7 *Исследование кривых второго порядка*

7.1 Цель работы

Определить вид кривых, найти их основные характеристики и сделать рисунки.

7.2 Теоретическое введение

I Классификация кривых второго порядка

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК) можно представить в виде:

$$\tilde{A}x^2+\tilde{B}xy+\tilde{C}y^2+\tilde{D}x+\tilde{E}y+\tilde{F}=0; \quad \left(\tilde{A}^2+\tilde{B}^2+\tilde{C}^2\neq 0\right) \tag{7.1}$$

Одна и та же кривая в зависимости от расположения, относительно ДПСК будет, иметь разные уравнения. Оказывается, что для каждой кривой, определяемой уравнением (7.1), можно подобрать такую новую ДПСК (повернутую), что ее уравнение примет вид:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0; \quad (A^2+B^2\neq 0), \tag{7.2}$$

т.е. уравнение не будет содержать произведение xy.
В типовом расчете дается именно это уравнение (7.2), поэтому мы и будем его рассматривать. Вид кривой, определяемой уравнением (7.2), зависит от коэффициентов A, B, C, D, E поэтому проведем подробный анализ каждого из следующих случаев.

1. $AB\neq 0$, т.е. $A\neq 0$ и $B\neq 0$ случай ***центральной кривой.***
Выделим полные квадраты:

$$Ax^2+Cx=A\left(x^2+2\frac{C}{2A}x\right)=A\left(x^2+2\frac{C}{2A}x+\left(\frac{C}{2A}\right)^2-\frac{C^2}{4A^2}\right)=A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2-\frac{C}{4A};$$

$$By^2+Dy=B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2-\frac{D^2}{4B}.$$

Таким образом (7.2) примет вид

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2-\frac{C^2}{4A}+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2-\frac{D^2}{4B}+E=0 \tag{7.3}$$

Положим $\alpha=-C/2A,\quad \beta=-D/2B$ и $H=\dfrac{C^2}{4A}+\dfrac{D^2}{4B}-E,$

тогда получим

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=H \tag{7.4}$$

Перейдем теперь к новой ДПСК – $X'O'Y'$, которая получается из исходной ДПСК XOY параллельным переносом (соответствующие оси координат параллельны и сонаправлены). Начало ДПСК $X'O'Y'$ поместим в т. $O'(\alpha,\beta)$. Тогда точка M, имеющая относительно ДПСК - XOY координаты $(X, У)$ будет иметь относительно ДПСК $X'O'Y'$ координаты $x'=x-\alpha$ и $y'=y-\beta$, а уравнение (7.4) в ДПСК $X'O'Y'$ запишется

$$A(x')^2 + B(y')^2 = H \qquad (7.5)$$

(для удобства в дальнейшем вместо x' и y' будем писать x и y).

1.1 $AB > 0$ – ***эллиптический тип***.
a) $A > 0,\ \ B > 0,\ \ H > 0$.
Положив $a^2 = \dfrac{H}{A},\ \ b^2 = \dfrac{H}{B}$ перепишем (7.5) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.6)$$

В этом уравнении, не нарушая общности, можно считать $a^2 \geq b^2$, в противном случае нужно просто ДПСК повернуть на 90°.

Кривая, уравнение которой относительно некоторой ДПСК имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ называется ***эллипсом***. Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ называется ***каноническим уравнением эллипса***.

b) $A > 0,\ \ B > 0,\ \ H = 0$.
Положив $a^2 = 1 / A,\ \ b^2 = 1 / B$, получим
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.
Этому уравнению удовлетворяют координаты единственной точки O' (0,0).
c) $A > 0,\ \ B > 0,\ \ H < 0$.
Положив $a^2 = -H / A,\ \ b^2 = -H / B$, перепишем (7.5) в виде: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$.

Полученному уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки, т.е. оно определяет ***пустое множество точек***. Условно это пустое множество называют ***мнимым эллипсом***.
Таким образом мы полностью проанализировали ситуацию, когда $AB > 0$. Теперь перейдем к следующему случаю.

1.2 $AB < 0$ – ***гиперболический тип***.
a) $A > 0,\ \ B < 0,\ \ H > 0$.
Положив $a^2 = H / A,\ \ b^2 = -H / B$, перепишем (7.5) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.7)$$

Кривая, уравнение которой относительно некоторой ДПСК имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, называется ***гиперболой***. Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

Замечание. Если $A > 0,\ \ B < 0,\ \ H > 0$, то (7.5) можно преобразовать к виду $\dfrac{-(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{a^2} = 1$

повернув затем ДПСК $X'O'Y'$ на 90°, мы получим уравнение вида

$\frac{(x'')^2}{b^2} - \frac{(y'')^2}{a^2} = 1$, где $x'' = y'$, $y'' = -x'$.

b) $A > 0$, $B < 0$, $H = 0$. Положив $a^2 = 1/A$, $b^2 = -1/B$, получим: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Разложим левую часть на множители: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$.

Теперь хорошо видно, что ***этому уравнению удовлетворяют координаты точек двух прямых, проходящих через начало координат*** $O'(0,0)$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Поэтому говорят, что уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ***определяет вырожденную гиперболу***. Итак, мы полностью выяснили, какие кривые могут получаться при $AB \neq 0$ и переходим к случаю, когда $AB = 0$.

