ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, в которое входят независимая переменная (независимые переменные), искомая функция и ее производные называется дифференциальным.

Выделяют два класса дифференциальных уравнений:

- обыкновенные дифференциальные уравнения, если искомая функция зависит от одной переменной,
- уравнения в частных производных, когда искомая функция является функцией многих переменных.

В данном разделе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, их в дальнейшем будем называть "дифференциальными уравнениями".

Этот термин принадлежит Лейбницу (1676 г.)

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные

$$F(x, y(x), y', y", \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Уравнением, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y', y", \dots, y^{(n-1)}).$$

Решением дифференциального уравнения на интервале I называется n-раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество на интервале I.

Решение ДУ может быть записано в явном, в неявном или параметрическом виде.

При нахождении решения ДУ приходится, как правило, выполнять операции интегрирования. Поэтому:

Процесс нахождения решения ДУ называется **интегрированием дифференциального уравнения.**

График решения ДУ называется **интегральной кривой.**

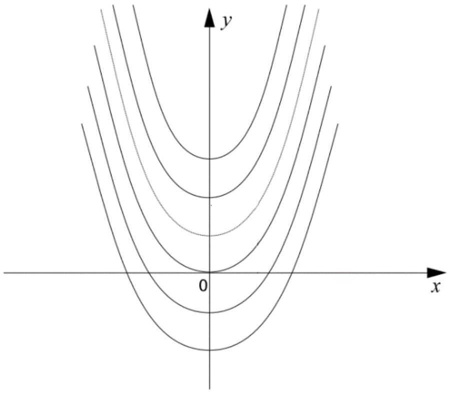
Пример:

Решить уравнение $y' = x.$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

где C — произвольная действительная постоянная.



Каждая из этих функций является решением данного ДУ. На рисунке изображена совокупность полученных интегральных кривых.

Любую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению, мы будем называть **частным решением** этого уравнения.

Совокупность частных решений назовем **общим решением** дифференциального уравнения.

В примере формула $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает общее решение,

а, например, решения $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$ — частные решения.

Для решение ДУ необходимо "избавиться" от входящих в уравнение производных, что возможно, как известно, только с помощью интегрирования, то есть вычисления неопределенных интегралов.

При решении уравнения первого порядка, необходимо одно интегрирование, уравнение второго порядка следует интегрировать дважды и так далее. Но при каждом интегрировании, то есть вычислении неопределенного интеграла, появляется постоянная интегрирования. Следовательно, в решение уравнения $n-$го порядка может входить n постоянных интегрирования.

Другими словами, решений каждого дифференциального уравнения бесчисленное множество, отличаются они значениями постоянных интегрирования.

Так же, как не любая функция может быть проинтегрирована, и представлена в виде элементарных функций, так и не любое дифференциальное уравнение имеет решение, выражающееся через элементарные функции.

Если решение ДУ явно или неявно выражается через элементарные функции и неопределенные интегралы от элементарных функций, то такие уравнения называются разрешимыми в **квадратурах**.

Класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, узок.

Мы изучим несколько классов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, а также рассмотрим некоторые приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

Кроме того, мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с применением дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения используются при решении различных задач физики, химии, математики, биологии, экологии и экономике. В этом мы убедимся чуть позже.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

или

$$y' = f(x, y).$$

Т.к. $\frac{dy}{dx} = y'$, то дифференциальное уравнение можно еще записать:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Последний вид дифференциального уравнения удобен тем, что переменные x и y равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Очевидно, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется дифференцируемая функция на интервале I, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) Функция $\varphi(x, c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.
2) Каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение найдено в неявно виде, то есть в виде уравнения $\Phi(x, y, c) = 0$, то такое решение называется **общим интегралом** ДУ. Уравнение $\Phi(x, y, c_0) = 0$ в этом случае называется **частным интегралом**.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x, c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости OXY, а частное решение $y = \varphi(x, c_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0).

Задача отыскания решения ДУ, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется **задачей Коши**.

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

<u>Теорема существования и единственности решение задачи Коши:</u>

Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. (Без доказательства)

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области D проходит единственная интегральная кривая.

Точки плоскости, в которых не выполняются условия теоремы Коши, называются **особыми точками**.

Через каждую из них может проходить либо несколько интегральных кривых, либо не проходит ни одной.

