ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.

Дискретные случайные величины. Биномиальное распределение дискретной случайной величины.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Если результатом эксперимента является число, значение которого нельзя предсказать точно до проведения самого эксперимента, то это число называют *случайной величиной*. Случайную величину называют *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

Рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, ..., x_N, \dots$. Пусть задана функция $p(x)$, значение которой в каждой точке $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) равно вероятности того, что величина X примет значение x_i

$$p(x_i) = p_i = P\ (X = x_i).$$

. Функция $p(x)$ называется законом распределения вероятностей случайной величины, или кратко, законом распределения. Эта функция определена в точках последовательности $x_1, x_2, ..., x_N, \dots$ и обычно задается таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_N
P	p_1	p_2	…	p_N

где x_i упорядочены по возрастанию $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_N < \dots$.Так как события $X = x_i$ образуют полную группу, то

$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, в случае конечной последовательности чисел x_i ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$, в случае бесконечной последовательности чисел x_i ,

что часто служит контролем вычисления значений p_i.

Задача 1.27. В урне 10 шаров, из них 3 белых. Вынимают наугад 3 шара. Найти распределения вероятностей случайной величины X – числа вынутых белых шаров при повторной и бесповторной выборках. При повторной выборке после каждого извлечения шара отмечают его цвет и возвращают шар в урну, снова перемешивая шары, при бесповторной выборке вынутые шары в урну не возвращают.

Решение

Для повторной выборки:

P (X = 0) = P(три раза вынимали черный шар) = 0,7·0,7·0,7 , где 0,7 – вероятность вынуть черный шар из урны. Так как после каждого извлечения шар возвращают в урну и шары перемешивают, то система шаров возвращается в исходное состояние и вероятность вынуть черный шар одинакова при любом извлечении.

P(X = 1) = P(вынимали один белый шар и два черных) = P(вынули белый шар первым или вынули белый шар вторым, или вынули белый шар третьим) = 0,3·0,7·0,7+0,7·0,3·0,7+0,7·0,7·0,3 =3 · 0,3 · $0{,}7^2$ = 0,441.

P (X = 2) = P(вынимали один черный шар и два белых) = P(вынули черный шар первым или вынули черный шар вторым, или вынули черный шар третьим) = 0,7·0,3·0,3+0,3·0,7·0,3+0,3·0,3·0,7 = 3 · $0{,}3^2$ · 0,7 = 0,189.

P (X = 3) = P(три раза вынимали белый шар) = 0,3·0,3·0,3.

Для бесповторной выборки:

P (X = 0) = P(три раза вынимали черный шар) = (7/10)(6/9)(5/8) , где 7/10 – вероятность, что первый вынутый шар черный; 6/9 – вероятность, что второй вынутый шар черный, если первый вынутый шар был черный; 5/8 – вероятность, что третий вынутый шар черный, если первые два вынутых шара были черные.

P (X = 1) = P(вынимали один белый шар и два черных) = P(вынули белый шар первым или вынули белый шар вторым, или вынули белый шар третьим) = (3/10)(7/9)(6/8) + (7/10)(3/9)(6/8) + (7/10)(6/9)(3/8) = =3(3/10)(7/9)(6/8) = 0,5250.

P (X = 2) = P(вынимали один черный шар и два белых) = P(вынули черный шар первым или вынули черный шар вторым, или вынули черный шар третьим) = (7/10)(3/9)(2/8) + (3/10)(7/9)(2/8) + (7/10)(3/9)(2/8) = =3(3/10)(2/9)(7/8) = 0,1750.

P (X = 3) = P(три раза вынимали белый шар) = (3/10)(2/9)(1/8) = =0,0083.

