

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Если число уравнений m равно числу неизвестных n , то важную роль играет определитель матрицы A . Если $|A|$ не равен нулю, то система имеет единственное решение (**теорема**

Крамера), которое можно найти по формулам $x_i = \frac{|\Delta_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$ (**формулы Крамера**), где $|\Delta_i|$

– определитель, получающийся из определителя $|A|$ заменой его i -го столбца столбцом свободных членов B с сохранением без изменения всех остальных столбцов $|A|$. Определитель $|A|$ называют **главным определителем** системы, а определители $|\Delta_i|$ – **вспомогательными определителями**.

Если же $|A| = 0$, то система либо несовместна (не имеет решений), либо является неопределенной (имеет бесконечное множество решений).

Для исследования системы (4.1) в случае $m = n$ и $|A| = 0$, а также в случае $m \neq n$, т.е. когда число уравнений не равно числу неизвестных, необходимо найти ранги матриц A и B .

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Минором K -го порядка данной матрицы называется определитель квадратной матрицы, получающейся из данной матрицы выделением произвольных K строк и K столбцов.

Квадратная матрица порядка K образуется из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов.

Если **ранг матрицы A** равен r , то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор порядка большего r , равен нулю.

Ранг матрицы A может быть найден с помощью **элементарных преобразований первого и второго родов**.

Элементарными преобразованиями первого рода называются следующие действия:

- 1) умножение какой-либо строки на число $\lambda \neq 0$;
- 2) перестановка двух строк;
- 3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число λ .

Элементарными преобразованиями второго рода называются аналогичные действия со столбцами. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

С помощью элементарных преобразований первого рода любую матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется **базисным минором**. В качестве базисных миноров матриц C_1 и C_2 можно соответственно взять миноры:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

и ранги приведенных в примере матриц равны 3 (очевидно, что, если матрица приведена к ступенчатому виду, то ее ранг равен числу ненулевых строк).

Произвольную систему (4.1) можно исследовать с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Из этой теоремы следует:

- если ранг матрицы коэффициентов A не равен рангу расширенной матрицы A_1 , то система (4.1) несовместна (нет решений);
- если ранг матрицы A равен рангу матрицы A_1 , то система (4.1) совместна. При этом если ранг матрицы A равен числу неизвестных n , то система является определенной, т.е. имеет единственное решение; а если ранг матрицы A меньше числа неизвестных n , то система – неопределенная, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим **метод решения неопределенной системы**. Пусть ранг матрицы A равен r ($r < n$). Выделим произвольный базисный минор матрицы A . Элементы строки этого минора являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (4.1). Эти r неизвестных назовем **базисными неизвестными**, остальные $n - r$ неизвестных назовем **свободными неизвестными**. Выделим из системы (4.1) систему r уравнения, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащие свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных.

Нахождение ранга матриц A и A_1 , и решение системы (4.1) удобно проводить одновременно.

Заметим, что элементарные преобразования первого рода над расширенной матрицей A_1 системы (4.1) приводят к новой системе уравнений, которая эквивалентна исходной.

Элементарные преобразования второго рода над расширенной матрицей могут изменить как нумерацию неизвестных, так и их значения. Поэтому будем использовать лишь элементарные преобразования первого рода. Преобразовав расширенную матрицу к ступенчатому виду, определим ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы. Запишем систему, соответствующую преобразованной матрице. Если система является определенной, из преобразованной системы неизвестные определяются последовательно, без труда. Если система неопределенная, оставляем в левой части ее лишь базисные неизвестные, а члены, содержащие свободные неизвестные переносим вправо. Из полученной системы базисные неизвестные определяют через свободные.

4.3 Содержание типового расчета

Условие типового расчета содержит расширенные матрицы систем четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$A_1 \cdot X = B_1; \quad A_2 \cdot X = B_2;$$

$$A_3 \cdot X = B_3; \quad A_4 \cdot X = B_4.$$

В двух первых системах матрицы коэффициентов одинаковы: $A_1 = A_2$, поэтому расширенная матрица включает элементы матрицы A_1 и два столбца B_1 и B_2 соответственно. Вычислить определители матриц A_1, A_3, A_4 . Исследовать и решить первую, третью и четвертую системы методом Гаусса, вторую систему – по формулам Крамера. В ответе для каждой из систем записать ранг матрицы коэффициентов и присоединенной матриц.

Если система совместная, сделать проверку полученных решений.

