Кратные и криволинейные интегралы

До сих пор в нашем курсе интегрирование проводилось по заданному отрезку (определенный интеграл)

$$\int_a^b f(x)dx$$

или интервалу оси OX (несобственные интегралы)

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx\,,\ \ f(b)\text{- не существует.}$$

С помощью таких интегралов можно вычислить площади криволинейных фигур, длины дуг кривых, объемы тел вращения, площади поверхности и т.п.

Это интегралы от функции одной действительной переменной.

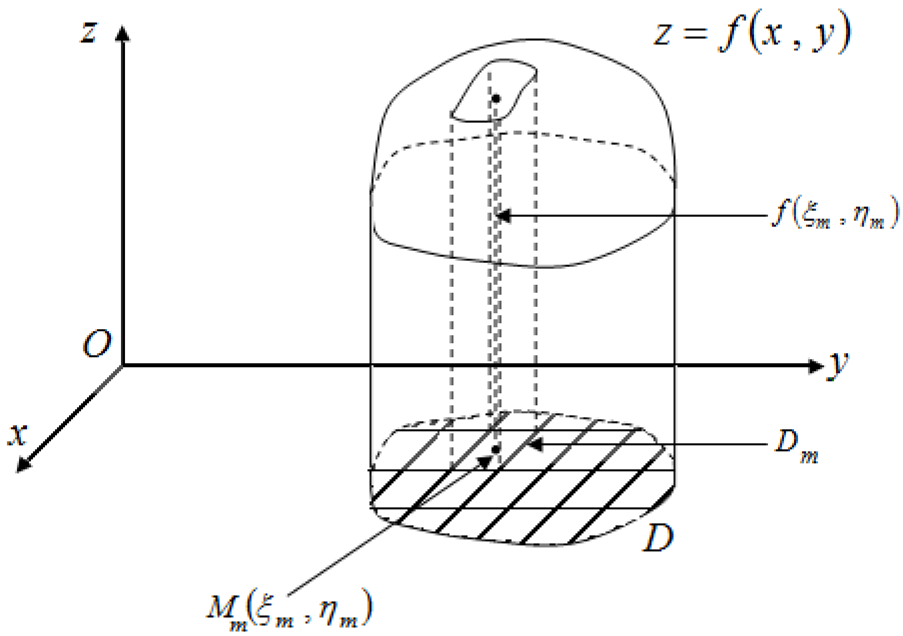
В данной части нашего курса мы обобщим понятие определенного интеграла и рассмотрим интегралы от функций многих переменных. Такие интегралы дают возможность решения более сложных задач, например, определение объема и массы очень больших тел, недоступных или труднодоступных тел (например, массы планет солнечной системы), вычисление работы некоторой силы на криволинейном участке пути.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим практически важную задачу определения объема тела, недоступного для исследователя, когда становится невозможным традиционное определение объема с помощью вытесняемой этим телом жидкости.

Объем тела

Задано тело, ограниченное снизу частью плоскости Oxy, сверху гладкой поверхностью $z = f(x, y)$ и некоторой цилиндрической боковой поверхностью. Простейшим примером этой задачи является определение объема снега, набитого в цилиндрическую бочку "с шапкой". Такое тело называется цилиндроид.



Пусть проекция этого тела на плоскость Oxy представляет собой область D, причем имеет не равную нулю площадь, то есть не является линией или точкой.

Разобьем область D на n произвольных элементарных подобластей D_m, площадь каждой из них Δs_m $(m = 1 \div n)$. Выберем внутри каждой подобласти точку $M_m(\xi_m, \eta_m)$ и восстановим из этих точек перпендикуляры до пересечения с поверхностью $z = f(x, y)$, очевидно, $z_m = f(\xi_m, \eta_m)$. Построим элементарные цилиндры, площадь основания каждого из них Δs_m, высота z_m. Вычислим суммарный объем всех этих цилиндров

$$V_n = \sum_{m=1}^{n} z_m \Delta s_m = z_1 \Delta s_1 + z_2 \Delta s_2 + \ldots + z_n \Delta s_n$$

или

$$V_n = \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m) \Delta s_m .$$

Очевидно, V_n дает приближенное значение объема заданного тела. Если увеличивать число площадок разбиения n, следя за тем, чтобы площадь каждой элементарной площадки уменьшалась, то при очень больших значениях n приближенное значение объема тела будет мало отличаться от объема тела.

Истинное значение объема тела может быть подсчитано, если вычислить предел суммы $\sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m$ при условии, что число площадок D_m неограниченно увеличивается ($n \to \infty$), а каждая площадка стягивается в точку ($\max d_m \to 0$), то есть

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_m \to 0)}} \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m .$$

Так как функция под знаком предела представляет собой вариант интегральной суммы Римана, можно ввести интеграл, равный пределу этой интегральной суммы

$$\iint\limits_D f(x, y)\, ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_m \to 0)}} \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m$$

или

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_m \to 0)}} \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m .$$

Область D называют областью интегрирования.