2 $AB = 0$ – ***параболический тип***.

2.1 $A = 0$ $(B \neq 0)$, $C \neq 0$. В этом случае (7.2) имеет вид:

$By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Выделив полный квадрат, преобразуем это уравнение:

$\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x - \frac{D^2}{4BC} + \frac{E}{C}\right)$.

Положим, далее, $\alpha = \frac{D^2}{4BC} - \frac{E}{C}$, $\beta = -\frac{D}{2B}$, $2p = -\frac{C}{B}$, тогда уравнение перепишется в виде: $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$. Перейдя теперь, как и в случае 1 к новой ДПСК $X'O'Y'$

$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$

получим: $(y')^2 = 2px'$. Опустим для удобства штрихи:

$$y^2 = 2px \tag{7.8}$$

Кривая, уравнение которой относительно некоторой ДПСК имеет вид $y^2 = 2px$, называется ***параболой***. Уравнение $y^2 = 2px$ называется ***каноническим уравнением параболы***.

Замечание. В уравнении (7.8), не нарушая общности, можно считать $p > 0$, в противном случае нужно повернуть ДПСК на 180°.

Замечание. Случай $B = 0$, $D \neq 0$, очевидно, сводится к предыдущему, если повернуть ДПСК на 90°.

Наконец, чтобы полностью завершить анализ уравнения (7.2) нам осталось рассмотреть последние три случая.

2.2 $A = 0$ $(B \neq 0)$, $C = 0$.

В этом случае уравнение (7.2) имеет вид $By^2 + Dy + E = 0$.

Выделив полный квадрат, преобразуем его к виду: $\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{E}{B} + \frac{D^2}{4B^2}$. Положим $\beta = -\frac{D}{2B}$, $\frac{E}{B} + \frac{D^2}{4B^2} = H$, получим, $(y - \beta)^2 = H$, перейдя к ДПСК $X'O'Y'$: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \beta \end{cases}$ и опуская в уравнении штрихи, получим:

$$y^2 = H \tag{7.9}$$

a) $H > 0$

Обозначим $a^2 = H$ тогда (7.9) примет вид:

$$y^2 = a^2 \tag{7.10}$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек, лежащих на параллельных прямых $y = a$ и $y = -a$ (***вырожденная парабола***).

b) $H < 0$

Обозначив $a^2 = -H$, перепишем (7.9) в виде: $y^2 = -a^2$. Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки, т.е. оно определяет пустое множество, которое условно называют ***парой мнимых параллельных прямых***.

c) $H = 0$

То есть (7.9) имеет вид

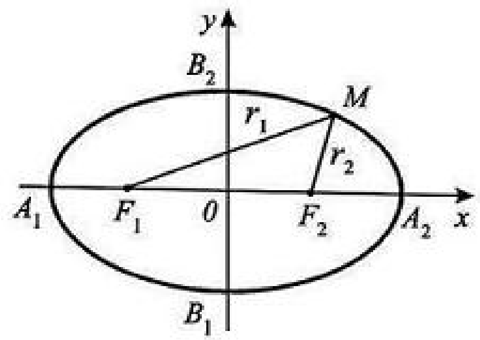
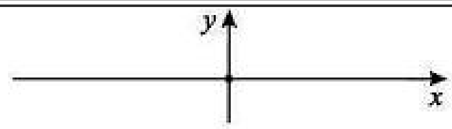
$$y^2 = 0 \tag{7.11}$$

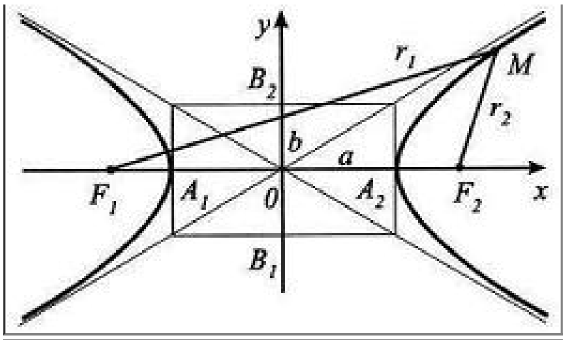
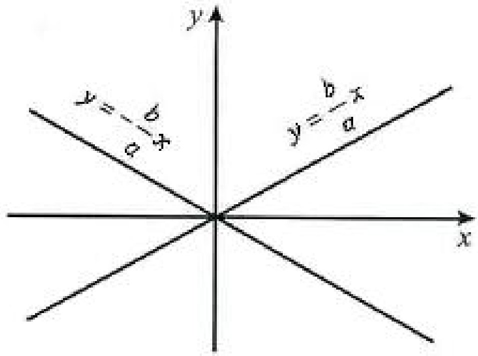
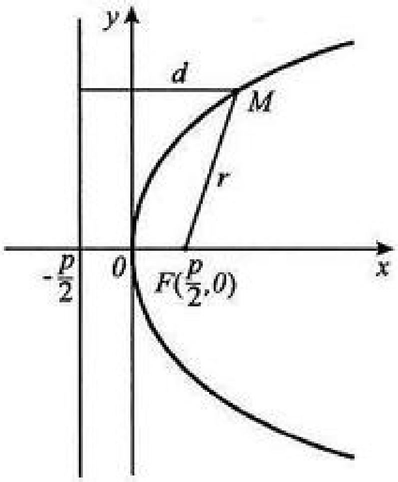
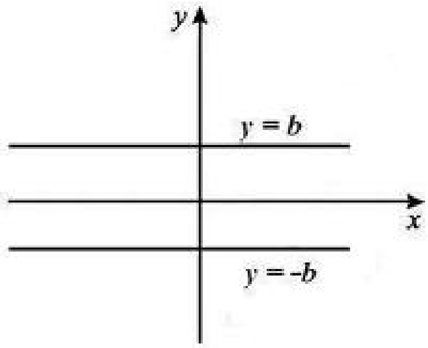
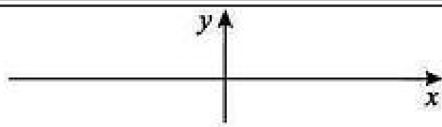
Этому уравнению удовлетворяют координаты точек оси абсцисс. Так как уравнение (7.11) есть "предельный" случай (7.10) ($a^2 \to 0$), то говорят, что уравнению $y^2 = 0$ соответствует ***пара совпадающих параллельных прямых***.

