4 Вычисление определителей, исследование и решение систем линейных уравнений

4.1 Цель работы

1. Вычисление определителей четвертого порядка.
2. Исследование и решение систем четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса и по формулам Крамера.

4.2 Теоретическое введение

4.2.1 ***Вычисление определителя произвольного порядка***
При вычислении определителей используют следующие их свойства:
1. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет свой знак.
2. Общий множитель всех элементов одной строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.
3. Если некоторая строка (столбец) определителя целиком состоит из нулей, то определитель равен нулю.
4. Определитель не изменяется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель.
5. Определитель равен сумме произведений элементов какой–либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Применение этого свойства называют ***разложением определителя по строке (столбцу).***
Можно предложить следующий ***порядок вычисления определителя:***

- с помощью свойства 4 добиться, чтобы в некоторой выбранном столбце (например, первом) стояли на всех местах нули, кроме, быть может, одного;
- применяя свойство 5, разложить определитель по этому столбцу и тем самым свести его вычисление к нахождению определителя меньшего порядка;
- повторяя этот прием в конце концов можно получить определитель второго порядка, который вычисляется непосредственно.

В процессе преобразования определителя по мере необходимости используют свойства 1 и 2, или выясняют, согласно свойству 3, что он равен нулю.

4.2.2 ***Исследование и решение систем линейных уравнений***
Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим A – матрицу коэффициентов этой системы и A_1 – расширенную матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Если число уравнений m равно числу неизвестных n, то важную роль играет определитель матрицы A. Если $|A|$ не равен нулю, то система имеет единственное решение (**теорема Крамера**), которое можно найти по формулам $x_i=\dfrac{|\Delta_i|}{|A|},\ \ i=1,\dots,n$ (**формулы Крамера**), где $|\Delta_i|$ – определитель, получающийся из определителя $|A|$ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов B с сохранением без изменения всех остальных столбцов $|A|$. Определитель $|A|$ называют ***главным определителем*** системы, а определители $|\Delta_i|$ – ***вспомогательными определителями***.

Если же $|A| = 0$, то система либо несовместна (не имеет решений), либо является неопределенной (имеет бесконечное множество решений).

Для исследования системы (4.1) в случае $m = n$ и $|A| = 0$, а также в случае $m \neq n$, т.е. когда число уравнений не равно числу неизвестных, необходимо найти ранги матриц A и B .

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Минором *К-го* ***порядка*** данной матрицы называется определитель квадратной матрицы, получающейся из данной матрицы выделением произвольных K строк и K столбцов. Квадратная матрица порядка K образуется из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов.

Если ***ранг матрицы*** A равен r, то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка большего r, равен нулю.

Ранг матрицы A может быть найден с помощью ***элементарных преобразований первого и второго родов***.

Элементарными преобразованиями первого рода называются следующие действия:

1) умножение какой-либо строки на число $\lambda \neq 0$;

2) перестановка двух строк;

3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число λ.

Элементарными преобразованиями второго рода называются аналогичные действия со столбцами. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

С помощью элементарных преобразований первого рода любую матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$C_1=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_2=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется ***базисным минором***. В качестве базисных миноров матриц C_1 и C_2 можно соответственно взять миноры:

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

и ранги приведенных в примере матриц равны 3 (очевидно, что, если матрица приведена к ступенчатому виду, то ее ранг равен числу ненулевых строк).

Произвольную систему (4.1) можно исследовать с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Из этой теоремы следует:

• если ранг матрицы коэффициентов A не равен рангу расширенной матрицы A_1, то система (4.1) несовместна (нет решений);

• если ранг матрицы A равен рангу матрицы A_1, то система (4.1) совместна. При этом если ранг матрицы A равен числу неизвестных n, то система является определенной, т.е. имеет единственное решение; а если ранг матрицы A меньше числа неизвестных n, то система – неопределенная, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим ***метод решения неопределенной системы***. Пусть ранг матрицы A равен r $(r < n)$. Выделим произвольный базисный минор матрицы A. Элементы строки этого минора являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (4.1). Эти r неизвестных назовем ***базисными неизвестными***, остальные $n - r$ неизвестных назовем ***свободными неизвестными*** . Выделим из системы (4.1) систему r уравнения, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащие свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных.

