МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математическим анализом называют раздел математики, в котором переменные величины (функции и их обобщения) изучаются методом пределов.

Понятие пределов связано с понятием бесконечно малой величины, и иногда говорят, что математический анализ изучает функции и их общения с использованием метода бесконечно малых.

Или, другими словами,

Математический анализ составляет основу языка и математических методов описания переменных величин и их взаимосвязей.

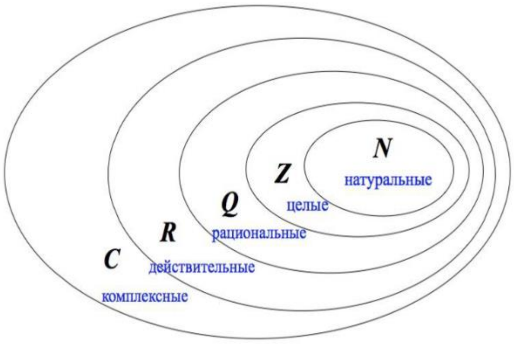
Переменные величины напрямую связаны с динамическими процессами, с движением. Переменные величины и их взаимосвязи окружают нас повсюду. Они являются объектом изучения физики, геологии, биологии, химии, экономики, социологии и др.
Без функций невозможно рассчитать не только космические траектории, работу ядерных реакторов, закономерности развития циклона, но и экономично управлять производством, распределением ресурсов, организацией технологических процессов, прогнозировать течение химических реакций, прогнозировать изменение численности различных взаимосвязанных в природе видов животных и растений – это все динамические процессы.

Множества

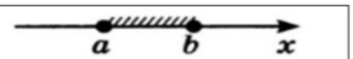
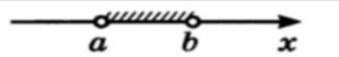
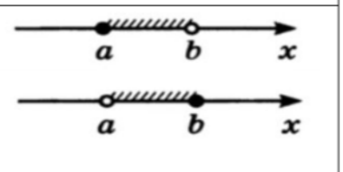
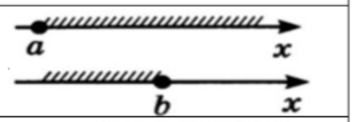
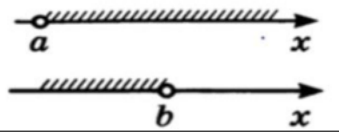
Понятие **множества** или **совокупности** принадлежит к числу простейших математических понятий. Оно не имеет точного определения. Любое множество задается своими элементами. Примерами являются множество книг в библиотеке или множество студентов, присутствующих на занятии. Обычно множество обозначают заглавными латинскими буквами (A), а его элементы строчными латинскими буквами (a). То, что элемент принадлежит множеству, обозначают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то этот факт обозначают так: $a \notin A$. Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то A – подмножество множества B ($A \subset B$).

Чтобы задать множество, следует или перечислить его элементы, или указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они. Мы уже знакомы со следующими примерами подмножеств вещественных чисел.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	множество целых чисел,
$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	множество рациональных чисел,
$\emptyset$	пустое множество



Промежутки на числовой оси

Отрезок	$[a; b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
Интервал	$(a; b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	
Полуинтервалы	$[a; b)$ $(a; b]$	$\{x \mid a \le x < b\}$ $\{x \mid a < x \le b\}$	
Бесконечные полуинтервалы (лучи)	$[a;\ +\infty)$ $(-\infty; b]$	$\{x \mid x \ge a\}$ $\{x \mid x \le b\}$	
Бесконечные полуинтервалы (открытые лучи)	$(a;\ +\infty)$ $(-\infty; b)$	$\{x \mid x > a\}$ $\{x \mid x < b\}$	

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов. Поэтому $A=B$ означает, что $A\subset B$ и одновременно $B\subset A$.

В рамках рассматриваемой математической теории вводят два исключительных множества: пустое множество ($\varnothing$), не содержащее элементов, и универсальное множество или «универсум» (U), содержащее все элементы данной теории.

Основные операции над множествами

1. **Дополнение.** Для любого множества $A\subset U$ определим дополнение $A^c=\{b\in U\,|\,b\notin A\}$.

Например, в множестве вещественных чисел дополнением к множеству Q является множество всех иррациональных чисел.

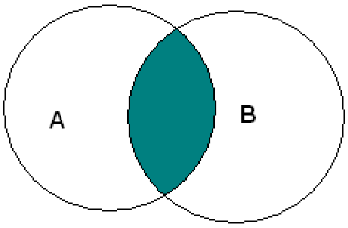
2. **Объединение.** Для любых двух множеств $A,B\subset U$ определим объединение $A\cup B=\{c\in U\,|\,(c\in A)$ или $(c\in B)\}$.

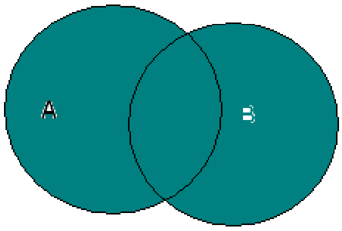
Например, объединением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [1,7].

3. **Пересечение.** Для любых двух множеств $A,B\subset U$ определим пересечение $A\cap B=\{c\in U\,|\,(c\in A)$ и одновременно $(c\in B)\}$.

