ЛЕКЦИЯ 4

1.13 РЯДЫ ФУРЬЕ.

Рассмотрим множество всех непрерывных (или кусочно непрерывных) функций на отрезке $[a;b]$. Такие функции интегрируемы на отрезке $[a;b]$.

Введем для функций понятие скалярного произведения.

Определение. *Скалярным произведением функций f(x) и g(x)* на отрезке $[a;b]$ называется интеграл от произведения этих функций по отрезку $[a;b]$ и обозначается $\left(f(x),g(x)\right)$:

$$\left(f(x),g(x)\right)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx.$$

Таким образом введённое скалярное произведение удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, превращая рассматриваемое множество функций в евклидово пространство:

Свойства скалярного произведения функций.

1. Скалярное произведение функции обладает свойством *линейности*:

$$\left(f(x),c_1g(x)+c_2h(x)\right)=c_1\left(f(x),g(x)\right)+c_2\left(f(x),h(x)\right),\quad c_1,c_2\in R..$$

Это свойство непосредственно следует из свойств линейности определенного интеграла.

2. В скалярном произведении сомножители можно переставлять местами (свойство *коммутативности*)

$$\left(f(x),\ g(x)\right)=\left(g(x),\ f(x)\right).$$

3. Скалярное произведение функции самой на себя не отрицательно (*положительная определенность* скалярного произведения):

$$\left(f(x),\ f(x)\right)\geq 0,$$

Это свойство следует из свойств определенного интеграла: интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

$$\left(f(x),\ f(x)\right)=\int_a^b f^2(x)dx\geq 0,$$

причём для непрерывной на $[a;b]$ функции *f(x)* из условия $\left(f(x),\ f(x)\right)=0$ следует, что

$f(x)\equiv 0\quad \forall x\in\left[a;b\right]$.

Таким образом введённое скалярное произведение удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, превращая рассматриваемое множество функций в евклидово пространство.

Определение. Две функции *f(x) и g(x)* называются *ортогональными* на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на этом отрезке равно нулю:

$$\left(f(x), g(x)\right) = 0.$$

Определение. Система функций (конечная или бесконечная) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...$ называется *ортогональной системой* на отрезке $[a;b]$, если каждая из этих функций ортогональна всем остальным функциям системы, т.е.

$$\left(\varphi_j(x), \varphi_k(x)\right) = 0 \quad \forall j \neq k,$$

и

$$\left(\varphi_k(x), \varphi_k(x)\right) \neq 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пример 1. Функции x и x^2 ортогональны на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(x;\ x^2\ ) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Пример 2. Система функций $1,\ \cos nx,\ \ \sin nx,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$ является ортогональной системой на отрезке $[-\pi;\pi]$ (докажите самостоятельно).

Предположим, что существует бесконечная система ортогональных функций на некотором отрезке $[a;b]$. Рассмотрим функциональный ряд из таких функций и предположим, что функция $f(x)$ является суммой этого ряда:

$$f(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x). \tag{1.90}$$

Выразим коэффициенты ряда через функцию $f(x)$. Для этого умножим скалярно обе части равенства (1.90) на функцию $\varphi_k(x)$, принадлежащую рассматриваемой системе ортогональных функций:

$$\left(f(x), \varphi_k(x)\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x), \varphi_k(x)\right).$$

Воспользуемся линейностью скалярного произведения и запишем правую часть полученного равенства в виде:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x), \varphi_k(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\left(\varphi_n(x), \varphi_k(x)\right). \tag{1.91}$$

Из ортогональности рассматриваемой системы функций следует, что в правой части равенства (1.91) только одно слагаемое с номером k отлично от нуля, так как

$$\left(\varphi_n(x), \varphi_k(x)\right) = 0 \quad \forall n \neq k\,,$$

т.е.

$$\left(f(x), \varphi_k(x)\right) = \alpha_k\left(\varphi_k(x), \varphi_k(x)\right),$$

откуда

$$\alpha_k = \frac{\left(f(x), \varphi_k(x)\right)}{\left(\varphi_k(x), \varphi_k(x)\right)} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{1.92}$$

