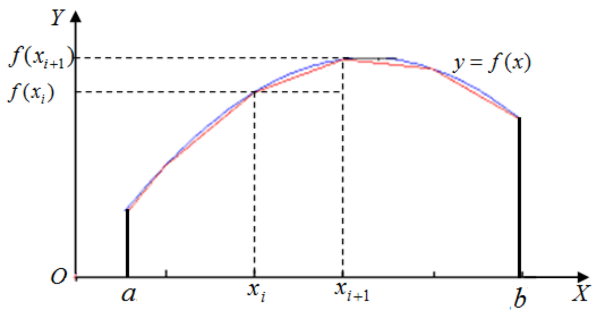
$$S = 2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = 2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

4. Длина дуги кривой, заданной на плоскости

а) Явное задание функции.

Вычислим **длину дуги кривой** $y = f(x),\ x \in [a,b]$. Длиной дуги кривой мы будем называть предельную сумму длин вписанных в дугу хорд при стремлении этих хорд к точкам.



Разобьем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,...,n$, где $x_0=a$, $x_n=b$. Длина хорды, расположенной над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, равна

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}\,.$$

Воспользуемся Теоремой Лагранжа и получим длину этой же хорды в виде

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+[f'(\xi_{i+1})(x_{i+1}-x_i)]^2}=\sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i,\ \text{где}\ \xi_i\in[x_i, x_{i+1}],$$

$\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$. Таким образом, длина дуги всей кривой может быть приближена суммой

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i\,,}$$

причем, чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$, тем точнее результат. При стремлении длины наименьшего из отрезков разбиения к нулю мы получим из суммы интеграл:

$$\boxed{\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx\,,}$$

который и дает выражение длины дуги данной кривой.

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ в области $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

тогда

$$L=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+ctg^2x}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=-\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\ln 3.$$

б) <u>Параметрическое задание функции</u>

Чтобы получить формулу **длины дуги кривой на отрезке, когда ее уравнение задано параметрически** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, следует в формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

произвести замену переменной

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx = \left\{ \begin{matrix} x = x(t)\ , & dx = x'(t)dt \\ y = y(t)\ , & y_x' = \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{matrix} \right\} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)dt,$$

откуда следует

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.}$$

Здесь α, β – значения переменной t, соответствующие $x = a$ и $x = b$.

Пример 1. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$.

Как говорилось выше, одна арка циклоиды расположена в области $t \in (0\,, 2\pi)$. Тогда

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16(1 - \cos t)^2 + 16\sin^2 t}\, dt = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt = 8\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -16\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = -16(-1 - 1) = 32.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 3$.

$$L = \int_0^3 \sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2}\, dt = \int_0^3 (t^2 + 1)dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\bigg|_0^3 = 9 + 3 = 12.$$

б) Полярная система координат

Рассмотрим кривую, заданную в полярной системе координат $r = r(\varphi)$. Длина дуги этой кривой в области $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ определяется формулой

$$\boxed{L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi .}$$

Пример. Вычислить длину кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$. Рисунок кардиоиды приведен ранее, из него видно, что интегрирование должно происходить в области $(0, 2\pi)$. Итак,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 16 .$$

5. Длина дуги кривой, заданной в пространстве

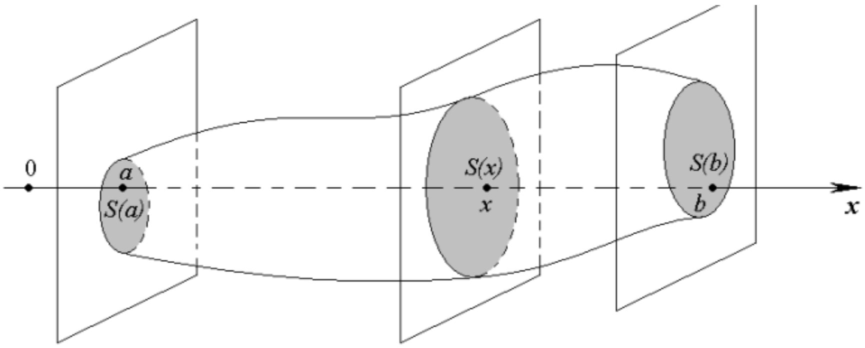
Для вычисления **длины дуги пространственной кривой**, заданной в параметрическом в виде $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_0, T]$,

