1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

1) $\int\limits_L (2x+y)dl,$ где L:

a) $y^2 = 4x$ от точки $A(1;\,2)$ до точки $B(4;\,4)$;

b) $y = x^3$ от точки $A(0;\,0)$ до точки $B(1;\,1)$;

c) первая арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

d) дуга окружности $r = 3\cos\varphi,\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}.$

2. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)\,dy,$ где L

a) дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,1)$;

b) контур ΔABC: $A(5;\,0)$, $B(0;\,5)$ и $C(5;\,5)$;

c) дуга окружности $\begin{cases} x = 5\cos\varphi, \\ y = 5\sin\varphi, \end{cases}$ обход контура по часовой стрелке от точки A(5;0) до точки B(0;5).

d) петля кривой $r = 4\cos 4\varphi,$ пересекающая положительную часть оси Ox .

2) $\int\limits_L xydx + y^2dy,$ где L – четверть эллипса $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\int\limits_L (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz,$ где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;\,2;\,3)$ и $B(3;\,5;\,7)$.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по указанному замкнутому контуру L:

1) $\oint\limits_L 2ydx - 3xdy,$ где L – контур ΔABC: $A(1;\,0)$, $B(3;\,1)$ и $C(0;\,5)$;

2) $\oint\limits_L x^2ydx + 2x^3dy,$ где L – контур, образованный дугами парабол $y^2 = 2x,\ \ x^2 = 2y$ при положительном обходе контура интегрирования.

Задания(I уровень)

1.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по указанной дуге кривой L:

1) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dy,$ где L – дуга параболы $y = 2x^4$ от точки A(– 1; 2) до точки B(1; 2);

2) $\int\limits_L \frac{y}{2x}dx + (x + 2y)dy,$ где L – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки O(0; 0) до точки A(2; 8);

3) $\int\limits_L 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy,$ где L – дуга кривой $y = x^3$ от точки B(– 1; – 1) до точки C(1; 1);

4) $\int\limits_L (x^2 - z^2)dx + 2yzdy - xzdz,$ где L – дуга пространственной кривой $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,$ соединяющая точки O(0; 0; 0) и A(1; 1; 1);

5) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + x^2y^2dy,$ где L – отрезок от A(1; 1) до B(4; 3);

6) $\int\limits_L xydx + ydy,$ где L – дуга окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

II уровень

2.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода

1) $\int\limits_L 2x^2ydx + (x + y)dy,$ где L – дуга от точки O(0; 0) до точки A(2; 4):

а) прямой $y = x$, б) параболы $y = x^2$,

в) кривой $y = 2\sqrt{2x}$, г) кубической параболы $y = \frac{1}{2}x^3$;

2) $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy,$ где L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки A(1; 0) до точки $B(e^2; 2)$;

3) $\int\limits_L (xy - x^2)dx + x^2dy,$ где L – дуга кривой $x^2 = 9y$ от точки O(0; 0) до точки C(3; 1);

4) $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + x^2y^2dy,$ где L – отрезок от $A(1;\ 1)$ до $B(4;\ 3)$;

5) $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy,$ где L – окружность $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$;

6) $\int\limits_L \frac{x}{y^2}dx + \frac{y}{x^2}dy,$ где L – дуга окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$;

7) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 2$;

8) $\int\limits_L xydx + yzdy + zxdz,$ где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t,$ $y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi.$

III уровень

3.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода

1) $\int\limits_L (2y - x)dx + (x + y^2)dy,$ где L – дуга кривой $x = 2y - y^2$ от точки $A(-3;\ 3)$ до точки $B(1;\ 1)$;

2) $\int\limits_L xdx + zdy - ydz,$ где L – окружность в пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 32$ и конуса $y^2 + z^2 = x^2$ при $x \ge 0$;

3) $\int\limits_L 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy,$ где L – дуга кривой $x = \sqrt{\cos t},$ $y = \sqrt{\sin t},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

4) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy,$ где L – арка циклоиды $x = 2(t - \sin t),$ $y = 2(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$

Геометрические и физические приложения

1. Если L – гладкая кривая с началом в точке A и концом в точке B, то $\int\limits_L dl = l,$ где l – длина дуги кривой L от точки A до B.

2. Если $f(x;\ y)$ – непрерывная функция, выражающая линейную плотность распределения массы m по гладкой кривой L, то

$$m = \int_L f(x;y)dl.$$

3. Для нахождения координат центра масс дуги кривой L пользуются следующими формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\, f(x;y;z)dl, y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\, f(x;y;z)dl, z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\, f(x;y;z)dl,$$

4. Если $\vec{F}\left(P(x;y;z);\ Q(x;y;z);\ R(x;y;z)\right)$ – переменная сила, которая действует вдоль контура L, то криволинейный интеграл 2-го рода $\int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ выражает работу A этой силы $\vec{F}$, т. е.

$$A = \int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

5. Площадь S области D, ограниченной простым замкнутым контуром L, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx,$$

(обход контура L совершается в положительном направлении).

