Проверка статистических гипотез

Модуль 3. Элементы математической статистики

Лекция 7. Проверка статистических гипотез

1. Общие принципы проверки статистических гипотез. Статистический критерий. Статистика критерия, функция критерия.

2. Ошибки первого и второго рода в математической статистике.

3. Проверка гипотез о параметрах распределения, критерии Стьюдента, Фишера.

4. Проверка гипотез о законе распределения случайной величины с помощью критерия χ^2- Пирсона.

ФАЙЛЫ:

- МС_ Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. МИСИС. Статистика 2770
- 2770 Проверка гипотез: С. 25- 43; 74-77
- Основная таблица для проверки гипотез.
- Таблица квантилей

Статистическая гипотеза -

это <u>предположение</u>

- о виде закона неизвестного распределения

или

- о параметрах известного распределения.

Проверка статистической гипотезы

заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей, вычисленных по данным выборки, со значениями этих же показателей, определенных теоретически в предположении, что проверяемая гипотеза верна.

НУЛЕВАЯ И КОНКУРИРУЮЩАЯ ГИПОТЕЗЫ

- ***Выдвинутая (нулевая)***
- ***Конкурирующая (альтернативная).***

Выдвинутая (нулевая) гипотеза H_0 – гипотеза, подлежащая проверке.

Конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 – каждая допустимая гипотеза, отличная от нулевой.

Пример:

H_0 - математическое ожидание M(X) нормального распределения равно 10; **H_0: $M(X)=10$.**

H_1 - может состоять в предположении, что

а) M(X) не равно 10;

б)больше 10;

в) меньше 10, т.е.

H_1: а)$M(X)\neq 10$; б)$M(X)>10$; в)$M(X)<10$

Ошибки проверки статистических гипотез

Ошибка первого рода **или «ложная тревога»: отклонить правильную гипотезу.**

Вероятность ошибки первого рода называется <u>уровнем значимости и обозначается α.</u>

Ошибка второго рода **или «пропуск цели»: принята неверная гипотеза.**

Вероятность ошибки второго рода обозначается β. Величина 1-β называется мощностью критерия.

Наиболее часто используют α=0,05, это означает, что в 5 случаях из 100 имеется риск допустить ошибку первого рода, т.е. отклонить правильную гипотезу.

Вероятность ошибки второго рода, как правило, неизвестна, но известно, что при уменьшении ошибки первого рода, ошибка второго рода, как правило, возрастает.

ПРИМЕР ОШИБКИ 1-ГО И 2-ГО РОДА

- Работу металлодетектора можем рассматривать как работу прибора по проверке гипотезы Н0 : у проходящего через металлодетектор нет оружия.
- *Ошибка первого рода* (ложная тревога) — задержать человека, у которого нет оружия, но могут быть мелкие металлические предметы (ключи, монеты, пуговицы).
- *Ошибка второго рода* — пропустить человека с оружием. Повышение чувствительности прибора приводит к увеличению ошибки I рода

Результаты проверки статистических гипотез

		Верная гипотеза	
		H_0	H_1
Результат применения критерия	H_0	H_0 верно принята	H_0 неверно принята (Ошибка *второго* рода)
	H_1	H_0 неверно отвергнута (Ошибка *первого* рода)	H_0 верно отвергнута

Статистический критерий

- это однозначно определенное правило, устанавливающее условия, при которых проверяемую нулевую гипотезу H_0 следует отвергнуть или констатировать, что нет оснований ее отвергнуть, т.е. принять.

Для этого используют специально подобранную случайную величину, распределение которой известно:

- U или Z - распределение нормальное;
- F - по закону Фишера;
- χ^2 - по закону «хи квадрат»;
- t - по распределению Стьюдента.

Статистика критерия (статистика)

Статистикой критерия или функцией критерия называют некоторую функцию от выборочных данных

$$Q=Q(X_1, X_2, \ldots, Xn).$$

Она служит для проверки гипотезы H_0.

Эмпирическим значением критерия (статистикой) $К_{эмп}$ или $К_{экс}$ называют значение функции критерия

$$Q=Q(X_1, X_2, \ldots, Xn)= К_{экс}$$

вычисленное по данным выборки.

