ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теория поля - крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля. К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин.

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.

Если каждой точке М этой области соответствует определенное число

$$U = U(M),$$

то говорят, что в области определено (задано) **скалярное поле** (или функция точки). Иначе говоря, скалярное поле - это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения.

Если каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор

$$\vec{a} = \vec{a}(M),$$

то говорят, что задано **векторное поле** (или векторная функция точки).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, ...), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха,...), электрического потенциала и т. д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т. д.

Если функция $U(M)$ (или $\vec{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное(векторное) поле называется **стационарным** (или установившимся).

Поле, которое меняется с течением времени (меняется, например, скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется **нестационарным** (или неустановившимся).

Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Если V - область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x; y; z).$$

Наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x; y; z)$, используют запись

$$U = U(\vec{r}),$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки M.)

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле

$$U = U(x; y)$$

называют **плоским.**

Аналогично: вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов *x, y, z:*

$$\vec{a}=\vec{a}(x;\,y;\,z)\ \ (\text{или}\,\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})).$$

Вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\vec{a}=P(x;\,y;\,z)\,\vec{i}+Q(x;\,y;\,z)\,\vec{j}+R(x;\,y;\,z)\vec{k}\ ,$$

где $P(x;\,y;\,z)$, $Q(x;\,y;\,z)$, $R(x;\,y;\,z)$ - проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат.

Если в выбранной системе координат *Oxyz* одна из проекций вектора $\vec{a}=\vec{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется **плоским**. Например,

$$\vec{a}=P(x;\,y;\,z)\,\vec{i}+Q(x;\,y;\,z)\,\vec{j}\ .$$

Векторное поле называется **однородным**, если $\vec{a}(M)$ – постоянный вектор, т. е. *P*, *R* и *Q* - постоянные величины. Таким полем является поле тяжести. Здесь $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$, *g* - ускорение сил тяжести, *m* - масса точки.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции ($U(x;y;z)$ – определяющая скалярное поле, $P(x\ ;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;\ y;\ z)$ – задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными.

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x;\ y;\ z)$. Для наглядного представления скалярного поля используют поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U = U(M)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$U(x;\ y;\ z)=c.$$

Придавая *c* различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в уравнение $U(x;\ y;\ z)=c$.

Например, для скалярного поля, образованного функцией

$$U=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\ ,$$

поверхностями уровня является множество концентрических сфер с центрами в начале координат:

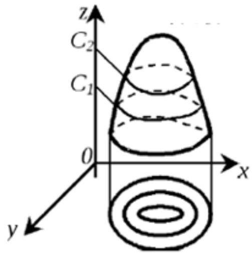
$$\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}=c\ .$$

В частности, при $c=1$ получим $x^2+y^2+z^2=0$, т.е сфера стягивается в точку.

