ЛЕКЦИЯ 1

Предмет теории вероятностей. Случайные события. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Элементы комбинаторики. Классическая модель.

1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

В практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых нельзя предсказать, результат которых, как говорят, зависит от случая. Например, то, что застрахованный объект (дом, домашнее имущество и т. п.) будет уничтожен в результате стихийного бедствия, – дело случая. Чем же тогда страховые органы руководствуются в своей работе и можно ли предсказывать что-либо о случайных явлениях? Оказывается, что если о будущем определенного застрахованного объекта сказать ничего нельзя, то о состоянии большого их числа можно почти наверняка сказать многое.

Случайное явление можно иногда охарактеризовать *частотой*, т. е. отношением числа его наступлений m к числу испытаний n, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить. Примерами частот могут служить доля родившихся за год мальчиков в населенном пункте, удельный вес нестандартных деталей в партии и т. п.

Если частота случайного явления в сериях из большого числа испытаний почти постоянна, т. е. колеблется незначительно около некоторой постоянной величины, то будем говорить, что этому явлению присуща *устойчивость частот.* Например, рождаемость мальчиков обладает этим свойством.

Случайные явления или события с устойчивой частотой широко распространены в физике, технике, металлургии, машиностроении (теория допусков), экономике и других отраслях знания.

Случайность события или явления не означает его беспричинности. Предметы, явления в природе органически связаны, зависят и обусловливают друг друга. Ни одно явление в природе не может быть понято, если взять его в изолированном виде, и, наоборот, любое явление может быть понято и обосновано, если оно рассматривается в неразрывной связи с окружающими явлениями.

Место падения снаряда при стрельбе из орудия является случайным, но это не означает, что оно не имеет причинного обоснования. Наоборот, траектория полета снаряда является результатом воздействия на снаряд очень большого числа факторов. Дело лишь в том, что каждый фактор количественно по-разному проявляется в различные моменты времени и точно указать действие; каждого из них в определенный момент времени и суммарное действие их на траекторию данного снаряда мы не можем. В результате место падения снаряда становится случайным.

Итак, *теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются только случайные явления (события) с устойчивой частотой и выявляются закономерности при массовом их повторении.*

Теория вероятностей как наука возникла в середине XVII и связана с именами следующих ученых: Паскаль (1623-1662), Ферма (1601-1665), Гюйгенс (1629-1695), Бернулли (1654-1705), Лаплас (1749-1827), Гаусс (1777-1855), Муавр (1667-1754), Пуассон (1781-1840). Свое развитие она получила в трудах российских ученых, представителей Санкт-Петербургской математической школы: Чебышев (1821-1824), Марков (1856-1922), Ляпунов (1857-1918). Наиболее современное аксиоматическое построение теории вероятностей было сделано в XX веке советским ученым А.Н.Колмогоровым (1903-1989). Кроме него советская школа теории вероятностей представлена именами выдающихся математиков: Хинчин (1894-1959), Смирнов (1900-1966) и др. Следует отметить большой вклад в математическую статистику зарубежных математиков: Госсет (Стьюдент) (1876-1937), Фишер (1890-1962), Пирсон (1857-1936), Нейман (1894-1936), Вальд (1902-1950).

1.2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТЬ. АКСИОМЫ КОЛМОГОРОВА. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Мы будем пользоваться термином *испытание* для таких понятий, как опыт (эксперимент), наблюдение, измерение и т. п. Мы будем считать, что испытание можно повторять неограниченное число раз.

Событием называется эксперимент с двумя возможными исходами («да» или «нет»). *Случайным* называется такое событие, результат которого нельзя предсказать до проведения эксперимента. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C, ...* и т. д.

Событие называется *достоверным,* если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется *невозможным,* если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара –достоверное событие; появление белого шара – невозможное событие.

Пусть при n испытаниях событие A появилось m раз. Отношение m/n называется *частотой (относительной частотой)* события A и обозначается $\omega(A) = m/n$.

Если событие достоверно, то оно произойдет при каждом испытании ($m = n$). Поэтому частота достоверного события всегда равна единице. Наоборот, если событие невозможно, то оно ни при одном испытании не осуществится ($m = 0$). Следовательно, частота невозможного события в любой серии испытаний равна нулю. Поэтому *вероятность достоверного события равна единице*, а *вероятность невозможного события равна нулю*.

Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то его частота $\omega(A) = m/n$ при большом числе испытаний будет мало отличаться от некоторого числа p (где $0<p<1$)– *вероятности события A.*

Два события называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. В противоположном случае события называются *совместными*.

