ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение функции двух переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.

Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbf{R}$, называется **функцией двух переменных**, определенной на множестве D со значениями в $\mathbf{R}$,

и записывается в виде

$$z = f(x; y) \quad \text{или} \quad f : D \mapsto \mathbf{R}.$$

При этом x и y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z – *зависимой переменной* (*функцией*).

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции.

Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями.

Определение: Линию, ограничивающую область, называют **границей области**. Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними**.

Определение: Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**. Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой**, обозначается $\bar{D}$.

Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Если график функции одной переменной представляет собой плоскую кривую, характеризующую зависимость функции от переменной,
то в случае двух переменных такую характеристику зависимости функции (z) от переменных (x и y) выражает поверхность.

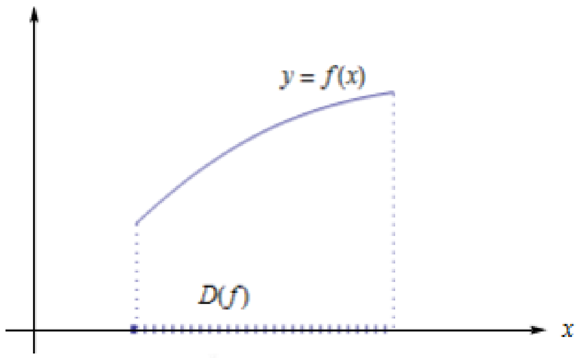


График функции одной переменной — это кривая $y = f(x)$.

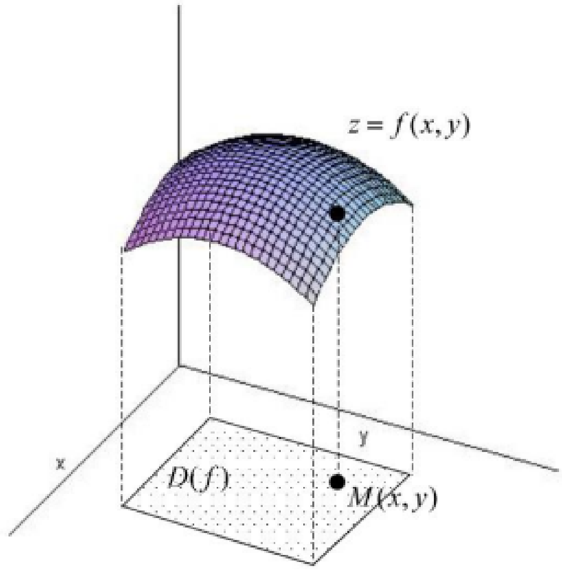


График функции двух переменных — это поверхность $z = f(x, y)$.

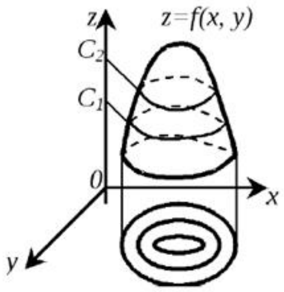
Для графического изображения зависимости функции трех и более переменных понадобилось бы пространство размерности, большей, чем 3. Поэтому такие графические изображения невозможны.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно рассматривать как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости OXY.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0; y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком.

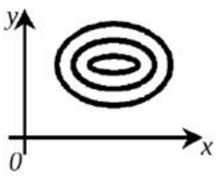
Линии уровня



О. *Линией уровня* функции двух переменных $f(x, y)$ называется кривая на плоскости Oxy, вдоль которой функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

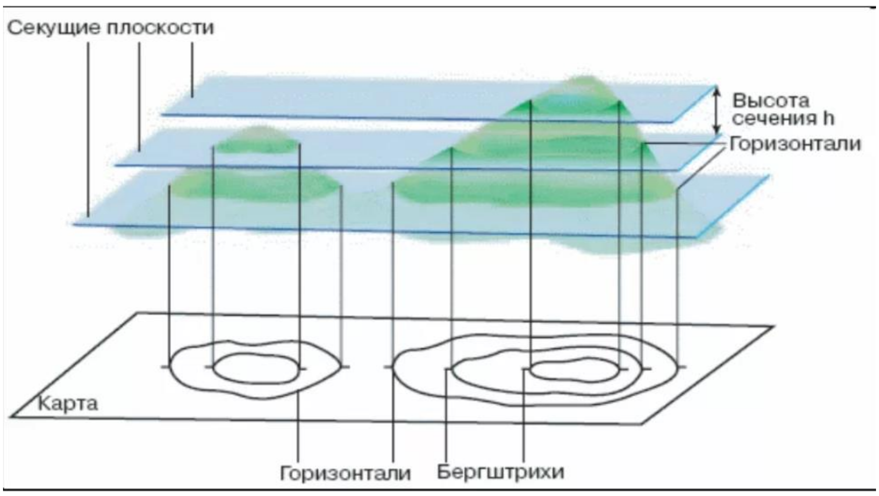
Таким образом, линия уровня задаётся уравнением $f(x, y) = C$, где C — некоторая константа.

