НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы бывают двух типов (классов). Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

Интегралы с бесконечными пределами
(Несобственные интегралы 1 рода)

Определение определенного интеграла, было дано в предположении, что областью интегрирования является конечный отрезок $[a, b]$. Если же предположить, что область интегрирования бесконечна, например, является интервалом $[a, +\infty)$, то даже для непрерывной функции $f(x)$ обычное определение интеграла не работает.

При любом разбиении интервала $[a, +\infty)$ на конечное число частей одна из этих частей останется бесконечной, поэтому не удается выполнить условие – длина наибольшего отрезка разбиения стремится к нулю.

Обобщим понятие определенного интеграла на случай бесконечной области интегрирования.

Рассмотрим три случая:

I. $$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.}$$

Этот интеграл называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом.

Если предел существует и имеет конечное значение, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Если предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

II. $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{b} f(x)dx.}$$

Этот несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом является сходящийся, если предел существует и конечен, и расходится в противном случае.

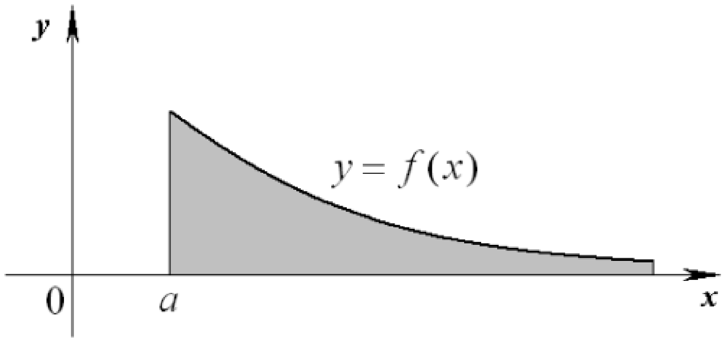
III. $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx.}$

Он сходится, если сходится каждый из интегралов, стоящих в правой части.

Если хотя бы один из них расходящийся, расходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Если функция *y=f(x)* положительна и непрерывна на интервале $[a, +\infty)$ и если несобственный интеграл сходится, то он равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *y=f(x),* прямой *x=a* и осью *Ox*

В этом состоит *геометрический смысл несобственного интеграла.*



К несобственным интегралам применимы методы замены переменной и интегрирования по частям.

Рассмотрим интеграл $\boxed{\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}}$ при различных показателях степени p.

Пусть $p=1$, тогда $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$. Интеграл расходящийся.

Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{(1-p)} \lim_{b\to\infty}\left[b^{1-p} - 1\right] = \frac{1}{(1-p)} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right].$$

Если $p>1$, то при $b\to\infty$ дробь $\dfrac{1}{b^{p-1}}\to 0$ и интеграл равен $\dfrac{1}{p-1}$.

Если $p<1$, то выражение $\dfrac{1}{b^{p-1}}=b^{1-p}\to\infty$ и интеграл – расходящийся. Итак,

$$\boxed{\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1\\ \text{расходится при } p\le 1\end{cases}}$$

Примеры.

1) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\left[arctg\,b-arctg1\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{2}e^x dx=\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{2}e^x dx=\lim_{a\to\infty}\left[e^2-e^{-a}\right]=\lim_{a\to\infty}\left[e^2-\frac{1}{e^a}\right]=e^2$.

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$.

Вычислим каждый из интегралов

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{b\to\infty}\left[arctg(b+1)-arctg1\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to\infty}\left[arctg1-arctg(-a+1)\right]=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}..$$

Очевидно, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\pi$.

В некоторых случаях непосредственное вычисление несобственного интеграла затруднительно, однако важно знать сходится он или расходится. В таких случаях сравнивают данный несобственный интеграл с другим несобственным интегралом, сходимость или расходимость которого известна. Приведем теоремы, устанавливающие признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении несобственных интегралов.