Например, пересечением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [2,3].

Для иллюстрации операций над множествами вводят диаграммы Эйлера-Венна – круги, обозначающие множества. Так, введенные нами операции иллюстрируются следующим образом.





A ∩ B A ∪ B

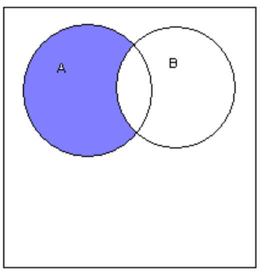
Подчеркнем, что диаграммы Эйлера-Венна не могут служить доказательствами равенства множеств.

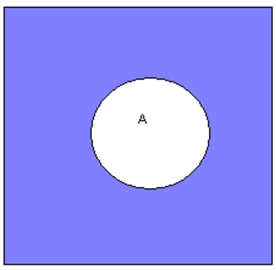
Кроме введенных нами трех операций над множествами существуют еще операции, которые могут быть представлены как комбинация простейших операций.

Введем операцию **вычитания** множеств:

Вычитание. $A\setminus B=\{c\in U\,|\,(c\in A)$ и одновременно $(c\notin B\}$.

Ниже результат вычитания двух множеств представлен с помощью диаграммы Эйлера-Венна, рядом представлено изображение дополнения к множеству A результат вычитания множества A из универсума.





$A\setminus B$ $A^c = U\setminus A$

Докажем, что $A \setminus B = A \cap B^c$.

Для доказательства равенства двух множеств следует убедиться в том, что все элементы первого множества принадлежат второму и все элементы второго множества принадлежат первому.

а) Пусть $x_0 \in A \setminus B$. Из определения следует, что справедливо $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \notin B$. То есть, $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \in B^c$. Следовательно, $x_0 \in A \cap B^c$. Вследствие произвольности элемента x_0 следует, что любой элемент из множества $A \setminus B$ принадлежит множеству $A \cap B^c$. Значит, $A \setminus B \subset A \cap B^c$

б) Пусть $x_0 \in A \cap B^c$. Из определения пересечения множеств следует, что $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \in B^c$. Последнее означает, что $x_0 \notin B$. Итак, $x_0 \in A$ и одновременно $x_0 \notin B$. В соответствии с определением разности множеств $x_0 \in A \setminus B$. Следовательно, любой элемент из множества $A \cap B^c$ принадлежит множеству $A \setminus B$, и значит, $A \cap B^c \subset A \setminus B$.

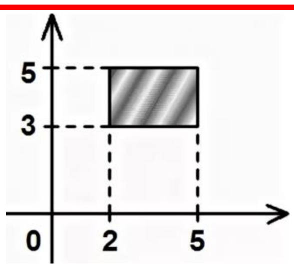
Из определения равенства множеств следует, что $A \setminus B = A \cap B^c$. Доказательство равенства двух множеств закончено.

Декартово произведение множеств

Пусть A и B – подмножества множества R вещественных чисел.

Декартовым произведением этих множеств $A \times B$ назовем такое множество точек с координатами (x,y) на плоскости R^2, что $x \in A$ и одновременно $y \in B$.

Например, если A представляет отрезок [2; 5], а B – отрезок [3; 5], то $A \times B$ – это прямоугольник с соответствующими сторонами. Аналогично вводится декартово произведение трех и более множеств.



Кванторы

Кванторы – это символы, введенные в математике для краткости и единообразия записи математических предложений (определений, утверждений…). Один квантор заменяет слово или несколько слов. Изначально эти символы появились в математической логике и носили узкоспециализированный смысл. Но кванторы оказались очень удобными, и в последствии они стали общепринятыми и общеупотребимыми в математике. Хотя, нужно отметить, что привыкание к языку кванторов требует некоторого времени.

Приведем таблицу основных кванторов:

$\forall$	для любого, любой, (для любых, любые, для всех, для каждого)
$\exists$	существует (найдется)
$\exists!$	существует и единственный
$\nexists$	не существует
$\Rightarrow$	логическое следствие (будем иметь)
$\Leftrightarrow$	логическая равносильность (тогда и только тогда)
$\in$	принадлежит (для одного элемента)
$\notin$	не принадлежит (для одного элемента)
$\subset$	является подмножеством (для множества)
$\not\subset$	не является подмножеством (для множества)
$\cup$	объединение множеств
$\cap$	пересечение множеств
:	такое, что
$\rightarrow$	ставится в соответствие

Примеры:

- Запись $\forall\varepsilon > 0$

следует читать

для любого числа ε, большего нуля

или

для любого положительного числа ε.

- $\exists\, \delta > 0$

существует число δ, большее нуля

или

существует положительное число δ.

- $a \in A$

элемент a принадлежит множеству A.

