# Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

## § 1. Первоначальная обработка одномерной выборки. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

В математической статистике изучаются методы систематизации и обработки экспериментальных данных с целью извлечения из них информации о случайных величинах, нахождения оценок неизвестных параметров и проверки гипотез.

Пусть при неизменных условиях проводится $n$ независимых опытов, в каждом из которых наблюдается некоторая случайная величина $\xi$ с функцией распределения $F(x)$. Тогда результат этих наблюдений описывается $n$-мерным случайным вектором $(X_1, X_2, ..., X_n)$, где случайные величины $X_i$ независимы и каждая из них распределена так же, как случайная величина $\xi$. Этот случайный вектор, а также его реализацию, т.е. набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ значений $X_i = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, полученных в результате наблюдений, называют *выборкой* объема $n$.

Закон распределения случайной величины $\xi$ иногда называют распределением генеральной совокупности, а про выборку говорят, что она взята из генеральной совокупности случайной величины $\xi$.

Элементы выборки, расположенные в порядке возрастания, образуют *вариационный ряд*. Если выборка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ содержит $k$ различных элементов $z_1, z_2, ..., z_k$, причем элемент $z_i$ встречается $n_i$ раз ($i = 1, 2, ..., k$), то число $n_i$ называется *частотой* элемента $z_i$, отношение $n_i/n$ — *относительной частотой*, а последовательность пар $(z_i, n_i)$ — *статистическим рядом*. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы $z_i$, а вторая — их частоты.

При большом объеме $n$ выборки для более компактного представления результатов опытов используется *группировка выборки*. Для этого отрезок, содержащий все элементы выборки, разбивается на $k$ непересекающихся промежутков (обычно одинаковой длины), называемых интервалами группировки. Если $n_i$, $i = 1, 2, ..., k$ — количество элементов выборки, попавших в $i$-й интервал (частоты), то последовательность из интервалов группировки и соответствующих частот называется *группированным статистическим рядом*.

Функция $\widehat{F}_n(x) = \frac{m(x)}{n} = \sum_{i: z_i < x} \frac{n_i}{n}$, где $n$ — объем выборки, а $m(x)$ — число элементов $x_i$ в выборке, меньших $x$, называется *эмпирической* (или *выборочной*) *функцией распределения*. Функция $\widehat{F}_n(x)$ представляет собой неубывающую кусочно-постоянную функцию и является оценкой неизвестной функции распределения $F(x)$ (а именно, $\mathbf{P}(|\widehat{F}_n(x) - F(x)| < \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Для оценки неизвестной плотности вероятности $p(x)$ непрерывной случайной величины $\xi$ служит *гистограмма относительных частот*. Она представляет собой фигуру из прямоугольников (построенных в прямоугольной системе координат), основаниями которых являются интервалы группировки длины $b_i$, а высоты соответственно равны $\frac{n_i}{nb_i}$ (оценка плотности вероятности на $i$-м интервале). Очевидно, площадь гистограммы равна единице.

Всякую функцию от выборки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ называют *статистикой*. (*Точечной*) *оценкой* неизвестного параметра $\theta$ называется статистика $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, X_2, ..., X_n)$, значения которой приближенно равны оцениваемому параметру $\theta$. Оценка $\widehat{\theta}_n$ параметра $\theta$ называется *несмещенной*, если $\mathbf{M}\widehat{\theta}_n = \theta$, т.е. если она не имеет систематической ошибки.

Точечной оценкой для математического ожидания $\mathbf{M}\xi$ служит *выборочное среднее*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ (несмещенная оценка),}$$

для дисперсии $\mathbf{D}\xi$ — *несмещенная оценка дисперсии*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right),$$

для среднего квадратичного отклонения $\sigma\xi$ — оценка $s = \sqrt{s^2}$.