Такой интеграл называют двойным интегралом, поскольку интегрирование проводится по двумерной области D, а, следовательно, по двум переменным x и y.

Поскольку объем реального тела конечен, предел интегральной суммы существует и имеет конечное значение, существует и двойной интеграл.

Если ставить задачу абстрактно, не связываясь с реальностью, предел интегральной суммы, а значит и двойной интеграл может не существовать.

ТЕОРЕМА (достаточное условие интегрируемости функции): Для существования двойного интеграла достаточно, чтобы подынтегральная функция $f(x, y)$ была непрерывной в замкнутой области интегрирования D. (без доказательства)

Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D C\ f(x, y)\, dxdy = C \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ для C – постоянной.

Доказательство.

$$\iint\limits_D C\ f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} C\ f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m = \lim_{n\to\infty} C \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m =$$

$$= C \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m = C \iint\limits_D f(x, y)\, ds.$$

2. $\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy$

Доказательство.

$$\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)] dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} [f(\xi_m, \eta_m) + g(\xi_m, \eta_m)]\Delta s_m =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m + \sum_{m=1}^{n} g(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} g(\xi_m, \eta_m)\Delta s_m =$$

$$= \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy.$$

3. $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dxdy$, если $D = D_1 \cup D_2$

(без доказательства).

4. **Сохранение неравенства**. Если $f(x, y) \ge g(x, y)$ всюду в области D, то

$$\iint\limits_D f(x, y) dx\, dy \ge \iint\limits_D g(x, y) dx\, dy.$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области D, имеющей площадь S, то

$$m\cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \le M\cdot S.$$

5. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y)-$ непрерывная в замкнутой области D, то в этой области найдется, по крайней мере, одна точка (ξ,η), для которой справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S,$$

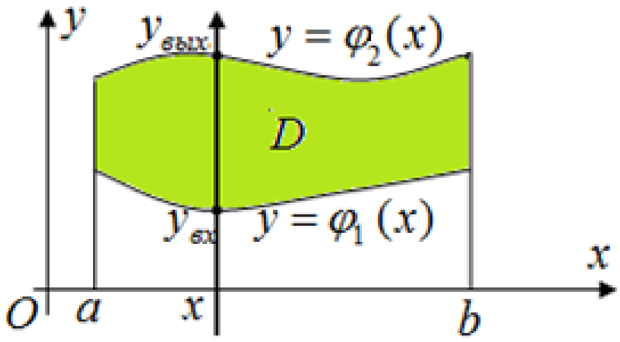
где S площадь области D.

6. $\iint\limits_D dxdy = S$ - площадь области D. Так как $\sum\limits_{m=1}^{n}\Delta s_m = S$.

Вычисление двойного интеграла

Вычисление двойного интеграла осуществляется ***сведением*** его ***к повторному интегралу***, то есть к вычислению определенного интеграла сначала по одной переменной, затем по другой.

Сначала предположим, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ и непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всех $x\in[a,b]$. Такая область называется правильной в направлении оси Oy (любая прямая, параллельная оси Oy пересекает границу области не более чем в двух точках).



В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла по следующей формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Обычно это равенство записывается в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Если область D является правильной в направлении оси Ox, т.е. она ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ $(c<d)$ и непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, причем $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ для всех $y\in[c, d]$, тогда двойной интеграл запишется в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy \quad \text{или}$$

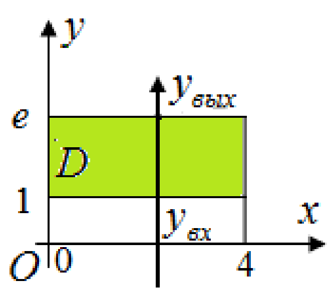
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

Если область D не является правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении Oy, то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на правильные части.

Пример 1.

Вычислить $\iint\limits_D x\ln y dxdy,$

область D ограничена линиями $x=0,\ x=4,\ y=1,\ y=e.$



Решение

Область интегрирования представляет прямоугольник, значит

$$\iint_D x\ln y\,dxdy=\int_0^4 dx\int_1^e x\ln y\,dy=\int_0^4 xdx\int_1^e \ln y\,dy.$$

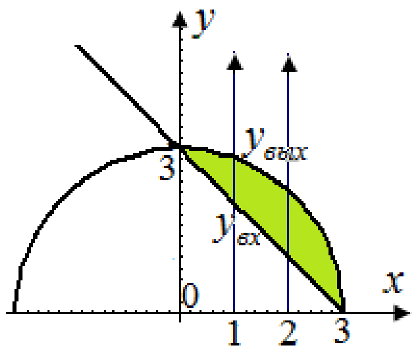
Вычислим по частям внутренний интеграл

$$\int_1^e \ln y\,dy=\left\{\begin{matrix} u=\ln y, & du=\dfrac{dy}{y} \\ dv=dy, & v=y \end{matrix}\right\}=y\ln y\Big|_1^e-\int_1^e y\frac{dy}{y}=e-e+1=1,$$

Вычисляем внешний интеграл $\int_0^4 xdx=\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=8.$ Итак, $\iint_D x\ln y\,dxdy=8.$

Пример 2.

