Признаки отрицательности действительных частей корней многочлена

Рассмотрим многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

$a_0 > 0, \ \ a_i \in R, \ \ i = 0,1,2,\ldots,n$.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие отрицательности действительных частей корней многочлена*). Для того чтобы действительные части всех корней многочлена с действительными коэффициентами были отрицательны, необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена были одного знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен и будем считать, что $a_0 > 0$. Данный многочлен имеет ровно n корней, действительных или комплексных, а так как все его коэффициенты действительны, то комплексные корни встречаются комплексно сопряженными парами, то есть корни имеют вид: $z = a, \ a < 0$ или $z = \alpha \pm \beta i, \ \alpha < 0$.

При разложении на множители корню $z = a$ соответствует множитель вида $(z - a)$, коэффициенты которого положительны.

Паре комплексно сопряженных корней соответствуют два множителя $\big(z - (\alpha + \beta i)\big)\big(z - (\alpha - \beta i)\big) = z^2 - 2\alpha z + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)$. Так как по условию $\alpha < 0$, то и здесь все коэффициенты положительны.

Таким образом, при разложении $P_n(z)$ на множители получим произведение линейных и квадратичных сомножителей с положительными коэффициентами. Следовательно, после раскрытия скобок все коэффициенты многочлена будут положительными. Кроме того, так как $\alpha \neq 0$, многочлен $P_n(z)$ будет содержать все степени z от n-ой до нулевой, то есть среди его коэффициентов нулевых тоже не будет. Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сформулированное необходимое условие *не является достаточным* для всех многочленов *старше* второй степени. *Для квадратного трехчлена положительность всех его коэффициентов – необходимое и достаточное условие того, что* $\operatorname{Re} k_{1,2} < 0$. Это очевидным образом следует из теоремы Виета.

ПРИМЕР. Нетрудно проверить, что корнями многочлена третьей степени $P_3(z) = z^3 + z^2 + 4z + 30$ являются числа $z_1 = -3, \ z_{2,3} = 1 \pm 3i, \ \operatorname{Re} z_{2,3} = 1 > 0$, хотя все его коэффициенты положительны.

Сформулируем (без доказательства) две теоремы, которые дают необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей корней многочлена. Такие теоремы называются *критериями*.

ТЕОРЕМА (*Критерий Рауса-Гурвица*). Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Рауса-Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Матрица Гурвица устроена следующим образом: на ее главной диагонали стоят все коэффициенты многочлена, начиная с a_1, в столбцах стоят коэффициенты с номерами соответствующей четности, именно: в первом – нечетные, во втором – четные и т.д. Когда нужные коэффициенты заканчиваются, оставшиеся места в столбце заполняются нулями. Таким образом, в последней строке матрицы Рауса-Гурвица только один ненулевой элемент a_n.

Главными диагональными минорами матрицы Γ являются

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots, \quad \Delta_n = \Delta\Gamma.$$

Критерий Рауса-Гурвица не очень удобен для исследования корней многочлена достаточно высокой степени, так как требует вычисления, как минимум, $(n-2)$ главных диагональных миноров матрицы n-го порядка (без первого и последнего, знак которых очевиден). Более удобным является эквивалентный ему критерий Льенара-Шипара.

ТЕОРЕМА (*критерий Льенара-Шипара*). Для того чтобы действительные части всех корней многочлена были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0, \ldots,$ где $\Delta_k,\ k = n-1, n-3, \ldots$ – главные диагональные миноры матрицы Гурвица k-го порядка.

ПРИМЕР. Проверить, являются ли отрицательными действительные части корней многочлена $z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 10z^3 + 7z + 9 = 0$.

У этого многочлена $a_0 = 1,\ a_1 = -2 < 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 10,\ a_4 = 0,\ a_5 = 7,\ a_6 = 9$. Необходимое условие отрицательности действительных частей корней не выполнено, значит, среди корней есть такие, у которых $\operatorname{Re} k_i > 0$.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения

$$\text{а) } x''' + 2x'' + 3x' + 10x = f(t); \quad \text{б) } x^{IV} + x''' + 6x'' + 2x' + x = f(t).$$

а) Все решения неоднородного линейного дифференциального уравнения в смысле устойчивости ведут себя, как нулевое решение соответствующего однородного уравнения $x''' + 2x'' + 3x' + 10x = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 + 2k^2 + 3k + 10 = 0$.
Необходимое условие отрицательности действительных частей корней этого многочлена выполнено, поэтому составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

По критерию Льенара-Шипара вычислим главный диагональный минор второго порядка ($n = 3$): $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Значит, среди корней есть числа с положительной действительной частью, а потому нулевое решение однородного дифференциального уравнения неустойчиво, что, в свою очередь, означает неустойчивость всех решений исходного неоднородного уравнения.

б) Рассуждая аналогично, составим характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$k^4 + k^3 + 6k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Матрица Гурвица для этого многочлена – матрица четвертого порядка:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0,\ \Delta_1 = 1 > 0.$$

Следовательно, по критерию Льенара-Шипара все $\operatorname{Re} k_i < 0$, поэтому все частные решения исследуемого дифференциального уравнения асимптотически устойчивы.

Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,...,x_n). \end{cases} \tag{1}$$

Будем полагать, что (1) имеет тривиальное решение, то есть $f_i(0,...,0) = 0 \ \forall i = 1,...,n$, и все функции $f_i(x_1,...,x_n)$ дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат.