Распределение вероятностей числа вынутых белых шаров при повторной и бесповторной выборках приведено в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

X	$\mathcal{P}$ (Повторная выборка)	$\mathcal{P}$ (Бесповторная выборка)
0	$0{,}7^3 = 0{,}343$	(7/10)(6/9)(5/8) = 0,2917
1	$3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441$	3(3/10)(7/9)(6/8) = 0,5250
2	$3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$	3(3/10)(2/9)(7/8) = 0,1750
3	$0{,}3^3 = 0{,}027$	(3/10)(2/9)(1/8) = 0,0083
Σ	1,000	1,000

Задача 1.28. Три стрелка стреляют по мишени независимо друг от друга по одному разу. Вероятности попадания равны: для первого стрелка $P(A_1) = 0{,}7$, для второго стрелка $P(A_2) = 0{,}8$, для третьего стрелка $P(A_3) = 0{,}9$. Найти распределения вероятностей случайной величины X – числа попаданий в мишень.

Решение

P (X = 0) = P(не попали все три стрелка) = 0,3 · 0,2 · 0,1 = 0,006.

P (X = 1) = P(попал только один стрелок) = P(попал только первый стрелок или попал только второй стрелок, или попал только третий стрелок) = 0,7 · 0,2 · 0,1 + 0,3 · 0,8 · 0,1 + 0,3 · 0,2 · 0,9 = 0,092.

P (X = 2) = P(не попал только один стрелок) = P(не попал только первый стрелок или не попал только второй стрелок, или не попал только третий стрелок) = 0,3 · 0,8 · 0,9 + 0,7 · 0,2 · 0,9 + 0,7 · 0,8 · 0,1 = 0,398.

P (X = 3) = P(попали все три стрелка) = 0,7 · 0,8 · 0,9 = 0,504.

Таблица 1.2.

Распределение вероятностей случайной величины X – числа попаданий в мишень (к задаче 1.28)

X	P
0	0,3 · 0,2 · 0,1 = 0,006
1	0,7 · 0,2 · 0,1 + 0,3 · 0,8 · 0,1 + 0,3 · 0,2 · 0,9 = 0,092
2	0,3 · 0,8 · 0,9 + 0,7 · 0,2 · 0,9 + 0,7 · 0,8 · 0,1 = 0,398
3	0,7 · 0,8 · 0,9 = 0,504
Σ	1,000

Задача 1.29. При условии задачи 1.28. найти вероятность того, что в мишень попали хотя бы два стрелка.

Решение

Требуется найти вероятность события $X \geq 2$.

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$ = 0,398 + 0,504 = 0,902.

Функция распределения вероятностей случайной величины и ее свойства.

Рассмотрим функцию $F(x)$, определенную на всей числовой оси следующим образом: для каждого x значение $F(x)$ равно вероятности того, что дискретная случайная величина примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1.17)$$

Эта функция называется *функцией распределения вероятностей*, или кратко, *функцией распределения.*

Задача 1.30. Найти функцию распределения случайной величины X, рассмотренной в задаче 1.27 в случае бесповторной выборки.

Решение.

Ясно, что если $x \le 0$, то $F(x) = 0$, так как X не принимает значений, меньших нуля. Если $0 < x \le 1$ то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}2917$; если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 2)$. Но событие $X < 2$ в данном случае является суммой двух несовместных событий: $X = 0$ и $X = 1$. Следовательно,

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2917 + 0{,}5250 = 0{,}8167.$$

Итак, для $1 < x \le 2$ имеем $F\{x) = 0{,}8167$. Аналогично вычисляется значение функции в промежутке $2 < x \le 3$:

$$P(X < 3) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0{,}8167 + 0{,}1750 = 0{,}9917.$$

Наконец, если $x > 3$, то $F(x)= 1$, так как в этом случае любое возможное значение X (0, 1, 2, 3) меньше, чем x. График функции $F(x)$изображен на рис. 1.9. Как указывалось выше, значение функции распределения $F(x_i)$ равно скачку функции в точке x_i. Это свойство наглядно иллюстрируется на рис. 1.9.

