ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
и
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть I. Теория вероятностей: продолжение

Несколько тем из материала прошлой лекции:

геометрическая вероятность дополняется двумя примерами из Гмурмана;

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Условная вероятность. Независимость случайных событий. Независимость в совокупности.

Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Поиск сверхзадачи: повторные независимые испытания.

Испытания Бернулли. Приближенное вычисление вероятностей:

теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа.

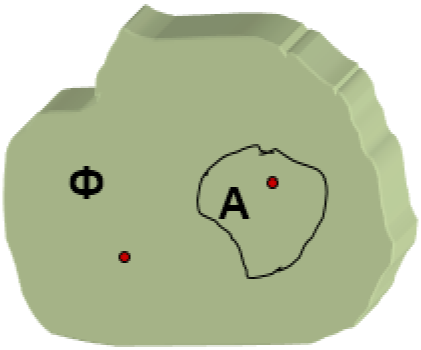
Геометрическое определение вероятности

- На фигуре Ф случайным образом выбирают точку (любое положение точки равновозможно).

$$\mu(\Phi) - \text{мера фигуры.}$$

- Событие А=(точка попадает внутрь области А).

$$\mu(A) - \text{мера области } A.$$



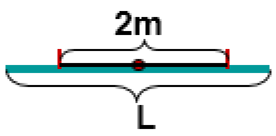
$$\boxed{P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Phi)}}$$

Геометрическое определение вероятности. Пример-1

Пример. На отрезок длины **L** наугад бросается точка. Какова вероятность того, что она упадет не дальше, чем на расстоянии **m** от середины отрезка?

Решение. **A**=(точка упадет не далее, чем на расстоянии **m** от середины)

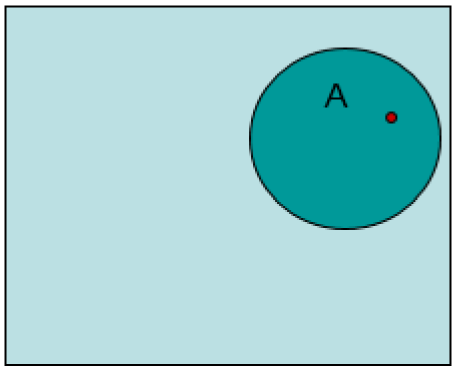
= **(точка попадает на отрезок длины 2m)**



$$P(A)=\frac{2m}{L} \qquad (2m\le L)$$

Геометрическое определение вероятности. Пример-2

- Пример.
- В квадрате случайным образом выбирают точку (в квадрат случайным образом бросают точку).



A =(точка попадает в круг A)

$$\boxed{P(A)=\frac{S_{круга}}{S_{квадрата}}}$$

Задача 34 из задачника Гмурмана:

34. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

Решение. 1 способ:

$$P(A) = \frac{nS_{сект}}{2nS_{сект}} = \frac{1}{2}$$

2 способ:

$$P(A) = \frac{S_{половины\ всех\ секторов}}{S_{всех\ секторов}} = \frac{S_{полукруга}}{S_{круга}} = \frac{1}{2}$$

Задача 36 из задачника Гмурмана:

36. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Ответ:

36. Возможные значения координат: $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$; благоприятствующие значения: $y - x < x$, $y > x$; $x - y < y$, $y < x$; $p = 1/2$.

В знаменателе стоит площадь квадрата, т.е. L^2. В числителе – площадь области благоприятствующих значений, т.е. числитель равен

$$L^2 p = 2\int_0^L dy \int_{y/2}^{y} dx = 2\int_0^L \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L^2}{2}, \text{ откуда } p = \frac{1}{2}.$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

А. Теорема сложения

Поэтому естественно принять, что если A и B – несовместные события, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.3)$$

Правило сложения вероятностей для двух случайных событий по индукции легко распространяется на сумму любого конечного числа случайных событий: *если случайные события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, то вероятность их суммы, т.е. вероятность появления хотя бы одного из этих событий, равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \qquad (1.4)$$

Б. Теорема умножения

Во многих задачах приходится находить вероятность совмещения событий A и B, если известны вероятности событий A *и* B.

Условной вероятностью $P(B/A)$ будем называть вероятность события B при условии осуществления события A.

Теорема умножения. Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) . \qquad (1.7)$$

Следующий раздел, посвященный независимости случайных событий, содержит важнейший частный случай теоремы умножения, а именно формулу $P(AB) = P(A)P(B)$, а также ее обобщения.

1.6. Независимость случайных событий

Два события A и B называются *независимыми,* если предположение о том, что произошло одно из них, не изменяет вероятность другого, т.е. если

$$P(B/A) = P(B); \ P(A/B) = P(A).$$

Из соотношения (1.9) вытекает, что из двух записанных выше равенств одно является следствием другого.

Пример. Пусть событие A – появление герба при однократном бросании монеты, а событие B – появление карты бубновой масти при вынимании карты из колоды. Очевидно, что события A и B независимы.

В случае независимости событий A и B формула (1.7) примет более простой вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \tag{1.13}$$

т.е. *вероятность совмещения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми в совокупности,* если вероятность наступления каждого из них не меняет своего значения после того, как одно или несколько из остальных событий осуществились.

Исходя из этого определения, в случае независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$ между собой в совокупности на основании формулы (1.11) имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (1.14)$$

Кроме того, вероятность совмещения любой комбинации из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению их вероятностей. В частности, независимость трех событий A, B и C в совокупности означает выполнимость четырех условий:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C);$$
$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B);$$
$$P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C);$$
$$P(A \cdot C) = P(A) \cdot P(C).$$

Отметим одно полезное при решении задач свойство: если события A и B независимы, то будут независимыми следующие пары событий: 1) A и $\overline{B}$; 2) $\overline{A}$ и B; 3) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и тогда

$$P(\overline{A}\cdot B)=P(\overline{A})\cdot P(B);\ P(A\cdot \overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B});P(\overline{A}\cdot \overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}).$$

Полная группа событий

События $A_1, A_2, ..., A_N$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и одно из них обязательно должно произойти при рассматриваемом испытании, т.е. их сумма $A_1 + A_2 + ... + A_N$ есть достоверное событие.

Примеры. Пусть X – число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости. События $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$, $X = 4$, $X = 5$, $X = 6$ образуют полную группу. Точно так же полную группу образуют и события X четно, X нечетно или события $X \le 2$, $X \ge 3$.

Из этих примеров видно, что из системы событий, связанных с данным испытанием, можно различным образом конструировать полные группы событий.

Теорема. Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \qquad (1.5)$$

Противоположные события

Два события A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если они образуют полную группу (т.е. появление одного из них равносильно непоявлению другого). Так как $P(A)+P(\overline{A})=1$, то по вероятности одного из противоположных событий можно находить вероятность другого:

$$P(A)=1-P(\overline{A}), P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.6}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БЕЙЕСА

3.0. Если об обстановке опыта можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и если событие A может появиться только вместе с одной из этих гипотез, то

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\mid H_i), \tag{3.0.1}$$

где $\mathrm{P}(H_i)$ — вероятность гипотезы H_i; $\mathrm{P}(A \mid H_i)$ — условная вероятность события A при этой гипотезе. Формула (3.0.1) называется *формулой полной вероятности.*

Если до опыта вероятности гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ были равны $\mathrm{P}(H_1)$, $\mathrm{P}(H_2), \ldots, \mathrm{P}(H_n)$, а в результате опыта произошло событие A, то новые (условные) вероятности гипотез вычисляются по формуле

$$\mathrm{P}(H_i\mid A)=\frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\mid H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\mid H_i)} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3.0.2}$$

Формула (3.0.2) называется *формулой Бейеса.* Доопытные (первоначальные) вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_1), \mathrm{P}(H_2), \ldots, \mathrm{P}(H_n)$ называются априорными, а послеопытные $\mathrm{P}(H_1 \mid A), \mathrm{P}(H_2 \mid A), \ldots, \mathrm{P}(H_n \mid A)$ — апостериорными. Формула Бейеса дает возможность «пересмотреть» возможности гипотез с учетом наблюденного результата опыта.