В этой окрестности по определению дифференцируемой функции нескольких переменных

$$\Delta f_i = f_i(x_1,...,x_n) - f_i(0,...,0) = f_i(x_1,...,x_n) =$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0,...,0)x_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0,...,0)x_n + \alpha_{1i}(x_1,...,x_n)x_1 + ... + \alpha_{ni}(x_1,...,x_n)x_n,$$

где $\lim\limits_{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \to 0} \alpha_{ji}(x_1,...,x_n) = 0 \quad \forall i,\ j = 1,...,n.$

Поэтому вблизи начала координат слагаемые $\alpha_{ji}(x_1,...,x_n)x_j$ имеют более высокий порядок малости, чем линейные слагаемые $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0)x_j \quad i, j = 1,...,n$.

В некоторых случаях при исследовании устойчивости тривиального решения системы (1) нелинейными слагаемыми правой части можно пренебречь, считая, что $f_i(x_1,...,x_n) \approx \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0)x_j$.

Тогда систему дифференциальных уравнений (1) можно заменить на близкую ей *при достаточно малых* $x_1,...,x_n$ систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,...,0)x_1 + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(0,...,0)x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(0,...,0)x_1 + ... + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(0,...,0)x_n \end{cases}.$$

Обозначим $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0) = a_{ij}$ и вместо системы (1) рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}\,x_n\ . \end{cases} \qquad (2)$$

Линейная однородная система (2) называется *системой первого приближения системы* (1).

Замена исследования устойчивости тривиального решения системы (1) исследованием устойчивости тривиального решения системы (2) называется *исследованием устойчивости* решения системы *по первому приближению.*

При составлении системы первого приближения можно пользоваться тем, что в окрестности нуля (при $t \to 0$) следующие величины эквивалентны

$\sin t \sim t$	$\operatorname{tg} t \sim t$	$e^t - 1 \sim t$	$\sqrt[m]{1+t} - 1 \sim \dfrac{t}{m}$
$\arcsin t \sim t$	$\operatorname{arctg} t \sim t$	$\ln(1+t) \sim t$	

ПРИМЕР. Исследовать устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + e^{2y} - \cos y - x^2 y \\ y' = 3x - y - \sin 3y + x\,y \end{cases}$.

Исследуем по первому приближению устойчивость решения $x = 0, y = 0$ этой системы

При x, y *достаточно близких к нулю* слагаемые $x\,y$ и $x^2 y$ имеют более высокий порядок малости, чем x и y, поэтому ими можно пренебречь при составлении системы первого приближения. Кроме того, в окрестности нуля

$$\sin 3y \sim 3y,$$

$$e^{2y} - \cos y = \left(e^{2y} - 1\right) + \left(1 - \cos y\right) = \left(e^{2y} - 1\right) + 2\sin^2 \frac{y}{2} \sim 2y + \frac{2y^2}{4} \sim 2y.$$

Таким образом, система первого приближения имеет вид: $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$.

Составим ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$k^2+3k-10=0$. Один из корней этого уравнения положительный, значит, тривиальное решение обеих систем неустойчиво.

ПРИМЕР. Исследовать устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = tg\left(z-y\right)-2x \\ y' = \sqrt{9+12x}-3e^{y} \\ z' = -3y \end{cases}$.

система первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 2x - 3y \\ z' = -3y \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 & 1 \\ 2 & -3-k & 0 \\ 0 & -3 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -k^3-5k^2-8k-6=0.$$

Применим к многочлену $P_3\left(k\right)=k^3+5k^2+8k+6$ критерий Льенара-Шипара: $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} > 0$. Следовательно, $\operatorname{Re} k_{1,2,3} < 0$, поэтому нулевое решение системы первого приближения, а также и исходной системы асимптотически устойчиво.

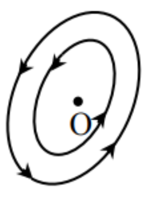
Исследование устойчивости решения системы по первому приближению возможно, если

1. *все собственные значения* системы первого приближения *имеют отрицательные действительные части*. В этом случае тривиальное решение системы асимптотически устойчиво, откуда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения исходной системы ;
2. *среди собственных значений системы есть хотя бы одно с положительной действительной частью*. В этом случае тривиальное решение неустойчиво, поэтому неустойчиво и тривиальное решение исходной системы .

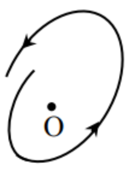
Если окажется, что среди собственных значений есть такие, что $\operatorname{Re} k_i = 0$, а остальные собственные значения, если они есть, имеют $\operatorname{Re} k_i < 0$, то на устойчивость нулевого решения начинают влиять нелинейные слагаемые, которые отбрасываются при составлении системы первого приближения.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2y - x^3 \\ y' = 3x - y^3 \end{cases}$.

Составим систему первого приближения, отбросив нелинейные слагаемые: $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 3x \end{cases}$. Характеристическое уравнение $k^2 + 6 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$, поэтому для системы первого приближения точка покоя – центр, она устойчива, но не асимптотически. Траекториями являются замкнутые линии (эллипсы)



Но так как в исходной системе есть нелинейные слагаемые, то в результате их влияния траектории перестанут быть замкнутыми, однако как именно они себя поведут, исследуя систему первого приближения, узнать нельзя



или