Линейные дифференциальные уравнения старших порядков

Морозов Артём

17 марта 2025 г.

1 Определение линейного дифференциального уравнения старшего порядка

Линейным дифференциальным неоднородным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Соответствующее ему однородное уравнение получается путём исключения неоднородности $f(x)$ из правой части уравнения:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

Для удобства взаимодействия с ЛДУ порядка n вводится линейный дифференциальный оператор L:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)\frac{d^0}{dx^0} \tag{3}$$

где $\frac{d^0}{dx^0} \equiv I$ - тождественный оператор
В более компактном виде:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \tag{4}$$

Действует оператор на функции $\varphi(x)$ класса $\mathrm{C}^n(I)$ на промежутке $I =< \alpha, \beta >$:

$$L[\varphi] = \frac{d^n\varphi}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\frac{d^{n-i}\varphi}{dx^{n-i}} \tag{5}$$

Неоднородной и соответствующее ему однородное ЛДУ порядка n в операторном виде:

$$L[y] = f(x) \tag{6}$$

$$L[y] = 0 \tag{7}$$

2 Свойства решений однородного ЛДУ порядка n

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения однородного ЛДУ (7), а α, $\beta \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ - числа. Тогда решением одородного ЛДУ (7) также являются линейная комбинация этих решений:

$$L[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] = 0 \tag{8}$$

Если же комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$, $v(x) \in \mathrm{C}^n(I)$ - решение (7), тогда и функции $u(x) = Re[f(x)]$ и $v(x) = Im[f(x)]$ - также решения (7):

$$L[f(x)] = L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] = 0 \tag{9}$$

3 Пространство решений однородного ЛДУ порядка n. Фундаментальная система решений. Общее решение

Теория гласит, что пространство решений однородного ЛДУ (7) конечномерно и его размерность - n. Таким образом существует n линейно независимых решений уравнения (7), а систему из таких n решений называют фундаментальной системой решений (ФСР), которая и составляет базис пространства решений уравнения (7).

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - ФСР уравнения (7). Тогда общее решение однородного ЛДУ порядка n имеет вид:

$$y_{o.o.}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}(x) + C_n y_n(x) \tag{10}$$

где $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ - произвольные постоянные

4 Неоднородное ЛДУ порядка n и свойства его решений неоднородного ЛДУ. Общее решение. Метод вариации произвольной постоянной

Неоднородное ЛДУ порядка n (6) и соответствующее ему однородное (7):

$$L[y] = f(x)$$

$$L[y] = 0$$

Свойства решений неоднородного ЛДУ

1) Общее решение неоднородного ЛДУ (6) - $y_{\text{о.н.}}(x)$ равно сумме общего решения соответствующего ему однородного (7) - $y_{\text{о.о.}}(x)$ и какого-либо частного решения неоднородного ЛДУ (6) - $y_{\text{ч.н.}}(x)$

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x)$$

2) Разность произвольного решения неоднородного ЛДУ (6) - $y(x)$ и его частного решения является - $y_{\text{ч.н.}}(x)$ решением соответствующего однородного ЛДУ (7) - $\psi(x)$

$$\psi(x) = y(x) - y_{\text{ч.н.}}(x)$$

Метод вариации произвольной постоянной

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – ФСР (7). Будем искать частное решение (6) в виде:

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x) \tag{11}$$

где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x) \in C^1$ подлежат определению через систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'(x) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i''(x) = 0 \\ \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{12}$$

Решив данную систему, мы получаем искомое частное (а по сути и общее) решение неоднородного ЛДУ (6)

5 ЛДУ с постоянными коэффициентами. ФСР и общее решение уравнения

Однородное ЛДУ с постоянными коэффициетами имеет следующий вид:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_i \in \mathbb{C} \tag{13}$$

Важно отметить, что любое решение $y(x)$ данного уравнения является функцией бесконечное число раз дифференцируемой, т.е. $y(x) \in C^\infty$

