Контрольная работа 2.

Тема: «Непрерывные случайные величины».

Типовой вариант

1. Функция плотности непрерывной случайной величины задана формулой: $\varphi(x)=\begin{cases} a(4x-x^2), & x\in[0,4] \\ 0, & x\notin[0,4] \end{cases}$. Найти коэффициент a, записать функцию распределения. Вычислить M(X), $P(X>1)$, медиану.

2. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в виде $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ ax^2+b & 0<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$. Найти параметры a и b. Вычислить M(X), D(X), P(X > 1).

3. Заданы математическое ожидание $a = 8$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины X. Требуется найти:

а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (4; 14);

б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше $\delta = 5$.

4. В некоторой партии 600 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,85. Найти вероятность того, что

а) в этой партии стандартных деталей окажется от 500 до 525;

б) отклонение числа стандартных деталей от своего среднего значения (математического ожидания) не превосходит 12.

5. На завод прибыла партия деталей в количестве 1000 штук. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,002. Какова вероятность, что среди прибывших деталей будет не более трех бракованных?

Решение типового варианта.

1. Коэффициент a находим из условия нормировки функции плотности (формула (1.44):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

В нашем случае

$$1 = \int_0^4 a(4x - x^2)dx = a\left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = a\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}a,$$

Откуда получаем $a = \dfrac{3}{32}$.

Функцию распределения $F(x)$ находим как первообразную функции плотности (формула (1.45):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

В нашем случае $F(x) = 0$ при $x < 0$. При $x \in [0; 4]$

$$F(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^x \frac{3}{32}(4t - t^2)dt = \frac{3}{32}\left(4\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32};$$

и $F(x) = 1$ при $x > 4$.

Математическое ожидание $M(X)$ равно (формула (1.50):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx =$$

$$= \int_0^4 x\frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\int_0^4 (4x^2 - x^3)dx = \frac{3}{32}\left(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^x = \frac{3}{32}\left(\frac{4^4}{3} - \frac{4^4}{4}\right) = 2.$$

Вероятность события $X > 1$ находим, воспользовавшись формулой (1.43):

$$P(X > 1) = \int_1^4 \varphi(t)dt = \int_0^x \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{27}{32} \approx 0,84375.$$

Медиана распределения m_x находится из уравнения (1.49) $F(m_x) = 0,5.$ В нашем случае

$$\frac{3m_x^{\ 2}}{16} - \frac{m_x^{\ 3}}{32} = \frac{1}{2}; \qquad 6m_x^{\ 2} - m_x^{\ 3} - 16 = 0; \qquad m_x^{\ 3} - 6m_x^{\ 2} \_16 = 0;$$

откуда $m_x = 2$.

Ответ: $a = \frac{3}{32}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32}, & x \in [0; 4]; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ $M(X) = 2$;

$P \approx 0,84375$; $m_x = 2$.

2. Найдем параметры a и b из условия непрерывности функции распределения:

$$F(0) = 0 = a \cdot 0^2 + b; \quad \Rightarrow \quad b = 0;$$

$$F(2) = 1 = a \cdot 2^2 + b = 4a; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4};$$

откуда следует, что $F(x) = \frac{x^2}{4}$ при $x \in [0; 2]$.

Запишем уравнение функции плотности из условия (1.46) $\varphi(x) = F'(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & x \in [0; 2] \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Вычислим числовые характеристики случайной величины.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^3}{6} \right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^4}{8} \right|_0^2 = \frac{16}{8} = 2;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{2}{9};$$

$$P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: a = 0,25; b = 0; $\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{2}, & x\in[0;2]; \\ 0, & x>2 \end{cases}$ $M(X)=\dfrac{4}{3}\approx 1,333;$

$D(X)=\dfrac{2}{9}\approx 0,222;\quad P=0,75.$

3. а) Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу, находим по формуле (1.57):

$$P(4<X<14)=\Phi\left(\frac{14-8}{2}\right)-\Phi\left(\frac{4-8}{2}\right)=\Phi(3)-\Phi(-2)=\Phi(3)+\Phi(2)\approx$$

$\approx$0,4986 + 0,4772 = 0,9758,

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятностей (см. табл. П1 приложения).

