ЛЕКЦИЯ 4

Интеграл от функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

2.4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть в комплексной плоскости задана замкнутая или незамкнутая дуга *C*, которую в дальнейшем будем считать гладкой или кусочно-гладкой. Дуга называется *гладкой* , если в каждой ее точке можно провести касательную, причем направление касательной изменяется непрерывно при движении точки по кривой. Дуга непрерывной кривой, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*.

Граничные точки кривой *C* обозначим Z_0 и *Z*. Если кривая замкнута, то $Z_0 = Z$. Точку Z_0 будем считать начальной, а *Z* - конечной; тем самым установим положительное направление на кривой *C*, которое на чертеже будем отмечать стрелкой (рис. 2.2). Также будем предполагать, что функция $f(z)$ непрерывна во всех точках дуги C.

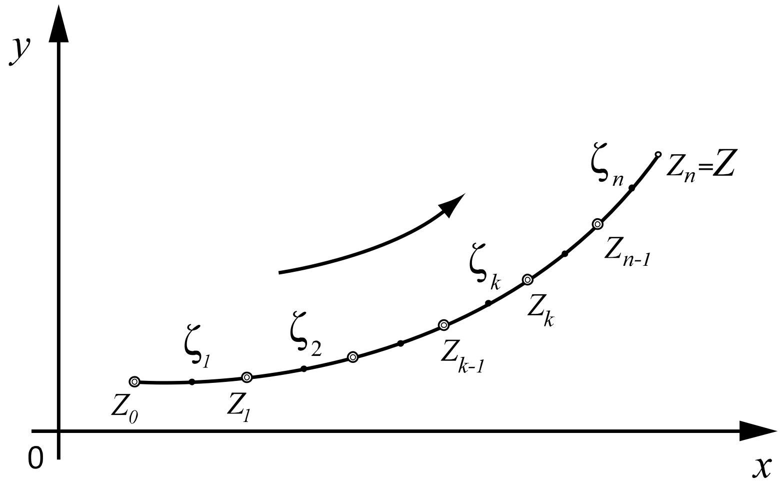

Рис. 2.2

Разобьём дугу *C* произвольным способом на *n* дуг и занумеруем точки деления z_k в направлении от начальной точки z_0 к конечной $z_n = Z$ (см. рис. 2.2). Введем обозначения $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k , а $|\Delta z_k|$ –

длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей соответствующую дугу. Выберем произвольную точку ζ_k, принадлежащую дуге с концами в точках z_{k-1} и z_k.

Составим *интегральную сумму* $\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k$. Если передел этой суммы существует при условии, что $n \to \infty$ и длина наибольшей из дуг разбиения стремится к нулю, а также не зависит от способа разбиения кривой *C* на дуги и выбора точек ξ_k на каждой из дуг, то он называется *интегралом функции* $f(z)$ *по дуге C* и обозначается

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k . \qquad (2.14)$$

Из приведенного определения интеграла можно получить его свойства:

1. $\int_C \left(f_1(z) + f_2(z)\right)dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz$.

2. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$,

где *k* – действительная или комплексная постоянная.

3. Если дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой *C*, но имеет противоположное направление, то

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = -\int_C f(z)dz ,$$

так как при замене дуги *C* на $\overline{C}$ все множители Δz_k в правой части (2.14) изменят знаки на противоположные.

4. Ели дуга *C* состоит из нескольких дуг $C_1, C_2, \dots, C_m$, то

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f(z)dz .$$

5. $\int_C dz = Z - z_0$,

так как при $f(z) = 1$ сумма в правой части (2.14) принимает вид

$$\Delta z_1+\Delta z_2+\ldots+\Delta z_n=\left(z_1-z_0\right)+\left(z_2-z_1\right)+\ldots+\left(z_n-z_{n-1}\right)=z_n-z_0=Z-z_0 .$$

6. Если $|f(z)| \leq M$ во всех точках дуги *C* и длина дуги *C* равна *l*, то

$$\left|\int_C f(z) dz\right| \leq M l .$$

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного (2.14) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных переменных. Пусть $z=x+i y$ и $f(z)=u+i v$, где u и v – функции переменных *x* и *y*:

$$u=u(x ; y), \quad v=v(x ; y) .$$

Тогда подынтегральное выражение в (2.14) примет вид

$$f(z) d z=(u+i v)(d x+i d y)=(u d x-v d y)+i(v d x+u d y) .$$

И интеграл от функции комплексного переменного можно вычислить по формуле

$$\int_C f(z) d z=\int_C(u(x ; y)+i v(x ; y))(d x+i d y)=$$

$$=\int_C(u(x ; y) d x-v(x ; y) d y)+i \int_C(v(x ; y) d x+u(x ; y) d y) . \tag{2.15}$$

Интеграл (2.15), вообще говоря, зависит от пути интегрирования *C*.

2.5. ТЕОРЕМА КОШИ

Множество точек *E* расширенной комплексной плоскости $C \cup\{\infty\}$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Область D называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством, в противном случае область D называется *многосвязной.*

Теорема Коши *(для односвязной области).* Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G, ограниченной замкнутым кусочно-гладким контуром *C*, а также в точках этого контура, то

$$\int_c f(z) d z=0 ,$$

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашей программы.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области G, то какова бы ни была дуга C внутри этой области, величина $\int_c f(z)dz$ зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки z дуги C, другими словами, в этом случае интеграл не зависит от пути интегрирования.

