Домашнее задание

Задача 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

1.1. $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$;

1.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

1.3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x^2+9)}$;

1.4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+5}}$;

1.5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$;

1.6. $\int_0^{+\infty} (2x+1)e^{-x/3}dx$;

1.7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\sqrt{x}+2x)}$;

1.8.; $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1.9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+27}$;

1.10. $\int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$;

1.11. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$;

1.12. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(x+1)^2}$;

1.13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+1}}$;

1.14. $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx$;

1.15. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$;

1.16. $\int_0^{+\infty} (x^2+1)e^{-x}dx$;

1.17. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{(\ln x+4)^5}}$;

1.18. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$;

1.19. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$;

1.20. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

1.21. $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$;

1.22. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$;

1.23. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$;

1.24. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{9+x^8}dx$;

1.25. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;

1.26. $\int_e^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$;

1.27. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+3)}$;

1.28. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

1.29. $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$;

1.30. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2+9)}$.

Задача 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

2.1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$;

2.2. $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+1)^3}}$;

2.3. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;

2.4. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$;

2.5. $\int_0^e x\ln x dx$;

2.6. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$;

2.7. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$;

2.8. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$;

2.9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

2.10. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}$;

2.11. $\int_0^1 \ln^2 x dx$;

2.12. $\int_{1/3}^{2} \frac{dx}{(2-x)\ln^2(2-x)}$

2.13. $\int_2^3 \frac{(2x+3)dx}{x^2+x-12}$;

2.14. $\int_0^{3/\pi} \cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^3}$;

2.15. $\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

2.16. $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{7x-x^2-10}}$;

2.17. $\int_{-1}^{1} \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$;

2.18. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;

2.19. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-1}$;

2.20. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2.21. $\int_0^1 \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

2.22. $\int_0^1 (x^2-x)\ln x dx$;

2.23. $\int_4^7 \sqrt{\frac{x-4}{7-x}}dx$;

2.24. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

2.25. $\int_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}dx$

2.26. $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{6x-x^2-8}}$;

2.27 $\int_{-1}^{e-2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[7]{\ln^5(x+2)}}$;

2.28. $\int_2^9 \sqrt{\frac{x-2}{9-x}}dx$;

2.29. $\int_0^e \sqrt{x}\ln^2 x dx$;

2.30. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

3.1. $\int_1^{+\infty} \frac{(4+\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^3+x+9}}$;

3.2. $\int_4^{+\infty} \frac{(3x+2)dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{\ln^5(x+6)}}$

3.3. $\int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$;

3.4. $\int_4^{+\infty} \frac{(3x^2+2)dx}{(x^3+4)\sqrt{\ln(x+6)}}$

3.5. $\int_1^{+\infty} \frac{7+2\cos(2x-1)}{\sqrt[7]{x^6+9x+1}}dx$

3.6. $\int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3+x^5}}$;

3.7. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x+5}}$;

3.8. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[5]{4+x^7}}dx$;

3.9. $\int_1^{+\infty} \frac{(3+2\cos x)dx}{\sqrt{x^2+3x+\sqrt[4]{x}}}$.;

3.10. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^7+9}}dx$;

3.11. $\int_1^{+\infty} \frac{(1+5\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^6+9x+1}}$;

3.12. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^2}}{x^3+4x+8}dx$

3.13. $\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}dx$;

3.14. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2-3x+7}}dx$;

3.15. $\int_2^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{(x-\cos(1/x))^5}dx$;

3.16. $\int_1^{\infty} \arcsin\frac{x}{x^2+x+1}dx$

3.17. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x+4)}$;

3.18. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+2x+5}}dx$;

3.19. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x^3}(1-\cos\frac{1}{x^3})dx$

3.20. $\int_4^{+\infty} \frac{(x^2+5x)dx}{(x^3+5)\sqrt[5]{\ln(x+6)}}$;

3.21. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x\sqrt[7]{x^6+9x+1}}$;

3.22. $\int_{2/\sqrt{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$;

3.23. $\int_2^{+\infty} \frac{(x+5)dx}{(x^2+1)\ln(x+3)}$;

3.24. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5+2x^3+3}}dx$;

3.25. $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin x)dx}{\sqrt[5]{x^3+5x+2}}$;

3.26. $\int_1^{+\infty} \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^5+7x+5}}$;

3.27. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}(1-\cos\frac{1}{x^2})dx$

3.28. $\int_1^{+\infty} \frac{(4+\cos x)dx}{\sqrt[7]{x^8+3x+1}}$;

3.29. $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin^2 x)dx}{\sqrt[3]{x^2+x+\sqrt[3]{x}}}$;

3.30. $\int_4^{+\infty} \frac{(3x^2+2)dx}{(x^3+4)\sqrt{\ln(x+6)}}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

4.1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;

4.2. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+x+3\sin x}}$;

4.3. $\int_0^1 \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$;

4.4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$;

4.5. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^2+x\sqrt[3]{x}}dx$;

4.6. $\int_0^1 \frac{dx}{1-e^{-6x}}$;

