Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Методы решения задач для ОДУ можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

Графические методы используют геометрические построения. В частности, одним из них является ***метод изоклин*** для решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналитическими называют методы, с помощью которых решение дифференциальных уравнений можно выразить через известные функции. Для ряда уравнений первого порядка удается получить решение в виде формул путем аналитических преобразований. Точные методы решений известны только для некоторых классов ОДУ (линейные ОДУ, уравнения с разделяющимися переменными и др.).

Приближенные методы используют упрощение самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов, а также специальным выбором классов искомых функций.

Численные методы решения используют алгоритм вычисления значений искомого решения на некотором дискретном множестве значений аргумента и дают приближенное решение в виде таблицы.

При решении дифференциальной задачи численными методами используются ***разностные формулы для обыкновенных производных***.

Пусть дифференциальная задача решается на отрезке $[a,b]$, на котором заданы узлы $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n},\ h = (b-a)/n$ и значения функции в этих узлах $y_i = y(x_i)$. Предположим, что функция $y(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_i:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \ldots$$

Полагая $x = x_i + h$ или $x = x_i - h$, получим

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots,$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h) = y_i - \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots.$$

Учитывая эти разложения, имеем

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}h + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^2 + \ldots = y'(x_i) + O(h)$$

– правую разностную производную в точке x_i,

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = y'(x_i) - \frac{y''(x_i)}{2!}h + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^2 + \ldots = y'(x_i) + O(h)$$

– левую разностную производную в точке x_i.

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = y'(x_i) + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^2 + \ldots = y'(x_i) + O(h^2)$$

– центральную разностную производную в точке x_i,

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y''(x_i) + O(h^2)$$

– центральную разностную производную второго порядка в точке x_i.

Односторонние разностные производные второго порядка имеют погрешность $O(h)$.

Задача Коши *для дифференциального уравнения n-го порядка* заключается в отыскании $y = y(x)$, удовлетворяющей уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2)

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.2}$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Задача Коши *для системы дифференциальных уравнений* заключается в отыскании функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющей системе (1.3) и начальным условиям (1.4).

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{d\,y_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\,y_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots \quad , y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{1.4}$$

Систему, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомых функций, путем введения новых неизвестных функций можно привести к виду (1.3). В частности, дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

приводится к виду (1.3) с помощью замены

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)},$$

что дает следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y}{dx} = y_1, \\ \dfrac{d\,y_1}{dx} = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\,y_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \dfrac{d\,y_{n-1}}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1}). \end{cases}$$

Рассмотрим приближенные методы решения задачи Коши:

1. аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения:

– интегрирование ОДУ с помощью степенных рядов: метод последовательного дифференцирования, метод неопределенных коэффициентов;

– метод последовательных приближений.

2. численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В дальнейшем считаем, что для рассматриваемых уравнений выполнены условия существования и единственности решения.

Приближенные методы.

1). Метод последовательного дифференцирования

Предположим, что искомое решение $y = y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.2) может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots . \quad (1.5)$$

Начальные условия (1.2) дают значения $y^{(k)}(x_0)$ при $k = 0,1,2,\dots,n-1$. Значение $y^{(n)}(x_0)$ найдем из уравнения (1.1), подставляя $x = x_0$ и используя (2.2):

$$y^{(n)}(x_0) = f\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right). \quad (1.6)$$

Значения $y^{(n+1)}(x_0)$, $y^{(n+2)}(x_0), \dots$ последовательно определяются дифференцированием уравнения (1.1) и подстановкой $x = x_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ $(k = 0,1,2,\dots)$ (начальные условия).

Доказано, что если правая часть уравнения (1.1) в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right)$, есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x, достаточно близких к x_0, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2), которое разлагается в ряд Тейлора (1.5). Тогда частичная сумма этого ряда будет приближенным решением поставленной задачи.

Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для решения задачи Коши для системы ОДУ.

Пример 1.1. Найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ уравнения

$$y'' = -0{,}1(y')^2 - (1 + 0{,}1x)y \quad (1.7)$$

с начальными условиями $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$.

Решение: Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 + \ldots \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \ldots$$

Используя начальные условия, получим

$y''(0) = -0{,}1\cdot 2^2 - (1+0{,}1\cdot 0)\cdot 1 = -1{,}4$.

Дифференцируем последовательно по x левую и правую части уравнения (1.7)

$y''' = -0{,}2\, y' y'' - 0{,}1(xy' + y) - y'$,

$y^{(4)} = -0{,}2\,(y' y''' + y''^2) - 0{,}1(xy'' + 2y') - y''$,

$y^{(5)} = -0{,}2\,(y' y^{(4)} + 3y'' y''') - 0{,}1(xy''' + 3y'') - y'''$,

$y^{(6)} = -0{,}2\,(y' y^{(5)} + 4y'' y^{(4)} + 3y'''^2) - 0{,}1(xy^{(4)} + 4y''') - y^{(4)}$.