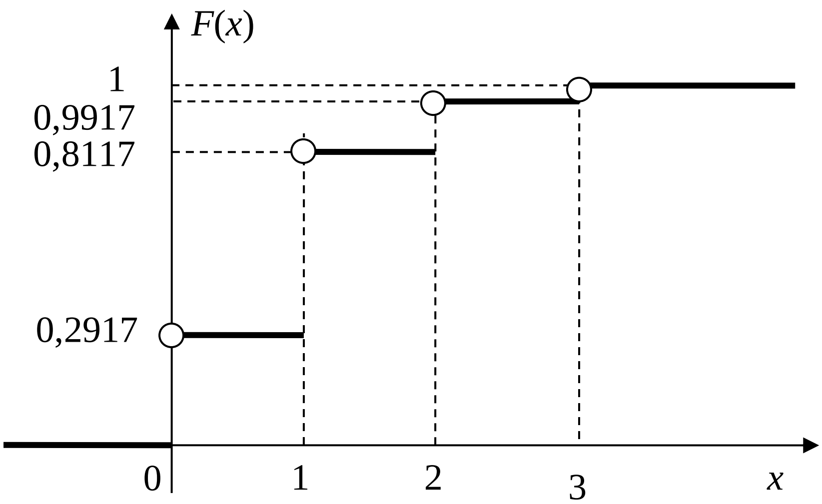

Рис. 1.9. График функции распределения (к задаче 1.30).

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p $(0 < p < 1)$, и не наступает с вероятностью q, $q = 1 - p$. Обозначим $P_n(m)$ – вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз.

Эта вероятность $P_n(m)$ вычисляются по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (1.21)$$

где коэффициенты C_n^m называются числом сочетаний из n элементов по m и вычисляют по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}. \qquad (1.22)$$

тогда случайная величина X такая, что $P(X{=}m){=}$ $P_n(m)$ определяет *биномиальное распределение* или *распределение Бернулли*.

Из формулы (1.22) видно, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$. По определению полагают также $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Рассмотрим еще раз смысл коэффициентов C_n^m. Пусть заданы n разных элементов. Всевозможные группировки из данных n элементов по m элементов в каждой, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом, при этом порядок расположения элементов в группировке безразличен, называются *сочетаниями* из n элементов по m. Например, $n = 4$, имеем 4 элемента: a, b, c, d. Выпишем сочетания из четырех элементов по два: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Из определения следует, что сочетания ab и ba не различимы. Число таких сочетаний и находится по формуле (1.18), $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$.

Примеры вычисления: $C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84;\quad C_{18}^{16} = C_{18}^2 = \frac{18\cdot 17}{1\cdot 2} = 153.$

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит менее m раз, равна сумме вероятностей $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)$; более m раз – сумме вероятностей $P_n(m+1) + ... + P_n(n)$. Часто расчеты упрощаются, если применять свойство вероятностей $P_n(m)$

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = 1.$$

Задача 1.31. . Баскетболист выполняет пять бросков. Найдите распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа попаданий мяча в корзину, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,4 .

Решение

Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, где $n = 5$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,} 6$, тогда:

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = (0{,}6)^5 = 0{,}07776.$$

$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^4 = 0{,}2592.$$

$$P(X = 2) = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot (0{,}6)^3 = 0{,}3456.$$

$$P(X = 3) = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}234.$$

$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot (0{,}6) = 0{,}0768.$$

$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}4^5 = 0{,}01024.$$

Проверка: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 0{,}07776 + 0{,}2592 + 0{,}3456 + 0{,}2304 + 0{,}0768 + 0{,}01024 = 1.$

Распределение вероятностей случайной величины X приведено в табл. 1.3.

Таблица 1.3.

Распределение вероятностей случайной величины X (к задаче 1.31)

X	p
0	$(0{,}6)^5 = 0{,}07776$
1	$5 \cdot (0{,}6)^4 \cdot 0{,}4 = 0{,} 2592$
2	$10 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}3456$

3	$10 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}2304$
4	$5 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^4 = 0{,}0768$
5	$(0{,}4)^5 = 0{,}01024$
Σ	1,000

Задача 1.32. В условии задачи 1.31. найти вероятность того, что будет хотя бы одно попадание.

Решение

Требуется найти вероятность события $X \geq 1$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}07776 = 0{,}92224$.