Формулы (1.92) выражают *необходимое условие* разложения функции $f(x)$ в ряд (1.90). Однако следует заметить, что линейность скалярного произведения доказана для конечного числа функций, в то время как в равенстве (1.91) это свойство применено для бесконечной суммы. В случае бесконечной суммы использование свойства линейности приводит к почленному интегрированию функционального ряда. Вообще говоря, почленно интегрировать функциональный ряд нельзя. Однако, справедлива теорема о том, что если функции непрерывные и сходимость ряда равномерная, то интегрировать почленно можно. Поэтому, в дальнейшем мы будем предполагать, что ряд (1.90) можно почленно интегрировать. В частности, если система ортогональных функций состоит из непрерывных функций и ряд (1.90) сходится равномерно, то это будет выполняться. В этом случае коэффициенты α_k ряда выражаются через сумму ряда $f(x)$ по формулам (1.92).

Ряд по системе ортогональных функций (1.90) называется *рядом Фурье,* а коэффициенты этого ряда, выражаемые формулой (1.92) – *коэффициентами Фурье.*

1.14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ.

Рассмотрим систему функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{1.93}$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$. Докажем, что эта система ортогональна. Действительно

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$(\cos nx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = -\frac{1}{4n}\cos 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

При $n \neq k$

$$(\cos nx, \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(n+k)x + \sin(k-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(n+k)x}{n+k} - \frac{\cos(k-n)x}{k-n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

Аналогично можно доказать, что при $n \neq k$ $(\cos nx, \cos kx) = 0$ и $(\sin nx, \sin kx) = 0$, если воспользоваться формулами:

$$\cos nx \cdot \cos kx = \frac{1}{2}\left(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right);$$

$$\sin nx \cdot \sin kx = \frac{1}{2}\left(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x\right).$$

Ряд Фурье по тригонометрической системе (1.93) называется *тригонометрическим рядом Фурье.* Для получения формул коэффициентов Фурье вычислим скалярное произведение функций самих на себя:

$$(1; 1) = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi ;$$

$$(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi ;$$

$$(\sin nx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi .$$

Для единообразия формул коэффициентов Фурье функцию 1 в системе (1.93) меняют на $\frac{1}{2}$ и записывают тригонометрический ряд Фурье в общем виде:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right), \qquad (1.94)$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам(1.92):

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx; \qquad (1.95)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \qquad (1.96)$$

Прежде всего отметим, что все функции системы (1.93) являются периодическими с периодами 2π. Действительно, 1 имеет любой период, а период функции $\sin nx$ и $\cos nx$ (n=1,2,…) равен $\frac{2\pi}{n}$. Покажем это для $\sin nx$:

$$\sin\left(n\left(x \pm \frac{2\pi}{n}\right)\right) = \sin\left(nx \pm 2\pi\right) = \sin nx .$$

Следовательно, число $2\pi = n \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ является периодом всех функций системы (1.93). Поэтому каждый член тригонометрического ряда Фурье (1.94) является периодической функцией периода 2π. Но тогда и частичная сумма ряда (1.94) должна иметь период 2π (если все члены ряда не меняются от замены x на $x+2\pi$, то и сумма его не меняется от этой замены). Отсюда следует, что если ряд (1.94) сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то его сумма, будучи пределом периодической частичной суммы, является периодической функцией $f(x)$ с периодом 2π.

При выводе формул (1.95)–(1.96) мы заранее предполагали, что $f(x)$ является суммой ряда (1.94) и ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$. Обычно задача стоит другая: задана функция $f(x)$ и ее нужно разложить в тригонометрический ряд Фурье. Если допустить только, что для функции $f(x)$ существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул (1.95)–(1.96), то по этим формулам можно вычислить коэффициенты α_0, α_n и β_n и составить тригонометрический ряд по формуле (1.94), который будет представлять ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$.

Возникает вопрос, является ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся и если он сходится, то совпадает ли его сумма с функцией $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда.

Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье, и, следовательно, возможность разложения функции в тригонометрический ряд Фурье даётся теоремой Дирихле. Прежде чем формулировать эту теорему, введем два определения.

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно–монотонной* на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разделить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянная.

Определение. Функция $f(x)$ называется *удовлетворяющей условиям Дирихле* на отрезке $[a; b]$, если:

1) функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ или же имеет на нем конечное число точек разрыва I рода (то есть кусочно-непрерывна);

2) функция кусочно–монотонна на отрезке $[a; b]$.

Сформулируем теорему Дирихле, дающую достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Теорема Дирихле.(о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-\pi; \pi]$ условиям Дирихле. В таком случае ряд

Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси к периодической функции с периодом 2π. При этом внутри отрезка $[-\pi; \pi]$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке. В каждой точке x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при $x \to x_0$ слева и справа, т.е.:

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \right).$$

На концах отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции $f(x)$ при $x \to \pi$ слева и $x \to -\pi$ справа, т.е.

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to \pi - 0} f(x) + \lim_{x \to -\pi + 0} f(x) \right).$$

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно гладкой на отрезке $[a, b]$, если сама функция и ее производная $f'(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода.

Теорема 2. (о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, принимает на его концах равные значения и $f(x)$ кусочно гладкая на отрезке $[-\pi; \pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье (1.94) сходится равномерно на всей действительной оси, причем на отрезке $[-\pi; \pi]$ этот ряд сходится равномерно к функции $f(x)$. (без доказательства)

1.15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ С ПЕРИОДОМ 2*L*.

Часто возникает необходимость раскладывать функцию в тригонометрический ряд Фурье, период которого отличен от 2π. Этот случай легко сводится к рассмотренному ранее.

Пусть некоторая функция $g(x)$ имеет период $2l$, т.е. $g(x \pm 2l) = g(x)$. Введем новую независимую переменную z с помощью соотношения:

$$z = \frac{\pi}{l} x \,. \tag{1.97}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = g\left(\frac{l}{\pi} z \right). \tag{1.98}$$

Так как из равенства (1.97) следует, что $x = \frac{\pi}{l} z$, то $\varphi(z) = f(x)$, т.е. замена независимой переменной по формуле (1.97) соответствует изменению масштаба на оси абсцисс , при котором точка с координатой l на оси Ox преобразуется в точку с координатой π на оси Oz (рис. 1.15).

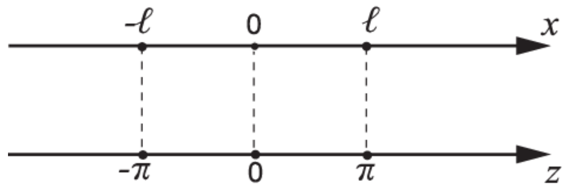

Рис. 1.15.

Покажем, что $\varphi(z)$ есть функция с периодом 2π. Действительно, на основании равенства (1.98):

$$\varphi(z+2\pi)=g\left(\frac{l}{\pi}(z+2\pi)\right)=g\left(\frac{l}{\pi}z+2l\right)=g(x+2l).$$

Но по условию функция $g(x)$ имеет период $2l$, т.е.

$$g(x+2l)=g(x)=\varphi(z),$$

следовательно $\varphi(z+2\pi)=\varphi(z)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l;\, l]$ и удовлетворяет условию Дирихле. Построим для нее функцию $\varphi(z)$ согласно формуле (1.98): $\varphi(z)=f\left(\frac{l}{\pi}z\right)$, которая будет определена на отрезке $[-\pi;\,\pi]$ и будет удовлетворять на нем условиям Дирихле. Составим для функции $\varphi(z)$ тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos nz+\beta_n\sin nz\right) \tag{1.99}$$

где коэффициенты α_0, α_n, β_n найдем по формулам (1.95), (1.96). Имеем:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}z\right)dz.$$

Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования по формуле $z=\frac{\pi}{l}x$. Тогда $dz=\frac{\pi}{l}dx$ и, изменяя, соответственно, пределы интегрирования, получим:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}z\right)dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

Аналогично находим:

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\cos nzdz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\cos nzdz=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\frac{\pi}{l}dx=$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx;$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\sin nzdz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\sin nzdz = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\frac{\pi}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Заменим в формуле (1.99) переменную z на $\frac{\pi}{l}x$, тогда мы получим для функции *f(x)*, определенной на отрезке $[-l; l]$, тригонометрический ряд Фурье, который будет сходиться в полном соответствии с теоремой Дирихле к периодической функции с периодом $2l$. При этом в формулировке теоремы Дирихле π меняется на l.