Подставляя начальные условия и значение $y''(0)$, находим

$y'''(0) = -1{,}54, \quad y^{(4)}(0) = 1{,}224, \quad y^{(5)}(0) = 0{,}1768, \quad y^{(6)}(0) = -0{,}7308.$

Таким образом, искомое приближенное решение запишется в виде

$y(x) \approx 1 + 2x - 0{,}7x^2 - 0{,}2567x^3 + 0{,}051x^4 + 0{,}00147x^5 - 0{,}00101x^6$.

Пример 1.2. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x), \quad z = z(x)$ системы

$$\begin{cases} y'(x) = y\cos x - z\sin x, \\ z'(x) = y\sin x + z\cos x, \end{cases} \tag{1.8}$$

с начальными условиями $y(0) = 1, \quad z(0) = 0$.

Решение: Функции $y(x), \quad z(x)$ ищем в виде степенных рядов

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{1.9}$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \ldots \frac{z^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{1.10}$$

$y(0) = 1, \quad z(0) = 0$ – задано.

Положим $x = 0$ в системе (1.8) и, учитывая начальные условия, получим

$y'(0) = 1, \quad z'(0) = 0$.

Продифференцируем систему (1.8) по x:

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z')\sin x - (z - y')\cos x, \\ z''(x) = -(z - y')\sin x + (y + z')\cos x. \end{cases} \tag{1.11}$$

Отсюда находим $y''(0) = 1, \quad z''(0) = 1$.

Продифференцируем систему (1.11):

$$\begin{cases} y'''(x) = (z - 2y' - z'')\sin x - (y + 2z' - y'')\cos x, \\ z'''(x) = -(y + 2z' - y'')\sin x - (z - 2y' - z'')\cos x. \end{cases}$$

Получаем $y'''(0) = 0, \quad z'''(0) = 3$. Подставляя найденные значения производных в ряды (1.9), (1.10), получим

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \qquad z(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

2). Метод неопределенных коэффициентов.

Этот метод применяется при решении линейных ОДУ (с переменными коэффициентами). Суть метода – на примере уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1.12}$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$. Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения (1.12) можно разложить в ряд по степеням x:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1.13}$$

c_n –коэффициенты, подлежащие определению.

Дифференцируем обе части равенства (1.13) два раза по x:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Подставляя полученные ряды для y, y', y'', p, q, r в уравнение (1.12), получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \tag{1.14}$$

Перемножив ряды и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (1.14), получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 + c_1p_0 + c_0q_0 = r_0 \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2c_2p_0 + c_1p_1 + c_1q_0 + c_0q_1 = r_1 \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3c_3p_0 + 2c_2p_1 + c_1p_2 + c_2q_0 + c_1q_1 + c_0q_2 = r_2 \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2} + L(c_{n+1}, c_n, ..., c_1, c_0) = q_n \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

где $L(c_{n+1}, c_n, ..., c_1, c_0)$ означает линейную функцию аргументов $c_0, c_1, ..., c_n, c_{n+1}$.

Каждое уравнение системы (1.15) содержит на одно неизвестное больше по сравнению с предыдущим уравнением. Коэффициенты c_0, c_1 определяются из начальных условий, а все остальные последовательно определяются из системы (1.15). В курсе математического анализа доказано, что если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ сходятся при $|x| < R$, то полученный степенной ряд сходится в той же области и является решением уравнения (1.12).

Замечание. Если начальные условия заданы при $x = x_0$, то рекомендуется сделать замену $x - x_0 = t$, после чего задача сводится к рассмотренной выше.

Пример 1.3. Найти решение уравнения

$$y'' - xy' + y = 1 - \cos x\,, \tag{1.16}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

Решение. Разложим коэффициенты данного уравнения в степенные ряды

$$p(x) = -x, \quad q(x) = 1, \quad r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - ...$$

Решение уравнения (1.16) ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставив полученные ряды в уравнение (1.16) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов c_i:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & c_0 + 2c_2 = 0, \\
x^1 & 6c_3 - c_1 + c_1 = 0, \\
x^2 & -c_2 + 12c_4 = 1/2, \\
x^3 & -2c_3 + 20c_5 = 0, \\
x^4 & -3c_4 + 30c_6 = -1/24, \\
x^5 & -4c_5 + 42c_7 = 0, \\
x^6 & -5c_6 + 56c_8 = 1/720.
\end{array}$$

Из начальных условий находим $c_0 = 0,\ c_1 = 1$.