Заметим, что при вычислении оценки по конкретной выборке вместо случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ подставляются их конкретные числовые значения $X_i = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, поэтому

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i,\ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^2 - n\overline{x}^2\right),$$

где $z_i$, как и выше, означают различные элементы среди элементов выборки, $n_i$ — частота элемента $z_i$. В случае группированной выборки в качестве значений $z_i$ берутся середины интервалов группировки.

Пример 1. Записать в виде вариационного и статистического рядов выборку 4, 5, 3, 7, 2, 10, 4, 5, 5, 3, 10, 4, 7, 4, 4. Найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

□ Объем выборки $n = 15$. Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд

2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 10, 10.

Различными элементами в данной выборке являются элементы $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 4$, $z_4 = 5$, $z_5 = 7$, $z_6 = 10$; их частоты соответственно равны $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 5$, $n_4 = 3$, $n_5 = 2$, $n_6 = 2$ (для контроля правильности находим $\sum n_i$ =15). Следовательно, статистический ряд исходной выборки имеет вид:

| $z_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 5 | 3 | 2 | 2 |

Оценка математического ожидания (выборочное среднее)

$$\bar{x} = \tfrac{1}{15}(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5\cdot 4 + 3\cdot 5 + 2\cdot 7 + 2\cdot 10) = \tfrac{77}{15} \approx 5{,}133;$$

дисперсии (несмещенная оценка дисперсии)

$$s^2 = \tfrac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{6} n_i z_i^2 - 15\cdot \bar{x}^2\right) = \tfrac{1}{14}[1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 7^2 + 2\cdot 10^2 -$$

$$-15\cdot (\tfrac{77}{15})^2] \approx 5{,}695;$$

среднего квадратичного отклонения $s = \sqrt{s^2} \approx 2{,}386$. ■

Пример 2. Найти эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной в виде статистического ряда:

| $z_i$ | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 15 | 25 |

□ Объем выборки $n = 50$. При любом $x \le 1$ элементы выборки, меньшие, чем $x$, отсутствуют, поэтому $\widehat{F}_n(x) = 0$. При $1 < x \le 4$ число элементов исходной выборки, меньших $x$, равно 10 (частота элемента $z_1 = 1 < x$), поэтому $\widehat{F}_n(x) = \tfrac{10}{50} = 0{,}2$. При $4 < x \le 6$ число элементов выборки, меньших $x$, равно $10 + 15 = 25$ (сумма частот элементов $z_1 = 1 < x$ и $z_2 = 4$, меньших $x$), откуда $\widehat{F}_n(x) = \tfrac{25}{50} = 0{,}5$. Наконец, при любом $x > 6$ все 50 элементов выборки меньше, чем $x$, поэтому $\widehat{F}_n(x) = \tfrac{50}{50} = 1$.

Таким образом,

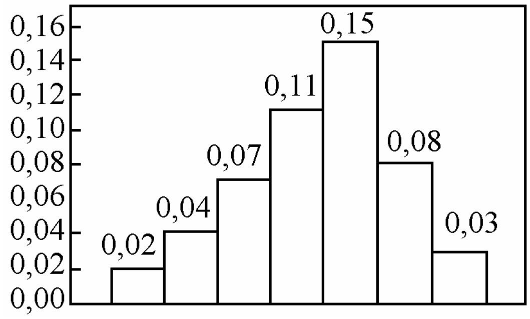
$$\widehat{F}_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ï ðè}\ x \le 1, \\ 0{,}2 \ \text{ï ðè}\ 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 \ \text{ï ðè}\ 4 < x \le 6, \\ 1 \ \text{ï ðè}\ x > 6. \end{cases} \ ■$$

Пример 3. Построить гистограмму выборки, представленной группированным статистическим рядом

| Номер интервала $i$ | Границы интервала | Частота $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 10–12 | 2 |
| 2 | 12–14 | 4 |
| 3 | 14–16 | 7 |
| 4 | 16–18 | 11 |
| 5 | 18–20 | 15 |
| 6 | 20–22 | 8 |
| 7 | 22–24 | 3 |

и найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии.

