8 Исследование поверхностей второго порядка

8.1 Цель работы

Научиться определять тип поверхностей и научиться рисовать их.

8.2 Теоретическое введение

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК) можно представить в виде

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0; \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \neq 0) \qquad (8.1)$$

Для каждой поверхности, определяемой уравнением (8.1), можно подобрать такую новую ДПСК (повернутую), что уравнение поверхности примет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0; \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \qquad (8.2)$$

В типовом расчете дается уравнение именно вида (8.2). Как и в случае кривых второго порядка, уравнение (8.2) можно еще более упростить, если перейти к некоторой (новой) ДПСК, которая получается из данной параллельным переносом осей. В результате мы получим 17 различных видов уравнений. Однако для нас интерес будут представлять только 9; остальные уравнения либо ничего не определяют (например, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$) либо определяют уже изученные нами геометрические объекты (например, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ определяет прямую – ось *OZ*).Эти 9 уравнений можно переписать в специальном виде, который называется каноническим, в таблице приведены канонические уравнения, а также названия и рисунки соответствующие им алгебраических поверхностей второго порядка.

Сделаем ряд кратких замечаний относительно этих поверхностей.

1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.3)$$

симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Следовательно, он имеет три плоскости симметрии *XOY*, *XOZ* и *YOZ*, три оси симметрии: *OX*, *OY* и *OZ* и центр симметрии – точку *O*(0, 0, 0).

Эллипсоид можно получить вращением эллипса вокруг одной из его осей и последующим сжатием. Он представляет собой ограниченную овальную поверхность. Плоскость либо не пересекает эллипсоид, либо касается его в одной точке, либо пересекает его по эллипсу.

Например, плоскость $z = 0$. Пересекает данный эллипсоид по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2.Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.4)$$

как и эллипсоид, симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Его можно получить вращением гиперболы вокруг ее действительной оси и последующим сжатием. Эта поверхность имеет вид бесконечной трубы, “нанизанной” на ось *OZ* и бесконечно расширяющейся при удалении “вверх” или “вниз” от плоскости *XOY*. Если однополостный гиперболоид (8.4) пересекать плоскостями, параллельными координатным, то в сечении могут получаться эллипсы (если плоскости параллельны *XOY*) или гиперболы. При сечении другими плоскостями могут также получаться и параболы, и пары пересекающихся прямых, и пары параллельных прямых. Отсюда, в частности, следует, что однополостный гиперболоид состоит из прямых, которые называют образующими. Этот последний факт широко используется в строительстве, например, при сооружении радиобашен.

3. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (8.5)$$

тоже симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Его можно получить вращением гиперсолы вокруг ее мнимой оси и последующим сжатием. Эта поверхность распадается на две бесконечные выпуклые чаши. Плоскость, параллельная плоскости *XOY*, или не пересекает двуполостный гиперболоид (8.5), или касается его в одной точке, или пересекает по эллипсу; плоскости, параллельные *XOY* и *YOZ*, пересекают его по гиперболам, при сечении другими плоскостями могут получаться и параболы.

4. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (8.6)$$

Поверхность, образованная прямыми (образующими), проходящими через данную точку (вершину) и пересекающими данную линию (направляющую), называется ***конической*** или ***конусом***.

Легко проверить, что уравнение (8.6) действительно определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат (в т. O (0,0,0)), а направляющей является, например, эллипс, который получается в сечении плоскостью $z = c$. Как и все предыдущие поверхности, конус (8.6) симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Любая плоскость пересекает конус (как и однополостный гиперболоид): плоскость *XOY* имеет с ним одну общую точку – начало координат – вершина конуса; плоскости, параллельные *XOY*, пересекают конус по эллипсам; сечения конуса координатными плоскостями *XOZ* и *YOZ* – пары пересекающихся прямых – образующие конуса; а плоскости, параллельные *XOZ* и *YOZ*, дают в сечении гиперболы; другие плоскости могут давать в сечении также параболы и прямые (в случае касания). Следует иметь в виду, что любая кривая второго порядка, полученная при сечении конуса плоскостью, является его направляющей.

В заключение отметим еще, что конус второго порядка можно получить вращением прямой вокруг оси, которую она пересекает и последующим сжатием.

5. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;\ (p>0, q>0) \qquad (8.7)$$

в отличие от предыдущих поверхностей имеет только две плоскости симметрии: *XOZ* и *YOZ* и одну ось симметрии: *OZ*. Его можно получить вращением параболы вокруг его оси симметрии и последующим сжатием. Эллиптический параболоид (8.7) имеет форму “чашки”, стоящей на плоскости *XOY* (точнее она касается плоскости *XOY* в начале координат); плоскости, параллельные *XOY* и лежащие ниже нее, не пересекают эллиптический параболоид, а лежащие выше – дают в сечениях эллипсы. Плоскости *XOZ* и *YOZ* и им параллельные дают в сечениях параболы. При сечении эллиптического параболоида (8.7) остальными плоскостями ничего другого мы получать не будем: либо плоскость пересекает параболоид (8.7) по эллипсу, либо по параболе, либо плоскость имеет одну общую точку с параболоидом (точку касания), либо, наконец, плоскость вообще не пересекает параболоид (8.7).