Доказательство. Если дуги C_1 и C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку z (рис. 2.4), то величина

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz \tag{2.17}$$

представляет собой интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру C, состоящему из дуги C_1 и дуги $\overline{C}_2$, геометрически совпадающий с дугой C_2, но противоположной ей по направлению (см. свойство 3 интеграла функции комплексного переменного). По теореме Коши такой интеграл равен нулю, следовательно, равна нулю разность (2.17), откуда

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz .$$

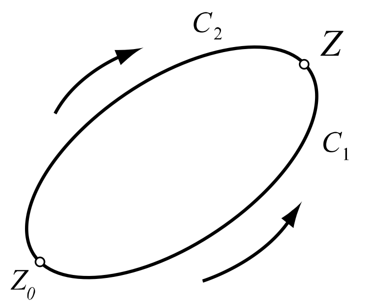

Рис. 2.4

Из доказательной теоремы следует, что рассматриваемый в ней интеграл зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки z и для него можно использовать обозначение

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz .$$

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области G, содержащей точки z_0 и z, причем z_0 постоянна, а z изменяется, то в этой области функция

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

является аналитической функцией и $F'(z)=f(z)$.

Сформулированная теорема, которая приведена без доказательства, позволяет ввести понятие неопределенного интеграла функции комплексного переменного.

Аналитическая функция $F(z)$ называется *первообразной* аналитической функции $f(z)$ в области G, если в этой области $F'(z)=f(z)$. Функцию $f(z)$ имеет бесконечное множество различных первообразных, но, как и в случае действительного переменного, они отличаются лишь постоянными слагаемыми.

Множество всех первообразных аналитической функции $f(z)$ в области G называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(z)dz$.

Можно показать, что, если $\Phi(z)$ – любая функция, для которой $\Phi'(z)=f(z)$ (т.е. $\Phi(z)$ – первообразная для функции $f(z)$), то справедлива формула

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)=\Phi(z)\Big|_{z_0}^{z}. \qquad (2.18)$$

Эта формула совпадает с известной из интегрального исчисления *формулой Ньютона – Лейбница*. Напомним, что формулой (2.18) можно пользоваться только для функций, аналитических в области G, внутри которой находятся точки z_0 и z. При этом можно пользоваться правилами и приемами интегрирования, рассматриваемыми в интегральном исчислении для функций действительного переменного.

Рассмотрим теперь многосвязную область G, ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, ..., C_n (рис. 2.5), и предположим, что функция $f(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$. Пусть

$\int\limits_{C_k} f(z)dz \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$ обозначает интеграл по контуру C_k, обходимому против часовой стрелки.

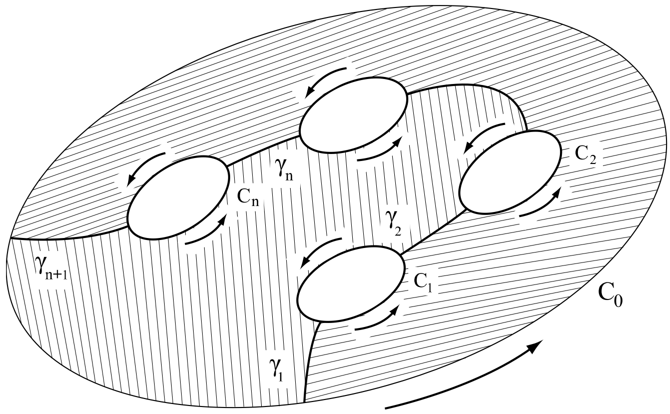

Рис. 2.5

Соединим контуры $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$ дугами $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}$, как показано на рис. 2.5. При этом область G окажется разбитой на две односвязные области. Контуры, ограничивающие эти односвязные области, обозначим соответственно Γ_1 и Γ_2. Так как функцию $f(z)$ является аналитической как на контурах Γ_1 и Γ_2, так и в областях, ограниченных каждым из этих контуров, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = 0; \quad \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = 0,$$

а следовательно, и

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = 0. \qquad (2.19)$$

Если на каждом из контуров Γ_1 и Γ_2 считать положительным то направление, при котором область, ограниченная этим контуром остается слева, то

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_{21}} f(z)dz = \int\limits_{C_0} f(z)dz - \int\limits_{C_1} f(z)dz - \int\limits_{C_2} f(z)dz - ... - \int\limits_{C_n} f(z)dz\ . \qquad (2.20)$$

При сложении интегралов в левой части (2.20) интегралы по дугам $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ уничтожаются ввиду того, что интегрирование по каждой из этих дуг будет производиться при вычислении суммы в левой части (2.20) два раза в противоположных направлениях.

Из (2.19) и (2.20) следует

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz. \qquad (2.21)$$

Равенство (2.21) называется *теоремой Коши для составного контура.*

В частности, если функция $f(z)$ является аналитической на контурах C_0 и C_1 (рис. 2.6) и в двусвязной области, ограниченной этими контурами, то из (2.21) при $n = 1$ получим

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz. \qquad (2.22)$$

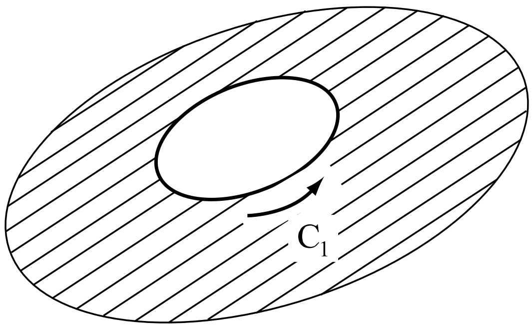

Рис. 2.6