Критическая область и область принятия гипотезы

Для критерия множество всех его возможных значений разбивается на два подмножества:

- **критическая область: состоит из значений критерия, при которых H_0 отвергается;**

- **область принятия гипотезы: состоит из значений критерия, при которых H_0 принимается.**

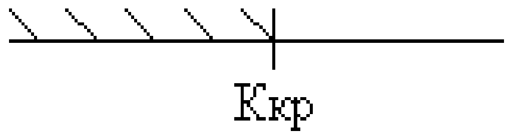
Критической точкой $K_{кр}$ (границей) называют точку (квантиль), отделяющую критическую область от области принятия гипотез.

Вид критической области

1. Односторонняя критическая область:

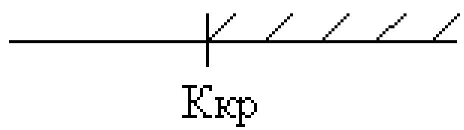
- Левосторонняя – определяется неравенством $К<К_{кр}$

(а)



- Правосторонняя – определяется неравенством $К>К_{кр}$

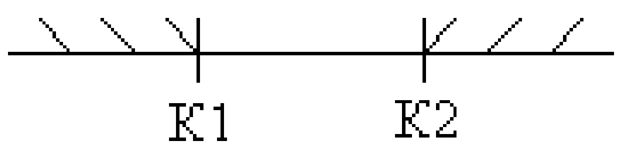
(б)



2. Двусторонняя – определяется двумя неравенствами

$К<К_1$ и $К>К_2$; $К_1 < К_2$

(в)



Основной принцип проверки гипотез:

- если наблюдаемое значение критерия Кэкс принадлежит критической области — гипотезу H_0 отвергают,
- если Кэкс принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу H_0 принимают

- $К_{кр}$ и критическая область определяются заданным уровнем значимости α, объемом выборки, видом конкурирующей гипотезы и выбранным критерием.

- Если экспериментальное значение критерия (статистики) $К_{эмп}$ принадлежит критической области, нулевую гипотезу H_0 отвергают и принимают конкурирующую гипотезу H_1;

- Если экспериментальное значение критерия (статистики) $К_{эмп}$ не принадлежит критической области то нет оснований отвергать H_0 и гипотезу H_0 принимают.

Проверка статистической гипотезы.

По заданной выборке вычисляют значение функции Q - $К_{эмп}$ - и рассматривают два случая:

- – если **статистика $К_{эмп}$** не принадлежит критической области, то гипотеза H_0 принимается;
- – если **статистика $К_{эмп}$** принадлежит критической области, то гипотеза H_0 отвергается и принимается конкурирующая гипотеза H_1.

Пусть проверяется параметрическая гипотеза H_0: $\beta = \beta_0$; $f(x)$ – плотность распределения функции критерия Q при условии, что верна гипотеза H_0, q_p – квантиль распределения функции Q.

Возможны различные варианты формулировки альтернативной гипотезы H_1:

1. H_1: $\beta < \beta_0$. Критическая область размещается в левом «хвосте» распределения функции Q, т.е. удовлетворяет неравенству $Q < q_\alpha$ (рис. 1.4, *а*).

2. H_1: $\beta > \beta_0$. Критическая область размещается в правом «хвосте» распределения функции Q, т.е. удовлетворяет неравенству $Q > q_{1-\alpha}$ (рис. 1.4, *б*).

3. H_1: $\beta \neq \beta_0$. Критическая область размещается в обоих «хвостах» распределения функции Q, т.е. удовлетворяет совокупности неравенств $Q < q_{\alpha/2}$ и $Q > q_{1-\alpha/2}$ (рис. 1.4, *в*).

В первых двух вариантах критерий называется *односторонним*, соответственно левосторонним и правосторонним. В случае третьего варианта критерий называется *двусторонним*. Результат проверки статистической гипотезы может быть ошибочен. При этом различают ошибки первого и второго рода. Если гипотеза отвергается, в то время как она верна, совершается *ошибка первого рода*. Вероятность ошибки первого рода равна вероятности попадания функции Q в критическую область при условии, что верна гипотеза H_0, т.е. равна уровню значимости α. Если же гипотеза H_0 принимается, а в действительности верна гипотеза H_1, то совершается *ошибка второго рода*. Вероятность ошибки второго рода, как правило, неизвестна, но известно, что при уменьшении ошибки первого рода α, ошибка второго рода, как правило, возрастает.