Замечание. Случай $B = 0$ и $D = 0$ сводится к предыдущему поворотом осей на 90°.

Таким образом, подобрав новую ДПСК, уравнение $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ можно привести к одному из следующих 9 видов (см. таблицу).

Классификация алгебраических кривых второго порядка

Номер вида	Уравнение кривой	Название кривой	Рисунок кривой
Эллиптический тип кривой ($AB > 0$)			
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b > 0$)	Эллипс	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Точка	
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мнимый эллипс	
Гиперболический тип кривой ($AB < 0$)			

4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гипербола	
5	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся прямых (вырожденная гипербола)	
Параболический тип кривой ($AB = 0$)			
6	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	Парабола	
7	$y^2 = b^2$	Пара параллельных прямых (вырожденная парабола)	
8	$y^2 = -b^2$	Пара мнимых паралельных прямых	
9	$y^2 = 0$	Пара совпадающих параллельных прямых	
Уравнения 1-5 относятся к случаю центральной кривой, так как каждое из них описывает либо пустое множество, либо множество, имеющее единственный центр			

Наш анализ показывает, что из всех алгебраических кривых второго порядка интерес представляют только эллипс, гипербола и парабола (прямые мы рассматривали ранее). Эти кривые действительно обладают рядом замечательных свойств, которые используются в технике. Отметим важнейшие из них.

II ЭЛЛИПС $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$

1. Эллипс имеет ***центр симметрии*** – начало координат $O(0,0)$.
2. Эллипс имеет ***две оси симметрии*** – оси координат.
3. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются ***вершинами*** – $A_1(-a,c)$, $A_2(a,0)$, - $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ (4 вершины).
4. Отрезок A_1A_2 называется ***большой осью*** эллипса, длина этой оси равна $2a$; аналогично, отрезок B_1 B_2 называется ***малой осью*** эллипса, длина малой оси $2b$ ($2b < 2a$). Отрезки OA_1, OA_2 – большие полуоси; OB_1, OB_2 – малые полуоси, их длины соответственно равны a и b ($a < b$). Иногда слова "большая полуось", "малая полуось", "большая ось", "малая ось" относятся не к отрезкам, а к их длинам, т.е. к числам a, b, $2a$ и $2b$ соответственно.
5. Точки, лежащие на большой оси эллипса F_1 $(-C,0)$ и $F_2(C,0)$, где $C=\sqrt{a^2-b^2}$ $(0 < c < a)$ называются ***<u>фокусами эллипса</u>***. Эти точки являются замечательными.

***Фокальное свойство эллипса*:** для любой точки M, лежащей на эллипсе, $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, т.е. эллипс является множеством точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек плоскости, фокусов, есть величина постоянная, равная $2a$, и которая больше расстояния между фокусами ($2a > 2c$).

6. ***Эксцентриситетом*** эллипса называется число $\varepsilon = c/a$.

Заметим, что ***эксцентриситет эллипса*** $\varepsilon < 1$. Это число характеризует форму эллипса: при $\varepsilon = 0$, $a = b$, т.е. эллипс становится окружностью, а чем ближе эксцентриситет к 1, тем больше эллипс отличается от окружности, т.е. эллипс становится более вытянутым.

7. Прямые: $L_1 : x=-\frac{a}{\varepsilon}$ и $L_2 : x=\frac{a}{\varepsilon}$ перпендикулярные оси симметрии, соответствующей большой оси эллипса, называются ***директрисами***. Заметим, что так как $\varepsilon < 1$, то директрисы лежат вне эллипса, <u>за</u> его вершинами A_1 и A_2. Эти прямые являются также замечательными для эллипса.

<u>Директориальное свойство эллипса:</u> для любой точки M, лежащей на эллипсе,

$$\frac{|MF_1|}{\rho(M;L_1)}=\frac{|MF_2|}{\rho(M;L_2)}=\varepsilon,$$

где $\rho(M, L_1)$ – расстояние от точки M до директрисы $L_1 : x=-\frac{a}{\varepsilon}$ соответствующей фокусу $F_1(-c, 0)$, $\rho(M, L_2)$ – расстояние до директрисы $L_2 : x=\frac{a}{\varepsilon}$, соответствующей фокусу $F_2(c, 0)$. То есть эллипс – множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса), деленное на расстояние до данной прямой (директрисы), есть постоянная величина, которая меньше 1 (и равна эксцентриситету).