Нахождение ранга матриц A и A_1, и решение системы (4.1) удобно проводить одновременно. Заметим, что элементарные преобразования первого рода над расширенной матрицей A_1 системы (4.1) приводят к новой системе уравнений, которая эквивалентна исходной. Элементарные преобразования второго рода над расширенной матрицей могут изменить как нумерацию неизвестных, так и их значения. Поэтому будем использовать лишь элементарные преобразования первого рода. Преобразовав расширенную матрицу к ступенчатому виду, определим ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы. Запишем систему, соответствующую преобразованной матрице. Если система является определенной, из преобразованной системы неизвестные определяются последовательно, без труда. Если система неопределенная, оставляем в левой части ее лишь базисные неизвестные, а члены, содержащие свободные неизвестные переносим вправо. Из полученной системы базисные неизвестные определяют через свободные.

4.3 Содержание типового расчета

Условие типового расчета содержит расширенные матрицы систем четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$A_1 \cdot X = B_1$; $A_2 \cdot X = B_2$;

$A_3 \cdot X = B_3$; $A_4 \cdot X = B_4$.

В двух первых системах матрицы коэффициентов одинаковы: $A_1 = A_2$, поэтому расширенная матрица включает элементы матрицы A_1 и два столбца B_1 и B_2 соответственно. Вычислить определители матриц A_1, A_3, A_4. Исследовать и решить первую, третью и четвертую системы методом Гаусса, вторую систему – по формулам Крамера. В ответе для каждой из систем записать ранг матрицы коэффициентов и присоединенной матриц.

Если система совместная, сделать проверку полученных решений.

4.4 Пример выполнения типового расчета

Условие типового расчета

Системы	Система	Система

$A_1 \cdot X = B_1$, $A_2 \cdot X = B_2$						$A_3 \cdot X = B_3$					$A_4 \cdot X = B_4$					
$A_1 = A_2$				B_1	B_2	A_3				B_3	A_4				B_4
3	2	1	–1	–1	1	1	–2	–2	–1	–2	1	–1	2	1	1
–3	–3	1	2	5	5	–2	3	11	11	21	–1	3	–4	–5	3
9	4	8	–3	–2	12	–1	2	5	4	9	1	3	–2	–7	9
9	7	0	–4	–6	–4	5	5	–3	–4	–6	–5	9	–14	–13	9

Выполнение типового расчета

1. Найдем решение первой системы $A_1 \cdot X = B_1$. Запишем систему в явном виде:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -2 \\ 9x_1 + 7x_2 - x_4 = -6 \end{cases} \tag{4.2}$$

Запишем расширенную матрицу системы и будем делать элементарные преобразования со строками этой матрицы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 9 & 4 & 8 & -3 & -2 \\ 9 & 7 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

На первом этапе преобразований в первом столбце, начиная со второй строки, получили, нули. Для этого использовали следующие элементарные преобразования: ко второй строке прибавили первую, к третьей и четвертой строкам прибавили первую, умноженную на (–3).

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

На втором этапе преобразований получили нули во втором столбце, начиная с третьей строки. Для этого к третьей строке прибавили вторую, умноженную на (–2), к четвертой строке прибавили вторую. Затем получили нули в третьем столбце четвертой строки, прибавив к четвертой строке третью. Для удобства дальнейших действий можно вынести из второй строки (–1) и из четвертой - (–2). Чтобы не изменился определитель матрицы A_1, который нам нужно вычислить, вынесенный коэффициент ставим перед матрицей:

$$2 \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Определитель матрицы, преобразованной к треугольному виду, равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали. Это можно показать, если разложить определитель по первому столбцу, получившийся после этого определитель вновь разложить по первому столбцу и т.д.:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1.$$

Тогда с учетом стоящего перед матрицей коэффициента, $|A_1| = 6$. Ранг матрицы A_1 равен 4, ранг расширенной матрицы также равен четырем, ледовательно, система имеет единственное решение.

