Понятие устойчивости по Ляпунову

Так как решения большинства ДУ и систем ДУ не выражаются через элементарные функции или квадратуры, то в этих случаях при решении конкретных ДУ применяются приближенные методы интегрирования. Недостаток этих методов заключается в том, что они дают только одно частное решение. Чтобы получить другие частные решения, нужно все вычисления проводить заново. Зная одно частное решение, нельзя сделать заключение о характере других решений. При решении прикладных задач бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции, и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория ДУ.

Одним из основных вопросов качественной теории ДУ является вопрос об устойчивости решения. Этот вопрос подробно был исследован знаменитым русским математиком А.М. Ляпуновым (1857-1918).

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(X,t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(X,t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = F(X,t). \tag{1}$$

Пусть $X = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ – решение системы (1), соответствующее

начальным условиям $\Phi(t_0) = \Phi_0$, или $\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \vdots \\ \varphi_{n0} \end{pmatrix}$.

Кроме того, $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ – решение системы (1), соответствующее измененным начальным условиям $X(t_0)=X_0$, или $\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (1) $X=\Phi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)\right|<\delta$ следуют неравенства $\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|<\varepsilon \quad \forall t\ge t_0,\ \ i=1,2,...,n$.

Из определения следует, что если $X=\Phi(t)$ – устойчивое решение, то *всякое решение, достаточно близкое к нему в начальный момент* $t=t_0$, *остается близким к нему с ростом* t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (1) $X=\Phi(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову,* если существует $\delta>0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)\right|<\delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|=0$, $i=1,2,...,n$.

Из определения следует, что *всякое решение, достаточно близкое к* $X=\Phi(t)$ *в начальный момент* $t=t_0$, *неограниченно сближается с ним с ростом* t.

ПРИМЕР. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt}=ax$, где $a\in R$ – параметр. Очевидно, что это уравнение имеет тривиальное решение $x(t)=0$, удовлетворяющее при любом $t=t_0$ начальному условию $x(t_0)=0$.

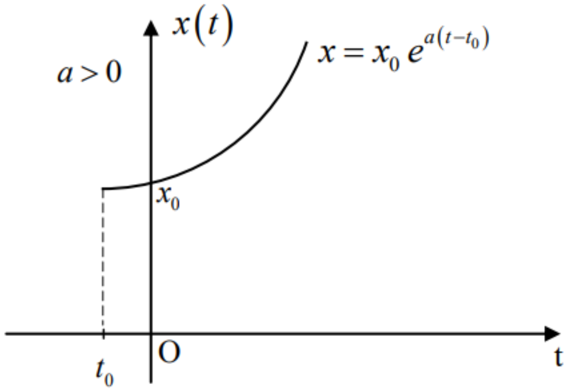
Исследуем на устойчивость это решение. Для этого зададим другое начальное условие $x(t_0)=x_0$ и найдем решение, которое ему удовлетворяет.

$\int\frac{dx}{x}=a\int dt \ \Rightarrow\ \ln|x|=at+C \ \Rightarrow\ x=C_1e^{at}$ – общее решение уравнения.

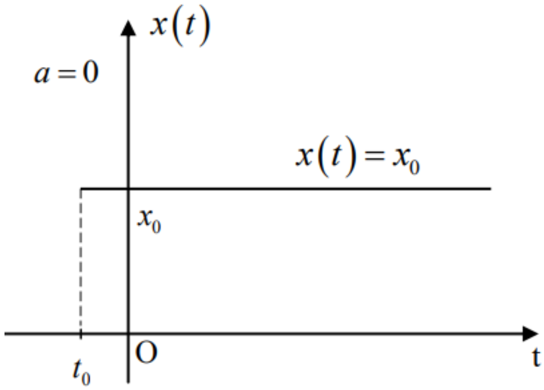
$x(t_0)=C_1e^{at_0}=x_0 \ \Rightarrow\ C_1=x_0e^{-at_0} \ \Rightarrow\ x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$ – искомое частное решение.

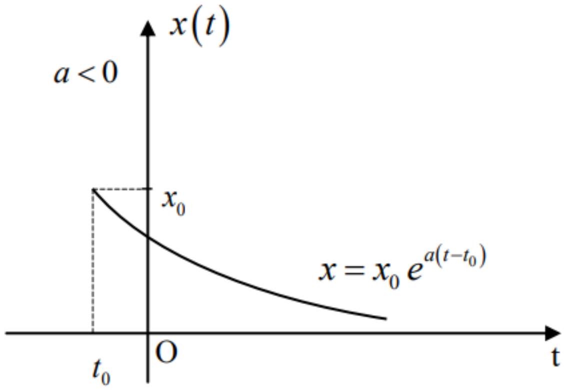
Отсюда $\left|x(t)-0\right|=|x_0|e^{a(t-t_0)}$.