Пример: Студент приобрел билет лотереи. Тогда событие *A,* состоящее в том, что его билет выиграет, и событие *B,* состоящее в, том, что его билет не выиграет, являются несовместными. Для лица, имеющего два билета лотереи, события *A* и *B*, заключающиеся в том, что он выиграет соответственно по первому и второму билетам, являются совместными, так как наступление события *A* (он выиграл по первому билету) не исключает возможность наступления события *B* (выиграть по второму билету).

Несовместность более чем двух событий означает их *попарную несовместность*.

Два события, одно из которых обязательно должно произойти, но наступление одного исключает возможность наступления другого, называются *противоположными*. Событие, противоположное событию *A,* будем обозначать символом $\overline{A}$.

Пример: События «изделие удовлетворяет стандарту» и «изделие не удовлетворяет стандарту» – противоположные.

Аксиомы Колмогорова.

Пусть проводится некий опыт со случайным исходом. Возможные исходы ω опыта называются *элементарными событиями* или *элементарными исходами,* если они попарно несовместны и в результате опыта одно из них обязательно произойдет. Множество Ω всех элементарных событий ω в опыте называется *пространством элементарных событий.*

Зададим множество W, элементами которого являются некоторые подмножества пространства элементарных событий. Множество W называется *полем событий* , а его элементы – *событиями.* Т.е. событие – это некоторая совокупность элементарных событий. При этом элементарные события $\omega_i \in \Omega$, входящие в событие A, называются *благоприятными.*

Пример: Пусть испытание состоит в подбрасывании кубика и наблюдении выпавшего числа очков на его верхней грани. Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$, где элементарные события : ω_i ={ *количество выпавших на верхней грани очков равно i* }, i=1,...,6 . Если событие А состоит в том, что выпало нечетное число очков, то благоприятными являются события $\omega_1, \omega_3, \omega_5$.

Потребуем выполнение следующих условий:

1) множество $\Omega \in W$ и Ω называется *достоверным* событием,

2) пустое множество элементарных исходов тоже является элементом поля событий W и называется *невозможным* событием,

3) если А – событие, то множество всех элементарных событий, не входящих в А, (т.е. дополнение А) тоже событие, его обозначим $\bar{A}$ и назовем *противоположным* событию А,

4) если $A_1,...A_n$ - события, то их объединение и пересечение тоже являются событиями.

При этом *объединение (сумма)* событий А и В, обозначается А$\cup$ В или А+В, – множество элементарных исходов, входящих хотя бы в одно из двух событий А или В; *пересечение (совмещение)* событий А и В, обозначается А$\cap$В или АВ, - множество элементарных исходов, входящих одновременно и в А, и в В.

На поле событий W зададим числовую функцию Р – *вероятность*, для которой справедливы следующие так называемые *аксиомы вероятности*:

1) $\forall$ А$\in W$ вероятность Р(А)$\geq$ 0;

2)Р(Ω)=1;

3) для любой последовательности попарно несовместных событий

$A_1,...A_n,...$ справедливо равенство $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Из аксиом вероятности вытекает ряд *следствий*:

1) $\forall A \in W \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$;

2) $P(\varnothing) = 0$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$;

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Доказательство следствий.

4) Пусть $A \subseteq B$, тогда $B = A \cup (B \setminus A)$ и т.к. события A и $B \setminus A$ несовместны, то по аксиоме 3,получаем $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \ge P(A)$, т.к. $P(B \setminus A) \ge 0$ по аксиоме 1.

1) $\forall A \Rightarrow A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$.

2) $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

Следствия 3, 5.6 представляем доказать читателю самостоятельно в качестве упражнения.

Вероятностным пространством называется совокупность трех объектов: пространство элементарных событий Ω, поле событий W, и заданная на поле событий вероятность P(A), т.е. тройка $(\Omega, W, P(A))$. В зависимости от класса рассматриваемых задач применяются различные модели.

1.3. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.

Как было сказано выше, при большом числе n испытаний частота $\omega(A) = m/n$ появления события A обладает устойчивостью и дает приближенное значение вероятности события A, т. е. $P(A) \approx \omega(A)$.

Это обстоятельство позволяет находить приближенно вероятность события опытным путем. Практически такой способ нахождения вероятности события не всегда удобен. В ряде случаев вероятность события удается определить до опыта с помощью понятия равновероятности событий (или равновозможности).

