1 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	1	3	6	7
P	a	0,3	0,2	0,1

10.2. Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью $p = 0{,}9$. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа препятствий, преодоленных спортсменом. Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет: а) не более двух препятствий; б) более трех препятствий.

10.3. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,1. Дискретная случайная величина X – число сбоев. Найти: 1) ряд распределения; 2) функцию распределения и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и среднее квадратичное отклонение; 5) вероятность попадания X в промежуток (2; 3).

10.4. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10 %. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не больше одного банка?

10.5. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения случайной величины X – числа неточных приборов среди наудачу взятых четырех приборов. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(0 < X < 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1, \\ Ax^2 + B, 1 \leq x \leq 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

Найти: A, B, $M[X]$, $D[X]$, плотность вероятностей, $P(0 \le X \le 2)$.

11.2 Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = ax\ 2e\text{-}\ kx$, где $k > 0$, $0 \le x < \infty$. Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения случайной величины X; в) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал $(0; 1/k)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b(3x+1), & 0< x \le \frac{1}{3}; \\ 0, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0; 0,25).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & -\frac{\pi}{2} < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi/4; 0)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Электрички маршрута Н. Тагил – Екатеринбург идут строго по расписанию, интервал движения составляет 2 часа. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к станции, будет ожидать поезд: а) менее 0,5 часа; б) более 1 часа; в) среднее время ожидания поезда.

12.2. Длительность времени безошибочной работы сотрудника банка в течение рабочего дня имеет показательное распределение с $\lambda = 0{,}2$. Найти вероятность того, что за время рабочего дня (t = 8 часов): а) сотрудник ошибется; б) сотрудник не ошибется.

12.3. Полагая, что возраст населения страны подчиняется нормальному закону распределения с параметрами (20;5), найти долю мужчин в возрасте от 25 до 35 лет. При расчете учитывать, что на 10 женщин приходится 9 мужчин.

12.4. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 т и стандартным отклонением 60 т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 800 т угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750 до 850 т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 665 т.

12.5. Случайная величина X – ошибка измерения диаметра вала, подчинена нормальному закону с параметрами (0;20). Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность появления события A в одном опыте равна 0,6. Можно ли с вероятностью, большей 0,97 утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых испытаниях будет в пределах от 500 до 700 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 60 % от числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью 0,99 ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от их математического ожидания не превышало по абсолютной величине 50? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Среднее изменение курса акций компании в течение одних биржевых торгов составит 1 %, а среднее квадратическое отклонение оценивается как 0,5 %. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится не более чем на 2 %. Задачу решить: а) с помощью теоремы Чебышева; б) с помощью неравенства Чебышева.

13.4. Для новогоднего праздника Петя должен сделать гирлянду из 400 электрических лампочек. Он решает включить их параллельно. Лампочки оказались очень низкого качества – вероятность того, что какая-либо из них погаснет во время праздника, составляет 0,5. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число горящих лампочек будет заключено между 100 и 300.

2 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	1	2	4	7
P	0,2	a	0,4	0,1

10.2. Из коробки, в которой находятся 2 зеленых, 2 черных и 6 красных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа извлеченных стержней красного цвета. Найти вероятность того, что при этом красных стержней будет: а) не менее трех; б) хотя бы один.

10.3. Вероятность повышения цен на сыр в текущем месяце равна 0,7; на молоко – 0,3. Составить закон распределения случайной величины – числа товаров, на которые будут повышены цены (из двух рассматриваемых), найти ее математическое ожидание.

10.4. При производстве некоторого изделия вероятность брака составляет 0,1. В этом случае предприятие терпит убыток в 3 тыс. руб. При изготовлении правильного изделия прибыль предприятия составляет 10 тыс. руб. За день изготавливаются два изделия. Составить закон распределения случайной величины – дневной прибыли предприятия. Найти ее математическое ожидание.

10.5. Игральная кость бросается 4 раза; X – число выпадений шестерки. Написать ряд распределения для случайной величины X. Найти: $F(x)$; $M(X)$; $D(X)$; σx; $p(2 < X < 4)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2}, \text{ при } x > 0; \\ 0, \text{ при } x \leq 0. \end{cases}$ Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{X < M(X)\}$.

11.2. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0 \leq x < 2; \\ x - 7/4, & \text{при } 2 \leq x < 11/4; \\ 1, & \text{при } x \geq 11/4. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

б) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1;1.5].

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{b}{\sqrt{x}}, & 1 < x \le 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (2; 3).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{1}{9}(x-1)^2, & 1 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 3).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–1,5;4,5]. Найти $M(X)$ и $D(X)$. Что вероятнее: в результате испытания X окажется в интервале [0; 2] или вне этого интервала.

12.2. Среднее время безотказной работы мобильного телефона, произведенного компанией Samsung, 30 тыс. часов. Найти вероятность того, что телефон, купленный в магазине «Евросеть», проработает не менее 27 тыс. часов.

12.3. Значения теста *IQ* распределены приблизительно по нормальному закону распределения с параметрами (150;14). Записать выражение для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения.

12.4. Кандидат на выборах считает, что 20 % избирателей в определенной области поддерживают его избирательную платформу. Если 64 избирателя случайно отобраны из числа избирателей данной области, найдите вероятность того, что отобранная доля избирателей, поддерживающих кандидата, не будет отличаться по абсолютной величине от истинной доли более чем на 0,07.

12.5. Производится взвешивание вещества. Случайная ошибка взвешивания подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20). Определить вероятность того, что при трех независимых взвешиваниях только в одном ошибка по абсолютной величине не превосходит 10 г.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 60 % из числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятность не меньше 0,99 ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от их математического ожидания не превышало по абсолютной величине 50 (использовать неравенство Чебышева?

13.2. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в гардеробе у второго входа, чтобы в среднем в 95 случаях из 100 все зрители могли в нем раздеться? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает первый вход с вероятностью 0,7? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Какое минимальное число опытов следует провести, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что частота появления события будет отличаться по абсолютной величине от его вероятности, равной 0,6, не более чем на 0,02? Ответ дать с помощью неравенства Чебышева и следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

13.4. Инвестор покупает ценные бумаги за счет кредита, взятого с процентной ставкой r под залог своей недвижимости. Доходность ценных бумаг X представляет собой случайную величину с математическим ожиданием a и средним квадратичным отклонением σ. Оценить вероятность того, что инвестор не сможет вернуть кредит: а) не имея никаких сведений о характере закона распределения случайной величины X, зная только, что она положительна; б) предполагая случайную величину X распределенной по нормальному закону.

3 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 2\}$.

X	1	2	3	4
P	0,4	a	0,3	0,1

10.2. База снабжает 6 магазинов. В течение дня от каждого из них с вероятностью 1/3 может поступить заявка. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа заявок, поступивших на базу за день. Найти вероятность того, что их будет более пяти.

10.3. Три монеты одновременно подбрасываются 3 раза. Дискретная случайная величина X – число появления трех «гербов» Найти: 1) ряд распределения; 2) построить функцию распределения; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X > 1\}$.

10.4. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых 210 и 60 у. е. Составьте ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего: а) один билет; б) два билета. Стоимость билета – 3 у. е. Найдите числовые характеристики этих распределений. Запишите в общем виде функции распределений вероятностей и постройте их графики.

10.5. Производятся последовательные независимые испытания трех приборов на надежность. Надежность каждого из приборов равна 0,76. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Найти: закон распределения случайной величины X – числа испытанных приборов, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1{,}5 < X < 2{,}9)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ A(1 - e^{-x}), \ x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: A, $f(x)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 < X < 1\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1; \\ \dfrac{A}{x^2}, & \text{при} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 3); д) вероятность того, что при 4 независимых испытаниях величина X ни разу не попадает на отрезок [2; 3].

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{3}{4}\pi; \\ b\sin 2x, & \frac{3}{4}\pi < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал ($5\pi/6$; π).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5; \\ \frac{1}{5}(x-5), & 5 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (6; 7).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Величина годовой прибыли некоторого предприятия распределена равномерно на отрезке [5; 15] млн у. е. Каковы математическое ожидание и дисперсия годовой прибыли этого предприятия?

12.2. Среднее время задержки дыхания у здорового человека 50 секунд. Найти вероятность того, что человек задержит дыхание: а) от 38 до 46 секунд; б) в течение 80 секунд.

12.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны $M(X) = 10$, $D(X) = 16$. Найти вероятность попадания X в интервал (2;13).

12.4. Авиакомпания знает, что в среднем 5 % людей, делающих предварительный заказ на определенный рейс, не будет его использовать. Если авиакомпания продала 160 билетов на самолет, в котором лишь 155 мест, чему равна вероятность того, что место будет доступно для любого пассажира, имеющего заказ и планирующего улететь?

12.5. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра шарика от проектных размеров (X) по абсолютной величине меньше 0,7 мм. X распределена нормально с параметрами (0; 0,4). Найти вероятность того, что среди пяти проверенных шариков все годные, если измерения производились независимо.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность изготовления детали с дефектами равна 0,1. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что число нестандартных деталей среди 10 тыс. изготовленных будет заключено в границах от 959 до 1030 включительно? Какой должна быть левая граница, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

13.2. Вероятность производства стандартной детали равна 0,95. Оцените с помощью ЦПТ вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 75 до 125.

13.3. Страховой случай приходится примерно на каждый восьмой договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые нужно заключить, чтобы с вероятностью не меньше 0,8 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от вероятности 0,125 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине). Уточнить результат с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

13.4. По статистическим данным в среднем 87 % новорожденных доживают до 50 лет (т. е. вероятность дожития до 50 лет равна 0,87). С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности не более чем на 0,04 (по модулю).

4 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–4	–1	2	3
P	0,1	0,3	0,2	a

10.2. Наблюдение за районом ведется тремя радиолокационными станциями (РЛС). В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой РЛС с вероятностью 0,2. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа РЛС, обнаруживших объект. Найти вероятность, что их будет не менее двух.

10.3. Вероятность повышения цен на сыр в текущем месяце равна 0,7; на молоко – 0,3. Составить закон распределения случайной величины числа товаров, на которые не будут повышены цены (из двух рассматриваемых), найти ее математическое ожидание.

10.4. Среди 13 билетов 4 выигрышных. Составить закон распределения случайной величины количества выигрышных билетов из двух взятых наугад, найти математическое ожидание.

10.5. На электростанции установили 400 новых диодов. Вероятность того, что за месяц диод сгорит, равна 0,005. Найти вероятность того, что через месяц сгорят 4 диода. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, σx, где X – число сгоревших диодов.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Дана плотность распределения $f(x) = Ae^{-|x|}$. Найти: A, $F(x)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{|x|<1\}$.

11.2 Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти: а) постоянные A, B; б) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$; в) выяснить существует ли $M(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ bx^2, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 1,75).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/4; \pi/3)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–1;3]. Найти ее дисперсию и вероятность попадания X в интервал [–1/2;1/2].

12.2. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1/3$. Что вероятнее: в результате испытания X окажется меньше 2 или больше 2?

12.3. Распределение по скоростям молекул является нормальным с параметрами (100; 20). Найти вероятность того, что из пяти взятых молекул отклонение от средней скорости хотя бы одной из молекул не превзойдет по абсолютной величине 15.

12.4. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,04. Агрономы знают, что 65 % фруктов весят меньше, чем 0,5 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута.

12.5. В нормально распределенной совокупности 15 % значений X меньше 12 и 40 % больше 16,2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность производства стандартной детали равна 0,95. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число бракованных среди 2 тыс. деталей находится в границах от 75 до 125.

13.2. Имеется 1000 квадратов, сторона которых может принимать значения 0,5 или 1 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. С какой вероятностью суммарная площадь всех квадратов будет в пределах от 750 до 805? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. По данным статистической службы, в области 5,5 % трудоспособного населения – безработные. Оценить вероятность того, что в наудачу отобранной группе в 1000 человек из состава трудоспособного населения доля безработных будет заключена в границах от 4,5 до 6,5 %. Решить задачу с помощью неравенства Чебышева и следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

13.4. Банкомат выдает стандартные суммы в 500, 100 и 50 долл., причем первые составляют 10 %, а последние – 60 % всех выдач. В среднем банкомат производит 100 выдач в сутки. Определить размер денежной суммы, которую необходимо заложить в банкомат утром, чтобы этой суммы с вероятностью 0,9 хватило для выдачи наличности вкладчикам до следующего утра.

5 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{4 \le X \le 10\}$.

X	1	3	4
P	0,1	0,4	a

10.2. Опыт состоит из четырех независимых подбрасываний двух правильных монет, т. е. выпадение герба и цифры – равновозможные события. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа одновременного выпадения двух цифр. Найти вероятность того, что это событие произойдет не менее трех раз.