□ Объем выборки $n = 50$. Длина интервалов группировки $b_i = 2$. Строим прямоугольники с длинами оснований $b_i = 2$ и высотами $\frac{n_i}{50 \cdot 2} = \frac{n_i}{100}$, где $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, ... , $n_7 = 3$:




Оценки $\bar{x}$ и $s^2$ находим, принимая в качестве различных значений $z_i$ выборки середины интервалов группировки (11, 13, 15, 17, 19, 21, 23):

$$\bar{x} = \tfrac{1}{50}(2 \cdot 11 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 15 + 11 \cdot 17 + 15 \cdot 19 + 8 \cdot 21 + 3 \cdot 23) = 17{,}76;$$

$$s^2 = \frac{1}{49} \sum_{i=1}^{7} n_i (z_i - 17{,}76)^2 \approx 8{,}798. \ \blacksquare$$

Для каждой из приведенных ниже выборок построить вариационный и статистические ряды.

**246.** 11, 15, 12, 16, 19, 6, 11, 12, 13, 16, 8, 9, 13, 13, 11.

**247.** 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18.

Для каждой из приведенных ниже выборок, представленных статистическими рядами, найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

**248.**

| $z_i$ | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 2 | 3 |

**249.**

| $z_i$ | 1 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 20 | 10 | 14 | 6 |

**250**. Построить гистограмму выборки, представленной группированным статистическим рядом:

| Границы интервалов | 10–20 | 20–30 | 30–40 | 40–50 | 50–60 | 60–70 | 70–80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 1 | 2 | 7 | 18 | 12 | 8 | 2 |

**251**. В результате измерения времени решения контрольной задачи учениками 4-го класса получены следующие результаты (в секундах):

38, 60, 41, 51, 33, 42, 45, 21, 53, 60,

68, 52, 47, 46, 49, 49, 14, 57, 54, 59,

77, 47, 28, 48, 58, 32, 42, 58, 61, 30,

61, 35, 47, 72, 41, 45, 44, 55, 30, 40,

67, 65, 39, 48, 43, 60, 54, 42, 59, 50.

Построить для данной выборки группированный статистический ряд и гистограмму, разбив отрезок $[14, 77]$ на 7 интервалов группировки одинаковой длины (элемент, совпадающий с общей границей двух соседних интервалов, относить к правому интервалу).

**252.** Найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии по выборкам:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 9;
б) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 12.

Сравнить полученные результаты.

**253.** По выборке 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 5, 2, 1 найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

**254.** По группированной выборке

| Границы интервалов | 1–3 | 3–5 | 5–7 | 7–9 | 9–11 | 11–13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 |

найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии.

**255.** В результате 5 независимых измерений некоторой величины измерительным прибором, не имеющим систематической погрешности, получены следующие значения: 2781, 2836, 2807, 2763, 2858. Найти оценку измеряемой величины и оценку среднего квадратичного отклонения погрешности измерения.

**256.** В партии из 40 деталей измерялись отклонения $x_i$ (в мкм) от номинального размера, после чего были найдены $\sum_i x_i = 689$ и $\sum_i x_i^2 = 12635$. Найти оценки среднего значения и дисперсии отклонения.

**257**. Группированная выборка для предела прочности образцов сварного шва ( Í /ì ì $^2$) имеет вид:

| Границы интервалов | 28–30 | 30–32 | 32–34 | 34–36 | 36–38 | 38–40 | 40–42 | 42–44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 8 | 15 | 15 | 12 | 15 | 20 | 10 | 5 |

Вычислить выборочное среднее и оценку дисперсии.

## § 2. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

*Интервальной оценкой* (*доверительным интервалом*) для неизвестного параметра $\theta$ называется интервал $(\theta_1, \theta_2)$, который с заданной вероятностью $p$ содержит оцениваемый параметр: $\mathbf{P}(\theta_1 < \theta < \theta_2) = p$. При этом вероятность $p$ называется *доверительной*, а число $\alpha = 1 - p$ — *уровнем значимости*. Обычно используются значения $p$, равные 0,90; 0,95; 0,99 (соответственно $\alpha = 0{,}1$; 0,05; 0,01).