Два события называются *равновероятными* (или *равновозможными),* если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Равновозможность исходов устанавливается либо из соображений симметрии, как при подбрасывании монеты (мы считаем, что герб и решка равновозможны), при бросании игрального кубика (выпадения любого числа очков от 1 до 6 равновозможны), либо из условия тщательного предварительного “перемешивания” исходов, как при розыгрыше лотереи, игре в карты, “Домино” и т.п.

Событие *B* называется *благоприятствующим* событию *A*, если наступление события *B* влечет за собой наступление события *A*.

Так, если *A* – появление четного числа очков при бросании игрального кубика, то появление цифры 4 представляет собой событие, благоприятствующее событию *A*.

Пусть события $E_1, E_2, \ldots, E_N$ в данном опыте равновозможны, попарно несовместны, в результате любого опыта одно из них обязательно должно произойти. Будем называть их *исходами* испытания. Предположим, что событию *A* благоприятствуют *M* исходов испытания. Тогда вероятностью события *A* в данном опыте называют отношение *M/N*. Итак, мы приходим к следующему определению.

Вероятностью P (A) события в данном опыте называется отношение числа M исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу N равновозможных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{M}{N} \tag{1.1}$$

Пример: Пусть испытание состоит в подбрасывании двух монет: 5 и 10 рублей. Тогда множество исходов будет содержать четыре события: {ГГ, ГР, РГ, РР}, Г – герб, Р – решка, первая буква относится к монете 5 рублей, вторая - к монете 10 рублей, N = 4. Пусть событие А = {ГГ} (выпадение двух гербов), тогда $M_A = 1$; В = {ГР, РГ} (выпадение ровно одного герба), в этом случае $M_B = 2$, С = {ГГ, РГ, ГР} (выпадение хотя бы одного герба), здесь $M_C = 3$. Тогда по формуле (1.1) вероятности событий равны:

$$P(A) = 1/4, \quad P(B) = 2/4 = 1/2, \quad P(C) = 3/4.$$

Для решения подобных задач часто используются элементы ***комбинаторики***. Пусть Ω_n - множество, состоящее из n различных элементов (любой природы). Элементы конечного множества всегда можно занумеровать, и оно станет *упорядоченным*. Упорядоченные множества считаются разными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. В дальнейшем мы будем рассматривать подмножества Ω_n, упорядоченные и неупорядоченные, удовлетворяющие определенным условиям.

Перестановки: любое расположение в определенном порядке элементов множества Ω_n называется п*ерестановкой из n элементов* этого множества. Другими словами, *перестановки* – это упорядоченные множества, состоящие из всех элементов данного множества Ω_n и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения. Например для Ω_n={1, 2, 3, 4} (n=4) имеют место перестановки: {4, 2, 3, 1}, {2, 3, 1, 4}, {3, 4, 2, 1} и т.д., всего 4!=24 перестановки. Вообще из *n* элементов можно составить *n!* перестановок (докажите самостоятельно).

Размещения: упорядоченное подмножество из *k* элементов данного множества Ω_n называется *размещением* из n элементов по k. ($k \le n$). Как и перестановка, размещение – это упорядоченное множество, но в отличие от перестановки в него входят, вообще говоря, не все элементы множества Ω_n. Например, для Ω_4={1, 2, 3, 4}и *k=3* *размещениями* будут : {1, 2, 3}, {3, 4, 1}, {2, 4, 3} и т.д., всего 24 размещения. Количество всех размещений из *n* по *k* обозначают символом A_n^k и, можно подсчитать (упражнение читателю), что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетания: любое подмножество из k элементов данного множества Ω_n называется *сочетанием* из n элементов по k. ($k \le n$). Сочетание отличается от размещения тем, что в нем не важен порядок следования элементов. Например, для Ω_4 ={1, 2, 3, 4}и *k=3 сочетаниями* будут : {1, 2, 3}, {1, 3, 4,}, {2, 4, 3}, {1, 2, 4} всего 4 сочетания. Количество всех сочетаний из n по k обозначают символом C_n^k и, можно подсчитать (упражнение читателю), что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример: 8 шаров, из них 5 белых и 3 черных, произвольным образом раскладывают поровну (т.е. по 4 шара) по двум урнам. Какова вероятность того, что в одной из урн окажется 4 белых шара?

Решение. Зафиксируем одну из двух урн. Количество способов выбрать 4 шара из имеющихся восьми равно $C_8^4 = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$. То есть количество всех элементарных исходов *N=70.* Число благоприятных исходов М, т.е. количество способов выбрать 4 белых шара из имеющихся пяти равно $C_5^4 = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$. По формуле (1.1) получаем

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}.$$