ЛЕКЦИЯ -3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.Дискретная случайная величина и ее закон распределения. Основные дискретные распределения
2.Функция распределения случайной величины, свойства.
3.Числовые характеристики дискретных случайных величин: ожидание, дисперсия, квадратическое отклонение. Свойства числовых характеристик дискретных случайных величин

Случайной величиной X называется числовая функция X(ω), определенная на пространстве элементарных событий Ω = { ω} и на его алгебре событий Ã, и такая, что для любого действительного числа x определена вероятность P (X<x).

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита – X, Y, Z,…а принимаемые ими значения - соответствующими малыми буквами x_1, x_2,…, y_1, y_2,…. с соответствующей вероятностью p_1, p_2, …, p_n.

Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений называется **дискретной случайной величиной (ДСВ)**. Например,

1) X - число родившихся девочек среди ста новорожденных за последний месяц - это дискретная случайная величина, которая может принимать значения 0, 1, 2, 3, …, 100.

2) Y – количество выстрелов до первого попадания в цель.

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется случайная величина, значения которой есть некоторый промежуток (конечный или бесконечный) числовой оси. Например, 1)расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле - это непрерывная случайная величина, значения которой принадлежат некоторому промежутку [a; b];

2)Y – рост человека.

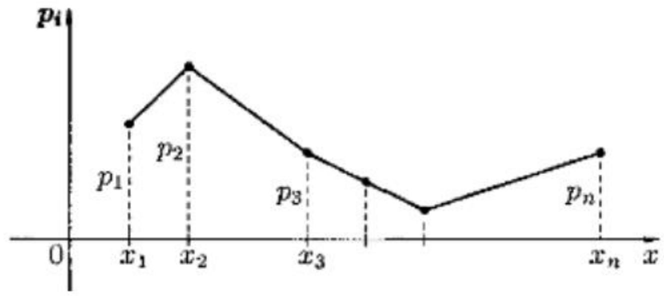
3) Z – продолжительность лекции.

1. Дискретная случайная величина, ее закон распределения. ОСНОВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Закон распределения ДСВ можно задать таблично, в первую строку таблицы вносятся возможные значения случайной величины, а во вторую - их вероятности: P(X=x_i) = p_i

x	x_1	x_2	**…**	x_n
p	p_1	p_2	**…**	p_n

Закон распределения ДСВ можно задать многоугольником распределения:



П р и м е р 1. (Биномиальное распределение.) Монету подбросили три раза. Запишем закон распределения случайной величины X - количества выпадения «герба».

Решение. Случайная величина X - количество выпавших «гербов» при трехкратном подбрасывании монеты.

Другими словами: случайная величина X – это сколько раз выпадет «герб», если монетку подбрасывать три раза. Герб может выпасть 0 раз (т.е. не выпасть ни разу), 1,2,3 раз.

Значит, возможные значения данной случайной величины X: $x_i = 0, 1, 2, 3$.

Найдем соответствующие вероятности p_i.

Найдем вероятность того, что при трех подбрасываниях монеты «герб» не появится (то есть появится 0 раз). Испытания удовлетворяют схеме Бернулли, поэтому используем формулу Бернулли:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=0{,}125.$$

Найдем вероятность того, что при трех подбрасываниях монеты «герб» появится 1 раз:

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}375.$$

Найдем вероятность того, что «герб» появится 2 раза:

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=0{,}375.$$

Найдем вероятность того, что «герб» появится 3 раза:

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=0{,}125.$$

Сделаем проверку: 0,125+0,375+0,375+0,125 =1.

Тогда закон распределения данной дискретной случайной величины можно представить таблицей:

x	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки с координатами (x_i ; p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученная фигура называется **многоугольником распределения.**

П р и м е р 2. (Равномерное распределение) Игральный кубик подбрасывают один раз. Запишите закон распределения случайной величины X – количества выпавших очков.

Решение. Случайная величина X - количество выпавших очков при однократном подбрасывании кубика. Возможные значения данной случайной величины X: $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Их вероятности: $P(X{=}1) = P(X{=}2) = \ldots = P(X{=}6) = 1/6$.

Тогда закон распределения данной дискретной случайной величины можно представить таблицей:

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

П р и м е р 3. (Гипергеометрическое распределение или схема урн) В партии из тридцати шести деталей имеется 9 стандартных, т.е. 36 = 9 стандартных + 27 нестандартных. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* - числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Введем дискретную случайную величину *X* - количество стандартных деталей из отобранных четырех деталей. *X* может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Найдем соответствующие вероятности.