Характеристическим многочленом ЛДУ (13) является многочлен, получаемый при соответственной замене $y^{(k)} \leftrightarrow t^k$, причём $y^{(0)} \leftrightarrow t^0$:

$$l(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n \tag{14}$$

Теория гласит, что если $\lambda \in \mathbb{C}$, функция $e^{\lambda x}$ является решением ЛДУ (13) $\Leftrightarrow$ когда λ - корень характеристического многочлена $l(t)$, т.е. $l(\lambda) = 0$.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - корни характеристического многочлена (14) (причём все разные, т.е. простые), то функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР уравнения (13), причём общее решение имеет вид:

$$y_{o.o.}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) \tag{15}$$

Если же рассматривать случай, когда коэффициенты $a_i \in \mathbb{R}$, то имеем следующую классификацию:

a) Случай действительного простого корня характеристического многочлена.
Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ - простой корень (14). Тогда функция

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

является решением уравнения (13) и входит в ФСР этого уравнения.

b) Случай комплексного простого корня характеристического многочлена.
Пусть $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ - простой корень (14). Отметим, что тогда и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень. Тогда функции

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

являются решением уравнения (13) и входят в ФСР этого уравнения.

c) Случай действительного кратного корня характеристического многочлена.
Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ - кратный корень (14) кратности k. Тогда функции (k штук)

$$y_1(x) = e^{\lambda x},\ y_2(x) = xe^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

являются решением уравнения (13) и входят в ФСР этого уравнения.

d) Случай комплексного кратного корня характеристического многочлена.
Пусть $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ - кратный корень (14) кратности s. Отметим, что тогда и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ - тоже корень кратности s. Тогда функции ($2s$ штук)

$$y_{11}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{12}(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, y_{1s}(x) = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_{21}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{22}(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, y_{2s}(x) = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

являются решением уравнения (13) и входят в ФСР этого уравнения.

Стоит отметить, что корень λ характеристического многочлена даёт столько решений, какова его кратность. Таким образом, если характеристический многочлен (14) имеет m действительныйх корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ кратности $k_1, k_2, \dots, k_m$ и ещё есть $2s$ комплексных корней $\alpha_1 \pm i\beta_1,\ \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ кратности $k_{m+1}, \dots, k_{m+s}$. Ясно, что $k_1 + \dots + k_m + 2k_{m+1} + \dots + 2k_{m+s} = n$ и общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$y_{o.o.}(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x)e^{\lambda_j x} + \sum_{l=1}^{n}(Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x)e^{\alpha_l x} \tag{16}$$

где $P_j(x)$ - многочлены степени $k_j - 1$, $Q_l(x),\ R_l(x)$ - многочлены степени $k_{m+l} - 1$ с произвольными коэффициентами

6 Неоднородное ЛДУ с постоянными коэффициентами. Отыскание частных решений уравнений с стандартной правой частью

Неоднородное ЛДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{17}$$

где $a_i \in \mathbb{C},\ f(x) \in \mathrm{C}(I),\ I =< \alpha, \beta >$ - некоторый промежуток
В том случае, когда $f(x)$ представляет собой "стандартную правую часть" или же "квазимногочлен" частное решение уравнения (17) можно искать методом неопределённых коэффициентов:

1. Действительный случай.
   Пусть $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R},\ P_m(x)$ - многочлен степени m. Тогда
   (a) Нерезонансный случай. Если λ - не корень характеристического многочлена (14), то уравнение (17) имеет частное решение вида:
   $$y_p(x) = Q_m(x)e^{\lambda x}$$
   где $Q_m(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_m(x)$
   (b) Резонансный случай. Если λ - корень характеристического многочлена (14) кратности k, то уравнение (17) имеет частное решение вида:
   $$y_p(x) = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$$
   где $Q_m(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_m(x)$
2. Комплексный случай.
   Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x),\ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C},\ P_m(x),\ Q_n(x)$ - многочлены степени m и n соответственно. Тогда
   (a) Нерезонансный случай. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - не корень характеристического многочлена (14), то уравнение (17) имеет частное решение вида:
   $$y_p(x) = e^{\alpha x}(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x)$$
   где $\tilde{P}_l(x),\ \tilde{Q}_l(x)$ - многочлены степени $l = \max(m, n)$
   (b) Резонансный случай. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень характеристического многочлена (14) кратности k, то уравнение (17) имеет частное решение вида:
   $$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x)$$
   где $\tilde{P}_l(x),\ \tilde{Q}_l(x)$ - многочлены степени $l = \max(m, n)$