Пример 1. Найти длину дуги кривой,

1) $x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ z = 6t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (винтовая линия);

2) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t, -\infty \le t \le 0.$

Пример 2. Найти массу дуги указанной кривой:

1) $y = 4\sqrt{x}$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(4;\,8)$ с плотностью распределения массы $f(x;y) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}y^2}$;

2) винтовой линии $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$ с плотностью распределения массы $f(x;y) = z(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3.$

Пример 3. Найти центр масс однородной дуги циклоиды, заданной уравнениями $x = 2(t - \sin t),\ \ y = 2(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le \pi.$

Пример 4. Найти работу переменной силы $\vec{F} = \frac{1}{y}\vec{i} + \frac{1}{z}\vec{j} + \frac{1}{x}\vec{k}$ при перемещении материальной точки единичной массы вдоль отрезка *AB*, где *A*(1; 1; 1), *B*(2; 4; 8).

Пример 5. С помощью криволинейного интеграла найти площадь области *D*, ограниченной указанным замкнутым контуром *L*:

1) $L: x^2 + y^2 = R^2$ – окружность;

2) $L: x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ – астроида.

Задания(I уровень)

1.1. Найдите центр масс дуги окружности $x^2 + y^2 = 1,$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = xy.$

1.2. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = y\vec{i} - x\vec{j},$ Г – верхняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от точки *A*(*a*; 0) до точки *B*(– *a*; 0);

2) $\vec{F}(M) = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j},$ Г – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t).$

1.3. Найдите площадь области *D*, ограниченной указанным замкнутым контуром *L*:

1) $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс;

2) *D* – область при пересечении кривых $y = \dfrac{2}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4.$

II уровень

2.1. Найдите массу кривой $x = e^t\cos t,\quad y = e^t\sin t,\quad z = e^t,$ $0 \le t \le T$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$

2.2. Найдите центр масс дуги винтовой линии $x = 3\cos t,$ $y = 3\sin t,\quad z = 6t,\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = x^2 y.$

2.3. Найдите площадь области *D*, ограниченной указанным замкнутым контуром *L*:

1) $L: x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$ – кардиоида;

2) D – область при пересечении кривых $y^2 = 8x,\ x^2 = 8y$;

3) D – область, ограниченная осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

2.4. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, Г – один виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$;

2) $\vec{F}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, Г: $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$, $0 \le t \le 1$.

III уровень

3.1. Найдите массу кривой $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{2}$, $z = \dfrac{t^3}{3}$, $0 \le t \le 1$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = y$.

3.2. Найдите массу эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = xy$.

3.3. Найдите массу дуги окружности $x^2 + y^2 = ax$ с плотностью распределения массы $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.4. Найдите площадь области D, ограниченной замкнутым контуром $L: x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ – «декартов лист».

Указание: $0 \le t < +\infty$.

3.5. Найдите работу, производимую силой $\vec{F}(M)$ вдоль указанной линии Г:

1) $\vec{F}(M) = e^{y-x}\vec{i} + e^{z-x}\vec{j} + e^{x-y}\vec{k}$, Г – отрезок, соединяющий точки $O(0;\ 0;\ 0)$ и $M(1;\ 3;\ 5)$;

2) $\vec{F}(M) = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, Г – сечение гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $A(a;\ a;\ 0)$ до точки $B(a\sqrt{2};\ a\sqrt{2};\ a)$.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L (3x^2+6xy^2-2)dx+(6x^2y+4y^3)dy,$ где $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 2)$;

2) $\int\limits_L (e^{-y}+5)dx+(1-xe^{-y})dy,$ где $A(0;\ 2)$, $B(1;\ \ln 2)$;

3) $\int\limits_L \frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{xy^2}dy,$ где $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 3)$.

Задания(I уровень)

1.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L (x+y+1)dx+(x-y^2+5)dy,$ где $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 3)$;

2) $\int\limits_L (y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy,$ где $A\left(\frac{\pi}{4};\ln 3\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2};\ln 9\right)$;

3) $\int\limits_L \left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-y\right)dy,$ где $A(1;\ 1)$, $B(2;2\sqrt{3})$.

II уровень

2.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy,$ где $A(2;\ 2)$, $B(4;\ 4)$;

2) $\int\limits_L \left(\frac{1}{y-1}-\frac{y}{(x-1)^2}-2\right)dx+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy,$ где $A(2;\ 2)$, $B(4;\ 5)$;

3) $\int\limits_L \frac{x\ln y+y}{x}dx+\frac{y\ln x+x}{y}dy,$ где $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 2)$.

III уровень

3.1. Вычислите криволинейный интеграл 2-го рода по произвольной линии L, соединяющей точки A и B:

1) $\int\limits_L \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy,$ где $A\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$, $B(4;\pi)$;

2) $\int\limits_L \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy,$ где $A\left(\frac{1}{2};1\right),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{4};2\right);$

3) $\int\limits_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy,$ где $A(1;\ 0),\ B(\sqrt{3};1).$