Если после опыта, давшего событие A, проводится еще один опыт, в результате которого может произойти или нет событие B, то вероятность (условная) этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(H_i)$, а новые $P(H_i \mid A)$:

$$P(B \mid A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \mid A) P(B \mid H_i A). \qquad (3.0.3)$$

Формулу (3.0.3) иногда называют «формулой для вероятностей будущих событий».

Текстовые задачи (частично решались на практике)

Задача из Ефимова – Поспелова, 1.196 (1984 г.), 18.243 (2003 г.).

18.243. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 — только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если только помеха, — то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

Задача из Ефимова – Поспелова, 1.196 (1984 г.), в издании 2003 г. не обнаружена.

1.196. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90% (т.е. 10% носителей туберкулеза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, действительно является носителем туберкулеза?

Затравка-2

Ефимов-Поспелов, задача 18.251 (2003 г.), в издании 1984 г. не обнаружена.

18.251. Астрономический объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в одном из двух состояний: H_1 или H_2. Априорные вероятности этих состояний $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}4$. Наблюдение ведется независимо двумя обсерваториями. Первая обсерватория обычно дает правильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта в 90 % случаев, а в 10 % ошибается; вторая дает правильные сведения в 80 % случаев, а в 20 % ошибается. Первая обсерватория сообщила, что объект находится в состоянии H_1, а вторая — что в состоянии H_2. Найти апостериорную вероятность состояния H_1.

Ответ: $135/139 \approx 0{,}971$.

Что здесь будет событием A?

А вот дальше у нас «развилка»: вместо того, чтобы перейти к (дискретным) случайным величинам, обратимся к испытаниям Бернулли

Повторные независимые испытания. Испытания Бернулли

Теория вероятностей имеет дело с такими экспериментами, которые можно повторять (по крайней мере, теоретически) неограниченное число раз. Пусть некоторый эксперимент повторяется n раз, причем результаты каждого повторения не зависят от исходов предыдущих испытаний. Такие серии повторений называют **независимыми испытаниями**.

Частным случаем таких испытаний являются **независимые испытания Бернулли**, которые характеризуются двумя условиями:

1) результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов, называемых соответственно «успехом» или «неудачей»;

2) вероятность «успеха» в каждом последующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается постоянной.

Мы следуем книге Лебедева-Фадеевой [9].

Еще раз, по Феллеру [6], т. 1, с. 163:

§ 1. ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ [1])

Повторные независимые испытания называются испытаниями Бернулли, если каждое испытание имеет только два возможных исхода и вероятности исходов остаются неизменными для всех испытаний. Обычно эти две вероятности обозначают через p и q, и исход с вероятностью p называют «*успехом*» $У$, а второй — «*неудачей*» $Н$. Ясно, что p и q должны быть неотрицательными и

$$p+q=1. \tag{1.1}$$

Пространство элементарных событий каждого отдельного испытания состоит из двух точек $У$ и $Н$. Пространство элементарных событий n испытаний Бернулли содержит 2^n точек или последовательностей из n символов $У$ и $Н$; каждая точка представляет собой один возможный исход составного испытания. Поскольку испытания независимы, вероятности перемножаются. Иначе говоря, *вероятность любой конкретной последовательности есть произведение, полученное при замене символов $У$ и $Н$ на p и q соответственно.* Таким образом, $\mathbf{P}\{(УУНУН\ldots ННУ)\}=ppqpq\ldots qqp$.

Теорема Бернулли. Формула Бернулли

Теорема 1 (формула Бернулли). *Если производится серия из n независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых «успех» появляется с вероятностью p, то вероятность того, что «успех» в n испытаниях появится ровно m раз, выражается формулой*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q=1-p$ – вероятность «неудачи».

Приведенная формула называется *формулой Бернулли*, а теорема 1 – *теоремой Бернулли*.

Схему независимых испытаний Бернулли называют также *биномиальной схемой*, или *схемой Бернулли*, а соответствующие вероятности – *биномиальными*, что связано с использованием в теореме (формуле) биномиальных коэффициентов C_n^m.

Доказательство теоремы 1 – см. [9].

Задача 1. Игральная кость бросается 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».

Решение. Бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха (появления «шестерки»), равной 1/6, и вероятностью неудачи — 5/6. Искомую вероятность вычисляем по формуле:

$$P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}054\,.$$

Задача 2. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.

Решение. Искомая вероятность равна сумме вероятностей трех событий, состоящих в том, что герб не выпадет ни разу, либо один раз, либо два раза:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}344\,.$$

Задача 3. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди четырех фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Решение. Событие состоит в том, что из четырех фирм-нарушителей будет выявлено три или четыре, т.е.

$$P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + C_4^4 0{,}9^4 = 0{,}9^3(0{,}4 + 0{,}9) = 0{,}9477\,.$$

Наивероятнейшее число успехов

Число m, при котором биномиальные вероятности $P_n(m)$ достигают своего максимального значения (при фиксированном числе испытаний n) называют обычно *наиболее вероятным (наивероятнейшим) числом успехов.*

Теорема 2. *Наивероятнейшее число успехов m^* в серии из n независимых испытаний Бернулли (с вероятностью успеха p в одном испытании) определяется неравенством*