1) Пусть $a>0 \Rightarrow\ e^{a(t-t_0)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\infty$, поэтому каким бы близким к нулю ни было значение x_0, $|x(t)|$ неограниченно возрастает, то есть найденное решение неограниченно удаляется от решения $x(t)=0$. А это по определению означает, что при $a>0$ нулевое решение свойством устойчивости не обладает, или является неустойчивым.



2) Пусть $a \le 0 \Rightarrow e^{a(t-t_0)} \le 1$ при всех $t \ge t_0$, значит $|x(t)-0| = |x_0| e^{a(t-t_0)} \le |x_0|$.
Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ получим, что если $|x_0 - 0| < \varepsilon$, то $|x(t)-0| \le |x_0| < \varepsilon$. Определение устойчивости выполнено, поэтому при $a \le 0$ нулевое решение устойчиво по Ляпунову.
Заметим, что если $a<0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{a(t-t_0)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)-0| = 0$, то есть в этом случае нулевое решение асимптотически устойчиво.





ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (1) $X = \Phi(t)$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, если $\lim\limits_{t\to+\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0$, где $x_i(t)-$ решение, определяемое *любыми* начальными условиями, а не только значениями, близкими к начальным значениям $\varphi_i(t_0)$, $i = 1,2,...,n$.

Как было показано выше, при $a<0$ нулевое решение д.у. $\dfrac{dx}{dt} = ax$ асимптотически устойчиво в целом.

Рассмотрим систему уравнений (1). Каждому решению (1) соответствует интегральная кривая $X = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$, или *траектория*. Если эта система имеет не зависящее от t решение $X = X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$, $X_0 = const$, то соответствующая траектория будет точкой. Она называется *точкой покоя* системы (1), или ее *положением равновесия*. В частности, тривиальное решение $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ называется точкой *покоя* этой системы, *расположенной в начале координат* (она существует, лишь если $F(0,...,0,t) = 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траекторией называется линия (или точка) в системе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычерченная решением при изменении времени *t.*

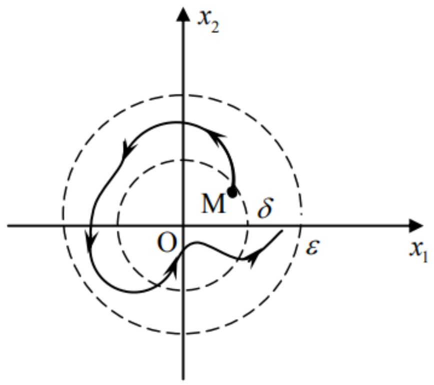
Сформулируем определение устойчивой точки покоя, расположенной в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тривиальное решение системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из совокупности неравенств $|x_i(t_0)| < \delta$ следуют неравенства $|x_i(t)| < \varepsilon \ \forall t \ge t_0, \ i = 1,...,n$.

Такому определению можно дать другую, эквивалентную формулировку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка покоя, расположенная в начале координат, называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|X(t_0)|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta^2$ следует, что

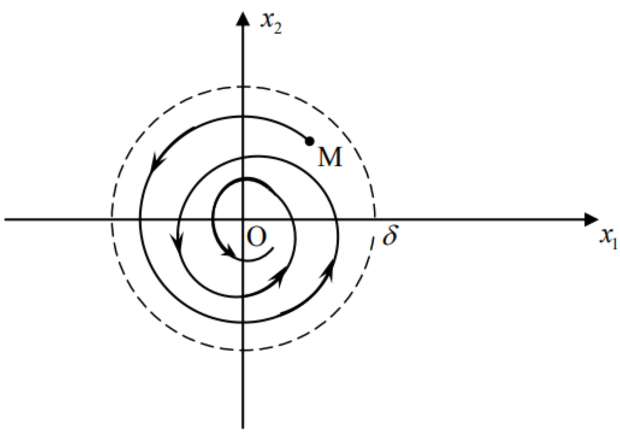
$|X(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2 \ \forall t \ge t_0$.