4.7. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

4.8. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(7-x)}}$;

4.9. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$;

4.10. $\int_0^1 \frac{dx}{x(1-\cos x)}$;

4.11. $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$;

4.12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}$;

4.13. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^{2x}-1}dx$;

4.14. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;

4.15. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-\sin x}}$;

4.16. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\operatorname{tg}\sqrt{\pi x}}$;

4.17. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{(1-x)^5}}\,dx$;

4.18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{e-e^{\sqrt{\cos x}}}$;

4.19. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x\sqrt{x}}\,dx$;

4.20. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+\sin x}}$;

4.21. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x(2x^3+\sqrt{x^2+x})}}$

4.22. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}-\cos \pi x}$;

4.23. $\int_0^e \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{(1+x^4)^3}-1}\,dx$;

4.24. $\int_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx$;

4.25. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,dx$;

4.26. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{e^{x^2}-1}}$;

4.27. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^2+x\sqrt[3]{x}}\,dx$;

4.28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$;

4.29. $\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$;

4.30. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}\arcsin x}\,dx$.

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

5.1. $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0$;

5.2. $y=x^2-4,\ y=x+2$;

5.3. $y=-\sqrt{x},\ y=x^2,\ x=4$;

5.4. $y=x^3,\ x+y=2,\ x=0$;

5.5. $y=\sqrt[3]{x-1},\ x+y=1,\ x=0$;

5.6. $y=\sqrt{x+1},\ y=\sqrt{2x},\ y=0$;

5.7. $y=6-x^2,\ y=-x$;

5.8. $y=e^{2x},\ x=\ln 2,\ x=0,\ y=0$;

5.9. $yx=3,\ x+y=4$;

5.10. $y=x^2-2x,\ y=x$;

5.11. $yx=1,\ y=x,\ x=4$;

5.12. $y=\cos x,\ y=4\cos x,\ (0\le x\le \frac{\pi}{2})$;

5.13. $y=-\sqrt[3]{x},\ x+y=6,\ x=0$;

5.14. $y=2^x,\ y=2^{-x},\ x=-1,\ x=2,\ y=0$;

5.15. $y=-4x-x^2,\ y=x$;

5.16. $y=\sqrt{x+4},\ x+y=2,\ y=0$;

5.17. $y=-2,\ y=3,\ x=\frac{y^2}{2},\ x=0$;

5.18. $y=(x+2)^2,\ y=4-x,\ y=0$;

5.19. $yx=1,\ y=x,\ x=4,\ y=0$;

5.20. $y=\sin x,\ y=5\sin x,\ (0\le x\le \pi)$;

5.21. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$;

5.22. $y=x^2-6x+10,\ y=6x-x^2$;

5.23. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=9$;

5.24. $yx=1,\ y=x,\ y=6$;

5.25. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$;

5.26. $y=\frac{16}{x^2}$, $y=17-x^2$;

5.27. $x=3-y^2+2y$, $x=y^2-4y+3$, ;

5.28. $y=\cos\frac{x}{2}$, $y=\sin\frac{x}{2}$, $x=0$ $(x\geq 0)$;

5.29. $y^2=4+x$, $x+3y=0$;

5.30. $y=-\cos x$, $(0\leq x\leq \pi)$.

Задача 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

6.1. $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=1$ $(x\geq 1)$;

6.2. $y=xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой ;

6.3. $y^2=2x$, $y^2=4x-x^2$ $(y^2\leq 2x)$;

6.4. $y=\frac{1}{x^2-6x+13}$, $y=0$;

6.5. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 4$;

6.6. $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$, $y=0$, $x=1(x\geq 1)$;

6.7. $y=x\operatorname{arctg} x$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$;

6.8. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=e^3$, $x=e^{-1}$;

6.9. $x^2+y^2=2$, $x=y^2$, $(x\leq y^2)$;

6.10. $y=x^2e^{-2x}$, $y=0$, $x\geq 0$;

6.11. $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$;

6.12. $y=\frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}$, $y=0$, $x=4$, $x=2$;

6.13. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$ $(0\leq x\leq 3)$;

6.14. $y=\left|\lg x\right|$, $x=0$, $y=0$;

6.15. $y=x^2\cos x$, $y=0$, $(0\leq x\leq \frac{\pi}{2})$;

6.16. $y=\frac{x}{(x^2+1)^2}$, $y=0$;

6.17. $y=e^{2x}$, $y=\log_2 x$, $x=1$, $x=2$;

6.18. $y=\frac{1}{x^2+4x+5}$, $y=0$;

6.19. $y^2=x^3-x^2$, $x=2$;

6.20. $y=\arcsin(x-2)$, $y=\frac{\pi x}{6}$, $x=1$, $x=3$;

6.21. $x^2+y^2=10y$, $y=2x-5$;

6.22. $y=\ln x$, $x=0$, $y=0$;

6.23. $y^2+x^2=8$, $y^2=2x$ $(y^2\leq 2x)$;

6.24. $y=x^2\operatorname{arctg} x$, $y=0$ $x=1$;

6.25. $y^2+x^2=5$, $yx=2$ $(yx\geq 2)$;

6.26. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$;

6.27. $y=\arcsin(x-2)$, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$;

6.28. $y=\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$, $y=0$ $(x\ge 0)$;

6.29. $y^2+x^2=8$, $y^2=2x$ $(y^2\ge 2x)$;

6.30. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{4+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^{-1}$.