применяют формулу

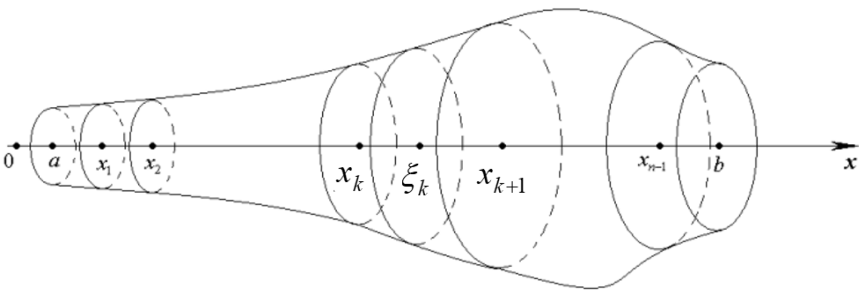
$$\boxed{S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt .}$$

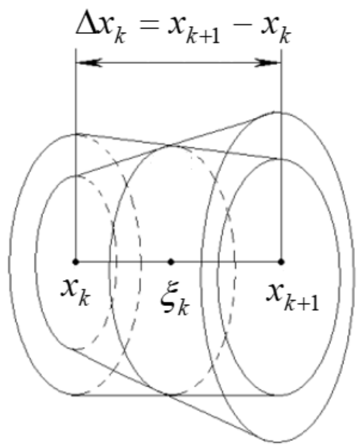
6. Вычисление **объема тела по известным площадям поперечного сечения**.

Найдем объем тела, у которого нам известны площади сечения этого тела плоскостями , перпендикулярными оси Ox. Такие сечения называются поперечными.



Разобьем исследуемое тело на части плоскостями $x_0 = a$, x_1, x_2 ....x_k......$x_n = b$, получив при этом n элементарных тел,





выберем внутри каждой области (x_k, x_{k+1}) точку ξ_k и подсчитаем в ней $S(x_k)$
тогда выражение $S(x_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ представляет объем элементарного цилиндра, приблизительно равный объему заданного элементарного тела. Очевидно,

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\Delta x_k$$

сумма объемов элементарных цилиндров приближенно равна объему изучаемого тела. Если увеличивать число разбиений n, следя за тем, чтобы все Δx_k уменьшались, стремясь к нулю, то

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\Delta x_k$$

Нетрудно заметить, что в правой части формулы стоит предел интегральной суммы Римана, который равен определенному интегралу

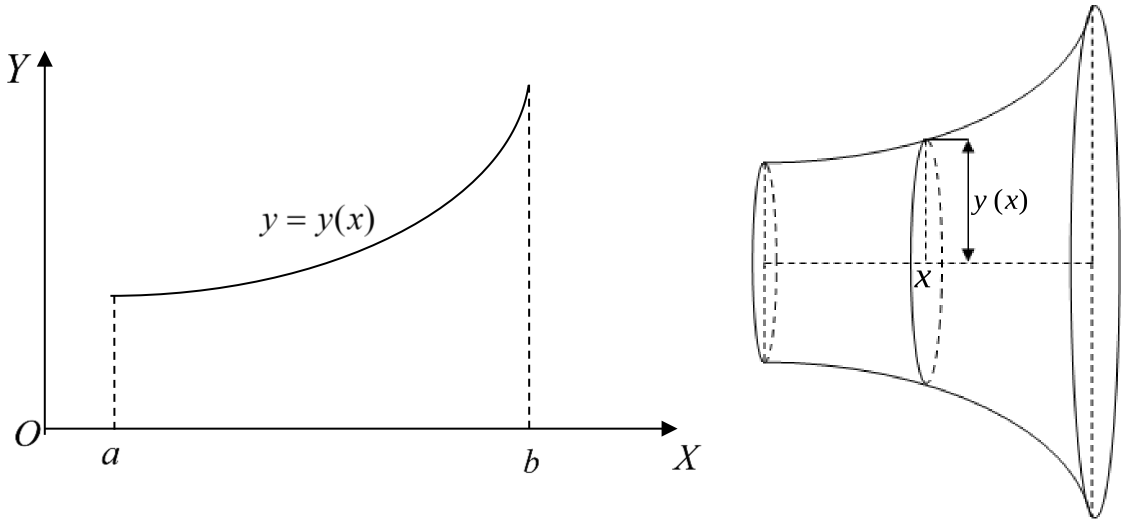
$$\boxed{\int_a^b S(x)dx}$$

7. Вычисление **объема тела вращения** вокруг оси Ox.

Если тело образовано вращением некоторой линии $y = y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, относительно оси OX, то оно называется телом вращения, и его объем может быть определен с помощью формулы

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2(x) dx.}$$

Докажем это.