Геометрически это означает, что если тривиальное решение устойчиво, то всякая траектория, определяемая начальной точкой $M\left(x_1\left(t_0\right), x_2\left(t_0\right)\right)$ и начинающаяся внутри круга (сферы) радиуса δ, не покидает при $t \geq t_0$ круга (сферы) радиуса ε с центром в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тривиальное решение системы (1) *называется асимптотически устойчивым*, если существует $\delta > 0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i\left(t_0\right)\right| < \delta$ следует, что $\lim\limits_{t \to +\infty}\left|x_i(t)\right| = 0,\ i = 1, \dots, n$, или, другими словами, если из неравенства $\left|X\left(t_0\right)\right|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\left(t_0\right) < \delta^2$ следует, что

$$\lim_{t \to +\infty}\left|X(t)\right|^2 = \lim_{t \to +\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 0 .$$



Геометрическая иллюстрация этого определения : если тривиальное решение асимптотически устойчиво, то любая траектория, которая определяется начальной точкой $M\left(x_1\left(t_0\right), x_2\left(t_0\right)\right)$ в круге радиуса δ, не только не выйдет из этого круга, но и будет стремиться к его центру $O(0,0)$.

Оказывается, что исследование на устойчивость любого частного решения системы (1) можно заменить исследованием устойчивости тривиального решения некоторой другой системы. Покажем это.

Пусть $X = \Phi(t)$ – исследуемое решение. Введем новую переменную $Y(t) = X(t) - \Phi(t)$. Если решение $\Phi(t)$ устойчиво, то любое решение $X(t)$, близкое к нему в начальный момент $t=t_0$, остается близким к нему и при $t>t_0$. Отсюда следует, что если при $t=t_0$ $Y(t)$ близко к началу координат, то $Y(t)$ не удаляется от $O(0,0)$ и с ростом t.

Выясним, какой системе уравнений удовлетворяет функция $Y(t)$, если $\Phi(t)$ удовлетворяет (1):

$$X=Y+\Phi \Rightarrow \frac{dX}{dt}=\frac{dY}{dt}+\frac{d\Phi}{dt}=F(Y+\Phi,t) \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dt}=F-\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2)$$

Система (2) имеет тривиальное решение $Y=0$. Если оно устойчиво, то устойчиво любое частное решение системы (1).

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{dX}{dt}=AX+F \qquad (3)$$

и соответствующую ей однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=AX. \qquad (4)$$

Исследуем на устойчивость частное решение системы (3) $X=\Phi(t)$. Пусть $Y(t)=X(t)-\Phi(t) \Leftrightarrow y_i(t)=x_i(t)-\varphi_i(t)$, $i=1,...,n$ – это отклонение точек на произвольной траектории $X=X(t)$ от соответствующих точек исследуемой траектории $X=\Phi(t)$. Такое отклонение называется *возмущением*.

$$X=Y+\Phi \Rightarrow \frac{dX}{dt}=\frac{dY}{dt}+\frac{d\Phi}{dt}=AY+A\Phi+F \Rightarrow \frac{dY}{dt}=AY,$$

так как $X=\Phi(t)$ удовлетворяет (3).

Таким образом, если решение $X=\Phi(t)$ неоднородной системы (3) устойчиво, то устойчиво и тривиальное решение соответствующей однородной системы (4) и наоборот: из устойчивости нулевого решения однородной системы (4) следует устойчивость решения $X=\Phi(t)$ неоднородной системы (3).

Итак, *все частные решения неоднородной системы (3) в смысле устойчивости ведут себя так же, как тривиальное решение соответствующей однородной системы (4). Поэтому исследование устойчивости произвольного решения системы (3) можно заменить исследованием устойчивости точки покоя, расположенной в начале координат, однородной системы (4).*

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt}+x\,e^{t}=0$.

Это линейное однородное уравнение, оно имеет тривиальное решение $x(t)=0$, которое удовлетворяет начальному условию $x(0)=0$.

Исследуем устойчивость этого решения. Изменим начальное условие: $x(0)=x_0$ – и найдем соответствующее ему решение.

$$\int\frac{dx}{x}=-\int e^{t}\,dt \Rightarrow x=Ce^{-e^{t}} \Rightarrow x(0)=C\,e^{-1}=x_0 \Rightarrow C=e\,x_0 \Rightarrow x(t)=x_0\,e^{-e^{t}+1}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}x_0\,e^{-e^{t}+1}=0\quad\forall x_0\in\mathbb{R}$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом, а это означает, что асимптотически устойчивы в целом и все частные решения данного дифференциального уравнения.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}$.