Теоремы сравнения

Первая теорема сравнения.
Пусть при $x \in [a, +\infty)$ определены функции $0 \le f(x) \le g(x)$

a) если $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – также сходится,

b) если $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} g(x)dx$ также расходится.

(без доказательства)

Следствие. Если на интервале $x \in [a, +\infty)$ функции определены и связаны неравенством $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ при $b > a$ следует сходимость интеграла $\int_b^{\infty} f(x)dx$, из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_b^{\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Нетрудно показать с помощью определения несобственного интеграла, что

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx,$$

где $\int_a^{b} f(x)dx$ является определенным интегралом, а, следовательно, принимает конечное значение. Таким образом, из сходимости (расходимости) интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует сходимость (расходимость) интеграла $\int_b^{\infty} f(x)dx$. То же самое можно сказать и об интегралах $\int_a^{\infty} g(x)dx$ и $\int_b^{\infty} g(x)dx$. Очевидно, теорема, доказанная для одинаковых нижних пределов обоих интегралов, обобщается и на случай с разными нижними пределами.

Более того, ограничение $b > a$ можно снять, если условие $0 \le f(x) \le g(x)$ выполняется и на большем интервале $x \in (b, \infty)$.

Вторая теорема сравнения (предельный признак сравнения)

Если на интервале $x \in [a, +\infty)$ функции $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ограничены и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, причем $0 < K < \infty$, интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ ведут себя одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся. (Теорема дается в несколько упрощенной формулировке).

(без доказательства)

Признак абсолютной сходимости

Пусть функция *f(x)* является знакопеременной на интервале $[a, +\infty)$.

Тогда, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся.*

Пример 1. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$.

Поскольку нет необходимости вычислять этот интеграл, воспользуемся первой теоремой сравнения интегралов от положительных функций. Сравним интегралы

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5} \text{ и } \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Очевидно, на интервале $(1, \infty)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{x^2+4x+5} < \frac{1}{x^2},$$

а интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ – сходящийся, что следует из выше рассмотренного интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^p}$

. На основании теоремы сравнения 1 интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$ – сходящийся.

Пример 2. Установить, сходится ли интеграл $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$, если сходится – вычислить.

Нетрудно заметить, что в указанных пределах $\frac{1}{x^2-3x+2} \geq 0$, следовательно, можно попробовать сравнить интеграл с интегралом $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2}$. Однако, оснований для использования первой теоремы сравнения нет, поэтому применим вторую теорему сравнения.

Итак,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-3x+2} = 1,$$

следовательно, интеграл $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ведет себя так же, как $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2}$, то есть сходится.

Вычислим интеграл

$$\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-1)} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_4^{b} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right] dx =$$

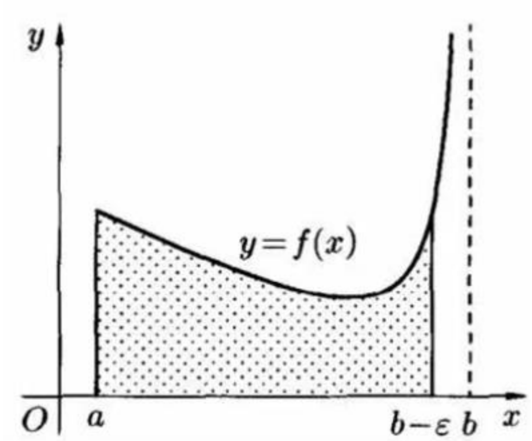
$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln|x-2| - \ln(x-1) \Big]_4^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \right]_4^b = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| - \ln\frac{2}{3} \right] = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{1-\frac{2}{b}}{1-\frac{1}{b}}\right| + \ln\frac{3}{2} \right] = \ln\frac{3}{2}.$$

Интегралы от неограниченных функций
(Несобственный интеграл 2 рода)

Несобственные интегралы от неограниченных функций являются другим обобщением определенного интеграла. В этом случае отрезок интегрирования остается конечным, а подынтегральная функция может на этом иметь особую точку, то есть принимать сколь угодно большие значения при подходе к этой точке.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $x\in[a;b)$, а в точке b имеет разрыв П рода. В этом случае определение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ как предела интегральных сумм может быть неприменимо, так как этот предел может не существовать.