4.4 Пример выполнения типового расчета

Условие типового расчета

Системы $A_1 \cdot X = B_1, \quad A_2 \cdot X = B_2$						Система $A_3 \cdot X = B_3$					Система $A_4 \cdot X = B_4$				
$A_1 = A_2$			B_1	B_2		A_3			B_3		A_4			B_4	
3	2	1	-1	-1	1	1	-2	-2	-1	-2	1	-1	2	1	1
-3	-3	1	2	5	5	-2	3	11	11	21	-1	3	-4	-5	3
9	4	8	-3	-2	12	-1	2	5	4	9	1	3	-2	-7	9
9	7	0	-4	-6	-4	5	5	-3	-4	-6	-5	9	-14	-13	9

Выполнение типового расчета

1. Найдем решение первой системы $A_1 \cdot X = B_1$. Запишем систему в явном виде:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -2 \\ 9x_1 + 7x_2 - x_4 = -6 \end{cases} \quad (4.2)$$

Запишем расширенную матрицу системы и будем делать элементарные преобразования со строками этой матрицы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 9 & 4 & 8 & -3 & -2 \\ 9 & 7 & 0 & -4 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim$$

На первом этапе преобразований в первом столбце, начиная со второй строки, получили, нули. Для этого использовали следующие элементарные преобразования: ко второй строке прибавили первую, к третьей и четвертой строкам прибавили первую, умноженную на (-3) .

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right) \sim$$

На втором этапе преобразований получили нули во втором столбце, начиная с третьей строки. Для этого к третьей строке прибавили вторую, умноженную на (-2) , к четвертой строке прибавили вторую. Затем получили нули в третьем столбце четвертой строки, прибавив к четвертой строке третью. Для удобства дальнейших действий можно вынести из второй строки (-1) и из четвертой (-2) . Чтобы не изменился определитель матрицы A_1 , который нам нужно вычислить, вынесенный коэффициент ставим перед матрицей:

$$2 \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Определитель матрицы, преобразованной к треугольному виду, равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали. Это можно показать, если разложить определитель по первому столбцу, получившийся после этого определитель вновь разложить по первому столбцу и т.д.:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

Тогда с учетом стоящего перед матрицей коэффициента, $|A_1| = 6$. Ранг матрицы A_1 равен 4, ранг расширенной матрицы также равен четырем, следовательно, система имеет единственное решение.

Рассмотрим два метода нахождения решения.

Метод 1. По полученной матрице выпишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = -7 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

из которой последовательно определим значения неизвестных: $(3; -3; -1; 3)$.

Метод 2. С помощью элементарных преобразований полученную треугольную матрицу коэффициентов приведем к диагональному виду, для этого к третьей строке прибавим четвертую строку, умноженную на 2, ко второй и к первой строкам прибавим четвертую строку. Тем самым в четвертом столбце выше единицы четвертой строки получим нули. Продолжая аналогичные действия, приведем матрицу коэффициентов к диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

Теперь, разделив первую строку на 3, получаем единичную матрицу коэффициентов

$$\sim 3 \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

В выделенном столбце находятся решения исходной системы уравнений, так как полученная расширенная матрица соответствует следующей системе:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = 3.$$

Полученное решение необходимо проверить, т.е. подставить в исходную систему (4.2).

Это удобнее всего сделать, введя матрицу решения $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

и умножая матрицу A_1 на X_1 справа. Если система решена верно, то результатом будет матрица B_1 .

$$\text{Действительно } A_1 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = B_1.$$

2. Запишем вторую систему $A_2 \cdot X = B_2$ в явном виде:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 12 \\ 9x_1 + 7x_2 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

По условию $A_1 = A_2$, т.е. вторая система отличается от первой только правыми частями, и главные определители у них равны, $|A_1| = |A_2| = 6$. Согласно теореме Крамера система имеет

единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $x_i = \frac{|\Delta_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$.

Вычислим вспомогательные определители.

Определитель $|\Delta_1|$ получается из главного определителя системы $|A|$ заменой первого столбца на столбец правых частей:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}; \quad |\Delta_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -3 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления этого определителя проведем предварительные преобразования. Преобразуем определитель $|\Delta_1|$ так, чтобы в его первой строке на первом месте осталась единица, а на всех остальных местах нули. Для этого ко второму столбцу прибавим первый столбец, умноженный на (-2) ; к третьему – первый столбец, умноженный на (-1) ; к четвертому – первый столбец. А затем вычислим полученный определитель разложением его по первой строке:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -3 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -13 & -4 & 7 \\ 12 & -20 & -4 & 9 \\ -4 & 15 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -4 & 7 \\ -20 & -4 & 9 \\ 15 & 4 & -8 \end{vmatrix} =$$

Получившийся определитель третьего порядка также преобразуем. Вынесем из второго столбца 4, а затем с помощью второго столбца организуем нули на первом и третьем месте первой строки. Для этого к первому столбцу прибавим второй, умноженный на (-13) ; к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 7. Затем разложим полученный определитель по первой строке и, наконец, вычислим полученный определитель второго порядка:

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -13 & -1 & 7 \\ -20 & -1 & 9 \\ 15 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4(7 - 4) = 12.$$

$$\text{Следовательно, } x_1 = \frac{|\Delta_1|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2.$$

Определитель $|\Delta_2|$ получается из главного определителя системы $|A|$ заменой второго столбца

на столбец правых частей:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 8 & -3 \\ 9 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель $|\Delta_2|$ так, чтобы в его первом столбце на первом месте осталось число 3, а на всех остальных местах – нули. Для этого ко второй строке прибавим первую строку; к третьей – первую строку, умноженную на (-3) ; к четвертому – также первую строку, умноженную на (-3) . А затем вычислим полученный определитель разложением его по первому столбцу:

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 8 & -3 \\ 9 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Получившийся определитель третьего порядка преобразуем так, чтобы в третьем столбце на последнем месте стоял ноль. Для этого к третьей строке прибавим первую. Затем разложим полученный определитель по третьему столбцу и, наконец, вычислим полученный определитель второго порядка:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-9+5) = -12.$$

Следовательно, $x_2 = \frac{|\Delta_2|}{|A|} = \frac{-12}{6} = -2.$

Определители $|\Delta_3|$ и $|\Delta_4|$ вычисляем аналогично, преобразуя и затем раскладывая по первому столбцу.

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 12 & -3 \\ 9 & 7 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ 1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$|\Delta_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 8 & 12 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Откуда $x_3 = \frac{|\Delta_3|}{|A|} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_4 = \frac{|\Delta_4|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2.$

Мы получили решение второй системы: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ или $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Сделаем проверку. $A_2 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = B_2.$

Следовательно, система решена верно.

3. Проведем исследование третьей системы. Запишем систему $A_3 \cdot X = B_3$ в явном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 11x_4 = 21 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases} \quad (4.3)$$

Проведем необходимые элементарные преобразования над расширенной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 11 & 11 & 21 \\ -1 & 2 & 5 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A_3 равен нулю, ранг матрицы A_3 равен 3 (одна нулевая строка в матрице ступенчатого вида), ранг расширенной матрицы равен 4 (нет нулевых строк). Так как ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы не равны друг другу, то система (4.3) не имеет решения.

4. Рассмотрим четвертую систему. Запишем систему $A_4 \cdot X = B_4$ в явном виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 9 \\ -5x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 13x_4 = 3 \end{cases}$$

Проведем необходимые элементарные преобразования над расширенной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ -5 & 9 & -14 & -13 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A_4 равен нулю, ранг матрицы A_4 равен 2, ранг расширенной матрицы тоже равен 2. Так как ранги матриц равны, то система является совместной; ранг матрицы меньше числа неизвестных, следовательно, система является неопределенной. В преобразованной матрице жирным шрифтом выделен базисный минор. В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 в, качестве свободных – x_3, x_4 .

Перепишем полученную систему в виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 2 + x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

и введем $x_3 = C_1 \in R$ и $x_4 = C_2 \in R$.

Окончательно получим $x_1 = 3 - C_1 + C_2$; $x_2 = 2 + C_1 + 2C_2$.

Решение неопределенной системы удобно записывать в векторном виде, выделяя фундаментальную систему решений однородной и частное решение неоднородной систем.

$$X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частное решение
неоднородной системы

Фундаментальное решение
однородной системы

Для проверки и здесь удобно воспользоваться умножением матрицы A_4 на матрицу X_4 , образованную из указанных выше трех векторов.

$$A_4 \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \\ -5 & 9 & -14 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (B_4 | 0 | 0).$$

В полученной матрице первый столбец должен соответствовать вектору правых частей системы B_4 , а два других вектора должны быть нулевыми, так как соответствующие решения являются решениями однородной системы уравнений.

4.5 Оформление отчета

В отчете по ТР должен быть представлены преобразования расширенных матриц каждой системы. Полученные решения должны быть проверены умножением матрицы коэффициентов на матрицу решений. В конце работы необходимо выписать общий ответ по следующему образцу:

1. Системы 1 и 2 – совместные, определенные.

$$|A_1| = 6; \quad r(A_1) = r(A_1 | B_1) = r(A_1 | B_2) = 4; \quad X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Система 3 – несовместная.

$$|A_3| = 0; \quad r(A_3) = 3; \quad r(A_3 | B_3) = 4.$$

3. Система 4 – совместная, неопределенная.

$$|A_4| = 0; \quad r(A_4) = r(A_4 | B_4) = 2; \quad X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$