ПРИМЕР:

Проиллюстрируем теорему Коши на примере решения ДУ

$$xy' = 2y.$$

Поделим обе части уравнения на x

$$y' = \frac{2y}{x},$$

Ясно, что

$$f(x,y) = \frac{2y}{x}$$

и

$$f'_y(x,y) = \frac{2}{x}$$

Эти функции непрерывны при $x \neq 0$.

Таким образом, во всей плоскости OXY за исключением прямой $x = 0$, то есть оси OY, правая часть уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши. Точки, лежащие на оси OY являются особыми точками.

Решим данное ДУ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем почленно обе части уравнения:

$$ln|y| = 2ln|x| + lnc,\ \ c > 0$$

$$|y| = cx^2,\ \ \ c > 0$$

$$y = \pm cx^2,\ \ c > 0$$

или

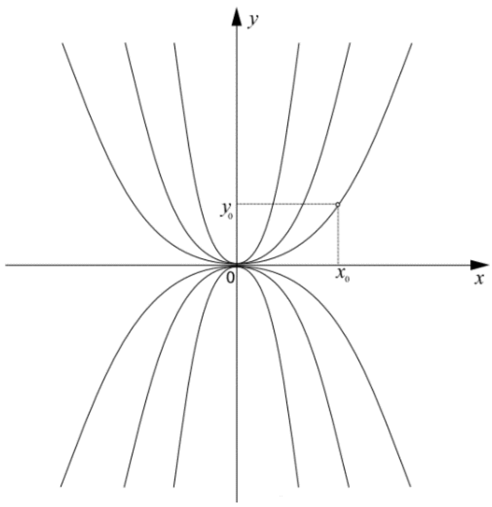
$$y = \mathrm{C}x^2,\ \ \mathrm{C} \neq 0.$$

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но это решение содержится в формуле $y = \mathrm{C}x^2$ при $\mathrm{C} = 0$.

Окончательный ответ:

$y = \mathrm{C}x^2$, где C – произвольная постоянная ($\mathrm{C} \in \mathbb{R}$).

Общее решение геометрически представляет собой совокупность парабол с числовым множителем c и прямую $y = 0$.



Через каждую точку, не лежащую на оси OY, проходит единственная интегральная кривая. Через начало координат проходит бесконечное множество интегральных кривых. Нарушение единственности объясняется тем, что начало координат является особой точкой. Через особые точки, лежащие на оси OY и несовпадающие с началом координат, не проходит ни одной интегральной кривой.

Геометрический смысл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$

Данное уравнение определяет в каждой точке плоскости (x, y), где существует $f(x, y)$, значение y', то есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в этой точке.

$$\boxed{tg \propto = y'(x) = f(x, y).}$$

Если каждой точке плоскости таким образом сопоставить направление, то получится поле направлений.

Интегральная кривая в любой своей точке касается поля направлений.

Изоклинами называются кривые, вдоль которых направление поля постоянно. Уравнение изоклины можно получить, если положить

$$y' = \text{с}, \quad \text{т.е. } f(x, y) = \text{с}, \qquad \text{где с} - \text{ произвольная постоянная.}$$

Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых.

Пример 1:

С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения

$$y' = 2x.$$

Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет

$$2x = c,$$

т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy

В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

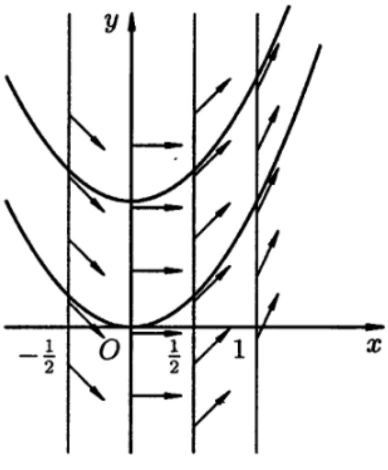
Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ имеем $x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $c = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$

и т. д.



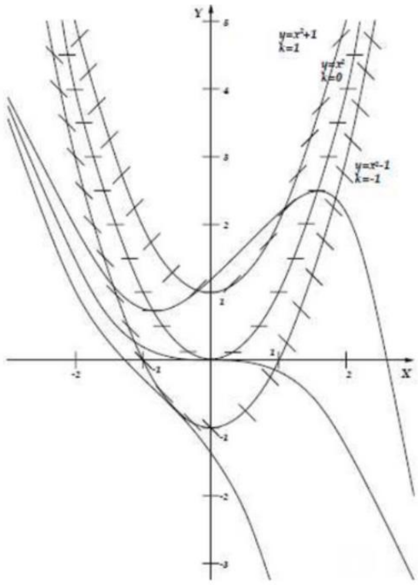
Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом, по их направлениям строим линии.