X = 0, если все выбранные четыре детали нестандартные, (4 = 0 стандартных + 4 нестандартных):

$$P(X=0)=\frac{C_9^0\cdot C_{27}^4}{C_{36}^4}\approx 0{,}298.$$

X = 1, если одна из выбранных четырех деталей стандартная, (4 = 1 стандартная + 3 нестандартных):

$$P(X=1)=\frac{C_9^1\cdot C_{27}^3}{C_{36}^4}\approx 0{,}447.$$

X = 2, если две из выбранных четырех деталей стандартные, (4 =2 стандартных + 2 нестандартных):

$$P(X=2)=\frac{C_9^2\cdot C_{27}^2}{C_{36}^4}\approx 0{,}215.$$

X = 3, если три из выбранных четырех деталей стандартные, (4 =3 стандартные + 1 нестандартная):

$$P(X=3)=\frac{C_9^3\cdot C_{27}^1}{C_{36}^4}\approx 0{,}039.$$

X = 4, если четыре из выбранных четырех деталей стандартные, (4 стандартных + 0 нестандартных):

$$P(X=4)=\frac{C_9^4\cdot C_{27}^0}{C_{36}^4}\approx 0{,}002.$$

Заполним таблицу, которая представляет закон распределения дискретной случайной величины *X*:

x	0	1	2	3	4
p	0,298	0,447	0,215	0,039	0,002

П р и м е р 4. Дискретная случайная величина *X* имеет **распределение Пуассона** (или **распределена по закону Пуассона**) с параметром $\lambda>0$, если она принимает бесконечное, но счетное число значений: 0, 1, 2, …, *m*, … с соответствующими вероятностями

$$p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}\text{, где } m = 0, 1, 2,\ldots$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального закона, когда число испытаний $n \to \infty$, а вероятность события $p \to 0$, при условии, что произведение $n \cdot p = \lambda$ - постоянная величина. При этих условиях (т. е. при $n \to \infty$, $p \to 0$, $n \cdot p = \lambda = const$) величина $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, определяемая по формуле Бернулли, стремится к вероятности $\dfrac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, определяемой по закону Пуассона. Поэтому закон распределения Пуассона является хорошим приближением биномиального закона в случае, когда число опытов велико, а вероятность события А в каждом из них мала. В связи с этим закон распределения Пуассона называют часто **законом редких событий**.

П р и м е р 5. (Распределение Бенфорда, правило первой цифры) Случайная величина X - первая цифра в реальном массиве данных. Если первой цифрой является d, то вероятность такого события равна

$$P(X = d) = \log_N \left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

N – основание системы счисления, N>2.

Распределение случайной величины X при N=10

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	30,1 %	17,6 %	12,5 %	9,7 %	7,9 %	6,7 %	5,8 %	5,1 %	4,6 %

По закону Бэдфорда распределены

1. Население стран и городов. Как следствие: результаты демографических измерений, результаты выборов, региональные показатели, пропорциональные населению.
2. Площади бассейнов рек, площади стран и территорий, размеры островов.
3. Тиражи газет и книг.
4. Повседневные расходы.
5. Показатели изменений на финансовых рынках (отдельная большая тема, уверен что, кто-то из вас знает ее лучше меня).
6. Математические величины: последовательность степеней двойки, числа Фибоначчи, факториалы.

2 Функция распределения случайной величины и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины.

Одним из наиболее удобных и универсальных способов задания закона распределения случайной величины *X* является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины *X* называется функция $F(x)$, которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем x, т. е. по определению:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ существует как для дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

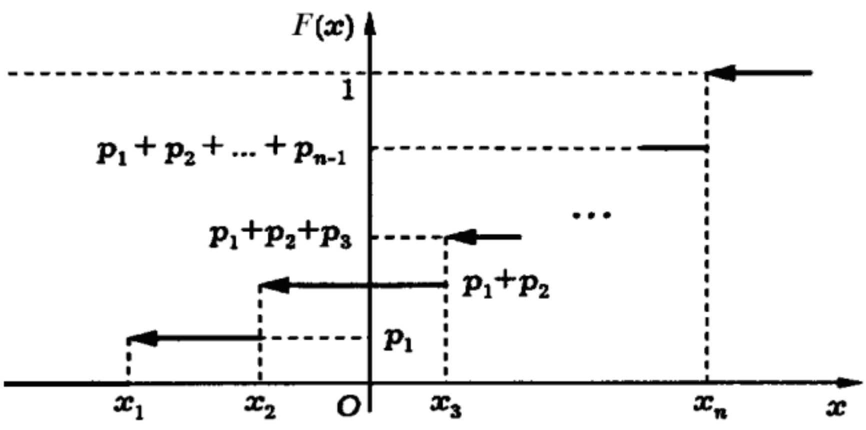
1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x - 0) = F(x)$, $x \in R$.
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Для дискретной случайной величины функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева. Пусть задана закон распределения ДСВ:

x	x_1	x_2	**…**	x_n
p	p_1	p_2	**…**	p_n

Тогда функция распределения имеет вид:

$$F(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ p_1 + p_2 + ... + p_k, & x_k < x \le x_{k+1}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$



П р и м е р. Найти функцию распределения случайной дискретной величины, заданной следующим законом распределения:

X	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

Решение:

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий найдем:

1. При $x \le 1$ $F(x) = P(X < x) = 0$, т. к. значения $x < 1$ случайная величина X не принимает.

