# Введение в обыкновенные дифференциальные уравнения

Морозов Артём

3 марта 2025 г.

## 1 Основные понятия

Пусть в области $\Omega \in \mathbb{R}^{n+2}_{x,y,u_1,\ldots,u_n}$ задана функция $F(x, y, u_1, \ldots, u_n)$.
Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка $n$ называется соотношение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

где $x$ - независимая переменная, $y(x)$ - функция от $x$, $y'(x), \ldots, y^{(n)}$ - производные этой функции.
Решением ОДУ (1) называется функция $y = \varphi(x)$, определённая на некотором интервале $I =< \alpha, \beta >$, если выполняются условия:

1. $\varphi(x) \in \mathrm{C}^n(I)$
2. $\forall x \in I$ точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$
3. $\forall x \in I,\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$

## 2 ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

Пусть $\mathbb{R}^2_{x,y}$ - двумерное координатное пространство, $D \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ - область, $f(x, y)$ определена на $D$.
ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной имеет вид -

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

где $x$ - независимая переменная, $y = y(x)$ - функция.
В некоторых уравнениях, гораздо удобнее будет рассматривать обратную ситуацию:

$$x'_y = g(y, x) \tag{3}$$

где $y$ - независимая переменная, $x = x(y)$ - функция.
Дифференциальная форма уравнения (1) или (2) имеет вид

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

Всякое из уравнений (1) и (2) можно свести к дифференциальной форме.

## 2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида
$$y' = f(x)g(y) \tag{5}$$
называется уравнением с разделяющимися переменными. Решение данного уравнения через приведение к дифференциальной форме:

1. $P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0$
2. $\int P(x)\mathrm{d}x = -\int Q(y)\mathrm{d}y$
3. $F(x) = G(y) + C$ - может быть неявно заданной функцией

### 2.1.1 Уравнения, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными

Уравнение вида
$$y' = f(ax + by + c),\ b \neq 0 \tag{6}$$
возможно свести к уравнению с разделяющимися переменными следующей заменой:

1. $z = z(x), \quad z = ax + by + c$
2. $z'_x = a + by'_x = a + bf(ax + by + c) = a + bf(z)$
3. По итогу пришли к уравнению $z'_x = a + bf(z)$

## 2.2 Задача Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

$D \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ - область, $f(x, y)$ определена на $D$
$y' = f(x, y)$ имеет $\infty$ много решений. Для вычленения одного конкретного решения из этого бесконечного множества, Коши предложил начальные условия:
Задана точка $(x_0, y_0) \in D$, а $y = \varphi(x)$ - решение, определённое в точке $(x_0, y_0)$ и окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Постановка задачи:
Дано: 1) $(x_0, y_0) \in D$ - начальные условия + 2) $y' = f(x, y)$ - уравнение.
Найти: решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям, т.е. такое, что $\varphi(x_0) = y_0$

Важно также отметить, что если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ - непрерывные функции в $D$, то решение $\varphi(x)$ из постановки задачи Коши существует и единственно. Это утвеждение называется Теоремой о существовании и единственности (локальной) решения задачи Коши.

## 2.3 Однородные уравнения

Однородным уравнением называется уравнение вида
$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{7}$$

Метод решения сводится к получению уравнения с разделяющимися переменными путём замены переменной:

1. $t = t(x),\ t(x) = \dfrac{y}{x}$
2. $y = tx \implies \mathrm{d}y = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x$
3. Из дифференциальной формы уравнения (7) - $P(\frac{y}{x})\mathrm{d}x + Q(\frac{y}{x})\mathrm{d}y = 0$ получаем $P(t)\mathrm{d}x + Q(t)(x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x) = 0$
4. По итогу $(P(t) + tQ(t))\mathrm{d}x + xQ(t)\mathrm{d}t = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными

### 2.3.1 Уравнения, сводящиеся к однородным

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{8}$$

где $a_i,\ b_i,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2$, причём $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (условие линейной независимости числителя и знаменателя)

1. Для решений данного уравнения следует сначала решить систему: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ Решение системы - $(x_0, y_0)$
2. Замена переменных: $\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$ (перенос координат в точку $(x_0, y_0)$)
3. После замены уравнение принимает вид однородного: $\tilde{y}'_x = f\left(\dfrac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y}}\right)$ (после деления на $\tilde{x}$)

## 2.4 Линейные дифференциальные уравнения

Следует отметить, что понятие однородное будет иметь иное значение в контексте линейных дифференциальных уравнений, так что не следует путать эти термины.
Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{9}$$