Вычислить $\iint_D (3x+y)dxdy$ по области, задаваемой неравенствами $x^2+y^2\le 9$ и $x+y\ge 3$. Область интегрирования – верхняя из двух получаемых в этом случае областей



Решение.

Вход в область интегрирования осуществляется через прямую $x+y=3$, выход из области происходит через верхнюю полуокружность $y=\sqrt{9-x^2}$. Тогда

$$\iint_D (3x+y)dxdy=$$

$$=\int_0^3 dx\int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}(3x+y)dy=\int_0^3 dx\left(3xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}=$$

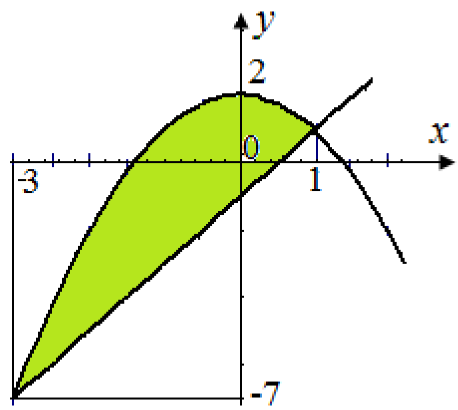
$$=\int_0^3\left(3x\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{2}\left(9-x^2\right)-3x(3-x)-\frac{1}{2}(3-x)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(3x\sqrt{9-x^2}+2x^2-6x\right)dx=-\frac{3}{2}\int_0^3\left(9-x^2\right)^{1/2}d\left(9-x^2\right)+\int_0^3\left(2x^2-6x\right)dx=$$

$$=\left(-\left(9-x^2\right)^{3/2}+\frac{2}{3}x^3-3x^2\right)\Bigg|_0^3=18-27+27=18.$$

Таким образом, $\iint\limits_D (3x+y)dxdy=18.$

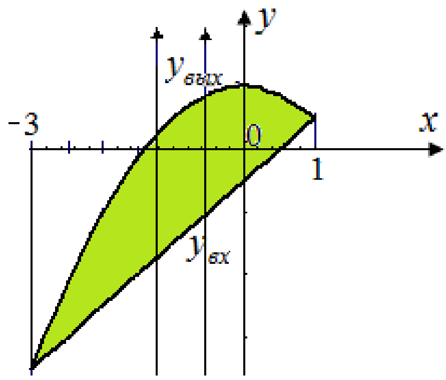
Пример 3. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)dxdy,$ если область D ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$.



Решение.

Рассмотрим два способа вычисления интеграла.

1 способ. Внешнее интегрирование будем проводить по x, а внутреннее – по y.



Очевидно,

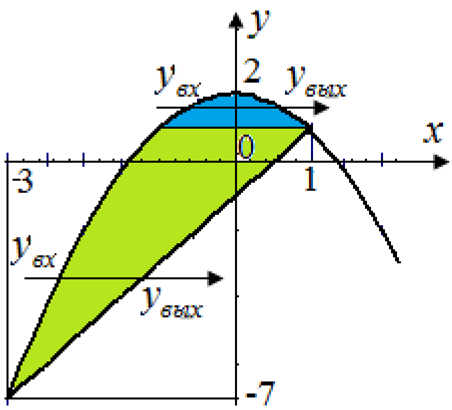
$$\iint\limits_D (x-y)dxdy=\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)dy=\int\limits_{-3}^{1}dx\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2}=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(2x-x^3-\frac{4-4x^2+x^4}{2}-2x^2+x+\frac{4x^2-4x+1}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{3}{2}+x+2x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4\right)dx=\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{10}x^5\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+18+\frac{81}{4}-\frac{243}{10}=\frac{64}{15}.$$

2 способ. Теперь проведем внешнее интегрирование по y, внутреннее – по x. В этом случае область интегрирования необходимо разбить на две $D1$ и $D2$. Область $D1$ находится между прямыми $y=1$ и $y=2$, область $D2$ - между прямыми $y=-7$ и $y=1$.