10.3. Вероятность поражения крейсера торпедой равна 0,4. Произведено четыре залпа. Случайная величина X – число попаданий. Найти: 1) ряд распределения, 2) построить функцию распределения, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \le 2\}$.

10.4. Компания получила финансирование для проведения 6 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,05. Предположим, что нефтеразведку осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Составьте ряд распределения числа успешных нефтеразведок. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что как минимум 2 нефтеразведки принесут успех?

10.5. Монета подбрасывается 3 раза. Случайная величина – число выпадения герба. Написать закон распределения данной случайной величины. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1 < X < 3)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1; \\ Ax^2 + Bx, \ 1 < x \le 2; \\ 1, \ x > 2. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{X > 3\}$.

11.2. График плотности распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с известной полуосью $a = 3$. Найти: а) полуось b; б) аналитическое задание $f(x)$; в) $M[X]$, $D[X]$, г) $P\{a/2 < X < 2a\}$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b \sin x, & 0 < x \le \frac{1}{6}\pi; \\ 0, & x > \frac{1}{6}\pi. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(0; \pi/12)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 2\ln x, & 1 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1; 1,5).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Толщина конспекта по математике студента распределена равномерно от 10 до 50 листов. Какова вероятность обнаружить конспект по математике толщиной от 40 до 45 листов?

12.2. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным 2 минутам. Найти вероятность того, что ждать придется не более 1 минуты.

12.3. Рост подростков подчиняется нормальному закону распределения с параметрами (145; 15). Найти вероятность того, что из трех наугад выбранных подростков два имеют рост от 150 до 160 см.

12.4. Один из методов, позволяющих добиться успешных экономических прогнозов, состоит в применении согласованных подходов к решению конкретной проблемы. Обычно прогнозом занимается большое число аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Пусть этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением $a = 9$ % и стандартным отклонением $\sigma = 2{,}6$ %. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки: а) превысит 11 %; б) окажется менее 14 %; в) будет в пределах от 12 до 15 %.

12.5. Комфортной для организма человека при температуре 18–20 ºС является влажность 50 % с допустимым отклонением 10 %. Определите: 1) сколько процентов людей будет чувствовать себя комфортно при влажности от 55 до 70 %; 2) в каких границах показателей влажности большинство людей будут чувствовать себя комфортно?

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Имеется 1000 квадратов, сторона которых может принимать значения 0,5 или 1 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. С какой вероятностью суммарная площадь всех квадратов будет в пределах от 750 до 800 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. В среднем каждый 30-й диск, записываемый на студии, оказывается бракованной. Оцените с помощью ЦПТ вероятность того, что из 900 дисков, записанных на студии, число бракованных окажется в пределах от 25 до 35.

13.3. Адресная реклама приводит к заявке в одном случае из двадцати. Компания разослала 1000 рекламных проспектов. Почему нельзя с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число заявок окажется в пределах от 30 до 60? Изменить правую границу так, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, и оценить соответствующую вероятность. Уточнить полученный результат с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

13.4. Мера длины «фут», как видно из названия, имеет прямое отношение к ноге: это – длина ступни (сейчас примерно 30 см). Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения так. В воскресный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин, сумма длин их левых ступней делилась на 16 – средняя длина и была «правильным и законным футом». Известно, что размер стопы взрослого мужчины того времени описывается случайной величиной с математическим ожиданием 262,5 мм и средним квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два «правильных и законных фута», рассчитанных указанным способом в разные дни, отличаются друг от друга более чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью, большей 0,99, средний размер их ступней отличался бы от 262,5 мм менее чем на 0,5 мм?

6 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 0\}$.

X	–2	0	2	4
P	0,4	0,3	a	0,1

10.2. Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа манипуляторов, проверенных до остановки линии. Найти вероятность того, что до остановки линии будет проверено: а) не более двух манипуляторов; б) более трех манипуляторов.

10.3. Среди 15 билетов 5 выигрышных. Составить закон распределения случайной величины количества выигрышных билетов из двух взятых наугад. Найти ее математическое ожидание.

10.4. Вероятность того, что кредит размером до 1 млн руб. не будет возвращен, равна 0,25. Для кредита размером свыше 1 млн руб. эта вероятность равна 0,03. Банк выдал два кредита: 400 тыс. и 5 млн руб. Составить закон распределения случайной величины числа невозвращенных кредитов из этих выданных. Найти ее математическое ожидание.

10.5. Баскетбольный мяч бросают 2 раза в корзину с трехочковой отметки. Вероятность попадания 0,3. Случайная величина X – число попаданий. Найти: $M(X)$; $D(X)$; σx; $p(1 < X < 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in [0, \pi]; \\ 0, & x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Найти: A, $M[X]$, $D[X]$, $P\{X > \frac{\pi}{2}\}$, $F(x)$.

11.2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<-1; \\ a+b\arcsin x, & \text{при} \quad -1\le x<1; \\ 1, & \text{при} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты a и b; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{b}{\sqrt[3]{x}}, & 1<x\le 8; \\ 0, & x>8. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1/27; 1/8).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le a; \\ 1, & x>a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1; 1,25).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 секунд.

12.2. Вероятность того, что оперативное запоминающее устройство (ОЗУ), купленное в магазине DNS, проработает без поломки от 1 до 1,5 года, равна 0,8. Найти вероятность того, что это ОЗУ проработает без поломки от 2 до 3 лет.

12.3. Нормальное распределение случайной величины X имеет функцию распределения $F(x) = 0,5 + 3\Phi(2x - 0,1)$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значения из интервала (0,2;0,4).

12.4. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 48 у. е., и стандартным отклонением, равным 6. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию была: а) более 60 у. е.; б) ниже 60 за акцию; в) выше 40 за акцию; г) между 40 и 50 у. е. за акцию.

12.5. Диаметр втулки распределен нормально с параметрами (2; 0,01). В каких границах можно практически гарантировать диаметр втулки.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. На склад магазина поступают изделия, 80 % которых первого сорта. Сколько изделий надо взять, чтобы с вероятностью 0,997 можно было бы утверждать, что частота изделий первого сорта будет в пределах от 0,75 и до 0,85 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оцените при помощи ЦПТ вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

13.3. На основании биржевой статистики составлена следующая таблица возможных значений изменения курса валюты:

Возможность изменения курса, %	–1	–0,5	0	0,5	1
Вероятность изменения	0,1	0,3	0,5	0,05	0,05

Найти вероятность того, что произойдет падение курса валюты, причем не более чем на 0,44 %.

13.4. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

7 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная величина X задана рядом распределения. Найти: 1) a; 2) $M[X]$; 3) $D[X]$; 4) $P\{4 \le X \le 5\}$; 5) функцию распределения и ее график.

X	1	3	4
P	0,1	0,6	a

10.2. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Две карточки вынимаются наугад одновременно. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение суммы чисел, написанных на этих карточках. Найти вероятность того, что эта сумма будет: а) менее шести; б) не менее пяти.

10.3. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове составляет 0,2. Случайная величина X – число сбоев. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X > 4\}$.

10.4. Под руководством бригадира производственного участка работают 3 мужчины и 4 женщины. Бригадиру необходимо выбрать двух рабочих для специальной работы. Не желая оказывать кому-либо предпочтения, он решил выбрать двух рабочих случайно. Составьте ряд распределения числа женщин в выборке. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Какова вероятность того, что будет выбрано не более одной женщины?

10.5. Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в 2 раза. Случайная величина X – число попаданий при трех выстрелах. Найти: $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1{,}5 < X < 2{,}9)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины задается формулой $F(x) = \begin{cases} 0,\ x \in]-\infty;0[; \\ Ax^2 + B,\ x \in [0;1]; \\ 1,\ x \in]1;+\infty[. \end{cases}$

Найти: A, B, $M[X]$, $D[X]$, $f(x)$, $P\{-4 \le X \le 4\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1; \\ \dfrac{a}{x^3}, & \text{при} \quad 1 \le x \le 4; \\ 0, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность $P(3 < X < 5)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ b\cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(0; \pi/4)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1 - \sin x), & \frac{\pi}{2} < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/2; \pi)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-4;4]$. Записать ее функцию распределения, найти вероятность попадания случайной величины в интервал $[-5; 2]$.

12.2. Случайная непрерывная величина X распределена по показательному закону $\lambda = 0,2$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение больше 4.

12.3. Производится расчет издержек на производство некоторого изделия. Случайные ошибки расчета подчинены нормальному распределению со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ у. е. Найти вероятность того, что расчет себестоимости будет произведен с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 у. е.

12.4. Для поступления в некоторый университет необходимо успешно сдать вступительные экзамены. В среднем их выдерживают лишь 25 % абитуриентов. Предположим, что в приемную комиссию поступило 1 889 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 500 поступающих сдадут все экзамены (наберут проходной балл)?

12.5. Ошибки измерений прибора подчиняются нормальному распределению. Прибор имеет систематическую ошибку 2 см и среднюю квадратичную ошибку 3 см. Найти вероятность того, что четыре ошибки измерений попадут в интервал]0,4 см[. Измерения независимы.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. В среднем каждый 30-й диск, записываемый на студии, оказывается бракованной. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что из 900 дисков, записанных на студии, число бракованных окажется в пределах от 25 до 35.

13.2. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит в город на поезде, который ходит раз в сутки. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще, чем 1 раз в 100 дней?

13.3. Опыт показывает, что адресная реклама приводит к цели в одном из ста случаев. Найти границы, в которых будет находиться число сделанных по рекламе заказов, если всего разослано 5000 рекламных листков.

13.4. В страховой компании 10000 клиентов. Взнос каждого из них составляет 250 €. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 25 000€. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 250 000€, с вероятностью 0,999.

8 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 2\}$.

X	1	2	3	4
P	a	0,2	0,2	0,1

10.2. Производятся 4 независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 соответственно может появиться случайное событие A. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа появлений события A. Найти вероятность того, что A произойдет не менее чем в половине опытов.

10.3. При производстве детали вероятность брака составляет 0,2. В этом случае предприятие терпит убыток в 5 тыс. руб. При изготовлении качественной детали прибыль предприятия 12 тыс. руб. За день изготавливаются два детали. Составить закон распределения случайной величины дневной прибыли предприятия, найти математическое ожидание.

10.4. Среди 10 билетов 5 выигрышных. Составить закон распределения случайной величины количества выигрышных билетов из трех взятых наугад, найти математическое ожидание.

10.5. На соревнованиях по ловле рыбы рыбаку дается три попытки поймать окуня. Случайная величина X – число пойманных окуней. Вероятность поймать окуня 0,7. Найти: $M(X)$; $D(X)$; σx; $p(1 < X < 3)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ A\cos x + B, 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 1, x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{\, 0 \leq X \leq \pi/4 \,\}$.

11.2. Дана плотность распределения случайной величины X $f(x)=\dfrac{a}{e^x+e^{-x}}$.

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $P(0<X<\infty)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{b}{x}, & 1<x\le e^2; \\ 0, & x>e^2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 2).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{1}{8}(x-1)^3, & 1<x\le a; \\ 1, & x>a. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1,5; 2,5).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Самолеты из Москвы во Владивосток летают строго по расписанию через каждые 10 часов. Найти вероятность того, что пассажир, приехав в аэропорт, будет ждать менее 1 часа.

12.2. Гарантия на купленные в магазине часы 1 год. Среднее время работы без поломок этих часов – 2 года. Найти вероятность того, что часы не придется возвращать в магазин по гарантии.

12.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны $M(X)= 10$, $D(X) = 16$. Найти вероятность попадания X в интервал (2;13).

12.4. Средний срок службы коробки передач до капитального ремонта у автомобиля определенной марки составляет 56 мес. со стандартным отклонением $\sigma = 16$ мес. Привлекая покупателей, производитель хочет дать гарантию на этот узел, обещая сделать бесплатно любое число ремонтов коробки передач нового автомобиля в случае ее поломки до определенного срока. Пусть срок службы коробки передач подчиняется нормальному закону. На сколько месяцев в таком случае производитель должен дать гарантию для этой детали, чтобы число бесплатных ремонтов не превышало 2,275 % проданных автомобилей?

12.5. Вес собаки породы лабрадор в питомнике в среднем составляет 60 кг со средним квадратичным отклонением 7 кг. Найти вероятность того, что вес одного наугад взятого лабрадора составляет: а) от 50 до 70 кг; б) не более 55 кг.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оцените при помощи неравенства Чебышева вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

13.2. Найдите с помощью ЦПТ вероятность того, что среди 800 новорожденных детей будет от 370 до 430 мальчиков. Считать вероятность рождения мальчика 0,5.

