ЛЕКЦИЯ 9

- Понятие о линейном пространстве.
- Линейная зависимость и независимость векторов.
- Свойства линейно зависимых и независимых систем элементов линейного пространства.
- Базис в линейном пространстве.
- Формулировка леммы о двух базисах.
- Размерность линейного пространства.

Линейное пространство.

Мы рассматривали множество геометрических векторов в пространствах R^2 и R^3, для которых операции сложения векторов и умножения их на число удовлетворяют 8 свойствам:

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in R$

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$,

3) $\exists \vec{0} \in V : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$,

4) $\forall \vec{x} \in V \ \exists (-\vec{x}) \in V \, / \, \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$,

5) $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$,

6) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$,

7) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$,

8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Можно привести примеры других множеств, для которых операции сложения и умножения на число обладают такими же свойствами. Множество элементов различной природы – геометрических векторов, матриц, функций можно охарактеризовать общими свойствами линейности. Эти свойства выделяются в систему аксиом, определяющих общее понятие линейного пространства.

Определение. Непустое множество V элементов произвольной природы называется *линейным* (векторным) *пространством*, если в нем определены две операции (сложения и умножения на число):

1. Для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ определен элемент $\vec{x} + \vec{y} \in V$, называемый *суммой*.
2. Для $\forall \vec{x} \in V$ и $\forall \alpha \in R$ определен элемент $\alpha \vec{x} \in V$, называемый *произведением* элемента на число α.

Причем указанные операции подчиняются следующим аксиомам, называемым аксиомами линейного пространства:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad \text{и} \quad \forall \alpha, \beta \in R$$

1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (коммутативность по сложению);

2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (ассоциативность по сложению);

3) $\exists\vec{0}\in V:\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ (нулевой элемент);

4) $\forall\vec{x}\in V\ \exists(-\vec{x})\in V\,/\,\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ (противоположный элемент);

5) $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$ (ассоциативность умножения);

6) $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ (дистрибутивность умножения);

7) $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$;

8) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Замечание.

Элементы линейного пространства называются векторами.

Примеры линейных пространств.

1) множество геометрических векторов $\mathbb{R}^2$, заданных на плоскости, для которых операции сложения векторов и умножения их на число определены ранее;

2) множество геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, заданных в пространстве, для которых операции сложения векторов и умножения их на число определены ранее;

3) множество упорядоченных наборов из n чисел $\mathbb{R}^n$, или пространство строк длины n, где операции сложения векторов и умножения их на число определяются следующим образом:

$$\vec{x} + \vec{y} = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\right),$$

$$\lambda\vec{x} = \left(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\right),$$

где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n).$

4) Множество $C_{[a,b]}$ всех функций, непрерывных на отрезке [a, b], с естественным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на число.

5) Множество P_n многочленов, степени не выше n, с естественным образом введенными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

6) Множество $P = \{x, x \in \Re_+\}$ положительных действительных чисел не является линейным пространством, если операции сложения и умножения на число ввести обычным образом, так как, например, если $\lambda<0$, то элемент $\lambda x \notin \Re_+$.

7) Множество $P = \{x, x \in \Re_+\}$ является линейным пространством, если операции сложения и умножения на число ввести следующим образом:

$$"x + y" = x \cdot y, "\lambda \cdot x" = x^{\lambda}.$$

Свойства линейного пространства.

1. Нулевой элемент единственный.

Доказательство.

Пусть существуют два нулевых элемента $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$.

$$\vec{0}_2 \overset{3}{=} \vec{0}_2 + \vec{0}_1 \overset{1}{=} \vec{0}_1 + \vec{0}_2 \overset{3}{=} \vec{0}_1.$$

2. $\forall \vec{x} \in V \quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$

Доказательство.

$$0 \cdot \vec{x} \overset{3}{=} 0 \cdot \vec{x} + \vec{0} \overset{4}{=} 0 \cdot \vec{x} + (\vec{x} + (-\vec{x})) \overset{2}{=} (0 \cdot \vec{x} + \vec{x}) + (-\vec{x}) \overset{6}{=}$$

$$= (0 + 1) \cdot \vec{x} + (-\vec{x}) = 1 \cdot \vec{x} + (-\vec{x}) \overset{8}{=} \vec{x} + (-\vec{x}) \overset{4}{=} \vec{0}.$$

