

2 Решение матричных уравнений

2.1 Цель работы

1. Нахождение обратной матрицы.
2. Решение матричного уравнения с помощью обратной матрицы.

2.2 Теоретическое введение

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. При сложении матриц складываются их соответствующие элементы, а при умножении матрицы на число на него умножается каждый элемент этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В результате умножения получается матрица $C = A \cdot B$, у которой столько же строк, сколько в матрице A , и столько же столбцов, сколько в матрице B :

Матрица	A	B	$C = A \cdot B$
Число строк	m	n	m
Число столбцов	n	l	l

Запишем матрицы A и B в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{il} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Обозначим элементы матрицы $C = A \cdot B$ через c , $1 \leq i \leq m$.

Тогда

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{il} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}.$$

По определению элемент c_{ij} , матрицы $C = A \cdot B$ равен скалярному произведению i -й строки матрицы A (i – первый индекс элемента c_{ij}) на j -й столбец матрицы B (j – второй индекс элемента c_{ij}), т.е.

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad (2.2)$$

Наряду с матрицей A будем рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A . Эту

матрицу называют **транспонированной** к A и обозначают через A^T .

Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, $n = m$, называется **главной диагональю матрицы**.

Матрица, у которой моменты, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, называется **единичной матрицей**, и обозначается буквой E . Так, единичная матрица 3-го порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица обладает замечательным свойством:

умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную не меняет исходную матрицу т.е. $A \cdot E = E \cdot A = A$. Это свойства и объясняет ее название.

Матрица A^{-1} называется **обратной матрицей** к квадратной матрице A , если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (2.3)$$

Если определитель $|A|$ квадратной матрицы A не равен нулю, то существует и, притом единственная, матрица A^{-1} .

Правило нахождения обратной матрицы

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A n -го порядка называется определитель матрицы $n - 1$ -го порядка, которая получается из матрицы A путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца (на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Алгебраическим дополнением A_{ij} , элемента a_{ij} называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Через A^V обозначим матрицу (называемую присоединенной к матрице A), элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A^V = (A_{ij}); \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда обратная матрица A^{-1} находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^V)^T \quad (2.4)$$

Для матрицы A третьего порядка (3x3) обратная матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В типовом расчете рассматриваются матричные уравнения двух типов: $X \cdot A = B$ и $A \cdot X = B$, где A – квадратная матрица с $|A| \neq 0$.

Рассмотрим сначала уравнение $X \cdot A = B$. Умножим обе части этого уравнения справа на матрицу A^{-1} , тогда по определению обратной матрицы уравнение $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ равносильно уравнению

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1} \quad \text{или} \quad X = B \cdot A^{-1} \quad (2.5)$$

Если в условии варианта дано уравнение $A \cdot X = B$, то умножим обе части этого уравнения слева на матрицу A^{-1} , тогда уравнение $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ равносильно уравнению

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{или} \quad X = A^{-1} \cdot B \quad (2.6)$$

2.3 Содержание типового расчета

Заданы квадратная матрица A и прямоугольная матрица B . Решить матричное уравнение вида $X \cdot A = B$ или $A \cdot X = B$, где X – искомая матрица. Конкретный вид уравнения задан в каждом варианте. Провести поэтапный контроль: расчета обратной матрицы A^{-1} умножением A на A^{-1} ; найденного решения X подстановкой в

исходное уравнение.

2.4 Пример выполнения типового расчета

Условие типового расчета

Вариант Уравнение	Матрица A	Матрица B
930207 $A \cdot X = B$	$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 11 \\ -14 & 7 & 16 \\ -10 & -11 & -16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -297 & -366 \\ 122 & 159 & -52 \end{pmatrix}$

Выполнение типового расчета

1. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле (4)

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -14 & 16 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} = -2 \cdot 16 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -11 & -1 \end{vmatrix} + 8 \cdot 2 \cdot 16 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 11 \cdot 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 5408.$$

При вычислении определителя использовано разложение его по первой строке. Получившиеся определители второго порядка упрощены вынесением общего множителя из какой-либо строки или столбца. Затем найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$A^V = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -8 & 11 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -10 & -16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -10 & -11 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -8 & 11 \\ 7 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -14 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -14 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -384 & 224 \\ -249 & 142 & 58 \\ -205 & -122 & -126 \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$A^{-1} = \frac{1}{5408} \begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix}$$

Для удобства дальнейших расчетов не будем умножать матрицу на множитель, стоящий перед ней.

Проведем контроль расчетов, для этого перемножим матрицы A и A^{-1} . Если расчеты проведены верно, результатом должна быть единичная матрица.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 11 \\ -11 & 7 & 16 \\ -10 & -11 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5408 & 0 & 0 \\ 0 & 5408 & 0 \\ 0 & 0 & 5408 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408}$$

При умножении использована удобная форма записи, при которой вторая матрица-сомножитель записывается правее и ниже первой, а правее первой и выше второй записывается результат умножения. При такой записи каждое число матрицы-результата стоит на пересечении той строки первой матрицы и того столбца второй матрицы, скалярное произведение которых дает искомое число.

3) Решение X уравнения $A \cdot X = B$ найдем по формуле (2.5).

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -297 & -366 \\ 122 & 159 & -52 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 32448 & -64896 & 81120 & 1 \\ -64896 & -10816 & -37856 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5408} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64 & -249 & -205 \\ -384 & 142 & -122 \\ 224 & 58 & -126 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5408}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим матрицу X в исходное уравнение для проверки полученного результата:

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -297 & -366 \\ 122 & 159 & -52 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 11 \\ -14 & 7 & 16 \\ -10 & -11 & -16 \end{pmatrix}$$

2.5 Оформление отчета

В отчете по ТР должны быть представлены: расчет обратной матрицы A^{-1} , проверка ее умножением матриц A на A^{-1} , расчет искомой матрицы X , проверка найденного результата подстановкой матрицы X в исходное уравнение.

В ответе необходимо записать определитель матрицы A и матрицу X :

$$|A| = 5408 \quad X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 15 \\ -12 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$