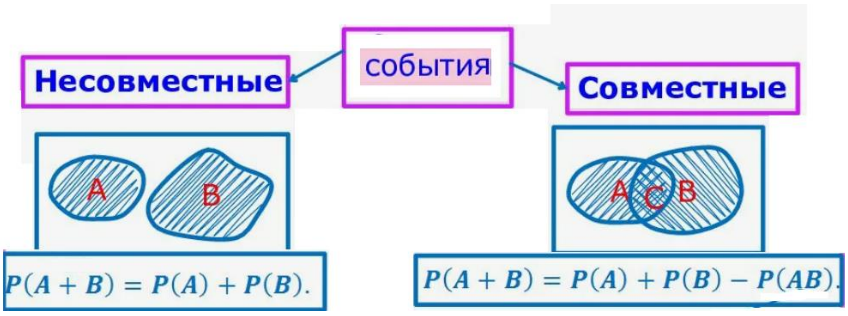
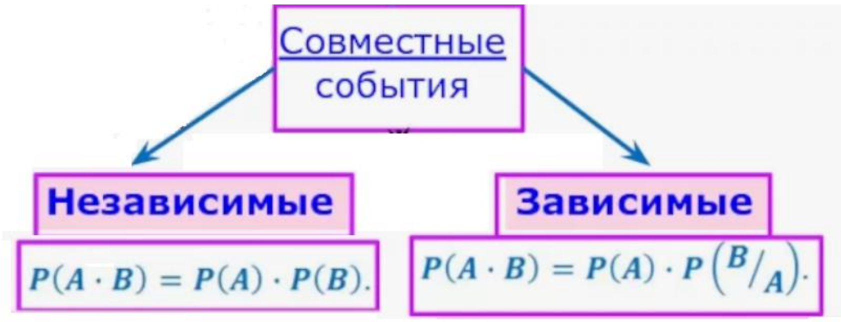
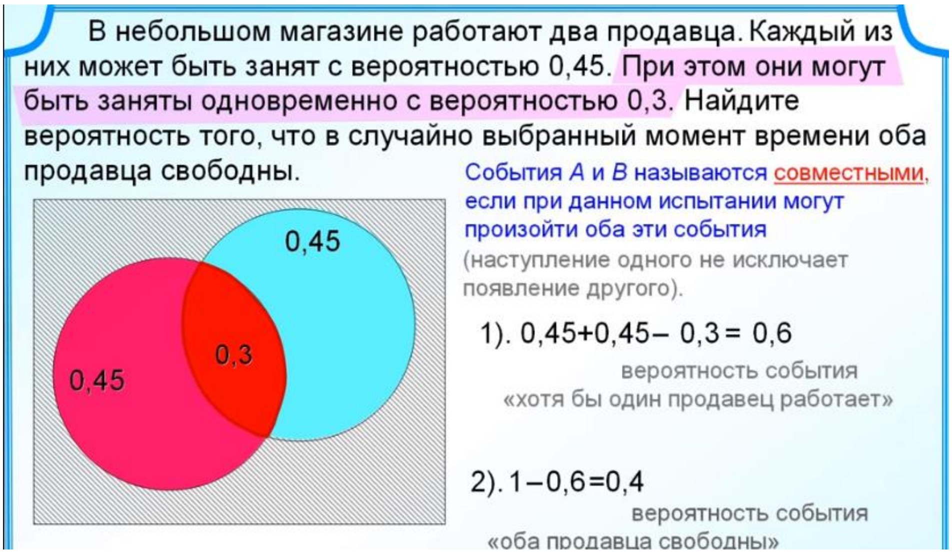
Теоремы сложения и умножения вероятностей





Пример 1.

Пример 2.



Пример 3.

Задача 1.11. Мишень состоит из центрального круга – «яблочка» и двух концентрических колец. Вероятности попадания в «яблочко» и кольца соответственно равны 0,2; 0,25; 0,35. Найти вероятность попадания в мишень (событие D).

Задача 1.12. Студент знает правильный ответ на 20 экзаменационных вопросов из 30. Какова вероятность того, что он:

а) знает ответ на два заданных ему вопроса;

б) не знает ответа на оба заданных ему вопроса?

Задача 1.13. Из колоды в 52 карты случайным образом берут 3 карты. Найти вероятность того, что все три карты – тузы (событие D).

Задача 1.14. В группе 10 студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадают дни рождения (событие A). Считаем, что в году 365 дней.

