1. В бригаде 25 человек. Сколькими способами можно избрать троих рабочих в три комиссии (по одному в каждую)?

▶ Одна комбинация отличается от другой либо хотя бы одним человеком, либо порядком избрания в комиссии. Поэтому число способов избрания троих рабочих равно числу размещений из 25 человек по 3, т.е. $A_{25}^{3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800$. ◀

2. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путем жеребьевки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

▶ Число всех равновозможных случаев определения двух соперников из 20 участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е. C_{20}^{2}. Число групп по 2 человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^{2}. Число групп, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_{6}^{2}. Из 4 мастеров может быть составлено C_{4}^{2} пар. Сумма $C_{10}^{2} + C_{6}^{2} + C_{4}^{2}$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории. Следовательно, искомая вероятность

$$p = (C_{10}^{2} + C_{6}^{2} + C_{4}^{2}) / C_{20}^{2} = 33/95 .$$ ◀

3. В ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждается в замене двигателя, а остальные – в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается два трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима: а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

▶ а) Обозначим через A событие, состоящее в том, что выбранный трактор требует замены двигателя. Согласно условиям задачи, вероятность того, что первым будет отобран трактор, требующий замены двигателя, $P(A) = 6/15 = 0{,}4$.

Вероятность того, что второй выбранный трактор также потребует замены двигателя, $P(A) = 5/14$. Тогда вероятность события, состоящего в том, что первый и второй отобранные тракторы потребуют замены двигателя, $p = \frac{2}{5}\frac{5}{14} = \frac{1}{7}$.

б) Обозначим через B событие, состоящее в том, что только один из двух выбранных тракторов требует замены двигателя. Это событие заключается в том, что первый трактор нуждается в замене двигателя, а второй – лишь в замене отдельных узлов, либо первый трактор требует замены отдельных узлов, а второй – замены двигателя:

$$P(B) = \frac{2}{5}\frac{9}{14} + \frac{9}{15}\frac{6}{14} = \frac{18}{35}.$$

в) Обозначим через C событие, состоящее в том, что ни один трактор не потребует замены двигателя. Вероятность того, что первый трактор не потребует замены двигателя, равна $9/15 = 3/5$. Вероятность того, что второй трактор также не потребует замены двигателя, $8/14 = 4/7$. Тогда вероятность того, что оба трактора не потребуют замены двигателя,

$$P(C) = \frac{3}{5}\frac{4}{7} = \frac{12}{35}.$$

Вероятность того, что хотя бы для одного трактора потребуется замена двигателя,

$$p = 1 - P(C) = 1 - 12/35 = 23/35 .$$ ◀

4. При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5 % дальтоников, а среди женщин – 0,25 %. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

▶ а) Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – выбранное лицо является мужчиной; H_2 – выбранное лицо является женщиной.

Из условий задачи находим:

$$P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5\,,\ P(A/H_1) = 0{,}05\,,\ P(A/H_2) = 0{,}0025\,.$$

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n}(H_k)P(A/H_k) = 0{,}5\cdot 0{,}05 + 0{,}5\cdot 0{,}0025 = 0{,}2625;$$

б) Условная вероятность произошедшего события A при осуществлении данной гипотезы H_1

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}02625} \approx 0{,}952388\,.$$ ◀

5. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трех дней; в) не более трех дней.

▶ Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября $p = 12/30 = 0{,}4$, а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Вероятность $P_n(m)$ того, что в n наблюдениях событие наступит m раз, определяется формулой биномиального распределения (формулой Бернулли):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}\,.$$

а) По условию задачи $n = 8$, $m = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тогда

$$P_8(3) = C_8^3\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^5 = 0{,}278692\,.$$

б) Поскольку $n = 8$, $3 \le m \le 8$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(3\le m\le 8) = P_8(3)+P_8(4)+P_8(5)+P_8(6)+P_8(7)+$$

$$+P_8(8) = 1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2) = 1-0{,}6^8-$$

$$-8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^7-28\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6 = 0{,}624893\,.$$

в) Так как $n = 8$, $0 \le m \le 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(0\le m\le 8) = P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)+P_8(3) =$$

$$= 0{,}016796+0{,}149292+0{,}209019+0{,}278692 =$$

$$= 0{,}653309\,.$$ ◀

6. На факультете 730 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Вычислить вероятность того, что найдутся три студента, у которых дни рождения совпадают.

▶ В данном случае $n = 730$, $m = 3$, $p = 1/365$, $q = 1 - 1/365 = 364/365$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\,,$$

где $x = (m-np)/\sqrt{npq}$. Значение функции $\varphi(x)$ находим из прил. Имеем:

$$x = \frac{3-730/365}{\sqrt{730\cdot\frac{1}{365}\frac{364}{365}}} = 0{,}71\,,$$

$$\varphi(0{,}71) = 0{,}3101\,,\ P_{730}(3) \approx 0{,}2210\,.$$ ◀