Замечание. Директориальное и фокальное свойства являются определяющими для эллипса. Например, множество точек плоскости, для которых расстояние до данной точки (фокуса), деленное на расстояние до данной прямой (директрисы), есть постоянная величина, которая меньше 1, является эллипсом.

8. ***Оптическое свойство эллипса:*** если изготовить "зеркальную" нить в форме эллипса, то луч,

идущий из одного фокуса, отразившись от эллипса, попадает в другой фокус, т.е. если в т. M, лежащей на эллипсе провести к нему касательную T, то углы между этой касательной и прямыми MF_1 и MF_2 будут равны ($\angle\alpha = \angle\beta$).

Ниже приводим рис. 7.1, на котором изображен эллипс и все его замечательные точки и прямые.

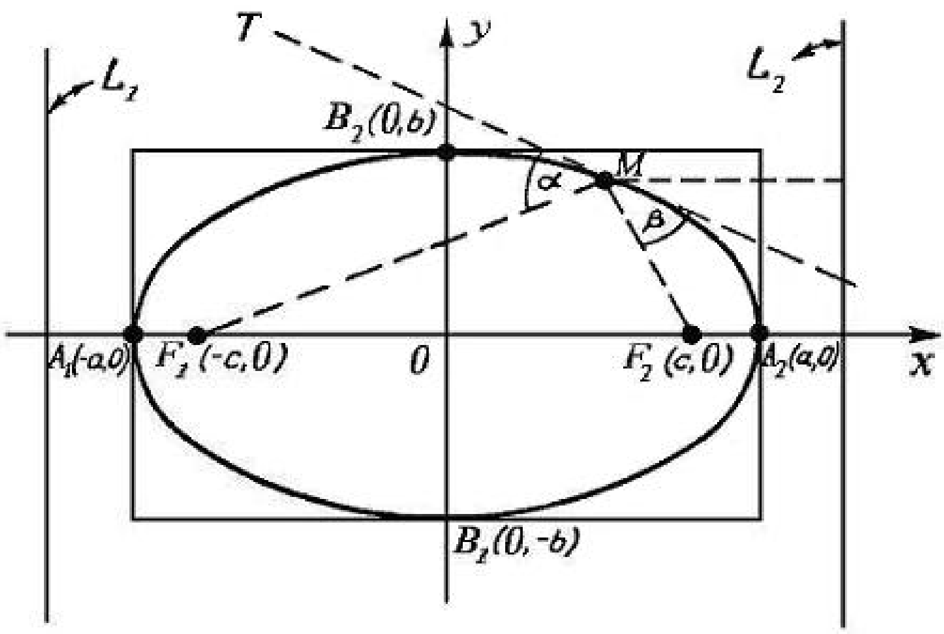


Рис. 7.1 Эллипс

Замечание. Чтобы выяснить форму эллипса, следовало бы разрешить уравнение (7.6) относительно Y, средствами математического анализа исследовать функцию $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\left(y' > 0, y'' < 0\right)$ и построить ее график. Он совпадает с частью эллипса, лежащей в 1-й четверти, поэтому по симметрии можно достроить весь эллипс.

Замечание. Отметим, что эллипс, в отличие от гиперболы и параболы, является ограниченной кривой, поэтому когда его рисуют, то, обычно, сначала рисуют “коробочку” – основной прямоугольник, который касается вершин эллипса.

III ГИПЕРБОЛА $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$

1. Гипербола имеет ***центр симметрии*** – начало координат т.$O(0,0)$.
2. Гипербола имеет ***две оси симметрии*** – оси координат.
3. Точки пересечения с осями симметрии называются вершинами гиперболы. В отличие от эллипса гипербола имеет ***2 вершины:*** $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ – т.е. гипербола пересекает только одну ось симметрии.
4. Отрезок A_1A_2 называется ***действительной осью*** гиперболы, длина действительной оси равна $2a$. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ лежат на оси симметрии, которую гипербола не пересекает. Отрезок B_1B_2 называется ***мнимой осью*** гиперболы, длина мнимой оси равна $2b$.

Все сказанное далее в предыдущем разделе II п.4 для эллипса, касающееся полуосей и терминологии, относится и к гиперболе.

5. Точки, лежащие на продолжении действительной оси гиперболы $F_1(-C, 0)$ и $F_2(C, 0)$, где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются ***фокусами гиперболы***.

Фокальное свойство гиперболы: для любой точки M, лежащей на гиперболе $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$, т.е. гипербола является множеством точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек плоскости, фокусов, есть величина постоянная, равная $2a > 0$.

6. ***Эксцентриситетом гиперболы*** называется число $\varepsilon = C/a$.

Заметим, что эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

7. Прямые $z_1: x = -a/\varepsilon$ и $z_2: x = a/\varepsilon$ перпендикулярные действительной оси гиперболы, называются ***директрисами.***

Директориальное свойство гиперболы дословно формулируется так же, как и для эллипса, только $\varepsilon < 1$, поэтому директрисы гиперболы лежат между ее вершинами.

Замечание. Как и для эллипса, директориальное и фокальное свойства являются определяющими для гиперболы.