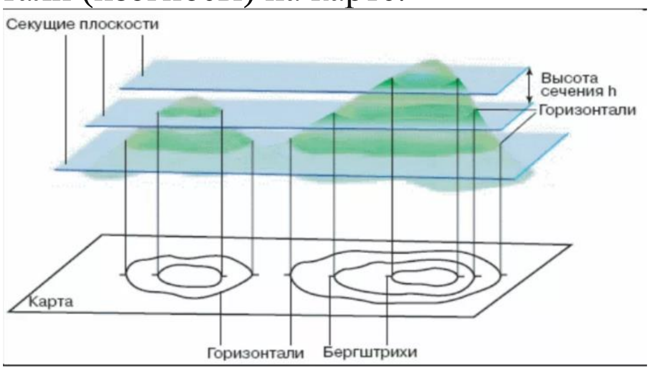
В случае плоского поля

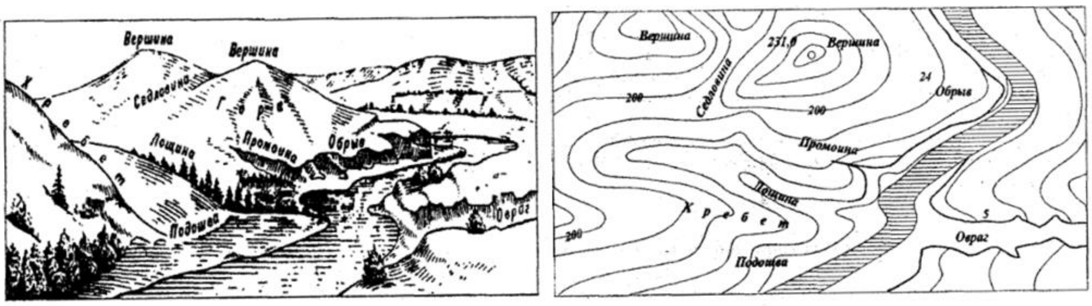
$$U = U(x;y)$$

равенство $U(x;y) = c$ представляет собой уравнение линии уровня поля, т. е. линия уровня - это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x;y)$ сохраняет постоянное значение.



В метеорологии, например, сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности. Также примером линий уровня служат горизонтали (изогибсы) на карте.





Линии уровня применяются в математике при исследовании поверхностей методом сечений.

Характеристики скалярного поля.

1. <u>*Производная по направлению*</u> – характеризует скорость изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении $\vec{\lambda} = \lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k}$:

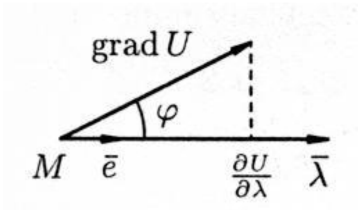
$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{\lambda_x}{|\vec{\lambda}|}$, $\cos\beta = \dfrac{\lambda_y}{|\vec{\lambda}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\lambda_z}{|\vec{\lambda}|}$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\lambda}$.

Если производная $\dfrac{\partial U}{\partial\lambda} > 0$, то заданная функция в данном направлении возрастает, если $\dfrac{\partial U}{\partial\lambda} < 0$ - функция убывает в направлении $\vec{\lambda}$.

2. _Градиент скалярного поля_ – это вектор, в направлении которого производная имеет наибольшее значение:

$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

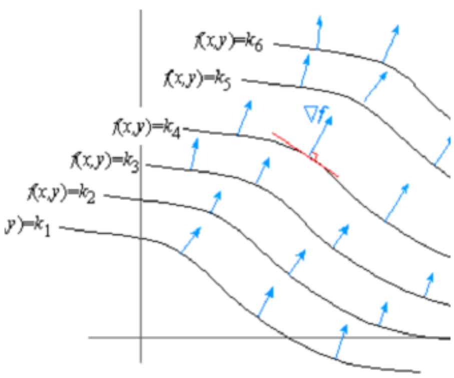


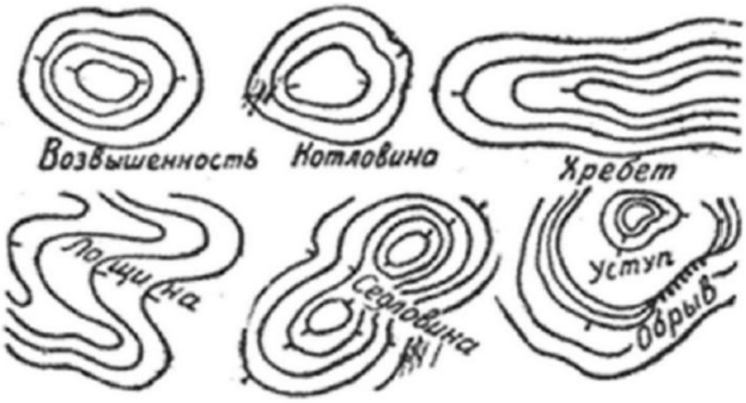
$$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = |grad\, U| \cdot \cos\varphi$$

Градиент(физический смысл)

Градиент- вектор, своим направлением указывающий ***направление наибольшего возрастания*** некоторой величины, заданной в пространстве и значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по модулю равный ***скорости роста этой величины*** в этом направлении.

Например, если взять в качестве величины высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.





Бергштрихи – короткие штрихи на горизонталях (линиях уровня) топографических карт, указывающие направление понижения рельефа, т.е. $-\mathrm{grad}\, h(x,y)$

Свойства градиента.

- Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку. (Действительно, $U(x;\ y;\ z)=c$, значит $\dfrac{\partial U}{\partial\lambda} = 0$ по любому направлению. Т.к. $\dfrac{\partial U}{\partial\lambda} = |grad\, U| \cdot \cos\varphi$, значит $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$)

- $grad\,(U+V) = grad\,U + grad\,V$
- $grad\,(c\cdot U) = c\cdot grad\,U$, где $c = const$.
- $grad\,(U\cdot V) = U\cdot grad\,V + V\cdot grad\,U$.
- $grad\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V\cdot grad\,U - U\cdot grad\,V}{V^2}$.
- $grad\,f(U) = \dfrac{\partial f}{\partial U}\,grad\,U$.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором

$$\vec{a} = \vec{a}(M)\,.$$

Изучение поля удобно начинать с понятия **векторных линий**; они являются простейшими геометрическими характеристиками поля.

Векторной линией поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Характеристики векторного поля.

1. <u>*Дивергенция (или расходимость) векторного поля*</u> $\vec{a} = P(x;y;z)\,\vec{i} + Q(x;y;z)\,\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ в точке M – это скаляр, который вычисляется:

$$div\,\vec{a}\Big|_M = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_M + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_M + \frac{\partial R}{\partial z}\Big|_M .$$

Как видно из определения, дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Дивергенция — одна из наиболее широко используемых в физике операций.

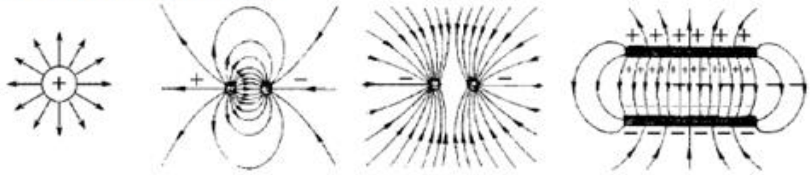
С точки зрения физики дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства (точнее достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля:

$div\,\vec{a}(M) > 0$ — точка поля является источником;

$div\,\vec{a}(M) < 0$ — точка поля является стоком;

$div\,\vec{a}(M) = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Если во всех точках M поля V $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, поле не имеет ни источников, ни стоков и называется ***соленоидальным***.



Простым примером может служить озеро (для простоты — постоянной единичной глубины со всюду горизонтальной скоростью течения воды, не зависящей от глубины, давая, таким образом, двумерное векторное поле на двумерном пространстве). В такой модели родники, бьющие из дна озера, будут давать положительную дивергенцию поля скоростей течения, а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) — отрицательную дивергенцию.

Векторное поле, в каждой точке, которого дивергенция поля равна нулю, т.е. $div\,\vec{a} \equiv 0$, называется **соленоидальным**.

Свойства дивергенции.

- $div(\vec{a}+\vec{b}) = div\,\vec{a} + div\,\vec{b}$
- $div(c\cdot\vec{a}) = c\cdot div\,\vec{a}$, где $c = const$.
- $div\,(U\cdot\vec{a}) = U\,div\,\vec{a} + \vec{a}\cdot grad\,U$, где U - скалярная функция.
- Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $div\,\vec{a} = 0$.

Пример. Задано поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega\cdot\vec{k}$ вокруг оси Oz : $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$.

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0,$$

$\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ - соленоидальное поле.

2. *<u>Ротор (или вихрь) векторного поля</u>* $\vec{a} = P(x;y;z)\,\vec{i} + Q(x;y;z)\,\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ – это вектор, равный

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Как видно из определения, ротор векторного поля в точке является векторной величиной, образующая собственное векторное поле.

Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$: $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$.

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

Вывод: С точностью до числового множителя ротор поля скоростей $\vec{v}$ представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название “ротор” (лат. “вращатель”).

Свойства ротора.

- $rot\,(\vec{a} + \vec{b}) = rot\,\vec{a} + rot\,\vec{b}$
- $rot\,(c \cdot \vec{a}) = c \cdot rot\,\vec{a}$, где $c = const$.
- $rot\,(U \cdot \vec{a}) = U\,rot\,\vec{a} + grad\,U \times \vec{a}$, где U - скалярная функция.
- Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $rot\,\vec{a} = 0$.

ОПРЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Этот символический вектор называют также оператором “набла”, он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями:

1. $\nabla U = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = grad\,U$.
2. $\nabla \cdot \vec{a} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = div\,\vec{a}$.

3. $\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=rot\,\vec{a}$.

4. $\frac{\partial U}{\partial\lambda}=\nabla U\cdot\vec{e}=(\vec{e}\cdot\nabla)U$, где $\vec{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$

ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ задано некоторое векторное поле $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$, где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — непрерывно дифференцируемые в области Ω функции. Пусть $S\subset\Omega$ — гладкая ориентируемая поверхность, на которой выбрана определенная сторона, задаваемая единичной нормалью $\mathbf{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ к этой поверхности.

⇒ *Потоком векторного поля* $\mathbf{F}$ *через поверхность* S *в направлении единичной нормали* $\mathbf{n}$ называют поверхностный интеграл первого рода:

$$\Pi=\iint\limits_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS.$$

Если обозначить через $F_{\mathbf{n}}$ проекцию вектора $\mathbf{F}$ на направление вектора $\mathbf{n}$, то, учитывая, что имеет место равенство $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{n}|\cos\varphi=|\mathbf{F}|\cdot\cos\varphi=F_{\mathbf{n}}$ (где φ — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{n}$), формулу для вычисления потока можно записать в форме, которая не зависит от выбора системы координат:

$$\Pi=\iint\limits_S F_{\mathbf{n}}\cdot dS.$$

Поверхностный интеграл первого рода в формуле связан с поверхностным интегралом второго рода равенством:

$$\Pi=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iint\limits_{(S,\mathbf{n})}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy,$$

которое дает еще один способ вычисления потока.

Физический смысл потока: если вектор-функция $\mathbf{F}$ есть поле скоростей текущей жидкости, то поток Π этого векторного поля через поверхность S равен общему количеству жидкости, протекающей через S за единицу времени.

По формуле Остоградского Гаусса

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\oiint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy,$$

Выражени стоящее подзнаком интеграла в левой части представляет собой дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхностm S

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

Пример . Найти поток вектора $\bar{a} = z\cdot\bar{i} - x\cdot\bar{j} + y\cdot\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями .

Решение: Поток найдем методом проектирования на три координатные плоскости. В нашем случае

$P = z$, $Q = -x$, $R = y$. Имеем:

$$K = \iint\limits_S z\,dy\,dz - x\,dx\,dz + y\,dx\,dy.$$

Расчленим этот поверхностный интеграл на три слагаемых, затем сведем их вычисление к вычислению двойных интегралов. Нормаль к верхней стороне треугольника образует с осью Ox тупой угол, с осью Oy — тупой, а с осью Oz — острый угол. (Единичный вектор данной плоскости есть $\bar{n} = \pm\left(\frac{3}{7}\bar{i} + \frac{6}{7}\bar{j} - \frac{2}{7}\bar{k}\right)$; на верхней стороне $\cos\gamma > 0$, поэтому надо выбрать знак «минус»; получим: $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.)

Итак, $K = K_1 + K_2 + K_3$. Находим K_1, K_2, K_3:

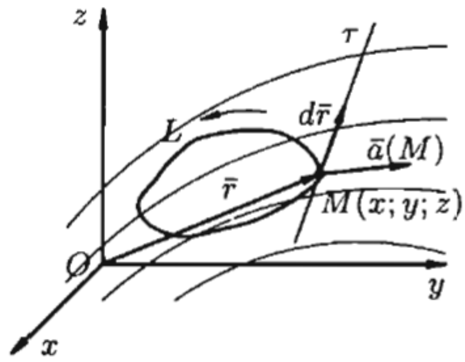
$$K_1 = \iint\limits_S z\,dy\,dz = -\iint\limits_{BOC} z\,dy\,dz = -\int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y-3}^{0} z\,dz = \cdots = \frac{3}{2},$$

$$K_2 = -\iint\limits_S x\,dx\,dz = \iint\limits_{AOC} x\,dx\,dz = \int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{0} dz = \cdots = 2,$$

$$K_3 = \iint\limits_S y\,dx\,dy = \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{6-3x}{6}} y\,dy = \cdots = \frac{1}{3}.$$

В результате имеем: $K = \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{3} = 3\frac{5}{6}$.

