Применение ДУ

РАДИАКТИВНЫЙ РАСПАД

В соответствии с законом радиоактивного распада вещества скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества.

Если обозначить $m(t)$ массу нераспавшегося вещества в момент t $(m(t) > 0)$, то этот закон можно записать в виде соотношения:

$$m'(t) = -\alpha \cdot m.$$

Знак минус указывает на то, что масса вещества убывает с ростом t.

Решение ДУ:

Разделим переменные:

$$\frac{dm}{m} = -\alpha \cdot dt\,.$$

После интегрирования получим

$$ln\, m = -\alpha \cdot t + ln\, C\,, \;\; m(t) > 0, C > 0$$

Здесь произвольное постоянное слагаемое мы представили в виде логарифма положительной постоянной величины для удобства последующего потенцирования:

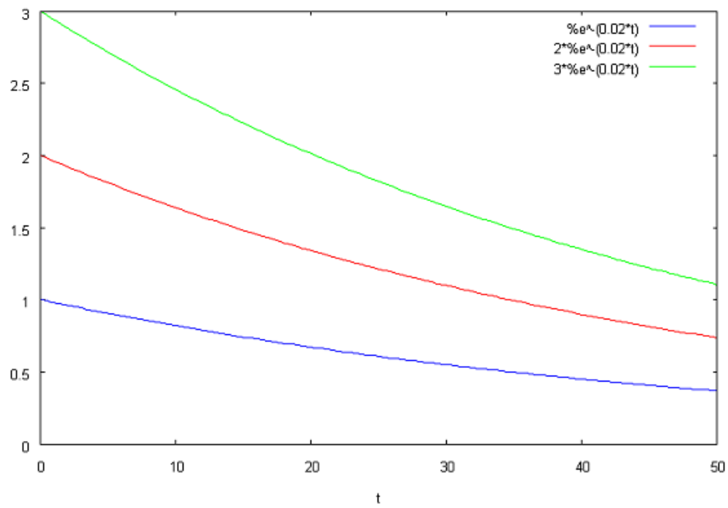
$m(t) = Ce^{-\alpha \cdot t}$, где $C > 0$ – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{R}$).

Проанализируем полученное решение.

Оно содержит постоянные α (эта постоянная зависит от вида радиоактивного вещества – стронций, радий, уран….) и C – постоянную интегрирования.

Предположим, что мы исследуем радиоактивный распад радия, для которого $\alpha = 0{,}02$, если измерять время в годах. Решение уравнения распада имеет вид

$m(t) = Ce^{-0{,}02 \cdot t}$, и мы получаем множество решений вследствие присутствия произвольной положительной константы C, то есть, общее решение.



Как выбрать единственное? В данном случае, чтобы узнать, какое количество радиоактивного вещества останется по прошествии определенного времени, необходимо знать, сколько его было в начальный момент. Задавая $m(0)$, мы задаем значение C.

Другие похожие задачи:

- «закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - t_0),$$

  где $T(t)$ – температура тела в момент времени t, k – коэффициент пропорциональности, t_0 – температура воздуха (среды охлаждения);
- Зависимости массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

  k – коэффициент пропорциональности;

- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением
$$\frac{dm}{dt} = km, \quad k > 0;$$
Например:
грибки, выделяющие пенициллин (согласно этому уравнению), размножаются по экспоненциальному закону. Что дало возможность в короткий срок обеспечили всех лекарством.

- Закон изменения давления воздуха p в зависимости от высоты над уровнем моря h описывается уравнением
$$\frac{dp}{dh} = -kp, \quad k > 0;$$
- Модель естественного роста выпуска продукции описывается уравнением
$$\frac{dy}{dt} = l \cdot m \cdot p \cdot y(t),$$

где

$y(t)$ – объем продукции, l – коэффициент пропорциональности, p – фиксированная цена, m – норма инвестиций.

Модель неограниченного роста

Пусть за промежуток времени Δt прирост численности популяции равен $\Delta x = R - S$, где R — число родившихся и S — число умерших за время Δt особей, пропорциональные этому промежутку времени:
$$R = R(x)\Delta t, \quad S = S(x)\Delta t,$$
тогда $\Delta x = \big(R(x) - S(x)\big)\Delta t$. Разделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение:
$$\dot{x} = R(x) - S(x).$$
Рассмотрим случай, когда рождаемость и смертность пропорциональны численности популяции, то есть $R(x) = \alpha x$, $S(x) = \beta x$. Пусть $r = \alpha - \beta$, тогда получим модель неограниченного роста или модель Мальтуса:
$$\frac{dx}{dt} = rx.$$

Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, найдем его решение:

$$\frac{dx}{x} = rdt, \quad \int \frac{dx}{x} = \int rdt, \quad \ln x = rt + C,$$

следовательно, $x(t) = e^{rt+C} = e^C e^{rt}$. Учитывая начальное условие $x(0) = x_0$, получаем $e^C = x_0$, поэтому $x(t) = x_0 e^{rt}$.
Эта модель описывает изолированную популяцию, которая развивается в условиях неограниченных ресурсов. Такие условия в природе встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи, отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии).

