**ЛЕКЦИЯ 2**

**Дифференцирование функций комплексного переменного. Аналитические функции, их свойства**

# 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ИХ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

## 2.1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В первой лекции были введены комплексные числа, определены алгебраические операции с этими числами (подразд. 1.1). Далее были введены функции комплексного переменного, понятия предела, непрерывности для таких функций (подразд. 1.2), понятие ряда в комплексной области (подразд. 1.3). С помощью рядов были введены функции $e^z, \sin z, \cos z$, а также формулы, связывающие эти функции в комплексной области (подразд. 1.4). Были рассмотрены также функции $\operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg} z,\ \operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$, которые легко определяются через введенные выше функции. В этом разделе продолжим рассмотрение функций комплексного переменного, их свойств и приложений.

*Логарифмическая функция* комплексного аргумента, как и для действительного аргумента, определяется как обратная показательной. Если $e^{\omega} = z$, где $z \neq 0$, то $\omega$ называется *логарифмом* числа $z$ и обозначается $\omega = \text{Ln z}$.

Если $\omega = u + iv$, то из формулы (1.28) следует, что $|e^{\omega}| = e^u$ и $\operatorname{Arg} e^{\omega} = v + 2\pi k$ ($k = 0, \pm1, \pm2,\ldots$). Так как в рассматриваемом случае $e^{\omega} = z$, то $e^u = |z|$ или $u = \ln|z|$ ( $|z|$ – число действительное и положительное, и здесь имеется в виду обычное определение логарифма), и $v = \operatorname{Arg} z$. Поэтому

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad k \in Z\,. \tag{2.1}$$

Из формулы (2.1) следует, что логарифм является многозначной функцией (действительная часть логарифма, равная $\ln|z|$, определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное $2\pi$).

*Главным значением логарифма* числа $z$ называется то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа $z$. Следовательно, в формуле (2.1) главное значение логарифма получим при $k = 0$.

Если $z = x$ – действительное положительное число, то $|z| = x$ и $\arg z = 0$, поэтому, согласно (2.1), главное значение введенного логарифма для действительного положительного числа является числом действительным и совпадает со значением $\ln x$ действительного аргумента. Поэтому символом ln $z$ обозначают значение логарифма любого комплексного числа $z$. Тогда из формулы (2.1) следует:

$$ln\, z = ln|z| + i\, arg\, z. \qquad (2.2)$$

Определим *показательную функцию* $a^z$. Формула (1.28) служит для возведения в комплексную степень числа $e$. Чтобы определить возведение в степень любого комплексного числа, заметим, что в силу определения логарифмической функции

$$e^{\mathrm{Ln}\, a} = a$$

для любого комплексного числа $a$.

Для действительных $a$ и $z$ при $a > 0$ справедливо тождество

$$a^z = e^{z \ln a}$$

Тогда для любых комплексных $a$ и $z$ введем по определению

$$a^z = e^{z\, \mathrm{Ln}\, a} \qquad (2.3)$$

В силу многозначности логарифма выражение $a^z$, определенное равенством (2.3), многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получим, подставив в правую часть (2.3) ln $a$ вместо Ln $a$.

## 2.2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадают с соответствующими определениями для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются и на функции комплексного переменного.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного многими дополнительными свойствами, причина появления которых заключается в том, что условие существования производной функции комплексного переменного является несравненно более ограничительным, чем условие для существования производной функции действительного переменного.

Дадим независимому переменному $z = x + i\,y$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ и найдём вызванное этим приращением приращение $\Delta w$ однозначной функции $w = f(z)$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении $\Delta z$ к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ в точке $z$ и обозначается

$f'(z), \quad w', \quad \dfrac{dw}{dz}$ или $\dfrac{df}{dz}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Требование существования предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления $\Delta z$ к нулю накладывает на функцию $f(z)$ более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = f(x)$ действительного переменного *x*. Так, если функция $y = f(x)$ имеет производную, то это значит, что существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x + \Delta x$ к точке *x* по двум направлениям: слева (при $\Delta x < 0$) и справа (при $\Delta x > 0$), и что эти пределы совпадают. Требование же существования производной для функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z + \Delta z$ к точке *z* по любому пути, в частности, по любому из бесконечного множества различных лучей, и совпадение всех этих пределов.

Пусть $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \left(u\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - u(x; y)\right) + i\left(v\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - v(x; y)\right) = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - u(x; y)$;

$\Delta v = v\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - v(x; y)$.