13.3. В среднем каждая тридцатая видеокассета оказывается с браком. Почему нельзя с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 900 кассет число бракованных окажется в пределах от 20 до 35? Как надо изменить правую границу, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу с измененной правой границей. Найти ту же вероятность с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа и объяснить различие полученных результатов.

13.4. Во время каникул Петя работал в предвыборном штабе кандидата в депутаты, который проводил выборочный опрос избирателей. Примерное распределение голосов было известно: по 40 % избирателей «за» и «против» кандидата, остальные воздержались. Сколько нужно опросить людей, чтобы с вероятностью не меньше 0,9, гарантировать отклонение процента голосов, отданных за кандидата при выборочном опросе, от истинного мнения избирателей не более чем на 2 % от всего электората?

9 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	1	2	3	4
P	0,1	a	0,3	0,2

10.2. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа красных карандашей в выборке. Найти вероятность того, что в выборке будет: а) хотя бы один красный карандаш; б) менее двух красных карандашей.

10.3. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных и равна 0,2. Испытано 9 приборов. Случайная величина X – число отказавших приборов. Найти: 1) ряд распределения; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X > 3\}$.

10.4. Некоторый ресторан славится хорошей кухней. Управляющий ресторана хвастает, что в субботний вечер в течение получаса подходит до 9 групп посетителей. Составьте ряд распределения возможного числа групп посетителей ресторана в течение получаса; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что 3 или более групп посетителей прибудут в ресторан в течение 10-минутного промежутка времени?

10.5. В цирке медведь должен прокатиться на самокате по арене, не падая, три круга. Случайная величина X – число кругов, пройденных без падения. Вероятность упасть 0,4. Найти: $M(X)$; $D(X)$; σx; $p(1 < X < 3)$.

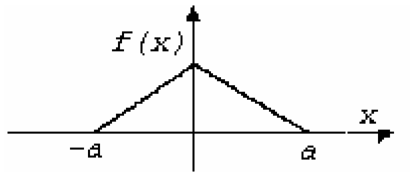
Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Дана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} A/x, x \in [1; e]; \\ 0, x \notin [1; e]. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\left\{\frac{e}{2} < X < \frac{3}{4}e\right\}$

11.2. Случайная величина X подчинена «закону равнобедренного треугольника» на участке $[-a; a]$.



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ be^{-3x}, & 0 < x < \infty. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0; 1).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2x - \sin 2x}{2\pi}, & 0 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi/2; \pi/2)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–1;4]. Записать ее функцию распределения, найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0; 2).

12.2. Время безотказной работы дискеты 30 дней. Случайная величина X – время работы дискеты. Найти вероятность того, что дискета проработает в течение 33 дней.

12.3. Производится расчет себестоимости некоторого сложного изделия без систематических ошибок. Случайные ошибки расчета подчинены нормальному закону распределению со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15$ у. е. Найти вероятность того, что расчет себестоимости будет произведен с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 у. е.

12.4. При производстве безалкогольных напитков специальный аппарат разливает определенное число унций (1 унция = 28,3 г) напитка в стандартную емкость. Число разлитых унций подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием, зависящим от настройки аппарата. Количество унций напитка, разлитых отдельным аппаратом, имеет стандартное отклонение $\sigma = 0{,}4$ унции. Пусть емкости объемом в 8 унций наполняются кока-колой. Сколько унций напитка должен в среднем разливать аппарат, чтобы не более 5 % емкостей оказалось переполненными?

12.5. При рождении вес ребенка в среднем составляет 3300 г. Фактически вес имеет отклонение 250 г. Определите вероятность того, что родившейся ребенок будет весить: а) от 3200 до 3500 г; б) не менее 3600 г.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. В среднем 10 % работоспособного населения некоторого региона— безработные. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 тыс. работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11 %.

13.2. Найдите такое число k, что с вероятностью приближенно равной 0,9 можно было бы утверждать, что число мальчиков среди 900 новорожденных больше k. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Даны n-независимых неотрицательных случайных величин $X1$, $X2$, …, Xn с математическим ожиданием $M(Xi) = 1$ и дисперсией $D(Xi) = 0{,}5$ ($i = 1, \ldots, n$). С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин не превзойдет величины, равной двум.

13.4. В дачном поселке 2500 жителей, каждый из которых примерно шесть раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок случайным образом и независимо от других жителей. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

10 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \ge 1\}$.

X	–3	–1	3	5
P	0,1	a	0,3	0,4

10.2. Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок начинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстреле 0,8. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа пораженных мишеней. Найти вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень

10.3. Вероятность того, что кредит размером до 3 млн руб. не будет возвращен, равна 0,04. Для кредита размером свыше 3 млн руб. эта вероятность равна 0,3. Банк выдал два кредита: 1 млн и 3500 тыс. рублей. Составить закон распределения случайной величины-числа невозвращенных кредитов из этих выданных. Найти ее математическое ожидание.

10.4. Вероятность повышения цен на сыр равна 0,5; на молоко – 0,3, на масло – 0,1. Составить закон распределения случайной величины-числа товаров, на которые могут повысить цены, найти ее математическое ожидание.

10.5. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения X – числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Определить $M(X)$, $D(X)$, σx, $F(x)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \in]-\infty;0]; \\ Ax^3 + B, x \in]0;1]; \\ 1, x \in]1;+\infty[. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 < X \le 2\}$.

11.2. Случайная величина X распределена по закону $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$, при $\infty < x < +\infty$.

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-1;1]$. г) выяснить, существует ли $M(X)$?

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1; \\ b(x+1)^2, & -1 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(0; 2)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\pi; \\ \frac{1}{2}(1+\cos x), & -\pi < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi/2; 0)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Патрульная машина ДПС проезжает около одного и того же магазина через каждые 2 часа. Найти вероятность того, что патрульная машина проедет около данного магазина не менее чем через 10 минут после совершения ограбления.

12.2. Непрерывная случайная непрерывная величина X распределена по показательному закону с $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания X в интервал $(0; 3)$.

12.3. Случайная величина X распределена нормально с $M\ (X) = 1$, $D(X) = 0{,}25$. Найти, на какую величину значения случайной величины X отличаются от математического ожидания с вероятностью 0,997.

12.4. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma = 560$ и неизвестным математическим ожиданием. В 90 % случаев число ежемесячных заказов превышает 12 439. Найдите ожидаемое среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

12.5. Случайная ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20). Найти вероятность того, что при двух независимых измерениях ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Пусть всхожесть семян некоторого сорта растений составляет 70 %. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что при посеве 10 тыс. семян отклонение доли взошедших от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

13.2. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70 % числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью 0,95 ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от их математического ожидания не превышало по абсолютной величине 50? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Продолжительность горения лампочки является случайной величиной, дисперсия которой не превышает 10 000. Пользуясь теоремой Чебышева, оценить наибольшее отклонение средней арифметической продолжительности горения 5 000 лампочек от средней арифметической их математических ожиданий, если результат необходимо гарантировать с вероятностью не меньше 0,9.

13.4. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности событий: в принятом тексте из 1100 цифр будет меньше 20 ошибок; будет ровно 7 ошибок.

11 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	–1	1	2	4
P	0,2	0,3	0,4	a

10.2. Из ящика, содержащего 4 годных и 3 бракованных детали, наугад извлекают 4 детали. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа вынутых годных деталей. Найти вероятность того, что годных деталей будет: а) менее трех; б) хотя бы одна.

10.3. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака составляет 0,1. Передано сообщение из трех знаков. Случайная величина X – число «искажений». Найти: 1) ряд распределения; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{-1 \leq x \leq 2\}$.

10.4. Хорошим считается руководитель, принимающий не менее 70 % правильных решений. Такому управляющему банком предстоит принять решения по 4-м важным вопросам банковской политики. Считая вероятность принятия правильного решения постоянной, составьте ряд распределения возможного числа правильных решений управляющего; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что управляющий примет менее 3 правильных решений?

10.5. На прием к травматологу записаны три человека. Вероятность того, что пациенту потребуется сделать снимок, равна 0,6. Определить закон распределения случайной величины X – числа пациентов, которым необходимо сделать снимок; $M(X)$; $D(X)$; σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Дана плотность распределения: $f(x) = \begin{cases} Ax^2, & x \in [-1;1]; \\ 0, & x \overline{\in} [-1;1]. \end{cases}$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 < X \leq 2\}$.

11.2. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения

с параметром $\lambda > 0$
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения

с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ b\sqrt{x}, & 0 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0; 2).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{1}{27}(x-2)^3, & 2 < x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (3; 4).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. На бурение одной нефтяной скважины уходит 5 часов работы. Найти вероятность того, что инженер, приехавший к месту бурения, будет ждать конца работы менее 1 часа, среднее и среднеквадратическое времени ожидания.

12.2. Время безотказной работы станка в среднем 200 часов. Найти вероятность того, что станок: а) проработает от 100 до 150 часов; б) не выйдет из строя в течение 70 часов.

12.3. Стоимость акции предприятия на рынке подчиняется нормальному распределению. Средняя стоимость ее равна 50 у. е., дисперсия равна 1 у. е. Найти вероятность того, что удастся приобрести акцию предприятия по цене не меньше 49,5 у. е. и не больше 50,5 у. е.

12.4. Еженедельный выпуск продукции на заводе приблизительно распределен по нормальному закону со средним значением, равным 134 786 ед. продукции в неделю, и стандартным отклонением – 13 тыс. ед. Найдите вероятность того, что еженедельный выпуск продукции: а) превысит 150 тыс. ед.; б) окажется ниже 100 тыс. ед. в данную неделю; в) предположим, что возникли трудовые споры, и недельный выпуск продукции стал ниже 80 тыс. ед. Менеджеры обвиняют профсоюз в беспрецедентном падении выпуска продукции, а профсоюз утверждает, что выпуск продукции находится в пределах принятого уровня ($\pm 3\sigma$). Можно ли доверять профсоюзу?

12.5 Деталь считается высшего сорта, если отклонение ее длины от нормы не превосходит по абсолютной величине 0,45 мм. Случайное отклонение от нормы подчинено нормальному закону с параметрами (0,3). Определить среднее число деталей высшего сорта, если изготовлено 2 детали. Измерения длин деталей независимы.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 800 новорожденных детей будет от 370 до 430 мальчиков. Считать вероятность рождения мальчика 0,5.

13.2. Игральная кость подбрасывается 500 раз. Оцените, используя ЦПТ, вероятность того, что частота выпадения шестерки окажется в интервале $(1/6 - 0{,}05; 1/6 + 0{,}05)$.

13.3. Средняя температура воздуха в июле в данной местности 20 градусов. Оценить вероятность того, что в июле следующего года средняя температура воздуха будет: а) не более 15 градусов; б) более 20 градусов.

13.4. Вероятность рождения мальчика составляет 0,512. Найти вероятности событий: а) из 100 новорожденных будет ровно 51 мальчик; б) разница между количеством мальчиков и девочек из 100 новорожденных не превысит 10.

12 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 4\}$.

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	a	0,1

10.2. Имеется набор из четырех карточек, на каждой из которых написана одна из цифр 1, 2, 3, 4. Из набора наугад извлекают карточку, затем ее возвращают обратно, после чего наудачу извлекают вторую карточку. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины, равной сумме чисел, написанных на вынутых карточках. Найти вероятность того, что эта сумма: а) не превзойдет числа 4; б) будет не менее 6.

10.3. Вероятность того, что кредит размером до 2 млн руб. не будет возвращен, равна 0,25. Для кредита размером свыше 2 млн руб. эта вероятность равна 0,01. Банк выдал два кредита: 100 тыс. и 3 млн руб. Составить закон распределения случайной величины числа возвращенных кредитов из этих выданных. Найти ее математическое ожидание.

10.4. При производстве детали вероятность брака равна 0,1. За день изготавливаются три детали. Составить закон распределения случайной величины количества изготовленных бракованных деталей. Найти математическое ожидание.

10.5. Имеется 7 лампочек, каждая из них с вероятностью 0,4 имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Построить ряд распределения X – числа испробованных лампочек и найти $M(X)$; $D(X)$; σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \in]-\infty, 0[; \\ Ax^2 + 0{,}5x, \; x \in [0;1]; \\ 1, \; x \in]1; +\infty[. \end{cases}$$

Найти: A, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \leq X \leq 2\}$.

11.2. Случайная величина X подчинена закону Лапласа $f(x) = a e^{-|x|/u}$, где $u > 0$. Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ b(x-2)^2, & 2 < x \le 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (3; 4).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2}, & 2 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 2,25).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Ребро куба X измерено приближенно, причем $a \le X \le b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(a; b)$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

12.2. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1/5$. Что вероятнее: в результате испытания X окажется меньше 5 или больше 5? Записать функцию распределения случайной величины X.