Эллиптический параболоид вращения со времен Архимеда широко используется в технике, так как он обладает оптическим свойством параболы.

6. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z;\ (p>0, q>0) \qquad (8.8)$$

как и эллиптический параболоид, имеет две плоскости симметрии (*XOZ* и *YOZ*) и одну ось симметрии (*OZ*). В отличие от рассмотренных выше поверхностей, он не есть результат вращения кривой. Он имеет форму седла. Гиперболический параболоид (8.8) пересекает плоскость *XOZ* по параболе $x^2 = 2pz$, ветви которой обращены вверх, а плоскость *YOZ* – по параболе $-y^2 = 2pz$, ветви которой обращены вниз. Вся поверхность может быть получена параллельным перемещением – скольжением второй параболы по первой. Любая плоскость пересекает гиперболический параболоид, в сечении могут получаться параболы, гиперболы (но не эллипсы) и пары пересекающихся прямых. Например, при сечении гиперболического параболоида (8.8) плоскостью *XOY* получаются прямые: $\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0$ и $\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$.

Последнее означает, что гиперболический параболоид состоит из прямых (как и однополостный гиперболоид), поэтому эта поверхность также находит применение в строительстве.

7. Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры

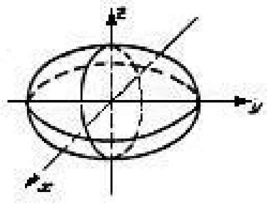
Поверхность, образованная параллельными прямыми (образующими), проходящими через все точки некоторой линии (направляющей), называется ***цилиндрической*** или ***цилиндром***. Например, цилиндром является поверхность, уравнение которой явно не содержит z, т.е. имеет вид $F(x, y) = 0$. В самом деле, эта поверхность состоит из прямых (образующих), параллельных оси *OZ* и проходящих через все точки кривой (направляющей), лежащей в плоскости *XOY* и уравнение которой имеет тот же вид, что и уравнение поверхности $-F(x, y) = 0$.

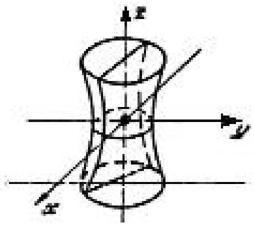
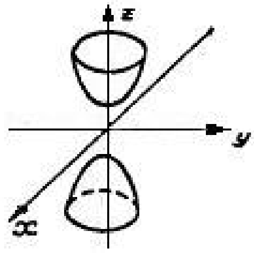
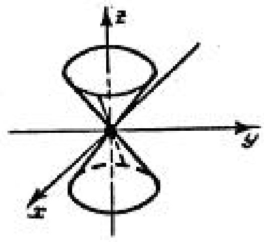
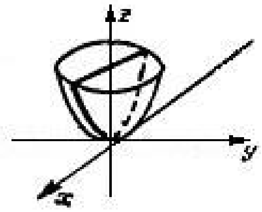
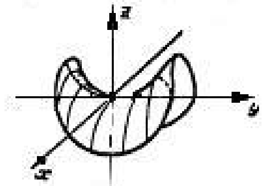
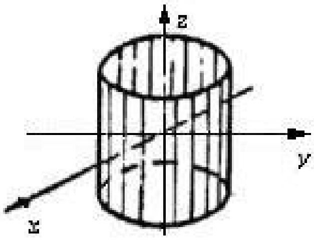
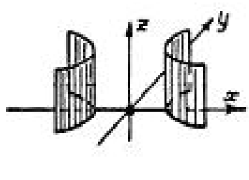
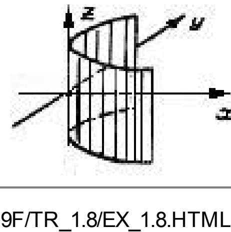
В частности уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2 = 2pz$$

определяют цилиндры, с соответствующими направляющими: эллипсом, гиперболой и параболой на плоскости *XOY*. Следует обратить внимание на то, что в нашем случае, хотя уравнения цилиндрических поверхностей и их направляющих имеют один и тот же вид, но смысл этих уравнений различный: в первом случае этому уравнению удовлетворяют координаты *точек пространства* (*X*, *Y*, *Z*). во втором – координаты *точек плоскости* (*X*, *Y*).Все сказанное относительно уравнений, которые явно не содержат z, естественно, справедливо и для уравнений, которые явно не содержат *Y* или *X*, так уравнение $F(x, z) = 0$ определяет цилиндр с образующими, параллельными оси *OY*, а $F(y, z) = 0$ – цилиндр с образующими, параллельными оси *OX*.

