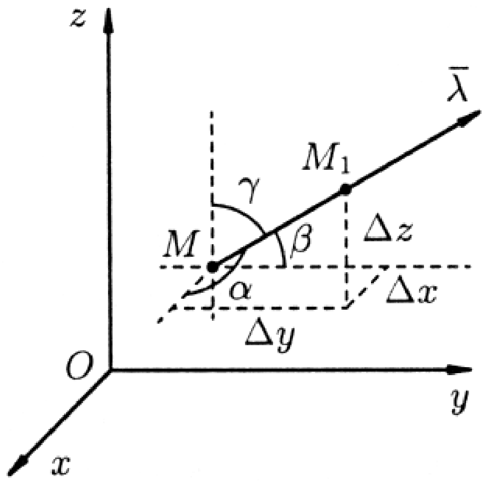
Приложения частных производных

Производная по направлению

Как уже говорилось выше, частная производная, скажем по *x*, определяет скорость изменения функции в направлении *x*, то есть имеется возможность определять скорость изменения функции в направлении осей координат. Однако, не всегда этой информации достаточно для анализа изучаемого процесса. Наибольшая и наименьшая скорости протекания процесса могут реализовываться в других направлениях. Необходимо научиться определять эти направления и максимальные и минимальные значения скоростей.

Определить величину производной в любом заданном направлении. Пусть задана функция трех переменных $U = U(x, y, z)$. Возьмем в пространстве некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\bar{\lambda}$.



Производная функции $U = U(x;y;z)$ **по направлению** $\vec{\lambda}$, заданному вектором $\vec{\lambda} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (*)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta \lambda},\ \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta \lambda},\ \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta \lambda},$$

$$\Delta \lambda = |M M_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

В случае функции двух переменных $U = U(x, y)$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \ \cos\gamma = 0$$

и

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha \cdot}$$

Производная по направлению

Пример. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

Решение: Находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1), \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 2 \cdot 0 = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2 - 4 \cdot 2 = -6, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_M = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает. ●

Градиент

Можно заметить, что правая часть равенства (*) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\vec{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Определение: Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U = U(x;y;z)$ в точке $M(x;y;z)$, называют градиентом функции и обозначают $\operatorname{grad} U$, т.е.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right) \text{ или}$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

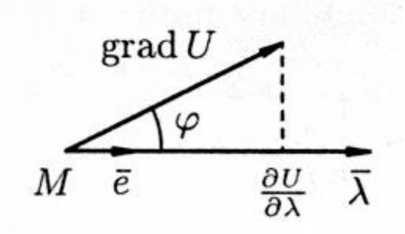
Отметим, что $\operatorname{grad} U$ есть векторная величина. Теперь равенство (*) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cdot \cos\varphi, \qquad (**)$$

где φ – угол между вектором $\operatorname{grad} U$ и направлением $\vec{\lambda}$.



Из формулы (**) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\vec{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т.е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции*. Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента.

Градиент

Пример. Найти наибольшую скорость возрастания функции $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $A(-1; 1; -1)$.

◐ Решение: Имеем:

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\bar{j} + \left(\frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\bar{k};$$

$$\operatorname{grad} U(-1; 1; -1) = 2\bar{i} + 0\bar{j} - 2\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

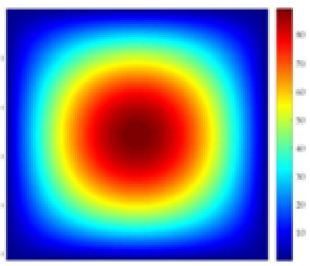
$$|\operatorname{grad} U(A)| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция U будет убывать с наибольшей скоростью ($2\sqrt{2}$), если точка A движется в направлении $-\operatorname{grad} U(A) = -2\bar{i} + 2\bar{k}$ (антиградиентное направление). ●

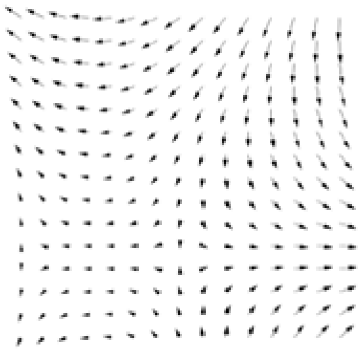
Определение: **Полем** называют скалярную или векторную функцию, заданную в каждой точке некоторой части пространства и являющейся физической характеристикой этой части пространства. В зависимости от вида заданной функции различают **скалярное** или **векторное** поле.