Задача 7. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

7.1. $y=(x-2)^3, y=4x-8.$

7.2. $y=x\sqrt{9-x^2}, \quad y=0, (0\le x\le 3).$

7.3. $y=4-x^2, y=x^2-2x.$

7.4. $y=\sin x\cos^2 x, \quad y=0, (0\le x\le \pi/2).$

7.5. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad y=0, x=0, \quad x=1.$

7.6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, \quad y=0, (0\le x\le 2).$

7.7. $y=\cos x\sin^2 x, \quad y=0, (0\le x\le \pi/2).$

7.8. $y=\sqrt{e^x-1}, \quad y=0, x=\ln 2.$

7.9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, \quad y=0, x=1, \quad x=e^3.$

7.10. $y=\arccos x, \quad y=0, x=0.$

7.11. $y=(x+1)^2, y^2=x+1.$

7.12. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3.$

7.13. $y=x\sqrt{36-x^2}, \quad y=0, (0\le x\le 6).$

7.14. $x=\arccos y, \quad x=0, y=0.$

7.15. $y=\operatorname{arctg} x, \quad y=0, x=\sqrt{3}.$

7.16. $y=x^2\sqrt{8-x^2}, \quad y=0, \left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right).$

7.17. $x=\sqrt{e^y-1}, \quad x=0, y=\ln 2.$

7.18. $y=x\sqrt{4-x^2}, \quad y=0, (0\le x\le 2).$

7.19. $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, \quad y=0, x=1.$

7. 20. $y=\dfrac{1}{1+\cos x}, \quad y=0, x=\pi/2, \quad x=-\pi/2.$

7.21. $x=\left(y-2\right)^3, x=4y-8.$

7.22. $y=\cos^5 x\sin 2x, \quad y=0, \left(0\le x\le \pi/2\right).$

7.23. $y=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad y=0, x=1.$

7.24. $x=4-y^2, x=y^2-2y.$

7.25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, \quad x=0, y=1, \quad y=\mathrm{e}^3.$

7.26. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}, \quad y=0, x=2, \quad x=1.$

7.27. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, \quad y=0, \left(0\le x\le 4\right).$

7.28. $x=\sqrt{4-y^2}, \quad y=0, x=0, \quad y=1.$

7.29. $y=\left(x-1\right)^2, y^2=x-1.$

7.30. $y=x^2\cos x, \quad y=0, \left(0\le x\le \pi/2\right).$

Задача 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

8.1. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases} \quad x=2\ (x\ge 2);$

8.2. одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$ и осью OX ;

8.3. $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases} \quad y=\sqrt{3}\ (y\ge\sqrt{3});$

8.4. $\begin{cases} x=2+3\cos t, \\ y=3+2\sin t, \end{cases} \quad y=4\ (y\ge 4)$

8.5. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases} \quad y=1\ (0\le x\le 2\pi, y\ge 1);$

8.6. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases} \quad y=2\ (0\le x\le 4\pi, y\ge 2);$

8.7. $\begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=32\sin^3 t, \end{cases} \quad y=4\ (y\ge 4);$

8.8. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \quad y=5\ (y\ge 5);$

8.9. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases} \quad y=7{,}5\ (0\le x\le 10\pi, y\ge 7{,}5);$

8.10. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2)$;

8.11. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 16\sin^3 t, \end{cases}$ $y = 6\sqrt{3}\ (y \geq 6\sqrt{3})$;

8.12. петлей $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$;

8.13. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4\ (y \geq 4)$;

8.14. кардиоидой $\begin{cases} x = \cos t - \cos 2t, \\ y = \sin t - \sin 2t \end{cases}$;

8.15. петлей $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \end{cases}$ $0 \leq t < +\infty$;

8.16. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2)$;

8.17. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \geq 2)$;

8.18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15\ (0 \leq x \leq 20\pi, y \geq 15)$;

8.19. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}\ (x \geq 9\sqrt{3})$;

8.20. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ (0 \leq x \leq 4\pi, y \geq 3)$;

8.21. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}\ (y \geq \sqrt{3})$;

8.22. петлей $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$;

8.23. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ (x \geq 1)$;

8.24. кардиоидой $\begin{cases} x = 3\cos t - 3\cos 2t, \\ y = 3\sin t - 3\sin 2t \end{cases}$;

8.25. петлей $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases}$ $0 \leq t < +\infty$;

8.26. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\ (x \geq 4)$;

8.27. кардиоидой $\begin{cases} x = 5(\cos t - \cos 2t), \\ y = 5(\sin t - \sin 2t) \end{cases}$;;

8.28. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 24\sin^3 t, \end{cases}$ $y = 3\ (y \geq 3)$;

