Формула Тейлора

Как и в случае функций одной переменной, для функций многих переменных $f(x)=f(x^1,x^2,...,x^n)$ формула Тейлора дает связь между приращением функции в точке и ее дифференциалами в этой же точке:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+...+\frac{1}{m!}d^mf(x_0)+\alpha,}$$

где $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x,x_0)\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho^m(x_0+\Delta x,x_0)}=0$.

В частности, для функции двух переменных имеем:

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot dx+f'_y(x_0,y_0)\cdot dy+\\&+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(dx)^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot dx\cdot dy+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(dy)^2]+...+\alpha.\end{aligned}}$$

Здесь $\lim\limits_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0}\dfrac{\alpha}{\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^m}=0\cdot$

Пример: Вычислить приближенно значение функции $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $(11{,}8;\ 5{,}3)$ используя формулу Тейлора с $n=2$.

<u>Решение:</u> Возьмем $x_0=12;\ \Delta x=-0{,}2;\ y=5;\ \Delta y=0{,}3$
Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Тогда полные дифференциалы первого и второго порядка в точке $(\mathbf{11,8};\ \mathbf{5,3})$ будут равны

$$df(12;5)=\left.\frac{x\cdot\Delta x+y\cdot\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(12;5)}=\frac{-12\cdot0{,}2+5\cdot0{,}3}{13}\approx-0{,}0692\,,$$

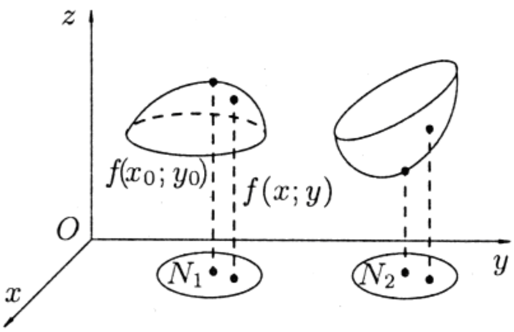
$$d^2f(12;5)=\left.\frac{y^2\cdot\Delta x^2-2xy\Delta x\Delta y+x^2\cdot\Delta y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(12;5)}\approx0{,}0096\,,$$

значит,

$$\sqrt{11{,}8^2+5{,}3^2}\approx\sqrt{12^2+5^2}-0{,}0692+\frac{1}{2}0{,}0096=12{,}9356.$$

Локальный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0;y_0)\in D$.



Определение: Точка $(x_0;y_0)$ называется **точкой локального максимума** функции $z=f(x;y)$, если $\exists$ такая $\delta-$окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y)<f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется **точка локального минимума** функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$, из $\delta-$окрестности точки $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство: $f(x;y)>f(x_0;y_0)$.

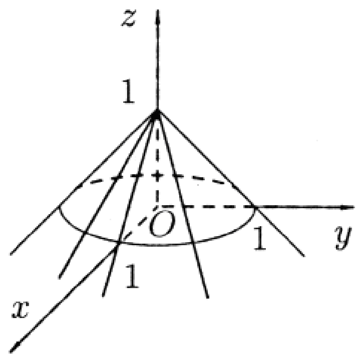
На рисунке: N_1-точка локального максимума, а N_2-точка локального минимума функции $z=f(x;y)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами**.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$f_x'(x_0;y_0)=0,\ f_y'(x_0;y_0)=0 \quad (\text{или } df(x_0,y_0)=0)$$

Замечание. Функция может иметь локальный экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $O(0;0)$, но не имеет в этой точке производных.



Определение: Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z=f(x;y)$ равны нулю, т.е. $f_x'=0$, $f_y'=0$, называется **стационарной точкой** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками**.

Выполнение необходимого условия экстремума не обязательно обеспечивает действительное наличие локального экстремума в точке, то есть, критическая точка функции может не быть точкой локального экстремума. В качестве примера рассмотрим функцию $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$. Критической точкой для этой функции является точка (0,0). Однако эта точка является не экстремальной, она является седловой.

Для того чтобы выяснить, достигается ли в критической точке экстремум и какой, следует обратиться к дифференциалу второго порядка в этой точке. Пусть критическая точка имеет координаты (x_0,y_0). Рассмотрим приращение функции в окрестности этой точки:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(dx)^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot dx\cdot dy+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(dy)^2]+\alpha.$$

Если при любом сочетании бесконечно малых приращений dx и dy выражение в квадратных скобках не меняет знак, то данная критическая точка является точкой локального экстремума. Вынесем за квадратную скобку множитель $(dy)^2$. Знак приращения функции совпадает со знаком квадратного трехчлена

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{dy}+f''_{yy}(x_0,y_0)$$

относительно $\frac{dx}{dy}$. Как известно, квадратный трехчлен не меняет знак в том случае, если не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицателен

$$D=\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2-f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)<0$$

или

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$$

В случае отрицательного дискриминанта знак квадратного трехчлена определяется знаком коэффициента при наибольшей степени (или знаком свободного члена). Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$. Обозначим

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Тогда:

1. если $\Delta>0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет локальный экстремум: максимум, если $A<0$; минимум, если $A>0$;
2. если $\Delta<0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta=0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример. Найти экстремум функции $z=3x^3+y^2+4xy-x+2$

Решение.

Здесь

$$z'_x = 9x^2 + 4y - 1, \qquad z'_y = 2y + 4x.$$

Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y - 1 = 0, \\ 2y + 4x = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(1; -2)$ и $M_2\left(-\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции:

$$z''_{xx} = 18x, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = 4.$$

В точке $M_1(1; -2)$ имеем:

$$A = 18, \quad B = 4, \quad C = 2,$$

отсюда

$$\Delta = 18 \cdot 2 - 4^2 = 20 > 0.$$

Так как $A > 0$, то в точке $M_1(1; -2)$ функция имеет локальный минимум:

$$z_{\min} = z(1; -2) = 0.$$

В точке $M_2\left(-\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ имеем:

$$A = -2, \ B = 4, \ C = 2$$

отсюда

$$\Delta = (-2) \cdot 2 - 4^2 = -20 < 0.$$

Так как $A < 0$, то в точке $M_2\left(-\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ функция не имеет экстремума.