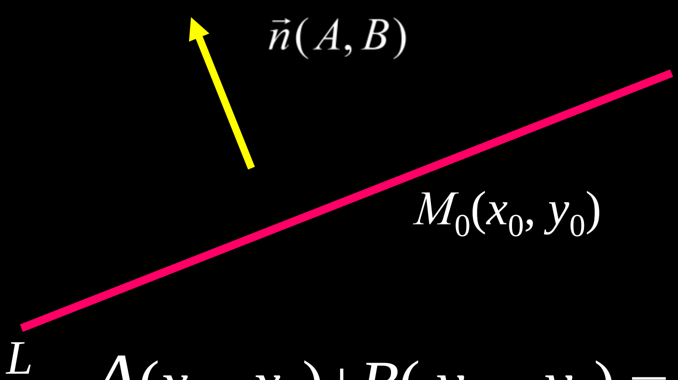
Лекция 4

- Прямая на плоскости как алгебраическая кривая первого порядка.
- Основные виды уравнений прямой на плоскости.
- Плоскость как алгебраическая поверхность первого порядка.
- Основные виды уравнений плоскости.

Прямая на плоскости.

Виды уравнений прямой на плоскости.

1. Прямая на плоскости однозначно задается точкой и вектором, перпендикулярным к этой прямой (*нормальным* вектором).



$M_0(x_0, y_0) \in L$; вектор $\vec{n}(A,B)$ – нормальный вектор прямой L.

Тогда для $\forall$ точки $M(x, y) \in L$

$$\overrightarrow{M_0M} \in (x - x_0, y - y_0) \perp \vec{n}\,(A,B) \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0.$$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ − уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B)$.

2. Общее уравнение прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

$$Ax + By + (-A\ x_0 - B\ y_0) = 0.$$

Обозначим $(-Ax_0 - By_0) = C$, тогда

$$Ax + By + C = 0 \text{ –}$$

общее уравнение прямой на плоскости, где коэффициенты A, B - координаты нормального вектора, а $C = -(\overrightarrow{OM_0}, \vec{n})$.

3. Пусть $C \neq 0$.

$$Ax + By + C = 0\ /{:}C \quad \Rightarrow \quad -\frac{A}{C}x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1.$$

Обозначим: $-\frac{C}{A} = a; -\frac{C}{B} = b,$

тогда $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ -

уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой от координатных осей.

4. Пусть $B \neq 0$. Из общего уравнения $Ax + By + C = 0$ выразим y через x:

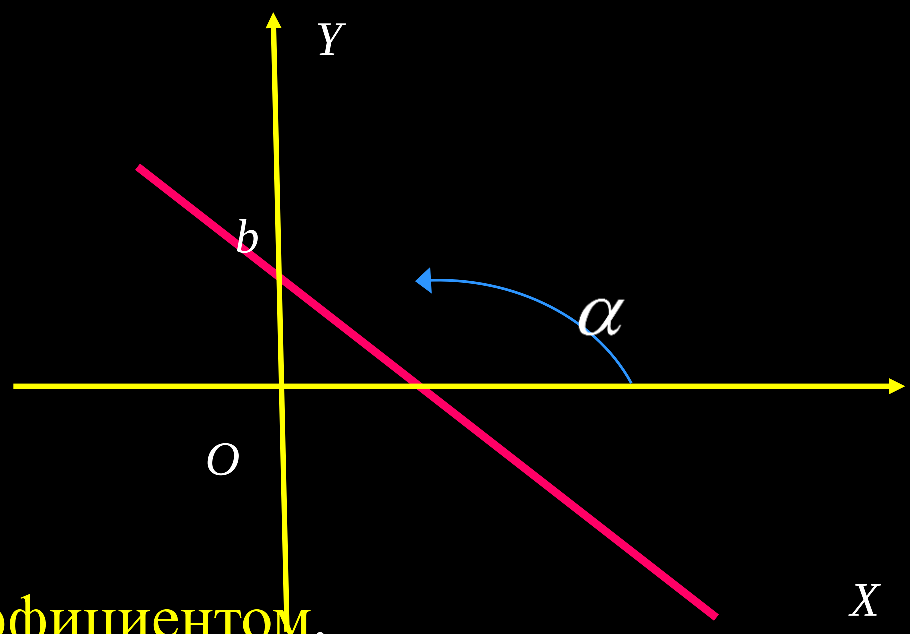
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим

$$-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b,$$

тогда

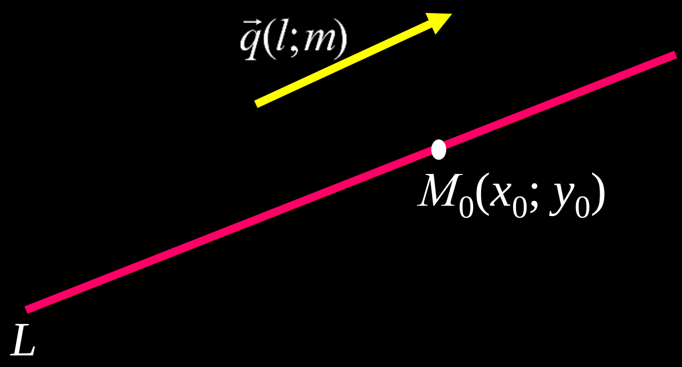
$$y = kx + b -$$



уравнение прямой с угловым коэффициентом,
где k – угловой коэффициент прямой (тангенс угла между прямой и положительным направлением оси OX , $k = \mathrm{tg}\alpha$);
b – ордината точки пересечения прямой с осью OY .

Если угол α - острый , то $k>0$, если угол α - тупой , то $k<0$, если $k=0(\alpha=0)$, то прямая параллельна оси OX, если $\alpha = \pi/2$, то прямая не имеет углового коэффициента.

5. Прямая на плоскости так же однозначно задается точкой и вектором, параллельным этой прямой (*направляющим* вектором).



Пусть $M_0(x_0; y_0) \in L$; а вектор $\vec{q}(l;m)$ – направляющий вектор этой прямой.
Тогда для $\forall$ точки $M(x; y) \in L$

$$\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0;y-y_0) \parallel \vec{q}\,(l;m) \Rightarrow$$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} -$$ каноническое уравнение прямой,

проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ параллельно направляющему

вектору $\vec{q}(l;m)$.

6. $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t,\ t\in(-\infty,+\infty)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-x_0=lt, \\ y-y_0=mt, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt - \end{cases}$$

параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;\, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l;m)$.

7. Пусть $\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – радиус-вектор произвольной точки M, лежащей на прямой,

$\vec{r}_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ – радиус-вектор фиксированной точки $M_0 \in L$,

$\vec{q}=\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ – направляющий вектор.

Тогда

$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{q}t,\ t\in\Re$ - уравнение прямой в векторном виде.

Взаимное расположение прямых на плоскости

Прямые на плоскости могут совпадать, пересекаться или быть параллельными.

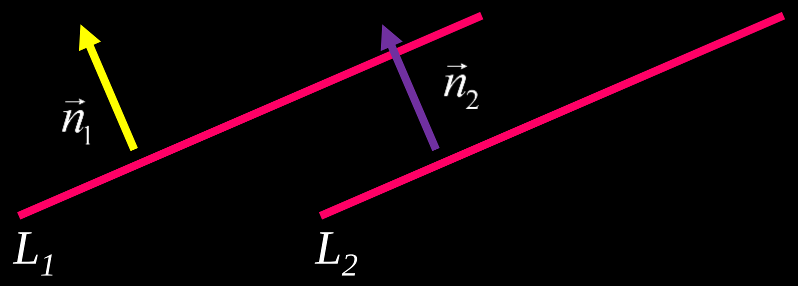
1.Пусть $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

Прямые на плоскости совпадают или параллельны, если нормальные векторы этих прямых коллинеарные, а значит, координаты векторов должны быть пропорциональны.

