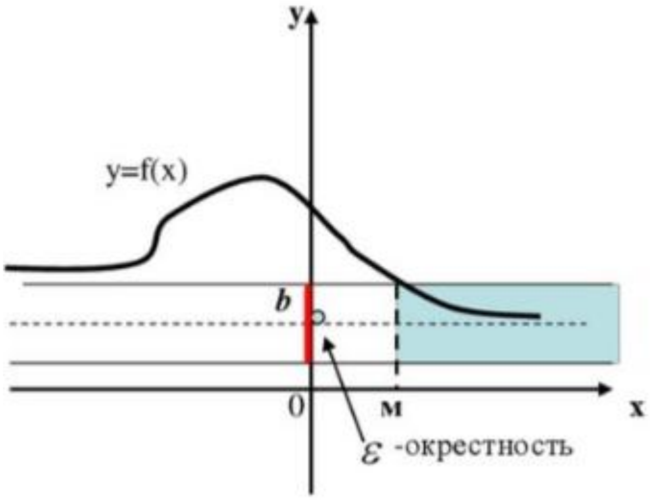
Предел функции при стремлении *x* к бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена или на всей числовой оси, или на всех x, больших некоторого числа.

Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to +\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \text{ если } \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\;\, M(\varepsilon) : \forall\, x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to -\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \text{ если } \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\;\, M(\varepsilon) : \forall\, x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Функция $F(x)$ называется бесконечно большой при $x \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \infty,$$

если $\forall M > 0 \quad \exists N(M): \quad \forall x > N \;\; \Rightarrow \;\; |F(x)| > M$.

Функция $F(x)$ называется бесконечно большой при $x \to -\infty$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \infty,$$

если $\forall M > 0 \quad \exists N(M): \quad \forall x < N \;\; \Rightarrow \;\; |F(x)| > M$.

Односторонние пределы функции

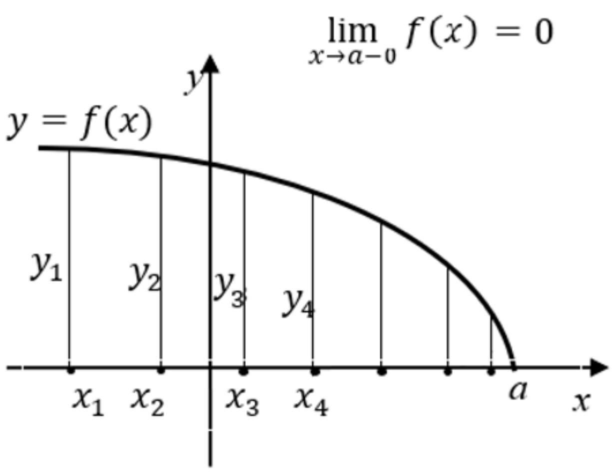
Особый интерес представляет вычисление предела функции при стремлении ее аргумента к особой точке – точке, в которой функция не существует. В этом случае можно установить поведение функции в окрестности этой особой точки. Остается открытым вопрос, как выяснить поведение функции вблизи особой точки, если предела в этой точке не существует? Для этого вводятся понятия левого и правого пределов функции (предел слева, предел справа).

Определение 1:

Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ *слева*, если для любой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\} \to a$ при $x_n < a$ соответствующая функциональная последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Число c называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ *справа*, если для любой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\} \to a$ при $x_n > a$ соответствующая функциональная последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к c.

Обозначения этих пределов соответственно $\boxed{\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b, \quad \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = c.}$



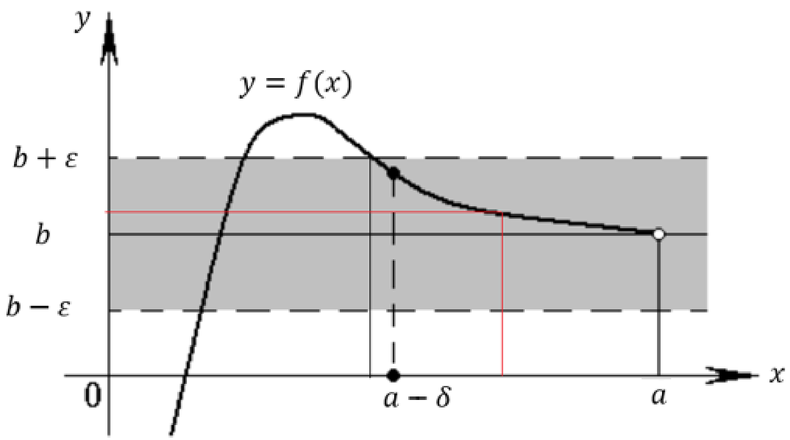
Определение 2:

Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ *слева*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех x, принадлежащих интервалу $(a - \delta; a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

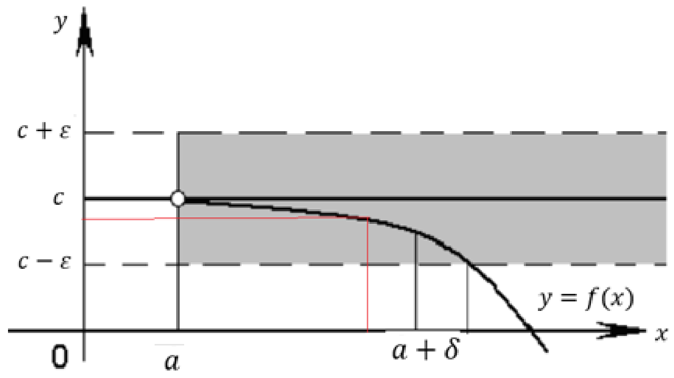
$$b = \lim_{x \to a-0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in (a - \delta; a) \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Число c называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ *справа*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех x, принадлежащих интервалу $(a; a + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in (a; a + \delta) \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b$$



$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c$$

Определение1 и определение 2 эквивалентны.

Очевидно, что

необходимым условием существования предела функции является равенство левого и правого ее пределов.

Пример. $y = 2^{1/(x-1)}$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)}$.

Поскольку $x<1$, показатель степени отрицательный, следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{2^{-\frac{1}{(x-1)}}} = 0 .$$

Теперь вычислим $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{1/(x-1)}$.

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{1/(x-1)} = +\infty ,$$

так как показатель степени положителен и стремится к $+\infty$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}$ не существует, так как при подходе к предельному значению аргумента слева и справа получаем разные значения.

Функция $F(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ слева, т. е.

$$\lim_{x\to a-0} F(x) = \infty ,$$

если $\forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0: \quad \forall x \in (a-\delta; a) \ \Rightarrow \ |F(x)| > M$.

Функция $F(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ справа, т. е.

$$\lim_{x\to a+0} F(x) = \infty ,$$

если $\forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0: \quad \forall x \in (a; a+\delta) \ \Rightarrow \ |F(x)| > M$.

Если при этом для всех значений x из некоторой окрестности точки a (слева или справа соответственно), функция $F(x)$ принимает только положительные значения, то говорят, что функция стремится к $+\infty$ и записывают

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = +\infty.$$

Если же бесконечно большая функция отрицательна в некоторой окрестности точки a (слева или справа соответственно), функция, то говорят, что она стремится к $-\infty$ и записывают

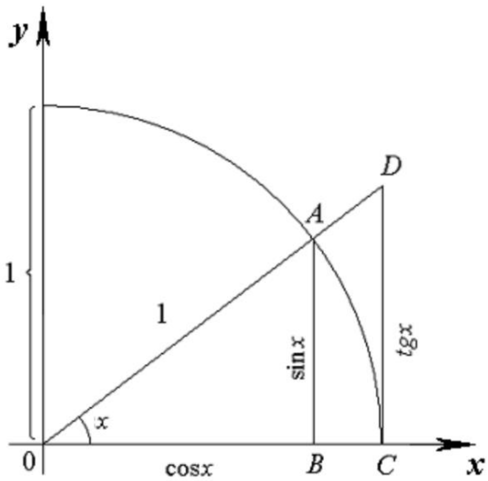
$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = -\infty.$$

Первый замечательный предел

Докажем, что справедлива формула:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x.