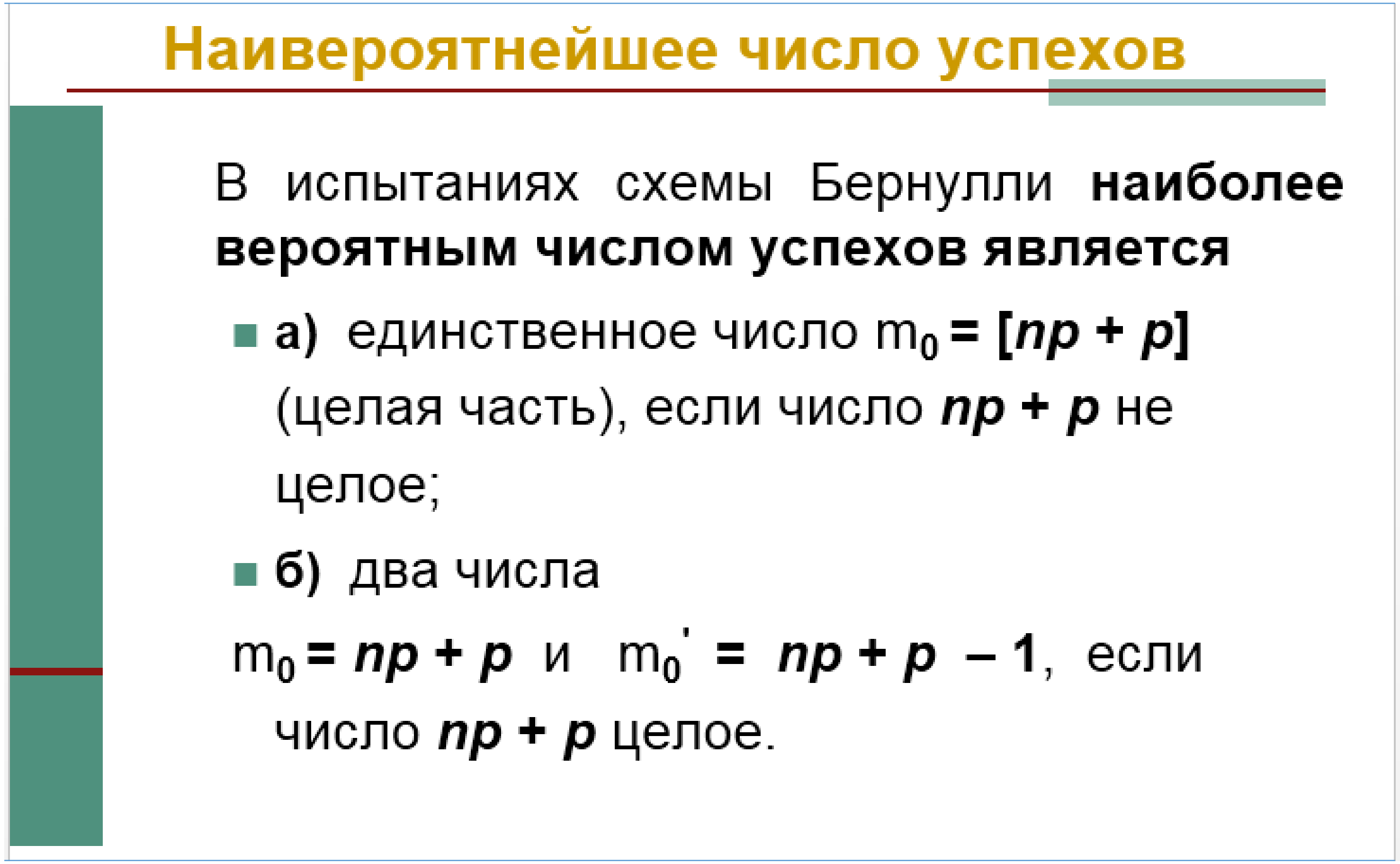
$$np - q \le m^* \le np + p,$$

причем :

1. *если число $np-q$ – не целое, то существует одно наивероятнейшее число m^*;*
2. *если число $np-q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа: $m^*=np-q$, $m^*=np+p$;*
3. *если np – целое число, то наивероятнейшее число $m^*=np$.*

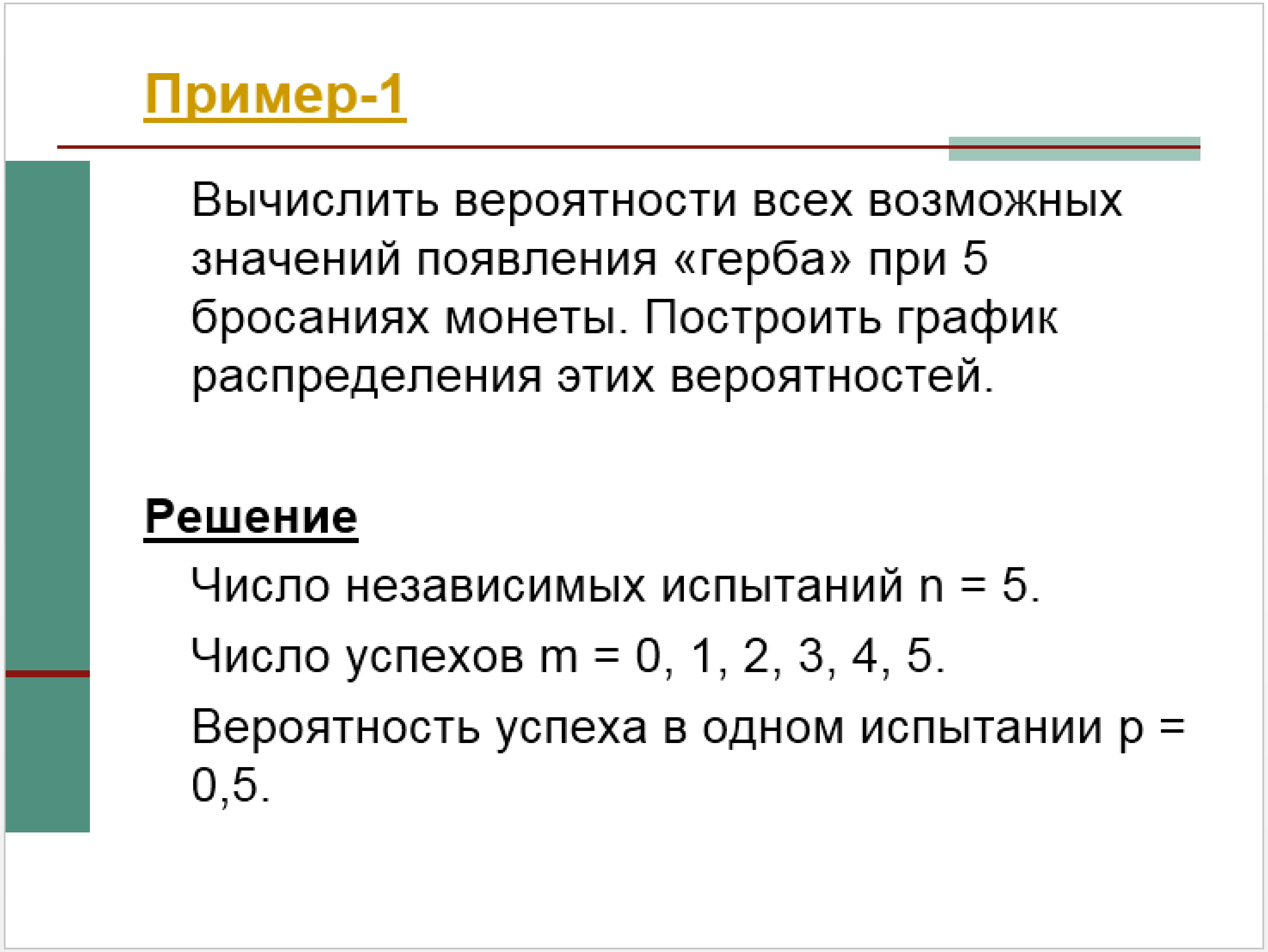
А вот теперь – интрига:

Интрига – в [7] читаем:



***УПР*. На первый взгляд данное определение отличается от устанавливаемого выше в теореме 2. Выяснить, эквивалентны ли оба эти определения.**

Пройдемся еще немного вдоль [7]: Пример-1



Пример-1

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$n = 5,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125,$$

$$P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} = 0.15625,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = 0.31250, \text{ и т. д.}$$