где $a(x), b(x), f(x) \in \mathrm{C}(I)$ - непрерывные функции на интервале $I$
Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным.
Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным.
Решение однородного уравнения тривиально, так как оно является уравнением с разделяющимися переменными. В то же время, общее решение $y_{\text{о.н.}}$ неоднородного уравнения (9) складывается из общего решения соответствующего ему однородного уравнения $y_{\text{о.о.}}$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{ч.н.}}$:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x) \tag{10}$$

Поэтому, для решения уравнения (9) необходимо следовать следующему алгоритму:

1. Решить соответствующее однородное уравнение $a(x)y' + b(x)y = 0$
   Решение ищется в виде: $\varphi(x) = C\psi(x)$ - общее решение однородного уравнения
2. Найти частное решение неоднородного уравнения (9) следующим образом. $y = y_{\text{о.н.}} = C(x)\psi(x) \implies y'_{\text{о.н.}} = C'(x)\psi(x) + C(x)\psi'(x)$.
   Подставляем полученное выражение в (9) и получаем $a(x)C'(x)\psi(x) = f(x)$

Находим $C'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)\psi(x)}$ и $C(x) = \int C'(x)dx$
Подставляем найденное $C(x)$ в $y_{\text{о.н.}} = C(x)\psi(x)$ и получаем общее решение неоднородного уравнения (9)

Метод описанный в пункте 2 называется Методом вариации произвольной постоянной, с которым мы встретимся и в дальнейшем.

### 2.4.1 Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^k, \tag{11}$$

где $k \neq 1$, называются уравнениями Бернулли.
Такой вид уравнений сводится к линейным уравнениям заменой:

1. Если $k > 0$, то учтем решение $y = 0$
2. Приводим уравнение к виду $a(x)\dfrac{y'}{y^k} + b(x)\dfrac{1}{y^{k-1}} = f(x)$
3. Вводим новую переменную $z(x) = \dfrac{1}{y^{k-1}} \implies z' = (1-k)\dfrac{y'}{y^k}$

   Получается, что $\dfrac{y'}{y^k} = \dfrac{1}{1-k}z'$
4. Исходное уравнение свелось к линейному: $\dfrac{a(x)}{1-k}z' + b(x)z = f(x)$

## 2.5 Уравнения в полных дифференциалах

Пусть дано уравнение в дифференциальной форме:

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{12}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y) \in \mathrm{C}^1(D)$, а $D$ - односвязная область ("без дыр") в $\mathbb{R}^2_{x,y}$
Уравнение (12) называется уравнением в полных дифференциалах, если

1. $\exists u(x,y) \in \mathrm{C}^1(D)$
2. $\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

В таком случае, решение сводится к решению уравнения

$$\mathrm{d}u = 0$$
$$u(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R} \text{ - общий интеграл (общее решение)}$$

Алгоритм решения следующий:

1. Проверка (является ли уравнением в полных дифференциалах или нет)
   $(P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ - полный дифференциал в $D) \Leftrightarrow (\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в $D)$
2. $\mathrm{d}u(x,y) = u'_x\mathrm{d}x + u'_y\mathrm{d}y \implies u'_x = P(x,y)$ и $u'_y = Q(x,y)$
3. Ищем $u(x,y)$ - первообразную: $\begin{cases} u'_x = P(x,y) \\ u'_y = Q(x,y) \end{cases} \implies$
   $u(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \varphi(x,y) + \psi(y)$, а раз $u'_y = Q(x,y)$, то
   $(\varphi(x,y) + \psi(y))'_y = Q(x,y)$ - определяем $\psi(y)$, а после находим $u(x,y)$
4. Записываем ответ в виде общего интеграла $u(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$

### 2.5.1 Интегрирующий множитель

Для уравнения (12) рассмотрим ситуацию, когда $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. уравнение не в полных дифференциалах. Что если существует такая функция $\mu(x, y)$, которая преобразует уравнение к виду

$$(\mu P)\mathrm{d}x + (\mu Q)\mathrm{d}y = 0 \tag{13}$$

для которого $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$, иначе говоря

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x \tag{14}$$

т.е. уже оно оказывается уравнением в полных дифференциалах.
Такая функция $\mu(x, y)$ существует, причём всегда, и называется интегрирующим множителем. Зачастую, на практике, удаётся найти его только в частных случаях:

a) Интегрирующий множитель зависит только от $x$: $\mu = \mu(x)$
   1) Выражение (14) упрощается и приводится к виду: $\mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x$
   2) Выражаем $\mu$: $\dfrac{\mu'_x}{\mu} = (\ln(\mu))'_x = \dfrac{P'_y - Q'_x}{Q}$ - зависит только от $x$
   3) Интегрируя, находим $\mu(x)$

b) Интегрирующий множитель зависит только от $y$: $\mu = \mu(y)$
   1) Выражение (14) упрощается и приводится к виду: $\mu'_y P + \mu P'_y = \mu Q'_x$
   2) Выражаем $\mu$: $\dfrac{\mu'_y}{\mu} = (\ln(\mu))'_y = \dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ - зависит только от $y$
   3) Интегрируя, находим $\mu(y)$

# 3 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной, в общем виде задаются неявной функцией:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{15}$$

Есть уравнения сводящиеся к разрешенным. Если есть возможность свести уравнение к разрешённому, то следует это сделать, а дальше продолжить решение, пользуясь вышеизложенными методами.