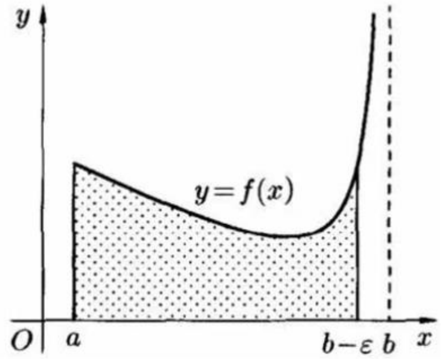


В самом деле, пусть, например, $f(x)>0$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$. Тогда при любом разбиении отрезка $[a,b]$ на n частей на последнем из них $[x_{n-1},b]$ функция $f(x)$ является неограниченной. Поэтому, если взять точку c_n достаточно близко к точке b, можно сделать произведение $f(c_n)\,\Delta x_n$ сколь угодно большим, а значит и интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_n)\Delta x_n$ может быть сколь угодно большой и, следовательно, эта интегральная сумма не имеет предела при стремлении шага разбиения отрезка $[a,b]$ к нулю.

Рассмотрим три случая :

I. $\int_a^b f(x)\,dx$, причем $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty$, то есть подынтегральная функция имеет особенность на верхнем пределе. Этот интеграл вводится следующим образом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$



В интеграле под знаком предела «вырезана» особая точка, другими словами, отрезок интегрирования сужен так, чтобы особая точка не входила в него, интеграл в этом случае становится определенным, и вычисление несобственного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла, а затем предела от полученного результата.

Если предел конечен, то интеграл называется сходящимся, его значение равно вычисленному пределу. Если предел не существует или бесконечен, интеграл расходящийся.

II. $\int_a^b f(x)\,dx$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Этот интеграл с особенностью на нижнем пределе. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Интеграл сходящийся и равен значению предела, если этот предел конечен, и расходящийся, если предел не существует или равен $\pm\infty$.

III. $\int_a^b f(x)\,dx$, причем $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ $(a < c < b)$, то есть особая точка находится внутри отрезка интегрирования.

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$

и интеграл считается сходящимся, если сходится каждый из интегралов в правой части равенства по отдельности. В противном случае он – расходящийся.

Пример 1.

$$\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{2xdx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} [ln|x^2-4|]_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} [ln|(2-\varepsilon)^2-4| - ln\,4] = \lim_{\varepsilon\to 0+0} [ln|4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4| - ln\,4] = -\infty.$$

Пример 2.

$$\int_0^1 ln\,x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 ln\,x\,dx = \begin{cases} u = ln\,x\ , & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx\ , & v = x \end{cases} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(x\,ln\,x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(-\varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon) - 1 = 0 - 1 = -1,$$

так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon\ln\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\dfrac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}(-\varepsilon) = 0$

Пример 3. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Вычислим интегралы

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2},$$

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^8 x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[8^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right] = 6,$$

оба они сходятся, тогда $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$.

Для функций, определенных и неотрицательных на промежутках $(a;b]$ или $[a;b)$ справедливы *признаки сходимости*, аналогичные признакам сходимости для несобственных интегралов с бесконечными границами. Например, справедлив признак сравнения, связанный с неравенством.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на интервале $[a;b)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $g(x) \geq f(x) \geq 0$, а в точке $x=b$ неограничены, то

– если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$;

– если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ также расходится.

Если при $x \in [a, b)$ функции $f(x)>0$ и $g(x)>0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сходимости).

Пример

Исследовать на сходимость интегралы

a) $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}$, b) $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$ при $a<b$ и $\alpha>0$.

Самостоятельно

Ответ:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$