- $B \subset A$

множество B содержится в множестве A
(множество B является подмножеством множества A)

- $U \Rightarrow V$

из U следует V (если имеет место U, то имеет место V)

- $U \Leftrightarrow V$

из U следует V, и наоборот, из V следует U

- $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$

для любого числа x такого, что выполняются неравества $0 < |x - a| < \delta$

Абсолютные величины

$\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Основные свойства модуля:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
5. $|a| = \max\{a; -a\}$;
6. $a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$; (3)
7. $\forall a > 0, |x| < a <=> -a < x < a$;

Доказательство. Пусть $|x| < a => \begin{cases} x < a \\ -x < a \end{cases} => \begin{cases} x < a \\ x > a \end{cases} => -a < x < a.$

Пусть $-a < x < a => \begin{cases} x < a \\ x > a \end{cases} => \begin{cases} x < a \\ -x < a \end{cases} => |x| < a,$ т.к. $|x| = \max\{-x, x\} < a.$

Аналогичное утверждение справедливо для нестрогого неравенства.

8. Неравенство треугольника.
   $|x + y| \leq |x| + |y|$ (5)

Доказательство. Из формулы (3)

$$+\begin{array}{rcl} -|x| \leq & x & \leq |x| \\ -|y| \leq & y & \leq |y| \\ \hline \end{array}$$
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

9. $|x - y| \leq |x| + |y|$ (Доказать самостоятельно);
10. $|x + y| \geq |x| - |y|$. (Следствие: $|x + y| \geq ||x| - |y||$)

Доказательство. Представим x в следующем виде: $x = x + y - y = (x + y) - y.$

Из неравенства треугольника (5) получаем $|x| \leq |x + y| + |-y| =>$

$$|x| \leq |x + y| + |y| => |x + y| \geq |x| - |y|.$$

Переменные и постоянные величины

Величины могут быть *<u>переменными</u>* *и* *<u>постоянными</u>*, то есть меняющимися или не меняющимися в процессе исследования.

Переменные величины могут быть *<u>независимыми</u>* *и* *<u>зависимыми</u>* – меняющимися в зависимости от каких-то других величин.

Эти понятия условны. К примеру, время меняется независимо от чего-либо, и его следует считать переменной величиной. Однако, с позиций общей теории относительности Эйнштейна это совсем не так.

Если рассмотреть уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = 4,$$

в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

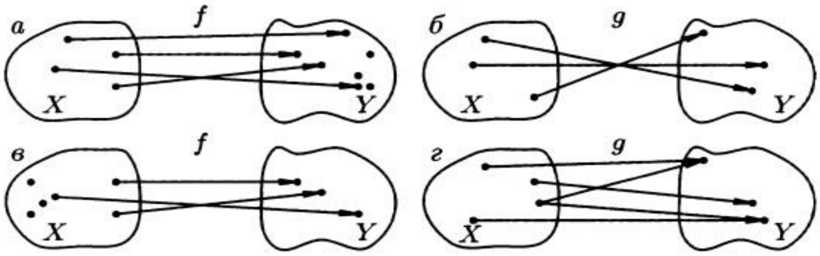
Мы будем работать с действительными (или вещественными) числами R.

Функция. Способы ее задания

Вернемся к независимым и зависимым переменным. Независимую переменную часто называют аргументом, зависимую – функцией.

Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие один и только один элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана <u>функция</u> f

Обозначение: $f : X \to Y$ *или* $y = f(x)$



Функциями являются соответствия f и g на рисунках а) и б), а в случаях в) и г) – нет. В случае в) не каждому элементу X соответствует элемент Y. В случае г) не выполняется условие однозначности.

Множество X называется *<u>областью существования</u>* функции, или *<u>областью ее определения</u>*. Обозначается $D(f)$.

Множество Y называется *<u>областью значений</u>* функции. Обозначается $E(f)$.

Любое связное подмножество (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется *<u>промежутком</u>*.

Примеры.

1. Показательная функция $y = 2^x,\ x \in \mathrm{R}$.
2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x,\ x > 0$.
3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

Способы задания функции.

Способы задания функции могут быть различными. Однако наиболее часто функция задается в виде:

- ✓ таблицы
- ✓ графика
- ✓ формулы (аналитическое задание).

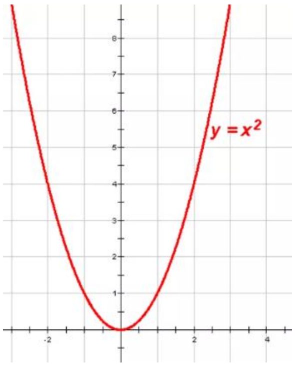
Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Oxy, с координатами $(x, f(x))$, абсцисса x каждой точки которой является значением аргумента, а ордината y – соответствующим значением данной функции.

В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой

$y = x^2$,

табличное и графическое ее задания:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Виды аналитически заданной функции:

Явный (*<u>явное задание функции</u>*), неявный (*<u>неявное задание функции</u>*) и параметрический (*<u>параметрическое задание функции).</u>*

- *<u>Явное задание функции</u>*

$$y = f(x)$$

когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

- *Неявное задание функции*)

$$F(x,y)=0,$$

когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией.

Примеры. $x^2+y^2=9$, $xy = sin(x+y)$

Параметрическое задание функции

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},$$

когда вводится дополнительный параметр $t\in[t_0,T]$.

Пример. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi)$

Это уравнение окружности, в неявном виде записанное как $x^2+y^2=9$.