Пример-1

- **Наивероятнейшее число успехов:**

Вычисляем ***np*** **+ *p*** = **5·1/2 + ½ = 3.**

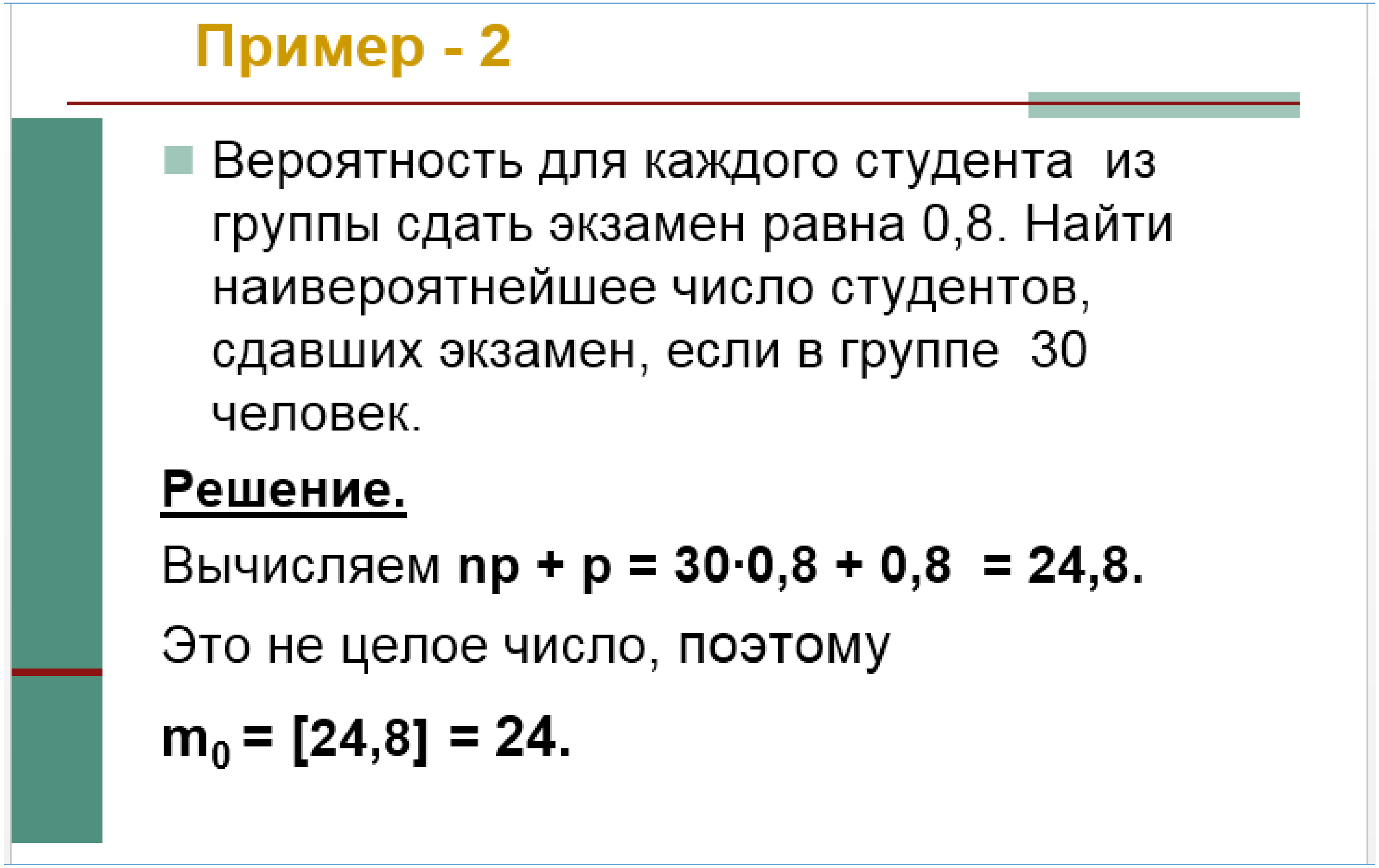
Это целое число, поэтому

$$m_0 = np + p = 3 \quad \text{и} \quad m_0' = np + p - 1 = 2.$$

Самые большие (и равные между собой) вероятности у двух и трех появлений герба.

ЗАДАНИЕ. Проверьте все вычисления, довычисляйте все, что осталось, и, все-таки, постройте график функции $y = P_n(m)$ как функции от m.

[7]: Пример-2



Вопрос. А почему здесь правомерно применение схемы Бернулли?
Задание. Обоснуйте эту правомерность.

Задача 4. Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадений герба).

Решение. Возможными значениями для числа успехов в трех рассматриваемых испытаниях являются $m = 0, 1, 2$ или 3. Пусть A_m – событие , состоящее в том, что при трех подбрасываниях монеты герб появится ровно m раз. По формуле Бернулли легко найти вероятности событий A_m (см. таблицу):

m	0	1	2	3
$P_n(m)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Из этой таблицы видно, что наиболее вероятными значениями являются числа 1 и 2 (их вероятности больше остальных и равны 3/8). Этот же результат можно получить из теоремы 2. Действительно, n=3, p=1/2, q=1/2. Тогда

$$3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\le m^*\le 3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{, т.е. } 1\le m^*\le 2\,.$$

Задача 5. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 3/4. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 10.

Решение. В этой задаче $n=10$, $p=3/4=0,75$, $q=1/4=0,25$. Тогда неравенство для наиболее вероятного числа успехов имеет вид:

$$10\times0,75-0,25\leq m^*\leq10\times0,75+0,75 \text{ или } 7,25\leq m^*\leq8,25.$$

Существует только одно целое решение этого неравенства, а именно, $m^*=8$.

Задача 6. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.

Решение. Имеем $n=25$, $p=0,1$, $q=0,9$. Неравенство для наиболее вероятного числа успехов принимает вид:

$$25\times0,1-0,9\leq m^*\leq25\times0,1+0,1 \text{ или } 1,6\leq m^*\leq2,6.$$

У этого неравенства только одно целое решение, а именно, $m^*=2$.

Снова [7]:

④ Предельные теоремы схемы Бернулли

При числе испытаний, превышающем 20, вычисление точного значения $P_n(m)$ затруднительно. В этих случаях применяют приближенные формулы, вытекающие из предельных теорем.

Различают два случая:

- **когда p не мало (и не очень близко к единице), справедливо приближение Лапласа – локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа;**
- **когда p мало, используют приближение Пуассона – теорема Пуассона.**

Завершим изложение [7]:

Локальная предельная теорема Лапласа

Локальная предельная теорема применяется, если надо вычислить вероятность $P_n(k)$ и $npq > 10$. Сначала найдем

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \text{и} \quad x = \frac{k - np}{\sigma}.$$

Из таблицы или с помощью калькулятора находим приближенное значение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Если $x < 0$, пользуемся четностью функции $\varphi(x)$. Вероятность $P_n(k)$ находится из приближенного равенства

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}}.$$

Интегральная предельная теорема Муавра - Лапласа

Применяется для приближенного нахождения сумм вероятностей $P_n(k)$. Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что событие A наступит число раз, не меньше k_1 и не больше k_2, то есть

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Предполагаем, что число $k_2 - k_1$ достаточно велико. Вначале находим приближенные значения

$$\sigma = \sqrt{npq}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma}.$$

По таблице находим значения функции Лапласа

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad i = 1, 2,$$

учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная.

Теорема Муавра–Лапласа утверждает, что

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Пример - 1

- **Вероятность рождения мальчика p = 0,5. Найти вероятность того, что в группе из 100 новорожденных мальчиков не меньше 60.**

Решение.

$$p(60 \le m \le 100) \approx$$

$$\Phi\left(\frac{100-100\cdot 0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right)-\Phi\left(\frac{60-100\cdot 0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{25}}\right)-\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{25}}\right)=\Phi(10)-\Phi(2)\approx 1-0,98=0,02.$$

Предельная теорема Пуассона

Теорема Пуассона применяется, если n велико, а npq мало (то есть $npq < 10$.) Это бывает в том случае, если вероятность p или q является достаточно маленьким числом. Пусть p мало (если q мало, можно понимать q как вероятность «успеха»). Найдем $\lambda = np$, тогда по теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться калькулятором или таблицей распределения Пуассона.