Общая схема проверки гипотез

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.
2. Выбирается критерий, который имеет известное распределение (нормальное, t-распределение Стьюдента, Фишера и т.п.)
3. Задается α - уровень значимости; α - это вероятность допустить ошибку первого рода, т.е. отклонить верную гипотезу.
4. В соответствии с выбранным критерием по выборочным данным вычисляется эмпирическое значение статистики $К_{эмп}$.

5. По заданному уровню значимости α , известному объему выборки, виду конкурирующей гипотезы находят в таблицах для выбранного критерия критическое значение $К_{кр}$ и определяют область принятия гипотезы.

6. Рассчитанное эмпирическое значение критерия $К_{эмп}$ сравнивается с критическим $К_{кр}$. Определяют, в какую область попадает $К_{эмп}$ и по результатам сравнения делается вывод, отвергнуть гипотезу Но или нет:

- ✓ если вычисленное по выборке значение критерия $К_{эмп}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевую гипотезу Но не отвергают на заданном уровне значимости α (т.е. Но принимают, считается, что гипотеза Но не противоречит экспериментальным данным);
- ✓ если вычисленное значение критерия $К_{эмп}$ попадает в критическую область, то нулевая гипотеза H_0 отклоняется в пользу гипотезы H_1 при данном уровне значимости α .

Виды статистических критериев

1. **Параметрические** - **критерии, которые служат для проверки гипотез** ***о параметрах*** **распределений генеральной совокупности (чаще всего нормального распределения). Критерии Стьюдента, Фишера.**

2. **Непараметрические – критерии, которые служат для проверки гипотез и не используют предположений о параметрах распределении генеральной совокупности. Эти критерии не требуют знания параметров распределений, оперируют с разностями частот, рангами. Критерии хи-квадрат Пирсона, Манна-Уитни, Вилкоксона.**

Непараметрический критерий согласия служит для проверки гипотез о согласии распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка, с ранее принятой теоретической моделью. Например, критерий хи-квадрат Пирсона.

О выборе статистического критерия – см. файл Осн. Таблица Проверка гипотез.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ (РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ) ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК ОДНОГО ОБЪЕМА ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ДИСПЕРСИЯХ, КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА

- **Выдвигаются: нулевая гипотеза о равенстве средних и альтернативная, что средние не равны.**
- **Вычисляют выборочные средние арифметические в каждой выборке и статистику Стьюдента**

$$t_{эмп} = \frac{\left|\overline{x} - \overline{y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 + \sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{(n-1)\cdot n}}}$$

При заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы ($n + n - 2$) из таблиц распределения Стьюдента находят критическое значение

$t_{кр} = t_{кр}(1 - \alpha/2,\ 2n - 2)$;

- **Если $|t| > t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t| \le t_{кр}$, то принимают.**

ПРИМЕР 1 (сравнение средних, дисперсии неизвестны). **Табл. 1**

Данные диагностики по окончании традиционного обучения

Студенты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	всего	$\overline{X}$
Баллы	14	16	16	17	17	18	18	18	18	18	20	20	24	25	27	27	27	28	28	28	424	≈ 21,2

Табл. 2
Данные диагностики по окончании экспериментального обучения

Студенты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	всего	$\overline{X}$
Баллы	16	18	18	19	20	20	20	20	22	24	24	25	26	26	27	28	28	28	29	30	448	24,35

Задача:

на уровне значимости α=0,05 выяснить с помощью t-*критерия Стьюдента,* являются ли различия в показателях после традиционного и экспериментального обучения статистически значимыми.

Решение:

Сформулируем гипотезы:

нулевая гипотеза H_0 **– разница между средними показателями после традиционного и экспериментального обучения имеет лишь случайные различия, т.е. группы однородны;**

альтернативная гипотеза H_1 **– разница между средними показателями после традиционного и экспериментального обучения имеет не случайные различия, группы неоднородны.**

Решение: (для выборок одинакового объема)

$$t_{эмп} = \frac{\left|\bar{x} - \bar{y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{(n-1)\cdot n}}}$$

$$t_{эмп} \approx \frac{24{,}35 - 21{,}2}{\sqrt{\dfrac{\sum(x_i - 21)^2 + \sum(y_j - 24)^2}{(20-1)^* 20}}} = \frac{3{,}15}{\sqrt{\dfrac{814}{380}}} = \frac{3{,}15}{\sqrt{2{,}14}} = \frac{3{,}15}{1{,}46} \approx 2{,}16;$$

Число степеней свободы: 20 + 20 - 2 = 38

$t_{эмп2} = 2{,}16 \quad > \quad t_{кр} = 2{,}01$

ВЫВОД: при уровне значимости α=0,05 получаем:

$t_{эмп}$ > $t_{кр}$, поэтому гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1.