8. Гипербола, как и эллипс, обладает ***оптическим свойством:*** луч, идущий из фокуса F_1 отразившись от гиперболы в т. M, лежащей на гиперболе, идет по прямой $F_2\,M$; т.е., если в т. M, лежащей на гиперболе, провести касательную T, то она будет биссектрисой угла между прямыми MF_1 и MF_2.

9. Гипербола имеет ***две асимптоты:*** $\Gamma_1: y = -\frac{b}{a}x$ и $\Gamma_2: y = \frac{b}{a}x$ (у эллипса их нет и быть не может, так как эллипс ограниченная кривая).

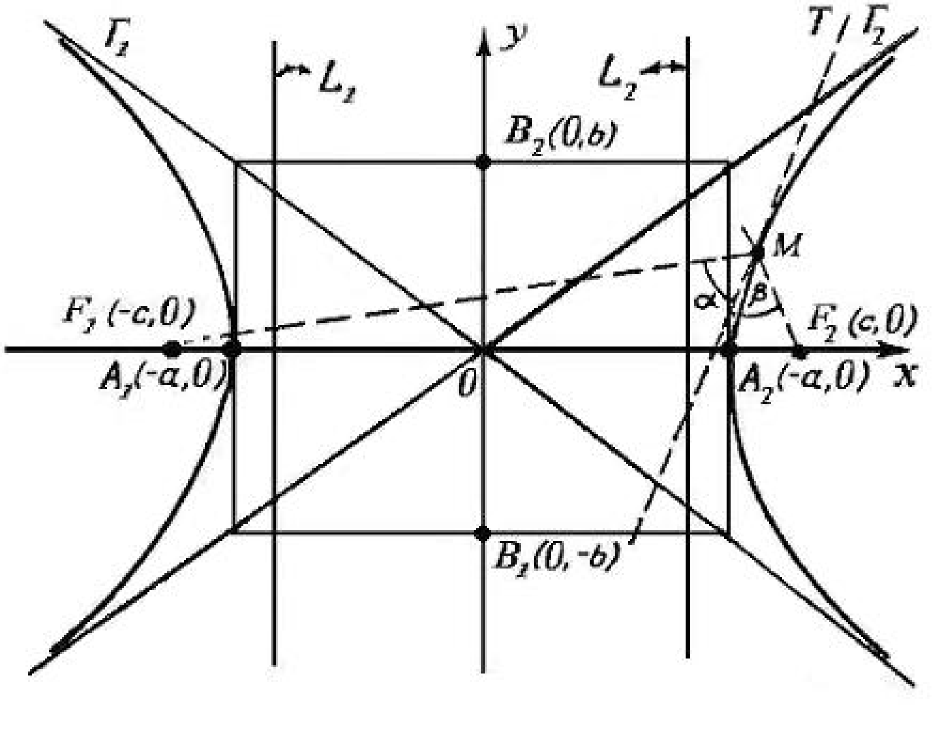


Рис. 7.2 Гипербола

На рис. 7.2 изображена гипербола и все ее замечательные точки и прямые.

Замечание. Чтобы выяснить форму гиперболы и найти ее асимптоты, следовало бы поступить так же, как и в случае эллипса.

Замечание. При построении гиперболы, как и для эллипса, обычно сначала рисуют основной прямоугольник. Его центр – центр симметрии гиперболы, стороны параллельны осям гиперболы и касаются ее вершин, длины сторон равны $2a$ и $2b$. Диагонали основного прямоугольника (продолжение) являются асимптотами гиперболы. В отличие от эллипса гипербола лежит вне основного прямоугольника.

IV ПАРАБОЛА $y^2 = 2px (p > 0)$

1. Парабола в отличие от эллипса и гиперболы, ***не имеет центра симметрии***, т.е. не относится к центральным кривым.
2. Парабола имеет ***одну ось симметрии*** – ось абсцисс.
3. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной – т. $O(0,0)$, т.е. парабола ***имеет одну вершину***.
4. Число $p > 0$ называется ***параметром параболы***.
5. Точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, лежащая на оси симметрии параболы и отстоящая от ее вершины на $p/2$,

называется ***фокусом параболы***.
6. Прямая $L: x = -\frac{p}{2}$, перпендикулярная оси параболы и отстоящая от ее вершины на $p/2$,

называется ***директрисой параболы***. Заметим, что фокус лежит "внутри" параболы, а директриса "вне" ее, т.е. фокус и директриса лежат по разные стороны от параболы, как и в случае эллипса и гиперболы.
Директориальное свойство параболы: для любой точки M, лежащей на параболе, $|FM| = \rho(M,L)$, т.е. $|FM| / \rho M(L) = 1$ и можно считать, что ***эксцентриситет параболы*** $\varepsilon = 1$. Таким образом, парабола занимает промежуточное положение между эллипсом, у которого $\varepsilon < 1$, и гиперболой, у которой $\varepsilon > 1$.
Замечание. Директориальное свойство является определяющим для параболы так же , как и для эллипса, и для гиперболы.
7. ***<u>Оптическое свойство параболы:</u>*** луч, идущий из фокуса, отразившись от параболы, идет параллельно оси параболы, т.е. параболическое зеркало дает параллельный пучок света, если источник поместить в фокус параболы.
На рис. 7.3 изображена парабола с ее замечательными точками и прямыми.