б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ находим по формуле (1.58):

$$P(|X-8|<5)=2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=2\Phi(2{,}5)\approx 2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$$

Ответ: а) 0,9758; б) 0,9876.

4. В данной задаче случайная величина X – число стандартных изделий – подчиняется биномиальному закону распределения. Здесь n = 600; p = 0,85; q = 1 – p = 0,15. Так как n велико, а p и q не очень малы, npq = 76,5 > 20, то искомые вероятности можно вычислить по теореме Лапласа.

а) Вероятность того, что число стандартных изделий X принадлежит заданному интервалу, вычисляется по формуле (1.66).

$$P(500<x<525)\approx\Phi\left(\frac{525-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{500-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{525-510}{\sqrt{76{,}5}}\right)-\Phi\left(\frac{500-510}{\sqrt{76{,}5}}\right)=$$

= Φ(1,71) – Φ(–1,14) = Φ(1,71) +Φ(1,14)$\approx$0,4564 + 0,3729 = 0,8293.

б) Вероятность отклонения числа стандартных изделий X от математического ожидания np = 510 не более чем на δ = 12 находим по формуле (1.67).

$$P\left(\left|X-510\right|\le\delta\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\frac{12}{\sqrt{76{,}5}}\right)\approx 2\Phi(1{,}37)\approx 2\cdot 0{,}4147=0{,}8294.$$

Ответ: а) 0,8293; б) 0,8294.

5. Рассмотрим случайную величину X – число бракованных деталей среди прибывших. В задаче требуется найти вероятность события $X\le 3$, т.е. X примет значение 0, 1, 2 или 3. X имеет биномиальное распределение при n = 1000 и p = 0,002. Так как n велико и p мало, удобно воспользоваться формулой Пуассона (1.25). Здесь $\lambda=np=$ $1000\cdot 0{,}002 = 2$. Тогда

$$P(X=0)=\frac{2^0e^{-2}}{0!}=\frac{1}{e^2}\approx 0{,}1354;$$

$$P(X=1)=\frac{2^1e^{-2}}{1!}=\frac{2}{e^2}\approx 0{,}2707;$$

$$P(X=2)=\frac{2^2e^{-2}}{2!}=\frac{2}{e^2}\approx 0{,}2707;$$

$$P(X=3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}=\frac{4}{3e^2}\approx 0{,}1804.$$

$P(X\le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \approx 0{,}8571.$

$\cdot\, 0{,}9^8 0{,}1^2 + 120\cdot 0{,}9^7 0{,}1^3 \approx 0{,}9872.$

Ответ: 0,8571.

Варианты контрольных работ для самостоятельной работы.

Вариант 1

1. Функция плотности непрерывной случайной величины задана формулой: $p(x)=\begin{cases} c\sin x, & x\in[0,\pi/3] \\ 0, & x\notin[0,\pi/3]\end{cases}$. Найти коэффициент c, записать функцию распределения. Вычислить M(X), D(X), $P\left(X\in(-\pi/4,\pi/4)\right)$.

2. Случайная величина X – время безотказной работы компьютера – задана функцией распределения вероятностей: $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ a-be^{-x/T}, & x>0, \quad (T>0) \end{cases}$. Найти параметры a и b, функцию плотности распределения f (x). Вычислить вероятность безотказной работы компьютера за время $X\ge T$.

3. Длина втулки, изготовленной некоторым автоматом, является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с M(X) = 20 см и D(X) = 0,04 см^2. Какую длину втулки, наудачу выбранной из большой партии, можно гарантировать с вероятностью, равной 0,95?

4. При введении вакцины против некоторого заболевания иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет: а) 2 ребенка; б) более 2 детей?

5. Вероятность того, что кредит, выданный банком N, оказывается возвращённым клиентом вовремя, равна 0,9. Какова вероятность, что число возвращённых с нарушением срока договора кредитов в случайной выборке из 1200 кредитных обязательств будет:
а) не более ста; б) от 110 до 115?