Задача 1.15. Из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара, два игрока поочередно извлекают наудачу шары без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша игрока, первым начавшего игру.

Задача 1.16. Два стрелка стреляют по мишени независимо друг от друга по одному разу. Вероятности попадания равны: для первого стрелка $P(A_1) = 0{,}7$, для второго стрелка $P(A_2) = 0{,}8$. Найти вероятности событий:

а) в мишени ровно одна пробоина (событие C);

б) мишень поражена (событие D).

Задача 1.17. Из колоды в 36 карт наудачу берут одну карту. События: $A = \{$карта – туз$\}$, $B = \{$карта – пики$\}$. Являются ли эти события независимыми?

Задача 1.18. Три элемента в системе работают независимо друг от друга. Вероятности безотказной работы равны: для первого элемента $P(A_1) = 0{,}6$; для второго элемента $P(A_2) = 0{,}7$; для третьего элемента $P(A_3) = 0{,}8$. Найти вероятности следующих событий – в системе будут работать безотказно:

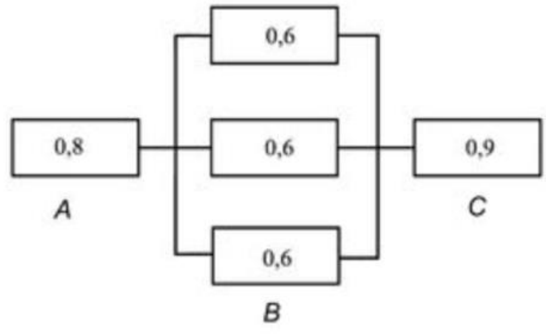
а) только один элемент (событие B);

б) только два элемента (событие C);

в) все три элемента (событие D);

г) хотя бы один элемент (событие F).

Задача 1.19. Рассчитать надежность P системы, представленной на рис.



Полная вероятность

Теорема. Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

Пусть случайное событие A может произойти при наступлении одного из *попарно несовместных* событий $H_1, H_2, ..., H_N$, называемых "гипотезами", которые *образуют полную группу*. Тогда, если произошло событие A, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий $H_1A, H_2 A, ..., H_NA$. Следовательно,

$$A=H_1A+H_2A+... + H_NA.$$

Применяя правило сложения вероятностей, имеем

$$P(A)=P(H_1A+H_2A+... + H_NA)= P(H_1A)+P(H_2A)+... +P(H_NA).$$

Но $P(H_iA) = P(H_i)\, P(A/H_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, поэтому

$$P(A)=\sum_{i=1}^{N} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Формула *Байеса*.

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A/H_j)}{P(A)}.$$

Задачи

1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна равна 0,8, а второго -0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из наудачу выбранного набора стандартна.

2 При переливании крови необходимо учитывать группу крови больного и донора. Среди населения 32,7 % людей имеет I группу крови; 35,5 % – II группу крови; 23,9 % – III группу крови; 7,9 % – IV группу крови. Известно, что больному с I группой крови можно переливать только кровь I группы; больному со II группой крови – кровь I и II группы; больному с III группой крови – кровь I и III группы, больному с IV группой крови – кровь любой группы. Найти вероятность того, что случайному больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

3. В первой коробке содержится 20 ламп из них 18 стандартных, во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

4. Из урны, содержащей 10 белых и 5 черных шаров, утеряны два шара неизвестного цвета. После этого случайным образом из урны вынимают один шар. Найти вероятность того, что он белый.

5. В группе 25 студентов, из них 5 «отличников» (отвечают на «5»), 10 «хорошистов» (отвечают на «4» или «5» с равной вероятностью) и 10 «троечников» (отвечают на «3», «4» или «2» с равной вероятностью). Найти вероятность того, что в результате опроса два случайным образом выбранных студента получат в сумме ровно 8 баллов.

6 Случайно оказались смешанными две партии изделий, причем известно, что число изделий в первой партии втрое больше, чем во второй, а дефектные изделия составляют 3 % в первой партии и 2 % – во второй партии. Взятое изделие подвергли проверке, и оно оказалось дефектным. Какова вероятность того, что изделие было взято из первой партии.

7. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что деталь произведена первым автоматом.

8. Теннисные мячики. В корзине лежат мячи для большого тенниса (9 новых и 12 старых). Для игры наугад выбрали 2 мяча, сыграли ими и положили обратно. Найти вероятность того, что при следующем вытаскивании одного мяча попадется новый.