12.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X) = 9$, $D(X) = 25$. Записать ее плотность распределения, найти вероятность попадания X в интервал (5; 14).

12.4. Почтовое отделение быстро оценивает объем переводов в рублях, взвешивая почту, полученную утром каждого текущего рабочего дня. Установлено, что если вес почтовых отправлений составляет N кг, то объем переводов в рублях есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением $160N$ и стандартным отклонением $20N$ кг. Найдите вероятность того, что в день, когда вес почтовых отправлений составит 150 кг, объем переводов в рублях будет находиться в пределах: а) от 21 до 27 тыс. руб.; б) более 28 500 руб.; в) менее 22 тыс. руб.

12.5. Расход бензина автомобиля ВАЗ 2107 является случайной величиной, распределенной нормально со средним значением 9 л на 100 км со средним квадратичным отклонением 0,6 л. Определить процент автомобилей: а) имеющих расход бензина больше 9 л на 100 км; б) имеющих расход бензина меньше 7 л на 100 км.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70 % от числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятность, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от их математического ожидания не превышало по абсолютной величине 20? Решить задачу, используя неравенство Чебышева.

13.2. В среднем 10 % работоспособного населения некоторого региона – безработные. Найдите с помощью ЦПТ вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11 %.

13.3. Вероятность того, что телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,8. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что из 600 проданных телевизоров доля таких, которые не потребуют гарантийного ремонта, будет от 0,78 до 0,82. Решить задачу, используя следствие из интегральной теоремы Муавра – Лапласа, и объяснить различие в полученных результатах.

13.4. Отдел технического контроля проверяет наудачу качество отобранных 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти наименьший интервал, симметричный относительно 810 деталей, в котором с вероятностью не меньше 0,9544, будет заключено число стандартных деталей.

13 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–1	1	2	4
P	a	0,3	0,4	0,1

10.2. Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания каждого стрелка в цель равна 0,6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа попаданий, если каждый стрелок делает только один выстрел. Найти вероятность того, что: а) будет хотя бы одно попадание; б) будет не более одного попадания.

10.3. Вероятность повышения цен на хлеб в текущем месяце равна 0,9; на масло – 0,6. Составить закон распределения случайной величины-числа товаров, на которые будут повышены цены (из двух рассматриваемых), найти ее математическое ожидание.

10.4. В банк поступило 30 авизо. Подозревают, что среди них 5 фальшивых. Тщательной проверке подвергается 15 случайно выбранных авизо. Составьте ряд распределения числа фальшивых авизо, которые могут быть выявлены в ходе проверки; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что в ходе проверки обнаружится менее 2 фальшивок?

10.5. Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найти: $M(X)$; $D(X)$; σx, где X – число нестандартных изделий среди выбранных.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения случайной величины $f(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$. Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \leq x \leq 1\}$.

11.2. Функция распределения случайной величины X имеет вид
$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^{\ 3}}{x^3},\ 0<x_0\le x;\\ 0,\ x_0>x.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M\,(X)$ и дисперсию $D\,(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$ = $\begin{cases}0, x<0;\\ \dfrac{b}{1+x^2}, x\ge 0.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (–1; π/4).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3x-\sin 3x}{3\pi}, & 0<x\le a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; π/2).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Посетителя ресторана может обслужить официант, который принимает заказы с интервалом в 15 минут. Найти вероятность того, что вновь подошедшего посетителя обслужат менее чем за 5 минут.

12.2. Время безотказной работы электродвигателя распределено по показательному закону $f(t)=0{,}023e^{-0{,}023t}$, где t – время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 75 часов. Найти моду и медиану для времени безотказной работы.

12.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение соответственно равны $M(X) = 15$; $\sigma = 6$. Найти вероятность попадания X в интервал (0; 10).

12.4. Менеджер ресторана по опыту знает, что 70 % людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 20 заказов, хотя в ресторане было лишь 15 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 15 посетителей придут на заказанные места?

12.5. Изделие считается высшим сортом, если его вес не превосходит по абсолютной величине эталона более чем на 10 г. Ошибка взвешивания подчинена нормальному закону с параметрами (0,20). Найти среднее число изделий высшего сорта, если изготовлено 3 изделия. Взвешивание деталей производится независимо.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Игральная кость подбрасывается 500 раз. Оцените вероятность того, что частота выпадения шестерки окажется в интервале (1/6 −0,05; 1/6 +0,05) (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока суммарное число очков не превысит 700. Оцените вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Ежедневный расход цемента на стройке – случайная величина, математическое ожидание которой равно 10 т, а среднее квадратическое отклонение – 2 т. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что в ближайший день расход цемента на стройке отклонится от математического ожидания не более чем на 3 т (по абсолютной величине).

13.4. В страховой компании застраховано 5000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,009. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 30$ страховых, и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 500$. Найти вероятность того, что по истечении года компания потерпит убыток.

14 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 2\}$.

X	0	2	4	6
P	0,5	0,3	a	0,1

10.2. Три стрелка независимо друг от друга стреляют каждый по своей мишени один раз. Вероятности попадания при одном выстреле у стрелков равны соответственно $p_1 = 0,3;$ $p_2 = 0,6;$ $p_3 = 0,7.$ Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа пораженных мишеней. Найти вероятность того, что пораженных мишеней будет: а) хотя бы одна; б) менее двух.

10.3. В библиотеке есть только техническая и математическая литература. Вероятность взять техническую книгу – 0,8. Случайная величина X – число читателей (если всего читателей 5), взявших математическую книгу. Найти: 1) ряд распределения, 2) $M[X]$, 3) $D[X]$, 4) $\sigma(X)$, 5) $P\{-1 \leq x \leq 3\}$.

10.4. Вероятность того, что кредит размером до 1 млн руб. не будет возвращен, равна 0,25. Для кредита размером свыше 1 млн руб. эта вероятность равна 0,03. Банк выдал три кредита: 400 000, 1 200 000, 5 млн руб. Составить закон распределения случайной величины-числа невозвращенных кредитов из этих выданных. Найти математическое ожидание.

10.5. Необходимо заменить перегоревшую лампочку. Имеется всего четыре лампочки. Для каждой вероятность того, что она загорится, равна 0,9. Составить ряд распределения случайной величины X – числа лампочек, которые придется вкручивать в патрон, пока не загорится свет или не закончатся лампочки. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, σx, $F(x)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины задана формулой $F(x) = A\operatorname{arctg}x + B.$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-1 \leq X \leq 1\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{при } x \in (-a,\, a); \\ 0, & \text{при } x \notin (-a,\, a). \end{cases}$$

Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$; $\sigma(X)$ и вероятность $P(0 < X < 2a)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b(4x - x^3), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 3).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^2, & x > 3. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (5; 10).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–0,1;5,3]. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [3; 4].

12.2. Среднее время, в течение которого аккумулятор сотового телефона находится в заряженном состоянии, 32 часа. Найти вероятность того, что энергии, запасенной в элементе, хватит на двое суток.

12.3. Детали изготавливаются автоматически. Их средняя масса 1,06 кг. Известно, что 5 % деталей имеют массу меньше 1 кг. Каков процент деталей, масса которых превышает 940 г?

12.4. Процент протеина в пакете с сухим кормом для собак – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 11,2 % и стандартным отклонением 0,6 %. Производителям корма необходимо, чтобы в 99 % продаваемого корма доля протеина составляла не меньше x_1, но не более x_2 процента. Найдите x_1 и x_2.

12.5. Толщина обшивки шлюпки подчинена нормальному закону с параметрами $(10;\sigma)$. Найти σ, при котором вероятность попадания обшивки в интервал (10; 12) будет равна 0,42.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оцените с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,2 по абсолютной величине не более чем на 0,01.

13.2. Пусть всхожесть семян некоторого сорта растений составляет 70 %. Используя ЦПТ, найти вероятность того, что при посеве 10 тыс. семян отклонение доли взошедших от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по абсолютной величине 0,01. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Количество воды, используемое предприятием в течение суток, в среднем равно 200 м^3. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды на этом предприятии: а) не превысит 350 м^3; б) превысит 300 м^3.

13.4. В страховой компании застраховано 5 тыс. автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,009. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 30$ страховых, и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 500$. Найти вероятность того, что по истечении года компания получит прибыль не менее 20 000$.

15 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная величина X задана рядом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{0 \le X \le 2\}$

X	–3	–1	0	2	3	5
P	0,15	a	0,3	0,05	0,10	0,20

10.2. Опыт состоит из трех независимых подбрасываний одновременно трех монет. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа одновременного выпадения двух гербов. Найти вероятность того, что два герба одновременно выпадут хотя бы раз.

10.3. Кость бросают 10 раз. Случайная величина X – число выпадений шестерки в предыдущей задаче. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{0 < X \le 11\}$.

10.4. В течение семестра преподаватели проводят консультации по вопросам, которые остались неясными для студентов. Преподаватель, проводящий консультации по статистике, заметил, что в среднем 8 студентов посещают его за час консультационного времени, хотя точное число студентов, посещающих консультацию в определенный день, в назначенный час – случайная величина. Составьте ряд распределения числа студентов, посещающих консультации преподавателя по статистике в течение часа. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что 3 студента придут на консультацию в течение определенного получаса?

10.5. Производится ряд выстрелов с вероятностью попадания 0,1. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше пяти раз. Построить ряд распределения для случайной величины X – количество выстрелов до первого попадания. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1< X < 3)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A(1+x^2)^{-1}, x \in]-1;1[; \\ 0, x \notin]-1;1[. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-2 \le X \le 4\}$.

11.2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} A, & \text{при} \quad x < 0; \\ Bx, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ C, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты A, B, C; б) плотность распределения $f(x)$; в) вероятность $P(0 < X < 1/2)$; г) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}; \\ b \sin x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(\pi/4; \pi/2)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 1 + \dfrac{a}{x^2}, & x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1; 3).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Среднее время решения контрольной работы по теории вероятностей для студента с хорошей успеваемостью равно 80 минутам. Найти вероятность того, что студент будет решать контрольную работу от 65 до 75 минут.

12.2. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $\lambda = 0{,}5$. Какова вероятность, что в результате испытания X примет значение больше 1?

12.3. Производится расчет себестоимости перевозок из пункта A в пункт B. Случайные ошибки расчета подчинены нормальному распределению со средним квадратическим отклонением σ = 20 у. е. Найти вероятность того, что расчет себестоимости будет произведен с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 у. е.

12.4. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше чем 4,9 т и 25 % – имеют вес меньше чем 4,2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

12.5. Средняя длина морского угря, отлавливаемого в районах Средней Северной Атлантики, равна 120 см со средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: а) процент отлавливаемой рыбы длиной от 90 до 110 см; б) процент отлавливаемой рыбы, длина которой более 130 см.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Студент получает на экзамене оценку «отлично» с вероятностью 0,2; «хорошо» – с вероятностью 0,4; «удовлетворительно» – с вероятностью 0,3 и «неудовлетворительно» – с вероятностью 0,1. За время обучения студент сдает 40 экзаменов. Найдите вероятность того, что его суммарный балл будет лежать в пределах от 140 до 156 (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Урожайность куста картофеля составляет 0 кг с вероятностью 0,1; 1 кг – с вероятностью 0,2; 1,5 кг – с вероятностью 0,2; 2 кг – с вероятностью 0,3 и 2,5 кг – с вероятностью 0,2. Какое наименьшее число клубней надо посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее 1 тонны? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. В среднем 70 % посетителей магазина делают покупку. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что из 1000 человек, посетивших магазин, число покупателей, сделавших покупку, заключено в границах от 620 до 780 (включительно). Найти вероятность того же события с помощью теоремы Муавра – Лапласа и объяснить различие результатов.

13.4. Сколько раз нужно подбросить монету N, чтобы с вероятностью не меньше 0,975 утверждать, что число выпадения герба попадет в интервал $(0{,}4N;\ 0{,}6N)$?

16 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,1	a

10.2. На пути автомобиля 5 светофоров, каждый из них автомобиль проезжает с вероятностью 0,6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа светофоров, которые автомобиль проезжает до первой остановки. Найти вероятность того, что до первой остановки автомобиль проедет: а) хотя бы один светофор; б) более трех светофоров.

10.3. Пять лампочек включены в цепь последовательно. Вероятность перегореть для любой лампочки при повышении напряжения равна 0,1. Случайная величина X – число перегоревших лампочек. Найти: 1) ряд распределения; 2) $M[X]$; 3) $D[X]$; 4) $\sigma(X)$; 5) $P\{X \leq 3\}$.

