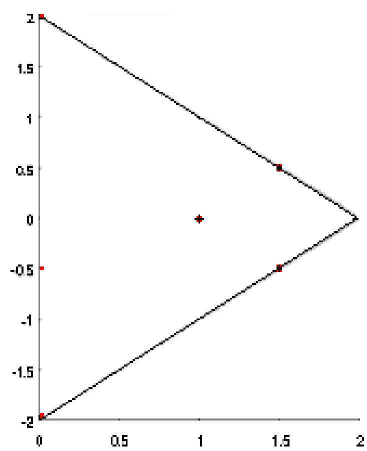
Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области

Так же, как в случае функции одной переменной, заданной на отрезке, функция двух переменных, заданная в замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо в **критических точках**, лежащих в заданной области, либо в **граничных точках** области. Трудность этого случая в том, что у области на плоскости, имеется бесконечное множество граничных точек.



Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

в треугольнике, образованном прямыми

$$x = 0,\ y = x - 2,\ y = -x + 2.$$

Решение: Прежде всего, найдем критические точки заданной функции, решив систему

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ -x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, и мы получаем критическую точку (1,0). Эта точка лежит внутри заданной области, поэтому мы вычисляем в этой точке значение функции: $z(1,0) = -1$.

Теперь переходим к граничным точкам. Заданная область имеет 3 прямолинейных граничных участка:

1) $x = 0,\ -2 \le y \le 2$,
2) $0 \le x \le 2,\ y = x - 2$,
3) $0 \le x \le 2,\ y = -x + 2$.

На участке 1) $x = 0,\ -2 \le y \le 2$

$$z = z_1(y) = y^2 + y,\ -2 \le y \le 2.$$

Функция $z_1(y)$ на отрезке [-2,2] принимает наибольшее значение, равное 6, в точке 2 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке -1/2.

На участке 2) $0 \le x \le 2,\ y = x - 2$

$$z = z_2(x) = x^2 - x(x-2) + (x-2)^2 - 2x + (x-2) = x^2 - 3x + 2\,,\ 0 \le x \le 2\,.$$

Функция $z_2(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 2, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке 3/2.

На участке 3) $0 \le x \le 2,\ y = -x + 2$

$$z = z_3(x) = x^2 - x(-x+2) + (-x+2)^2 - 2x + (-x+2) = x^2 - 9x + 6,\ 0 \le x \le 2$$

.

Функция $z_3(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 6, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -3/4, в критической точке 3/2.

Получив значения в критической точке и наибольшие и наименьшие значения на отрезках границы (-1, 6, -1/4, 2, -3/4), мы выбираем среди них наибольшее и наименьшее. Это значения 6 (наибольшее значение данной функции в заданном треугольнике) и -1 (наименьшее значение данной функции в заданном треугольнике).

Условный экстремум функции двух переменных

Задача:

Найти экстремум функции $z = f(x, y)$, при условии $\varphi(x, y) = 0$.

I способ. **Метод подстановки**.

Из уравнения $\varphi(x,y) = 0$ выразить $y = \psi(x)$ и подставить в $z = f(x,y)$. Тогда условный экстремум – обычный экстремум функции одной переменной $z = f(x, \psi(x))$.

II способ. **Метод Лагранжа**.

Исследуется на экстремум функция Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ – множитель Лагранжа.
Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0\ . \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА (достаточное условие условного экстремума функции 2-х переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ *– критическая точка для условного экстремума функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.*

Обозначим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & F''_{xx}(M_0) & F''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & F''_{xy}(M_0) & F''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) *если* $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 *– условный минимум*;
2) *если* $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 *– условный максимум*;
3) *если* $\Delta = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Пример: Найти точку условного экстремума функции

$$z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y \quad \text{при} \quad y - x = 0.$$

Решение.

Решим задачу первым способом.

Из уравнения $y - x = 0$ выразим y: $y = x$.

Вместо y в функцию z подставим x:

$$z = 4 - x^2 + 2x - x^2 + 4x \Rightarrow z = 4 - 2x^2 + 6x.$$

Найдем производную $z'_x = -4x + 6$.

$$-4x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow y = 1{,}5 \Rightarrow$$

$M_0(1{,}5;\ 1{,}5)$ – условный максимум.

Решим задачу вторым способом - методом Лагранжа.

Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x;y;\lambda) = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y + \lambda(y - x).$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2 - \lambda;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 4 + \lambda;$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + 2 - \lambda = 0 \\ -2y + 4 + \lambda = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 = \lambda \\ 2y - 4 = \lambda \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 2 = 2x - 4 \\ 2y - 4 = \lambda \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 1{,}5 \\ \lambda = -1 \end{cases}.$$

Получили точку $M_0(1{,}5;\ 1{,}5)$, $\lambda = -1$.

Найдем вторые частные производные от функции $F(x;y;\lambda)$ и частные производные от функции $\varphi(x;y)$

$$F''_{xx} = -2; \quad F''_{yy} = -2; \quad F''_{xy} = 0;$$

$$\varphi'_x = -1; \quad \varphi'_y = 1.$$

Теперь найдем

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

Тогда $M_0(1{,}5;\ 1{,}5)$ – условный максимум.