8.29. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6\ (0 \leq x \leq 12\pi, y \geq 6)$;

8.30. петлей $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Задача 9. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

9.1. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ \ (y \geq 2).$

9.2. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ \ (x \geq 2).$

9.3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4\ \ (0 < x < 8\pi,\ \ y \geq 4).$

9.4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ \ (x \geq 2).$

9.5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ \ (y \geq 3).$

9.6. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}\ \ (x \geq 6\sqrt{3}).$

9.7. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ \ (0 < x < 4\pi,\ \ y \geq 3).$

9.8. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ \ (0 < x < 6\pi,\ \ y \geq 3).$

9.9. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}\ \ (y \geq \sqrt{3}).$

9.10. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3 \quad (y \geq 3).$

9.11. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 \quad (x \geq 4).$

9.12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \ \ y \geq 9).$

9.13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 \quad (x \geq 4).$

9.14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4 \quad (y \geq 4).$

9.15. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$

9.16. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \ \ y \geq 6).$

9.17. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \ \ y \geq 15).$

9.18. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}).$

9.19. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4 \quad (y \geq 4).$

9.20. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1 \quad (x \geq 1).$

9.21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \ \ y \geq 1).$

9.22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1 \quad (x \geq 1).$

9.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2 \quad (y \geq 2).$

9.24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, \ \ y \geq 12).$

9.25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}).$

9.26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases} y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}).$

9.27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \ \ y \geq 2).$

9.28. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases} y = 5 \quad (y \geq 5).$

9.29. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} x = 2 \quad (x \geq 2).$

9.30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \ \ y \geq 6).$

Задача 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

10.1. $r = 2\sin 3\varphi$;

10.2. $r = 2\cos\varphi, r = 4\cos\varphi$;

10.3. $r = 2(2 + \cos\varphi)$;

10.4. $r = 2\varphi$ (первый виток спирали Архимеда) ;

10.5. $r = 4(1 + \sin\varphi)$;

10.6. $r = 2(\cos\varphi - \sin\varphi)$;

10.7. $r = 6(1 - \cos\varphi)$;

10.8. $r = 5\cos 2\varphi$ (одним лепестком) ;

10.9. $r = 3(1 - \cos\varphi), r = 3$;

10.10. $r = 2\sin\varphi, r = 2\sqrt{3}\cos\varphi$;

10.11. $r = 2\sin 5\varphi$;

10.12. $r = \cos^3\varphi$;

10.13. $r = 2(1 - \cos\varphi), r = 2\cos\varphi$;

10.14. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$;

10.15. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$;

10.16. $r = 3\sin\varphi, r = 5\sin\varphi$;

10.17. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$;

10.18. $r = 4\cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$;

10.19. $r = 2(1 - \cos\varphi), r = 2$;

10.20. $r = 3(1+\sin\varphi)$;
10.21. $r = 6\sin 3\varphi, r = 3(r \ge 3)$;
10.22. $r = 7(1+\cos\varphi)$;
10.23. $r = 4\sin\varphi, r = 6\sin\varphi$;
10.24. $r = 6\cos 6\varphi$;
10.25. $r = 6\varphi$ (первый виток спирали Архимеда);
10.26. $r = 3(\cos\varphi - \sin\varphi)$;
10.27. $r = 4\sin 3\varphi, r = 2(r \ge 2)$;
10.28. $r = \cos\varphi + 1/2$;
10.29. $r = 2\cos\varphi, r = 2\sqrt{3}\sin\varphi (0 \le \varphi \le \pi/2)$;
10.30. $r = \cos\varphi, r = 2\cos\varphi$.

Задача 11. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

11.1. $r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \ge 2)$.
11.2. $r = \cos 2\varphi$.
11.3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad r = \sin\varphi, (0 \le \varphi \le \pi/2)$.
11.4. $r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \ge 2)$.
11.5. $r = 2\cos\varphi, \quad r = 2\sqrt{3}\sin\varphi, (0 \le \varphi \le \pi/2)$.
11.6. $r = \sin 3\varphi$.
11.7. $r = 6\sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \ge 3)$.
11.8. $r = \cos\varphi, r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4), (-\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$.
11.9. $r = \cos 3\varphi$.
11.10. $r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \ge 3)$.
11.11. $r = \sin\varphi, r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4), (0 \le \varphi \le 3\pi/4)$.
11.12. $r = \cos\varphi, \quad r = \sin\varphi, (0 \le \varphi \le \pi/2)$.
11.13. $r = 1/2 + \sin\varphi$.
11.14. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4), r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4), (\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4)$.
11.15. $r = \cos\varphi, \quad r = 2\cos\varphi$.
11.16. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$.
11.17. $r = \sin\varphi, \quad r = 2\sin\varphi$.
11.18. $r = 1/2 + \cos\varphi$.
11.19. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$.
11.20. $r = (5/2)\sin\varphi, \quad r = (3/2)\sin\varphi$.