10.4. Вероятность того, что кредит размером до 1 млн руб. не будет возвращен, равна 0,3. Для кредита размером свыше 1 млн руб. эта вероятность равна 0,01. Банк выдал три кредита: 900 тыс., 1,5 и 1 млн руб. Составить закон распределения случайной величины числа возвращенных кредитов из этих выданных. Найти математическое ожидание.

10.5. На тренировке два хоккеиста независимо друг от друга бьют по пустым воротам с красной линии по одному разу. Вероятность попадания шайбы первого хоккеиста 0,8, а второго – 0,76. Случайная величина X – суммарное число попаданий хоккеистов в ворота. Написать ряд распределения данной случайной величины и найти $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1 < X < 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left]-\infty, -1\right[\,; \\ A\operatorname{arctg} x + b, & x \in \left[-1; 1\right]; \\ 1, & x \in \left[1; +\infty\right[. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \le X \le 2\}$..

11.2 Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & \text{при } x \in (-\pi/2,\ \pi/2); \\ 0, & \text{при } x \notin (-\pi/2,\ \pi/2). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность $P(0 < X < \frac{3\pi}{4})$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x-b, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0; 1,5).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x) = \begin{cases} a(1-e^{1-x}), 1 < x < \infty; \\ 0, \quad -\infty < x \le 1. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1; 3).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. На Северный поселок маршрутное такси отправляется с интервалом в 40 минут. Найти вероятность того, что человек сядет в маршрутное такси менее чем за 25 минут.

12.2. Время ожидания у бензоколонки АЗС является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания $M(X) = 6$ минут. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9).

12.3. Ошибка взвешивания – нормально распределенная случайная величина с дисперсией 196 г. Весы заранее настроены на обвес 80 г. Найти вероятность того, что ошибка взвешивания находится в интервале от 50 до 100 г.

12.4. Отклонение стрелки компаса из-за влияния магнитного поля в определенной области Заполярья есть случайная величина, подчиненная нормальному закону с параметрами (0,1). Чему равна вероятность того, что абсолютная величина отклонения в определенный момент времени будет больше чем 2,4?

12.5. В листьях мяты в период массового ее цветения содержится 2,6 % эфирного масла со стандартным отклонением 0,2 %. Определить вероятность того, что содержание процента эфирного масла в листьях мяты, собранных на определенном участке: а) больше чем 2,7 %; б) не более 2,5 %.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Сколько надо взять деталей, чтобы среднее арифметическое их длин составило не менее 49,5 и не более 50,5 см с вероятностью больше 0,95 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оцените с помощью ЦПТ необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,2 по абсолютной величине не более чем на 0,01.

13.3. Вероятность того, что пара обуви будет продана, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из 400 пар обуви будет продано от 300 до 340 пар. Вычислить вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

13.4. Вероятность того, что интересующая селекционеров ценная культура не прорастает в данных условиях, равна 0,2. Какое количество семян этой культуры (N) следует посадить, чтобы с вероятностью 0,8664 ожидать, что отклонение числа не проросших культур от $0{,}2N$ по абсолютной величине не превзошло $0{,}05N$.

17 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,2	a	0,1

10.2. Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 3 черных шара и один белый. После перемешивания из последней урны вынимают 3 шара. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа черных шаров, вынутых из второй урны. Найти вероятность того, что из нее будет извлечено: а) по крайней мере, два черных шара; б) не более двух черных шаров.

10.3. Две кости одновременно бросают три раза. Случайная величина X – выпадение «двойной шестерки». Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 2\}$.

10.4. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает 5 счетов. При условии, что 3 % счетов содержат ошибки, составьте ряд распределения правильных счетов. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что хотя бы 1 счет будет с ошибкой?

10.5. У команды «Спутник» вероятность реализации численного большинства равна 0,4. В течение одного периода «Спутник» получил возможность реализовать 3 численных перевеса. Случайная величина X – число шайб, заброшенных «Спутником», когда команда имела численное большинство. Написать ряд распределения X, найти $M(X)$; $D(X)$; σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A(x+1), \; x \in [-1;\, 2]; \\ 0, \; x \notin [-1;\, 2]. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \leq X \leq 4\}$.

11.2. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ \lambda(3x-x^2), & \text{при } 0\le x\ge 3;\\ 0, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти: а) при каком λ функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X; б) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ b\sqrt[3]{x}, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0,25; 8).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2+2x, & 0<x\le \frac{1}{3};\\ 1, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (-0,5; 0,25).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–0,5;2,5]. Найти $M(X)$ и $D(X)$. Что вероятнее: в результате испытания X окажется в интервале [0; 1] или вне этого интервала.

12.2. Среднее время безотказной работы двигателя стиральной машины равно 100 часам. Найти вероятность того, что двигатель безотказно проработает: а) 60−80 часов; б) 150 часов.

12.3. Стоимость турпутевки на рынке подчиняется нормальному распределению. Средняя стоимость ее равна 500 у. е., среднеквадратическое отклонение равно 10 у. е. Найти вероятность того, что удастся приобрести турпутевку по цене не меньше 400 у. е. и не больше 500 у. е.

12.4. Компания A покупает у компании B детали к контрольным приборам. Каждая деталь имеет точно установленное значение размера. Деталь, размер которой отличается от установленного размера более чем на $\pm 0{,}25$ мм, считается дефектной. Компания A требует от компании B, чтобы доля брака не превышала 1 % деталей. Если компания B выполняет требование компании A, то каким должно быть допустимое максимальное стандартное отклонение размеров деталей? Учесть, что размер деталей есть случайная величина, распределенная по нормальному закону.

12.5. Производится измерение диаметра вала. Случайная ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами $(0, \delta)$. Вероятность того, что измерения будут произведены с ошибкой, не превышающей абсолютной величины 15 мм, равна 0,8664. Определить δ.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,3; в девятку – с вероятностью 0,5; в восьмерку – с вероятностью 0,1; в семерку – с вероятностью 0,05 и в шестерку – с вероятностью 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал не менее 850 и не более 940 очков (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Студент получает на экзамене отлично с вероятностью 0,2; хорошо – с вероятностью 0,4; удовлетворительно – с вероятностью 0,3 и неуд – с вероятностью 0,1. За время обучения студент сдает 40 экзаменов. Найдите вероятность того, что его суммарный балл будет больше 160. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Вероятность того, что в библиотеке имеется необходимая читателю книга, равна 0,7. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что из 500 читателей число нашедших нужную книгу в библиотеке окажется от 330 до 375? Как следует изменить левую границу, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

13.4. Сколько раз (N) нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 ожидать, что отклонение числа выпадения герба от $0{,}5N$ оказалось по абсолютной величине менее $0{,}01N$.

18 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	–1	2	4
P	a	0,4	0,2	0,1

10.2. Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа выстрелов, произведенных стрелком, если у стрелка имеется 5 патронов. Найти вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

10.3. Две монеты бросают 5 раз. Случайная величина X – число появлений «двойного герба». Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{1 \leq X \leq 5\}$.

10.4. Выбирается наугад натуральное число от 1 до 10. Чему равно математическое ожидание количества делителей выбранного числа?

10.5. Из урны, содержащей 5 черных и 3 белых шара, наудачу извлекают 3 шара. Написать ряд распределения дискретной случайной величины X – числа черных шаров среди извлеченных. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ A + Bx, & -1 \leq x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-1 \leq X < 2\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{A}{\cos^2 x}, & \text{при } 0<x<\pi/4;\\ 0 & \text{при } x\ge \pi/4.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$; г) вероятность $P(\pi/8<X<\pi/4)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ b\sqrt{1-x^2}, & -1<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0; 0,5).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{3}{4}\pi;\\ a\cos 2x, & \frac{3}{4}\pi<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; $\pi/3$).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Студент с помощью транспортира, цена деления которого один градус, измеряет угол треугольника. Какова вероятность при считывании угла сделать ошибку в пределах ±20 минут, если отсчет округляется до ближайшего целого деления?

12.2. Случайная величина X – время безотказной работы подъемного крана. Определить вероятность того, что подъемный кран проработает без поломок не менее 7 лет, если средний срок эксплуатации составляет 5 лет.

12.3. Мастерская изготовляет стержни, длина которых представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 см и средним квадратичным отклонением 0,4 см. Какую точность длины стержня мастерская может гарантировать в этом случае с вероятностью 0,95?

12.4. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 т и стандартным отклонением 60 т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 800 т угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750 до 850 т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 665 т.

12.5. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, – равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 г до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,3, в девятку – с вероятностью 0,5, в восьмерку – с вероятностью 0,1, в семерку – с вероятностью 0,05 и в шестерку – с вероятностью 0,05. Сколько нужно сделать выстрелов стрелку, чтобы суммарное число очков было не менее 850 и не более 940 очков с вероятностью не менее 0,9 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Сколько надо взять деталей, чтобы среднее арифметическое их длин стало не менее 49,5 и не более 50,5 см с вероятностью, равной 0,95? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Было посажено 500 кустарников, вероятность прижиться каждому из них равна 0,8. Оценить вероятность того, что приживутся от 340 до 460 кустарников (включительно). Вычислить вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра – Лапласа. Пояснить различие результатов.

13.4. Вероятность глагола в тексте 0,09. С вероятностью 0,91 оценить интервал, симметричный относительно наиболее вероятного значения, в котором находится количество появления глаголов в тексте из 900 слов.

19 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–1	0	2	4
P	a	0,3	0,4	0,1

10.2. Ракетная установка обстреливает две удаленные цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Цель при попадании уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожения обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа запущенных ракет. Найти вероятность того, что при этом будет запущено: а) не более трех ракет; б) от двух до четырех ракет.

10.3. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из элементов за время T одинакова и равна 0,2. Для выхода устройства из строя достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента из восьми. Случайная величина X – число отказов. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 3\}$.

10.4. Записи страховой компании показали, что 30 % держателей страховых полисов старше 50 лет потребовали возмещения страховых сумм. Для проверки в случайном порядке было отобрано 15 человек старше 50 лет, имеющих полисы. Составьте ряд распределения числа предъявленных претензий. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что, по крайней мере, 10 человек потребуют возмещения страховых сумм?

10.5. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Найти закон распределения случайной величины X – числа работ, оцененных на «отлично», среди извлеченных и $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx.

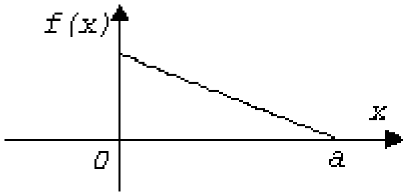
Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \sqrt{3}; \\ A(1+x^2)^{-1}, & |x| < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-1 \leq X \leq 3\}$.

11.2. Случайная величина X распределена по закону «прямоугольного треугольника» в интервале (0; a). Найти: а) аналитическое задание $f(x)$; б) $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, в) $P\{a/2 < X < a\}$.



11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(-\pi/2; \pi/4)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ (x-a)^2, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1,5; 2,5).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньше 0,02; б) больше 0,06.

12.2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с $\lambda = 0{,}5$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1; 2).

12.3. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 49. Вероятность того, что X будет находиться в интервале (40; 55) равна 0,596. Определить среднее квадратическое отклонение.

12.4. Технический отдел компании, производящей автопокрышки, планирует выпустить несколько экспериментальных партий покрышек и проверить степень их износа на тестирующем оборудовании. С этой целью предполагается увеличивать количество каучука в покрышках каждой последующей партии до тех пор, пока срок службы покрышек не окажется приемлемым. Эксперимент показал, что стандартное отклонение срока службы покрышек фактически остается постоянным от партии к партии и составляет 2 500 миль ($\sigma = 2\ 500$). Если компания хочет, чтобы 80 % выпускаемых автопокрышек имели срок службы не менее 25 тыс. миль, то какой наименьший средний срок службы автопокрышек должен быть заложен в расчетах технического отдела? Считать срок службы автопокрышек нормально распределенным.

12.5. В нормально распределенной совокупности 10 % значений случайной величины X меньше 15, а 30 % ее значений больше 18. Найти среднее значение и среднее квадратичное отклонение.

Задание 12. Предельные теоремы

13.1. Пусть вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,95. Сколько раз нужно опустить монету в автомат, чтобы частота случаев правильной работы автомата отклонилась (по абсолютной величине) от вероятности 0,95 не более чем на 0,01 с вероятностью не менее 0,9 (использовать неравенство Чебышева).

13.2. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,5; в девятку – с вероятностью 0,3; в восьмерку – с вероятностью 0,1; в семерку – с вероятностью 0,05 и в шестерку – с вероятностью 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 950 очков? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. В среднем 90 % изготовленных деталей стандартные. Используя неравенство Чебышева, найти число изделий, которое следует изготовить, чтобы с вероятностью не менее 0,75 можно было утверждать, что отклонение доли стандартных деталей от вероятности для детали быть стандартной не превзойдет 0,02 (по абсолютной величине).

