Решение типового варианта

1. При измерении окружности груди у 25 спортсменов установлено, что у троих этот объем равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. СВ X – окружность груди спортсмена. Записать закон распределения СВ X. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение σ_x. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

▶ Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди, равной 88 см, $p_1 = 3/25 = 0,12$. Аналогично вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди 92 см $p_2 = 4/25 = 0,16$ и т.д. Получаем закон распределения в виде следующей таблицы:

X	88	92	96	98	100
p	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28

Далее находим:

$$M(X) = 88 \cdot 0,12 + 92 \cdot 0,16 + 96 \cdot 0,20 + 98 \cdot 0,24 + \\ + 100 \cdot 0,28 = 96,$$

$$M(X^2) = 88^2 \cdot 0,12 + 92^2 \cdot 0,16 + 96^2 \cdot 0,20 + 98^2 \cdot 0,24 + \\ + 100^2 \cdot 0,28 = 9231,68,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X^2))^2 = 9231,68 - 96^2 = 15,68,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 3,96;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 88, \\ 0,12 & \text{при } 88 < x \le 92, \\ 0,28 & \text{при } 92 < x \le 96, \\ 0,48 & \text{при } 96 < x \le 98, \\ 0,72 & \text{при } 98 < x \le 100, \\ 1 & \text{при } 100 < x. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 18.18. ◀

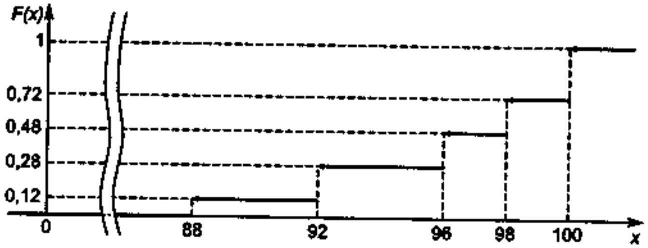

Рис. 18.18

2. Дана функция распределения СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2/4 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок [0,5; 1,5]. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

▶ Так как $0 \le x \le 2$ и $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x/2 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Далее вычисляем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$M(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = 2,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - 16/9 = 2/9,$$

$$P(0,5 \le X \le 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = (1,5)^2/4 -$$

$$-(0,5)^2/4 = 0,5.$$

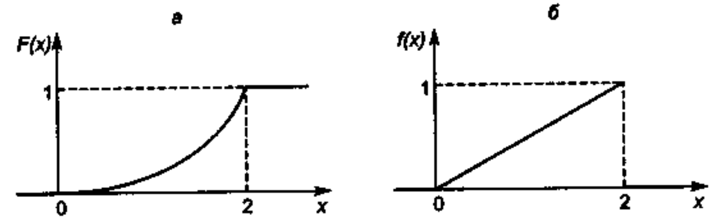

Рис. 18.19

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ приведены на рис. 18.19, *а*, *б*. ◀

3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания СВ X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания СВ X в интервал (35; 40)?

▶ Согласно формуле (18.18) и прил. 4, находим:

$$P(10 \le X \le 15) = \Phi\left(\frac{15 - 12,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 12,5}{\sigma}\right) = 0,2,$$

$$\Phi\left(\frac{2,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,2, \; 2\Phi\left(\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,2, \; \Phi\left(\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,1,$$

откуда $2,5/\sigma = 0,25$, $\sigma = 2,5/0,25 = 10$.

Далее вычисляем:

$$P(35 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40 - 12,5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{35 - 12,5}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2,75) - \Phi(2,25) = 0,4970 - 0,4878 = 0,0092. ◀$$