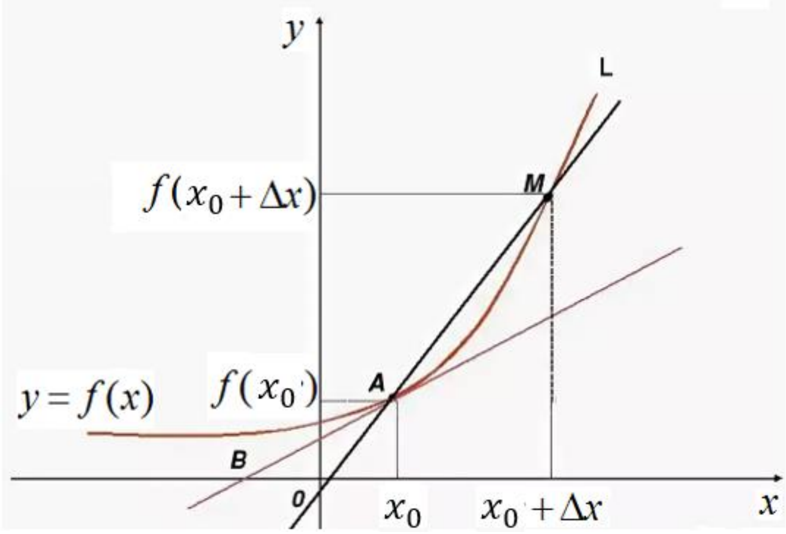
Производная. Дифференциал функции

Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции
$$y = f(x),\ x \in [a,b],$$
и требуется провести касательную к этой кривой в точке $x_0 \in (a, b)$.



Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды (прямой, проходящей через две заданные различные точки) имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \quad \text{или}$$

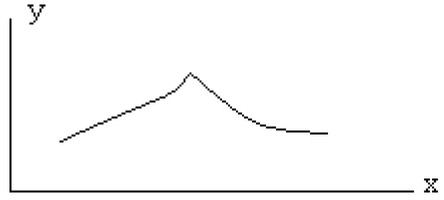
$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0)$$

Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим угловой коэффициент касательной:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Итак, $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX .

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде $\Delta f = A\Delta x + \beta$, причем A – константа, $\beta = o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\beta}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\beta}{\Delta x} \right] = A.}$$

Назовем число A **производной** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'(x_0)$, в результате получаем определение производной:

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называются предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения аргумента и обозначают $f'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} .$$

И, кроме того,

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).}$$

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно, и чем величина $f'(x_0)\Delta x$. Другими словами, **первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции**. Называют его **дифференциалом функции** $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$\boxed{df(x_0)=f'(x_0)\Delta x.}$$

В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда

$$\boxed{df=f'(x)dx,}$$

откуда следует второе обозначение производной $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$.

Связь между приращением функции и ее дифференциалом.

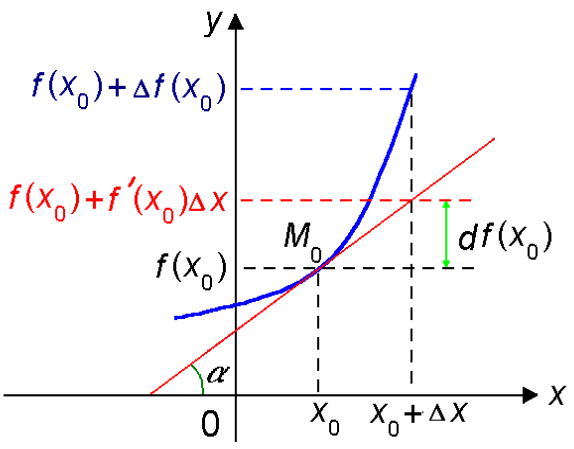


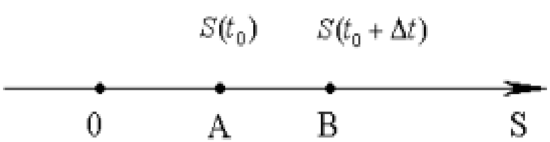
Рис. 1

Геометрический смысл производной.

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Физический смыслом производной.

Пусть материальная точка движется вправо вдоль некоторой прямой начиная от точки 0



Путь S, проходимый точкой за время t, является функцией времени $S = S(t)$. Это соотношение называется *законом движения* точки. Пусть в момент времени t_0 движущаяся точка находилась в положении A, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ – в положении B. За промежуток времени Δt (от t_0 до $t_0 + \Delta t$) точка прошла путь $|AB| = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \Delta S$. *Средняя скорость* движения v_{cp} за промежуток времени Δt определяется отношением пройденного

пути ко времени $v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Если движение равномерное, то средняя скорость постоянная. Если же движение неравномерное, то средней скорости уже не достаточно для характеристики быстроты движения на различных участках пути. Поэтому вводится понятие *мгновенной скорости* прямолинейного движения (или скорости в данный момент времени t) как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}}$$

скорость v прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от функции пути $S(t)$ по времени t.

$$\boxed{v(t) = S'(t)}$$

Производительность труда.