Окончательные формулы тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов для функции *f(x)* выглядят следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}x + \beta_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{1.100}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad \alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \\ \beta_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \end{array}\right\} \tag{1.101}$$

1.16. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ.

Если функция $f(x)$ обладает свойством четности или нечетности, формула (1.101) для вычисления коэффициентов Фурье могут быть упрощены.

Приведем некоторые свойства четных и нечетных функций, которые мы используем в данном разделе.

1^0. *Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.*

Пусть, например, $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции. Докажем, что функция $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ также четная.

Из условия четности функций $f(x)$ и $g(x)$ следует, что $f(-x) = f(x)$ и $g(-x) = g(x)$. Но тогда

$$\varphi(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = \varphi(x),$$

т.е. $\varphi(x)$ – функция четная. Аналогично доказывается вторая часть утверждения 1^0.

2^0. *Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.*

Пусть, например, $f(x)$ – четная функция, а $g(x)$ – нечетная, т.е. $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$. Покажем, что их произведение $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ является нечетной функцией. Действительно

$$\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-\varphi(x),$$

т.е. $\varphi(x)$ – функция нечетная.

3^0. *Если* $f(x)$ *– четная функция, то*

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Согласно свойству аддитивности определенного интеграла можно написать

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной, положив $x=-z$, тогда $dx=-dz$. Если $x=0$, то $z=0$, если $x=-l$, то $z=l$. Поэтому, учитывая, что $f(x)$ – четная, т.е. $f(-z)=f(z)$ имеем:

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx=-\int_{l}^{0} f(-z)dz=\int_{0}^{l} f(-z)dz=\int_{0}^{l} f(z)dz.$$

Тогда

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{0}^{l} f(z)dz+\int_{0}^{l} f(x)dx=2\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.

4^0. *Если* $f(x)$ *– нечетная функция, то*

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=0.$$

Проведем замену переменной и преобразования, как и в пункте 3^0, учитывая, что $f(x)$ нечетная функция, т.е. $f(-z)=-f(z)$:

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx=-\int_{l}^{0} f(-z)dz=\int_{0}^{l} f(-z)dz=-\int_{0}^{l} f(z)dz,$$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{l} f(x)dx=-\int_{0}^{l} f(z)dz+\int_{0}^{l} f(x)dx=0.$$

Пусть теперь нам нужно разложить в тригонометрический ряд Фурье *четную* функцию $f(x)$. Так как $\cos\frac{n\pi}{l}x$ – функция четная, а $\sin\frac{n\pi}{l}x$ – функция нечетная, то на основе свойств

1^0 и 2^0 произведение $f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x$ будет функцией четной, а $f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$ – функцией нечетной. Тогда, на основании свойств 3^0 и 4^0 для коэффициентов Фурье (1.101) получим следующие формулы

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx\\
&\alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\\
&\beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1.102)$$

Соответственно этому *тригонометрический ряд Фурье для четной функции* имеет вид

$$f(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}x\qquad(1.103)$$

Если же нужно разложить в тригонометрический ряд Фурье *нечетную* функцию, то согласно свойствам 1^0 и 2^0 произведение $f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x$ будет функцией нечетной, а $f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$ – функцией четной. Поэтому, на основании свойств 3^0 и 4^0 для коэффициентов Фурье получим формулы

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=0,\quad \alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=0,\\
&\beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.104)$$

И тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции имеет вид:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi}{l}x\qquad(1.68)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ четная, то тригонометрический ряд Фурье содержит только косинусы, а если функция $f(x)$ нечетная – только синусы.