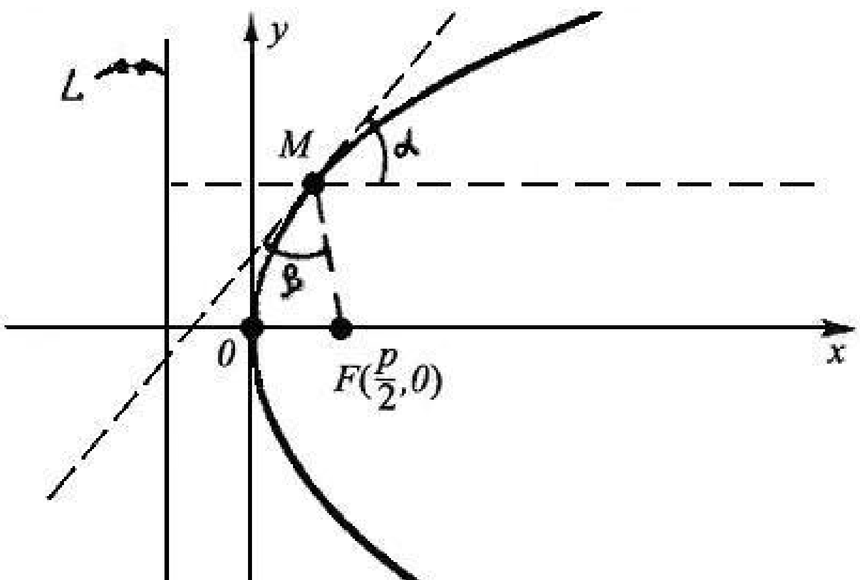


Рис. 7.3 Парабола

Замечание. Форма параболы хорошо известна из школьного курса, так как парабола является графиком квадратного трехчлена.

7.3 Содержание типового расчета

Четыре алгебраические кривые второго порядка заданы уравнениями вида
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$
Определить тип каждой кривой, найти ее основные параметры и сделать чертеж.

7.4 Пример выполнения типового расчета

Условие типового расчета

Уравнения кривых заданы таблицей из коэффициентов.

№ п/п	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
1	25	–36	–50	–72	3589
2	0	2	–16	6	–23
3	2	3	–12	6	21
4	2	1	–4	0	0

Приведем решения первых трех задач, указанных в задании.

Задача 1.

1. По условию, уравнение имеет вид: $25x^2 - 36y^2 - 50x - 72y + 3589 = 0$.
2. Так как $AB = 25\cdot(-36) < 0$, то это уравнение гиперболического типа (см. 1, п. 1.2), следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.
3. Выделим полные квадраты и приведем уравнение к каноническому виду:

$25(x^2 - 2x) - 36(y^2 + 2y) + 3589 = 0;$

$25(x - 1)^2 - 36(y + 1)^2 = -3589 + 25 - 36;$

$25(x - 1)^2 - 36(y + 1)^2 = -3600;$

$-\frac{(x-1)^2}{144} + \frac{(y+1)^2}{100} = 1.$

4. Перейдем к новой ДПСК $X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases} \tag{7.12}$$

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{(y')^2}{10^2} - \frac{(x')^2}{12^2} = 1 \tag{7.13}$$

Теперь хорошо видно, что данное уравнение определяет гиперболу (см. III). Однако наша гипербола расположена относительно ДПСК $X'O'Y'$ не так, как изображено на рис. 7.2, а повернута на 90°, т.е. ее действительная ось – ось *OY*, а мнимая – *OX*.

5. Найдем ***основные числовые характеристики гиперболы.***

Действительная полуось $a = 10$. ***Мнимая полуось*** $b = 12$.

Расстояние от центра до фокуса $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 12^2} \cong 15.6$.

Эксиентриситет гиперболы $\varepsilon = c/d = 1.56 > 1$.

6. Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых сначала в ДПСК $X'O'Y'$, затем, пользуясь формулами (7.12), в данной ДПСК *XOY*.

а) $O'(0,0): \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$

Следовательно, ***координаты центра гиперболы*** O' в данной ДПСК XOY будут (1,–1).

b) ***Уравнения осей симметрии.*** Как мы уже отмечали, наша гипербола имеет действительную ось – ось $O'Y' : x' = 0$ и мнимую ось – ось $O'X' : y' = 0$. С учетом (7.12) ***уравнение действительной оси*** $x = 1$, аналогично, ***уравнение мнимой оси:*** $y = -1$.

c) ***Вершины***:

В системе $X'O'Y'$

$$A_1(x_1', y_1'), \text{ где } \begin{cases} x_1' = 0 \\ y_1' = -a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ y_1 + 1 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -11 \end{cases};$$

$$A_2(x_2', y_2'), \text{ где } \begin{cases} x_2' = 0 \\ y_2' = a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ y_2 + 1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases};$$

отсюда, в системе XOY, $A_1\ (X_1, Y_1) = A_1(1; -11)$, $A_2(X_2, Y_2) = A_2(1; 9)$.

d) ***Фокусы***. В системе $X'O'Y'$:

$$F_1(0,-C): \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -15{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = -15{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -16{,}6 \end{cases}$$

$$F_2(0, C): \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 15{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 15{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 14{,}6 \end{cases}$$

Отсюда в системе XOY : $F_1(-1; -16{,}6)$; $F_2(1; 14{,}6)$.