## 3.1 Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

В рассмотренных ранее уравнениях, для выделения одного решения из бесконечного множества его решений (для решения Задачи Коши), было необходимо 1 начальное условие. Для уравнений, не разрешенных относительно производной, легко видеть, что одного условия недостаточно. Рассмотрим пример:

$$(y')^2 = 1 \implies y' = \pm 1 \implies \left[\begin{array}{l} y = x + C \\ y = -x + C \end{array}\right. \quad C \in \mathbb{R}$$

Для начального условия $y(1) = 1$ можно найти два решения: $y = 2 - x$ и $y = x$, а значит одного начального условия недостаточно.
Вывод: для решения задачи Коши в случае уравнения, не разрешенного относительно производной необходимо 2 начальных условия: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$

Постановка задачи Коши.
Дано: $F(x, y, p)$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,p}$. Точка $(x_0, y_0, p_0) \in G$
Найти: Решение $\varphi(x)$ уравнения (15), определенное на $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и такое, что $\varphi(x_0) = y_0$ и $\varphi'(x_0) = p_0$

Если $F(x, y, p) \in \mathrm{C}^1(G)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, то решение $\varphi(x)$ из постановки задачи Коши существует и единственно.
Решение, которое в каждой своей точке нарушает условие единственности (в частности $\dfrac{\partial F}{\partial p} = 0$), то такое решение называется особым решением уравнения (15)

## 3.2 Метод введения параметра

Самым частым приёмом для решения уравнения (15) служит метод введения параметра, в котором необходимо параметризовать переменную $x$ и функцию $y$:
$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} \implies$ Общее решение $\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = y(p, C) \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$ Если $x'_p \neq 0$, то можно представить ответ в явном виде $y = f(x)$.
На практике решаются частные случаи:

1. $y = f(x, y')$
2. $x = g(y, y')$

Вводим параметр: $y' = p \implies \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ и рассмотрим случай 1. $y = f(x, y')$
Имеем $y = f(x, p) \implies y'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x} \implies p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}$ - получили уравнение, разрешённое относительно $\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

## 3.3 Уравнение Лагранжа

Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$y = f(y')x + g(y'), \quad f(y') \neq y' \tag{16}$$

Уравнения такого вида решаются методом введения параметра и обязательно сводятся к линейным уравнениям.

## 3.4 Уравнение Клеро

Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$y = y'x + g(y') \tag{17}$$

Уравнения такого вида обязательно имеют следующую структуру решений:

1. Решение вида семейства прямых $y = Cx + g(c)$

2. Особое решение заданное параметрически $\begin{cases} x = -g'_p \\ y = -g'_p p + g(p) \end{cases}$

# 4 ОДУ старших порядков. Методы понижения порядка

Уравнения старших порядков в общем случае имеют вид

$$F(x, y, y' \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{18}$$

В большинстве своём, такие уравнения невозможно решить в квадратурах, однако, некоторые специальные виды допускают понижения порядка. Рассмотрим, когда это возможно.

## 4.1 Отсутствие функции $y$ в уравнении

Если уравнение имеет вид

$$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{19}$$

то возможно понизить порядок уравнения (на 1) при помощи замены

$$z = y',\ z' = y'', \dots,\ z^{(n-1)} = y^{(n)}$$

Приходим к уравнению $n-1$ порядка

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

## 4.2 Отсутствие независимой переменной $x$ в уравнении

Если уравнение имеет вид

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{20}$$

то возможно понизить порядок уравнения при помощи хитрой замены:

1. Пусть теперь $y$ - независимая переменная, а функция от неё зависящая - $y'_x = t(y)$. Рассмотрим, как преобразуются производные.
2. $y''_{xx} = (y'_x)'_x = t'_x = t'_y y'_x = t'_y t$
3. $y'''_{xxx} = (y''_{xx})' = (t'_y t)'_x = t''_{yy} t^2 + t(t'_y)^2$
4. При необходимости можно найти производные более высоких степеней.

Таким образом имеем уравнение $n-1$ порядка

$$F(y, t, t', \dots, t^{(n-1)}) = 0$$

## 4.3 Выделение полной производной

Самый трудный метод, но эффективный. Если уравнение может принять вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{21}$$

то оно допускает понижения степени

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C,\ C \in \mathbb{R} \tag{22}$$