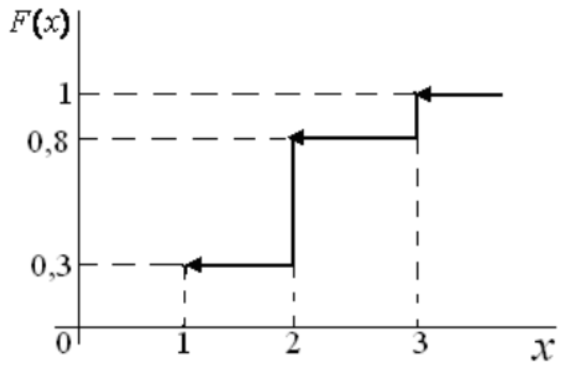
2. При $1 < x \le 2$ $F(x) = P(X < x) = 0{,}3$, т. к. X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

3. При $2 < x \le 3$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$.

4. Если $x > 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$, т. к. событие $X < 3$ достоверно.

Следовательно

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$



3.1.ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДСВ: Математическое ожидание

Математическое ожидание приближенно равно среднему значению случайной величины. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и следовательно стреляет лучше.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X - это величина $M(X)$, которая вычисляется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \qquad (1)$$

где x_i- значения случайной величины, p_i- их вероятности, n- число возможных значений случайной величины.

П р и м е р 1. Найдите математическое ожидание, зная закон распределения дискретной случайной величины.

x	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. По формуле (1):

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

Свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине: $M(C)=C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=C\cdot M(X)$.

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Свойство 4. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий слагаемых.

3.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДСВ: дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Дисперсия $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение σ (X) показывают, как рассеяны возможные значения случайной величины около ее математического ожидания $M(X)$.

Отклонением случайной величины ***X*** называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Дисперсией случайной величины X называется величина $D(X)$, которая равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $m=M(X)$. То есть $D(X) = M((X - M(X))^2)$. Тогда из определения математического ожидания получим, что

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \ldots + (x_n - m)^2 p_n, \qquad (2)$$

где x_i- значения случайной величины, p_i- их вероятности, n-число возможных значений случайной величины X.

Теорема. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - m^2 = {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + \ldots + {x_n}^2 p_n - m^2. \qquad (3)$$

Среднеквадратическое отклонение σ (X) равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (4)$$

П р и м е р 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x	1	2
p	0,2	0,8

Найдите дисперсию $D(X)$ случайной величины X двумя способами по формулам (2) и (3), результаты сравните. Вычислите среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

1 способ. $M(X) = m = 10{,}2+2 \quad 0{,}8=1{,}8$.

Используем формулу (2):

$D(X)=(1-1{,}8)^2 \cdot 0{,}2+(2-1{,}8)^2 \cdot 0{,}8 =0{,}16$.

2 способ. $M(X) = 1{,}8$.

Составим закон распределения для случайной величины X^2 и найдем $M(X^2)$:

x^2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
p	0,2	0,8

$M(X^2) = 1\cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}4$.

По формуле (3) получим: $D(X) = 3{,}4 - 1{,}8^2 = 0{,}16$.

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.

Свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна 0: $D(C) = 0$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$.

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Свойство 4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

П р и м е р 2. Дисперсии случайных величин X и Y равны соответственно 1 и 2. Найдите дисперсию случайной величины $Z = 4X - 3Y + 8$.

Решение. $D(Z)=D(4X - 3Y) = D(4X) + D(3Y) = 16D(X) + 9D(Y) = 16\cdot 1+9\cdot 2=34$.

П р и м е р 3. Задан закон распределения случайной величины *X:*

x	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найдите среднеквадратическое отклонение.

Решение. $M(X) = 2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}5 = 6{,}4$; $M(X^2) = 4\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}4+100\cdot 0{,}5=54$;

$D(X) = 54-6{,}4^2=54-40{,}96=13{,}04$; $\sigma(X) = \sqrt{13{,}04} = 3{,}6$.

П р и м е р 4. Случайная величина X задана законом распределения.

x	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. $M(X) = 1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}6+3\cdot 0{,}2 = 2{,}0$; $M(X^2) = 1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}6+9\cdot 0{,}2=4{,}4$;

$D(X) = 4{,}4 - 2^2=0{,}4$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63$.