13.4. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь содержит дефект, равна 0,02. Какова вероятность того, что при случайном осмотре 600 деталей этой партии число появления нестандартных деталей отличается по абсолютной величине от наиболее вероятного значения не более чем на 30?

20 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a; 2) функцию распределения и ее график; 3) $M[X]$; 4) $D[X]$; 5) $\sigma(X)$; 6) $P\{X \le 8\}$.

X	1	3	7	10
P	a	1/6	1/3	1/4

10.2. Три ракетные установки стреляют каждая по своей цели независимо друг от друга до первого попадания, затем прекращают стрельбу. Каждая ракетная установка имеет две ракеты. Вероятность попадания одной ракеты для первой установки – 0,4; для второй – 0,5; для третьей – 0,6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа ракетных установок, у которых осталась неизрасходованная ракета. Найти вероятность того, что будет хотя бы одна такая установка.

10.3. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака составляет 0,2. Передано сообщение из 5 знаков. Случайная величина X – число искажений. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \le 1\}$.

10.4. Пьяница стоит в точке O на прямой Ox. За время Δt он делает один шаг вперед с вероятностью 2/3 и назад с вероятностью 1/3. Считая, что шаги независимы и все длины 1, найти, где он в среднем окажется через время $10 \cdot \Delta t$.

10.5. Оператор забыл последнюю цифру кода, необходимого для входа в компьютерную систему, однако помнит, что она нечетная. Написать ряд распределения для случайной величины X – числа сделанных им наборов. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p\,(|x|<2{,}5)$, $p\,(X \ge 4{,}5)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ A\,\mathrm{arctg}\,x + B, & 0 \le x \le \sqrt{3}; \\ 1, & x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{1 < X < 2\}$.

11.2. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \alpha\left(x-\dfrac{x^2}{3}\right), & \text{при } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент α; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases}b\cos^2 x, & |x|\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(-\pi ; 0)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\sin x, & 0<x\le\frac{1}{6}\pi;\\ 1, & x>\frac{1}{6}\pi.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/12; \pi/2)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Записать ее функцию распределения, найти $M(X)$ и $D(X)$.

12.2. Длительность междугородних телефонных разговоров распределена примерно по показательному закону, разговор продолжается в среднем 3 минуты. Найти вероятность того, что очередной разговор будет продолжаться более 3 минут. Определить долю разговоров, которые длятся менее 1 минуты. Найти вероятность того, что разговор, который длится уже 10 минут, закончится в течение ближайшей минуты.

12.3. Производится измерение диаметра отверстия втулки без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

12.4. Менеджер торгово-посреднической фирмы получает жалобы от некоторых клиентов на то, что служащие фирмы затрачивают слишком много времени на выполнение их заказов. Собрав и проанализировав соответствующую информацию, он выяснил, что среднее время выполнения заказа составляет 6,6 дня, однако для выполнения 20 % заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, определите фактическое стандартное отклонение времени обслуживания клиентов.

12.5. Шлюпка бракуется, если ее обшивка более чем на 2 мм по абсолютной величине больше проектной. Отклонение имеет нормальное распределение c (0;1). Найти вероятность того, что среди двух шлюпок хотя бы одна будет бракованной.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста вероятность смерти на 21-м году равна 0,006. Сколько 20-летних человек нужно застраховать, чтобы доля умерших отклонилась от вероятности смерти не более чем на 0,0005 с вероятностью не менее 0,95 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Пусть вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,95. Оценить, используя ЦПТ, вероятность того, что при 2500 опусканиях монет частота случаев правильной работы автомата отклонится (по абсолютной величине) от вероятности 0,95 не более чем на 0,02.

13.3. В отделе технического контроля проверяют 500 изделий. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,5. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9426 будет заключено число бракованных изделий среди проверенных.

13.4. Известно, что для некоторой профессии вероятность проф. заболевания равна 0,06. Проведено медицинское обследование 625 сотрудников предприятия. Найти вероятность того, что число выявленных заболеваний будет: не менее 40; не более 60; от 40 до 60.

21 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	1	3	5	7
P	0,3	0,1	0,2	a

10.2. Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9 для одного из орудий и 0,6 для каждого из двух других. Наугад выбирают два орудия, и каждое из них стреляет один раз. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа попаданий в мишень. Найти вероятность: а) хотя бы одного попадания в мишень; б) хотя бы одного непопадания в мишень.

10.3. В урне 2 черных и 6 белых шаров. Шар извлекается из урны, а затем возвращается назад. Произведено 5 извлечений. Случайная величина X – число белых шаров. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \leq 3\}$.

10.4. Экзаменационный тест содержит 15 вопросов, каждый из которых имеет 5 возможных ответов и только 1 из них верный. Предположим, что студент, который сдает экзамен, знает ответы не на все вопросы. Составьте ряд распределения числа правильных ответов студента на вопросы теста и постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что студент правильно ответит, по крайней мере, на 10 вопросов?

10.5. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что станок в течение времени T потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,1; для второго – 0,2; для третьего – 0,3. Случайная величина X – число станков, не требующих внимания рабочего в течение времени T. Составить закон распределения и вычислить $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(2 < X < 3)$.

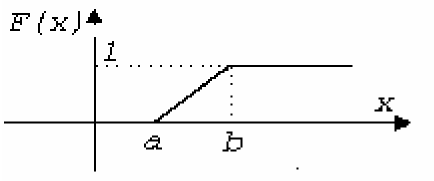
Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A, \; x \in [-1;0]; \\ 0, \; x \notin [-1;0]. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \le X \le 2\}$.

11.2. Функция распределения случайной величины X задана графиком.



Найти математическое ожидание М(X) и дисперсию D(X).

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} be^{2x}, & x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (–1; 1).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{2}\pi; \\ a - \cos x, & \frac{1}{2}\pi < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\pi/4$; $3\pi/4$).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Информация в базе данных обновляется один раз в неделю. Найти вероятность того, что база данных будет обновлена в течение трех дней.

12.2. Электрическая схема состоит из двух последовательно соединенных элементов. Среднее время безотказной работы каждого элемента 2 и 4 года соответственно. Найти вероятность того, что схема выйдет из строя в течение 6 месяцев.

12.3. Полагая, что случайная величина X – средняя ошибка результата усиления транзистора подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20), найти вероятность того, что из трех независимых результатов усиления транзистора ошибка одного из них будет по абсолютной величине больше четырех единиц.

12.4. Для поступления в некоторый институт необходимо успешно сдать вступительные экзамены. В среднем их выдерживают лишь 30 % абитуриентов. Предположим, что в приемную комиссию поступило 1 889 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 500 поступающих сдадут все экзамены (наберут проходной балл)?

12.5. Средний диаметр стволов елей, предназначенных для вырубки к новому году, равен 0,08 м, среднее квадратическое отклонение – 0,01 м. Считая диаметр ствола случайной величиной, распределенной по нормальному закону, определить: а) размер, который не превзойдет средний диаметр ствола дерева с вероятностью 0,96; б) процент стволов, имеющих диаметр свыше 9 см.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Сколько приборов надо взять для эксплуатации, чтобы с вероятностью не менее 0,97 доля надежных приборов отличалась по абсолютной величине от 0,98 не более чем на 0,1. Известно, что каждый прибор имеет надежность 0,9 (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году равна 0,006. Застрахована группа в 10 тыс. человек 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей. Какую максимальную выплату наследникам следует установить, чтобы вероятность того, что к концу года страховая компания окажется в убытке была бы не больше 0,0228? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,991 утверждать, что частота появления некоторого события будет отличаться от вероятности его появления в каждом испытании, равном 0,8, не более чем на 0,001 (по абсолютной величине)?

13.4. Вероятность неисправного кинескопа марки «Электрон» – 0,15. Найти интервал, симметричный относительно наиболее вероятного значения, в котором с P = 0,95 находится число неисправных, если объем партии 10 тыс. штук.

22 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 4\}$.

X	2	4	6	8
P	0,2	a	0,2	0,5

10.2. Группа состоит из пяти отличных, пяти хороших и десяти посредственных студентов. Вероятность правильного ответа на один вопрос экзаменационной программы равна 0,9 для отличного студента; 0,7 для хорошего студента и 0,6 для посредственного студента. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа правильных ответов на два вопроса наугад выбранного билета одним случайно выбранным студентом данной группы. Найти вероятность того, что правильным будет ответ хотя бы на один вопрос.

10.3. Кость бросается 5 раз. Случайная величина X – число выпадения шестерки. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{0 \leq X \leq 3\}$.

10.4. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок. Предположим, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5 % ошибок. Предположим, аудитор случайно отбирает 3 входящих документа. Составьте ряд распределения числа ошибок, выявленных аудитором. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Определите вероятность того, что аудитор обнаружит более чем 1 ошибку.

10.5. Программист обслуживает 4 независимо работающих компьютера. Вероятность того, что в течение дня компьютер не потребует внимания программиста, равна 0,6 для первого; 0,7 для второго; 0,8 для третьего; 0,9 для четвертого компьютера. Найти закон распределения случайной величины X – числа компьютеров, не потребовавших внимания программиста; $F(x)$; $M(X)$; $D(X)$; σx, $p(0,5 < X < 3,5)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in\left]-\infty;-1\right[;\\ Ax^3+B, & x\in[-1;1];\\ 1, & x\in\left]1;+\infty\right[.\end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-4\le X\le 4\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x, & \text{при } x\in[0,\pi];\\ 0, & \text{при } x\notin[0,\pi].\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность $P(\pi/2 < X < 3\pi/2)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения

с плотностью $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ b(2x-1), & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (0,5; 1,5).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1; 3).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Самолет прилетает на полярную станцию один раз в месяц. Найти вероятность того, что самолет прилетит на остров в течение двух недель.

12.2. Среднее время службы подшипника грузоподъемностью 950 т составляет 25 тыс. часов. Найти вероятность того, что подшипник прослужит от 18 до 22 тыс. часов.

12.3. Химический завод выпускает керосин номинальной плотности 0,80 кг/м^3. В результате испытаний обнаружено, что практически 98,08 % всего выпускаемого керосина имеет плотность в интервале (0,77; 0,83). Закон распределения плотности близок к нормальному. Найти вероятность того, что керосин удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы его плотность не отклонялась от номинала более чем на 0,02 кг/м^3.

12.4. Вес арбуза – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,04. Агрономы знают, что 65 % фруктов весят меньше, чем 5 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного арбуза.

12.5. При уборке урожая за один рейс автопоезд перевозит, в среднем, 20 т зерна. Фактический вес перевезенного в каждом рейсе зерна отклоняется от среднего и характеризуется $\sigma = 300$ кг. Определить вероятность того, что за рейс автопоезд перевезет: а) более 20,5 т зерна; б) менее 20 т зерна.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2 тыс. студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

13.2. Сколько приборов надо взять для эксплуатации, чтобы с вероятностью 0,97 доля надежных приборов отличалась по абсолютной величине от 0,98 не более чем на 0,1. Известно, что каждый прибор имеет надежность 0,9. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. В отделе технического контроля проверяют 480 шестеренок. Найти вероятность того, что отклонение числа бракованных от величины np не превзойдет 8 шестеренок.

13.4. В страховой компании застраховано 5 тыс. автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,009. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 30$ страховых, и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 500$. Найти вероятность того, что по истечении года компания получит прибыль не менее 80 000$.

23 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	1	3	5	7
P	0,2	0,5	0,2	a

10.2. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа промахов. Найти вероятность того, что промахов будет: а) менее двух; б) не менее трех.

10.3. Устройство состоит из 4-х независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны 0,2. Для выхода устройства из строя достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента из четырех. Случайная величина X – число отказов в устройстве в предыдущей задаче. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \leq 1\}$.

10.4. Прибытие посетителей в банк подчиняется одному из теоретических законов распределения. Предполагая, что в среднем в банк каждые 3 мин входит 1 посетитель, составьте ряд распределения возможного числа посетителей банка в течение 15 мин. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Определите вероятность того, что, по крайней мере, 3 посетителя войдут в банк в течение 1 мин?

10.5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины − числа стандартных деталей среди отобранных. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1 < X < 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \ ]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[; \\ \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in \ ]-1;1]. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-2 \le x \le 2\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3; \\ -\dfrac{3x^2}{4} + 6x - \dfrac{45}{4}, & \text{при } 3 \le x \le 5; \\ 0, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения

с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{1}{b+1}, & -1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Требуется: 1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 3).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^2, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 4).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Величина годовой прибыли некоторого предприятия распределена равномерно на отрезке [1; 4] млн у. е. Каковы математическое ожидание и дисперсия годовой прибыли этого предприятия?