3. $\forall \vec{x} \in V \quad (-1)\cdot\vec{x} = -\vec{x}.$

Доказательство.

$$(-1)\cdot\vec{x} \overset{3}{=} (-1)\cdot\vec{x} + \vec{0} \overset{4}{=} (-1)\cdot\vec{x} + (\vec{x} + (-\vec{x})) \overset{2}{=}$$

$$= ((-1)\vec{x} + \vec{x}) + (-\vec{x}) \overset{8}{=} ((-1)\cdot\vec{x} + 1\cdot\vec{x}) + (-\vec{x}) =$$

$$\overset{6}{=} (-1+1)\cdot\vec{x} + (-\vec{x}) = 0\cdot\vec{x} + (-\vec{x}) \overset{сл.2}{=} \vec{0} + (-\vec{x}) \overset{1}{=} (-\vec{x}) + \vec{0} \overset{3}{=} -\vec{x}.$$

4. $\forall \alpha \in \Re \quad \alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}.$

Доказательство.

$$\alpha\cdot\vec{0} \overset{3}{=} \alpha\cdot\vec{0} + \vec{0} \overset{4}{=} \alpha\cdot\vec{0} + (\alpha\cdot\vec{0} + (-\alpha\cdot\vec{0})) \overset{2}{=} (\alpha\cdot\vec{0} + \alpha\cdot\vec{0}) + (-\alpha\cdot\vec{0}) \overset{7}{=}$$

$$\overset{7}{=} \alpha\cdot(\vec{0} + \vec{0}) + (-\alpha\cdot\vec{0}) \overset{3}{=} \alpha\cdot\vec{0} + (-\alpha\cdot\vec{0}) \overset{4}{=} \vec{0}.$$

5. Противоположный элемент единственный.

Доказательство. Пусть существуют два противоположных элемента $(-\vec{x})_1$ и $(-\vec{x})_2$.

$$(-\vec{x})_2 \overset{3}{=} (-\vec{x})_2 + \vec{0} \overset{4}{=} (-\vec{x})_2 + (\vec{x} + (-\vec{x})_1) \overset{2}{=} ((-\vec{x})_2 + \vec{x}) + (-\vec{x})_1 \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} \vec{0} + (-\vec{x})_1 \overset{1}{=} (-\vec{x})_1 + \vec{0} \overset{3}{=} (-\vec{x})_1.$$

6. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \exists! \ \vec{z} \,/\, \vec{x} + \vec{z} = \vec{y}.$

7. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \alpha \in \Re \quad \alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} - \alpha \cdot \vec{y}.$

8. $\forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in \Re \quad (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} - \beta \cdot \vec{x}.$

Свойства 6-7 доказать самостоятельно.

Замечания.

1. Противоположным элементом для нулевого элемента является он сам.
2. Противоположным элементом для элемента $(-\vec{x})$ является элемент $\vec{x}$.

Линейная зависимость и независимость векторов.

Определение. Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ линейного пространства V называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0\right)$, такие что линейная комбинация этих векторов равна нулю:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}.$$

Определение. Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ линейного пространства V называется *линейно независимой,* если равенство нулю их линейной комбинации возможно только в случае одновременного равенства нулю всех коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Свойства линейно зависимых и независимых систем элементов линейного пространства.

Лемма 1.

Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ Л.З. тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

Доказательство.

1.Пусть $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.З.

Тогда $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\ \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2>0\right)$, такие что

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}.$$

Так как не все α_i равны нулю, то $\exists\alpha_k\neq 0$. Тогда

$$\alpha_k\vec{x}_k=-\alpha_1\vec{x}_1-\alpha_2\vec{x}_2-\ldots-\alpha_{k-1}\vec{x}_{k-1}-\alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1}-\ldots-\alpha_n\vec{x}_n$$

Разделим на $\alpha_k\neq 0$.

$$\vec{x}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{x}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{x}_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{x}_n \Rightarrow$$

$$\vec{x}_k = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n\vec{x}_n \Rightarrow$$

Вектор $\vec{x}_k$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n$.

2. Пусть $\vec{x}_k = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n\vec{x}_n$.

Так как в линейном пространстве $\vec{x}_k + (-\vec{x}_k) = \vec{0}$, то

$$\mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n\vec{x}_n + (-\vec{x}_k) = \vec{0},$$

где не все коэффициенты μ_i равны 0 $(\mu_k = -1)$. Следовательно, система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ Л.З.