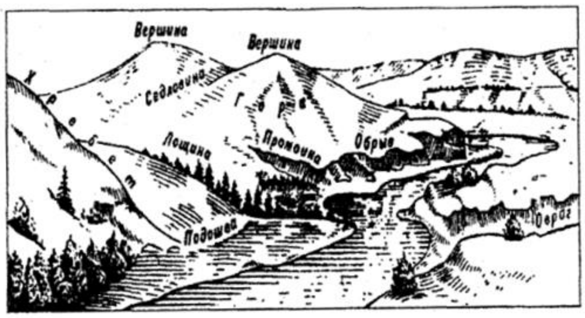
Линии уровня

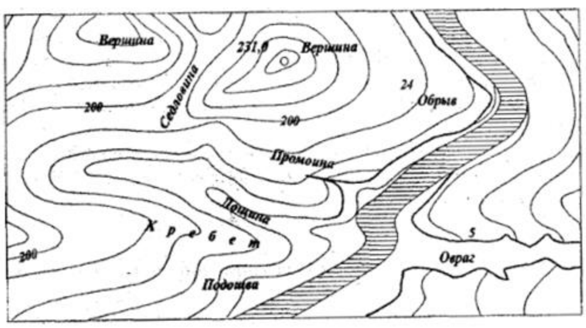


Аналог для функции трёх переменных $f(x, y, z)$ — *поверхность уровня:* $f(x, y, z) = C$.

Пример линий уровня – горизонтали (изогибсы) на карте.



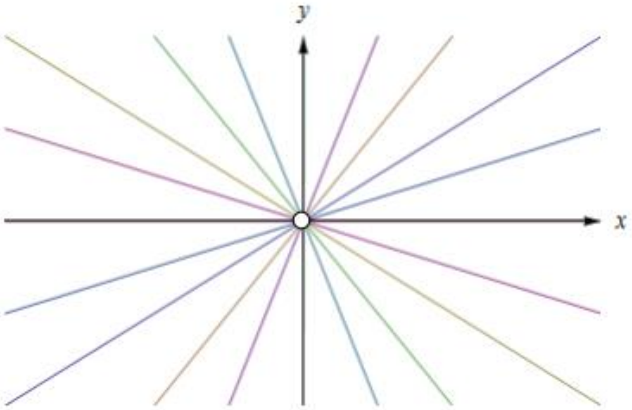




Пример 1
Нарисовать семейство линий уровня функции $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

Решение

Линии уровня задаются уравнением
$$\frac{y}{x} = C \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = Cx, \\ x \neq 0 \end{cases}$$
при разных значениях константы C.



Это прямые, проходящие через начало координат, с выброшенной точкой — началом координат.

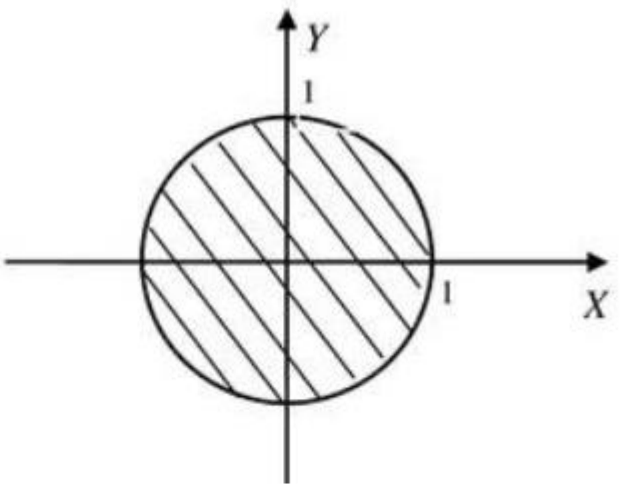
Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а также найти линии уровня данной функции.

Решение

Найдем область определения данной функции. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно,

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 1.$$

Таким образом, получили область определения функции – множество точек круга с центром в начале координат, радиус которого равен 1 .



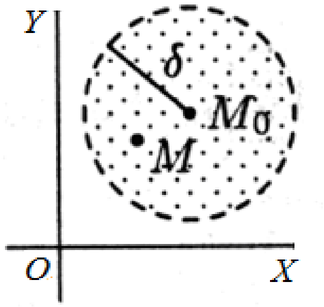
Найдем линии уровня данной функции. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ принимает постоянное значение $z = c$, если

$$c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2.$$

Таким образом, линии уровня для данной функции – это концентрические окружности с центром в начале координат с радиусом $\sqrt{1-c^2}$, где $c \in [0; 1]$.

