# Векторы

**1. Даны векторы** $\vec{a}=\{2;-3;-5\}$, $\vec{b}=\{0;-3;-2\}$, $\vec{c}=\{-3;2;-4\}$.

Найти а) $(\vec{a},\vec{b}-3\vec{c})$; б) $[\vec{a},\vec{b}+2\vec{c}]$; в) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

2. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$, где $\vec{a}(-1,-1,3)$, $\vec{b}(7,-1,1)$.

3. Вычислить площадь треугольника $ABC$, если известны координаты его вершин: $A$ $(-5,\ -2,\ -2)$, $B$ $(-1,\ -4,\ 2)$ и $C$ $(-1,\ 2,\ -4)$.

**4. Вектор** $\vec{x}$, **перпендикулярный к векторам**

$\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ и $\vec{b}=\{0;1;3\}$, и образует с осью 0Y тупой угол

**Зная, что** $|\vec{x}|=26$, **найти его координаты**.

5. Известны координаты вершин пирамиды $A$ $(-4,\ 3,\ 0)$, $B$ $(1,\ 5,\ -4)$; $C$ $(-8,\ -1,\ 2)$ и $D$ $(-1,\ 0,\ 0)$ Найти объем пирамиды и его высоту, опущенную из вершины $D$ на грань $ABC$.

**6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$**,**

**если** $\vec{a}=3\vec{p}+5\vec{q}$ **,;** $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$ $|\vec{q}|=3$ , $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$

**7. Для заданных векторов вычислить** $Пр_{\vec{c}}(2\vec{a}-3\overrightarrow{b})$ **:** $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$**,**

$\vec{b}=\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$**,** $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ **.**

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: x+y-2=0 , 2x-y+4=0. Точка M (3,1)- точка пересечения диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и найти угол между диагоналями этого параллелограмма
2. Написать уравнение плоскости, проходящей точку M(1,1,1) параллельно векторам $\overline{a}(1,2,0)$ и $\overline{b}(0,1,3)$ и найти расстояние от точки A(2,-3,4) до этой плоскости.
3. Выяснить взаимное расположение прямых: $\begin{cases} 3x+2y-3=0, \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$ и

   $\frac{x+1}{-5}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{0}$ в пространстве. Если прямые параллельны или скрещиваются, то найти расстояние между ними, а если пересекаются, то найти координаты точки их пересечения и угол между ними.
4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A (0,1,-4) параллельно прямой L $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x+2y-3z+6=0 \end{cases}$ и найти расстояние между прямыми.
5. Найти координаты точки $M_1$, симметричной точке M(-1,0,1) относительно прямой, проходящей через точку A(0;3/2;2) параллельно вектору. $\overline{a}(-1,0,1)$
6. Определить тип кривой второго порядка $x^2+49y^2-14x+784y+3234=0$, нарисовать эту кривую в данной системе координат и найти основные параметры.

1. Решить матричное уравнение $XA = B$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.(б) Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 8-x^2 & -2 & 6 \\ 8 & 6 & 2x^2-18 & 10 \\ 5 & 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} \le 0$

2. Найти в векторной форме решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4-x_5=2 \\ 2x_1+2x_2+5x_3+8x_4-5x_5=8 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+4x_2+8x_3+13x_4-2x_5=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-5x_4-4x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3-2x_5=0 \\ x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

3. Дано линейное пространство, образованное линейными комбинациями векторов: $\vec{a}_1(8,4,4,8,4)$, $\vec{a}_2(6,3,3,6,3)$, $\vec{a}_3(-7,-8,1,-1,-5)$, $\vec{a}_4(4,2,2,4,2)$ и $\vec{a}_5(2,7,-5,-6,3)$. Найти его размерность, какой-нибудь базис и выразить через этот базис остальные векторы системы.

3.(б) Проверить ортогональность системы векторов в пространстве $R^4$: $\bar{a}_1$=(1; -2; 1; 3), $\bar{a}_2$=(2; 1; -3; 1) и дополнить ее до ортогонального базиса.

3(с) . Найти ранг и ортонормированный базис системы векторов: $\bar{a}_1$=( 2; 2; –1; 1), $\bar{a}_2$=(1; –5; 3; 1), $\bar{a}_3$=(3;– 3; 2; 2) и $\bar{a}_4$=( 2; 8; –7; 3).

3(д) Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

4. Линейный оператор A в базисе $\{\vec{e}_1=\vec{i}+2\vec{j}, \vec{e}_2=2\vec{i}+3\vec{j}\}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейный оператор C в базисе $\{\vec{e}_1=3\vec{i}+\vec{j}, \vec{e}_2=4\vec{i}+2\vec{j}\}$ – матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A+C в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

4. (б) Дано: $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$, A $\bar{x}=\{2x_2+x_3; 3x_1-4x_2; x_1-x_2\}$, B $\bar{x}=\{x_1+x_3; x_2; 2x_1\}$. Доказать, что данные операторы являются линейными, и найти ( AB) $\bar{x}$ .

4. (в)Найти матрицу перехода от базиса B $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ к базису B′ $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$, если $\bar{e}_1$=(9; 6), $\bar{e}_2$=(-8; 11), $\bar{e}_1'$=(-1; 3), $\bar{e}_2'$ =(2; 1).

4.(с)Доказать линейность и найти матрицу оператора проектирования на плоскость 3x+2y-z=5 ( в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$).

4(д) Найти координаты вектора $\bar{a}$ (2, 0, 1) в базисе :{ $\bar{e}_1$=(1; 3; 2), $\bar{e}_2$=(1; 4; 3), $\bar{e}_3$=(2; 2; 1)}.

4.(е) Доказать линейность оператора $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, A(\bar{x})=[\bar{b},[\bar{a},\bar{x}]]$, где $\bar{a}=(1,-2,3), \bar{b}=(0,-2,1)$. Найти его матрицу в каноническом базисе. Является ли этот оператор обратимым? Если является, то найти матрицу обратного оператора в каноническом базисе.

4.(ж). Линейный оператор $A$ в базисе $\mathrm{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&5&3\\0&4&1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора А в базисе, полученном поворотом базиса В на угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ вокруг орта $\bar{i}$ .

4.(з) Линейный оператор $A$ в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j},k\}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}2&4&0\\1&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\bar{e}_1(-1;\ 1;\ -2),\ \bar{e}_2(-1;\ 2;\ 1),\bar{e}_3(1;\ -1;\ 1)\}$.

4.(и) Дана матрица линейного оператора А=$\begin{pmatrix}1&4\\5&-2\end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1$=(2; -3), $\bar{a}_2$=(1; -2). Найти матрицу сопряженного оператора А* в том же базисе.

5. Выяснить возможность приведения матрицы линейного оператора к диагональному виду путём перехода к новому базису, найти этот базис и соответствующую ему форму матрицы.

$$\begin{pmatrix}3&12&-4\\-1&-3&1\\-1&-12&6\end{pmatrix}$$

5.(б) . Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

6. Привести уравнение кривой второго $x^2-2xy+y^2+\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=0.$ порядка к каноническому виду, найти каноническую систему координат и нарисовать эту кривую в данной системе координат.

6. (б) Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $Q(\bar{x})=3x_1^{\,2}+6x_2^{\,2}+3x_3^{\,2}-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ имеет канонический вид, и записать форму в найденном ОНБ.