*Квантилью порядка* $p$ $(0 < p < 1)$ непрерывной случайной величины $\xi$ с возрастающей на $(-\infty, +\infty)$ функцией распределения $F(x)$ называется число $x_p$, определяемое равенством $F(x_p) = \mathbf{P}(\xi < x_p) = p$ (т.е. $x_p = F^{-1}(p)$, где $F^{-1}$ — функция, обратная к $F$).

1 Пусть случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение. Для оценки ее математического ожидания $a$ по выборке объема $n$ в случае, если известна дисперсия $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$, служит доверительный интервал $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, где $\bar{x}$ — выборочное среднее, $\delta = u_{1-\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ — точность оценки, $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль порядка $1 - \alpha/2$ стандартного нормального распределения $N(0,1)$, $\alpha$ — заданный уровень значимости. Для приведенных выше значений доверительной вероятности соответствующие квантили равны:

$$u_{0,95} \approx 1{,}645; \quad u_{0,975} \approx 1{,}960; \quad u_{0,995} \approx 2{,}576.$$

2 Более естественной является ситуация, когда оба параметра $a$ и $\sigma$ неизвестны. В этом случае точность $\delta$ интервальной оценки $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ математического ожидания находится по формуле:

$$\delta = t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $s = \sqrt{s^2}$ — оценка среднего квадратичного отклонения, а $t_{1-\alpha/2;n-1}$ — квантиль порядка $1 - \alpha/2$ так наз. *распределения Стьюдента с* $n-1$ *степенями свободы*. Таблица квантилей $t_{p,k}$ распределения Стьюдента с $k$ степенями свободы приводится на стр. 70 (таблица 2).

Для оценки неизвестной дисперсии $\mathbf{D}\xi$ нормального распределения служат доверительные интервалы

$$\left(\frac{ns_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}}, \frac{ns_0^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}}\right)$$

в случае, когда математическое ожидание $a$ известно, и

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right)$$

при неизвестном $a$; здесь $s_0^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (z_i - a)^2$ и $s^2$ — несмещенные оценки дисперсии в том и другом случае, а $\chi^2_{p;k}$ — квантиль порядка $p$ так наз. *распределения* $\chi^2$ *с k степенями свободы* (таблица 3, стр. 70).

Пример. По выборке из нормального распределения, представленной в виде статистического ряда

| $z_i$ | –2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

оценить с помощью доверительных интервалов математическое ожидание $a$ и дисперсию $\sigma^2$ с доверительными вероятностями 0,90 и 0,99.

□ Объем выборки $n = 10$. Находим выборочное среднее $\overline{x} = 2$ и несмещенную оценку дисперсии $s^2 = {}^{52}\!/_{9}$. При доверительной вероятности 0,90 уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, откуда ${}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}05$ и $1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}95$. По таблице 2 находим квантиль порядка 0,95 распределения Стьюдента с $n - 1 = 9$ степенями свободы: $t_{0{,}95;9} \approx 1{,}833$. Вычисляем точность интервальной оценки математического ожидания:

$$\delta \approx 1{,}833 \cdot \frac{\sqrt{{}^{52}\!/_{9}}}{\sqrt{10}} \approx 1{,}39 .$$

Следовательно, с вероятностью 0,90

$$0{,}61 < a < 3{,}39 .$$

Для нахождения доверительного интервала для дисперсии находим по таблице 3 квантили порядков 0,95 и 0,05 распределения $\chi^2$ с 9 степенями свободы:

$$\chi^2_{0{,}95;9} \approx 16{,}9 \text{ и } \chi^2_{0{,}05;9} \approx 3{,}33 .$$

Вычисляем границы доверительного интервала:

$$\frac{9 \cdot {}^{52}\!/_{9}}{16{,}9} \approx 3{,}1 \text{ и } \frac{9 \cdot {}^{52}\!/_{9}}{3{,}33} \approx 15{,}6 .$$

Итак, $3{,}1 < \sigma^2 < 15{,}6$ с вероятностью 0,90.