e) ***Директрисы***.

$$L_1 : y' = -\frac{a}{\varepsilon}; \quad y' = -6{,}4; \quad y + 1 = -6{,}4; \quad y = -7{,}4.$$

$$L_2 : y' = \frac{a}{\varepsilon}; \quad y' = 6{,}4; \quad y + 1 = 6{,}4; \quad y = 5{,}4.$$

$L_1 :\ y = -7{,}4$; $L_2 : y = 5{,}4$.

f) ***Асимптоты***.

$$\Gamma_1 : x' = \frac{b}{a} y'; \quad x' = 1{,}2y'; \quad x - 1 = 1{,}2(y + 1)\cdot$$

$x - 1{,}2y - 2{,}2 = 0$.

$$\Gamma_2 : x' = -\frac{b}{a} y'; \quad x' = -1{,}2y'; \quad x - 1 = -1{,}2(y + 1)\cdot$$

$x + 1{,}2y + 0{,}2 = 0$.

$\Gamma_1 :\ x - 1{,}2y - 2{,}2 = 0$; $\Gamma_2 :\ x + 1{,}2y + 0{,}2 = 0$.

7 ***Сводка полученных результатов***

Данное уравнение кривой	$25x^2 - 36y^2 - 50x - 72y + 3589 = 0$
Уравнение кривой относительно ДПСК $X'O'Y'$ (после параллельного переноса)	$\frac{(y')^2}{10^2} - \frac{(x')^2}{12^2} = 1$
Название кривой	Гипербола
Полуоси	Действительная полуось $a = 10$ Мнимая полуось $b = 12$
Расстояние от центра до фокуса	$c = \sqrt{a^2 + b^2} \cong 15{,}6$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} = 1{,}56 > 1$

Связь между координатами точки (X,Y) и (X',Y')	$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+1 \end{cases}; \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ	Координаты в ДПСК $X'O'Y'$	Координаты в ДПСК XOY
Центр O'	(0, 0)	(1, –1)
Вершины A_1 A_2	(0; –10) (0; 10)	(1; –11) (1; 9)
Фокусы F_1 F_2	(0; –15,6) (0; 15,6)	(1; –16,6) (1; 14,6)
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ	Уравнение в ДПСК $X'O'Y'$	Уравнение в ДПСК XOY
Оси Действительная Мнимая	$x' = 0$ $y' = 0$	$x = +1$ $y = -1$
Директрисы L_1 L_2	$y' = -6{,}4$ $y' = 6{,}4$	$y = -7{,}4$ $y' = 5{,}4$
Асимптоты Γ_1 Γ_2	$x' = 1{,}2y'$ $x' = -1{,}2y'$	$x - 1{,}2y - 2{,}2 = 0$ $x + 1{,}2y + 0{,}2 = 0$

8. На рисунке 7.4 изображена ***гипербола.***

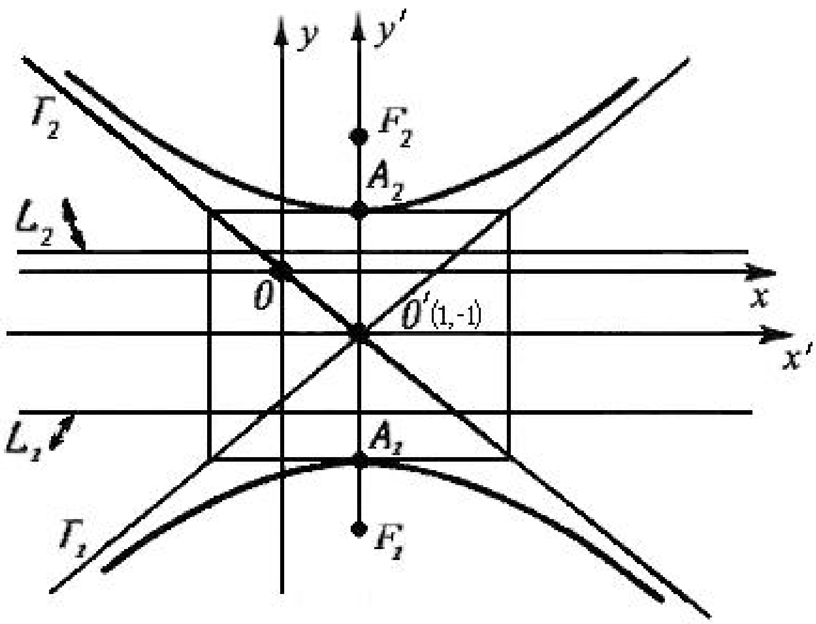


Рис. 7.4 Гипербола

Задача 2.

1. По условию уравнение имеет вид
$y^2 - 16x + 6y - 23 = 0.$

2. Так как $AB = 0 \cdot 1 = 0$, то это уравнение параболического типа (см. 1, п.2); далее, так как $C \neq 0$ (см. 1, п. 2.1), то это уравнение определяет параболу.

3. Выделим полный квадрат:

$(y^2 + 6y + 9) = 16x + 23 + 9$; $(y + 3)^2 = 16(x + 2)$.

4. Перейдем к новой ДПСК $X'O'Y'$

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases} \qquad (7.14)$$

тогда наше уравнение примет вид: $(y')^2 = 16x'$.