11.21. $r = 4\cos 4\varphi.$

11.22. $r = (3/2)\cos\varphi, \quad r = (5/2)\cos\varphi.$

11.23. $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$

11.24. $r = \cos\varphi - \sin\varphi.$

11.25. $r = \sin 6\varphi.$

11.26. $r = 2\sin 4\varphi.$

11.27. $r = 2\cos 6\varphi.$

11.28. $r = 2\cos\varphi, \quad r = 3\cos\varphi.$

11.29. $r = 3\sin\varphi, \quad r = 5\sin\varphi.$

11.30. $r = 2\sin\varphi, \quad r = 4\sin\varphi.$

Задача 12. Вычислить длину дуги кривой

12.1. $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le 3/4;$

12.2. $y = 2 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6;$

12.3. $y = \ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8};$

12.4. $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1;$

12.5. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ 1/4 \le x \le 1;$

12.6. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2;$

12.7. $y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24};$

12.8. $y^2 = x^3$ от начала координат до точки B(4;8).;

12.9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le 7/9;$

12.10. $y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le 2\pi/3;$

12.11. $y = 2x - x^2$ от вершины до точки B(2;0);

12.12. $y = \ln x,\ \sqrt{8} \le x \le \sqrt{15};$

12.13. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1/4;$

12.14. $y = 2\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{2},\ 0 \le x \le 3;$

12.15. $y = 5\ln(x^2 - 25),\ 10 \le x \le 15;$

12.16. $y = \arcsin e^{-x},\ 0 \le x \le 1;$

12.17. $y^2 = (x-2)^3,\ 2 \le x \le 3;$

12.18. $y = \sqrt{25 - x^2} - 5\arccos\dfrac{x}{5},\ -1 \le x \le 4;$

12.19. $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 6;$

12.20. $y = x^2/2 - 4x + 15/2,\ 3 \le x \le 5;$

12.21. $y = \ln\dfrac{e}{\cos x},\ 0 \le x \le \pi/6;$

12.22. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x} - 9,\ 1/16 \le x \le 1;$

12.23. $y = \mathrm{ch}\,x + 15,\ 0 \le x \le 2;$

12.24. $y = 8 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6;$

12.25. $y = \ln\frac{7}{x},\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8};$

12.26. $y = 3 + \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x},\ 0 \le x \le 9/16;$

12.27. $y^2 = 16x$, отсеченной прямой $x = 4;$

12.28. $y = \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + 1,\ 0 \le x \le 2;$

12.29. $y = 9 - \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2;$

12.30. $y = 5 + \sqrt{100 - x^2} + 10\arccos(x/10),\ -1 \le x \le 6$

Задача 13. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

13.1. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\quad 0 \le x \le 8/9.$

13.2. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,\quad 0 \le x \le 2.$

13.3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\quad 0 \le x \le 7/9.$

13.4. $y = \ln\frac{5}{2x},\quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

13.5. $y = -\ln\cos x,\quad 0 \le x \le \pi/6.$

13.6. $y = e^x + 6,\quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

13.7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\quad 1/4 \le x \le 1.$

13.8. $y = \ln\left(x^2 - 1\right),\quad 2 \le x \le 3.$

13.9. $y = \ln x,\quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

13.10. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},\quad 0 \le x \le 15/16.$

13.11. $y = 2 + \operatorname{ch} x,\quad 0 \le x \le 1.$

13.12. $y = e^x + 13,\quad \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

13.13. $y = 1 - \ln\cos x,\quad 0 \le x \le \pi/6.$

13.14. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\quad 0 \le x \le 1/4.$

13.15. $y = 2 - e^x,\quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

13.16. $y = \ln\left(1 - x^2\right),\quad 0 \le x \le 1/4.$

13.17. $y = 1 - \ln\sin x,\quad \pi/3 \le x \le \pi/2.$

13.18. $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right),\quad 3 \le x \le 4.$

13.19. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5,\quad 1/9 \le x \le 1.$

13.20. $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \le x \le 9/16.$

13.21. $y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \le x \le 1.$

13.22. $y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

13.23. $y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2.$

13.24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 3/4.$

13.25. $y = \mathrm{e}^x + 26, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

13.26. $y = \ln\cos x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

13.27. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}, \quad 1 \le x \le 2.$

13.28. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, \quad 0 \le x \le 1/2.$

13.29. $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}; 0 \le x \le 2$

13.30. $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

.

Задача 14. Вычислить длину дуги кривой

14.1. $x = 2\cos^2 t; \ y = 2\sin^2 t; \ 0 \le t \le \pi/4;$

14.2. $x = t^2, \ y = t - t^3/3, -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3};$

14.3. $x = 2\cos^3 t; \ y = 2\sin^3 t; \ 0 \le t \le \pi/4;$

14.4. $x = \cos t + t\sin t; \ y = \sin t - t\cos t; \ 0 \le t \le \pi;$

14.5. $x = 4(t - \sin t), \ y = 4(1 - \cos t), 0 \le t \le \pi/2;$

14.6. $x = e^t(\cos t + \sin t) \ \ y = e^t(\cos t - \sin t), \ \ \pi/2 \le t \le \pi;$