Задача 1.33. Отрезок *КВ* разделен точкой *С* в отношении 2:1. Найти вероятность того, что среди девяти точек, размещенных случайным образом на *КВ*, шесть окажутся левее точки *С*.

Решение

В задаче 1.6. найдена вероятность события A = {одна точка, размещенная на отрезке *КВ*, окажется левее *С*, т. е. принадлежит отрезку *КС*}, $p = P(A) = 2/3$, тогда $q = 1 - p = 1/3$.

Искомая вероятность равна

$$P_9(6) = C_9^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = C_9^3 \cdot \frac{2^6}{3^9} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^9} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0{,}273.$$

Задача 1.34. В единичный куб случайным образом помещают 17 точек независимо друг от друга. Найти вероятность того, что 14 из них попадут в пирамиду, вершина которой совпадает с центром верхнего основания куба, а основание пирамиды совпадает с основанием куба (событие *D*).

Решение

В задаче 1.7. найдена вероятность события A = {одна точка, случайным образом размещенная в кубе, окажется внутри пирамиды}, $p = P(A) = \frac{1}{3}$; . тогда $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.

Согласно формуле (1.21)

$$P(D) = P_{17}(14) = C_{17}^{14} p^{14} q^{3}, \text{ где } C_{17}^{14} = C_{17}^{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 680.$$

Искомая вероятность равна

$$P(D) = 680 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = 4,21 \cdot 10^{-5}.$$

Задача 1.35. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничьи не считаются): а) три партии из четырех или пять партий из восьми? б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение

а)Так как противник равносильный, то вероятность выигрыша одной партии равна вероятности проигрыша, т.е. $p = q = 1/2$.

Вероятность выиграть три партии из четырех равна $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$,

вероятность выиграть пять партий из восьми равна $P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$.

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех равна сумме вероятностей $P_4(3) + P_4(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми равна сумме вероятностей

$$P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{7}{32} + \frac{C_8^2}{2^8} + \frac{C_8^1}{2^8} + \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32} + \frac{1}{2^8}(28 + 8 + 1) = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вывод однозначный: вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Часто необходимо знать, при каком значении *m* вероятность $P(X=m)$ для случайной величина *X*, имеющей распределение Бернулли, .принимает наибольшее значение. То есть требуется найти *наивероятнейшее число* m_0 *наступления события A* в данной серии опытов. Можно доказать, что число m_0 должно удовлетворять двойному неравенству

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \qquad (1.23)$$

Заметим, что сегмент $[np - q,\ np + p]$, в котором лежит m_0, имеет длину

$$(np+p) - (np - q) = p+q=1.$$

Поэтому, если какой-либо из его концов не является целым числом, то между этими концами лежит единственное целое число, и m_0 определено однозначно. В том случае, если оба конца – целые числа, имеются два наивероятнейших значения: $np - q$ и $np + p$.

Задача 1.36. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. и стрелок делает десять выстрелов.

Решение.

Здесь $n = 10$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $np - q = 10{\bullet}0{,}6 - 0{,}4 = 5{,}6$, $np + p = 10{\bullet}0{,}6 + 0{,}6 = 6{,}6$. Согласно формуле (1.19) наивероятнейшее значение m_0 лежит на сегменте [5,6; 6,6] и, следовательно, равно 6.

При больших значениях *n* подсчет вероятностей $P_n(m)$ по формуле (1.17) связан с громоздкими вычислениями. В этом случае удобнее пользоваться следующей формулой:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \qquad (1.24)$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ (p не равно нулю и единице), а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Формула (1.20) выражает *локальную теорему Лапласа*. Точность этой формулы повышается с возрастанием *n*. Функция $\varphi(x)$, как мы увидим в дальнейшем, играет очень большую роль в теории вероятностей.

Задача 1.37. Игральный кубик бросают 72 раза. Определить вероятность того, что ровно 30 раз появится число, большее 4.