Пример-2. (дни рождения)

Какова вероятность, что среди 500 случайно выбранных людей ни один не родился 1 января ?

<u>Решение</u>

По формуле Бернулли

$$P_{500}(0) = C_{500}^{0} p^{0} (1-p)^{500} = \left(\frac{364}{365}\right)^{500} \approx 0.2537$$

Пример-2

- По приближенной формуле Пуассона

$$\lambda = np = 500 \cdot \frac{1}{365} \approx 1.3699$$

$$P_{500}(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \approx e^{-1.3699} \approx 0.2541$$

Таблицы:

Таблица 1. Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

	Десятые доли x				
x	0	2	4	6	8
4	0,0001338	0000589	0000249	0000101	0000040
5	0,0000015				

Таблица 2. Значения функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы 2

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	04015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0.4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблица 3. Значения функции Пуассона $P(m,\lambda)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

$m \setminus \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4		0,00005	0,000250	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7							0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8										0,00001

$m \setminus \lambda$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674	0,00409	00248
1	0,33470	0,27067	0,20521	0,14936	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369	0,02248	0,01487
2	0,25102	0,27067	0,25652	0,22404	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422	0,06181	0,04462
3	0,12551	0,18045	0,21376	0,22404	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037	0,11332	0,08924
4	0,04707	0,09022	0,13360	0,16803	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547	0,15582	0,13385
5	0,01412	0,03609	0,06680	0,10082	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547	0,17140	0,16062
6	0,00353	0,01203	0,02783	0,05041	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622	0,15712	0,16062
7	0,00076	0,00344	0,00994	0,02160	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444	0,12345	0,13768
8	0,00014	0,00086	0,00311	0,00810	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528	0,08487	0,10326
9	0,00002	0,00019	0,00086	0,00270	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627	0,05187	0,06884
10		0,00004	0,00022	0,00081	0,00230	0,00529	0,01042	0,01813	0,02853	0,04130
11		0,00001	0,00005	0,00022	0,00073	0,00192	0,00426	0,00824	0,01426	0,02253
12			0,00001	0,00006	0,00021	0,00064	0,00160	0, 00343	0,00654	0,01126
13				0,00001	0,00006	0,00020	0,00055	0,00132	0,00277	0,00520
14					0,00001	0,00006	0,00018	0,00047	0,00109	0,00223
15						0,00002	0,00005	0,00016	0,00040	0,00089
16							0,00002	0,00005	0,00014	0,00033
17								0,00001	0,00004	0,00012
18									0,00001	0,00004
19										0,00001

Ниже эти таблицы еще «всплывут»

Канонический текст [9]

Теорема Пуассона

Теорема 3 (теорема Пуассона). *Пусть число испытаний в схеме Бернулли велико: $n\to\infty$, а вероятность успеха мала: $p\to 0$, но так, что $np\to\lambda=const$, $\lambda>0$. Тогда*

$$P_n(m)\to\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Доказательство. По формуле Бернулли, после умножения числителя и знаменателя на n^m и некоторых преобразований, получаем

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)p^m}{m!}(1-p)^{n-m}$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)n^m}{m!n^m(1-p)^m}p^m\left(1-\frac{np}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}(np)^m\left(1-\frac{np}{n}\right)^n\frac{1}{(1-p)^m}\to\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad n\to\infty,\quad p\to 0.$$

Из теоремы следует ***приближенная формула Пуассона***

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

а соответствующие предельные вероятности называются *пуассоновскими*. Поскольку при больших n верно $np\approx\lambda$, то можно считать, что $\lambda=np$.

Из теоремы следует ***приближенная формула Пуассона***

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

а соответствующие предельные вероятности называются *пуассоновскими*. Поскольку при больших n верно $np\approx\lambda$, то можно считать, что $\lambda=np$.

Приближенная формула Пуассона используется в том случае, когда число испытаний n велико, а вероятность успеха в отдельном испытании мала (p<0,1) и при этом np невелико (np<10).

Формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей *массовых* (n велико) и *редких* (p мало) явлений. Отсюда название закона Пуассона – **закон редких явлений**. Закон Пуассона широко применяется в теории информации, в теории массового обслуживания при изучении потока событий.

В силу определенной «симметричности» понятий «успех» и «неудача» приближенная формула Пуассона может использоваться в схеме независимых испытаний Бернулли при больших n также и в случае, когда p близко не к нулю, а к единице, т.е. при q<0,1 и nq<10:

$$P_n(n-m) = C_n^{n-m} p^{n-m} q^m = C_n^m q^m p^{n-m} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = nq.$$

Значения пуассоновских вероятностей при некоторых m и λ представлены в таблице 3 приложения Т.

Задача 7. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Решение. Имеем n=1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005. Применяя пуассоновское приближение с $\lambda=np=5$, получаем

1) $P_{1000}(3)\approx\frac{5^3}{3!}e^{-5}$;

2) $P_{1000}(m\geq3)=1-P_{1000}(m<3)=1-[\,P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)\,]\approx1-\sum_{m=0}^{2}\frac{5^m}{m!}e^{-5}$,

По таблице 3 приложения Т находим $P_{1000}(3)\approx0{,}14$; $P_{1000}(m\geq3)\approx0{,}875$.

Теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 4 (локальная теорема Муавра–Лапласа).

Пусть p=const, $0<p<1$, $n\to\infty$, и величина

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

ограничена, тогда

$$P_n(m)\Big/\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\to 1,$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Из теоремы 4 следует *приближенная (локальная) формула Муавра–Лапласа:*

$$P_n(m)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

которая используется в случаях, когда наряду с числом испытаний n велики также np и nq ($np>10$, $nq>10$).

Функция $\varphi(x)$ – четная, и для положительных значений x составлена таблица ее значений (см. таблицу 1 приложения Т).

Задача 8. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p=0,75. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.

Решение. В данном случае n=100, m=80, p=0,75, q=0,25. Найдем

$$x = \frac{80 - 100 \times 0,75}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} \approx 1,15 ,$$

и по таблице 1 приложения Т определяем $\varphi(x) \approx 0,2059$, тогда искомая вероятность равна

$$P_{100}(80) \approx \frac{0,2059}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} \approx 0,048 .$$

Теорема 5 (интегральная теорема Муавра–Лапласа). *Пусть p=const,* $0<p<1$, $n\to\infty$, *тогда равномерно относительно a и b* $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ *имеет место предел*

$$P\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}dz .$$

Здесь и далее под вероятностью неравенства, относящегося к m, имеется в виду сумма вероятностей $P_n(m)$ по всем m, удовлетворяющим этому неравенству.

Отсюда следует, что для вычисления вероятности $P(m_1 \le m \le m_2)$ события, состоящего в том, что число успехов m в n испытаниях Бернулли окажется заключенным в пределах от m_1 до m_2, т.е.

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$$

можно использовать следующую *приближенную (интегральную) формулу Муавра–Лапласа*:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) ,$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

а

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

– функция Лапласа.

е в степени ***минус*** зэт-квадрат пополам.

