ЦЕПИ МАРКОВА (ПРАКТИЧ.ЗАНЯТИЕ)

Пример 1. В некоторой местности погода имеет два состояния: Я – ясно и Д – дождь. Если сегодня дождь, то завтра будет дождь с вероятностью 0,3 и завтра будет ясно с вероятностью 0,7. Если сегодня ясно, то завтра будет ясно с вероятностью 0,8 и завтра дождь с вероятностью 0,2.
Требуется:
а) составить матрицу вероятностей перехода;
б) построить граф, соответствующий матрице вероятностей перехода;
в) найти вероятность того, что будет ясная погода через два дня, если сегодня ясно;
г) найти распределение вероятностей через два шага, если начальное распределение вероятностей имеет вид (0,3 0,7);
д) убедившись, что цепь Маркова эргодическая (все $p_{ij}(n)>0$ на некотором шаге n), найти предельные вероятности.

Пример 2. В 4 ящиках независимо друг от друга равновероятно размещают шары. Пусть S_n – число занятых ящиков после размещения n шаров. Состояния цепи: A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 - занят один ящик, заняты два ящика, заняты три ящика, заняты 4 ящика.
Требуется: а)составить матрицу вероятностей перехода за один шаг;
б) убедиться, что цепь Маркова не является эргодичной и не имеет предельных вероятностей.

Пример 3. Точка двигается по вершинам правильного четырехугольника, занумерованных цифрами 1, 2, 3, 4, причем, за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из оставшихся вершин.
Требуется: а)составить матрицу вероятностей перехода за один шаг и соответствующий граф;
б)найти вероятность того, что через два шага точка попадет в вершину 3, если сейчас она находится в вершине 2;
в)убедившись, что цепь Маркова эргодична, найти предельные вероятности.

ЗАДАЧИ

1.Пусть A1 , A2 , A3 – возможные состояния цепи Маркова и P_1 – матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Построить граф, соответствующий матрице P_1

2. На окружности расположены четыре точки A_1 ,A_2 ,A_3 ,A_4 , равноотстоящие друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом: из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью 0,25 или в диаметрально противоположную точку с вероятностью 0,5. Выписать матрицу P_1 вероятностей перехода за один шаг для этой цепи и построить соответствующий граф.

3. На столе лежит стопка из трёх книг. Обозначим эти книги номерами 1, 2, 3. Состояние цепи будем определять порядком расположения книг в стопке (сверху вниз). Каждое испытание (переход) заключается в том, что из стопки берётся одна из книг и (после извлечения из неё нужной информации) кладётся наверх. Пусть каждая книга берётся с определённой вероятностью:

книга i (i = 1, 2, 3) – с вероятностью p_i. Указать матрицы вероятностей переходов за один и за два шага.

4. В двух отделениях ящика находятся два шара. Каждую секунду выбирается случайным образом один из двух шаров и перекладывается из одного отделения в другое. В качестве состояний цепи Маркова рассматриваются Ak – число шаров в первом отделении (k = 0, 1, 2). Выписать матрицы перехода цепи Маркова за один и за два шага.

5. Из таблицы случайных чисел, содержащей все натуральные числа от 1 до m включительно, выбираются числа наугад. Цепь находится в состоянии Ai, если наибольшее из выбранных чисел равно i (i = 1, 2, ..., m). Найти матрицу вероятностей перехода P1.

6. Автомашина используется для перевозки грузов между тремя пунктами, которые расположены на кольцевой трассе. Грузы перевозятся из каждого пункта в следующий с вероятностью 2/ 3 или в предыдущий с вероятностью 1/ 3 . Найти матрицы перехода P_1, P_2 и предельные вероятности.

7. Пусть в некотором городе каждый взрослый житель имеет одну из трёх групп профессий A1 , A2 , A3 (в каждой группе объединены родственные или близкие профессии). Пусть дети отцов, имеющих профессии A1 , A2 , A3 сохраняют их с вероятностью 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно, а если не сохраняют, то одинаково часто выбирают любую из двух других профессий. При сделанных предположениях изменение профессионального состава населения города при смене поколения будет описываться однородной цепью Маркова (A1, A2, A3 – её состояния).
Найти: а) матрицу перехода P1 за один шаг; б) матрицу перехода P2 за два шага; в) вероятность того, что через два поколения человек с профессией A1 перейдет в профессию A3; г) человек с профессией A2 через два поколения будет иметь ту же профессию.

8. При повышении напряжения в сети электрического тока с вероятностью 0,2 выходит из строя блокирующее устройство прибора, а с вероятностью 0,1 прекращается работа этого прибора. Если блокирующее устройство вышло из строя, то последующее повышение напряжения приводит к прекращению работы прибора с вероятностью 0,3. Пусть состояния работы прибора следующие: A1 – прибор исправен, A2 – вышло из строя блокирующее устройство, A_3 – прибор не работает. Найти матрицу перехода P_1 за один шаг. Указать вероятность перехода A_1 в A_2 за два шага.

9. Пусть в некотором городе 1% жителей ежегодно переселяется в пригород, а 2% жителей пригородов переезжает в город. Если предположить, что общее число жителей города и его пригородов на какой-то период стабилизировалось, то миграционный процесс можно рассматривать как марковский (A1 – случайно выбранный человек – городской, A2 – из пригорода). Найти: а) матрицу перехода вероятностей P1 за один шаг; б) предельные вероятности.

10. Для Васи очень важно, будет завтра дождь или нет (если дождя не будет, то он сможет поехать в лес или на рыбалку). Поэтому все погодные условия он разделил на 2 состояния: 1 — нет дождя (ясная погода), 2 — дождь. Кроме того, он заметил следующую зависимость. Если сегодня ясная погода, то завтра она будет ясной с вероятностью 0, 7; если же сегодня дождь, то завтра ожидается дождь с вероятностью 0, 6.
Требуется: а)Пусть вероятность ясной погоды в пятницу равна 0, 5. Найти вероятность, что в субботу пойдет дождь. (Отв: 0.45)
б) Пусть вероятность ясной погоды в пятницу равна 0, 4. Найти вероятность, что в субботу и воскресенье дождя не будет. (Отв.0,364)

в) Известно, что в пятницу дождя не было. Найти вероятность, что с субботы на воскресенье погода не изменится (0,67).

Р е ш е н и е. а)Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Распределение по состояниям в момент времени n = 0 (пятница) определяется вектором (0, 5; 0, 5). Для нахождения распределения p (1) по состояниям в момент времени n = 1 воспользуемся равенством p (1) = p (0)P_1 , тогда p (1) = (0,55 0,45)

а) По графу:

ОТВЕТЫ

Пример 1 в)0,78 д)(7/9 2/9)

Пример 2 $P_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пример 3

2. $$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A_1 = (1,2,3),\ A_2 = (2,3,1),\ A_3 = (3,1,2),\ A_4 = (1,3,2),$$
$$A_5 = (3,2,1),\ A_1 = (2,1,3).$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_2 & p_3 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_2 & 0 & p_1 & p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 \end{pmatrix}.$$

4.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{2}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{3}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}. \qquad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

P^*_i =1/3, i=1,2,3.

7. а) $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$; б) $P_2 = \begin{pmatrix} 0,675 & 0,17 & 0,155 \\ 0,255 & 0,535 & 0,21 \\ 0,31 & 0,28 & 0,41 \end{pmatrix}$; в)0,155; г) 0,535

8. 0,28.

9. а) $P_1 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,02 & 0,098 \end{pmatrix}$; б) $p_1^* = 2/3; \quad p_2^* = 1/3$