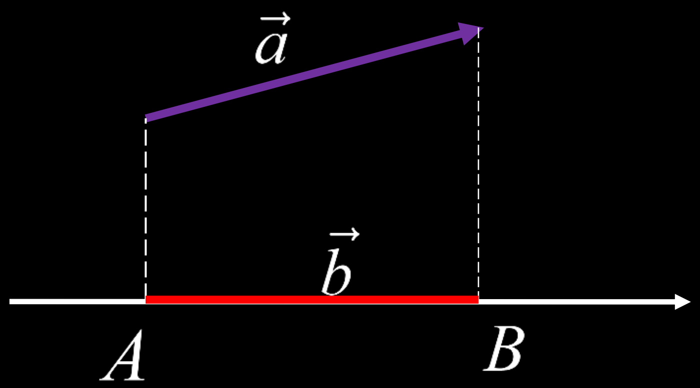
Лекция 2

- Базис в множестве геометрических векторов в пространстве.
- Ортогональная проекция вектора на ось.
- Скалярное произведение векторов, его свойства.

Проекция вектора на вектор.

Опустим из конца и начала вектора $\vec{a}$ перпендикуляры на вектор $\vec{b}$.



$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\right) -$$

проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Замечание. $np_{\vec{b}}\vec{a} = \pm|AB|$.

Если вектор $\vec{a}$ образует острый угол с вектором $\vec{b}$, то проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ положительна, если же этот угол тупой, то проекция отрицательна, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то проекция равна нулю.

Свойства проекций.

1. Равные векторы имеют равные проекции.

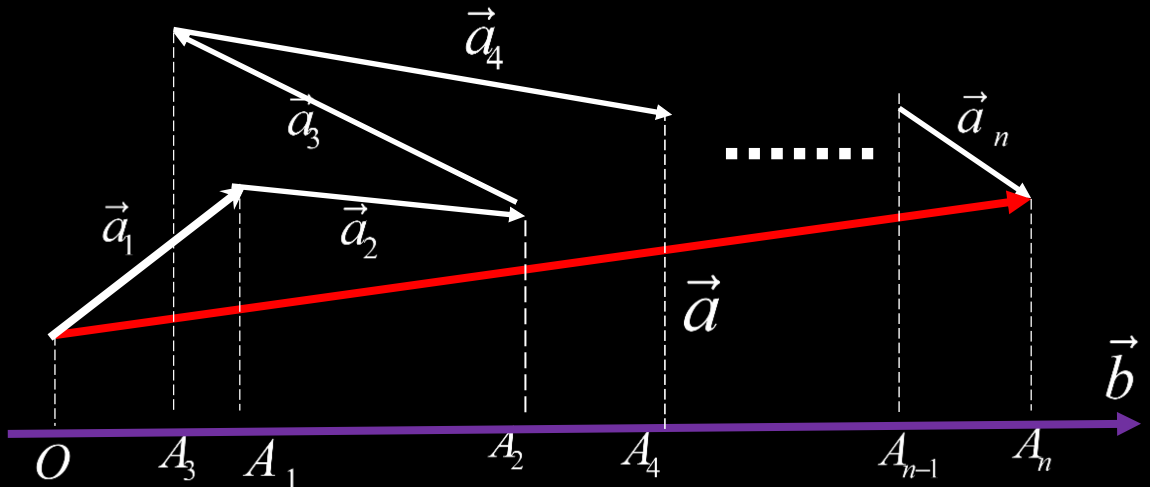
2. Проекция суммы нескольких векторов на один и тот же вектор равна сумме их проекций

$$np_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)=np_{\vec{b}}\vec{a}_1+np_{\vec{b}}\vec{a}_2+\ldots+np_{\vec{b}}\vec{a}_n.$$

Доказательство.