Решение

На игральном кубике число, большее 4, это 5 или 6. Вероятность того, что при одном бросании кубика появится число 5 или 6 равна $p = 2/6 = 1/3$ (число благоприятных исходов равно 2, общее число исходов 6)

Тогда $m = 30$, $n = 72$, $p=1/3$, $q = 1 - 1/3 = 2/3$; далее, находим

$$\sqrt{npq} = \sqrt{72 \cdot \frac{1}{3}\frac{2}{3}} = 4, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 72(1/3)}{4} = 1{,}5.$$

Используя формулу (1.20), получим

$$P_{72}(30) \approx \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1,5)^2/2} = 0{,}0324.$$

На практике часто встречается случай биномиального распределения, при котором n велико, а p мало. Например, X – число бракованных изделий объема n (n – велико) при вероятности появления бракованного изделия $p \ll 1$.

Этот случай можно рассматривать как *асимптотику биномиального распределения* при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \lambda = Const$.

Представим выражение для вероятности в биномиальном распределении в виде

$$P(X = m) = \frac{1}{m!}(np)(np - p) \dots (np - (m-1)p) \cdot (1 - p)^{n-m}.$$

Перейдем к пределу:

$$P(X=m)=\frac{1}{m!}\lambda^m \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda};\quad (m=0,1,2,...)\,. \tag{1.25}$$

Полученное распределение называется *распределением Пуассона*. Распределение Пуассона с достаточной точностью может быть использовано как приближенное для биномиального распределения при $n \geq 100$, $p \leq 0{,}01$.

Задача 1.38. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна $p = 0{,}002$. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение

Дискретная случайная величина X (число негодных изделий в партии) имеет биномиальное распределение, где $n = 500$, $p = 0{,}002$ и $q = 0{,}998$, причем $np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$. Найдем искомую вероятность по формуле Пуассона (1.21) с параметром $a = np = 1$.

$$P(X=3)=P_{500}\approx\frac{a^3e^{-a}}{3!}=\frac{e^{-1}}{6}=0{,}06\,.$$

Перейдем теперь к рассмотрению еще одной важной задачи, в которой используется число сочетаний.

В партии из N деталей имеется n стандартных и $N - n$ нестандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей k стандартных и $m - k$ нестандартных (событие A). Рассмотрим решение этой задачи на примере.

Задача 1.39. В партии из 30 деталей имеется 8 нестандартных, остальные стандартные. Наудачу отобраны 6 деталей. Найти распределение вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение

P (X = 0) = P(все 6 деталей нестандартные) =

= (8/30)(7/29)(6/28)(5/27)(4/26)(3/25) $\approx$0,00005.

P (X = 1) = P(одна деталь стандартная, остальные нестандартные) =

= 6·(22/30)(8/29)(7/28)(6/27)(5/26)(4/25) $\approx$0,00207. Найдена вероятность события: первая вынутая деталь стандартная, остальные нестандартные. Но стандартная деталь может быть вынута первой, второй, третьей, … , шестой, т.е. возможно шесть несовместных событий (вариантов), а искомое событие X = 1 является их суммой. Вероятность каждого варианта одинакова, поэтому найденная вероятность умножена на 6.

P (X = 2) = P(две детали стандартные, остальные нестандартные) =

= C_6^2·(22/30)(21/29)(8/28)(7/27)(6/26)(5/25) $\approx$0,02723. Найдена вероятность события: две первые вынутые детали стандартные, остальные нестандартные. Эта вероятность умножена на число вариантов, которыми можно вынуть две детали из шести, т.е. на $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

P (X = 3) = P(три детали стандартные, остальные нестандартные) =

= C_6^3·(22/30)(21/29)(20/28)(8/27)(7/26)(6/25) $\approx$0,1452. Найдена вероятность события: три первые вынутые детали стандартные, остальные нестандартные. Эта вероятность умножена на число вариантов, которыми можно вынуть три детали из шести, т.е. на $C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

P (X = 4) = P(четыре детали стандартные, остальные нестандартные) =

= C_6^4·(22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(8/26)(7/25)$\approx$0,3449.

P (X = 5) = P(пять деталей стандартные, остальные нестандартные) =

= C_6^5·(22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(18/26)(8/25)$\approx$0,3548.