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[0;l]$. Построим для нее ряд по формулам (1.102)–(1.103). Так как эти формулы получены для разложения четной функции, то полученный ряд будет сходиться на отрезке $[-l;l]$ к четной функции. То есть на отрезке $[0;l]$ ряд будет сходиться к функции $f(x)$ согласно теореме Дирихле. А на отрезке $[-l;0]$ к функции, удовлетворяющей условию $f(-x)=f(x)$. В этом случае говорят – к четному продолжению функции $f(x)$ на отрезок $[-l;0]$. Вне отрезка

$[-l;l]$ ряд Фурье будет сходиться к периодической функции с периодом $2l$. При этом говорят, что получено разложение функции $f(x)$ по системе $\left\{\cos\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=0}^{\infty}$ (или по косинусам).

Аналогично, если для той же функции $f(x)$ построить ряд по формулам (1.104)–(1.105), то полученный ряд будет сходиться на отрезке $[0;l]$ к функции $f(x)$ согласно теореме Дирихле. А на отрезке $[-l;0]$ – к ее нечетному продолжению, т.е. к функции, удовлетворяющей условию $f(-x)=-f(x)$. Вне отрезка $[-l;l]$ полученный ряд Фурье будет сходиться к периодической функции с периодом $2l$. В этом случае мы будем иметь разложение функции $f(x)$ по системе $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ (или по синусам).

1.17. Полнота тригонометрической системы. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

Определение 1. Пусть X некоторое множество функций на отрезке $[a,b]$. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной для множества X в смысле равномерного приближения, если $\forall f(x)\in X$ и $\forall\varepsilon>0$ существует такое конечное число функций $\varphi_{n_1},...,\varphi_{n_k}$ и такие числа $\lambda_1,...,\lambda_k$, что $\left|f(x)-\left(\lambda_1\varphi_{n_1}(x)+...+\lambda_k\varphi_{n_k}(x)\right)\right|<\varepsilon$ для всех $x\in[a,b]$.

Другими словами система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является полной системой для множества X, если любую функцию из X можно сколь угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями функций из системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. Система тригонометрических функций $\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна в смысле равномерного приближения для множества непрерывных на отрезке $[-l,l]$ функций, принимающих на его концах равные значения. (без доказательства).

Определение 2. Пусть функции f и g определены на отрезке $[a,b]$. Число

$\sqrt{\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx}$ называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a,b]$ функции f от функции g.

Определение 3. Система функций $\left\{\varphi_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной в смысле среднего квадратичного приближения для множества X функций, определённых на отрезке $\left[a,b\right]$, если $\forall f(x)\in X$ и $\forall\varepsilon>0$ существует такая конечная линейная комбинация функций системы $\left\{\varphi_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, что её среднее квадратичное отклонение на отрезке $\left[a,b\right]$ от функции f меньше ε.

Теорема 2. Система тригонометрических функций $\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна в смысле среднего квадратичного приближения для множества непрерывных на отрезке $\left[-l,l\right]$ функций. (без доказательства).

Замечание. Теорема 2 верна также для множества X всех функций с интегрируемым на отрезке $\left[-l,l\right]$ квадратом.

Теорема 3. (Минимальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть f - функция с интегрируемым на отрезке $\left[-l,l\right]$ квадратом и пусть $S_n(x)$ - частичная сумма порядка n её ряда Фурье. Тогда

$$\min\int_{-l}^{l}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2dx=\int_{-l}^{l}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2dx,$$

где минимум в левой части равенства берётся по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n.

Другими словами, частичные суммы тригонометрического ряда Фурье осуществляют наилучшее приближение в смысле среднего квадратичного приближения функции f среди всех тригонометрических многочленов того же порядка.

Следствие. (Неравенство Бесселя). Если $a_0,...,a_n,b_n$ - коэффициенты Фурье функции f на отрезке $\left[-l,l\right]$, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Теорема 4. (Равенство Парсеваля). Пусть f - функция с интегрируемым на отрезке $\left[-l,l\right]$ квадратом. Тогда неравенство Бесселя превращается в равенство, то есть

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$