Задача 1

Вычислить интеграл $\int_\gamma z^3\,dz$ **по произвольной линии, соединяющей точки** $z_1 = 0$ **и** $z_2 = 1 + i$.

Решение:

1. **Анализ подынтегральной функции:** Функция $f(z) = z^3$ является аналитической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (так как это полином).
2. **Выбор метода:** Согласно теореме Коши, для аналитической функции интеграл не зависит от формы пути, а зависит только от начальной и конечной точек. Поэтому мы можем воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

   где $F(z)$ — первообразная для $f(z)$.

3. **Вычисление:** Первообразная для z^3 равна $F(z) = \frac{z^4}{4}$. Подставим пределы интегрирования:

$$z_1 = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

$$z_2 = 1 + i$$

   Найдем $(1+i)^4$:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$$

   Тогда:

$$I = \frac{(1+i)^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Ответ: -1

Задача 2

Вычислить интеграл $\int_L z\,\mathrm{Im}(z^2)\,dz$, **где** $L = \{z : \mathrm{Re}\,z = 1, |\,\mathrm{Im}\,z| \le 3\}$.

Решение:

1. **Параметризация пути:** Путь L представляет собой отрезок прямой, параллельной мнимой оси, проходящий через $x = 1$. Мнимая часть меняется от -3 до 3. Пусть $z = x + iy$. Так как $\operatorname{Re} z = 1$, то $x = 1$. Параметризация: $z(y) = 1 + iy$, где $y \in [-3, 3]$. Дифференциал: $dz = i\,dy$.
2. **Преобразование подынтегральной функции:** Найдем $\operatorname{Im}(z^2)$ при $z = 1 + iy$:

$$z^2 = (1 + iy)^2 = 1 + 2iy + (iy)^2 = 1 + 2iy - y^2 = (1 - y^2) + i(2y)$$

Следовательно, $\operatorname{Im}(z^2) = 2y$.

Теперь запишем все выражение под интегралом:

$$f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z^2) = (1 + iy) \cdot 2y = 2y + 2iy^2$$

3. **Вычисление интеграла:**

$$I = \int_{-3}^{3} (2y + 2iy^2) \cdot (i\,dy) = \int_{-3}^{3} (2iy - 2y^2)\,dy$$

Разобьем на два интеграла:

$$I = 2i \int_{-3}^{3} y\,dy - 2 \int_{-3}^{3} y^2\,dy$$

- Первый интеграл $\int_{-3}^{3} y\,dy = 0$, так как функция y нечетная, а пределы симметричны.
- Второй интеграл:

$$\int_{-3}^{3} y^2\,dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-3}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{-27}{3} = 9 - (-9) = 18$$

Подставляем значения:

$$I = 2i \cdot 0 - 2 \cdot 18 = -36$$

Ответ: -36

Задача 3

Вычислить интеграл $\int_C (\bar{z}^2 - z)\,dz$, где C — часть окружности $|z| = 1, \pi \le \arg z \le 2\pi$.

Решение:

1. **Параметризация контура:** Контур представляет собой нижнюю полуокружность единичного радиуса. Параметризация: $z(\phi) = e^{i\phi}$, где $\phi \in [\pi, 2\pi]$. Дифференциал: $dz = ie^{i\phi}\, d\phi$.
2. **Преобразование функции:** На единичной окружности $|z| = 1$, поэтому $\bar{z} = \frac{1}{z} = e^{-i\phi}$. Тогда $\bar{z}^2 = (e^{-i\phi})^2 = e^{-2i\phi}$. Подынтегральная функция: $e^{-2i\phi} - e^{i\phi}$.
3. **Подстановка в интеграл:**

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} (e^{-2i\phi} - e^{i\phi}) \cdot ie^{i\phi}\, d\phi$$

Раскроем скобки:

$$(e^{-2i\phi} \cdot ie^{i\phi}) - (e^{i\phi} \cdot ie^{i\phi}) = ie^{-i\phi} - ie^{2i\phi} = i(e^{-i\phi} - e^{2i\phi})$$

