Производная обратной функции

Даны функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = g(y)$, т.е. $x = g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$,тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, при этом

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Доказательство:

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно,

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.}$$

Чтд.

Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Чтобы вывести таблицу производных вспомним определение производной функции в точке.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называются предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения аргумента и обозначают $f'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Докажем некоторые формулы из таблицы производных.

1. Если $y = C$, то $\Delta y = 0$, а значит, $(C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$.

2. Пусть $y = x^{\alpha}$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и используя 3-е следствие из второго замечательного предела, получим вторую формулу $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

3. Пусть $y = \sin x$, тогда

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Используя первый замечательный предел, получим

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

3. Пусть $y = \mathrm{tg} x$, тогда

$$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. Пусть $y = \log_a x$, тогда

$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$, теперь применяя первое следствие из второго замечательного предела, получим

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

6. Пусть $y = a^x$, тогда $x = \log_a y$, $x'(y) = \dfrac{1}{y \ln a}$, значит

$$y'(x) = \left(a^x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = y \ln a = a^x \ln a .$$

7. Пусть $y = \arcsin x$, тогда

$$x = \sin y, \quad x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} .$$

$$y'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

8. Пусть $y = shx$, докажем, что $(shx)' = chx$

Гиперболические функции задаются следующими формулами:

- **гиперболический синус**:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\sinh x$)

- **гиперболический косинус**:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\cosh x$)

- **гиперболический тангенс**:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\tanh x$)

- **гиперболический котангенс**:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Поэтому

$$(shx)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx.$$

$$(chx)' = shx;$$

$$(thx)' = (\frac{shx}{chx})' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x};$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}.$$

Остальные формулы доказать самостоятельно.

Примеры вычисления производных

1. $y = \sin^3(5x+2)$,

$$y' = 3\sin^2(5x+2)\cos(5x+2)5 = 15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2).$$

2. $y = 4^{\ln(tg\,2x)}$, $y' = 4^{\ln(tg\,2x)}\ln 4\dfrac{2}{\mathrm{tg}2x\cos^2 2x} = 4^{\ln(tg\,2x)}\dfrac{2\ln 4}{\sin 2x\cos 2x}$.

3. $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}\right)$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^3-1}}}\frac{\sqrt{x^3-1}-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}x}{x^3-1} = \frac{2x^3-2-3x^3}{2\sqrt{x^3-1-x^2}} = -\frac{x^3+2}{2\sqrt{x^3-x^2-1}}$$

Производная параметрически заданной функции

Пусть $\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2],}$

причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, $\varphi'(t_0) \neq 0$, $\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$.

Вычислим $\frac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Итак,

$$\boxed{y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}}.$$

Пример.

Пусть $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, тогда

$x'(t)=2(1-\cos t)$, $y'(t)=2\sin t$ и $y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$.

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом.

Пусть $x^2+y^2=9$.

Считаем x независимой переменной, y – функцией. Можно из уравнения определить $y=-\sqrt{9-x^2}$ и $\tilde{y}=\sqrt{9-x^2}$, тогда

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \text{ и } \tilde{y}'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Но можно поступить по-другому. Дифференцируем обе части уравнения $x^2+y^2=9$ по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций:

$$\left(x^2+y^2\right)'_x=(9)'_x \Rightarrow 2x+2y\cdot y'=0,$$

откуда следует $y'=-\frac{x}{y}$.

Пример :

Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной в неявном виде

$$xy^3 + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$$

Решение:

Дифференцируем по x обе части равенства, где $y = y(x)$

$$y^3 + x \cdot 3y^2 y' + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = 0; \quad \Rightarrow \quad y^3 + 3xy^2 y' + \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'x-y}{x^2} = 0; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 + 3xy^2 y' + \frac{x}{x^2+y^2}y' - \frac{y}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\text{Откуда } y' = \frac{\frac{y}{x^2+y^2} - y^3}{3xy^2 + \frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1-y^2\left(x^2+y^2\right)}{1+3y^2\left(x^2+y^2\right)}.$$

«Логарифмическое» дифференцирование

Здесь имеется ввиду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции.

Пусть $y = x^{tgx}$.

При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения

$$\ln y = \ln\left(x^{tgx}\right) \Rightarrow \ln y = \operatorname{tg}x \ln x.$$

В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования. В самом деле,

$$\left(\ln y\right)'_x = \left(\operatorname{tg}x \ln x\right)'_x.$$

Поэтому

$$\frac{1}{y}y' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}x}{x}.$$

В результате $$y' = \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\text{tg}x}{x}\right) y = \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\text{tg}x}{x}\right) x^{\text{tg}x}.$$

???

Вопрос для самостоятельного изучения: Из курса школьной математики, мы знаем, что для функции $lnf(x)$ область определения $f(x) > 0$, почему справедливо логарифмическое дифференцирование?

Свойства дифференциала

Мы знаем, что

$$dy = f'(x)dx$$

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента x. Тогда

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(u \cdot v) = udv + vdu$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ (при условии $v \neq 0$)

Докажем свойство 2 (свойства 1 и 3 доказать самостоятельно).

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u' \cdot v + u \cdot v')dx = v \cdot u' \cdot dx + u \cdot v' \cdot dx = vdu + udv,$$

так как $u'dx = du$ и $v'dx = dv$.

Теорема. Дифференциал сложной функции $y = f(x)$, для которой $x = g(t)$, имеет такой же вид $dy = f'(x)dx$, как и в том случае, когда аргумент x является независимой переменной.

Доказательство. Пусть $y = f(t)$ является сложной функцией $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. $y = f(g(t))$. Тогда $dy = y'_t dt$.

По правилу дифференцирования сложной функции (3.38) $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Тогда

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx = f'(x)dx,$$

так как $x'_x dt = dx$.

Свойство дифференциала сложной функции, выражаемое доказанной выше теоремой, называется *инвариантностью формы дифференциала*. Из этой теоремы также следует, что выражение для производной $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, сохраняет свой вид и для случая, когда x не является независимой переменной.

Таблица дифференциалов

1. $dC = 0.$
2. $d(u+v) = du + dv.$
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv.$
4. $d(Cu) = C\,du.$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$
6. $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}\,du.$
7. $d(a^u) = a^u \ln a\,du.$
8. $d(e^u) = e^u\,du.$
9. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}.$
10. $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$
11. $d(\sin u) = \cos u\,du.$
12. $d(\cos u) = -\sin u\,du.$
13. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}.$
14. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}.$
15. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
16. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
17. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}.$
18. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}.$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем

$$\boxed{f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+\beta,\ \text{где}\ \beta - \text{бесконечно малая функция при}\ \Delta x\to 0.}$$

или

$$\boxed{f(a+\Delta x)\approx f(a)+f'(a)\Delta x}$$

Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример. Вычислить приближенно $arctg\ 1{,}05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = arctg\ x$.

Используем формулу:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

Тогда

$$arctg\ (a+\Delta x) \approx arctg\ a + (arctg\ x)'|_{x=a} \cdot \Delta x$$

или

$$arctg\ (a+\Delta x) \approx arctg\ a + \tfrac{1}{1+a^2} \cdot \Delta x.$$

Так как $a + \Delta x = 1{,}05$, то при $a = 1$ и $\Delta x = 0{,}05$ получаем

$$arctg\ (1{,}05) \approx arctg\ 1 + \frac{1}{1+1} 0{,}05 = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810.$$

Абсолютная погрешность не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a;\ \ a+\Delta x]$.