Основные характеристики функции

1. Функция $y=f(x)$ определенная на множестве D, называется *четной*, если $\forall x \in D$ выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$.

   Функция $y=f(x)$ определенная на множестве D, называется *нечетной*, если $\forall x \in D$ выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси OY, график нечетной функции - относительно начала координат.

$f(-x) = f(x).$

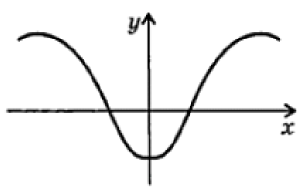


График четной функции симметричен относительно оси y.

$f(-x) = -f(x).$

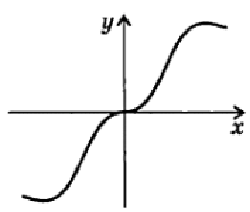
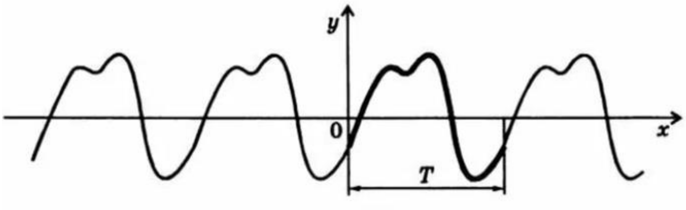


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Функция $y = f(x)$ определенная на множестве D, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число T >0, что при $\forall x \in D$ выполняются условия:

$$\forall x + T \in D \text{ и } f(x+T) = f(x).$$

Число T, называется **периодом функции**.



Если T - период функции, то ее периодами также будут числа

$$m \cdot T, \text{ где } m = \pm 1; \pm 2, \ \ldots$$

Обычно за основной период берут наименьшее положительное число T.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число M >0, что для $\forall x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

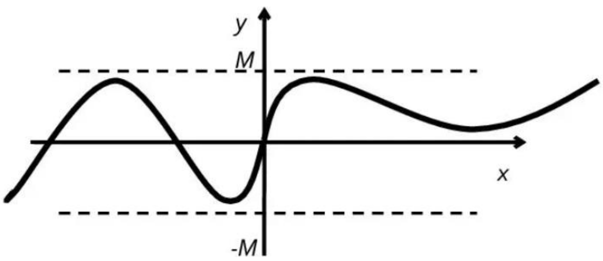
Или коротко:

$y = f(x)$, $x \in D$ называется ограниченной на D, если

$$\exists M > 0 : \forall x \epsilon D \Rightarrow |f(x)| < M.$$

Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми

$$y = -M \quad \text{и} \quad y = M$$



Обратная функция

Пусть задана функцию

$$y = f(x)$$

с областью определения D и множеством значений E.

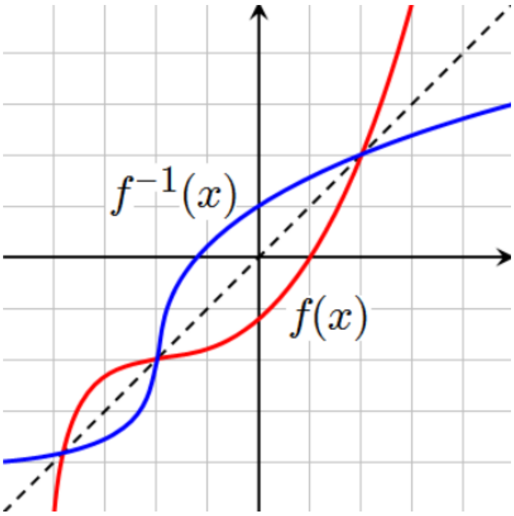
Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется **обратной** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются **взаимно обратными.**

Пример:

- Для функции $y = 2x$ обратной является функция $x = \frac{1}{2}y$.
- Для функции $y = x^2, x \in [0;1]$, обратной является функция $x = \sqrt{y}$.
- Для функции $y = x^2, x \in [-1;1]$, обратной функции не существует.

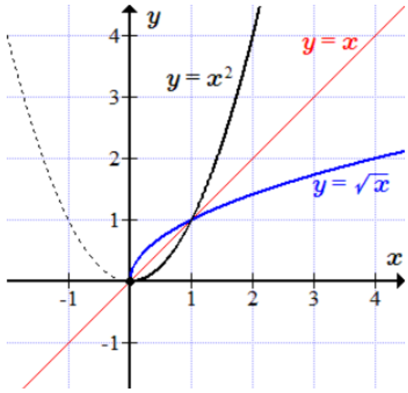
Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = \varphi(y)$ изображаюся одной и той же кривой, т.е. графики их совпадают.



Если же условиться, что, как обычно, независимую переменную обозначить за x, а зависимую через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде
$y = \varphi(x)$ (или $y = f^{-1}(x)$).

Графики таких функций будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

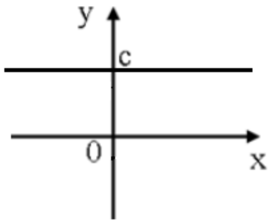
Пример:



Основные элементарные функции и их графики

Среди функций, заданных аналитически, очень важную роль играют элементарные функции. Прежде всего рассмотрим основные элементарные функции. Так называются следующие функции:

1. ***Постоянная функция*** (константа) $y = c$, где $c \in R$.
   Графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс.