Следовательно, прямые

– совпадают, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

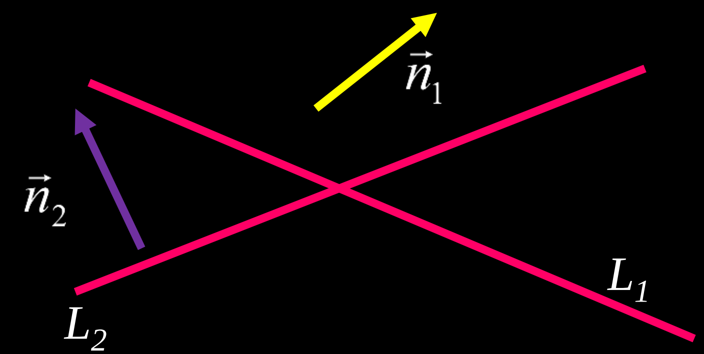


– параллельны, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

– пересекаются, если

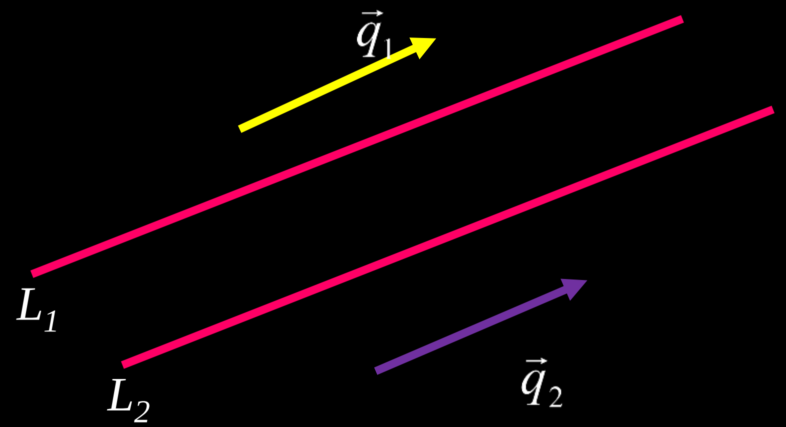
$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$



2.Пусть

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}, L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}.$$

Прямые на плоскости совпадают или параллельны, если их направляющие вектора коллинеарные, а значит, их координаты пропорциональны.



Тогда, прямые:

а) совпадают, если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2}$;

б) параллельны, если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{m_2}$;

в) пересекаются, если $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2}$.

3.Пусть

L_1: $y=k_1x+b_1$,

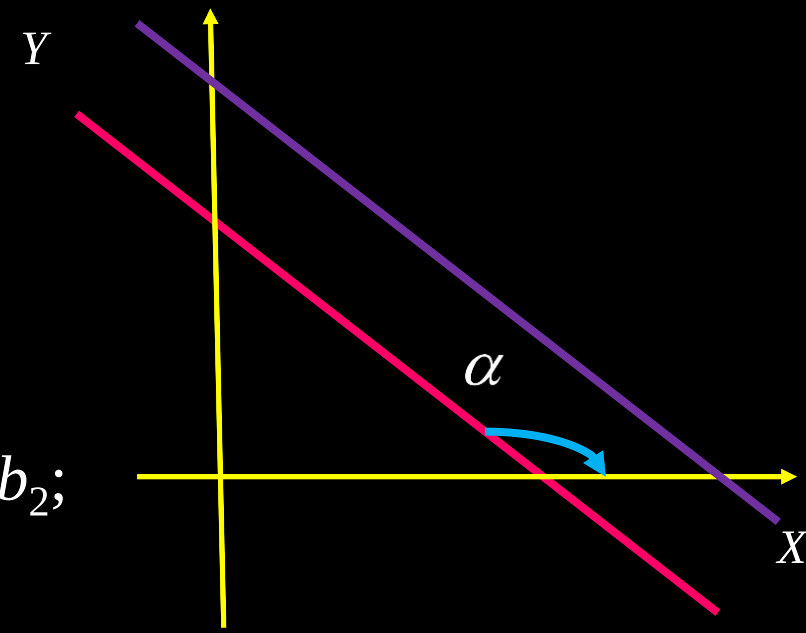
L_2: $y = k_2x + b_2$,

тогда прямые:

а) совпадают, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;

б) параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;

в) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.