5. Найдем ***параметр***: $2p = 16$, $p = 8$.

6. Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) ***Вершина*** $O'(0,0)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$ (См. (14)). $O'(-2; -3)$.

b) ***Уравнение оси:*** $y' = 0$, $y + 3 = 0$, т.е. $y = -3$.

c) ***Координаты фокуса*** $F(p/2,0)$:

$\begin{cases} X' = 4 \\ Y' = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} X = 4-2 = 2 \\ Y = 0-3 = -3 \end{cases}$ $F(2, -3)$.

d) ***Уравнение директрисы***: z : $X' = -p/2$; $X' = -4$; $X + 2 = -4$ или $X = -6$.

Сводка полученных результатов

Данное уравнение	$y^2 - 16x + 6y - 23 = 0$
Уравнение кривой относительно ДПСК $X'O'Y'$ (после параллельного переноса).	$(y')^2 = 16x'$
Название кривой	Парабола
Параметр	$p = 8$
Эксцентриситет	$\varepsilon = 1$
Связь между координатами точки (X,Y) и (X',Y')	$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases}$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ	Координаты в ДПСК $X'O'Y'$	Координаты в ДПСК XOY
Вершина O'	(0, 0)	(–2, –3)
Фокус F	(4, 0)	(2, –3)
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ	Уравнение в ДПСК $X'O'Y'$	Уравнение в ДПСК XOY
Ось	$y' = 0$	$y = 3$
Директриса	$x' = -4$	$x' = -6$

8. На рисунке 7.5 изображена ***парабола***.

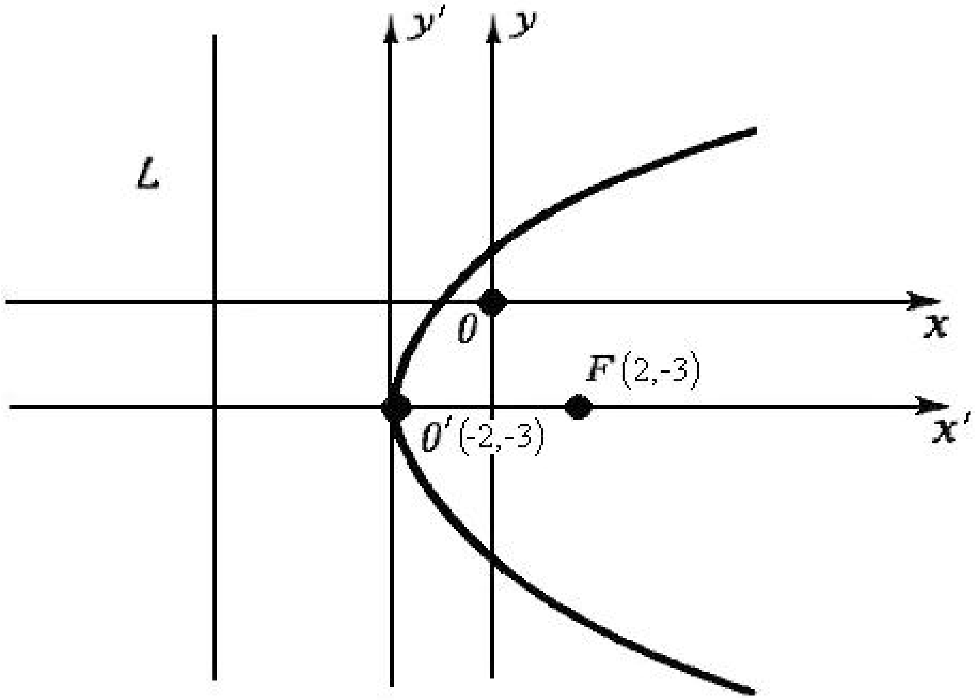


Рис. 7.5 Парабола

Задача 3.
1. По условию уравнение имеет вид:
$2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$.
2. Так как $A \cdot B = 2 \cdot 3 > 0$, то уравнение эллиптического типа (см. 1, п. 1.1), следовательно, оно может определять либо эллипс, либо пустое множество (мнимый эллипс), либо точку.
3. Выделим полные квадраты:
$2(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 2y + 1) - 18 - 3 + 21 = 0$;
$2(x - 3)^2 + 3(y + 1)^2 = 0$.
Точка с координатами (3, –1)
Замечание. Мы ограничились разбором решения только трех задач, однако это дает представление о выполнении работы в целом.

7.5 Порядок оформления работы

1. Все результаты каждой задачи должна быть сведены в таблицу, как это сделано в примерах. Таблица должна содержать каноническое уравнение и название кривой, основные числовые характеристики кривой (полуоси, расстояние от центра до фокусов, параметр, эксцентриситет), формулы, связывающие координаты точки относительно рассматриваемых ДПСК, координаты замечательных точек (центра, вершин, фокусов) и уравнения замечательных прямых (осей симметрии, директрис, асимптот) относительно всех рассматриваемых ДПСК.
2. Если рассматриваемая кривая – эллипс, то нужно сформулировать его основные замечательные свойства: фокальное, директориальное и оптическое, аналогично для гиперболы и параболы.
3. Решение задачи завершается аккуратно сделанным рисунком кривой в данной ДПСК.
В заключение отметим, что работа должна содержать не только ответы на вопросы, поставленная в задании, но и все вычисления, на основании которых сделаны выводы.