Рассмотрим два метода нахождения решения.
Метод 1. По полученной матрице выпишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ \quad x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ \quad x_3 - 2x_4 = -7 \\ \quad x_4 = 3 \end{cases}$$

из которой последовательно определим значения неизвестных: - (3; –3; –1; 3).
Метод 2. С помощью элементарных преобразований полученную треугольную матрицу коэффициентов приведем к диагональному виду, для этого к третьей строке прибавим четвертую строку, умноженную на 2, ко второй и к первой строкам прибавим четвертую строку. Тем самым в четвертом столбце выше единицы четвертой строки получим нули. Продолжая аналогичные действия, приведем матрицу коэффициентов к диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Теперь, разделив первую строку на 3, получаем единичную матрицу коэффициентов

$$\sim 3\cdot\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

В выделенном столбце находятся решения исходной системы уравнений, так как полученная расширенная матрица соответствует следующей системе:
$x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = -1$; $x_4 = 3$.
Полученное решение необходимо проверить, т.е. подставить в исходную систему (4.2).

Это удобнее всего сделать, введя матрицу решения $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

и умножая матрицу A_1 на X_1 справа. Если система решена верно, то результатом будет матрица B_1.

Действительно $A_1 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = B_1$.

2. Запишем вторую систему $A_2 \cdot X = B_2$ в явном виде:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 12 \\ 9x_1 + 7x_2 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

По условию $A_1 = A_2$, т.е. вторая система отличается от первой только правыми частями, и главные определители у них равны, $|A_1| = |A_2| = 6$. Согласно теореме Крамера система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $x_i = \frac{|\Delta_i|}{|A|},\ i = 1,\ldots,n.$

Вычислим вспомогательные определители.
Определитель $|\Delta_1|$ получается из главного определителя системы $|A|$ заменой первого столбца на столбец правых частей:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}; \quad |\Delta_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -3 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления этого определителя проведем предварительные преобразования.
Преобразуем определитель $|\Delta_1|$ так, чтобы в его первой строке на первом месте осталась единица, а на всех остальных местах нули. Для этого ко второму столбцу прибавим первый столбец, умноженный на (–2); к третьему – первый столбец, умноженный на (–1); к четвертому – первый столбец. А затем вычислим полученный определитель разложением его по первой строке:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -3 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -13 & -4 & 7 \\ 12 & -20 & -4 & 9 \\ -4 & 15 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -4 & 7 \\ -20 & -4 & 9 \\ 15 & 4 & -8 \end{vmatrix} =$$

Получившийся определитель третьего порядка также преобразуем. Вынесем из второго столбца 4, а затем с помощью второго столбца организуем нули на первом и третьем месте первой строки. Для этого к первому столбцу прибавим второй, умноженный на (–13); к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 7. Затем разложим полученный определитель по первой строке и, наконец, вычислим полученный определитель второго порядка:

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -13 & -1 & 7 \\ -20 & -1 & 9 \\ 15 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4(7-4) = 12.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{|\Delta_1|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2.$

Определитель $|\Delta_2|$ получается из главного определителя системы $|A|$ заменой второго столбца на столбец правых частей:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 8 & -3 \\ 9 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель $|\Delta_2|$ так, чтобы в его первом столбце на первом месте осталось число 3, а на всех остальных местах – нули. Для этого ко второй строке прибавим первую строку; к третьей – первую строку, умноженную на (–3); к четвертому – также первую строку, умноженную на (–3). А затем вычислим полученный определитель разложением его по первому столбцу:

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 8 & -3 \\ 9 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Получившийся определитель третьего порядка преобразуем так, чтобы в третьем столбце на последнем месте стоял ноль. Для этого к третьей строке прибавим первую. Затем разложим полученный определитель по третьему столбцу и, наконец, вычислим полученный определитель второго порядка:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-9+5) = -12.$$

Следовательно, $x_2 = \dfrac{|\Delta_2|}{|A|} = \dfrac{-12}{6} = -2$.