Угол между прямыми на плоскости

1. $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0;$
$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

$$\cos\left(L_1 \hat{,} L_2\right) = \left|\cos\left(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2\right)\right| = \frac{\left|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

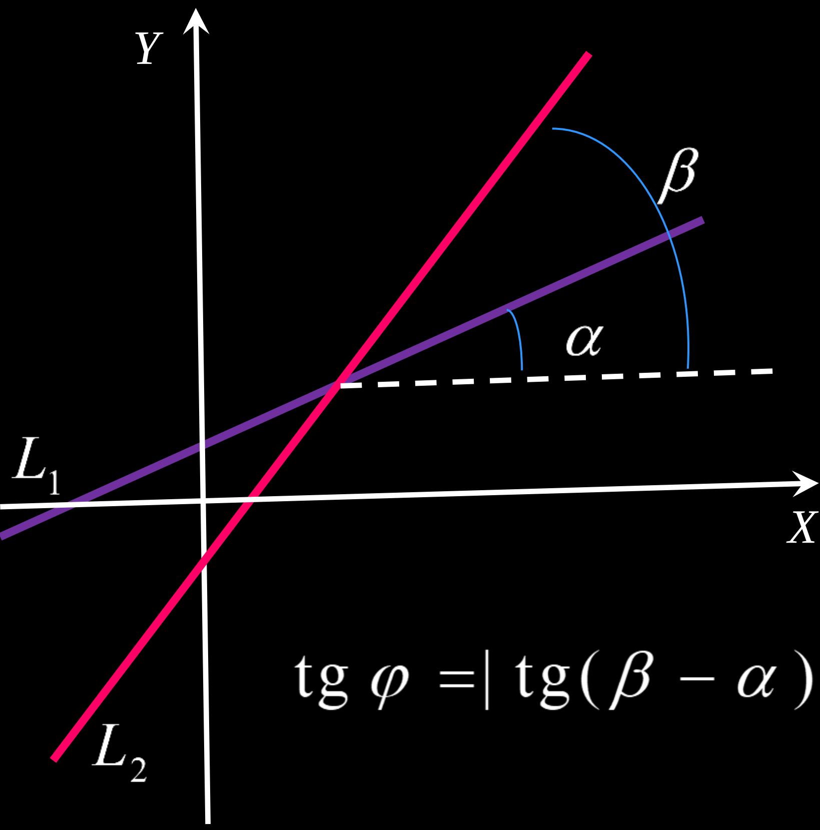
Замечание:

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$$

2. $$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

$$\cos\left(L_1 \hat{,} L_2\right) = \left|\cos(\vec{q}_1 \hat{,} \vec{q}_2)\right| = \frac{\left|(\vec{q}_1, \vec{q}_2)\right|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}.$$

3. L_1: $y=k_1x+b_1$,
L_2: $y = k_2x + b_2$.



Пусть φ- угол между прямыми L_1 и L_2.
$\varphi = \beta - \alpha$.
Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}(\beta - \alpha)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|.$$

Если $L_1 \perp L_2$ ($\varphi = \pi / 2$), то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi / 2) = \infty$.

Следовательно, $1+k_1k_2 = 0$, т.е. $k_1k_2 = -1$.

