Типовой билет 3 к.р.

1. Решить матричное уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.(б) Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 8-x^2 & -2 & 6 \\ 8 & 6 & 2x^2-18 & 10 \\ 5 & 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} \le 0$

2. Найти в векторной форме решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 5x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 13x_4 - 2x_5 = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

3. Дано линейное пространство, образованное линейными комбинациями векторов: $\vec{a}_1(8, 4, 4, 8, 4)$, $\vec{a}_2(6, 3, 3, 6, 3)$, $\vec{a}_3(-7, -8, 1, -1, -5)$, $\vec{a}_4(4, 2, 2, 4, 2)$ и $\vec{a}_5(2, 7, -5, -6, 3)$. Найти его размерность, какой-нибудь базис и выразить через этот базис остальные векторы системы.

3.(б) Проверить ортогональность системы векторов в пространстве R^4: $\bar{a}_1$=(1; -2; 1; 3), $\bar{a}_2$=(2; 1; -3; 1) и дополнить ее до ортогонального базиса.

3(с) . Найти ранг и ортонормированный базис системы векторов: $\bar{a}_1$=(2; 2; –1; 1), $\bar{a}_2$=(1; –5; 3; 1), $\bar{a}_3$=(3;– 3; 2; 2) и $\bar{a}_4$=(2; 8; –7; 3).

3(д) Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

4. Линейный оператор А в базисе $\{\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{e}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}\}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейный оператор С в базисе $\{\vec{e}_1 = 3\vec{i} + \vec{j}, \vec{e}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{j}\}$ − матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора А+С в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

4. (б) Дано: $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$, А$\bar{x} = \{2x_2 + x_3; 3x_1 - 4x_2; x_1 - x_2\}$, В$\bar{x} = \{x_1 + x_3; x_2; 2x_1\}$. Доказать, что данные операторы являются линейными, и найти (AB)$\bar{x}$.

4. (в)Найти матрицу перехода от базиса В $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ к базису В′ $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$, если $\bar{e}_1$=(9; 6), $\bar{e}_2$=(-8; 11), $\bar{e}_1'$=(-1; 3), $\bar{e}_2'$ =(2; 1).

4.(с)Доказать линейность и найти матрицу оператора проектирования на плоскость 3x+2y-z=5 (в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$).

4(д) Найти координаты вектора $\bar{a}$ (2, 0, 1) в базисе :{ $\bar{e}_1$=(1; 3; 2), $\bar{e}_2$=(1; 4; 3), $\bar{e}_3$=(2; 2; 1)}.

4.(е) Доказать линейность оператора $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, A(\bar{x}) = [\bar{b}, [\bar{a}, \bar{x}]]$, где $\bar{a} = (1, -2, 3), \bar{b} = (0, -2, 1)$. Найти его матрицу в каноническом базисе. Является ли этот оператор обратимым? Если является, то найти матрицу обратного оператора в каноническом базисе.

4.(ж). Линейный оператор A в базисе $\mathrm{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&5&3\\0&4&1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора А в базисе, полученном поворотом базиса В на угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ вокруг орта $\bar{i}$.

4.(з) Линейный оператор A в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j},k\}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}2&4&0\\1&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\bar{e}_1(-1;\ 1;\ -2),\ \bar{e}_2(-1;\ 2;\ 1),\bar{e}_3(1;\ -1;\ 1)\}$.

4.(и) Дана матрица линейного оператора А=$\begin{pmatrix}1&4\\5&-2\end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1$=(2; -3), $\bar{a}_2$=(1; -2). Найти матрицу сопряженного оператора А* в том же базисе.

5. Выяснить возможность приведения матрицы линейного оператора к диагональному виду путём перехода к новому базису, найти этот базис и соответствующую ему форму матрицы.

$$\begin{pmatrix}3&12&-4\\-1&-3&1\\-1&-12&6\end{pmatrix}$$

5.(б) . Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

6. Привести уравнение кривой второго $x^2-2xy+y^2+\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=0.$ порядка к каноническому виду, найти каноническую систему координат и нарисовать эту кривую в данной системе координат.

6. (б) Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $Q(\bar{x})=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ имеет канонический вид, и записать форму в найденном ОНБ.