Определители $|\Delta_3|$ и $|\Delta_4|$ вычисляем аналогично, преобразуя и затем раскладывая по первому столбцу.

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 12 & -3 \\ 9 & 7 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ 1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$|\Delta_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 8 & 12 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Откуда $x_3 = \dfrac{|\Delta_3|}{|A|} = \dfrac{6}{6} = 1$, $x_4 = \dfrac{|\Delta_4|}{|A|} = \dfrac{12}{6} = 2$.

Мы получили решение второй системы: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ или $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку. $A_2 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & -3 \\ 9 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = B_2$.

Следовательно, система решена верно.

3. Проведем исследование третьей системы. Запишем систему $A_3 \cdot X = B_3$ в явном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 11x_4 = 21 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases} \tag{4.3}$$

Проведем необходимые элементарные преобразования над расширенной матрицей.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 11 & 11 & 21 \\ -1 & 2 & 5 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -3 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Определитель матрицы A_3 равен нулю, ранг матрицы A_3 равен 3 (одна нулевая строка в матрице ступенчатого вида), ранг расширенной матрицы равен 4 (нет нулевых строк). Так как ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы не равны друг другу, то система (4.3) не имеет решения.

4. Рассмотрим четвертую систему. Запишем систему $A_4 \cdot X = B_4$ в явном виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_4 - 5x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 9 \\ -5x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 13x_4 = 3 \end{cases}$$

Проведем необходимые элементарные преобразования над расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ -5 & 9 & -14 & -13 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim 2 \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Определитель матрицы A_4 равен нулю, ранг матрицы A_4 равен 2, ранг расширенной матрицы тоже равен 2. Так как ранги матриц равны, то система является совместной; ранг матрицы меньше числа неизвестных, следовательно, система является неопределенной. В преобразованной матрице жирным шрифтом выделен базисный минор. В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 в, качестве свободных – x_3, x_4.

Перепишем полученную систему в виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 2 + x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

и введем $x_3 = C_1 \in R$ и $x_4 = C_2 \in R$.

Окончательно получим $x_1 = 3 - C_1 + C_2$; $x_2 = 2 + C_1 + 2C_2$.

Решение неопределенной системы удобно записывать в векторном виде, выделяя фундаментальную систему решений однородной и частное решение неоднородной систем.

$$X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частное решение неоднородной системы

Фундаментальное решение однородной системы

Для проверки и здесь удобно воспользоваться умножением матрицы A_4 на матрицу X_4, образованную из указанных выше трех векторов.

$$A_4 \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \\ -5 & 9 & -14 & -13 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(B_4 | 0 | 0\right).$$

В полученной матрице первый столбец должен соответствовать вектору правых частей системы B_4, а два других вектора должны быть нулевые, так как соответствующие решения являются решениями однородной системы уравнений.

4.5 Оформление отчета

В отчете по ТР должен быть представлены преобразования расширенных матриц каждой системы. Полученные решения должны быть проверены умножением матрицы коэффициентов на матрицу решений. В конце работы необходимо выписать общий ответ по следующему образцу:

1. Системы 1 и 2 – совместные, определенные.

$|A_1| = 6$; $r(A_1) = r(A_1 | B_1) = r(A_1 | B_2) = 4$; $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Система 3 – несовместная.

$|A_3| = 0$; $r(A_3) = 3$; $r(A_3 | B_3) = 4$.

3. Система 4 – совместная, неопределенная.

$|A_4| = 0$; $r(A_4) = r(A_4 | B_4) = 2$; $X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.