Это означает, что разница между показателями после эксперименального обучения имеет не случайные различия.

Сравнение двух дисперсий

Мат.ожидания неизвестны

Рассмотрим гипотезу о параметрах нормального распределения. Пусть имеется две серии опытов, регистрирующие значение некоторой случайной величины.

X: $x_1, x_2 \dots x_{nx}$

Y: $y_1, y_2 \dots y_{ny}$

Осуществим проверку нулевой <u>гипотезы о равенстве дисперсий при неизвестных математических ожиданиях:</u> H_0: $D_x = D_y$,

Пусть X и Y распределены нормально. По данным выборки объемов n_x и n_y подсчитаны выборочные дисперсии S_x, S_y.

При заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

Такая задача возникает при сравнении точности двух приборов, или при сравнении различных методов измерения, т.е. когда выборочные дисперсии отличаются, возникает вопрос значимости или не значимости этого различия.

Если *различие незначимое*, то имеет место нулевая гипотеза, т.е. приборы, например, имеют одинаковую точность. А различия выборочных дисперсий объясняются случайными причинами.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Если X ,Y распределены нормально, то применяется критерий Фишера

$$\mathrm{F} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_y - 1), \quad S_x^2 > S_y^2$$

По данным выборок вычисляют наблюдаемое значение статистики F как отношение большей дисперсии к меньшей:

$$\mathrm{F}_{\text{набл}} = \frac{\max(s_\mathrm{x}^2, s_\mathrm{y}^2)}{\min(s_\mathrm{x}^2, s_\mathrm{y}^2)}$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Критическая область строится в зависимости от конкурирующей гипотезы.

По таблицам распределения Фишера для заданного уровня значимости α и степеней свободы $к_x = n_x - 1$, $к_y = n_y - 1$ находят табличное значение критерия $F_{кр}$:

- для альтернативной гипотезы H_1: $D_x > D_y$
  $F_{кр} = F_{кр}(1- \alpha, к_x, к_y)$
- для альтернативной гипотезы H_1: $D_x \neq D_y$
  $F_{кр} = F_{кр}(1- \alpha/2, к_x, к_y)$

Если $F_{наб} > F_{кр}$, то H_0 отвергают на уровне значимости α .

Если $F_{наб} < F_{кр}$, то нет оснований отвергать H_0 и ее принимают на уровне значимости α.

ПРИМЕР 2 (сравнение дисперсий, мат.ожидания неизвестны):

По двум малым независимым выборкам объемов $n_x=11$ и $n_y=14$ из нормальных распределений найдены исправленные выборочные дисперсии $s^2_x=0.76$ и $s^2_y=0.38$. При уровне значимости $\alpha=0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $D_x=D_y$ о равенстве дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $Dx > Dy$.

Решение: Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = S^2_б / S^2_м = 0.76 / 0.38 = 2$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $Dx > Dy$, поэтому критическая область – правосторонняя. По таблице распределения Фишера по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числам степеней свободы

$$k_1 = n_x - 1 = 11 - 1 = 10 \text{ (для бОльшей дисперсии)}$$

$$k_2 = n_y - 1 = 14 - 1 = 13$$

находим критическое значение критерия $F_{кр}$:

$$F_{кр}(1-\alpha, kı, k2) = F_{кр}(0.95,10,13) = 2.67$$

ВЫВОД: $F_{набл} = 2 < F_{кр} = 2.67$, поэтому нет оснований отвергать гипотезу Но о равенстве дисперсий.

Другими словами, исправленные выборочные дисперсии

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при известных дисперсиях

При заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: M_x **=** $\mathbf{M_y}$ о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей, распределенных по нормальному закону, с известными дисперсиями D_x и D_y по двум выборкам большого объема n_x , n_y.

РЕШЕНИЕ Вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{эмп} = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ \sqrt{\frac{D_x}{n_x} + \frac{D_y}{n_y}}$$

Построить критическую область в зависимости от конкурирующей гипотезы: при конкурирующей гипотезе H_1: $M_x \neq M_y$ $\boldsymbol{U_{кр}}$ находят

- по таблице квантилей нормального распределения $\boldsymbol{U_{кр}} = \boldsymbol{U(1- \alpha/2)}$
- или по таблице значений функции Лапласа

находят критическое значение $\boldsymbol{U_{кр}}$ из равенства $\Phi(U_{кр}) = (1 – \alpha) /2$.