Аналогично, для доверительной вероятности 0,99 находим:

$$t_{0{,}995;9} \approx 3{,}250 ,\ \delta \approx 2{,}47 \text{ и } -0{,}47 < a < 4{,}47 ;$$

$$\chi^2_{0{,}995;9} \approx 23{,}6 ,\ \chi^2_{0{,}005;9} \approx 1{,}73 \text{ и } 2{,}2 < \sigma^2 < 30{,}1 . \ \blacksquare$$

**258**. В течение продолжительного срока при анализе данного материала на содержание железа установлено среднее квадратичное отклонение $\sigma = 0{,}12\%$. Найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительный интервал для истинного содержания $a$ железа в образце, если по результатам 6 анализов среднее содержание железа составило 32,56%.

**259**. Средняя продолжительность горения электролампы, определенная по выборке объема $n = 100$ из большой партии ламп, оказалась равной 1000 ч. Найти с доверительной вероятностью 0,99 доверительный интервал для средней продолжительности $a$ горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратичное отклонение продолжительности горения лампы равно 40 ч.

**260**. По выборке объема $n = 100$ вычислено выборочное среднее диаметра изготовленных валиков. Найти с доверительной вероятностью 0,90 точность, с которой выборочное среднее оценивает математическое ожидание $a$ диаметра изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратичное отклонение равно 200 мкм.

**261**. Оценка $\overline{x}$ (кОм) сопротивления для большой партии однотипных резисторов определяется по результатам измерений $n$ случайно отобранных экземпляров. Сколько измерений нужно произвести, чтобы с вероятностью 0,95 утверждать, что для всей партии резисторов сопротивление находится в пределах $\overline{x} \pm 0{,}1$ кОм, если дисперсия сопротивления в партии $\sigma^2 = 1$ кОм$^2$?

**262**. Для определения углового размера изготовленной детали используют среднее арифметическое нескольких измерений. Среднее квадратичное отклонение измерительного прибора равно 1,5′. Найти количество измерений, которое нужно произвести, чтобы погрешность результата с вероятностью 0,99 не превосходила 1′.

**263**. По выборке объема $n = 25$ были определены выборочные оценки для содержания углерода в единице продукта: $\overline{x} = 18$ г, $s^2 = 16$ г$^2$. Найти 90% и 99% доверительные интервалы для среднего содержания углерода.

**264**. По выборке объема $n = 16$ из партии конденсаторов определены выборочные оценки для емкости конденсатора: $\overline{x} = 20$ мкФ, $s^2 = 4$ мкФ$^2$. Найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительный интервал для средней емкости конденсатора в партии.

**265**. Произведено пять независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Получены следующие результаты (в кулонах): $1{,}594 \cdot 10^{-19}$; $1{,}597 \cdot 10^{-19}$; $1{,}598 \cdot 10^{-19}$; $1{,}593 \cdot 10^{-19}$; $1{,}590 \cdot 10^{-19}$. Найти доверительный интервал для заряда электрона с доверительной вероятностью 0,99.

**266**. По выборке объема $n = 16$ найдена несмещенная оценка дисперсии диаметра изготовленных валиков: $s^2 = 1000$ мкм$^2$. Найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратичного отклонения диаметра валика. (Указание: $\chi^2_{0,025;15} = 6{,}26$, $\chi^2_{0,975;15} = 27{,}5$).