Сведем систему к одному дифференциальному уравнению 2-го порядка: из второго уравнения получаем

$$x'=y'' \Rightarrow y''+y=0 \Rightarrow y=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

Тогда $x=y'=-C_1\sin t+C_2\cos t$.

Итак, $\begin{cases}x=-C_1\sin t+C_2\cos t\\ y=C_1\cos t+C_2\sin t\end{cases}$ – общее решение системы.

Очевидно, что данная система имеет точку покоя, расположенную в начале координат. Такое решение удовлетворяет условию $x(0)=y(0)=0$. Чтобы исследовать его устойчивость, рассмотрим произвольное решение, определяемое начальным условием $\begin{cases}x(0)=x_0\\ y(0)=y_0\end{cases}$. Оно имеет вид $\begin{cases}x=-y_0\sin t+x_0\cos t\\ y=y_0\cos t+x_0\sin t\end{cases}$.

При достаточно малых значениях $|x_0|,|y_0|$ значения $|x(t)|,|y(t)|$ также будут достаточно малы, потому что $|\cos t|\le 1,\ |\sin t|\le 1$. А это означает, что тривиальное решение и вместе с ним все частные решения данной системы устойчивы, хотя асимптотической устойчивости нет.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $x'' + 4x' + 5x = 0$.

Найдем общее решение: характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow x(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \ \forall C_1, C_2.$$

Отсюда следует, что нулевое решение этого дифференциального уравнения $x(t) = 0$ асимптотически устойчиво в целом, а это значит, что асимптотически устойчивы в целом не только все частные решения данного однородного дифференциального уравнения, но и все частные решения неоднородного уравнения $x'' + 4x' + 5x = f(t)$.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $x''' - x' = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 - k = 0 \Rightarrow \ k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm 1.$$

Отсюда $x_1 = 1, x_2 = e^t, x_3 = e^{-t}$ – ф.с.р.. Зададим следующее начальное условие: $x(0) = x'(0) = x''(0) = \varepsilon \Rightarrow x(t) = \varepsilon e^t$ – соответствующее частное решение. При достаточно малом значении $|\varepsilon|$ $\quad |x(t)| = |\varepsilon| e^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, то есть траектория, начинаясь вблизи начала координат, с ростом t неограниченно от него удаляется. По определению это означает, что тривиальное решение $x(t) = 0$ устойчивым не является, значит, неустойчивы и все частные решения данного дифференциального уравнения, а также неоднородного уравнения $x''' - x' = f(t)$.

Из рассмотренных примеров можно заключить, что для линейных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами устойчивость или неустойчивость их решений зависит от вида корней соответствующих характеристических уравнений. Исследуем этот вопрос подробно.

Условия устойчивости для систем линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \;. \end{cases} \tag{5}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Рассмотрим всевозможные случаи.

1. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\;\; k_1 \neq k_2,\, k_1 < 0,\, k_2 < 0.$

Так как собственные значения различны, то им соответствуют два различных собственных вектора $\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ и общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Исследуем на устойчивость тривиальное решение, то есть точку покоя, расположенную в начале координат.

Пусть $C_1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = C_2\,\gamma_{12}\,e^{k_2 t} \\ x_2 = C_2\,\gamma_{22}\,e^{k_2 t} \end{cases}$. Эти равенства могут трактоваться как параметрические уравнения соответствующей траектории. Разделив первое из них на второе, получим $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \;\Rightarrow \gamma_{22}\,x_1 - \gamma_{12}\,x_2 = 0$, то есть данная траектория является прямой линией.

Аналогично, полагая $C_2 = 0$, получим: $\begin{cases} x_1 = C_1\,\gamma_{11}\,e^{k_1 t} \\ x_2 = C_1\,\gamma_{21}\,e^{k_1 t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \;\Rightarrow\;\; \gamma_{21}\,x_1 - \gamma_{11}\,x_2 = 0$.

Значит, и эта траектория – прямая.

Заметим, что в обоих случаях $x_1, x_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Рассмотрим теперь всевозможные варианты, когда $C_1 \neq 0,\, C_2 \neq 0$. Будем считать, что $k_1 < k_2$.