Рассмотрим еще одну задачу. Обозначим через $u = u(t)$ количество произведенной продукции за время t. Рассмотрим два момента времени: t_0 и $t_0 + \Delta t$. За период времени Δt (от t_0 до $t_0 + \Delta t$) будет произведено $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$ продукции. Тогда средняя производительность труда за период Δt равна $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности при $\Delta t \to 0$:

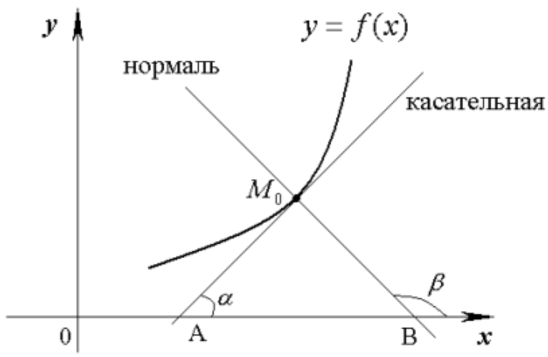
$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

производительность труда в момент времени t есть производная от функции произведенной продукции $u(t)$ по времени.

$$z(t) = u'(t)$$

Уравнение касательной и нормали к кривой.

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной



Получим *уравнение касательной и нормали к графику функции* $y = f(x)$. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k, то ее уравнение можно записать в виде:

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

Так как для касательной $k_{kac} = f'(x_0)$, и $y_0 = f(x_0)$, то *уравнение касательной* имеет вид:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Если угловой коэффициент касательной $k_{кас} = \mathrm{tg}\alpha$, то угловой коэффициент нормали $k_i = \mathrm{tg}\beta$. Угол β является внешним для прямоугольного треугольника AM_0B (*A* и *B*, соответственно, точки пересечения касательной и нормали с осью абсцисс). Согласно теореме геометрии, внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, т.е.

$$\beta = \alpha + \angle AM_0B = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$ Тогда

$$k_i = \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{1}{k_{kac}}.$$

Следовательно, $k_н = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ и *уравнение нормали* имеет вид:

$$\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Теорема. Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Дано, что функция дифференцируема в точке x_0, то есть $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

Докажем, что функция будет непрерывна в точке x_0. Для этого вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \right) = 0.$$

Получили, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть согласно определению непрерывности функции в точке – функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Чтд.

Если из условия непрерывности функции следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получается, что Δy бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют дифференцированием функции.

Правила дифференцирования

Пусть даны функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Докажем следующие правила дифференцирования:

1. Производная суммы функций есть сумма производных этих функций

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Доказательство: Пусть функция $\Phi(x) = u(x) + v(x)$, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \text{ или}$$

$$\Delta\Phi(x) = \underline{u(x+\Delta x)} + v(x+\Delta x) - \left(\underline{u(x)} + v(x)\right) = \Delta u + \Delta v.$$

Очевидно,

$$(u + v)' = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

Чтд.

2. $\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = u(x)v(x)$, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \text{ или}$$

$$\Delta\Phi(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

Прибавим и вычтем из равенства выражение $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$, тогда получим:

$$\Delta\Phi(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= u(x + \Delta x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x)) + v(x) \cdot (u(x + \Delta x) - u(x)) =$$

$$= u(x + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u$$

Очевидно,

$$(uv)' = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x + \Delta x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = uv' + vu'$$

Чтд.

3. $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\Delta\Phi(x) = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)}$$

Прибавим и вычтем в числителе выражение $u(x)v(x)$, тогда получим:

$$\Delta\Phi(x) = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x)\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big) - u(x)\big(v(x+\Delta x) - v(x)\big)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$$

Очевидно, что

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x)\Delta u}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\Delta x} - \frac{u(x)\Delta v}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}\right) = \frac{v(x)u'(x)}{v(x)\cdot v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v(x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Чтд.

4. $(\mathrm{C}\cdot u(x))' = \mathrm{C}\cdot u'$, где $\mathrm{C} = const.$

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = \mathrm{C}\cdot u(x)$, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \mathrm{C}\cdot u(x+\Delta x) - \mathrm{C}\cdot u(x) = \mathrm{C}\cdot\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big) = \mathrm{C}\cdot\Delta u$$

Очевидно, что

$$(\mathrm{C}\cdot u(x))' = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{C}\cdot\Delta u}{\Delta x} = \mathrm{C}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = C\cdot u'.$$

Чтд.

5. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$. Пусть функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда сложная функция $z = g(f(x)) = \Phi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$\boxed{\Phi'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).}$$

Доказательство:

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Чтд.

.