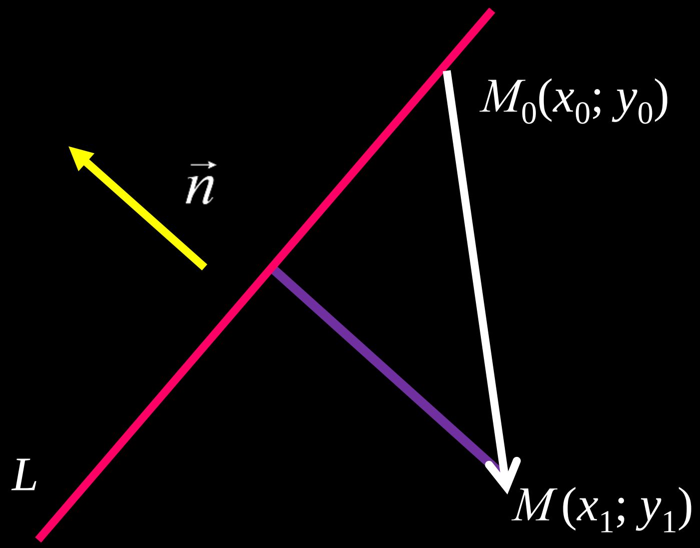
Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть $M(x_1; y_1) \notin L$: $Ax+By+C = 0$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ - точка, лежащая на прямой,

$\vec{n}(A;B)$ − вектор нормали.

$$\rho(M,L) = |np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right)\right|}{|\vec{n}|} =$$



$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + (-Ax_0 - By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} M_0(x_0; y_0) \in L \Rightarrow \\ Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{matrix} \right| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\rho(M,L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Замечание.

Расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости можно найти по этой же формуле, если находить расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0;$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(M_1, L_2), \text{где } M_1 \in L_1$$

Плоскость в пространстве.

Виды уравнений плоскости в пространстве.

1. Плоскость в пространстве однозначно задается точкой и вектором, перпендикулярным плоскости (нормальным вектором).

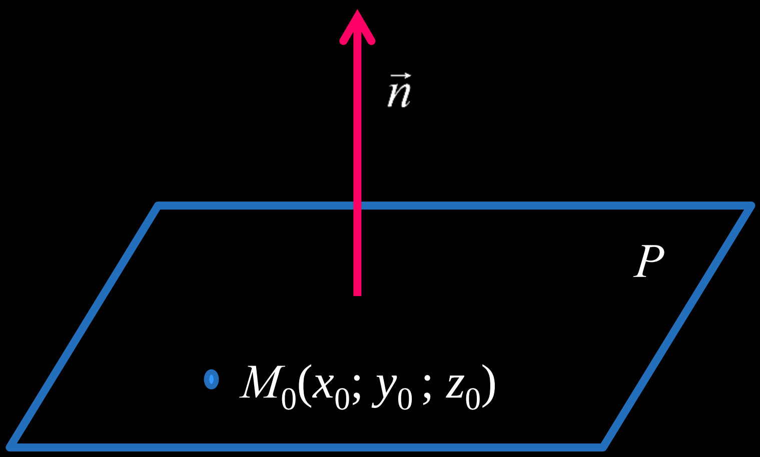
Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0) \in P$, а вектор $\vec{n}(A;B;C)$ – нормальный вектор плоскости P . Для $\forall$ т. $M(x; y; z)$, лежащей в плоскости ,

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\perp\vec{n}(A;B;C)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow(\overrightarrow{M_0M},\vec{n})=0\Rightarrow$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{ –}$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B;C)$.



2. $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Обозначим $D=(-Ax_0-By_0-Cz_0)$, тогда

$$Ax+By+Cz+D=0\ -$$

общее уравнение плоскости, где коэффициенты *A, B* и *C* - координаты вектора нормали.

3. Пусть $D \neq 0$.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad / : (-D \neq 0)$$

$$-\frac{A}{D}x + \left(-\frac{B}{D}\right)y + \left(-\frac{C}{D}\right)z = 1.$$

Обозначим

$$-\frac{D}{A} = a, \; -\frac{D}{B} = b, \; -\frac{D}{C} = c.$$

Тогда $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 -$$

-уравнение плоскости в «отрезках», где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных осей.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3) \in P$.