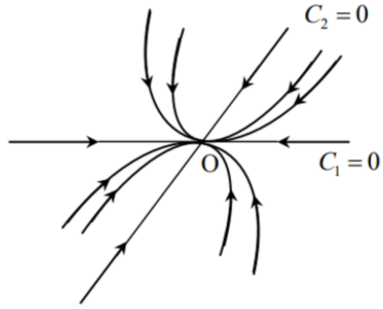
Все траектории, кроме той, что определяется значением $C_2 = 0$, имеют общую касательную и с ростом t неограниченно приближаются к началу координат, так как и в этом случае $x_1, x_2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Таким образом, точка покоя такого типа асимптотически устойчива в целом. Она называется *устойчивым узлом*.

Фазовый портрет случая

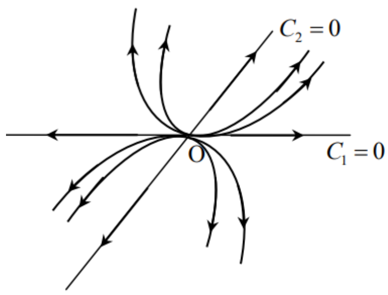
$k_{1,2} \in \mathbf{R}, \quad k_1 \neq k_2, k_1 < 0, k_2 < 0.$

$k_1 < k_2$



2. $k_{1,2} \in \mathbf{R}, k_1 \neq k_2, k_1 > 0, k_2 > 0.$

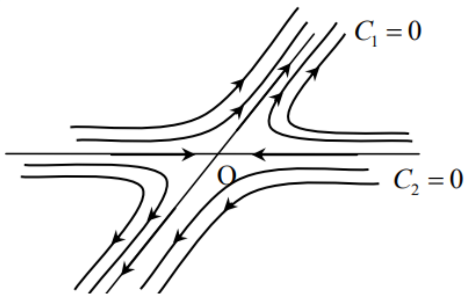
Анализ траекторий в этом случае аналогичен предыдущему. Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом* .



3. $k_{1,2} \in \mathbf{R}, k_1 \neq k_2, k_1 < 0, k_2 > 0.$

Так как общее решение системы в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}$, то при $t \to +\infty$ точки на всех траекториях (кроме той, которая соответствует $C_2 = 0$) удаляются от точки покоя $O(0,0)$.

Если $C_2 = 0$, то аналогично п.1 имеем $\begin{cases} x_1 = C_1 \gamma_{11} e^{k_1 t} \\ x_2 = C_1 \gamma_{21} e^{k_1 t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$, то есть траекторией является прямая линия, вдоль которой точки приближаются к началу координат.



Если $C_1 = 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$ – прямая, вдоль которой точки удаляются от точки покоя

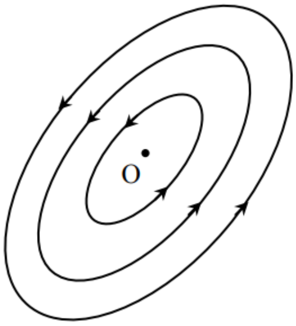
Точка покоя такого типа неустойчива, она называется *седлом.*

4. $k_{1,2} = \pm\beta i$ – корни характеристического уравнения чисто мнимые.

Общее решение системы в этом случае имеет вид :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t \\ \overline{C_1} \cos\beta t + \overline{C_2} \sin\beta t \end{pmatrix},$$

где $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ – некоторые линейные комбинации произвольных постоянных C_1, C_2.

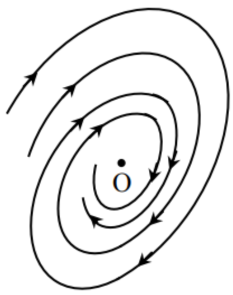


Так как x_1, x_2 задаются периодическими функциями, то траектории – замкнутые линии. Можно показать, что это эллипсы с центром в начале координат.
В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически. Она называется *центром*.

5. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha < 0$.

Решение в этом случае имеет вид:

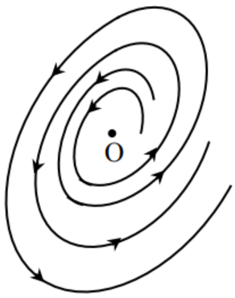
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t \\ \overline{C_1} \cos\beta t + \overline{C_2} \sin\beta t \end{pmatrix}.$$



Если t изменится на величину периода $T_0 = \dfrac{2\pi}{\beta}$, то точка на траектории вернется не в прежнее положение, а станет ближе к точке покоя, так как $\alpha < 0$ и $e^{\alpha t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, то есть движение будет происходить по спиралям.

Такая точка покоя асимптотически устойчива в целом и называется *устойчивым фокусом*.

6. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha > 0$.