P (X = 6) = P(все шесть деталей стандартные) =

= (22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(18/26)(17/25)$\approx$0,1257.

Распределение вероятностей случайной величины X приведено табл. 1.4.

Таблица 1.4.

Распределение вероятностей случайной величины X (к задаче 1.39).

X	P
0	$(8/30)(7/29)(6/28)(5/27)(4/26)(3/25) \approx 0{,}00005$
1	$6\cdot(22/30)(8/29)(7/28)(6/27)(5/26)(4/25) \approx 0{,}00207$
2	$15\cdot(22/30)(21/29)(8/28)(7/27)(6/26)(5/25) \approx 0{,}02723$
3	$20\cdot(22/30)(21/29)(20/28)(8/27)(7/26)(6/25) \approx 0{,}14524$
4	$15\cdot(22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(8/26)(7/25) \approx 0{,}34495$
5	$6\cdot(22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(18/26)(8/25) \approx 0{,}35480$
6	$(22/30)(21/29)(20/28)(19/27)(18/26)(17/25) \approx 0{,}12566$
Σ	1,000

Задача 1.40. При условии задачи 1.39. найти вероятность того, что среди отобранных деталей находится не более двух нестандартных.

Решение

Требуется найти вероятность события $X \geq 4$.

$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}34495+0{,}35480+0{,}12566 = 0{,}82541.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

9.1. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров не менее двух потребуют ремонта.

9.2. Для спортсмена вероятность попасть в мишень при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 1/4. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятность событий: A = {хотя бы одно попадание}, B = {ровно два попадания}.

9.3. В цехе 5 станков. Для нормальной работы цеха необходимо, чтобы работали не менее четырех станков. Вероятность выхода одного станка из строя равна 0,1. Определить вероятность нормальной работы цеха.

9.4. В группе 18 студентов, среди которых 12 хорошо успевающих. По списку наудачу отобраны 8 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 хорошо успевающих.

9.5. На складе имеется 15 однотипных приборов, причем 10 из них изготовлены московским заводом. Найти вероятность того, что среди семи взятых наудачу приборов: а) 4 прибора московского завода; б) более 4 приборов московского завода.

9.6. Аппаратура состоит из 200 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за гарантийный срок с вероятностью 0,01. Найти вероятность того, что за гарантийный срок откажут более двух элементов.

9.7. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 500 деталей окажутся более двух бракованных.

9.8. Учебник издан тиражом в 3500 экземпляров. Пусть вероятность неправильной брошюровки равна 0,0005. Найти вероятность того, что тираж содержит более двух бракованных книг.

9.9. Вероятность нарушения герметичности баллона с пропаном (за определенное время t) равна 0,0005. Найти вероятность того, что из 1500 баллонов, хранящихся на складе два или более окажутся с нарушением герметичности.

9.10. Вероятность заболеть гриппом в течение месяца после вакцинации равна 0,002. Вакцинацию прошли 1000 студентов и сотрудников института. Найти вероятность того, в течение месяца заболеет более трех человек.

9.11. Найти вероятность p_1 того, что наудачу поставленная в данном квадрате точка окажется внутри вписанного в квадрат круга. Найти вероятность p_2 того, что из 9 наудачу поставленных в данном квадрате точек внутри вписанного круга окажется 6 точек.

9.12. Найти вероятность того, что а) наудачу поставленная в данном кубе точка окажется внутри вписанного в куб шара; б) из 8 наудачу поставленных в данном кубе точек внутри вписанного шара окажется не менее 3 точек.

Ответы

9.1. 0,114. **9.2.** $P(A) = 0{,}763$; $P(B) = 0{,}264$. **9.3.** 0,9185. **9.4.** 0,1697. **9.5.** а) 0,3263; б) 0,5735. **9.6.** 0,902. **9.7.** 0,4562. **9.8.** 0,174. **9.9.** 0,6457. **9.10.** 0,1429.

9.11. $p_1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$; $p_2 = C_9^6 p_1{}^6 (1 - p_1)^3 \approx 0{,}1952$. **9.12.** а) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$; б) 0,8843.