Тогда

$$\iint_D (x-y)\,dxdy=\iint_{D1}(x-y)\,dxdy+\iint_{D2}(x-y)\,dxdy=$$

$$=\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}(x-y)\,dx+\int_{-7}^{1}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{(y+1)/2}(x-y)\,dx.$$

Вычислим интегралы

$$\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}(x-y)\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}dy=$$

$$=\int_1^2\left[\frac{(2-y)}{2}-y\sqrt{2-y}-\frac{(2-y)}{2}-y\sqrt{2-y}\right]dy=$$

$$=-2\int_1^2 y\sqrt{2-y}\,dy=\begin{bmatrix} t=2-y \\ dt=-dy \\ y=1,\ t=1 \\ y=2,\ t=0\end{bmatrix}=2\int_1^0(2-t)\sqrt{t}\,dt=-2\int_0^1\left(2\sqrt{t}-\sqrt{t^3}\right)dt=$$

$$=-2\left(\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1=-2\,t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1=-2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{28}{15}.$$

$$\int_{-7}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{(y+1)/2} (x-y)\,dx = \int_{-7}^{1} \left(\frac{x^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{2-y}}^{(y+1)/2} dy =$$

$$= \int_{-7}^{1} \left(\frac{(y+1)^2}{8} - \frac{y(y+1)}{2} - \frac{(2-y)}{2} - y\sqrt{2-y} \right) dy =$$

$$= \int_{-7}^{1} \left(\frac{-3y^2+2y-7}{8} - y\sqrt{2-y} \right) dy =$$

$$= \frac{\left(-y^3+y^2-7y\right)}{8}\Bigg|_{-7}^{1} - t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{9} =$$

$$= \frac{(-1+1-7-343-49-49)}{8} - 27\left(\frac{4}{3} - \frac{18}{5}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) =$$

$$= -56 + 27 \cdot \frac{34}{15} + \frac{14}{15} = -56 + \frac{932}{15} = \frac{92}{15}.$$

Ответ: $\frac{92}{15} - \frac{28}{15} = \frac{64}{15}$.

Естественно, оба способа дали один ответ, однако второй способ привел к необходимости разбивать область интегрирования на две, что усложнило вычисление интеграла.

Замена переменной в двойном интеграле

Если переменные x и y, $(x, y) \in D$ в двойном интеграле являются функциями переменных u и v, $(u, v) \in \Omega$, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D равен интегралу по области Ω от функции $f(x(u,v), y(u,v))$, умноженной на модуль якобиана $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. То есть, справедлива формула

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv,$$

где $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Переход от декартовой к полярной системе координат

Поскольку нам известны только две системы координат на плоскости – декартова и полярная, связанные соотношениями $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, осуществим в двойном интеграле переход от одной системы координат к другой.

Очевидно, якобиан преобразования в этом случае имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

В результате

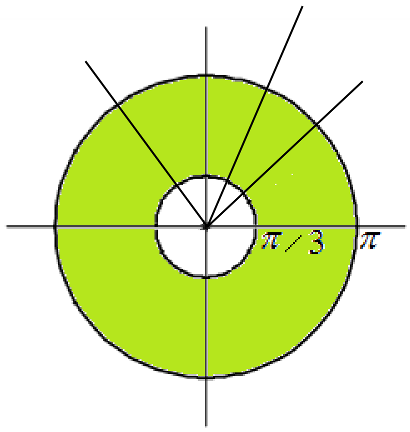
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi.$$

Пример 1.

Вычислить интеграл $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$

по кольцу, ограниченному окружностями

$x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$ и $x^2 + y^2 = \pi^2$.



Решение.

Используем формулы перехода от декартовых координат к полярным

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Поскольку

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \text{ и } r \neq 0,$$

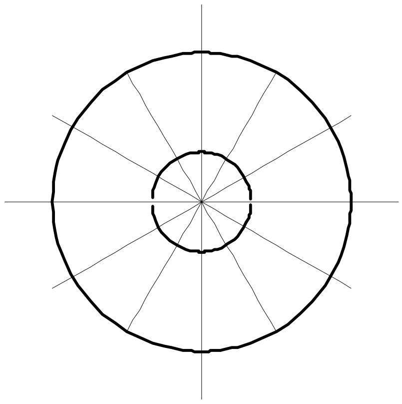
то уравнения окружностей, ограничивающих область интегрирования,

$$r=\frac{\pi}{3} \text{ и } r=\pi .$$

Делаем замену переменных в двойном интеграле

$$\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \frac{\sin r}{r} r\ drd\varphi = \iint_D \sin r\ \ drd\varphi.$$

В полярных координатах обычно внешнее интегрирование проводят по φ и область проходят лучами $\varphi = Const$:



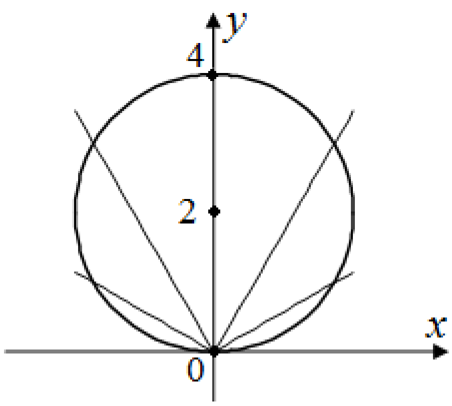
Нетрудно заметить, что после перехода к полярным координатам область интегрирования проходится полностью, если изменять φ от нуля до 2π, а r от $\frac{\pi}{3}$ до π. Итак,

$$\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \sin r\ \ drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi} \sin r\, dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}\right)d\varphi = 2\pi\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3\pi.$$

Пример 2.