12.2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 4e^{-4x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,2). Определить: $M(X)$, $D(X)$, (X), $F(x)$.

12.3. Пусть вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 450$ г, $\sigma = 20$ г. Найти вероятность, что вес одной пойманной рыбы будет: а) от 370 до 420 г; б) не более 530 г; в) больше 300 г.

12.4. Менеджер ресторана по опыту знает, что 80 % людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 20 заказов, хотя в ресторане было лишь 16 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 16 посетителей придут на заказанные места?

12.5. Автомат изготовляет шарики. Шарик годен, если отклонение его диаметра от нормы по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Отклонение подчинено нормальному закону $(0,\sigma)$. Найти σ, если вероятность того, что шарик годен 0,8.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность того, что студент будет отчислен, равна 0,1. Сколько студентов должно быть в университете, чтобы доля отчисленных студентов отличалась от вероятности отчисления не более чем на 0,05 с вероятностью не менее 0,8 (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью центральной предельной теоремы оцените вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2 тыс. студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

13.3. Страховая компания заключает однотипные договоры, причем страховая премия составляет 1 млн руб., а при наступлении страхового случая компания должна выплатить 20 млн руб. Известно, что страховой случай наступает примерно в 4 % случаев. Фирме удалось застраховать 500 клиентов. Какова вероятность того, что доход фирмы будет: а) 100 млн руб.; б) более 100 млн руб.?

13.4. Для определения среднего дохода налогоплательщиков города налоговой инспекцией была проведена проверка 250 жителей этого города, отобранных случайным образом. Оценить вероятность того, что средний годовой доход 250 жителей города отклонится от среднего арифметического годовых доходов выбранных 250 жителей не более, чем на 1000 руб., если известно, что среднее квадратичное отклонение годового дохода не превышает 2500 руб.

24 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 3\}$.

X	2	3	4	5
P	0,2	a	0,3	0,4

10.2. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7; для второго – 0,75; для третьего – 0,8; для четвертого – 0,9. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа станков, которые потребуют внимания рабочего. Найти вероятность того, что таких станков будет не более половины.

10.3. Две кости одновременно бросаются 4 раза. Случайная величина X – выпадения «двойной шестерки». Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 1\}$.

10.4. В городе 10 машиностроительных предприятий, из которых 6 – рентабельных и 4 – убыточных. Программой приватизации намечено приватизировать 5 предприятий. При условии проведения приватизации в случайном порядке составьте ряд распределения рентабельных предприятий, попавших в число приватизируемых; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что будет приватизировано не менее 4-х рентабельных предприятий?

10.5. В урне 7 шаров, из которых 4 белых, а остальные черные. Из этой урны наудачу извлекаются 3 шара; X – число белых шаров среди извлеченных. Найти закон распределения X, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(X > 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{x} & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-\infty < x < 2\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & \text{при} \quad x\in(-3,3);\\ 0, & \text{при} \quad x\notin(-3,3).\end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание M (X) и дисперсию D (X); б) что вероятнее: в результате испытания окажется, что случайная величина $X < 1$, или что случайная величина $X > 1$?

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2;\\ b(x^2-6x+8), & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$

Требуется: 1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 3).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ a(x+1), & -1<x\le \frac{1}{3};\\ 1, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 1).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [–2,3; 4,0]. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [3; 4].

12.2. Время работы инспектора патрульно-постовой службы до совершения ошибки имеет показательное распределение с $\lambda = 2$. Найти вероятность того, что за время рабочего дня (t = 8 часов): а) инспектор ошибется; б) инспектор не ошибется.

12.3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 17{,}50$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}23$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9952 попадет величина X в результате испытания.

12.4. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше чем 4,9 т и 25 % имеют вес меньше чем 4,2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

12.5. Производится измерение диаметра вала. Случайна ошибка измерения отклонения диаметра вала от нормы подчинена нормальному закону с параметрами (0;10). Каково должно быть отклонение по абсолютной величине от нормы, если вероятность того, что оно произошло, равна 0,866?

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Дисперсия каждой из случайных величин A (продолжительность работы электролампочки) не превышает 20 часов. Сколько нужно взять для испытания электролампочек, чтобы вероятность того, что абсолютное отклонение средней продолжительности горения лампочки от среднего арифметического их математических ожиданий не превышает 1 часа, была не меньше 0,95 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. С конвейера сходит в среднем 85 % изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частоты изделий первого сорта от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0,7887 можно ожидать, что частота наступления события будет отличаться от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,025.

13.4. Средние ежедневные расходы на покупку канцелярских принадлежностей для офиса банка составляют 1 тыс. руб., а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 руб. Оценить вероятность того, что расходы на канцелярские принадлежности в любой наугад выбранный день не превысят 2 тыс. руб., используя: а) неравенство Маркова; б) неравенство Чебышева.

25 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	0	2	4
P	a	0,2	0,2	0,5

10.2. В кошельке лежат 5 монет по 1 руб., две монеты по 2 руб. и три монеты по 5 руб. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение количества рублей, извлеченных из кошелька, если из него извлекают наугад две монеты. Найти вероятность того, что будет извлечено: а) не менее четырех рублей; б) более семи рублей.

10.3. Две монеты бросают 5 раз. Случайная величина X – число выпадений «двойных гербов». Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 4\}$.

10.4. Торговый агент в среднем контактирует с восемью потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Составьте ряд распределения ежедневного числа продаж для агента и постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что у агента будут хотя бы 2 продажи в течение дня?

10.5. Стрельба продолжается до первого попадания либо до полного израсходования четырех патронов. Вероятность попадания равна 0,7. Найти ряд распределения случайной величины X – числа израсходованных патронов, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1{,}5 < X < 2{,}9)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения имеет вид
$$f(x)\begin{cases} A,\ x \in [-1;1]; \\ 0,\ x \notin [-1;1]. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-4 \leq x \leq 4\}$.

11.2. Пусть задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ ax^3, & \text{при } 0\le x\le 1;\\ 1, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) плотность распределения случайной величины $f(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность $P(X\in(0{,}2;\ 0{,}8))$, д) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ b\,\mathrm{arctg}\,x, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(-1;\ \pi/4)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{a}(x-1), & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2;\ 4)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0{,}5;\ 2{,}7]$. Найти $M(X)$ и $D(X)$. Что вероятнее: в результате испытания X окажется в интервале $[1;\ 2]$ или вне этого интервала.

12.2. Непрерывная случайная непрерывная величина X распределена по показательному закону с $\lambda = 4$. Найти вероятность попадания X в интервал (0; 6).

12.3. Измеряемая случайная величина X подчиняется нормальному закону с параметрами (9; 4). Найти симметричный относительно mx интервал, в который с вероятностью 0,6826 попадает измеренное значение.

12.4. Средний срок службы детали составляет 46 мес. со стандартным отклонением $\sigma = 12$ мес. Привлекая покупателей, производитель хочет дать гарантию на эту деталь, обещая сделать бесплатно любое число ремонтов в случае ее поломки до определенного срока. Пусть срок службы детали подчиняется нормальному закону. На сколько месяцев в таком случае производитель должен дать гарантию для этой детали, чтобы число бесплатных ремонтов не превышало 2,275 % проданных деталей?

12.5. Случайное отклонение длины втулки от стандартного значения распределены нормально. Математическое ожидание длины втулки равно 50 мм, среднее квадратическое отклонение 0,5 мм. Стандартными считаются втулки, длина которых заключена между 49,8 и 50,2 мм. Найти процент стандартных втулок. Найти, сколько процентов втулок имеет длину более 50,25 мм.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. С конвейера сходит в среднем 85 % изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью не менее 0,997 отклонение частоты изделий первого сорта от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. Средняя температура в квартире, подключенной к теплоцентрали, в период отопительного сезона составляет 20 °C, а среднее квадратическое отклонение равно 2 °C. Оцените вероятность того, что температура в квартире будет в пределах от 15 до 25 °C. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. При испытании нового медицинского препарата оказалось, что он дает побочные явления в 5 % случаев. Клинические испытания предполагается провести на 10 тыс. больных. Найти границы, в которых с вероятностью 0,99 будет заключена доля пациентов, которым придется испытать побочные явления от нового препарата.

13.4. Складывается 1000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка. Предполагается, что ошибки округления каждого числа независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5\cdot10^{-3};\ 0{,}5\cdot10^{-3})$.

26 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	–1	0	1
P	0,3	a	0,1	0,4

10.2. Монету подбрасывают 6 раз. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение разности числа появлений герба и числа появлений цифры. Найти вероятность того, что эта разность будет менее двух.

10.3. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,7. Сделано 5 выстрелов. Случайная величина X – число успешных выстрелов. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-2 \leq X \leq 3\}$.

10.4. В международном аэропорту время прибытия самолетов различных рейсов высвечивается на электронном табло. Появление информации о различных рейсах происходит случайно и независимо друг от друга. В среднем в аэропорт прибывает 10 рейсов в час. Составьте ряд распределения числа сообщений о прибытии самолетов в течение часа. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график, чему равна вероятность того, что в течение часа прибудут не менее 3 самолетов? Чему равна вероятность того, что в течение четверти часа не прибудет ни один самолет?

10.5. Рабочий изготавливает 3 равноценные по сложности детали. Вероятность того, что он изготовит брак, составляет 0,25. Найти закон распределения случайной величины X – числа деталей, изготовленных качественно. Определить: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(1 < X < 3)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины $F(x) = A(\operatorname{arctg} x)^3 + B,\ \ x \in R$. Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-1 \leq X \leq 1\}$.

11.2 Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0; \\ A(4x - x^2), & \text{при} \quad 0 \le x \le 4; \\ 0, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти коэффициент A, функцию распределения $F(x)$ и $P(-2 \le X \le 3)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения

с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b(3x - x^3), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (1; 3).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{1}{x}(x - a), & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 0,5).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Троллейбусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 7 мин. Найти вероятности того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной троллейбус менее чем 4 мин., и среднее время ожидания.

12.2. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным 5 мин. Найти вероятность того, что ждать придется не более 2 мин.

12.3. Высота полета самолета измеряется радиовысотометром, закон распределения ошибки которого нормальный. Каково должно быть среднеквадратичное отклонение, чтобы в 90 % всех случаев ошибка в высоте не превышала по абсолютной величине 200 м?

12.4. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше, чем 4,9 т и 25 % имеют вес меньше, чем 4,2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

12.5. Длина диаметра шарика подчинена нормальному закону с параметрами (5; σ). Найти σ, при котором вероятность того, что диаметр шарика попадает в интервал (6; 7) будет наибольшей.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Средняя температура в квартире, подключенной к теплоцентрали, в период отопительного сезона составляет 20 °C, а среднее квадратическое отклонение равно 2 °C. Оцените вероятность того, что температура в квартире будет в пределах от 15 °C до 25 °C (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Сколько деревьев необходимо посадить, чтобы число прижившихся деревьев было больше 100 с вероятностью 0,9, если известно, что каждое дерево приживается с вероятностью 0,8? Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Опрос показал, что адресная реклама в среднем в каждом пятом случае приводит к тому, что потенциальный покупатель приобретает рекламируемый товар. Торговая фирма от продажи единицы товара получает прибыль 20 тыс. руб. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключен доход компании, если рекламой охвачено 500 адресатов.

13.4. Производится 400 бросаний игральной кости. Найти вероятность того, что суммарное число очков, выпавших при 400 бросаниях, будет заключено в пределах от 1300 до 1500.

27 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	0	1	3
P	0,1	a	0,2	0,3

10.2. Производится по два последовательных выстрела по каждой из трех целей. Вероятность попадания при одном выстреле в любую цель равна 0,7. При попадании в цель стрельба по ней прекращается, неизрасходованный патрон при стрельбе по другим целям не используется. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа пораженных целей. Найти вероятность того, что будет поражено хотя бы две цели.

10.3. В библиотеке имеется техническая и художественная литература. Вероятность любого взять техническую книгу равна 0,7; художественную – 0,3. Случайная величина X – число художественных книг из 5 взятых. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 4\}$.

10.4. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Составьте ряд распределения числа отказов оборудования в течение часа. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум 2 единицы оборудования?

10.5. Производится два выстрела по мишени. Вероятности попадания 0,9 и 0,7 соответственно. X – число попаданий. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2, & x \in [0;2]; \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

Найти: A, B, $F(x)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{1 \leq X \leq 5\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x}, & \text{при } x \in \left[\dfrac{1}{e},\, e\right]; \\ 0, & \text{при } x \notin \left[\dfrac{1}{e},\, e\right]. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) вероятность $P\left(\dfrac{e}{2} < X < \dfrac{3e}{2}\right)$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал $(\pi/2;\ 3\pi/2)$.