Действительно, при достаточно больших n можно считать, что

$$P\left(x_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Приближенная формула здесь используется при тех же условиях, что и для локальной теоремы Муавра–Лапласа: когда наряду с числом испытаний n велики также np и nq (np>10, nq>10).

Функция $\Phi_0(x)$ – нечетная: $\Phi_0(-x) \equiv -\Phi_0(x)$ для всех x, и равна нулю при x=0: $\Phi_0(0)=0$. Для функции $\Phi_0(x)$ составлены специальные таблицы при некоторых положительных значениях аргумента (см. таблицу 2 приложения Т). При x>5 можно считать, что $\Phi_0(x)=0{,}5$.

Задача 9. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

Решение. По условию задачи n=40000, p=0,02, np=800, $\sqrt{npq} = 28$. Для вычисления вероятности $P(m \le 870)$ воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{40000}(0 \le m \le 870) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{0-800}{28} \approx -28{,}57 \text{ и } x_2 = \frac{870-800}{28} = 2{,}5.$$

Находим по таблице значений функции Лапласа:

$$P(0 \le m \le 870) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \approx \Phi_0(2{,}5) - \Phi_0(-28{,}57) \approx 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938.$$

Следствие (интегральной теоремы Муавра–Лапласа). *Пусть* $p=const$, $0<p<1$, $n\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, *и*

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\to C,$$

тогда вероятность того, что относительная частота появления успеха в n независимых испытаниях Бернулли (т.е. число m/n) отклонится от вероятности успеха p не более чем на $\varepsilon>0$, *стремится к пределу*:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\to 2\Phi_0(C).$$

Доказательство получаем из следующей цепочки очевидных равенств:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P\left(p-\varepsilon\le\frac{m}{n}\le p+\varepsilon\right)=P(np-n\varepsilon\le m\le np+n\varepsilon)=$$

$$=P\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\to\Phi_0(C)-\Phi_0(-C)=2\Phi_0(C).$$

Отсюда следует *приближенная формула*:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

которая используется при тех же условиях, что и для теорем Муавра–Лапласа: когда наряду с числом испытаний n велики также np и nq ($np>10$, $nq>10$).

Задача 10. Каждый из 900 посетителей оптового рынка случайным образом обращается в один из 10 ларьков. В каких границах с вероятностью 0,95 лежит число клиентов отдельно взятого ларька?

Решение. По условию задачи n=900, p=0,1, q=0,9 и заданная вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=0{,}95,$$

а с другой стороны, можем использовать приближенную формулу:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отсюда следует, что должно (приближенно) выполняться равенство

$$\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа находим, что аргумент функции Φ_0 должен быть равен

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=1{,}96,$$

откуда получаем значение

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{pq}{n}}\cdot 1{,}96=\sqrt{\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{900}}\cdot 1{,}96=0{,}0196.$$

Тогда из условия

$$\left|\frac{m}{900}-\frac{1}{10}\right|\le 0{,}0196$$

находим промежуток для m: $|m-90|\le 17{,}64$ или $72{,}36\le m\le 107{,}64$, и поскольку m – число целое, то $73\le m\le 107$.

Приближенные формулы можно использовать и в следующей *«урновой» схеме*: из генеральной совокупности объема N, содержащей M белых и $N–M$ черных шаров, осуществляется последовательный выбор без возвращения n элементов. Вероятность того, что в полученной выборке окажется ровно m белых шаров, описывается формулой (см. §2.3):

$$P_{M,N}(m,n) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Если объем генеральной совокупности и число белых шаров в ней достаточно велики ($N\to\infty$, $M\to\infty$, $M/N\to p$=const), то «урновую» схему можно приближенно заменить схемой Бернулли:

$$P_{M,N}(m,n) \approx P_n(m), \quad \text{где } P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Далее, при необходимости, можно использовать приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Вопрос: можно ли на этом пути прояснить ситуацию в «той» задаче с перчатками из лекции I? Можно ли 6 перчаток как-то связать с наивероятнейшим числом успехов, когда Р = 0,97?

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. "Теория вероятностей и математическая статистика: теория вероятностей: практикум". М. Изд. Дом МИСиС, 2015. № 2454. (печатное)

2. Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. "Теория вероятностей и математическая статистика: математическая статистика: практикум". М. Изд. Дом МИСиС, 2016. № 2770. (электронное)

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2015.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Юрайт, 2015.

5. Володин И.Н. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Казань, 2006. – 271 с.

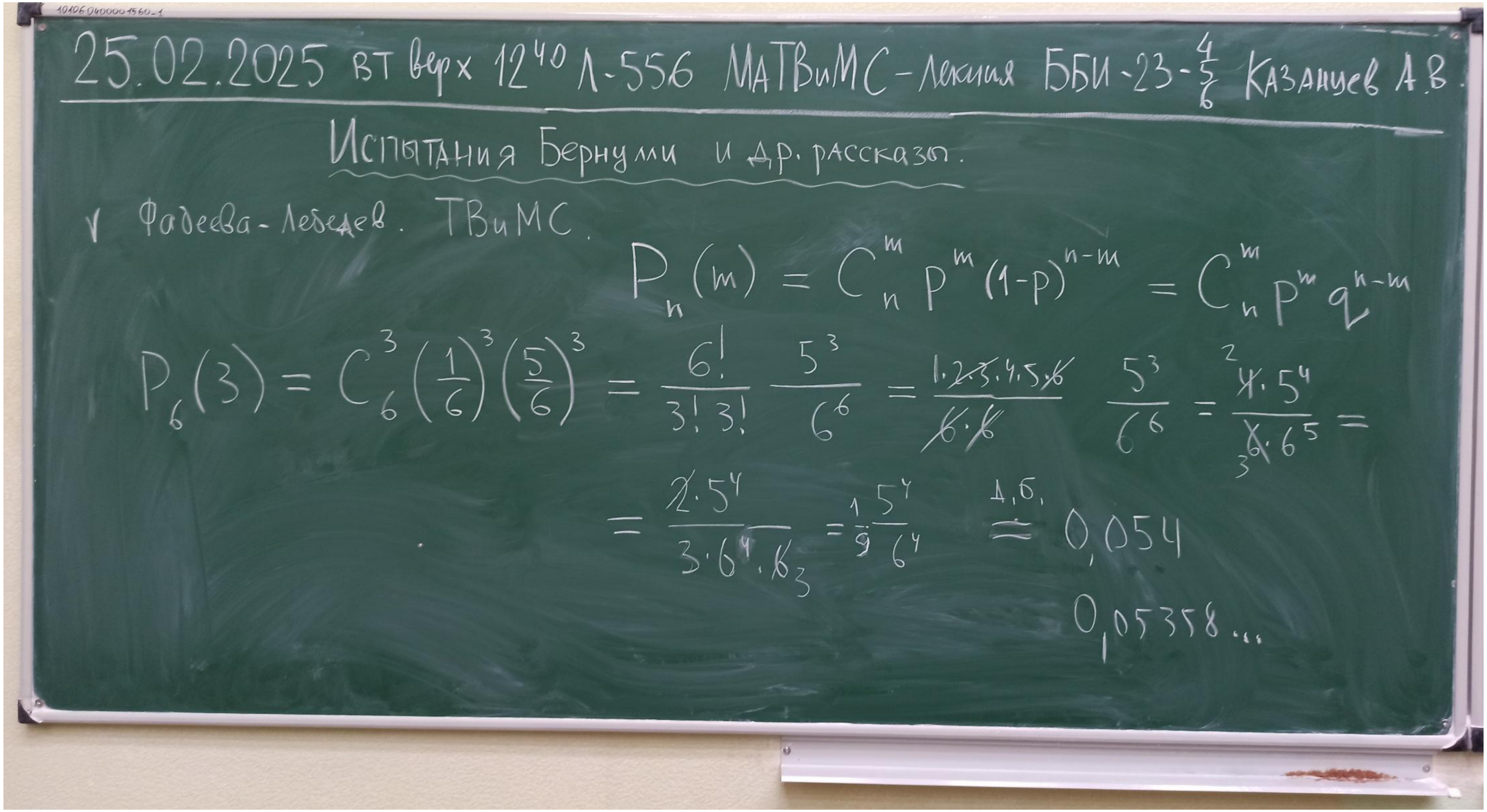
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х тт. М.: «Мир», 1984.