**267**. По данным задачи **263** найти 90% и 99% доверительные интервалы для дисперсии. (Указание: $\chi^2_{0,005;24} = 9{,}89$, $\chi^2_{0,05;24} = 13{,}8$, $\chi^2_{0,95;24} = 36{,}4$, $\chi^2_{0,995;24} = 45{,}6$).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

— статистический ряд.

**247.** 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19 — вариационный ряд,

| $z_i$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 4 | 4 | 5 | 2 |

— статистический ряд.

**248.** $\widehat{F}_n(x)=0$ при $x\le 4$; 0,5 при $4<x\le 7$; 0,7 при $7<x\le 8$; 1 при $x>8$. **249.** $\widehat{F}_n(x)=0$ при $x\le 1$; 0,4 при $1<x\le 4$; 0,6 при $4<x\le 5$; 0,88 при $5<x\le 7$; 1 при $x>7$. **250.** $n=50$; $b_i=10$; высоты прямоугольников: (2, 4, 14, 36, 24, 16, 4)$\cdot 10^{-3}$. **251.** $n=50$; $b_i=9$;

| Номер интервала $i$ | Границы интервала | Частота $n_i$ | $\dfrac{n_i}{nb_i}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 14–23 | 2 | $\approx 44\cdot 10^{-4}$ |
| 2 | 23–32 | 3 | $\approx 67\cdot 10^{-4}$ |
| 3 | 32–41 | 6 | $\approx 133\cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 41–50 | 17 | $\approx 378\cdot 10^{-4}$ |
| 5 | 50–59 | 10 | $\approx 222\cdot 10^{-4}$ |
| 6 | 59–68 | 9 | $200\cdot 10^{-4}$ |
| 7 | 68–77 | 3 | $\approx 67\cdot 10^{-4}$ |

**252.** а) $\bar{x}\approx 4{,}143$, $s^2\approx 6{,}810$; б) $\bar{x}\approx 4{,}571$, $s^2\approx 12{,}952$. **253.** $\bar{x}=2{,}4$, $s^2\approx 1{,}378$, $s\approx 1{,}174$. **254.** $\bar{x}\approx 6{,}545$, $s^2\approx 8{,}073$. **255**. $\bar{x}=2809$, $s\approx 38{,}8$. **256**. $\bar{x}\approx 17{,}2$, $s^2\approx 19{,}67$. **257**. $\bar{x}=35{,}72$, $s^2\approx 16{,}12$.

## § 2

**258.** $32{,}46\%<a<32{,}66\%$. **259.** $989{,}7<a<1010{,}3$. **260.** $\approx 33$ мкм. **261**. $n\ge 385$. **262.** $n\ge 15$. **263.** (16,63; 19,37); (15,76; 20,24). **264.** (18,9; 21,1). **265.** (1,588$\cdot 10^{-19}$; 1,601$\cdot 10^{-19}$). **266.** (545, 2396); (23, 49). **267.** (10,55; 27,83); (8,42; 38,83). **268.1.** (9,84; 22,16). **268.2.** (9,53; 20,37).

## § 3

**269.** Да ($\chi^2\approx 0{,}78$, $\chi^2_{0,95;1}\approx 3{,}84$). **270.** Нет ($\chi^2=24$, $\chi^2_{0,95;1}\approx 3{,}84$). **271.** Нет ($\chi^2=20$, $\chi^2_{0,99;4}\approx 13{,}3$). **272.** $H_0$ принимается: $\lambda=\bar{x}=0{,}4$, $\chi^2\approx 0{,}69$, $\chi^2_{0,95;2}\approx 5{,}99$. **273.** $H_0$ отклоняется: $\lambda=\bar{x}=0{,}5$, $\chi^2\approx 5{,}40$, $\chi^2_{0,90;1}\approx 2{,}71$. **274.** $H_0$ принимается: $\chi^2\approx 3{,}26$, $\chi^2_{0,90;5}\approx 9{,}24$. **275.** $H_0$ отклоняется: $\chi^2\approx 6{,}22$, $\chi^2_{0,90;2}\approx 4{,}61$.

## § 4