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^3, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-1;\ 1)$.

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего целого деления их шкалы. Оценить возможность возникновения ошибки более чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.

12.2. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0,03t}$. Найти вероятность того, что за время, длительностью t = 200 ч, элемент не откажет.

12.3. Во время дежурства двух операторов, делающих ошибки согласно нормальному закону распределения с параметрами (0 м; 1 м) и (3 м; 10 м), была допущена ошибка в 23 м. Какой из операторов вероятнее всего ошибся?

12.4. Авиакомпания знает, что в среднем 5 % людей, делающих предварительный заказ на определенный рейс, не будет его использовать. Если авиакомпания продала 160 билетов на самолет, в котором лишь 150 мест, чему равна вероятность того, что место будет доступно для любого пассажира, имеющего заказ и планирующего улететь?

12.5. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 10 км, а среднее квадратичное отклонение равно 500 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами: а) не менее 13 км; б) не более 9 км; в) не менее 11,7 км, но не более 12,3 км.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Сколько деревьев необходимо посадить, чтобы доля прижившихся деревьев была в пределах от 0,75 до 0,85 с вероятностью не менее 0,9, если известно, что каждое дерево приживается с вероятностью 0,8 (использовать неравенство Чебышева)?

13.2. На отрезке [0;1/4] случайным образом выбраны 192 числа (т. е. рассматриваются 192 независимые равномерно распределенные случайные величины). С помощью ЦПТ оцените вероятность того, что их сумма будет заключена между 22 и 26.

13.3. В магазине каждому покупателю, сделавшему покупку более чем на 25 тыс. руб. полагается бесплатный пакет. Известно, что число покупателей за день заведомо не превосходит 200, при этом покупку более чем на 25 тыс. руб. делает примерно каждый четвертый. Какое количество пакетов должен иметь на день работы магазин, чтобы их хватило с вероятностью не меньше 0,95?

13.4. В предположении, что размер одного шага пешехода равномерно распределен в интервале от 70 до 80 см, и размеры шагов независимы, найдите вероятность того, что пешеход пройдет расстояние от 7,49 до 7,51 км, сделав 10 тыс. шагов.

28 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	0	1	3
P	0,1	0,4	0,2	a

10.2. Для контроля трех партий деталей выбираются случайным образом две партии, и из каждой из них берут наугад одну деталь. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа бракованных деталей среди двух выбранных, если в первой партии 2/3 недоброкачественных деталей, во второй 1/3, а в третьей бракованных деталей нет. Найти вероятность того, что среди этих двух деталей будет хотя бы одна доброкачественная.

10.3. В урне 2 черных и 6 белых шаров. Шар извлекают из урны, а затем возвращают назад. Делают 5 извлечений. Случайная величина X – число черных шаров. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$.

10.4. TV-канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,2. В случайном порядке выбраны 10 телезрителей. Составьте ряд распределения числа лиц, видевших рекламу. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что, по крайней мере, 2 телезрителя этого канала видели рекламу нового детского питания?

10.5. Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,05. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти: $M(X)$, $D(X)$, σx, $F(x)$, $p(2 < X < 4)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} Ax^3 + B, x \in [-2;2]; \\ 1, x > 2; \\ 0, x < -2. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \le X \le 3\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} c \operatorname{arctg} x, & \text{при } x \in [0,1]; \\ 0, & \text{при } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание М (X).

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ b, & -4 < x \le -2; \\ 0, & x > -2. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (–3; –1).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^2, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (2; 4).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Все значения равномерно распределенной случайной величины расположены на отрезке [2; 8]. Найти математическое ожидание, дисперсию этой случайной величины, а также вероятность ее попадания на отрезок [6; 9] и в интервал (3; 5).

12.2. Секретарь совершает в среднем одну ошибку за 3 часа. Время работы до совершения ошибки имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что за время рабочего дня (t = 8 часов) секретарь ни разу не ошибется.

12.3. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получилась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами (0;5).

12.4. Изделие считается высшим сортом, если его вес не превосходит по абсолютной величине 10 г. Ошибка взвешивания подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20). Найти среднее число изделий высшего сорта, если изготовлено 3 изделия. Взвешивание деталей производится независимо.

12.5. Ошибки измерений подчиняются нормальному закону. Прибор имеет систематическую ошибку 0,1 мм и среднюю квадратическую ошибку 1 мм. Найти вероятность того, что две ошибки попадут в интервал [1 мм, 2 мм].

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. Вероятность получения с конвейера набракованного изделия равна 0,95. Проверяется 800 изделий. Рассматривается случайная величина – число набракованных изделий. Укажите промежуток, в котором значения этой случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9 (использовать неравенство Чебышева).

13.2. На курсе обучается 600 студентов. Вероятность родиться каждому студенту в определенный день года равна 1/365. Оцените с помощью центральной предельной теоремы вероятность того, что число студентов, рожденных 1 января, заключено в пределах от 5 до 10.

13.3. После рекламной компании, проведенной в городе с населением 200 тыс. человек, строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, получила 50 заявок. Какова вероятность, что в городе с населением 20 тыс. человек число заявок будет не менее пяти?

13.4. Доходы жителей города имеют математическое ожидание 10 тыс. руб. и среднее квадратическое отклонение 2 тыс. руб. (в месяц). Найти вероятность того, что средний доход 100 случайно выбранных жителей составит от 9,5 до 10,5 тыс. руб.

29 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	–2	–1	1	2
P	0,1	0,2	0,4	a

10.2. Имеются два одинаковых ящика с деталями. В первом ящике содержатся 8 деталей, из них 3 бракованные, во втором – 4 детали, из них – 2 бракованные. Из одного ящика вынимают 3 детали. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа бракованных деталей среди трех вынутых, если выбор ящиков равновероятен. Найти вероятность того, что будет вынуто не более двух бракованных деталей.

10.3. В семье десять детей. Вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы. Случайная величина X – число мальчиков из пяти детей. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 3\}$.

10.4. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них 7 черного цвета, 6 серого и 2 белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно, и постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Напишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Какова вероятность того, что среди проданных фирме автомобилей окажется, по крайней мере, 2 автомобиля черного цвета?

10.5. В партии из 15 деталей имеется 9 окрашенных. Случайным образом извлекают 3 детали. Составить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа окрашенных деталей среди отобранных деталей. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx, $p(0 < X < 2)$.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^x, x \in \left]-\infty, -2\right[; \\ 1, \quad x \notin \left]-\infty, -2\right[. \end{cases}$$

Найти: A, B, $f(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{-1 \le X \le 0\}$.

11.2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x, & \text{при } |x| \le \pi/2; \\ 0, & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X примет значения больше чем $\pi/4$.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{1}{b-1}, & 0 < x \le 3{,}5; \\ 0, & x > 3{,}5. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал (2; 4).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2x^3 + x^2}{a}, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (–0,5; 0,5).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Толщина конспекта по математике студента распределена равномерно от 20 до 36 листов. Какова вероятность обнаружить конспект по математике толще 30 листов?

12.2. Среднее время безотказной работы двигателя стиральной машины равно 100 ч. Найти вероятность того, что двигатель безотказно проработает: а) 60−80 ч; б) 150 ч.

12.3. Автомат изготавливает детали. Деталь считается годной, если отклонение X диаметра детали от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных деталей среди 100 изготовленных.

12.4. В нормально распределенной совокупности 20 % значений случайной величины X меньше 10, и 30 % ее значений больше 15. Найти среднее значение и среднее квадратичное отклонение.

12.5. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 170 см, а дисперсия – 36. Найти плотность вероятностей и функцию распределения этой случайной величины. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных четырех мужчин будет иметь рост от 168 до 172 см.

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. На отрезке [0; 1/4] случайным образом выбраны 160 числа (т. е. рассматриваются 160 независимых равномерно распределенных случайных величин). С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что их сумма будет заключена между 18 и 22.

13.2. Театр, вмещающий 1000 зрителей, имеет два входа. У каждого входа свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они зашли. Предполагается, что зрители приходят парами, каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью 0,5 любой вход. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Для отдельного результата измерения случайная величина не превосходит трех. Производится 1000 измерений этой величины. Какие границы можно гарантировать с вероятностью 0,95 для результата измерения среднего арифметического этих величин? Ответ дать с помощью неравенства Чебышева.

13.4. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад взятых монет число монет, лежащих гербом вверх, будет от 45 до 55 (использовать неравенство Чебышева)?

30 ВАРИАНТ

Задание 10. Дискретная случайная величина

10.1. Случайная дискретная величина X задана законом распределения. Найти: 1) a, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{X \geq 1\}$.

X	0	1	2	3
P	0,1	0,2	a	0,3

10.2. Два студента сдают экзамен, отвечая на два вопроса программы, независимо друг от друга. Вероятность правильного ответа на любой вопрос программы для первого студента – 0,6; для второго – 0,8. При неправильном ответе на вопрос экзамен прекращается. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа студентов, пытавшихся ответить на оба вопроса. Найти вероятность того, что будет хотя бы один такой студент.

10.3. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено 5 выстрелов. Случайная величина X – число попаданий в цель. Найти: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения и ее график, 3) $M[X]$, 4) $D[X]$, 5) $\sigma(X)$, 6) $P\{-1 \leq X \leq 2\}$.

10.4. В часы пик для общественного транспорта города происходит в среднем 2 дорожных происшествия в час. Утренний пик длится 1,5 ч, а вечерний – 2 ч. Составьте ряды распределения числа дорожных происшествий в утренние и вечерние часы-пик и постройте их графики. Найдите числовые характеристики этих распределений. Запишите функции распределений вероятностей и постройте их графики. Чему равна вероятность того, что в определенный день во время и утреннего, и вечернего пика не произойдет ни одного дорожного происшествия?

10.5. По мишени производится три независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле p = 0,6. Написать ряд распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень при трех выстрелах. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, σx.

Задание 11. Непрерывная случайная величина

11.1. Плотность распределения случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} A(x+1), x \in [-1;2]; \\ 0, x \notin [-1;2]. \end{cases}$$

Найти: A, $F(X)$, $M[X]$, $D[X]$, $P\{0 \leq X \leq 2\}$.

11.2. Случайная величина R – расстояние от точки попадания до центра мишени, распределена по закону Рэлея:

$$f(r) = \begin{cases} A\,r\,e^{-h^2 r^2}, & \text{при} \quad r \ge 0; \\ 0, & \text{при} \quad r < 0. \end{cases}$$

Найти: коэффициент A; $M(R)$ и $D(R)$; моду R, то есть точку максимума плотности распределения случайной величины R.

11.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ b\sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент b;

2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X и вероятность попадания X в интервал ($\pi/4$; $3\pi/4$).

11.4. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 0{,}5x + a, & -1 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти коэффициент a;

2) найти плотность распределения $f(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 2).

Задание 12. Законы распределения непрерывной случайной величины

12.1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,04.

12.2. Число вагонов, прибывающих в течение суток на станцию, является случайной величиной, распределенной по показательному закону с $\lambda = 0,03$. Определить вероятность прибытия на эту станцию в течение суток более 10 вагонов.

12.3. Случайная величина X подчинена нормальному закону с $M(x) = 0$. Вероятность попадания этой величины на участок от $-a$ до a равна 0,5. Найти и написать выражение плотности вероятности.

12.4. Вес дыни – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,03. Агрономы знают, что 70 % фруктов весят меньше, чем 2 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранной дыни.

12.5. Считается, что отклонение длины изготовляемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна 40 см и среднее квадратическое отклонение равно 0,4 см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

Задание 13. Предельные теоремы

13.1. У скольких 20-летних мужчин нужно измерить рост, чтобы с вероятностью больше 0,95, можно было утверждать, что средний рост у измеренных мужчин будет отличаться от среднего роста всех 20-летних мужчин по абсолютной величине не более чем на 1 см? Считается, что среднее квадратичное отклонение роста от среднего значения равно 5 см (использовать неравенство Чебышева).

13.2. Игральный кубик подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросков кубика. Решить задачу, используя ЦПТ.

13.3. Производится испытание нового оружия, причем основным показателем служит частота попаданий по стандартной мишени. Разработчики утверждают, что вероятность попадания равна 0,8. Какое количество выстрелов по мишени необходимо сделать, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что частота попаданий отклонится от вероятности попадания не более чем на 0,01?

13.4. Для космического корабля вероятность столкновения в течение часа с метеоритом равна 0,001. Найти практически достоверные границы числа столкновений с метеоритом в течение трех месяцев – с 1 июля по 31 августа, если вероятность практической достоверности принимается равной 0,9995.