Они, как видно, представляют собой семейство парабол.

Пример 2:

Построить интегральные кривые, определяемые уравнением

$$y' = y - x^2.$$



Р е ш е н и е. Уравнение изоклин

$$y' = C$$

$$y - x^2 = C$$

$$y = x^2 + C$$

$$C = 0 \ \Rightarrow \ y = x^2 \ \Rightarrow \ y' = \operatorname{tg}\alpha = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 0,$$

$$C = 1 \ \Rightarrow \ y = x^2 + 1 \ \Rightarrow \ y' = \operatorname{tg}\alpha = 1 \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \ \Rightarrow \ y = x^2 + 2 \ \Rightarrow \ y' = \operatorname{tg}\alpha = 2 \ \Rightarrow \ \alpha = \operatorname{arctg} 2,$$

$$C = -1 \ \Rightarrow \ y = x^2 - 1 \ \Rightarrow \ y' = \operatorname{tg}\alpha = -1 \ \Rightarrow \ \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что при $y - x^2 > 0$ получаем $y' > 0$, то есть $y(x)$ возрастает. Аналогично при $y - x^2 < 0$ получаем, что $y(x)$ убывает, поэтому кривая $y = x^2$ — линия экстремумов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Так называются уравнения вида $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y),}$

где $f(x)$, $g(y)$ - заданные функции.

Запишем производную в виде отношения дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

и разнесем в разные части выражения, содержащие x и y. Мы получим равенство двух дифференциалов:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \ .$$

После интегрирования правой части по x, а левой – по y мы получим слева функцию, зависящую от y, а справа – функцию, зависящую от x, отличающихся на константу:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C \,,$$

C – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{R}$).

Замечание: Поводя разделение переменных, мы разделили обе части уравнения на $g(y)$. В результате наших действий мы можем потерять решения, при которых $g(y)$=0. Действительно, если $g(y)$=0 при $y = y_0$, то функция $y = y_0$ является решением данного ДУ.

Более общий вид ДУ с разделяющимися переменными

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.}$$

Это уравнение легко сводится к (2), для этого проведем почленное деление ДУ на $g_1(y)f_2(x)$.

При этом могут быть потеряны некоторые решения, поэтому следует отдельно решить

$$g_1(y)f_2(x)=0$$

и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения – особые решения.

Пример 1. Найти общее решение ДУ

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0.$$

Решение:

$$y(1 + x)dx + x(1 - y)dy = 0,$$

$$\frac{1 + x}{x}dx + \frac{1 - y}{y}dy = 0$$

$$ln|xy| + x - y = c.$$

Потерянные решения: $x = 0, y = 0$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{r} ln|xy| + x - y = c, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \qquad c - \text{произвольная постоянная } (c \in \mathbb{R}).$$

Пример 2. В соответствии с законом радиоактивного распада вещества скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества.

Если обозначить $m(t)$ массу нераспавшегося вещества в момент t $(m(t) > 0)$, то этот закон можно записать в виде соотношения:

$$m'(t) = -\alpha \cdot m.$$

Знак минус указывает на то, что масса вещества убывает с ростом t.
Решение ДУ:

Разделим переменные:

$$\frac{dm}{m} = -\alpha \cdot dt .$$

После интегрирования получим

$$\ln m = -\alpha \cdot t + \ln C\,, \quad m(t) > 0, C > 0$$

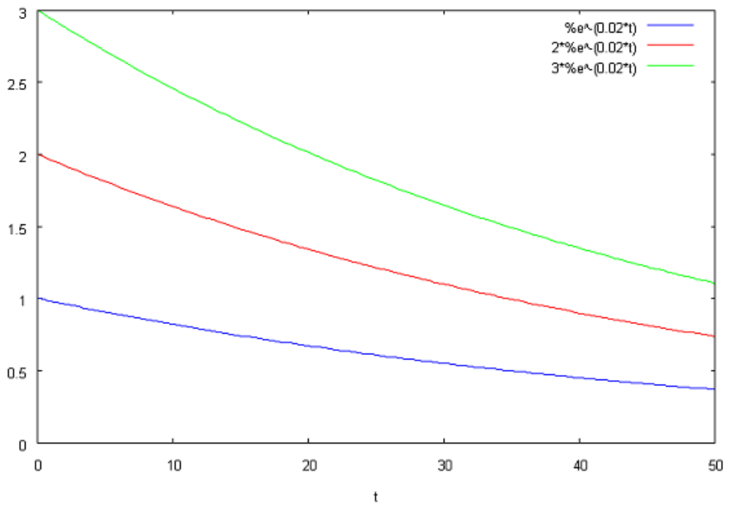
Здесь произвольное постоянное слагаемое мы представили в виде логарифма положительной постоянной величины для удобства последующего потенцирования:

$$m(t) = Ce^{-\alpha \cdot t}, \text{ где } C > 0 \text{ – произвольная постоянная } (C \in \mathbb{R}).$$

Проанализируем полученное решение.

Оно содержит постоянные α (эта постоянная зависит от вида радиоактивного вещества – стронций, радий, уран….) и C – постоянную интегрирования.

Предположим, что мы исследуем радиоактивный распад радия, для которого $\alpha = 0{,}02$, если измерять время в годах. Решение уравнения распада имеет вид $m(t) = Ce^{-0{,}02 \cdot t}$, и мы получаем множество решений вследствие присутствия произвольной положительной константы C, то есть, общее решение.



Как выбрать единственное? В данном случае, чтобы узнать, какое количество радиоактивного вещества останется по прошествии определенного времени, необходимо знать, сколько его было в начальный момент. Задавая $m(0)$, мы задаем значение C.

Другие похожие задачи:

- «закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - t_0),$$

где $T(t)$ – температура тела в момент времени t, k – коэффициент пропорциональности, t_0 – температура воздуха (среды охлаждения);

- Зависимости массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

k – коэффициент пропорциональности;

- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = km, \quad k > 0;$$

Например:
грибки, выделяющие пенициллин (согласно этому уравнению), размножаются по экспоненциальному закону. Что дало возможность в короткий срок обеспечили всех лекарством.

- Закон изменения давления воздуха p в зависимости от высоты над уровнем моря h описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -kp, \quad k > 0;$$

- Модель естественного роста выпуска продукции описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = l \cdot m \cdot p \cdot y(t),$$

где
$y(t)$ – объем продукции, l – коэффициент пропорциональности, p – фиксированная цена, m – норма инвестиций.

Замечание. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + h), \quad b \neq 0,$$

a, b, h - постоянные

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$u(x) = ax + by(x) + h.$$

Пример:

Решить дифференциальное уравнение

$$y' = (9x + y + 5)^2.$$

Решение. Введем новую функцию $u(x) = 9x + y(x) + 5$, откуда

$$y(x) = u(x) - 9x - 5; \quad y' = u' - 9.$$

И уравнение примет вид $\quad u' - 9 = u^2, \quad$ или

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 9.$$

Найдем решение этого уравнения с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{du}{u^2 + 9} = dx,$$

и проинтегрируем:

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3} = x + \frac{C}{3}.$$

Откуда

$$\operatorname{arctg}\frac{u}{3} = 3x + C$$

или

$$\frac{u}{3} = \operatorname{tg}(3x + C), \quad u = 3\operatorname{tg}(3x + C).$$

Вернемся к исходной функции:

$$9x + y + 5 = 3\operatorname{tg}(3x + C)$$

$$y = 3\operatorname{tg}(3x + C) - 9x - 5.$$

Ответ: $y = 3tg(3x + C) - 9x - 5$, C – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{R}$).

ОДНОРОДНЫЕ ДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

если для всех k имеем $F(kx, ky, y') \equiv k^p F(x, y, y')$, где p какое-то число.

Такое уравнение может быть сведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Например, уравнения $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + tg\dfrac{y}{x} + 5$ и $y' = 7e^{y/x} - \ln\dfrac{y}{x} + 8$ являются однородными.