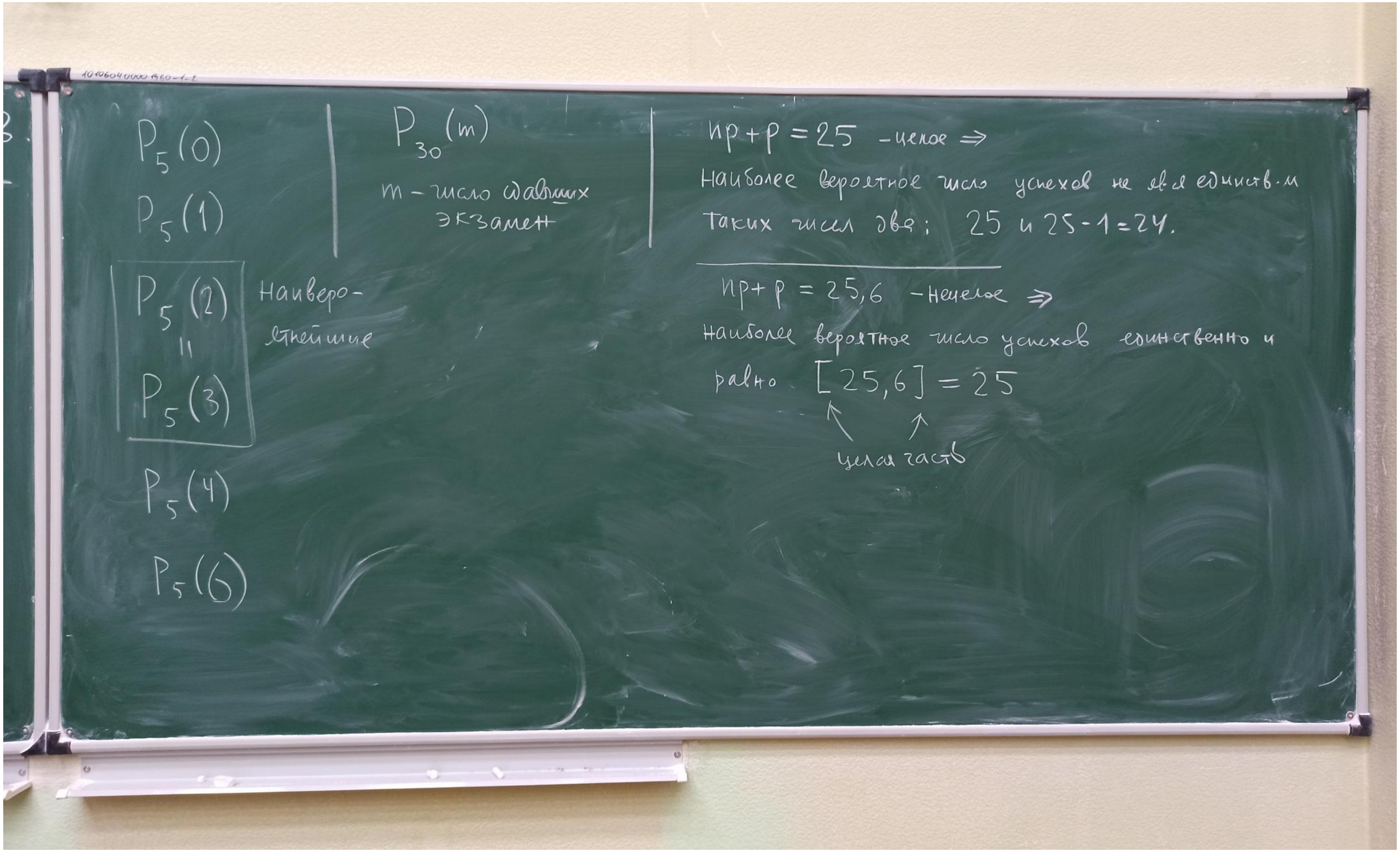
7. Лекция – 2. ТВиМС Осн.теоремы. Полная вер-ть. Схема Бернулли, предельные теоремы.ppt (Материалы из курса в Moodle).

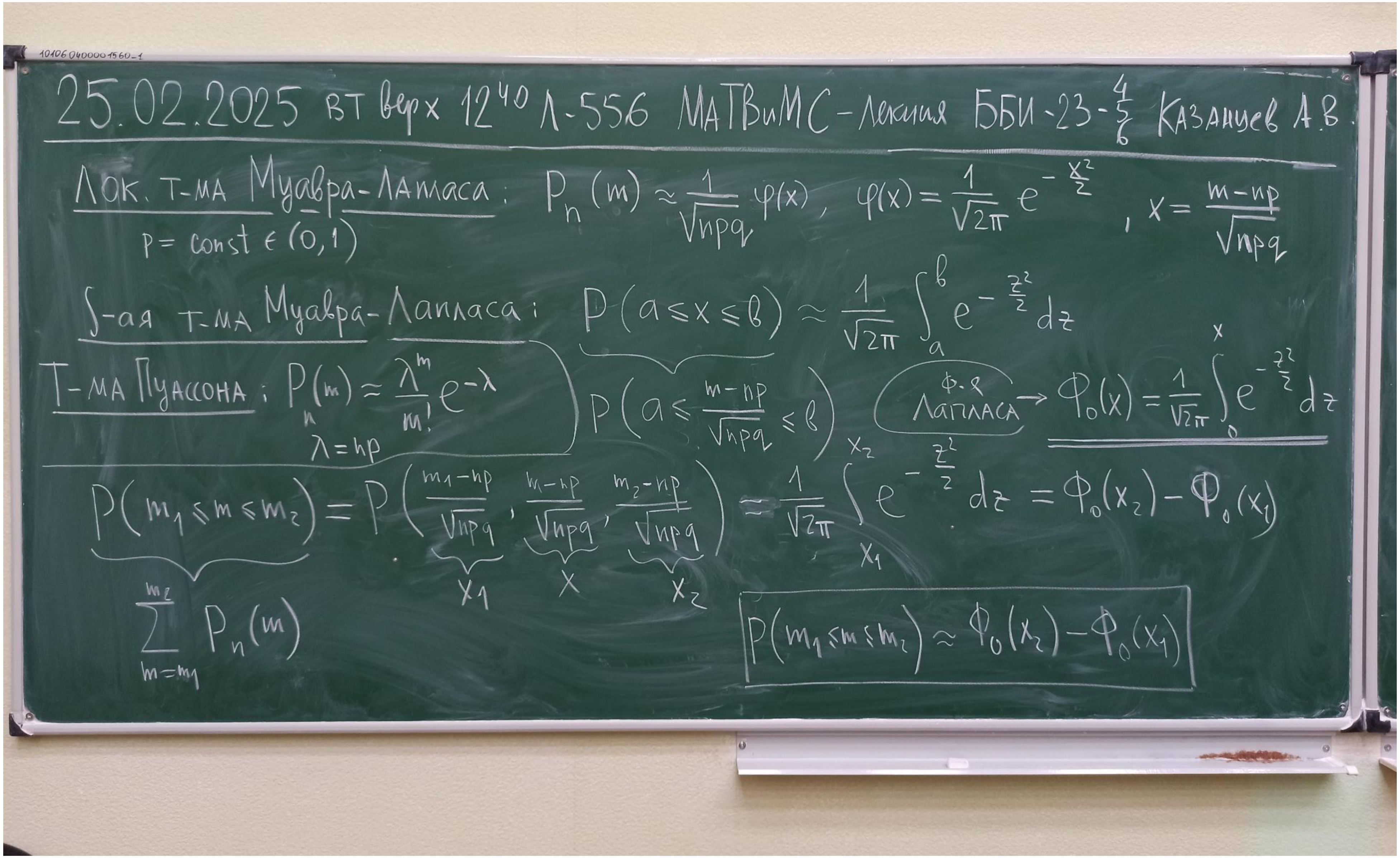
8. Лекция 2. Предмет теории вероятностей. Аксиомы Колмогорова.pdf (Материалы из курса в Moodle).