Примеры скалярных полей: поле температур, поле электрического потенциала.
Примеры векторных полей: поле скоростей, силовое поле.

Если рассматривать функцию *U(x,y,z)* как функцию, задающую скалярное поле, то градиент и производная по направлению – это характеристики скалярного поля.



Поле температур (скалярное)

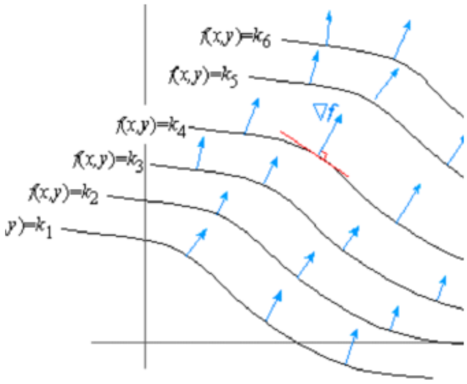


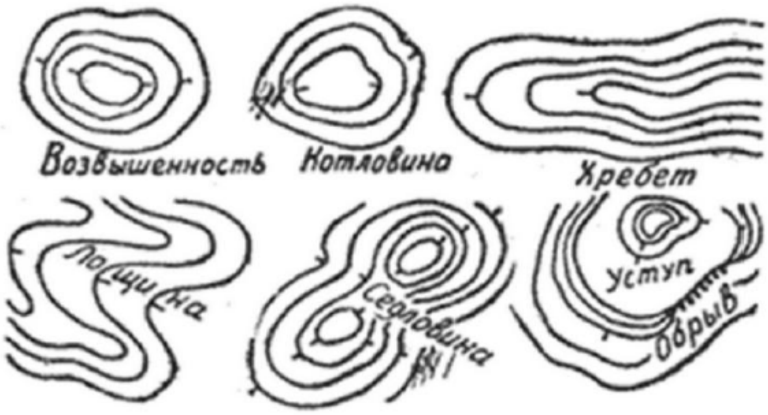
Поле скоростей (векторное)

Градиент(физический смысл)

Градиент- вектор, своим направлением указывающий ***направление наибольшего возрастания*** некоторой величины, заданной в пространстве и значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по модулю равный ***скорости роста этой величины*** в этом направлении.

Например, если взять в качестве величины высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.





Бергштрихи – короткие штрихи на горизонталях (линиях уровня) топографических карт, указывающие направление понижения рельефа, т.е. $-\operatorname{grad} h(x,y)$

Дивегенция и ротор

Рассмотрим векторное поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

Определение: **Дивергенцией векторного поля** $\vec{a}$ в точке M называется скаляр вида

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \left.\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\right|_M + \left.\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}\right|_M + \left.\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right|_M .$$

Отметим некоторые свойства дивергенции:

1. Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.
2. $\operatorname{div}(c\cdot\vec{a}) = c\cdot\operatorname{div}\vec{a}$, где $c = const$.
3. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$.
4. Если $U = U(x,y,z)$, то $\operatorname{div}(U\cdot\vec{a}) = U\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}U$.
   Доказательство:

$$div\,(U\cdot\vec{a})=\frac{\partial(U\cdot P)}{\partial x}+\frac{\partial(U\cdot Q)}{\partial y}+\frac{\partial(U\cdot R)}{\partial z}=$$

$$=U\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial U}{\partial y}+U\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial U}{\partial z}=$$

$$=U\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+P\frac{\partial U}{\partial x}+Q\frac{\partial U}{\partial y}+R\frac{\partial U}{\partial z}=$$

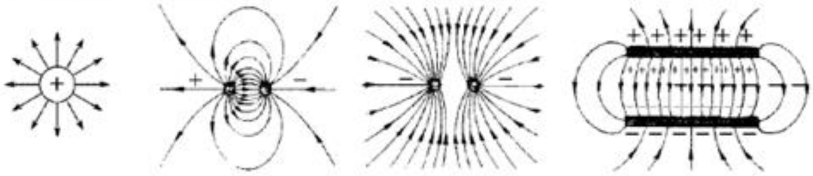
$$=U\,\mathrm{div}\,\vec{a}+\vec{a}\cdot\mathrm{grad}\,U$$

Дивергенция — одна из наиболее широко используемых в физике операций.

