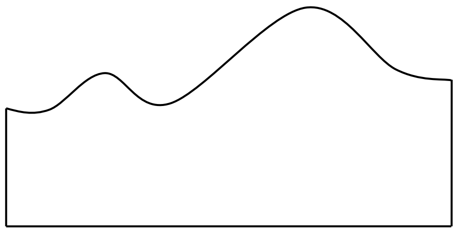
ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Площадь криволинейной трапеции

Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



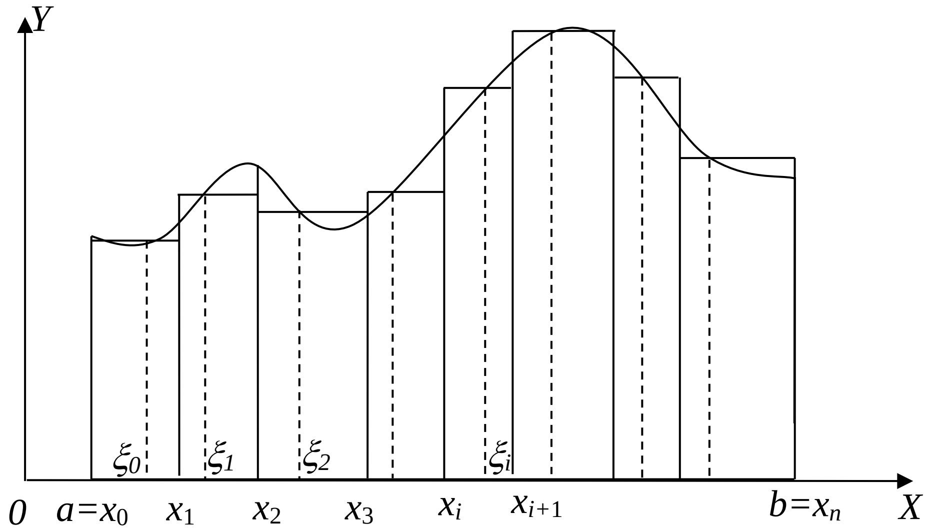
Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции

$$y = f(x),\ x \in [a,b].$$

Для того, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.

Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков

$$[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,n\text{, где } x_0 = a,\ x_n = b.$$



На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами

$$(\xi_i, f(\xi_i)).$$

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$.

Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$.

Δ называется **диаметром разбиения**.

Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем

$$\boxed{\sigma(f, R, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).}$$

Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma(f, R, \xi) = I,$$

причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной кривой $y = f(x)$.

Теорема. Если $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Ограниченность является необходимым, но не достаточным условием интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$, т. е. что существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми.

Сформулируем без доказательства достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема Коши (достаточное условие интегрируемости): Если функция $f(x)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. существует $\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема. (также достаточное условие интегрируемости): Монотонная ограниченная на промежутке $[a,b]$ функция интегрируема на этом промежутке.

Отметим, что интеграл Римана существует для значительно более широкого класса функций, нежели рассматриваемый класс непрерывных функций. В частности, справедлива следующая теорема, обобщающая предыдущую теорему

Теорема. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. существует $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали **интегралом** – так же, как множество и первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Ниже мы ее найдем.

Свойства интеграла Римана.

1.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2.

$$\int_a^b dx = b\text{-}a$$

3. **Линейность**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β – произвольные постоянные, то функция $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

4. **Аддитивность**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c \in [a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Следствием этой формулы можно считать соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.

5. Если $f(x) \geq 0$ всюду на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

6. **Сохранение неравенства.** Если $f(x) \geq g(x)$ всюду на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Следствие 1. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$$