Вариант 2

1. Функция плотности непрерывной случайной величины задана в виде: $f(x)=c$ при $0\le x.\le 1$; $f(x)=2c$ при $1< x\le 3$; $f(x)=0$ вне отрезка [0; 3]. Найти значение параметра c, записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X>M(X))$, медиану.

2. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в виде $F(x)=\begin{cases} a, & x\le -1 \\ b\left(x+1\right)^2, & -1< x\le 1 \\ c, & x>1 \end{cases}$. Найти параметры a, b и c, функцию плотности распределения $f(x)$. Вычислить M(X), D(X), медиану распределения .

3. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей

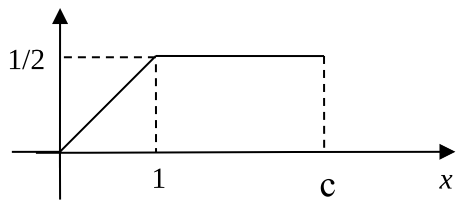
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который попадут значения случайной величины с вероятностью p = 0,9973.

4. Случайная величина X распределена равномерно на промежутке (-3, 9). Найти $M(X^3)$, $P(X^2 \le 4)$. Построить график функции распределения этой случайной величины.

5. Фирма рассылает рекламные проспекты трёмстам потенциальным клиентам. В результате такой рассылки в среднем у каждого шестого клиента возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что в фирму обратится не менее 40 клиентов.

Вариант 3

1. Задана функция плотности непрерывной случайной величины. Записать уравнения функции плотности и функции распределения. Найти значение параметра с, $M(X)$, $P(X<M(X))$.



2. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–1; 9]. Найти $P\left(\left|X - M(X)\right| < \sigma(X)\right)$. Построить график функции распределения.

3. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 4 минуты поступит: а) 3 вызова, б) менее 3 вызовов, в) не менее 3 вызовов. (Воспользоваться формулой Пуассона).

4. На конвейер за смену поступает 400 изделий. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна, равна 0,8. Найти вероятность того, что стандартных деталей за смену поступило ровно 330.

5. Номинальный вес плитки шоколада равен 100 г. Вследствие неточности изготовления, фактический вес - случайная величина, распределённая по нормальному закону со средним значением 100 г и средним квадратическим отклонением σ = 4 г. Магазин не принимает плитки, вес которых меньше 95 г. Какой процент плиток будет отбракован?

Ответы

Вариант 1.

1. c = 2, $F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ 2(1-\cos x), & x\in[0,\pi/3] \\ 1, & x\in(\pi/3+\infty) \end{cases}$ P=0,5858, $M(X)$=0,685.

2. a=1, b=1. P=1/e=0,368. **3**. $20\pm0{,}39$ см. **4**. а) 0,00452; б) 0,0016..

5. а) 0,0271; б)0,1471.

Вариант 2.

1. c = 0,2; $M(X)$=1,7; $D(X)$ = 0,643; P = 0,52; m_x =1.75.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ 0,2x, & x\in[0;1] \\ 0,4x-0,2, & x\in(1;3] \\ 1, & x\in(3;+\infty) \end{cases}.$$

2. a = 0; b = 0,25; c = 1. $\varphi(x)=\begin{cases} 0,5(x+1), & x\in(-1;1) \\ 0, & x\notin(-1;1) \end{cases}$; $M(X)$=1/3; $D(X)$ = 2/9;

$m_x=\sqrt{2}-1$. **3**. (-9; 3). **4**. $M(X^3)$ =135; P = 1/3. **5**. 0,9394.

Вариант 3.

1. c = 2,5; $F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ x^2/4, & x\in[0;1] \\ x/2-1/4, & x\in(1;2,5] \\ 1, & x\in(2,5;+\infty) \end{cases}$. $M(X)$ = $1\frac{23}{48}\approx1{,}479$; $P=\frac{47}{96}\approx0{,}4896$.

2. P = 0,5774. **3.** а) 0,0286; б) 0,013715; в) 0,986285. **4.** 0,0228. **5.** 10,56%.