Если $|\boldsymbol{U_{эмп}}| < \boldsymbol{U_{кр}}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $|\boldsymbol{U_{эмп}}| > \boldsymbol{U_{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

- .

Проверка гипотезы о равенстве средних выборок разного объема при неизвестных дисперсиях

Постановка задачи: пусть генеральные совокупности распределены нормально, причем их дисперсии Dx и Dy заранее не известны. Взяты две выборки малого объема, требуется сравнить средние этих генеральных совокупностей.

Методика проверки задач: заключается в использовании критерия Стьюдента при условии, что генеральные дисперсии не известны, однако в предположении, что они равны между собой.

Такая задача возникает, если сравниваются средние размеры двух партий деталей, изготовленных на одном и том же станке. Естественно будет предположить, что дисперсии контролируемых размеров одинаковы.

Алгоритм проверки

Задаем уровень значимости **α** *и вычисляем статистику критерия Стьюдента*

$$t_{набл} = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) \cdot \sqrt{n_x + n_y - 2}}{\sqrt{(n_x - 1)\cdot s_x^2 + (n_y - 1)\cdot s_y^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

Строим критическую область в зависимости от конкурирующей гипотезы.

- Если $\mathbf{H_1}$**:** $\mathbf{M_x \neq M_y}$, то по таблице Стьюдента находим

$$\mathbf{t_{кр} = t_{кр}\,(1- \alpha/2,\ n_x + n_y - 2);}$$

при условии: $|t_{набл}| < t_{кр}$ нет основания отвергать нулевую гипотезу;
при условии: $|t_{набл}| > t_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают.

- Если $\mathbf{H_1}$**:** $\mathbf{M_x > M_y}$ то по таблице Стьюдента находим

$$\mathbf{t_{кр} = t_{кр}\,(1- \alpha,\ n_x + n_y - 2)}$$

при условии: $t_{набл} < t_{кр}$, нет основания отвергать нулевую гипотезу .
При условии: $t_{набл} > t_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают.

Критерий согласия: проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности

Критерием согласия *называют критерий, который используется для проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения*

Если закон распределения генеральной совокупности не известен, но есть основание предположить, что он имеет определенный вид (А), то проверяют нулевую гипотезу:

H_0: генеральная совокупность распределена по закону А.

Используется критерий согласия Пирсона (χ^2- критерий).

Обосновывается гипотеза H_0: генеральная совокупность распределена по закону (А).

Критерий Пирсона проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Пусть по выборке объема n получены эмпирические частоты, т.е. мы имеем статистическое распределение.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n'_i

При уровне значимости α требуется проверить гипотезу: генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Используем статистику гипотезы:

$$\chi^2_{эмпирич.} = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \qquad \textbf{(*)}$$

Доказано, что закон распределения случайной величины **(*)** не зависит от того, какому закону распределения относится генеральная совокупность, а стремится к закону распределения **χ²** с числом степеней свободы: **υ=k–1–r** , где

k – число групп (интервалов) выборки,

r – число параметров предполагаемого распределения.

Для нормального распределения число степеней свободы **υ=k–3**

Критерий Пирсона проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу **H_0** : “генеральная совокупность распределена нормально”, необходимо:

1. вычислить теоретические частоты n'_i ;
2. вычислить наблюдаемое значение критерия: $$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$
3. по таблицам критических значений χ2 при заданном уровне значимости и числу степеней свободы **υ = k–3**, найти критическое значение:

$\chi^2_{кр}(1-\alpha,\upsilon)$;

4. сравнить **$\chi^2_{набл}$ и $\chi^2_{кр}$** :

- если **$\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$** - нет основания отвергать нулевую гипотезу о нормальном распределении.
- если **$\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$** - нулевую гипотезу о нормальном распределении отвергают.

<u>Замечание:</u>

- объем выборки должен быть достаточно велик (не менее 50);
- малочисленные группы (меньше 5) следует объединять в одну, суммируя частоты;
- допускается сравнение только абсолютных, но не относительных частот.