Циркуляция поля



Пусть векторное поле образовано вектором . Возьмем в этом поле некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

Пусть $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор точки M на контуре L.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\overline{dr}$, касательный к контуру L, называется ***циркуляцией вектора*** $\bar{a}$ вдоль L, т. е.

$$\boxed{C = \oint\limits_L \bar{a}\,\overline{dr}.}$$

Рассмотрим различные формы записи циркуляции. Так как

$$\bar{a} \cdot \overline{dr} = |\overline{dr}| \cdot \text{пр}_{\overline{dr}}\bar{a} = a_\tau \cdot dl = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где a_τ — проекция вектора $\bar{a}$ на касательную τ, проведенную в направлении обхода кривой L, то равенство можно записать в виде

$$C = \oint\limits_L a_\tau \cdot dl,$$

или

$$\boxed{C = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.}$$

Циркуляция C имеет простой физический смысл: если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция — это работа силы $\bar{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль L

Пример . Найти циркуляцию вектора поля линейных скоростей вращающегося тела $\overline{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой L, лежащей в плоскости α, перпендикулярной оси вращения.

Решение: Будем считать, что направление нормали к плоскости α совпадает с направлением оси Oz.

$$C = \oint\limits_L -\omega y\,dx + \omega x\,dy = \omega \oint\limits_L -y\,dx + x\,dy =$$
$$= 2\omega\left(\frac{1}{2}\oint\limits_L -y\,dx + x\,dy\right) = 2\omega \cdot S,$$

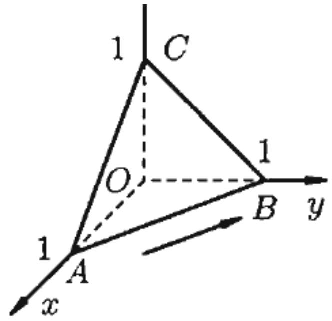
где S — площадь поверхности, ограниченной кривой L (см. 56.17).

Заметим, что если нормаль к поверхности S образует угол γ с осью Oz, то циркуляция будет равна $C = 2\omega \cdot S \cdot \cos\gamma$; с изменением угла γ величина C изменяется.

Пример . Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\bar{a} = (x-2z)\bar{i} + (x+3y+z)\bar{j} + (5x+y)\bar{k}$$

вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$



Решение:

$$C = \oint\limits_L (x-2z)\,dx + (x+3y+z)\,dy + (5x+y)\,dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}.$$

На отрезке AB: $x + y = 1$, $z = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_1^0 (x-0)\,dx + (x+3-3x+0)\cdot(-dx) + 0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке BC: $y + z = 1$, $x = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (0-2+2y)\cdot 0 + (0+3y+1-y)\,dy + (0+y)\cdot(-dy) = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA: $x + z = 1$, $y = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 (x - 2 + 2x)\,dx + 0 - 1(5x + 0)\cdot(-dx) = -3.$$

Следовательно,

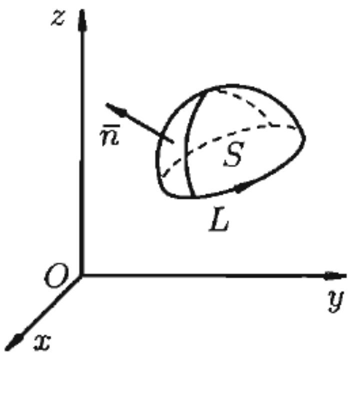
$$C = \oint\limits_{ABCA} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3) = -3.$$

Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, запишем формулу Стокса:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Левая часть формулы представляет собой циркуляцию вектора $\bar{a}$ по контуру L, т. е. $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L a_\tau dl$. Интеграл в правой части формулы представляет собой поток вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ через поверхность S, ограниченную контуром L , т. е.

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \\ = \iint\limits_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\,ds.$$



Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint\limits_L a_\tau dl = \iint\limits_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\,ds.$$

Такое представление формулы Стокса называют ее *векторной формой*. В этой формуле положительное направление на контуре L и выбор стороны у поверхности S согласованы между собой так же, как в теореме Стокса.