Вычислить интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ по области, ограниченной окружностью $x^2+y^2=4y$, ее каноническое уравнение $x^2+(y-2)^2=4$.



Решение.

Переходим к полярной системе координат, уравнение окружности принимает вид

$$r^2 = 4r \ \sin\varphi \quad \text{или} \quad r = 4 \ \sin\varphi,$$

интеграл

$$\iint_D (x^2 + y^2) \ dxdy = \iint_D r^2 r \ drd\varphi = \iint_D r^3 drd\varphi.$$

Для прохождения всей области интегрирования внешний интеграл необходимо вычислять в пределах $(0\,,\pi)$, внутренний - от полюса $r = 0$ до линии выхода из области интегрирования $r = 4 \ \sin\varphi$. Итак,

$$\iint_D (x^2 + y^2) \ dxdy = \iint_D r^3 drd\varphi = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{4\sin\varphi} r^3 dr = \int_0^{\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{4\sin\varphi} d\varphi$$

$$= 64 \int_0^{\pi} \sin^4\varphi \ d\varphi =$$

$$= 64 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= 16 \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 16 \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 8 \int_0^{\pi} (3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= 8 \left.\left(3 - 4\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\right|_0^{\pi} = 24\pi.$$

Приложения двойного интеграла

Объем тела

Как говорилось выше, величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндроида:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

где $f(x, y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если положить $f(x, y) = 1$, то цилиндроид превратится в прямой цилиндр с высотой $H = 1$. Объем такого цилиндра численно равен площади основании D, т.е.

$$S = \iint_D dxdy.$$

Масса пластины

Масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ непрерывная функция в области D, вычисляется следующим образом:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy$$

Статические моменты и координаты центра тяжести пластины

Статические моменты пластики D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам:

$$S_x = \iint_D y \cdot \rho(x, y) dxdy \quad \text{и} \quad S_y = \iint_D x \cdot \rho(x, y) dxdy,$$

а координаты центра масс пластинки - по формулам:

$$x_C = \frac{S_y}{m} \quad \text{и} \quad y_C = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции пластины относительно осей Ox и Oy

$$M_x = \iint_D y^2 \cdot \rho(x, y) dxdy \quad \text{и} \quad M_y = \iint_D x^2 \cdot \rho(x, y) dxdy$$

Моменты инерции пластины относительно начала координат

$$M_O = M_x + M_y$$

Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

В случае, когда уравнение поверхности задано в явном виде: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}\,dxdy\,.$$

В том случае, когда поверхность задается параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D_{u,v}$, площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{D_{u,v}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv.$$

Примеры экономической интерпретации двойного интеграла:

- Пусть D - область посевов некоторой сельскохозяйственной культуры, и пусть в каждой точке $M(x, y)$, принадлежащей области D, известна урожайность $q(x, y)$ этой культуры (например, по наблюдениям из космоса). Тогда величина

  $$Q = \iint\limits_D q(x,y)\,dxdy$$

  есть количество урожая, которое можно собрат с области D при отсутствии потерь.
- Пусть D - площадь региона, $q(x, y)$ функция распределения плотности населения, тогда

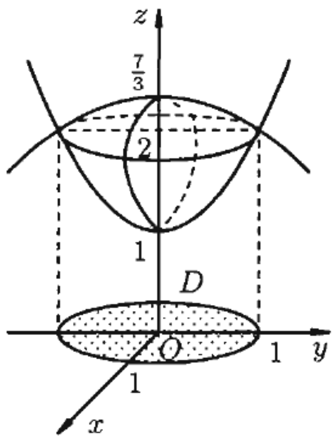
  $$Q = \iint\limits_D q(x,y)\,dxdy$$

  есть численность населения региона D.

Пример

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ и

$$x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0.$$



Решение: Данное тело ограничено двумя параболоидами . Решая систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1, \\ x^2 + y^2 = -3z + 7, \end{cases}$$

находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями

$z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$ и $z = 1 + x^2 + y^2$. Используя формулу, имеем

$$V = V_1 - V_2 = \iint\limits_D \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

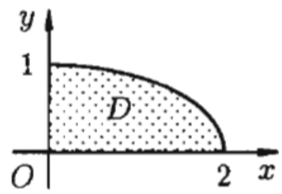
$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_D (7 - r^2)r \cdot dr\,d\varphi - \iint\limits_D (1 + r^2)r \cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (7r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r + r^3)\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{12} \cdot 2\pi - \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Пример

Найти массу, статические моменты S_x и S_y и координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями.



Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

Решение: находим массу пластинки. По условию,
$\gamma = \gamma(x; y) = k \cdot xy$, где k — коэффициент пропорциональности.

$$m = \iint\limits_D kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x \cdot dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \frac{k}{2}\int\limits_0^2 x\,dx \cdot y^2\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{4}\int\limits_0^2 x(4-x^2)\,dx = \frac{k}{8}\Big(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = \frac{k}{2}.$$

Находим статические моменты пластинки:

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2\,dy = \dots = \frac{4}{15}k,$$

$$S_y = \iint\limits_D x \cdot kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^2 x^2\,dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \dots = \frac{8}{15}k.$$

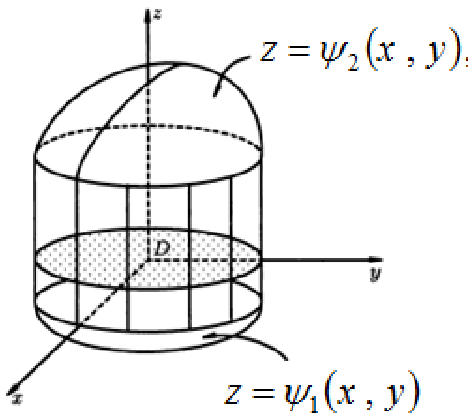
Находим координаты центра тяжести пластинки, используя формулы $x_c = \dfrac{S_y}{m}$ и $y_c = \dfrac{S_y}{m}$: $x_c = \dfrac{16}{15}$, $y_c = \dfrac{8}{15}$.

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим задачу о нахождении массы тела, недоступного для исследователя, когда становится невозможным взвешивание.

Масса тела

Задано тело, ограниченное гладкой поверхностью (поверхностью без особых точек). Тело не имеет линий самопересечения, то есть в каждой его внутренней точке паре значений x и y соответствует единственной значение z.



Тело ограничено сверху относительно оси OZ гладкой поверхностью $z=\psi_2(x\,,\,y)$, снизу поверхностью $z=\psi_1(x\,,\,y)$. Пусть область D - проекция рассматриваемого тела на плоскость OXY.

Рассмотрим задачу определения массы трехмерного тела, когда плотность $\rho(x\,,y\,,z)$ является переменной величиной.

Разобьем тело плоскостями, параллельными координатным, на n элементарных тел, объем каждого такого тела Δv_k. Считаем n достаточно большим, чтобы можно было считать плотность постоянной внутри каждого элементарного тела. Выберем в каждой элементарной области точку $(\xi_k\,,\eta_k\,,\zeta_k)$ и подсчитаем массу элементарного тела $m_k=\rho(\xi_k\,,\eta_k\,,\zeta_k)\Delta v_k$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k\,,\eta_k\,,\zeta_k)\Delta v_k$ – приближенное значение массы всего тела. С увеличением числа разбиений при условии, что объем всех элементарных тел с ростом n стремится к нулю, приближенное значение массы стремится к истинному ее значению, то есть точное значение массы рассматриваемого тела равно

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k .$$

Нетрудно заметить, что стоящая под знаком предела сумма является обобщением интегральной суммы Римана. Поскольку масса реального тела конечна, предел интегральной суммы существует и конечен. Назовем этот предел тройным интегралом, тогда

$$\iiint_V \rho(x, y, z)\, dv = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k ,$$

или

$$\iiint_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k ,$$

где V - занимаемая телом область (область интегрирования).

Отвлечемся от реальной задачи и введем тройной интеграл от некоторой функции.

Определение. Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k$, если этот предел конечен и не зависит от способа разбиения области интегрирования и выбора точек (ξ_k, η_k, ζ_k).

ТЕОРЕМА (достаточное условие интегрируемости функции): Тройной интеграл существует, если подынтегральная функция непрерывна в трехмерной области, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью. (без доказательства)

Основные свойства тройного интеграла

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv$$

Тройной интеграл обладает свойствами аналогичными свойствам двойного интеграла.

1. $\iiint\limits_V C\, f(x, y, z)\,dv = C \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv$ для C – постоянной.

2. $\iiint\limits_V \left[f(x,y,z) + g(x,y,z) \right] dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv + \iiint\limits_V g(x,y,z)dv$

3. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dv$, если

$V = V_1 \cup V_2$, а пресечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

4. **Сохранение неравенства**. Если $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ всюду в области V, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv \geq \iiint\limits_V g(x,y,z)dv$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z)$ в области V, имеющей объем V, то

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dv \leq M \cdot V$$

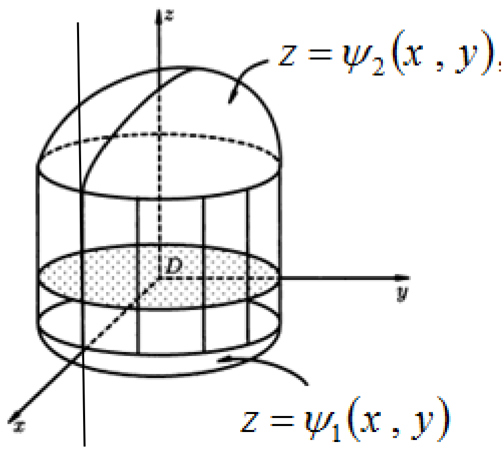
5. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y,z)$ - непрерывная в замкнутой области V, то в этой области найдется по крайней мере одна точка (x_0, y_0, z_0), для которой справедливо равенство

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V,$$

где V – объем тела.