Окрестность точки

Определение: Множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется δ **– окрестностью точки** $M_0(x_0; y_0)$.



Другими словами, δ – окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.

Предел функции

Определение: Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки.

Число A называется **пределом функции** $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$),

если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall \ x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих

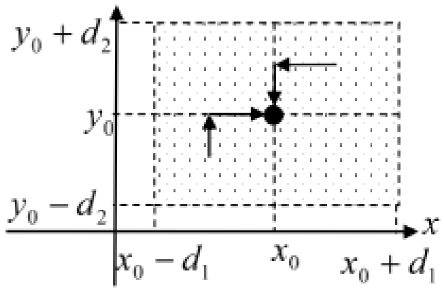
неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x; y) - A| < \varepsilon$.

Записывают:

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x; y) \text{ или } A = \lim_{M\to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Повторные пределы



$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

Пример. Для функции $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ найти предел и повторные пределы в точке $O(0; 0)$.

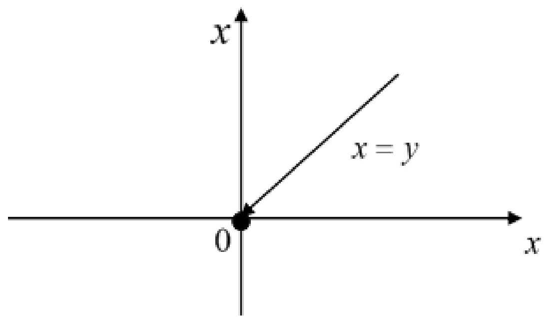
Решение. Сначала вычислим повторные пределы

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1, \qquad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

Получили, что оба повторных предел существуют и они равны конечным значениям, но не равны между собой. Следовательно, по теореме о единственности предела, предел не существует.

Ответ: $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x-y}{x+y}$ не существует.

Пример . Для функции $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ найти предел и повторные пределы в точке $O(0; 0)$.



$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus O.$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Повторные пределы существуют и равны. Но из этого не следует, что существует $\lim\limits_{M \to O} f(M)$.

Пусть точка $M(x, y)$ стремится к точке $O(0; 0)$ вдоль прямой $x = y$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ x = y}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Значит, если предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ существует, то он равен 1 (поскольку при любом способе стремления точки $M(x, y)$ к точке $O(0; 0)$ предел должен получаться один и тот же). Но тогда и повторные пределы должны быть равны 1. Полученное противоречие доказывает, что предел не существует.

Ответ: $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

Пример. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Переходя к полярным координатам в окрестности точки $(1,0)$, запишем

$$x = 1 + r\cdot\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\varphi.$$

Очевидно, что точка с координатами (x,y) стремится к точке с координатами $(1,0)$ тогда и только тогда, когда $r\to 0$. Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(1+r\cdot\cos\varphi+e^{r\cdot\sin\varphi})}{\sqrt{1+r^2+2\cdot r\cdot\cos\varphi}}.$$

Последний предел – это предел функции одной переменной r, непрерывной по r при $r=0$ для любого значения φ. Поэтому мы получаем ответ:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2.$$

Непрерывность функции двух переменных

Определение: Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если точка $M_0(x_0;y_0)$ входит в область определения функции D и предел функции равен значению функции z в точке M_0, т.е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Определение: Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области**.

Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются **точками разрыва** этой функции.

Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые **линии разрыва**.

Например, функция $z = \dfrac{1}{2x-y}$ имеет линию разрыва $y = 2x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются **приращениями аргументов** x и y, а Δz – **полным приращением функции** $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Определение: Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0) \in D$, если выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Остановимся теперь на дифференцировании функции двух переменных. По аналогии с производной функции одной переменной рассмотрим приращение функции двух переменных $z = f(x;y)$. Однако, здесь возникают вопросы. Очевидно, функция получает приращение, когда любой из ее аргументов x или y получает приращение, приращения функции при этом разные. Могут получать приращения сразу оба аргумента функции. Поэтому вводят понятия полного и частных приращений функции. Полное приращение функция имеет место, когда получают приращения оба аргумента функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y),$$

а частные приращения функции соответствуют приращению одного из аргументов:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y),$$
$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Определение:

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}$,

то он называется **частной производной** функции $z=f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z_x^{'},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f_x^{'},\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0;y_0)$ обычно обозначают символами $f_x^{'}(x_0;y_0)$, $f_x^{'}\big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z=f(x;y)$ по переменной y:

$$z_y^{'}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z=f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