Движение будет происходить также по спиралям, но в обратную сторону Точка покоя в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

7. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\ k_1 = k_2,\ k_{1,2} < 0.$

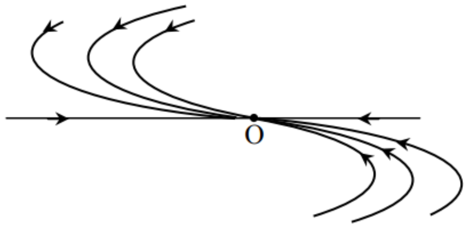
В этом случае решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix} e^{kt},\ k = k_1 = k_2.$$

Для системы второго порядка $b^2 + d^2 \neq 0$, поэтому

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(a+bt)e^{kt}}{(c+dt)e^{kt}} = \frac{a+bt}{c+dt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{b}{d},$$

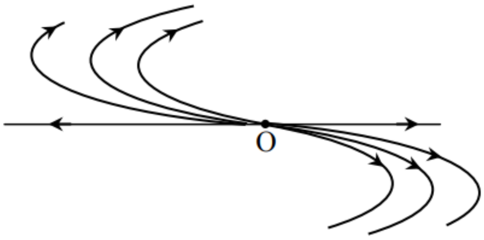
а $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{b}{d}$ – прямая линия, значит, что все траектории имеют касательную $d\,x_1 - b\,x_2 = 0$.



Если $a = c = 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{bt\,e^{kt}}{dt\,e^{kt}} = \dfrac{b}{d}$ и касательная $d\,x_1 - b\,x_2 = 0$ сама является траекторией . Заметим, что так как $k < 0$, то с ростом t точки всех траекторий стремятся к началу координат.

Точка покоя такого типа называется *вырожденным устойчивым узлом.*

8. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\ k_1 = k_2,\ k_{1,2} > 0.$



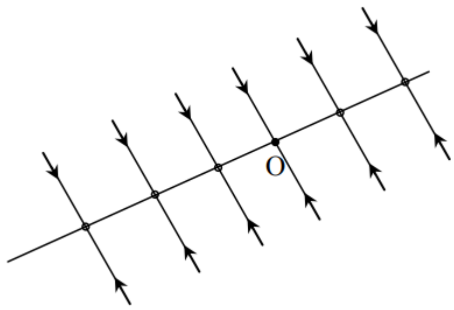
В этом случае точка покоя является *неустойчивым вырожденным узлом*

9. $k_1 = 0, k_2 < 0$.

Общее решение системы имеет вид: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}$.

Если $C_2 = 0$, то $\begin{cases} x_1 = C_1 \gamma_{11} \\ x_2 = C_1 \gamma_{21} \end{cases}$ – точки покоя, расположенные на прямой $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$.

Если $C_2 \neq 0$, то $\dfrac{x_1 - C_1 \gamma_{11}}{x_2 - C_1 \gamma_{21}} = \dfrac{C_2 \gamma_{12} e^{k_2 t}}{C_2 \gamma_{22} e^{k_2 t}} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$, или $x_1 - C_1 \gamma_{11} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \left(x_2 - C_1 \gamma_{21} \right)$,



то есть траекториями являются прямые линии, параллельные прямым $x_1 = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} x_2$. С ростом t точки на этих траекториях приближаются к точкам на прямой $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$, потому что $e^{k_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически.

10. $k_1 = 0, k_2 > 0$.

Точка покоя такого типа неустойчива вследствие того, что $e^{k_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \infty$.

11. $k_1 = k_2 = 0$.

Общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b t \\ c + d t \end{pmatrix}$ и точка покоя неустойчива.

Вывод. Для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами справедливо следующее:

1. *если у всех корней характеристического уравнения (6)* $\mathrm{Re}\,k_i < 0$*, то тривиальное решение системы асимптотически устойчиво в целом, откуда следует, что все частные решение также асимптотически устойчивы в целом;*
2. *если хотя бы один корень имеет* $\mathrm{Re}\,k_i > 0$*, то тривиальное решение неустойчиво;*
3. *если среди корней есть простые корни с* $\mathrm{Re}\,k_i = 0$*, а остальные корни имеют* $\mathrm{Re}\,k_i < 0$*, то тривиальное решение устойчиво, но не асимптотически;*
4. *если среди корней есть кратные корни с* $\mathrm{Re}\,k_i = 0$*, то решение практически всегда неустойчиво;*
5. *вышесказанное справедливо не только для систем дифференциальных уравнений, но и для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* n*-го порядка.*