4. **Интегрирование:**

$$I = i\int_{\pi}^{2\pi} (e^{-i\phi} - e^{2i\phi})\, d\phi$$

Первообразная:

$$\int \ e^{-i\phi} d\phi = \frac{e^{-i\phi}}{-i} = ie^{-i\phi}$$

$$\int \ e^{2i\phi} d\phi = \frac{e^{2i\phi}}{2i} = -\frac{i}{2}e^{2i\phi}$$

Подставляем:

$$I = i\,[ie^{-i\phi} - (-\frac{i}{2}e^{2i\phi})]_{\pi}^{2\pi} = i\,[ie^{-i\phi} + \frac{i}{2}e^{2i\phi}]_{\pi}^{2\pi}$$

Вынесем i из скобки (получим $i \cdot i = -1$):

$$I = -1\,[e^{-i\phi} + \frac{1}{2}e^{2i\phi}]_{\pi}^{2\pi}$$

Вычисляем значения на границах: В точке 2π: $e^{-2\pi i} = 1$, $e^{4\pi i} = 1$. Значение: $1 + 0.5 = 1.5$. В точке π: $e^{-\pi i} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$. Значение: $-1 + 0.5 = -0.5$.

$$I = -1 \cdot (1.5 - (-0.5)) = -1 \cdot (2) = -2$$

Ответ: -2

Задача 4

Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z^2-5z+2)^2}$

Решение:

1. **Нахождение особых точек:** Решим уравнение $2z^2 - 5z + 2 = 0$. $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$.

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{2}$$

   Так как знаменатель стоит в квадрате, обе точки являются полюсами 2-го порядка.

2. **Анализ положения точек:** Контур интегрирования — окружность $|z| = 1$.
   - $z_1 = 2$ — вне окружности ($|2| > 1$).
   - $z_2 = 1/2$ — внутри окружности ($|0.5| < 1$). Интеграл равен $2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, 1/2)$.

3. **Вычисление вычета в точке $z = 1/2$:** Преобразуем знаменатель:

$$2z^2 - 5z + 2 = 2(z-2)(z-1/2)$$

$$(2z^2 - 5z + 2)^2 = 4(z-2)^2(z-1/2)^2$$

   Функция: $f(z) = \frac{1}{4(z-2)^2(z-1/2)^2}$.

   Формула для вычета в полюсе 2-го порядка z_0:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)]$$

   В нашем случае:

$$\phi(z) = (z-1/2)^2 f(z) = \frac{1}{4(z-2)^2} = \frac{1}{4}(z-2)^{-2}$$

   Находим производную:

$$\phi'(z) = \frac{1}{4} \cdot (-2)(z-2)^{-3} = -\frac{1}{2(z-2)^3}$$

Подставляем $z = 1/2$:

$$\text{Res}(f, 1/2) = -\frac{1}{2(1/2-2)^3} = -\frac{1}{2(-1.5)^3} = -\frac{1}{2(-27/8)} = \frac{1}{2 \cdot 27/8} = \frac{4}{27}$$

4. **Результат:**

$$I = 2\pi i \cdot \frac{4}{27} = \frac{8\pi i}{27}$$

Ответ: $\frac{8\pi i}{27}$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+25}$

Решение:

1. **Переход к функции комплексного переменного:** Рассмотрим интеграл от функции $f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2+25}$. Искомый интеграл $I = \text{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+25} dx\right)$. Интеграл равен $2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k)$ по всем полюсам в верхней полуплоскости ($\text{Im}\, z > 0$).
2. **Нахождение полюсов:** $z^2 + 25 = 0 \Rightarrow z = \pm 5i$. В верхней полуплоскости лежит только точка $z_0 = 5i$. Это простой полюс.
3. **Вычисление вычета:** Для функции вида $\frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z) = e^{3iz}, h(z) = z^2 + 25$, вычет равен $\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

$$h'(z) = 2z$$

$$\text{Res}(f, 5i) = \frac{e^{3i(5i)}}{2(5i)} = \frac{e^{-15}}{10i}$$

4. **Вычисление интеграла:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+25} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-15}}{10i} = \frac{2\pi}{10} e^{-15} = \frac{\pi}{5e^{15}}$$

Так как результат вещественный, он и является значением исходного интеграла с косинусом.

Ответ: $\frac{\pi}{5e^{15}}$