В этих обозначениях

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \qquad (2.4)$$

Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке $z$, тогда предел (2.4) существует и не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю. В частности, при $\Delta z = \Delta x$, т.е. при приближении точки $z + \Delta z$ к точке *z* по прямой, параллельной оси 0*x* (рис.2.1, *а*)), получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.5)$$

Выбрав $\Delta z = i\Delta v$, т.е. устремляя точку $z + \Delta z$ к точке *z* по прямой, параллельной оси 0*y* (рис. 2.1, *б*)), получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( -i\frac{\Delta u}{\Delta y} + i\frac{\Delta v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.6)$$

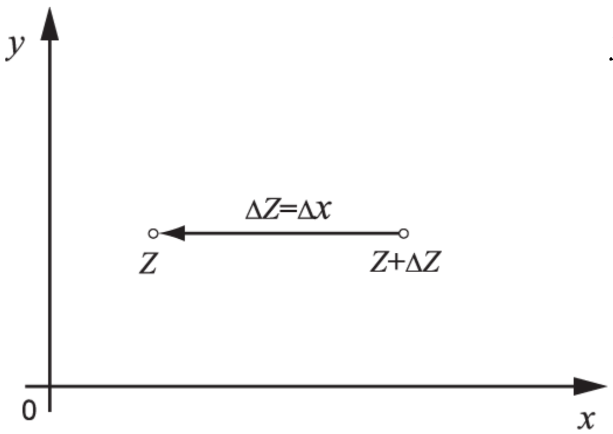


Рис. 2.1, *а*)

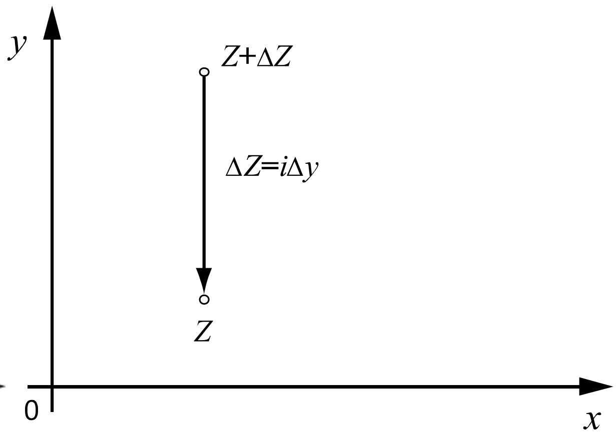


Рис. 2.1, *б*)

Так как предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ не должен зависеть от закона стремления $\Delta z$ к нулю, то выражения (2.5) и (2.6) должны быть равны:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Напомним, что из равенства двух комплексных чисел следует равенство их действительных и мнимых частей, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.7)$$

Эти условия, которые называются *условиями Коши - Римана*, должны выполняться в каждой точке, в которой функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ имеет производную (дифференцируема).

При некоторых добавочных ограничениях, например, если потребовать существование полных дифференциалов функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$, можно доказать, что условия Коши - Римана не только необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z)$.

### 2.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ИХ СВОЙСТВА

Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической в данной точке.*

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется *аналитической в этой области.*

Точки плоскости $z$, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют *правильными* точками этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена) – *особыми* точками.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций комплексного переменного, а определение производной функции комплексного переменного также не отличается от соответствующего определения для функции действительного переменного, то можно показать, что правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной функции остаются справедливыми и в случае функции комплексного переменного.

Также можно показать, что сохраняются и правила дифференцирования элементарных функций. Все рассмотренные выше основные элементарные (однозначные) функции дифференцируемы в области определения, причём имеют место формулы:

$$\left(z^n\right)' = nz^{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{2.8}$$

$$\left(e^z\right)' = e^z; \tag{2.9}$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z; \tag{2.10}$$

$$(shz)' = chz, \quad (chz)' = shz; \tag{2.11}$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}. \tag{2.12}$$

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{2.13}$$

называется *уравнением Лапласа.* Решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями.*

**Теорема.** Если функция $f(z) = u + iv$ является аналитической в некоторой области $D$, то действительная и мнимая части этой функции являются в области $D$ гармоническими функциями, т.е. являются решениями уравнения Лапласа.

*Доказательство.*

Если функция $f(z)$ аналитическая в области $D$, то функции *u* и *v* связаны условиями Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продифференцируем первое из этих соотношений по *x,* а второе по *y*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая полученные равенства и учитывая, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Аналогично, дифференцируя первое из исходных соотношений по $y$, а второе по $x$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

и вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

т.е. функция $v(x, y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Заметим, что, если $u(x; y)$ и $v(x; y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, функция $u(x; y) + iv(x; y)$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия (2.7), как правило, не будут выполнены.

Аналитическую функцию $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ можно получить, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x; y)$ или $v(x; y)$, подобрать другую так, чтобы удовлетворялись условия Коши – Римана (2.7), т.е. определить другую из этих функций по её двух частным производным. Таким способом функцию можно определить с точностью до постоянного слагаемого.