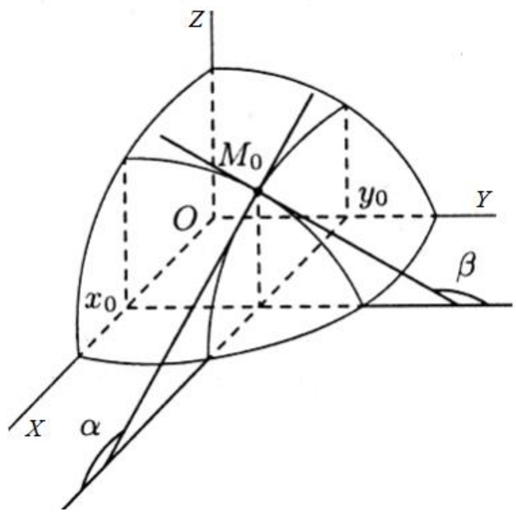
Пример. Найти частные производные функции $z=\ln\left(\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}\right)$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}}\cdot\frac{2x\left(x+y^3\right)-\left(x^2+3y\right)}{\left(x+y^3\right)^2}=\frac{x^2+2xy^3-3y}{\left(x^2+3y\right)\left(x+y^3\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\dfrac{x^2+3y}{x+y^3}}\cdot\frac{3\left(x+y^3\right)-3y^2\left(x^2+3y\right)}{\left(x+y^3\right)^2}=\frac{3x-6y^3-3x^2y^2}{\left(x^2+3y\right)\left(x+y^3\right)}.$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных



Графиком функции $z = f(x; y)$ является некоторая поверхность. График функции $z = f(x; y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что

$$f_x^{'}(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол между осью OX и касательной, проведенной к кривой $z = f(x; y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$.

Аналогично, $f_y^{'}(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Замечание: Как уже говорилось выше, при вычислении частной производной функция ведет себя как функция одной переменной, следовательно, физический смысл частной производной - скорость движения тела (изменения функции) в направлении переменной.

Дифференцируемость функции

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Составим полное приращение функции в точке M :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Определение:

Функция $z = f(x; y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где α и β настолько малы, что

$$\lim_{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \text{ и } \lim_{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0} \frac{\beta}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 .$$

Сумма первых двух слагаемых $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ представляет собой **главную часть приращения функции**.

Определение: Главная часть приращения функции $z=f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается символом dz:

$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y.$$

Выражения $A\cdot\Delta x$ и $B\cdot\Delta y$ называют **частными дифференциалами**. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x=dx$ и $\Delta y=dy$. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\boxed{dz=A\cdot dx+B\cdot dy.}$$

Выясним, чему равны A и B.

Предположим, что функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Рассмотрим сначала частное приращение функции, соответствующее приращению только переменной x:

$$\boxed{\Delta_x z=f(x+\Delta x;y)-f(x;y).}$$

Тогда из определения дифференцируемости функции

$$\boxed{\Delta z=\Delta_x z=A\cdot\Delta x+B\cdot 0+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot 0,}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$. Последние соотношения являются условием дифференцируемости функции $g(x)=f(x,y_0)$ одной переменной x в точке x_0. При этом

$$A=\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Аналогично, задав приращение переменной y, получается:

$$B=\left.\frac{dh(y)}{dy}\right|_{y=y_0}=\left.\frac{df(x_0,y)}{dy}\right|_{y=y_0}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Отсюда вытекают следующие теоремы.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции).

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции).

Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

или

$$dz = d_x z + d_y z,$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ – частные дифференциалы функции $z = f(x;y)$.

Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f(x; y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t:

$$\boxed{z = f(x; y), \qquad x = x(t), y = y(t).}$$

В этом случае функция является сложной функцией одной независимой переменной t

$$z = f(x(t); y(t))$$

переменные x и y — *промежуточные переменные*.

Теорема . Если $z = f(x; y)$ — дифференцируемая в точке $M(x; y) \in D$ функция и $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Доказательство:

Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции z.

Так как по условию функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Разделим выражение Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$.

Получаем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt}+0\cdot\frac{dx}{dt}+0\cdot\frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Частный случай: $z = f(x;y)$, где $y = y(x)$, т. е. $z = f(x;y(x))$ — сложная функция одной независимой переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\quad\text{или}\quad\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Формула носит название *формулы полной производной*.

Общий случай: $z = f(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$. Тогда

$$z = f(x(u;v);y(u;v)) \text{ —}$$

сложная функция независимых переменных u и v.

Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример . Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, если

$$z = \ln(x^2 + y^2), \qquad x = u \cdot v, \quad y = \frac{u}{v}.$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot v + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y \cdot \frac{1}{v}.$$

Упростим правую часть полученного равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{x^2 + y^2} \left(x \cdot v + \frac{y}{v} \right) = \frac{2}{(uv)^2 + \left(\dfrac{u}{v}\right)^2} \cdot \left(uv \cdot v + \frac{u}{v \cdot v} \right) =$$

$$= \frac{2v^2}{u^2(v^4 + 1)} \cdot \frac{u \cdot (v^4 + 1)}{v^2} = \frac{2}{u}.$$