Уравнение $y' = \dfrac{2x^3 + 3x^2 y}{xy^2}$ также однородное,

так как разделив числитель и знаменатель правой части на x^3,

получим $y' = \dfrac{2 + 3\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

Для решения такого уравнения целесообразно ввести новую функцию

$$\frac{y(x)}{x} = p(x).$$

Тогда

$$y(x) = x\,p(x) \quad \text{и} \quad y' = p(x) + x\,p'(x).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$p(x) + x\,p'(x) = f\big(p(x)\big) \quad \text{или} \quad p'(x) = \frac{f(p) - p}{x}.$$

Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его и найдя $p(x)$, мы найдем и $y(x) = xp(x)$.

Пример. Решить уравнение задачу Коши

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\ , \quad y(2) = 1$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Вводя функцию $p(x)$

$$\frac{y(x)}{x} = p(x),$$

$$y(x) = x\,p(x) \quad \text{и} \quad y' = p(x) + x\,p'(x),$$

получим

$$p(x) + x\,p'(x) = \frac{2p(x)\cdot x^2}{x^2 - p^2(x)\cdot x^2}$$

или

$$xp' = \frac{2p}{1-p^2} - p\,.$$

В итоге придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$xp' = \frac{p(1+p^2)}{1-p^2} \qquad (\$)$$

Разделив переменные, получим равенство дифференциалов

$$\frac{(1-p^2)dp}{p(1+p^2)} = \frac{dx}{x}\ .$$

Левая дробь раскладывается на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{(1-p^2)}{p(1+p^2)} = \frac{1}{p} - \frac{2p}{(1+p^2)}\ .$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{2p}{(1+p^2)}\right)dp = \frac{dx}{x}\ .$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$ln|p| - ln(1+p^2) + lnC = ln|x|, \qquad C > 0$$ - произвольная постоянная.

Используя свойства логарифмов, получим

$$|x| = \frac{C|p|}{1+p^2}, \quad C > 0$$

или

$$x = \frac{\pm C\cdot p}{1+p^2}, \;\; C > 0\,.$$

Пусть $c = \pm C$, тогда

$$x = \frac{c \cdot p}{1 + p^2}, \quad c \neq 0\,,$$

c – произвольная постоянная.

При разделении переменных было потерянно решение $p = 0$.
Тогда решением уравнения ($)

$$\left[\begin{array}{c} x = \dfrac{c \cdot p}{1 + p^2}, \quad c \neq 0 \\ p = 0 \end{array}\right.$$

Возвращаясь к старой функции по формуле $y(x) = xp(x)$, получим

$$\left[\begin{array}{c} x = \dfrac{c \cdot \dfrac{y}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}, \quad c \neq 0, \\ \dfrac{y}{x} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} c \cdot y = (x^2 + y^2), \qquad c \neq 0, \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Пусть $\tilde{c} = \frac{1}{c}$, тогда

$$\left[\begin{array}{c} y = \tilde{c} \cdot (x^2 + y^2), \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Тогда общее решение можно записать $y = \tilde{c} \cdot (x^2 + y^2)$, $\tilde{c}$ – произвольная постоянная ($\tilde{c} \in \mathbb{R}$).

Теперь нужно выбрать частное решение – ту кривую, которая проходит через точку (2,1).
Подставляя координаты точки в уравнение, получим

$$1 = \tilde{c}(4 + 1),$$

то есть,

$$\tilde{c} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, уравнение выбранной кривой: $y = \dfrac{(x^2 + y^2)}{5}$.

Замечание.

Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ приводится к однородному с помощью замены

$$x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta,$$

где ξ и η – новые переменные,

$(\alpha,\ \beta)$ – точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$.

Если эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ и значит ДУ имеет вид

$$y' = f(ax + by),$$

которое сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. $(x + 2y + 1)dx = (2x + y - 1)dy$

Решение: $y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$.

Замена $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 = \alpha \\ y = -1 = \beta \end{cases}$$

Значит, делаем замену $x = \xi + 1,\ y = \eta - 1$. Причем $dx = d\xi,\ dy = d\eta$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$.

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + 2\eta}{2\xi + \eta}$$

Это однородное уравнение.

В результате решения этого уравнения и проведения обратной замены переменных, получим общий интеграл

$$(y - x + 2)^3 = c(x + y),\ \ c \text{ – произвольная постоянная } (c \in \mathbb{R}).$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Так называется дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x),$$

$a(x), b(x)$ – заданные функции.

Здесь сама функция и ее производная связаны линейно.

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1) Метод Бернулли.