6. $\iiint\limits_V dv = V$ - объем тела . Так как $\sum\limits_{m=1}^{n} \Delta v_m = V$.

Вычисление тройного интеграла



Вычисление тройного интеграла, как и вычисление двойного интеграла, сводится к последовательным вычислениям интегралов по отрезкам.

Пусть любая прямая, параллельная оси OZ пересекает данное тело B либо по одному отрезку, либо касается его в одной точке. Уравнения поверхностей, ограничивающих тело снизу и сверху (в направлении движения по оси OZ) соответственно, $z = \psi_1(x, y), z = \psi_2(x, y)$.

Теперь тройной интеграл можно записать в виде двойного интеграла по области D от интеграла по отрезку с переменными пределами:

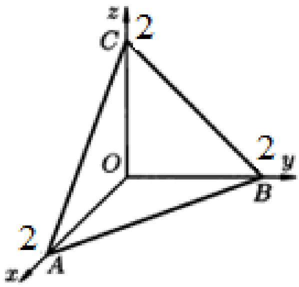
$$\iiint\limits_B f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dxdy.$$

Пусть уравнения кривых, ограничивающих область D снизу и сверху (в направлении движения вдоль оси OY)

$$y = \varphi_1(x),\ x \in [a, b], \text{ и } y = \varphi_2(x),\ x \in [a, b].$$

Тогда $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$.

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$,

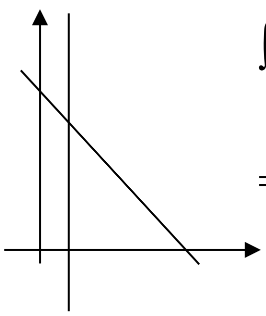


если тело V - пирамида, ограниченная плоскостями $z=0$, $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$.

Решение:

Проекцией пирамиды на плоскость XOY будет треугольник, ограниченный линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=2$. Последнее уравнение получается из $x+y+z=2$ при $z=0$, то есть представляет собой уравнение проекции указанной плоскости на плоскость XOY.

Таким образом, областью D является треугольник с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Тогда



$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dy\int_0^{2-x-y} dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(2-x-y)dy=$$

$$=\int_0^2\left(2y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\int_0^2\left((2-x)^2-\frac{1}{2}(2-x)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}(2-x)^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)^2d(2-x)=-\frac{1}{6}(2-x)^3\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Замена переменных в тройном интеграле

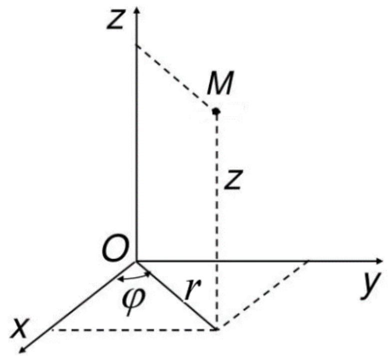
Если переменные x, y и z, $(x,y,z)\in B$, в тройном интеграле являются функциями переменных u, v и w, $(u,v,w)\in\Omega$, то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по трехмерной области B равен интегралу по области Ω от функции $f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$, умноженной на модуль якобиана $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. То есть, справедлива формула

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dydz=\iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\cdot|J|\,du\,dv\,dw\,,$$

,

где $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Переход к цилиндрической системе координат



Цилиндрическая система координат задается следующим образом: точка М задается координатами

$$(r, \varphi, z),$$

где

$r \quad (r \geq 0)$ - расстояние от точки О до ортогональной проекции точки М на плоскость ОХУ,

$\varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$ - угол между осью ОХ и отрезком r,

$z \quad (-\infty < z < +\infty)$ равна аппликате точки М .

Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами следующая: аппликата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, а координаты r и φ связаны с координатами x и y так же, как связаны декартовы и полярные координаты на плоскости

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\varphi, \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

откуда следует

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

В результате имеем

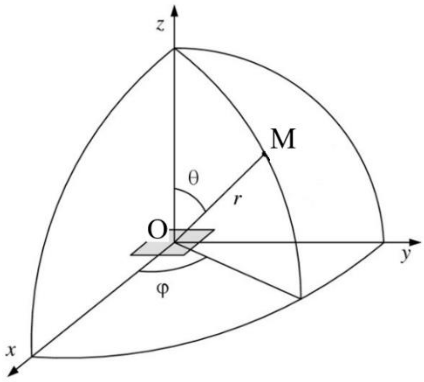
$$\iiint\limits_V f\left(x\,,\,y\,,z\right)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V f\left(r\cos\varphi\,,r\sin\varphi\,,z\right)r\,dr\,d\varphi\,dz\ .$$

Переход к сферической системе координат

Сферическая система координат задается следующим образом: точка М задается координатами

$$(r\ ,\ \theta,\ \ \varphi\ )$$

Точка М в пространстве задается расстоянием r до точки О (выбор радиуса сферы), углом θ, который отрезок, соединяющий точку О с точкой М, образуют осью Z (выбор параллели), а также углом φ, который образует проекция отрезка ОМ на заданную плоскость с полярной осью (выбор меридиана).