Тогда для $\forall$ точки $M \in P$, векторы $\overrightarrow{AM}(x-x_1; y-y_1; z-z_1)$,

$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1)$

компланарны, а значит, их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Пусть плоскость P проходит через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\left(\vec{a} \nparallel \vec{b}\right)$.

Тогда для $\forall$ точки $M \in P$ векторы $\overrightarrow{AM}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, а значит, их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Параметрическое уравнение плоскости.

Пусть плоскость P проходит через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\left(\vec{a} \nparallel \vec{b}\right)$.

Так как векторы $\overrightarrow{AM}, \vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, то вектор $\overrightarrow{AM}$ может быть представлен в виде линейной комбинации неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{a} + s\vec{b},\ t, s \in \Re \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1, \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2, \\ z = z_0 + ta_3 + sb_3. \end{cases}$$

7. Из параметрического уравнения $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1, \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2, \\ z = z_0 + ta_3 + sb_3. \end{cases}$

получим уравнение плоскости в векторном виде.

Обозначим :

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – радиус-вектор произвольной точки *M*, лежащей в плоскости,

$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ – радиус-вектор фиксированной точки M_0, лежащей в плоскости,

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – векторы параллельные плоскости.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b}, \ t, s \in \Re$$

Взаимное расположение плоскостей

Пусть $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

Плоскости в пространстве могут совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Плоскости совпадают или параллельны, если их нормальные векторы коллинеарные, а значит, координаты нормальных векторов пропорциональны.

Тогда плоскости:

1) совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$

2) параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$

3) пересекаются, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$

Угол между плоскостями

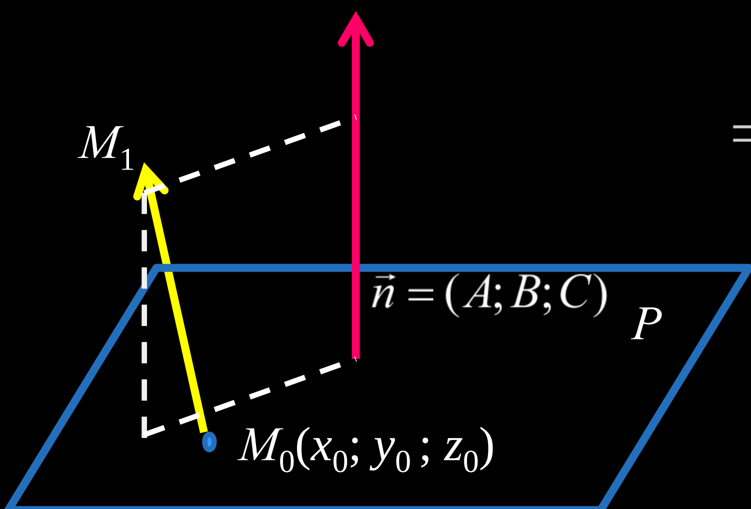
$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$$\cos(P_1 \hat{,} P_2) = \left|\cos(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)\right| = \frac{\left|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}.$$

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ не лежит в плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$.



$$\rho(M_1,P)=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=$$

$$=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot|\cos(\overrightarrow{M_0M_1}\,\hat{,}\,\vec{n})|=\frac{|(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n})|}{|\vec{n}|}=$$

$$=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+(-Ax_0-By_0-Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)\in P \Rightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \Rightarrow -Ax_0-By_0-Cz_0=D.$

$$\rho(M_1,P)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Замечание.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями можно найти по этой же формуле, если находить расстояние от любой точки, принадлежащей одной плоскости, до другой плоскости.

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\rho(P_1, P_2) = \rho(M_1, P_2), \text{ где } M_1 \in P_1.$$