14.7. $x = t^6/6, \ y = 2 - t^4/4$ между точками пересечения с осями координат;

14.8. $x = e^t\cos t \ \ y = e^t\sin t, \ \ 0 \le t \le 1;$

14.9. $x = 7(2\cos t - \cos 2t); \ y = 7(2\sin t - \sin 2t); \ 0 \le t \le \pi/2;$

14.10. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, 0 \le t \le \pi;$

14.11. $x = \cos^5 t; \ y = \sin^5 t; \ 0 \le t \le \pi/2;$

14.12. $x = 8(\cos t + t\sin t); y = 8(\sin t - t\cos t), \ 0 \le t \le \pi/4;$

14.13. $x = 9e^t(\cos t + \sin t) \ \ y = 9e^t(\cos t - \sin t), \ \ 0 \le t \le 3\pi/2;$

14.14. $x = 3(t - \sin t), \ y = 3(1 - \cos t), \ \ \pi \le t \le 2\pi;$

14.15. $x = e^{2t}\cos t \ \ y = e^{2t}\sin t, \ \ 0 \le t \le \pi/4;$

14.16. $x = 3\sin t + 4\cos t; y = 4\sin t - 3\cos t, \ \ \pi/4 \le t \le 3\pi/2;$

14.17. $x = 5\cos^3 t; \ y = 5\sin^3 t; \ 0 \le t \le \pi/2;$

14.18. $x = 3(\cos t + t\sin t); y = 3(\sin t - t\cos t), \ 0 \le t \le \pi/3;$

14.19. $x = 2t^6, \ y = 24 - 3t^4$ между точками пересечения с осями координат;

14.20. $x = 4e^t(\cos t + \sin t) \ \ y = 4e^t(\cos t - \sin t), \ \ \pi/2 \le t \le \pi;$

14.21. $x = 2\cos^3 t; \ y = 2\sin^3 t; \ \pi/6 \le t \le \pi/4;$

14.22. $x = 7(t - \sin t), \ y = 7(1 - \cos t), \ 0 \le t \le \pi/2;$

14.23. $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3\ , 0 \le t \le 2$;

14.24. $x = (2t^2 - 4)\sin t + 4t\cos t,\ y = (4 - 2t^2)\cos t + 4t\sin t, 0 \le t \le \pi/3$;

14.25. $x = 5(t - \sin t),\ y = 5(1 - \cos t),\ \pi/2 \le t \le \pi$;

14.26. $x = 6\cos^5 t;\ y = 6\sin^5 t;\ 0 \le t \le \pi/2$;

14.27. $x = 9(\cos t + t\sin t); y = 9(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi/3$;

14.28. $x = 3\cos^2 t;\ y = 3\sin^2 t;\ 0 \le t \le \pi/4$;

14.29. $x = 9\cos^3 t;\ y = 9\sin^3 t;\ 0 \le t \le \pi/6$;

14.30 $x = 2t^2,\ y = 2t - 2t^3/3\ , 0 \le t \le \sqrt{6}$.

Задача 15. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

15.1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

15.2. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

15.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

15.4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

15.5. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t(\cos t + \sin t), \\ y = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

15.6. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

15.7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \le t \le 2\pi.$

15.8. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

15.9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi/3.$

15.10. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/3.$

15.11. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/3.$

15.12. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases} \pi/2 \le t \le \pi.$

15.13. $\begin{cases} x = 2{,}5\left(t - \sin t\right), \\ y = 2{,}5\left(1 - \cos t\right), \end{cases} \pi/2 \le t \le \pi.$

15.14. $\begin{cases} x = 3{,}5\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = 3{,}5\left(2\sin t - \sin 2t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

15.15. $\begin{cases} x = 6\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = 6\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

15.16. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

15.17. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

15.18. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/6.$

15.19. $\begin{cases} x = 4\left(t - \sin t\right), \\ y = 4\left(1 - \cos t\right), \end{cases} \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

15.20. $\begin{cases} x = 2\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = 2\left(2\sin t - \sin 2t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi/3.$

15.21. $\begin{cases} x = 8\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = 8\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi/4.$

15.22. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

15.23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \pi/6 \le t \le \pi/4.$

15.24. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases} 0 \le t \le 3\pi/2.$

15.25. $\begin{cases} x = 4\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = 4\left(2\sin t - \sin 2t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

15.26. $\begin{cases} x = 2\left(t - \sin t\right), \\ y = 2\left(1 - \cos t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

15.27. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/4.$

15.28. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le 3\pi.$

15.29. $\begin{cases} x = 2\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = 2\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

15.30. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases} \pi/6 \le t \le \pi/4.$

Задача 16. Вычислить длину дуги кривой

16.1. $r = e^{4\varphi/3},\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2;$

16.2. $r = 2\sin^3(\varphi/3),\ 0 \le \varphi \le \pi/2;$

16.3. $r = 2(1+\cos\varphi);$

16.4. $r = 1-\sin\varphi, -\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6;$