Решение ищется в виде произведения двух других функций

$$y(x) = u(x)v(x), \quad \text{тогда} \qquad y' = u'v + v'u.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u'v + \underline{v'u} + \underline{a(x)uv} = b(x),$$

Выносим из подчеркнутых слагаемых за скобку u

$$u(v' + a(x)v) = b(x) - u'v. \qquad (***)$$

Подбираем $v = v(x)$ так, чтобы

$$v' + a(x)v = 0,$$

т.е.

$$\frac{dv}{v} = -a(x)dx,$$

$$ln|v| = -\int a(x)dx + lnc\,, \quad c > 0$$

Ввиду свободы выбора $v(x)$ можно принять $c = 1$, тогда

$$v(x) = e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставляем $v(x)$ в (***), получим

$$b(x) - u'e^{-\int a(x)dx} = 0$$

или

$$\frac{du}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

$$u = \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + c.$$

Тогда

$$y = uv \quad \text{или} \qquad y = \left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + c\right)e^{-\int a(x)dx}.$$

Пример. Решить уравнение

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{6a^2}{x^2}.$$

Решение:

$$y(x) = u(x)v(x), \quad \textit{тогда} \qquad y' = u'v + v'u.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u'v + \underline{v'u} - \underline{\frac{2}{x}uv} = -\frac{6a^2}{x^2}$$

Выносим из подчеркнутых слагаемых за скобку u

$$u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = -\frac{6a^2}{x^2} - u'v \qquad (*)$$

Подбираем $v = v(x)$ так, чтобы

$$v' - \frac{2}{x}v = 0,$$

тогда

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x}$$

$$ln|v| = 2ln|x| + lnc, \quad c > 0$$

Ввиду свободы выбора $v(x)$ можно принять $c = 1$, тогда

$$v(x) = x^2.$$

Подставляем $v(x)$ в (*), получим

$$0 = -\frac{6a^2}{x^2} - u'x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{6a^2}{x^4}$$

$$u(x) = \frac{6a^2}{3x^3} + C$$

Тогда

$$y = uv$$

или

$$y = \left(\frac{2a^2}{x^3} + C\right)x^2.$$

Отсюда общее решение ДУ

$$y(x) = \frac{2a^2}{x} + Cx^2,\ C \text{ – произвольная постоянная } (C \in \mathbb{R}).$$

2) Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Решим линейное ДУ

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Сначала решим соответствующее уравнение с нулевым свободным членом, называемое **линейным однородным** уравнением:

$$y' + a(x)y = 0.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

$$ln|y| = -\int a(x)dx + ln\tilde{C},\ \ \tilde{C} > 0$$

$$|y| = \tilde{C} \cdot e^{-\int a(x)dx},$$

$$y = \pm\tilde{C} \cdot e^{-\int a(x)dx},$$

или

$$y = C \cdot e^{-\int a(x)dx},\ \text{ где } C = \pm\tilde{C},\ C \neq 0\,.$$

Значение С = 0 дает решение $y \equiv 0$, которое было потеряно при делении на y.

Значит общее решение однородного линейного уравнения имеет вид:

$$y = C \cdot e^{-\int a(x)dx},\ \text{ где } C \text{ – произвольная постоянная } \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Теперь мы будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}.$$

Найдем неизвестный множитель $C(x)$, подставив y в указанном виде в заданное уравнение.

Мы получим

$$C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + C(x) \cdot \big(-a(x)\big)e^{-\int a(x)dx} + a(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = b(x).$$

Отсюда видно, что

$$C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = b(x).$$

Отсюда мы найдем $C'(x)$, а затем и $C(x)$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Пример. Решить уравнение

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{6a^2}{x^2} \ .$$

Решение.

Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Это $y(x) = C \cdot x^2, C$ – произвольная постоянная.

Теперь подставим выражение

$$y(x) = C(x) \cdot x^2$$

в линейное неоднородное уравнение. Мы получим соотношение

$$C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot C(x) \cdot x^2 = -\frac{6a^2}{x^2},$$

$$C'(x) \cdot x^2 = -\frac{6a^2}{x^2} \ ,$$

$$C'(x) = -\frac{6a^2}{x^4} \ ,$$

откуда

$$C(x) = \frac{6a^2}{3x^3} + C \ .$$

Осталось подставить выражение $C(x)$ в представление $y(x) = C \cdot x^2$.