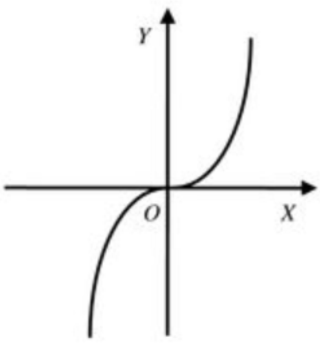
Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$

2. ***Степенная функция*** $y = x^n$, где n – действительное число, $n \neq 0$.

Область определения, область значения и график степенной функции зависит от показателя степени n:

- Если $y = x^{2k-1}, k \in N$,

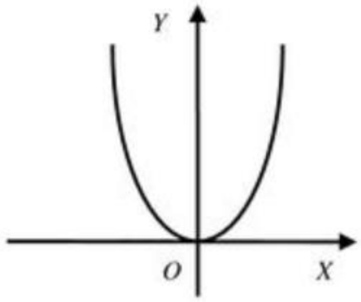
  то есть степень– натуральное число, нечетное число, тогда



Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$
Нечетная функция

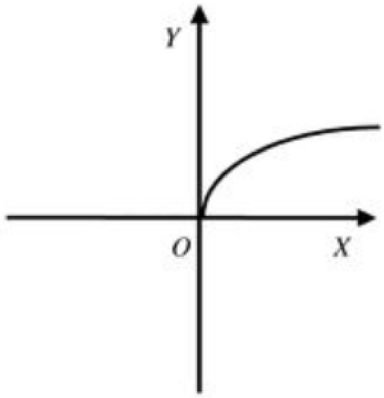
- Если $y = x^{2k}, \;\; k \in N$,

  то есть степень– натуральное число, четное число, тогда



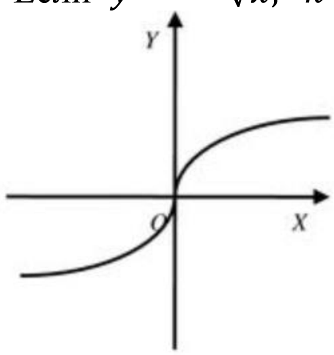
Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$
Четная функция

- Если $y = \sqrt[2k]{x}, \;\; k \in N$, тогда



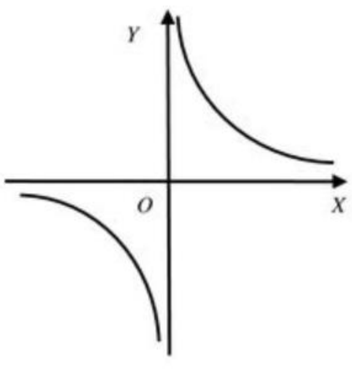
Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$
Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$

- Если $y = \sqrt[2k-1]{x}, \;\; k \in N$, тогда



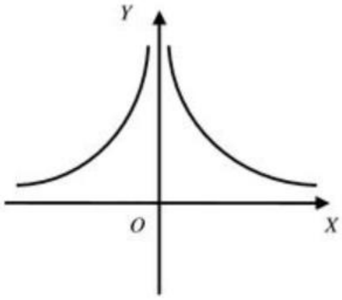
Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$
Нечетная функция

- Если $y = \frac{1}{x^{2k-1}}, \;\; k \in N$, тогда



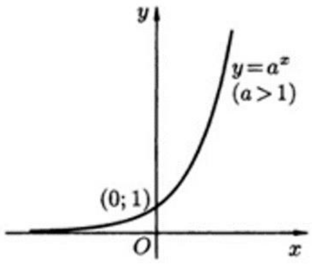
Область определения: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нечетная функция

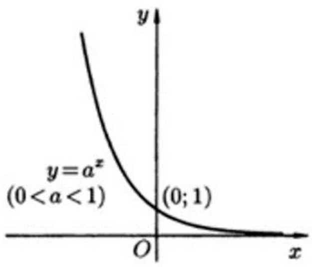
➢ Если $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in N$, тогда



Область определения: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (0; +\infty)$
Четная функция

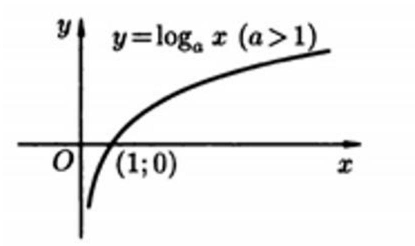
3. ***Показательная функция*** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

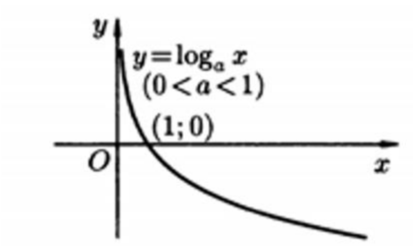




Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (0; +\infty)$

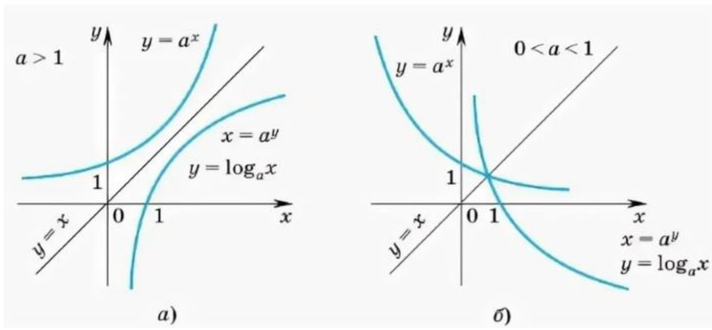
4. ***Логарифмическая функция*** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$