Следствие 2.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

Доказательство:

$$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$$

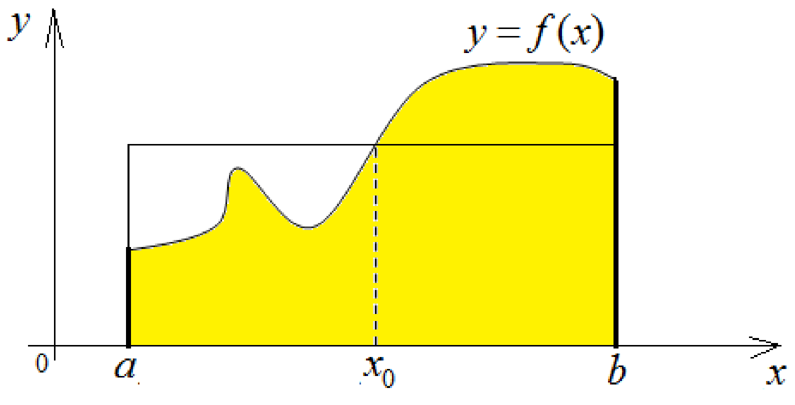
$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx,$$ следовательно,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

7. **Теорема о среднем**. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0\in[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx=f(x_0)\cdot(b-a).$$

То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



8.

а) Если $f(x)$ четная функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

б) Если $f(x)$ нечетная функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Будем рассматривать интегралы от этой функции на отрезках $[a,t]$ при всевозможных $t\in[a,b]$. Очевидно, что результат интегрирования зависит от значения верхнего предела интегрирования. Поэтому обозначим

$$\boxed{I(t)=\int_{a}^{t} f(x)\,dx.}$$

Причем $\quad I(a)=0,\ I(b)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$

Рассмотрим

$$I(t+\Delta t)-I(t)=\int_{a}^{t+\Delta t} f(x)dx-\int_{a}^{t} f(x)dx=$$

$$=\int_{a}^{t+\Delta t} f(x)dx+\int_{t}^{a} f(x)dx=\int_{t}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{t+\Delta t} f(x)dx=\int_{t}^{t+\Delta t} f(x)dx.$$

Значит, $\quad \boxed{I(t+\Delta t)-I(t)=\int_{t}^{t+\Delta t} f(x)dx}$

В соответствии с теоремой о среднем существует такое значение $\theta\in(0,1)$, что

$$\int_{t}^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t+\theta\cdot\Delta t)\cdot\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=f(t+\theta\cdot\Delta t).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t\to 0$ и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке $t\in[a,b]$, получим

$$\boxed{I'(t)=f(t).}$$

Последнее означает, что функция $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Следовательно, если $F(x)$– любая первообразная функции $f(x)$, то

$$F(x) = I(x) + C \; –$$

по свойству двух первообразных одной и той же функции.

Следовательно,

$$F(a) = \mathrm{C}\,,\ \text{так как } I(a)=0,$$

и

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx+C$$

Значит,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют **определенным интегралом**) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Методы вычисления определенного интеграла.

Замена переменной в определенном интеграле.

Предположим, что необходимо вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Перейдем от переменной x к переменной t, полагая $x = \varphi(t)$.

Пусть $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Предположим, кроме того, что

1) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$;
2) при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[\alpha, \beta]$.

При этих условиях имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

В самом деле, пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Теперь покажем, что если в первообразной $F(x)$ положить $x = \varphi(t)$, то функция $F(\varphi(t))$, будет первообразной для подынтегральной функции преобразованного интеграла, т.е. для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Действительно, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t.)$$

Поэтому по той же формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Но так как по условию $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то $F(\varphi(\beta)) = F(b)$, а $F(\varphi(\alpha)) = F(a)$.

Следовательно, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t.)dt = F(b) - F(a)$.

Сравнивая полученное равенство с формулой Ньютона-Лейбница, получаем что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Пример:

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{4+3x}} = \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{4+3x} \\ 3dx = 2tdt \end{matrix} \right\} = \int_2^4 \frac{(t^2-4)}{3t}\frac{2}{3}tdt =$$

$$= \frac{2}{9}\int_2^4 (t^2-4)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\Big|_2^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 8\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{56}{3} - 8\right) = \frac{64}{27}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть *u* = *u(x)* и *v* = *v(x)* – две функции имеющие непрерывные производные на отрезке *[a,b]*.

Возьмем дифференциал от их произведения:

$$d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x) = u(x)v'(x)dx + v(x)u'(x)dx.$$

Интегрируя это тождество в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b d(u(x)v(x)) = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Но по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b d(u(x)v(x)) = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

Таким образом,

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

Откуда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Так как $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$, то

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Пример:

$$\int_0^1 xe^x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right\} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - (e-1) = 1.$$