В результате получим общее решение

$$y(x) = \frac{2a^2}{x} + Cx^2, \quad C \text{ – произвольная постоянная } (C \in \mathbb{R}).$$

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Так называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^n,$$

где $n \neq 1, n \neq 0$, $\quad a(x), b(x)$ – заданные функции.

При $n = 0, n = 1$ данное уравнение является линейным.

1 способ решения.

Разделим обе части уравнения на y^n, тогда получим

$$y^{-n} \cdot y' + a(x)y^{-n+1} = b(x).$$

Уравнение Бернулли сводится к решению линейного уравнения с помощью замены

$$z = y^{-n+1}.$$

Действительно,

$$z' = (-n + 1)y^{-n} \cdot y',$$

тогда уравнение принимает вид

$$z' + a(x)(-n + 1)z = b(x)(-n + 1)$$

и оказывается линейным уравнением.

Решив его и найдя $z(x)$, мы возвращаемся к функции $y(x)$ в соответствии с приведенной формулой.

Замечание: Если $n > 0$, то при делении на y^n теряется решение $y \equiv 0$.

Пример. Решить уравнение

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

Решение.

Разделим обе части уравнения на y^3, получим

$$xy^{-3}y' + 2y^{-2} + x^5e^x = 0$$

Введем новую функцию

$$z(x) = y^{-2}.$$

Вычислим производную

$$z'(x) = -2y^{-3}$$

Тогда исходное уравнение сводится к линейному уравнению

$$xz' - 4z - 2x^5e^x = 0$$

или

$$xz' - 4z = 2x^5e^x \qquad (**)$$

Решим это уравнение методом вариаций произвольной постоянной.

Сначала проинтегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$xz' - 4z = 0.$$

Получим

$$z = Cx^4.$$

Решение неоднородного линейного уравнения следует искать в виде

$$z = C(x) \cdot x^4.$$

Подставив в уравнение (**), получим

$$x \cdot (C'(x) \cdot x^4 + C(x) \cdot 4x^3) - 4C(x) \cdot x^4 = 2x^5e^x$$

Отсюда

$$C'(x) \cdot= 2e^x$$

или

$$C(x) \cdot= 2e^x + C.$$

В итоге, восстановив $z(x)$ и перейдя к $y(x)$, получим общее решение

$$y^2 = \frac{1}{2x^4e^x + Cx^4}.$$

Отметим, что при делении на y^3 теряется решение $y \equiv 0$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = \frac{1}{2x^4e^x + Cx^4}, \\ y = 0, \end{array}\right. \qquad C \text{ – произвольная постоянная } (C \in \mathbb{R}).$$

2 способ решения.

Решение ищется в виде произведения двух других функций

$$y(x) = u(x)v(x), \quad \textit{тогда} \qquad y' = u'v + v'u.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u'v + \underline{v'u} + \underline{a(x)uv} = b(x)u^n v^n,$$

Выносим из подчеркнутых слагаемых за скобку u

$$u(v' + a(x)v) = b(x)u^n v^n - u'v. \qquad (***)$$

Подбираем $v = v(x)$ так, чтобы

$$v' + a(x)v = 0,$$

т.е.

$$\frac{dv}{v} = -a(x)dx,$$

$$ln|v| = -\int a(x)dx + lnc.$$

Ввиду свободы выбора $v(x)$ можно принять $c = 1$, тогда

$$v(x) = e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставляем $v(x)$ в (***), получим

$$b(x)u^n v^n - u'e^{-\int a(x)dx} = 0$$

или

$$\frac{du}{dx} = b(x)u^n v^n \cdot e^{\int a(x)dx},$$

$$\frac{du}{u^n} = b(x)v^n(x) \cdot e^{\int a(x)dx}dx$$

$\int \frac{du}{u^n} = \int b(x)u^n v^n \cdot e^{\int a(x)dx}\, dx + c$, где c – произвольная постоянная.

Затем находим $y(x) = u(x)v(x)$.

Замечание. Если $n > 0$, то при разделении переменных было потеряно решение $y = 0$ $(u = 0)$, которое необходимо включить в ответ.