Классификация основных алгебраических поверхностей второго порядка

Номер вида	Уравнение поверхности	Название поверхности	Рисунок поверхности
1		Эллипс	

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид	
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двуполостный гиперболоид	
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус второго порядка	
5	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z; \ (p>0, q>0)$	Эллиптический параболоид	
6	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z; \ (p>0, q>0)$	Гиперболический параболоид	
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллиптический цилиндр	
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гиперболический цилиндр	
9	$y^2=px; \ (p>0)$	Параболический цилиндр	

8.3 СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Семь алгебраических поверхностей второго порядка заданы уравнениями вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \qquad (8.9)$$

Определить тип каждой поверхности и сделать рисунок.

8.4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

В условии заданы коэффициенты уравнения (8.9) в виде таблицы:

N	A	B	C	D	E	F	G
1	1	–4	–1	2	–8	2	0

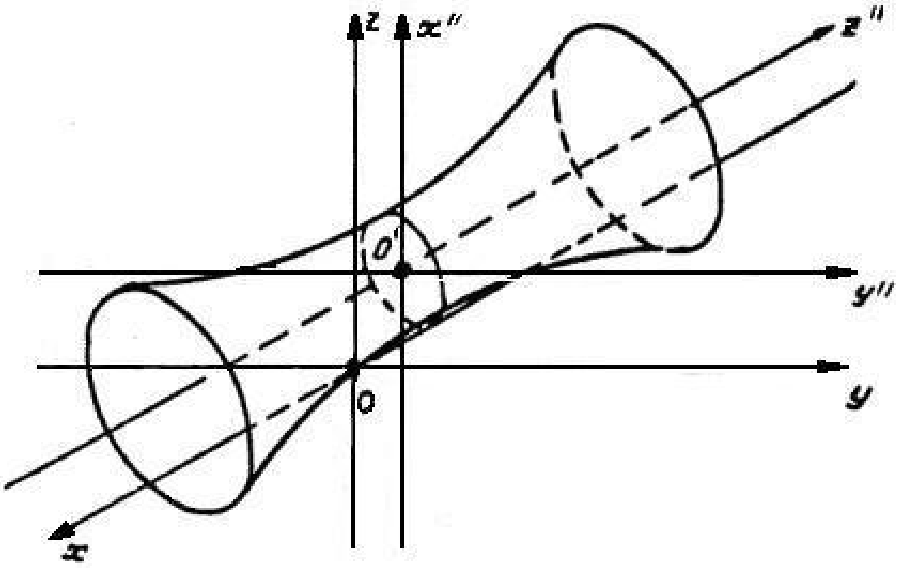
Приведем решение этой задачи. По условию уравнение имеет вид
$x^2 - 4y^2 - z^2 + 2x - 8y + 2z = 0$.
Выделим полные квадраты и приведем уравнение к виду:
$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 4(y + 1)^2 + 4 - (z - 1)^2 + 1 = 0$
$(x + 1)^2 - 4(y + 1)^2 - (z - 1)^2 = -4$
$-\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$
Положим $x' = x + 1$, $y' = y + 1$ и $z' = z - 1$. Это означает переход к новой ДПСК, которая получается из данной параллельным переносом и начало которой в т. $O'(-1, -1, 1)$.
Теперь, наше уравнение примет вид:

$$-\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} + \frac{(z')^2}{4} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{(y')^2}{1} + \frac{(z')^2}{4} - \frac{(x')^2}{4} = 1 \qquad (8.10)$$

и мы можем определить тип поверхности – однополостный гиперболоид, “нанизанный” на ось абсцисс новой ДПСК, т.е. на прямую, параллельную оси OX и проходящую через т. $O'(-1, -1, 1)$ (заметим, что уравнение (8.10) не является в строгом смысле каноническим уравнением однополостного гиперболоида; чтобы его получить, нужно “поменять” оси $O'X'$ и $O'Z'$, т.е. повернуть ДПСК $O'X'Y'Z'$ вокруг оси $O'Y'$ на 90° по часовой стрелке).

Сводка полученных результатов

Данное уравнение поверхности	$x^2 - 4y^2 - z^2 + 2x - 8y + 2z = 0$
Уравнение поверхности относительно ДПСК $O'X'Y'$ (после параллельного переноса)	$\left(\frac{(y')}{1}\right)^2 + \frac{(z')^2}{4} - \frac{(x')^2}{4} = 1$
Название поверхности	Однополостный гиперболоид
Связь между координатами Точки (X, Y, Z) и (X', Y', Z')	$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \\ z' = z - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \\ z = z' + 1 \end{cases}$
Координаты центра O'	$(-1, -1, 1)$



Однополостный гиперболоид
Рис. 8.1

8.5 Оформление отчета

Все результаты каждой задачи должны быть сведаны в таблицу, как это сделано в примере. Таблица должна содержать данные уравнение поверхности, каноническое уравнение и название поверхности: формулы, связывающие координаты точки относительно рассматриваемых ДПСК, координаты начала новой ДПСК в данной ДПСК.
Должен быть сделан аккуратный рисунок поверхности в данной ДПСК.
Работа должна содержать не только ответы на вопросы, поставленные в задании, но и все вычисления, на основании которых сделаны выводы.