16.5. $r = 1/\varphi, 3/4 \le \varphi \le 4/3;$

16.6. $r = 4(1-\cos\varphi),\ -2\pi/3 \le \varphi \le 0;$

16.7. $r = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4;$

16.8. $r = 5\varphi,$ находящейся внутри окружности $r = 10\pi;$

16.9. $r = 3\sin^4\dfrac{\varphi}{4};$

16.10. $r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi/2;$

16.11. $r = \sqrt{2}e^{\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi/2;$

16.12. $r = 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 3/4;$

16.13. $r = 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/12;$

16.14. $r = 3\sin^3(\varphi/3);$

16.15. $r = 2(1-\cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2$;
16.16. $r = 5e^{5\varphi/12},\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$;
16.17. $r = 6(1+\sin\varphi), -\pi/2 \le \varphi \le 0$;
16.18. $r = 2e^{\varphi}$, находящейся внутри окружности $r = 2$;
16.19. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$;
16.20. $r = 3,5(1-\cos\varphi)$;
16.21. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3$;
16.22. $r = 3(1+\sin\varphi), -\pi/6 \le \varphi \le 0$;
16.23. $r = 5e^{6\varphi}$, находящейся внутри окружности $r = 5$;
16.24. $r = 4e^{12\varphi/5},\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$;
16.25. $r = 7\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4$;
16.26. $r = 5\varphi,\ 0 \le \varphi \le 12/5$;
16.27. $r = 5(1-\cos\varphi),\ -2\pi/3 \le \varphi \le 0$;
16.28. $r = 2\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 2\pi$;
16.29. $r = 5e^{4\varphi/3},\ 0 \le \varphi \le \pi/3$;
16.30. $r = 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3$.

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

17.1. $r = 2\left(1-\cos\varphi\right),\quad -\pi \le \varphi \le -\pi/2.$
17.2. $r = 4\mathrm{e}^{4\varphi/3},\quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$
17.3. $r = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\varphi},\quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$
17.4. $r = 5\mathrm{e}^{5\varphi/12},\quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$
17.5. $r = 6\mathrm{e}^{12\varphi/5},\quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$
17.6. $r = 3\mathrm{e}^{3\varphi/4},\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
17.7. $r = 4\mathrm{e}^{4\varphi/3},\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
17.8. $r = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\varphi},\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
17.9. $r = 5\mathrm{e}^{5\varphi/12},\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
17.10. $r = 12\mathrm{e}^{12\varphi/5},\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
17.11. $r = 1-\sin\varphi,\quad -\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6.$
17.12. $r = 3\mathrm{e}^{3\varphi/4},\quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$
17.13. $r = 4\varphi,\quad 0 \le \varphi \le 3/4.$
17.14. $r = 4\left(1-\sin\varphi\right),\quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$
17.15. $r = 2\varphi,\quad 0 \le \varphi \le 5/12.$
17.16. $r = 6\left(1+\sin\varphi\right),\quad -\pi/2 \le \varphi \le 0.$
17.17. $r = 3\varphi,\quad 0 \le \varphi \le 4/3.$

17.18. $r = 8(1-\cos\varphi), \quad -2\pi/3 \le \varphi \le 0.$

17.19. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 3/4.$

17.20. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 4/3.$

17.21. $r = 5(1-\cos\varphi), \quad -\pi/3 \le \varphi \le 0.$

17.22. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 12/5.$

17.23. $r = 3(1+\sin\varphi), \quad -\pi/6 \le \varphi \le 0.$

17.24. $r = 7(1-\sin\varphi), \quad -\pi/6 \le \varphi \le \pi/6.$

17.25. $r = 5\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 12/5.$

17.26. $r = 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$

17.27. $r = 8\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4.$

17.28. $r = 6\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

17.29. $r = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$

17.30. $r = 8\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4.$

Задача 18. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси OX

18.1. $y = 2\sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$;

18.2. $y = 2 - x^2, y = x,\ x = 0$;

18.3. $y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0$;

18.4. $y = x^2 + 1\ \ y = x,\ x = 0,\ x = 1$;

18.5. $y = \sqrt{x},\ xy = 1,\ y = 0,\ x = 2$;

18.6. $y = x^2, xy = 1, y = 4$;

18.7. $x^2 - y^2 = 3,\ y = x/2,\ y = 0$;

18.8. $y = x^3,\ y = 0,\ x + y = 2$;

18.9. $xy = 6,\ x + y = 5$;

18.10. $y = 2x - x^2,\ y = x$;

18.11. $y = \ln x, y = 0, x = 2$;

18.12. $y^2 = 6x, y = \sqrt{6}x^2$;

18.13. $3x - y = 0, 3x - 4y = 0,\ y = 3$;

18.14. $y = xe^x,\ x = 1, y = 0$;

18.15. $y = x^2/2,\ 2y + 2x = 3$;

18.16. $y = \arcsin x,\ y = 0, x = 1$;

18.17. $y = e^x - 1,\ y = 2, x = 0$;

18.18. $y = x^3,\ x = 0,\ x + y = 2$;

18.19. $y = 2x - x^2,\ y = 2 - x$;