9. Лебедев А. В., Фадеева Л. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / А. В. Лебедев, Л. Н. Фадеева. Под ред. А. В. Лебедева. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., 2018. – 480 с.

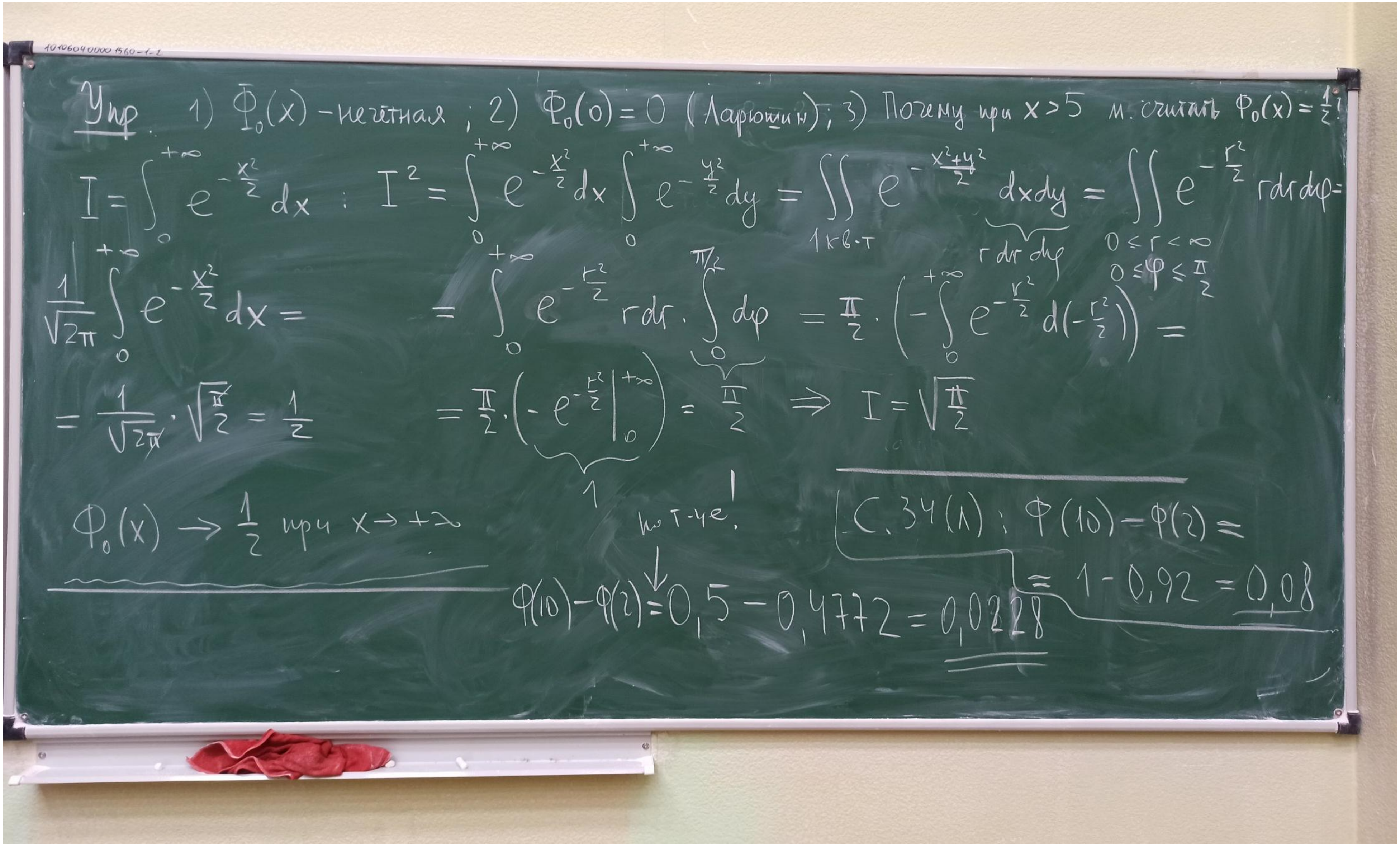
ФОТО НА ЛЕКЦИИ




$P_5(0)$
$P_5(1)$
$P_5(2)$
$P_5(3)$
наиверо-
ятнейшие
$P_5(4)$
$P_5(6)$
$P_{30}(m)$
m – число сдавших
экзамен
np + p = 25 – целое ⇒
Наиболее вероятное число успехов не явл. единств.-м
Таких чисел два: 25 и 25 - 1 = 24.
np + p = 25,6 – нецелое ⇒
наиболее вероятное число успехов единственно и
равно [25,6] = 25
целая часть



25.02.2025 вт верх 12^{40} Л-556 МАТВиМС-лекция ББИ-23-$\frac{4}{5}{6}$ Казанцев А.В.
Лок. т-ма Муавра-Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$
$p = \text{const} \in (0,1)$
$\int$-ая т-ма Муавра-Лапласа: $\underbrace{P(a \leq x \leq b)}_{P\left(a \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}dz$
Т-ма Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$
$\lambda = np$
ф-я Лапласа $\to \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$
$\underbrace{P(m_1 \leq m \leq m_2)}_{\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)} = P\left(\underbrace{\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}}_{x_1}, \underbrace{\frac{m-np}{\sqrt{npq}}}_{x}, \underbrace{\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}}_{x_2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)$
$\boxed{P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)}$


Упр. 1) $\Phi_0(x)$ – нечётная; 2) $\Phi_0(0)=0$ (Ларюшин); 3) Почему при $x>5$ м. считать $\Phi_0(x)=\frac{1}{2}$?
$I=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$; $I^2=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\iint_{1\text{ кв-т}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\underbrace{dx\,dy}_{r\,dr\,d\varphi}=\iint_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\varphi=$
$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}d\varphi}_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right)=$
$=\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}\right)}_{1}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$
$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$
$\Phi_0(x)\to\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$
по т-че!
$\Phi(10)-\Phi(2)=0,5-0,4772=0,0228$
С.34(л): $\Phi(10)-\Phi(2)=$
$=1-0,92=0,08$