площадь $\Delta OAB <$ площадь сектора $OAC <$ площадь ΔODC;

площадь $\Delta OAB = \dfrac{1}{2} OB \cdot BA = \dfrac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$;

площадь сектора $OAC = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot x = \dfrac{x}{2}$;

площадь $\Delta ODC = \dfrac{1}{2} OC \cdot CD = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg} x$.

Подставим найденные выражения для площадей в неравенства :

$$\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

Разделив все члены этих неравенств на положительное выражение $\frac{1}{2}\sin x$, получим

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или}$$

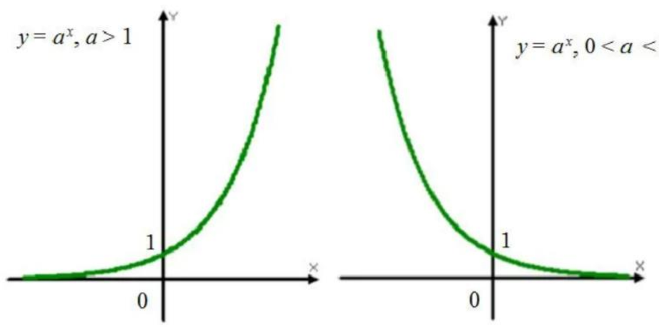
$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Неравенства были выведены в предположении, что $x > 0$. Но они верны и при $x < 0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$; $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

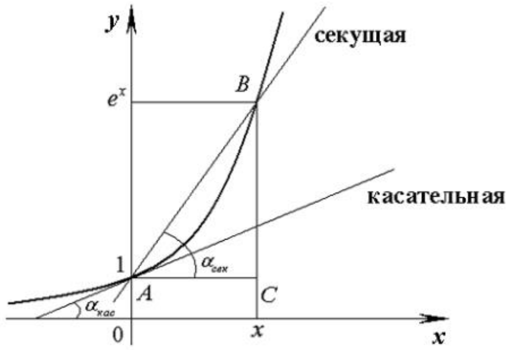
А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских. Мы получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел и следствия из него

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$.



Проведем касательную к графику показательной функции через точку (0;1), лежащую на этом графике.



Числом e называется основание такой показательной функции, касательная к которой, проведенная через точку $(0;1)$, составляет с положительным направлением оси Ox угол, равный $\frac{\pi}{4}$, т.е. угловой коэффициент которой равен 1.

Число e играет очень большую роль в математике. Это иррациональное число.

$e = 2{,}718281828\ldots$ - число Непера.

Показательная функция $y = e^x$ называется экспонента.
Логарифм по основанию e называется натуральный логарифм и обозначается $\log_e x = \ln x$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \; e \approx 2{,}71\ldots$$

Равносильность этих формул следует из связи переменных: $\alpha = \dfrac{1}{x}$.

Заметим, что здесь в первой из приведенных формул переменная x может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$, а также может просто расти по абсолютной величине, меняя знак произвольно.

Приведенная формула имеет следующие следствия.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$.

Выведем первое следствие непосредственно из определения числа e.

Проведем через точки $A(0;1)$ и $B(x;e^x)$ секущую. Найдем тангенс угла наклона секущей:

$$tg\,\alpha_{\text{сек}} = tg < BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{e^x-1}{x}.$$

Если x устремить к нулю, то угол наклона секущей буде стремиться к углу наклона касательной, то есть к 45^0 (согласно определению числа e):

$$\lim_{x\to 0} \alpha_{\text{сек}} = \alpha_{\text{кас}} = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} tg\,\alpha_{\text{сек}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = tg\,\alpha_{\text{кас}} = tg\,\frac{\pi}{4} = 1.$$

Значит, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.}$

Выведем формулу $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-1}{x\cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a.$$

Выведем второе следствие:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \begin{bmatrix} \text{замена} \\ t = \ln(1+x) \\ 1+x = e^t \\ x = e^t - 1 \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1.$$

Третье следствие:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\alpha}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x} = \begin{bmatrix} \text{замена} \\ t = \alpha\ln(1+x) \\ 1+x = e^{\frac{t}{\alpha}} \\ x = e^{\frac{t}{\alpha}} - 1 \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{e^t-1}{e^{\frac{t}{\alpha}}-1} = \alpha.$$

Вычислим второй замечательный предел, для этого рассмотрим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 = lne,$$

Следовательно,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$