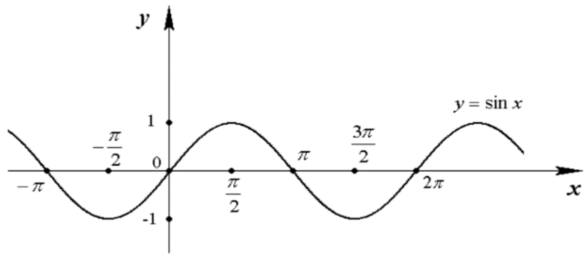
Область определения: $D(f) = (0; +\infty)$
Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$

Показательная и логарифмическая функции являются взаимообратными функциями:



5. *Тригонометрические функции.*

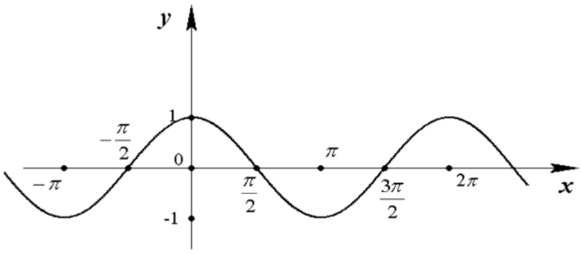
- $y = sin\, x$



Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = [-1; 1]$
Периодическая функция: период $T = 2\pi$

$$sin(x + 2\pi) = sin\, x$$

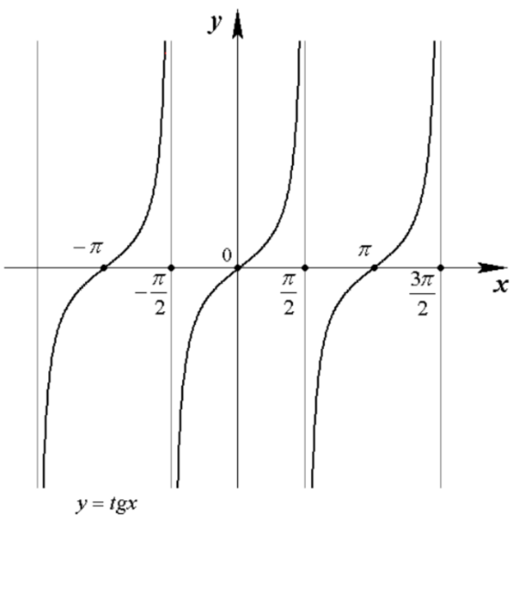
- $y = cos\, x$



Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = [-1; 1]$
Периодическая функция: период $T = 2\pi$

$$cos(x + 2\pi) = cos\, x$$

- $y = tg\, x$



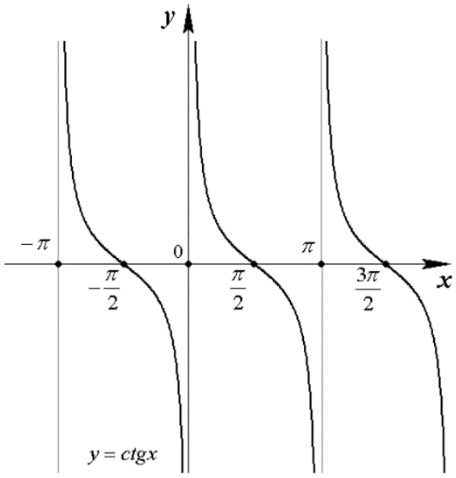
Область определения:
$D(f) = \{x \in R,$ кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z\}$

Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$

Периодическая функция: период $T = \pi$

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$$

➢ $y = ctg\, x$



Область определения:

$$D(f) = \{x \in R, \text{кроме } x = \pi k, \ \ k \in Z\}$$

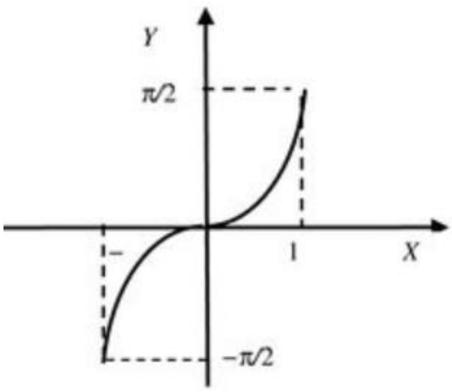
Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$

