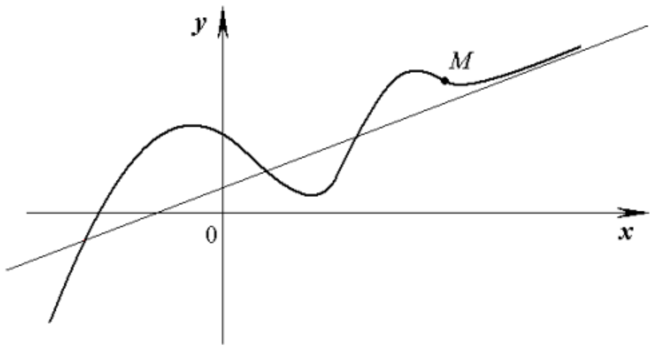
Асимптоты графика функции и методы их отыскания.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.



Различают три вида асимптот: **вертикальные, горизонтальные и наклонные.**

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ (при этом функция $f(x)$ может быть вообще не определена соответственно при $x \geq a$ или $x \leq a$).

Из сказанного следует, что вертикальные асимптоты кривой нужно искать в точках разрыва и на границах области определения. График функции, непрерывной на всей числовой прямой, вертикальных асимптот не имеет.

Например, график функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ на границе области определения, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$

Горизонтальные асимптоты. Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$, то $y=b$ – горизонтальная асимптота кривой $y=f(x)$ (правая при $x\to+\infty$, левая при $x\to-\infty$ и двусторонняя, если пределы при $x\to\pm\infty$ равны).

Например, график функции $y=a^x$ при $a>1$ имеет левую горизонтальную асимптоту $y=0$, так как $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$. Правой горизонтальной асимптоты у кривой нет, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$

Наклонные асимптоты. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ (левая наклонная асимптота) или $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ (правая наклонная асимптота).

Существование наклонной асимптоты определяется следующей теоремой.

Теорема . Для того чтобы кривая $y=f(x)$ имела асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

или

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\qquad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]$$

В первом случае получается правая наклонная асимптота, во втором – левая.

При совпадении пределов при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ прямая $y=kx+b$ является двусторонней асимптотой кривой.

Доказательство. Из определения асимптоты следует $f(x)-(kx+b)=\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}[b+\alpha(x)]=b$. Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x\to\infty$.

Если хотя бы один из пределов, определяющих асимптоту $y=kx+b$, не существует, то график функции не имеет наклонной асимптоты (но может иметь вертикальную).

Нетрудно видеть, что горизонтальная асимптота $y = b$ является частным случаем наклонной $y = kx + b$ при $k = 0$. Поэтому если в каком–либо направлении кривая имеет горизонтальную асимптоту, то в этом направлении нет наклонной, и наоборот.

Пример. Найдем асимптоты графика функции $y=\frac{2x^2-1}{x}$ и построим эскиз графика.

Решение. Функции определена на всей числовой прямой, кроме $x=0$, т.е.

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$

Поэтому в точке разрыва $x=0$ кривая может иметь вертикальную асимптоту. Действительно,

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{2x^2-1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\left(2x-\frac{1}{x}\right)=0-(-\infty)=+\infty.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(2x-\frac{1}{x}\right)=0-\infty=-\infty$$

Следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота; при $x\to 0$ слева $f(x)\to+\infty$, при $x\to 0$ справа $f(x)\to-\infty$.

Горизонтальной асимптоты кривая не имеет, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$$

Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\,;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x - \frac{1}{x} - 2x\right) = 0\,.$$

Прямая $y = 2x$ является двусторонней наклонной асимптотой заданной кривой.