Разобьем исследуемое тело на части плоскостями $x_0 = a$, x_1, x_2 ....x_i......$x_n = b$, получив при этом n элементарных тел. Любое сечение тела вращения плоскостями, перпендикулярными оси OX, представляет собой круг радиуса $y(x)$, площадь которого равна

$$S(x) = \pi y^2.$$

Выберем внутри каждой области $(x_i\ , x_{i+1})$ точку ξ_i и подсчитаем в ней $S(\xi_i)$, тогда выражение

$$S(\xi_i)\varDelta x_i = \pi\ y^2(\xi_i)\varDelta x_i, \qquad \text{где } \varDelta x_i = x_{i+1} - x_i$$

представляет объем элементарного цилиндра, приблизительно равный объему заданного элементарного тела. Очевидно,

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)\varDelta x_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} y^2(\xi_i)\varDelta x_i$$

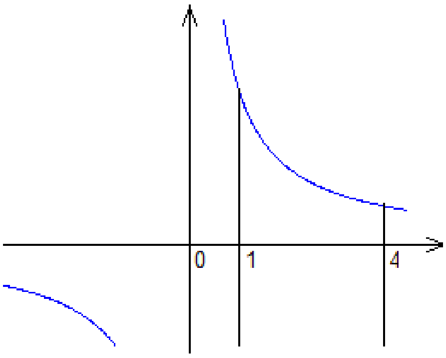
это сумма объемов элементарных цилиндров приближенно равна объему изучаемого тела. Если увеличивать число разбиений n, следя за тем, чтобы все Δx_i уменьшались, стремясь к нулю, то эта погрешность уменьшается, следовательно,

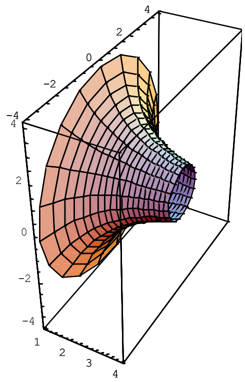
$$\lim_{\Delta\to 0} V_n = \lim_{\Delta\to 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} y^2(\xi_i)\Delta x_i$$

Нетрудно заметить, что в правой части формулы стоит предел интегральной суммы Римана, который равен определенному интегралу, т.е.

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2 dx.}$$

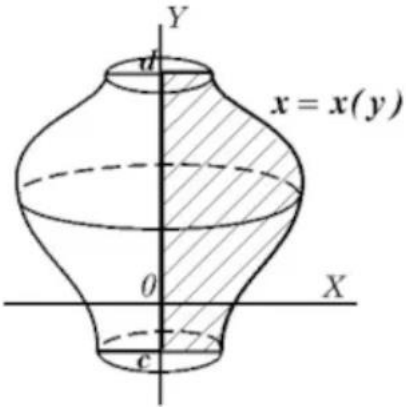
Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением гиперболы $xy = 4$ вокруг оси OX и расположенного между плоскостями $x = 1$ и $x = 4$.

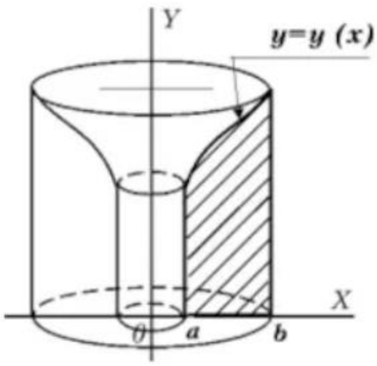




$$V = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi\frac{1}{x}\bigg|_1^4 = -16\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi\cdot$$

8. Вычисление **объема тела вращения** вокруг оси *Oy*.





$V = \pi \int_c^d x^2(y)dy$ $\quad\quad$ $V = \pi \int_a^b x\cdot y(x)dx$

Приближенное вычисление интеграла Римана

К сожалению, не для любой непрерывной функции можно найти первообразную в виде суперпозиции элементарных функций. Поэтому можно столкнуться с определенным интегралом, для которого применение формулы Ньютона-Лейбница невозможно. Например, $\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$.

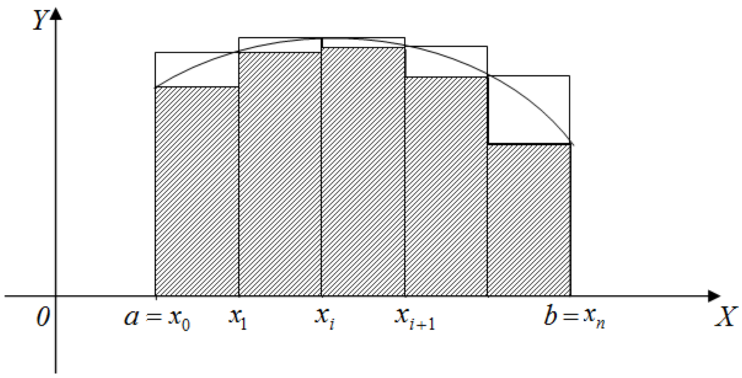
Для таких интегралов приходится применять приближенное интегрирование. Формул приближенного интегрирования довольно много, но все они основаны на ассоциации интеграла с площадью криволинейной трапеции.

Формула прямоугольников.