Периодическая функция: период $T = \pi$

$$\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg}\, x$$

6. *Обратные тригонометрические функции.*

➢ $y = arcsin\, x$ – функция обратная к функции $x = \sin y$



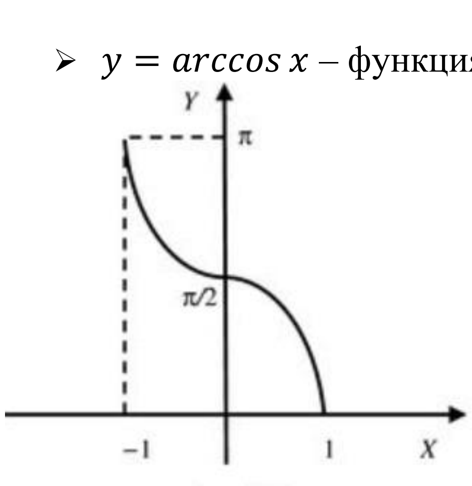
Область определения: $D(f) = [-1; 1]$

Область значений: $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Функция нечетная

$arcsin(-x) = -\,arcsin\, x$

➢ $y = arccos\, x$ – функция обратная к функции $x = \cos y$



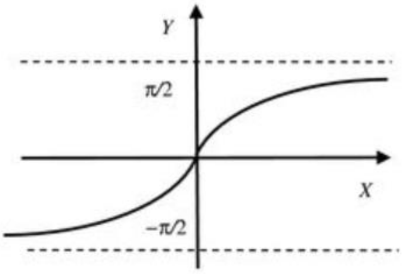
Область определения: $D(f) = [-1; 1]$

Область значений: $E(f) = [0; \pi]$

Функция не является ни четной, ни нечетной

$arccos(-x) = \pi - arccos\, x$

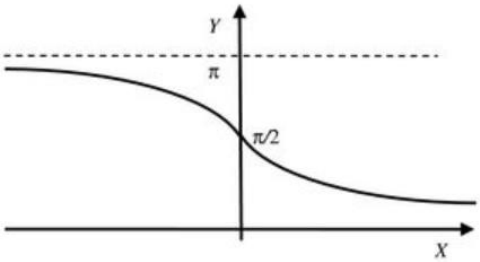
- $y = arctg\,x$ – функция обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$



Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений: $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Функция является нечетной
$arctg(-x) = -\,arctg\,x$

- $y = arcctg\,x$ – функция обратная к функции $x = \operatorname{ctg} y$



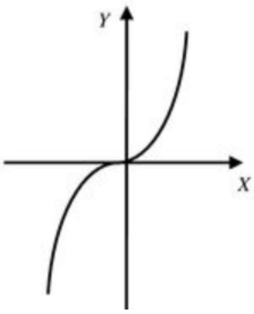
Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

Область значений: $E(f) = (0; \pi)$

Функция не является ни четной, ни нечетной
$arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$

7. *Гиперболические функции.*

- $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус

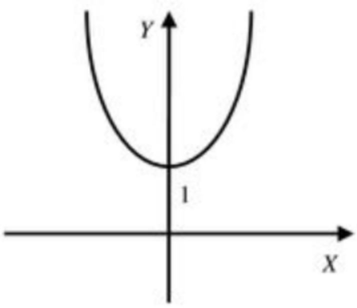


Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$

Функция нечетная

- $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус

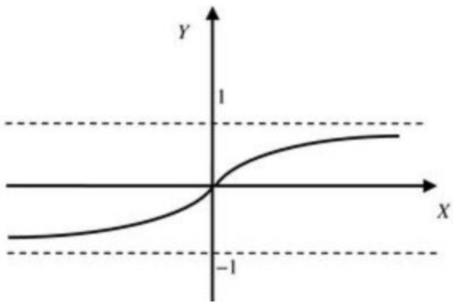


Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

Область значений: $E(f) = [1;\ +\infty)$

Функция четная

- $y = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ – гиперболический тангенс

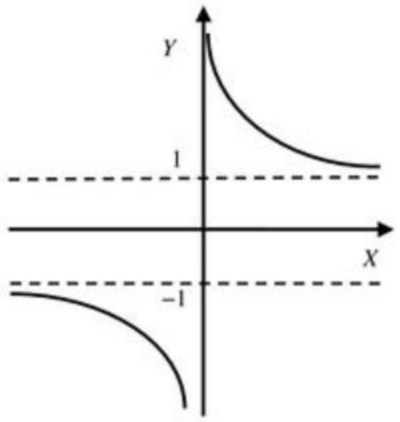


Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

Область значений: $E(f) = (-1; +1)$

Функция нечетная

- $y = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$ – гиперболический котангенс



Область определения: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$

Область значений: $E(f) = (-\infty; -1) \cup (1;\ +\infty)$

Функция нечетная

Для гиперболических функций верны формулы очень похожие на формулы для обычных тригонометрических функций.

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$$

$$\mathrm{ch}\,(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x;$$

$$\mathrm{sh}\,(2x) = 2\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x;$$

$$\mathrm{sh}\,(x + y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y;$$

$$\mathrm{ch}\,(x + y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y.$$

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

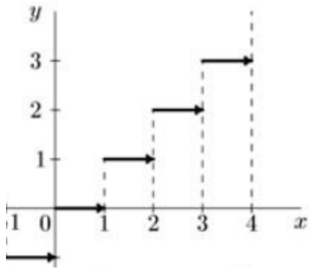
Примеры элементарных функций

$y = 6^{tg\sqrt{x}}$, $y = log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $y = arctg(x^2+3) - \frac{\sin x}{x^2}$.