Пример. Решить уравнение

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

Решение. Представим $y(x)$ в виде

$$y(x) = u(x)v(x), \quad \textit{тогда} \qquad y' = u'v + v'u.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$x(u'v + \underline{v'u}) + \underline{2uv} + x^5u^3v^3e^x = 0,$$

Выносим из подчеркнутых слагаемых за скобку u

$$u(xv' + 2v) = -x^5u^3v^3e^x - u'vx. \qquad (*''*)$$

Подбираем $v = v(x)$ так, чтобы

$$xv' + 2v = 0,$$

т.е.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}dx,$$

$$ln|v| = -2ln|x| + lnc, \quad c > 0$$

Ввиду свободы выбора $v(x)$ можно принять $c = 1$, тогда

$$v(x) = x^{-2}.$$

Подставляем $v(x)$ в (*''*), получим

$$-x^5u^3x^{-6}e^x - u'x^{-2}x = 0,$$

$$-u^3x^{-1}e^x - u'x^{-1} = 0,$$

$$-u^3e^x - u' = 0,$$

$$\frac{du}{u^3} = -e^x dx\,,$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -e^x - \frac{C}{2},$$

$$u^2 = \frac{1}{2e^x + C}\;.$$

В данной задаче удобнее найти y^2:

$$y^2 = u^2 v^2,$$

причем $v(x) = x^{-2}$, тогда

$$y^2 = \frac{1}{2x^4 e^x + Cx^4}, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная}$$

Потерянное решение при разделении переменных: $u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$.
Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = \frac{1}{2x^4 e^x + Cx^4}, \\ \quad y = 0 \end{array}\right. \qquad \text{где } C - \text{произвольная постоянная } (C \in \mathbb{R}).$$

УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ И ПРИВОДИМОЕ К НЕМУ

Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, то есть

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y).$$

Тогда ДУ можно записать в виде

$$du(x, y) = 0,$$

а его общий интеграл будет $u(x, y) = C$.

ТЕОРЕМА.
Пусть функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ непрерывны в некоторой области D.
Для того, чтобы $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было полным дифференциалом необходимо и достаточно, чтобы

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y).$$

Доказательство:
Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом, то есть

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= u'_x dx + u'_y dy.$$

Значит, $$u'_x = P(x,y), \;\; u'_y = Q(x,y)$$

Продифференцируем первое равенство по y, а второе по x, получим

$$u''_{xy} = P'_y(x,y), \;\; u''_{yx} = Q'_x(x,y).$$

А так как смешанные частные производные равны, то $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.

Пример. Решить уравнение

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение.

Мы видим, что условие $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 2x$ выполняется.

Тогда существует такая функция $u(x,y)$, такая что

$$du(x,y) = 2xydx + (x^2 - y^2)dy,$$

где

$$u'_x = 2xy, \tag{1}$$

$$u'_y = (x^2 - y^2). \tag{2}$$

Проинтегрируем обе части равенства (1) по x

$$u(x,y) = \int 2xy\,dx + \varphi(y)$$

или

$$u(x,y) = x^2y + \varphi(y).$$

Полученное равенство продифференцируем по y, получим

$$u'_y = x^2 + \varphi'(y). \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получаем

$$\varphi'(y) = -y^2.$$

Откуда

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + \tilde{C}.$$

Значит,

$$u(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + \tilde{C}.$$

Решение исходного уравнения: $x^2y - \frac{y^3}{3} + \tilde{C} = C$

или

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = C - \tilde{C}$$

или

$x^2y - \frac{y^3}{3} = c$, где c – произвольная постоянная.

Иногда удается найти для произвольного дифференциального уравнения вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

такую функцию $\mu(x,y)$, что умножив обе части уравнения на эту функцию, мы превращаем его в уравнение в полных дифференциалах, так как $(\mu M)'_y = (\mu N)'_x$. Такой сомножитель называется **интегрирующим множителем**.

Пример. Решить уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$$

Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$(x^2 + y^2)dx + (xdx + ydy) = 0.$$

Мы видим, что вторая скобка представляет собой $d(x^2 + y^2)/2$.

Разделим обе части уравнение на первую скобку:

$$dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = 0$$

или

$$dx + \frac{1}{2}d\left(ln(x^2 + y^2)\right) = 0$$

Или

$$d(x+\frac{\ln(x^2+y^2)}{2})=0.$$

Отсюда $x + ln(\ x^2 + y^2)^{1/2} = C.$

Здесь интегрирующим множителем явилась функция $\frac{1}{(x^2+y^2)}$.