18.20. $y = \dfrac{2}{1+x^2},\ y = 0, x = 0, x = 1$;

18.21. $y = \sqrt{x},\ x + y = 6,\ y = x + 4,\ x = 0$;

18.22. $(x-3)^2+(y-4)^2=1$;

18.23. $y=\sin^2 x,\ y=0, (0\le x\le\pi)$;

18.24. $y=3-x^2,\ y=x^2+1$;

18.25. $y=2^x, 3x-4y+5=0$;

18.26. $y=\log_2 x,\ y=0,\ x=4$;

18.27. $y^2=x-4,\ y=0,\ y=(x-2)^3,\ y=1$;

18.28. $y=7-x^2+2x,\ y=x^2-2x+1$;

18.29. $(x+2)^2+(y-6)^2=25$;

18.30. $y=\cos^2 x,\ y=3\cos^2 x, (-\pi/2\le x\le\pi/2)$.

Задача19. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси OY

19.1. $xy=4,\quad y=1,\quad y=2,\ x=0$;

19.2. $y^2=x-2,\ y=0,\ y=x^3,\ y=1$;

19.3. $y=x^2-4x+2$ и $y=-x^2+8x+2$;

19.4. $y=1-x^2, x=0, x=\sqrt{y-2},\ x=1$;

19.5. $y=2x-x^2,\ y=2-x$;

19.6. $yx=6,\ y=0, x=1, x=4$;

19.7. $y^2=16-x, x=0$;

19.8. $y=e^{-x},\ y=0, x=0\ (x\ge 0)$;

19.9. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\ y=-3, y=3$;

19.10. $y=\ln x,\ y=0, y=2, x=0$;

19.11. $y=\frac{8}{x^2+4},\ y=\frac{x^2}{4}$;

19.12. $y=4x^2,\ y=8x^2, y=2$;

19.13. $y=4x-x^2,\ y=-2x$;

19.14. $(x-2)^2+y^2=1$;

19.15. $y^2=4x,\ x=1$;

19.16. $y=\sin x,\ y=0, (0\le x\le\pi)$;

19.17. $x=\sqrt[3]{y-2},\ y=1, x=1$;

19.18. $y=x,\ y=3x, x=3$;

19.19. $y=\sqrt{x-2},\ x+y=8, 4x+y=8$;

19.20. $y=\arccos x,\ y=0, x=0$;

19.21. $y=\log_2 x,\ x+y=6\ x=1$;

19.22. $y=|x-2|,\ x-3y+6=0$;

19.23 $yx=2,\ y=2x, y=x/2$.;

19.24. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1,\ x=4$;

19.25. $y=2x,\ y=5x, y=10$;

19.26. $y=\operatorname{arctg} x,\ y=0, x=1$;

19.27. $y=\ln x,\ y=4\ln x, x=e^3$;

19.28. $y=\sin x,\ y=6\sin x, (0\le x\le\pi)$;

19.29. $x=\sqrt{y},\ 5x-y-4=0,\ x=0$;

19.30. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

Задача 20. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox, в вариантах 17–30 ось вращения Oy.

20.1. $y=-x^2+5x-6,\quad y=0.$

20.2. $2x-x^2-y=0,\ \ 2x^2-4x+y=0.$

20.3. $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi.$

20.4. $y=5\cos x,\ \ y=\cos x,\ \ x=0,\ \ x\ge 0.$

20.5. $y=\sin^2 x,\ \ x=\pi/2,\quad y=0.$

20.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ \ x=1,\quad y=1.$

20.7. $y=x\mathrm{e}^x,\quad y=0,\quad x=1.$

20.8. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2,\quad x=0.$

20.9. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2.$

20.10. $y=\mathrm{e}^{1-x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1.$

20.11. $y=x^2,\quad y^2-x=0.$

20.12. $x^2+\left(y-2\right)^2=1.$

20.13. $y=1-x^2,\quad x=0,\quad x=\sqrt{y-1},\quad x=1.$

20.14. $y=x^2,\quad y=1,\quad x=2.$

20.15. $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$

20.16. $y=\sin\left(\pi x/2\right),\quad y=x^2.$

20.17. $y=\arccos\left(x/3\right),\quad y=\arccos x,\quad y=0.$

20.18. $y=\arcsin\left(x/5\right),\quad y=\arcsin x,\quad y=\pi/2.$

20.19. $y=x^2,\quad x=2,\quad y=0.$

20.20. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1$

20.21. $y=\sqrt{x-1},\quad y=0,\quad y=1,\quad x=0{,}5.$

20.22. $y=\ln x,\quad x=2,\quad y=0.$

20.23. $y=\left(x-1\right)^2,\quad y=1.$

20.24. $y^2=x-2,\quad y=0,\quad y=x^3,\quad y=1.$

20.25. $y=x^3,\quad y=x^2.$

20.26. $y = \arccos(x/5), \quad y = \arccos(x/3), \quad y = 0.$

20.27. $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$

20.28. $y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$

20.29. $y = x^3, \quad y = x.$

20.30. $y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad x = 0.$