Пример 3. Проверка закона распределения генеральной совокупности

Проверить гипотезу о нормальном распределении выборки при **α=0,1**

Номер интервала i	Границы интервала	Частота n_i
1	10–12	2
2	12–14	4
3	14–16	7
4	16–18	11
5	18–20	15
6	20–22	8
7	22–24	3

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Объем выборки n = 50. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при **α=0,1**

Вычисляем $\bar{x} = 17{,}76$, $s^2 \approx 8{,}798$,

Гипотеза H_0 : данная выборка является выборкой значений случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами

а=17,76 и $\sigma = \sqrt{8{,}798} = 2{,}966$

Пример 3. Проверка закона распределения генеральной совокупности

Воспользуемся данными семью интервалами группировки, расширив первый и последний интервалы. Вероятности p_k вычисляем по формуле для нормального распределения:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_k) = \Phi_0\left(\frac{b_k - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a_k - a}{\sigma}\right),\ k = 1,2,\ldots,7,$$

где a_k и b_k — соответственно нижняя и верхняя границы интервала Δ_k, а значения функции $\Phi_0(x)$ берутся из таблицы 1. Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

k	Δ_k	n_k	p_k	np_k	n_k	np_k	$n_k - np_k$	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
1	$-\infty$–12	2	0,0026	0,13				
2	12–14	4	0,0994	4,97	6	5,1	0,9	0,159
3	14–16	7	0,1756	8,78	7	8,78	–1,78	0,361
4	16–18	11	0,2543	12,715	11	12,715	–1,715	0,231
5	18–20	15	0,2445	12,225	15	12,225	2,775	0,630
6	20–22	8	0,1472	7,36	11	11,18	–0,18	0,003
7	22–$+\infty$	3	0,0764	3,82				
	Сумма	50	1	50	50	50	0	1,384

Пример 3. Проверка закона распределения генеральной совокупности

Здесь k — номер интервала, Δ_k — границы k-го интервала, n_k — наблюдаемая частота, $p_k = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_k)$ — вероятность попадания в интервал Δ_k в предположении справедливости гипотезы H_0, np_k — ожидаемая частота. В шестом и седьмом столбцах приведены значения n_k и np_k после объединения двух первых и двух последних интервалов (для первого, второго и седьмого интервалов не выполняется условие $np_k \geq 5$). Последняя строка таблицы служит для контроля.

Так как после объединения осталось $r = 5$ интервалов, а по выборке определены оценки двух неизвестных параметров распределения, т.е. $l = 2$, число степеней свободы $m = 5 - 2 - 1 = 2$. По таблице 3 находим $\chi^2_{0,90;2} \approx 4,61$. Выборочное значение статистики равно $\chi^2 \approx 1,384$, т.е. $\chi^2 < \chi^2_{0,90;2}$; следовательно, гипотеза о нормальном распределении выборки согласуется с результатами наблюдений и ее можно принять. ■

Пример 4. Проверка закона распределения генеральной совокупности

Пример 1. Можно ли признать монету симметричной, если при 100 подбрасываниях «орел» выпал 40 раз? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

□ Рассмотрим случайную величину ξ, которая принимает значение 1, если при подбрасывании монеты выпадает «орел», и 0 — в противном случае. Результатом опыта является выборка объема $n = 100$, содержащая 60 нулей и 40 единиц. Тогда гипотеза о симметричности монеты эквивалентна гипотезе H_0: $\mathbf{P}(\xi = 0) = 0{,}5$ и $\mathbf{P}(\xi = 1) = 0{,}5$. Положим $\Delta_1 = \{0\}$, $\Delta_2 = \{1\}$. Тогда $p_1 = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_1) = 0{,}5$, $p_2 = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_2) = 0{,}5$; наблюдаемые частоты $n_1 = 60$, $n_2 = 40$; ожидаемые частоты $np_1 = np_2 = 50$. Вычисляем выборочное значение статистики χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2} = 4.$$

Находим по таблице 3 квантиль порядка $1 - 0{,}05 = 0{,}95$ распределения χ^2 с $m = 2 - 1 = 1$ степенью свободы ($r = 2$, $l = 0$): $\chi^2_{0,95;1} \approx 3{,}84$. Так как $\chi^2 > \chi^2_{0,95;1}$, то гипотеза H_0 отвергается, т.е. монету следует признать несимметричной. Принимая это решение, мы ошибаемся с вероятностью 0,05, т.е. с вероятностью 0,05 наблюдавшийся результат возможен для симметричной монеты. ■