Лемма 2. Пусть система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З. Тогда вектор $\vec{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ тогда и только тогда, когда система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{b}\}$ – Л.З.

Доказательство.

1.Пусть $\vec{b} = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n$.

Тогда по лемме 1 система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{b}\}$ – Л.З.

2.Пусть система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{b}\}$ – Л.З. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 > 0\right)$, такие что

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n + \alpha_{n+1}\vec{b} = \vec{0} \quad (*).$$

По условию леммы система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З. $\Rightarrow$

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

А значит, $\alpha_{n+1} \neq 0$. Следовательно, разделив выражение (*) на число $\alpha_{n+1} \neq 0$, получим

$$\vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\vec{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\vec{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\vec{x}_n .$$

Лемма 3. Пусть вектор $\vec{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Тогда это выражение единственно тогда и только тогда, когда система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З.

Доказательство.

1. Пусть $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З.

Доказываем методом от противного. Предположим, что

$$\vec{b} = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n.$$

Из свойств линейного пространства

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}.$$

Тогда $\vec{b} + (-\vec{b}) = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n + (-\alpha_1\vec{x}_1 - \alpha_2\vec{x}_2 - \ldots - \alpha_n\vec{x}_n) = \vec{0} \Rightarrow$

$$(\mu_1 - \alpha_1)\vec{x}_1 + (\mu_2 - \alpha_2)\vec{x}_2 + \ldots + (\mu_n - \alpha_n)\vec{x}_n = \vec{0}.$$

Так как векторы $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З., то равенство нулю их линейной комбинации возможно только в случае одновременного равенства нулю всех коэффициентов

$$(\mu_1 - \alpha_1) = (\mu_2 - \alpha_2) = \ldots = (\mu_n - \alpha_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu_1 = \alpha_1, \mu_2 = \alpha_2, \ldots, \mu_n = \alpha_n.$$

Получили противоречие, следовательно, вектор $\vec{b}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.

2. Пусть система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – л.з. Тогда $\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2 > 0\right)$, такие что

$$\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n = \vec{0}.$$

$$\vec{b} = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n = \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n + \vec{0} =$$

$$= \mu_1\vec{x}_1 + \mu_2\vec{x}_2 + \ldots + \mu_n\vec{x}_n + \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n =$$

$$= (\mu_1 + \beta_1)\vec{x}_1 + (\mu_2 + \beta_2)\vec{x}_2 + \ldots + (\mu_n + \beta_n)\vec{x}_n.$$

Получили два различных разложения вектора $\vec{b}$ по векторам

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.

Следствия.

1. Если среди векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ есть нулевой вектор, то эти векторы Л.З.

Доказательство. $0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{0} + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$

(коэффициент при нулевом векторе не равен нулю, а все остальные коэффициенты равны нулю).

2. Если среди элементов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ любые *k* элементов (*k*<*n*) Л.З. , то система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.З.

3. Если система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ – Л.Н.З., то для любого $k < n$ подмножество из *k* элементов Л.Н.З.

4.Система, состоящая из одного вектора, Л.З. тогда и только тогда, когда это нулевой вектор.

5.Система, состоящая из двух ненулевых векторов, во множестве всех геометрических векторов в пространстве, Л.З. тогда и только тогда, когда эти вектора коллинеарные.

6. Система, состоящая из трех ненулевых векторов, во множестве всех геометрических векторов в пространстве, Л.З. тогда и только тогда, когда эти вектора компланарные.

7.Система, состоящая из четырех векторов, в множестве всех геометрических векторов в пространстве, всегда Л.З.

Базис и координаты вектора.

Определение.

Базисом $\mathbb{B}$ линейного пространства *V* называется упорядоченная линейно независимая система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ из этого пространства, таких, что любой вектор $\vec{x} \in V$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \qquad (*)$$

Выражение (*) называют *разложением вектора* по базису $\mathbb{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, а числа $x_1, x_2, \ldots x_n$ – *координатами вектора* $\vec{x}$ в базисе $\mathbb{B}$.

Замечание.

В линейном пространстве может быть задано несколько базисов, но все базисы пространства состоят из одинакового числа векторов. Если базис пространства V состоит из n векторов, то говорят, что пространство n-мерно (обозначают V^n).