Модель ограниченного роста

Впервые эту модель описал Ферхюльст в 1838 г. в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad K > 0.$$

Логистическое уравнение обладает следующими важными свойствами — при малых значениях переменной x размер популяции возрастает экспоненциально, как и в модели неограниченного роста; при больших — приближается к пределу K. Величина K называется емкостью экологической ниши популяции и определяется ограниченностью пищевых ресурсов, мест для проживания и другими факторами.

Найдем решение уравнения . Отметим сначала, что решениями являются прямые $x = 0$ и $x = K$. Если $x \neq 0$ и $x \neq K$, разделим обе части уравнения (8) на $x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ и домножим на dt :

$$\frac{Kdx}{x(K - x)} = rdt.$$

Представим дробь в левой части в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{K}{x(K-x)} = \frac{(K-x)+x}{x(K-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}$$

и проинтегрируем обе части уравнения (9):

$$\ln x - \ln(K-x) = rt + \ln C; \quad \frac{x}{K-x} = Ce^{rt}.$$

Значение постоянной C можно найти из последнего уравнения, подставляя туда $t=0$, тогда $C = \dfrac{x_0}{K-x_0}$. Следовательно,

$$\frac{x}{K-x} = \frac{x_0}{K-x_0}e^{rt}.$$

Выражая переменную x из этого уравнения, находим:

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}.$$

Модель организации рекламной кампании

Пусть t — время, прошедшее с начала рекламной кампании;
$x(t)$ — число информированных клиентов;
X — общее число потенциальных покупателей;
$\dfrac{dx}{dt}$ — скорость изменения числа потребителей, узнавших о товаре;
$\alpha_1(t) > 0$ — затраты на рекламу в данный момент;
$\alpha_2(t) > 0$ — степень общения покупателей между собой.
$\dfrac{dx}{dt}$ пропорционально числу покупателей, еще не знающих о товаре, то есть $\alpha_1(t)(X - x(t))$.
Дополнительно предполагаем, что узнавшие о товаре потребители распространяют информацию среди неосведомленных. Их вклад равен $\alpha_2(t)x(t)(X-x(t))$.

$$\frac{dx}{dt} = \left[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)x(t)\right]\left(X - x(t)\right).$$

Частный случай — $\alpha_1(t) \equiv \alpha_1 > 0$, $\alpha_2(t) \equiv \alpha_2 > 0$; $x(0) = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_2\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + x(t)\right]\left(X - x(t)\right).$$

Замена: $z = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + x$; обозначим $K = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + X$.

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_2 z(K-z) = \alpha_2 K z\left(1 - \frac{z}{K}\right).$$

$$z(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{K - z_0 + z_0 e^{\alpha_2 K t}},$$

где $z_0 = z(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + x(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Тогда $z(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{X + z_0 e^{\alpha_2 K t}}$,

$$x(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{X + z_0 e^{\alpha_2 K t}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2};$$

Модель движения маятника

Уравнение упругих колебаний (без сопротивления) под действием синусоидальной внешней силы

$$y'' + a^2 y = b \sin \omega x, \quad a > 0, b > 0, \omega > 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + a^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm ia$.
Общее решение однородного уравнения $y'' + a^2 y = 0$:

$$\widetilde{y} = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

— колебания при отсутствии внешней силы, они называются собственными колебаниями.

Правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \big(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \big),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно.

$$f(x) = b \sin \omega x, \quad \alpha = 0, \beta = \omega.$$

Частное решение y^* ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \big(M_\ell(x) \cos \beta x + N_\ell(x) \sin \beta x \big),$$

где r — число, равное кратности $\alpha + i\beta = i\omega$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_\ell(x)$ и $N_\ell(x)$ — многочлены степени $\ell = \max(m, n)$ с неопределенными коэф-ми.

Случай $\omega \neq a$. $y^* = A \cos \omega x + B \sin \omega x$.

$$(y^*)' = -\omega A \sin \omega x + \omega B \cos \omega x.$$

$$(y^*)'' = -\omega^2 A \cos \omega x - \omega^2 B \sin \omega x.$$

$$y'' + a^2 y = (a^2 - \omega^2) A \cos \omega x + (a^2 - \omega^2) B \sin \omega x = b \sin \omega x.$$

Найдем $A = 0$, $B = \dfrac{b}{a^2 - \omega^2}$.

Общее решение уравнения

$$y = \widetilde{y} + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega x.$$

Резонансный случай $\omega = a$.

Частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний. Частное решение нужно искать в виде

$$y^* = x\big(A \cos \omega x + B \sin \omega x\big).$$

$$(y^*)' = A \cos \omega x + B \sin \omega x + x\omega\big(-A \sin \omega x + B \cos \omega x\big),$$

$$(y^*)'' = -2A\omega \sin \omega x + 2B\omega \cos \omega x + x\omega^2\big(-A \cos \omega x - B \sin \omega x\big).$$

$$(y^*)'' + \omega^2 y^* = -2A\omega \sin \omega x + 2B\omega \cos \omega x = b \sin \omega x.$$

Следовательно, $A = -\dfrac{b}{2\omega}$, $B = 0$. Общее решение уравнения

$$y = \widetilde{y} + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{bx}{2\omega} \cos \omega x$$

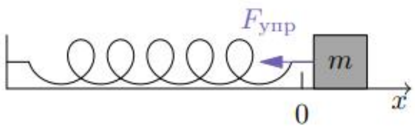
— колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

Описание свободных колебаний

Рассмотрим применение линейных уравнений второго порядка к исследованию простейших механических колебаний.

Колебания в среде без сопротивления

Предположим, что груз массы m лежит на горизонтальной плоскости, причём он может перемещаться по ней практически не испытывая силы трения. Пусть к грузу прикреплена пружина, за счёт чего он может совершать колебательные движения вдоль некоторой прямой. Свяжем с этой прямой ось Ox, взяв в качестве начала отсчёта положение равновесия центра масс груза



Если вывести груз из положения равновесия на небольшое расстояние, то на него будет действовать возвращающая сила упругости пружины, пропорциональная величине отклонения:

$$F_{\text{упр}} = -kx.$$

На основании второго закона Ньютона имеем

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Отсюда следует, что движение груза подчиняется уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, так что общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

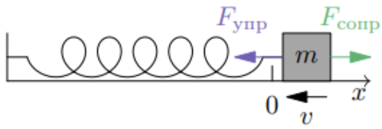
Положим $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Тогда

$$x(t) = A\left(\frac{C_1}{A}\cos \omega t + \frac{C_2}{A}\sin \omega t\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где число φ_0 таково, что $\sin\varphi_0 = C_1/A$, $\cos\varphi_0 = C_2/A$.

Колебания в вязкой среде

Допустим теперь, что рассматриваемый груз перемещается в вязкой среде и при движении испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости



движения. Таковой будет, например, сила сопротивления воздуха при малых скоростях движения груза (рис. 5.4). Для дальнейшего удобно обозначить коэффициент пропорциональности через $2mh$, то есть

$$F_{\text{сопр}} = -2mh\dot{x}, \quad h > 0.$$

В силу второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - 2mh\dot{x}.$$

Разделив на m и используя определение числа ω, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$$

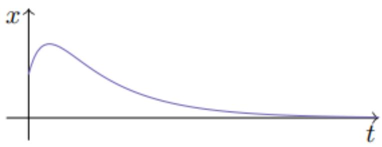
имеет корни $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$.

Здесь возможны три случая: $h > \omega$, $h = \omega$ и $h < \omega$.

Пусть $h > \omega$. Тогда характеристические числа вещественны и отрицательны, и общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{(-h-\sqrt{h^2-\omega^2})t} + C_2 e^{(-h+\sqrt{h^2-\omega^2})t}.$$

Движение в этом случае непериодическое, причём $x(t) \to 0$ и $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. То есть с течением времени движение груза замедляется, и его положение всё ближе к положению равновесия



Описание вынужденных колебаний

Допустим, что на груз, кроме уже упомянутых сил, действует дополнительная возмущающая сила $F(t)$. Применяя второй закона Ньютона, получаем

$$m\ddot{x} = -2mh\dot{x} - kx + F(t).$$

Разделив на m, приходим общему виду ***уравнения колебаний***

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t),$$

где $f(t) = F(t)/m$.

Модель «хищник–жертва»

Рассмотрим простейшую модель, описывающую борьбу двух биологических видов — хищника и жертвы. Пусть в некотором лесу обитают зайцы в количестве $x(t)$ и лисы в количестве $y(t)$.

Если бы лис не было, то зайцы размножались бы со скоростью, пропорциональной их количеству: $\dot{x} = kx$. Однако, при наличии лис следует учесть зайцев, съеденных лисами. Предположим, что число встреч зайцев с лисами пропорционально числу тех и других. Тогда

$$\dot{x} = kx - axy.$$

Лисы вымирают при отсутствии зайцев: $\dot{y} = -ly$. Если же зайцы водятся в лесу, то лисы размножаются со скоростью, пропорциональной числу пойманных зайцев:

$$\dot{y} = -ly + bxy.$$

Таким образом, мы приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases}$$

Эта система описывает простейшую модель системы хищник–жертва, называемую ***моделью Лотки–Вольтерра*** (по имени авторов, предложивших её). Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, которые на некотором интервале обращают каждое уравнение системы в тождество.

Если количество зайцев превышает количество лис , то популяции зайцев и лис растут, пока размножившиеся лисы не начнут съедать больше зайцев, чем их прирост. Затем число зайцев будет убывать, пока нехватка пищи не приведёт к вымиранию лис. Далее число лис уменьшится настолько, что зайцы снова начнут размножаться. В действительности про систему (6.1) известно, что её траектории являются замкнутыми, то есть в данной биологической системе происходят периодические колебания численности популяций.