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей длины h (шаг разбиения)

$$h = \frac{b-a}{n}\ .$$

Тогда узловые точки $\qquad x_i = x_0 + h \cdot i, \quad i = 1, 2,.., n\,.$



Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется прямоугольником с высотой $f(x_{i+1})$, площадь которого равна

$$f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \text{или} \quad f(x_{i+1}) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Тогда приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$$

Эта формула называется – формула правых прямоугольников.
Если криволинейную трапецию с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменить прямоугольником с высотой $f(x_i)$, тогда получится формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$$

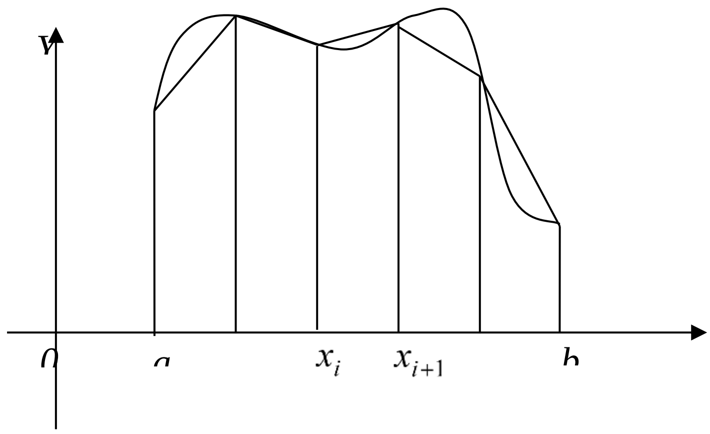
Эта формула называется – формула левых прямоугольников.

Часто при вычислениях используют формулу средних прямоугольников:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}$$

Поскольку составные данные формулы являются ни чем иным, как суммами, входящими в определение интеграла Римана, при $n \to \infty$ они сходятся к точному значению интеграла. Соответственно, с увеличением n точность результата, получаемого по приближённым формулам, возрастает.

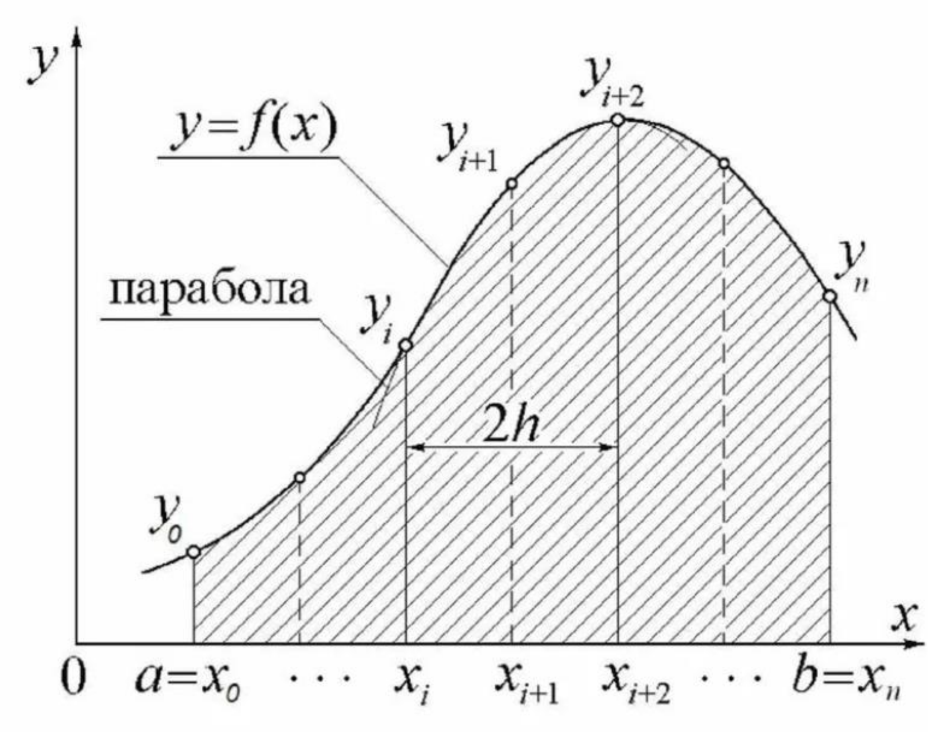
Формула трапеций.
Отрезок $[a,b]$ снова разбивается на n равных частей узлами $x_i = x_0 + h \cdot i, \quad i = 1, 2, .., n$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется обычной трапецией, причем участок кривой $y = f(x)$ над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется хордой, соединяющей соответствующие точки.



Высота такой трапеции равна $\dfrac{b-a}{n}$, средняя линия равна $\frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$.
Поэтому, суммируя площади соответствующих трапеций, получим

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).}$$

Формула Симпсона (формула парабол).



$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]$$