Примеры неэлементарных функций:

$y = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \le 0 \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$, $sgn\, x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ - функция знака

$y = [x]$ – целая часть действительного числа

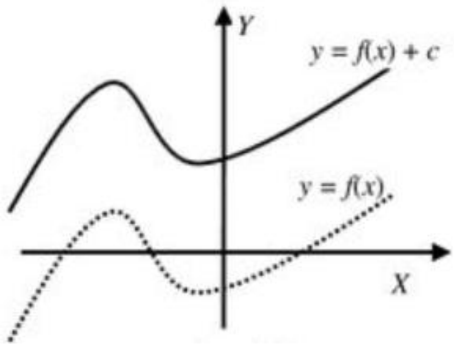


$$y = 1 - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)} + \dots$$

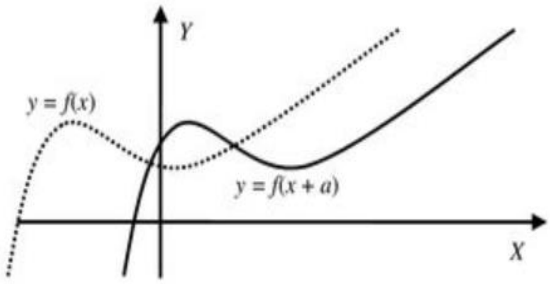
$D(\,x) = \begin{cases} 1, \text{если } x & \text{рациональное число} \\ 0, \text{если } x & \text{иррациональное число} \end{cases}$ – функция Дирихле.

Преобразования графиков

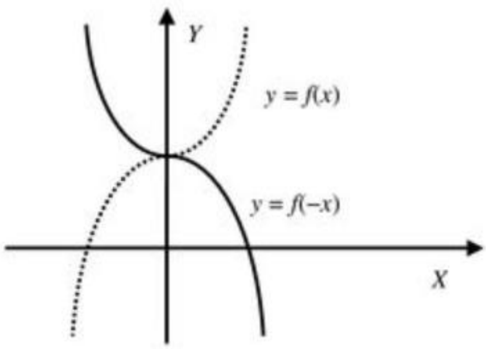
1. Параллельный перенос вдоль оси OY



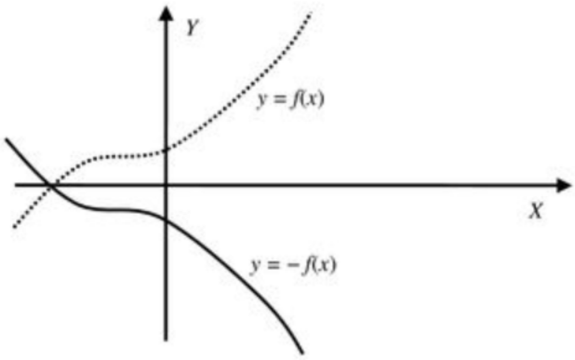
2. Параллельный перенос вдоль оси OX



3. Зеркальное отражение относительно оси OY



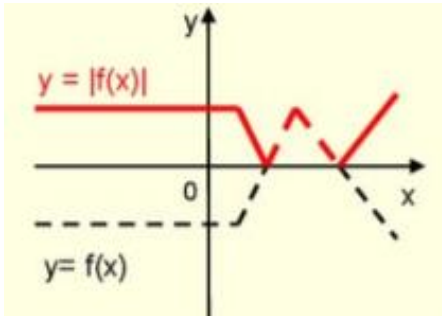
4. Зеркальное отражение относительно оси OX



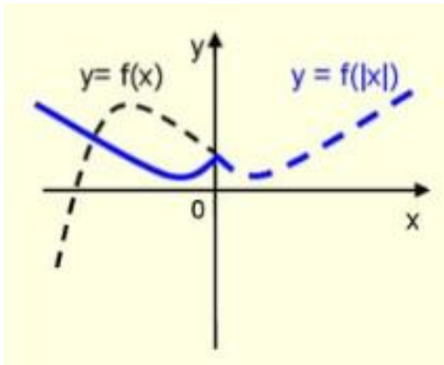
5. Сжатие (растяжение) вдоль оси OY: $y = af(x)$
   $a > 1$ – растяжение в a раз,
   $0 < a < 1$ – сжатие в $1/a$ раз.

6. Сжатие (растяжение) вдоль оси OX: $y = f(bx)$
   $b > 1$ – сжатие в b раз,
   $0 < b < 1$ –растяжение в $1/b$ раз.

7. График функции $y = |f(x)|$ получается, если часть графика функции $y = f(x)$, расположенную ниже от оси OX, симметрично отобразить относительно этой оси, а часть графика, расположенную выше оси OX, оставить без изменений.



8. График функции $y = f(|x|)$ получается, если стереть часть графика функции $y = f(x)$, расположенную слева от оси OY, оставить часть графика функции $y = f(x)$, лежащую справа относительно оси OY, а затем в область $x < 0$ симметрично относительно оси OY отобразить область $x \geq 0$.



Пример.
Построить график функции $y = -log_2(x-1)$.