С точки зрения физики дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства (точнее достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля:

$div\,\vec{a}(M)>0$ — точка поля является источником;
$div\,\vec{a}(M)<0$ — точка поля является стоком;
$div\,\vec{a}(M)=0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Если во всех точках M поля V $\mathrm{div}\,\vec{a}(M)=0$, поле не имеет ни источников, ни стоков и называется ***соленоидальным***.



Простым примером может служить озеро (для простоты — постоянной единичной глубины со всюду горизонтальной скоростью течения воды, не зависящей от глубины, давая, таким образом, двумерное векторное поле на двумерном пространстве). В такой модели родники, бьющие из дна озера, будут давать положительную дивергенцию поля скоростей течения, а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) — отрицательную дивергенцию.

Определение: **Ротором (вихрем) векторного поля** $\vec{a}$ в точке M называется вектор вида

$$rot\,\vec{a}(M)=\left.\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right|_M\vec{i}+\left.\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right|_M\vec{j}+\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_M\vec{k}\,.$$

Формулу можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\boxed{rot\,\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}}$$

Отметим некоторые свойства ротора:

1. Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $rot\,\vec{a}=0$.
2. $rot\,(c\cdot\vec{a})=c\cdot rot\,\vec{a}$, где $c=const$.
3. $rot\,(\vec{a}+\vec{b})=rot\,\vec{a}+rot\,\vec{b}$.
4. Если $U=U(x,y,z)$, то $rot\,(U\cdot\vec{a})=U\,rot\,\vec{a}+gradU\times\vec{a}$.
   Доказательство (самостоятельно)

Понятие ротора также широко используется в физике.

Пусть $\vec{a}$ - поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси, то ротор этого поля будет равен с точностью до множителя угловой скорости вращения этого тела.

Ротор (физический смысл)

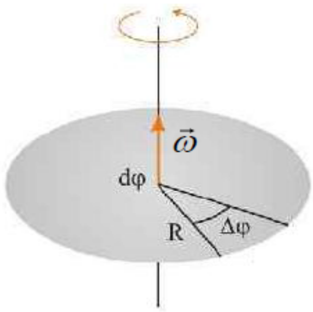
Понятие ротора также широко используется в физике и механике.

Угловая скорость **– векторная величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела, определяемую как приращение угла поворота тела за промежуток времени.**

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Пусть $\vec{V}$ **- поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси, то ротор этого поля будет равен с точностью до множителя угловой скорости вращения этого тела.**

$$rot\,\vec{V}(M)=2\vec{\omega}$$



Оператор Гамильтона (набла-оператор)

Для упрощения записи характеристик скалярных и векторных полей был введен символический векторный оператор, имеющий вид

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Символическое «умножение» этого оператора на какую-то величину означает, что каждая из компонент $\nabla -$оператора применяется к этой величине.

Например, если $u = u(x, y, z)-$ скалярная величина, то

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} u .$$

Для векторных величин возможно как скалярное, так и векторное умножение. Проследим, что дадут такие произведения с $\nabla -$оператором в случае векторного поля $\vec{V} = (P, Q, R)$.

Скалярное произведение: $\nabla \cdot \vec{V} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V}$.

Векторное произведение: $\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{V}$.

Отдельный интерес представляет определенный для скалярных полей оператор

$$\nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u .$$

Такой оператор называется оператором Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0, (x, y, z) \in A,$ называются **гармоническими** в A функциями.

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x;y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\boxed{\Delta z \approx dz.}$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y)$, то

$$\boxed{f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.}$$

***Пример*.** Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Рассмотрим функцию

$$z = x^y.$$

Тогда

$$1{,}02^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y},$$

где $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$.

$$z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}, \qquad z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Следовательно,

$$1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 \approx 1{,}06.$$