Связь между декартовыми $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ и сферическими $(r\ ,\ \theta,\ \varphi\ )$ координатами имеет вид

$$\begin{cases} x = r\ \ sin\,\theta\,cos\,\varphi \\ y = r\ \ sin\,\theta\ \ sin\,\varphi\ , \\ z = r\ \ cos\,\theta \end{cases}$$

$$0 \le r < \infty\ ,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Отметим, что принятая система координат отличается от географических координат.

Вычислим Якобиан:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\cos\theta(r^2\cos\varphi^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta)+r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\varphi+r\sin^2\theta\sin^2\varphi)=$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta\sin\theta=$$

$$=r^2\sin\theta.$$

В результате имеем

$$\iiint_\Omega f(x\ ,\ y\ ,\ z)\ dx\ dy\ dz$$

$$=\iiint_V f(r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\ \ ,\ r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\ \ ,\ r\,cos\,\theta)\ r^2\,sin\,\theta\ \ dr\ d\varphi\ d\theta$$

Пример. Пусть трехмерная область B– верхнее полушарие радиуса 1.

Найти $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$.

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$$\begin{cases} x = r \ \ \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \ \ \sin\theta \ \ \sin\varphi \\ z = r \ \ \cos\theta \end{cases}$$

Учтем, что $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2 \cdot \sin\theta$.

В результате расстановки пределов интегрирования получим

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{5}$$

Некоторые приложения тройного интеграла

1. Объем тела

Объем тела выражается формулой $V = \iiint\limits_V dV$ или

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$ ***- в декартовых координатах;***

$$V = \iiint\limits_V rdrd\varphi dz$$ ***- в цилиндрических координатах;***

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$$ ***- в сферических координатах;***

2. Масса тела

Масса тела m при заданной объемной плотности ρ вычисляется с помощью тройного интеграла как

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz \quad ,$$

где $\rho(x, y, z)$ - объемная плотность распределения массы в точке $M(x; y; z)$.

3.Статические моменты

Моменты тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$S_{xy} = \iiint_V z \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OXY;

$S_{xz} = \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OXZ;

$S_{yz} = \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OYZ.

4. Центр тяжести тела

Координаты центра тяжести тела V находятся по формулам

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \; y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \; z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

5.Моменты инерции тела

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$I_{xy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OXY;

$I_{xz} = \iiint_V y^2 \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OXZ;

$I_{yz} = \iiint_V x^2 \cdot \rho(x, y, z) dV$ - относительно плоскости OYZ,

а моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dV \quad , \; I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dV \quad ,$$

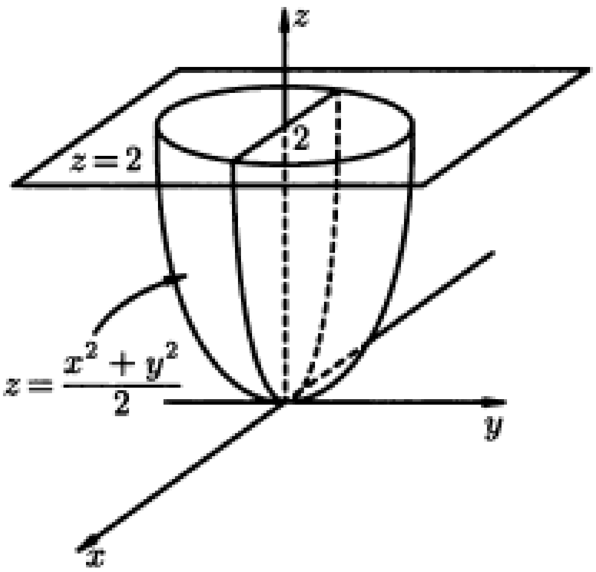
$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dV \quad .$$

Пример:

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dxdydz,$$

если V ограничена плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.



Область V ограничена сверху плоскостью $z = 2$, а снизу параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Переходим к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. При этом подынтегральная функция преобразуется к виду $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$. Таким образом,

$$J = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint\limits_V r^3 dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3\, dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 dz =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^3\, dr \left(z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2\right) = 2\pi \int\limits_0^2 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) r^3\, dr = \frac{16}{3}\pi.$$