Утверждение.

Любой элемент линейного пространства может быть разложен по базису $\mathbb{B} = \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \right\}$ единственным образом.

Данное утверждение следует из леммы 3.

Линейные операции в координатной форме.

Пусть в линейном пространстве V задан базис $\mathbb{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Тогда для любых элементов $\vec{x}, \vec{y} \in V$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n;$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n.$$

Утверждение. 1) $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;

2) $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Доказательство:

1) $\vec{x} + \vec{y} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n =$

$= (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{e}_n \Rightarrow$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

2) $\lambda\vec{x} = \lambda(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = \lambda x_1\vec{e}_1 + \lambda x_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda x_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Определение.

Линейное пространство V, в котором существует n линейно независимых элементов, но нет линейно независимых систем с большим числом векторов, называется n-мерным.

Обозначение: $\dim V = n$.

Определение.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

Примеры.

1) $\dim \Re^2 = 2, \quad \dim \Re^3 = 3.$

2) $P = \{x, x \in \Re_+\}, "x+y" = x \cdot y, "\lambda \cdot x" = x^\lambda, \vec{0} = 1, (-x) = 1/x$

Базис этого пространства состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое положительное число $x_0 \neq 1$, так как для $\forall x \ \exists \lambda : x = x_0^\lambda (\lambda = \log_{x_0} x)$.

$\dim P = 1.$

Теорема

Пусть $\dim V = n$. Тогда любые *n* линейно независимых элементов этого пространства образуют его базис.

Доказательство:

Пусть $\dim V = n$. Тогда существует *n* линейно независимых элементов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \in V$, а любые $(n+1)$ элементы линейно зависимы $\Rightarrow \forall \vec{x} \in V$

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}, \vec{x} - \text{Л.З.} \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 > 0 \right):$$

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n + \lambda_{n+1} \vec{x} = 0,$$

$$\lambda_{n+1} \vec{x} = -\lambda_1 \vec{e}_1 - \lambda_2 \vec{e}_2 - \ldots - \lambda_n \vec{e}_n$$

$$\lambda_{n+1} \neq 0, \text{так как } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n - \text{Л.Н.З.} \Rightarrow$$

$$\vec{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \vec{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} \vec{e}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \vec{e}_n \Rightarrow$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n -$ образуют базис.

Следствия.

1) В n-мерном линейном пространстве любую упорядоченную линейно независимую систему из $k<n$ элементов можно дополнить до базиса.
2) Все базисы конечномерного линейного пространства содержат одно и тоже число векторов.

Определение.

Непустое подмножество H линейного пространства V называется линейным подпространством, если выполнены следующие условия:

$$1)\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in H;$$

$$2)\ \forall \vec{x} \in H, \lambda \in \Re \Rightarrow \lambda\vec{x} \in H.$$

Определение. Пусть в линейном пространстве V задана система векторов $X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$. Множество $L(X)$ всех векторов пространства V, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$, называется линейной оболочкой данной системы векторов.
Множество $L(X)$ является линейным подпространством пространства V.

$$L(X) = \left\{ \vec{x} \,/\, \vec{x} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{x}_i, \vec{x}_i \in V, \alpha_i \in \Re, q \in \mathrm{N} \right\}$$

Замечание. Линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

Пример.

Пусть $X = \left\{1, x, \ldots, x^n\right\}$ - набор одночленов. Тогда $L(X)$ - совокупность всех многочленов степень которых не превышает n.

Свойства линейной оболочки.

1. $L(X)$ содержит само множество X.
2. Является подпространством линейного пространства V.
3. Наименьшее подпространство линейного пространства V, содержащее множество X.

Определение. Рангом системы векторов в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки этой системы векторов.

Теорема. Ранг системы векторов линейного пространства V равен:

1)максимальному количеству линейно независимых векторов данной системы;

2)рангу матрицы, составленной по столбцам из координат векторов в каком-либо базисе линейного пространства V.

Определение. Пусть H – некоторое подпространство линейного пространства V, тогда множество

$$H+\vec{x}_0=\left\{\vec{x}\in V \,/\, \vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}_0, \vec{x}'\in H, \vec{x}_0\in V\right\}$$

называется линейным многообразием, полученным сдвигом подпространства H на вектор $\vec{x}_0$.