Легко заметить, что $c_{2n+1} = 0\ (n = 1, 2, \ldots)$. Далее,

$$c_2 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{24}, \quad c_6 = \frac{1}{360}, \quad c_8 = \frac{11}{40\,320}.$$

Таким образом, получаем приближенное решение задачи в виде

$$y(x) \approx x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40\,320}.$$

2. Численные методы решения задачи Коши.

Наиболее распространенным численным методом решения дифференциальных уравнений является **метод конечных разностей**. Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретном множеством точек, называемых ***узлами***. Эти узлы составляют ***разностную сетку***. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется ***сеточной***. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением. При этом для входящих в исходное уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его ***аппроксимацией*** на сетке (или ***разностной аппроксимацией***). Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия, называется ***разностной схемой***.

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции.

Решение разностной задачи, в результате которого находятся значения сеточной функции, приближенно заменяет решение исходной дифференциальной задачи в соответсвующих узлах сетки. Однако не всякая разностная схема дает удовлетворительное решение, т.е. получаемые значения сеточной функции не всегда с достаточной точностью аппроксимируют значения искомой функции в узлах сетки. Здесь важную роль играют такие понятия, как ***устойчивость***, ***аппроксимация*** и ***сходимость*** разностной схемы.

Под ***устойчивостью*** понимается непрерывная зависимость ее решения от входных данных (коэффициентов уравнений, правых частей, начальных граничных условий), т.е. малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения. В противном случае схема называется ***неустойчивой***.

Разностная схема называется корректной, если она устойчива и ее решение существует и единственно при любых входных данных. В теории разностных схем доказывается, что если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, то она сходится.

Рассматриваются две группы численных методов решения задачи Коши.

Одношаговые методы, в которых для нахождения решения в некоторой точке отрезка используется информация лишь в одной предыдущей точке (например, методы Эйлера, Рунге–Кутты).

Многошаговые методы, в которых для отыскания решения в некоторой точке используется информация о решении в нескольких предыдущих точках (например, метод Адамса)

Метод Эйлера.

Метод Эйлера является простейшим методом решения задачи Коши и имеет невысокую точность, поэтому на практике его используют достаточно редко. Однако в дальнейшем он послужит основой для более эффективных методов.

В задаче Коши (2.1), (2.2)

$$y'(x) = f(x, y), \tag{2.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

запишем уравнение (2.1) в узлах x_i, $i = \overline{0, n-1}$, для простоты считаем узлы равноотстоящими, т.е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$.

Заменим производную следующим конечно-разностным отношением

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}. \tag{2.4}$$

Тогда, учитывая (2.1) получим

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx f(x_i, y_i).$$

Откуда следует рекуррентная формула метода Эйлера для приближенных значений $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = \overline{0, n-1}. \tag{2.5}$$

Пример 2.1. Методом Эйлера решить ОДУ $y' = y,\ x \in [0,1]$ с начальными условиями $y(0) = 1$.

Решение. Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = y$ заменяем разностным уравнением

$\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = y_i,\ i = \overline{0, n-1};\ y_0 = 1.$

$h = \dfrac{1}{n}$ – шаг сетки (сетка равномерная).

Формула расчета: $y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i$

Пусть $n = 5,\ h = 0{,}2$

$y_1 = y_0 + 0{,}2 \cdot y_0 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

$y_2 = y_1 + 0{,}2 \cdot y_1 = 1{,}2 + 0{,}24 = 1{,}44$

$y_3 = y_2 + 0{,}2 \cdot y_2 = 1{,}44 + 0{,}288 = 1{,}728$

$y_4 = y_3 + 0{,}2 \cdot y_3 = 2{,}0736$

$y_5 = 1{,}2 y_4 = 2{,}48832.$

Проверка:

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + \ln c \Rightarrow |y| = ce^x,$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = e^x \qquad x \in [0,1]$$

$x_0 = 0 \qquad y(0) = e^0 = 1$

$x_1 = 0{,}2 \qquad y(0{,}2) = e^{0{,}2} \approx 1{,}2214 \quad y_1 = 1{,}2$

$x_2 = 0{,}4 \qquad y(0{,}4) = e^{0{,}4} \approx 1{,}4918 \quad y_2 = 1{,}44$

$x_3 = 0{,}6 \qquad y(0{,}6) = e^{0{,}6} \approx 1{,}8221 \quad y_3 = 1{,}728$

$x_4 = 0{,}8 \qquad y(0{,}8) = e^{0{,}8} \approx 2{,}2255 \quad y_4 = 2{,}0736$

$x_5 = 1 \qquad y(1) = e^1 \approx 2{,}7182 \qquad y_5 = 2{,}4883.$

Схема Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. Метод Эйлера в рассмотренном примере дает хорошее приближение при достаточно малом h и только для нескольких первых точек.