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n=\vec{a}$$

Из начала и конца каждого вектора опустим на вектор $\vec{b}$ перпендикуляры.



$$np_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)=np_{\vec{b}}\vec{a}=|OA_n|.$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}_1=|OA_1|,\ np_{\vec{b}}\vec{a}_2=|A_1A_2|,\ np_{\vec{b}}\vec{a}_3=-|A_2A_3|,\ np_{\vec{b}}\vec{a}_4=|A_3A_4|,\ldots,np_{\vec{b}}\vec{a}_n=|A_{n-1}A_n|.$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}_1+np_{\vec{b}}\vec{a}_2+np_{\vec{b}}\vec{a}_3+np_{\vec{b}}\vec{a}_4+\ldots+np_{\vec{b}}\vec{a}_n=$$

$$=|OA_1|+|A_1A_2|-|A_2A_3|+|A_3A_4|+\ldots+|A_{n-1}A_n|=|OA_n|.$$

3. При умножении вектора на число его проекция на данную ось умножается на это число $np_{\vec b}(\alpha\,\vec a) = \alpha\, np_{\vec b}\vec a.$

Доказательство: $np_{\vec b}(\alpha\,\vec a) = |\alpha\,\vec a| \cdot \cos(\alpha\vec a \,\widehat{,}\, \vec b).$

1) Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$np_{\vec b}(\alpha\,\vec a) = np_{\vec b}\vec 0 = 0 = 0 \cdot np_{\vec b}\vec a.$$

2) Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\alpha\,\vec a \,\widehat{,}\, \vec b = \vec a \,\widehat{,}\, \vec b; \quad |\alpha\,\vec a| = \alpha|\vec a|.$

$$np_{\vec b}(\alpha\,\vec a) = \alpha\,|\vec a|\cos(\vec a \,\widehat{,}\, \vec b) = \alpha\, np_{\vec b}\vec a.$$

3) Пусть α < 0 . Тогда $\alpha\,\vec a \,\widehat{,}\, \vec b = 180^0 - \vec a \,\widehat{,}\, \vec b; \quad |\alpha\,\vec a| = -\alpha|\vec a|.$

$$np_{\vec b}(\alpha\,\vec a) = -\alpha|\vec a|\cos(180^0 - \vec a \,\widehat{,}\, \vec b) = -\alpha|\vec a|\,(-\cos(\vec a \,\widehat{,}\, \vec b)) =$$

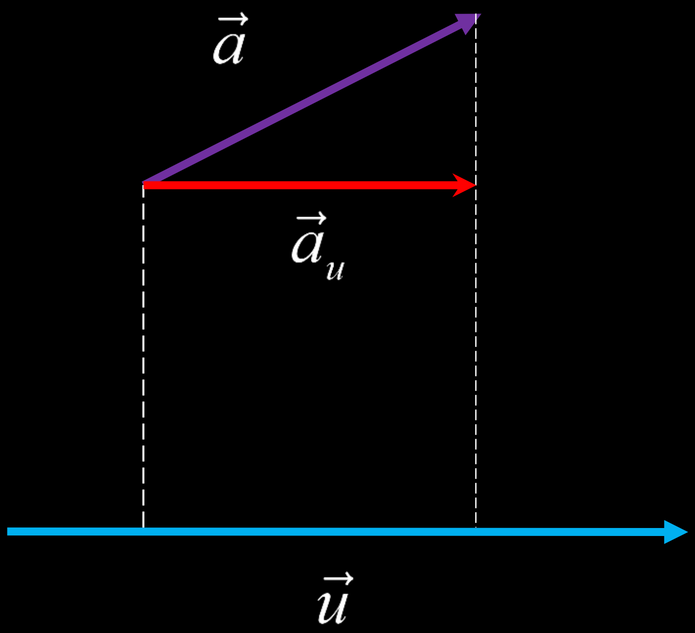
$$= \alpha\, np_{\vec b}\vec a.$$

Ортогональная проекция вектора на ось.

Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось $\vec{u}$ называется вектор $\vec{a}_u$, такой что:

$$1)\ \vec{a}_u \parallel \vec{u},$$

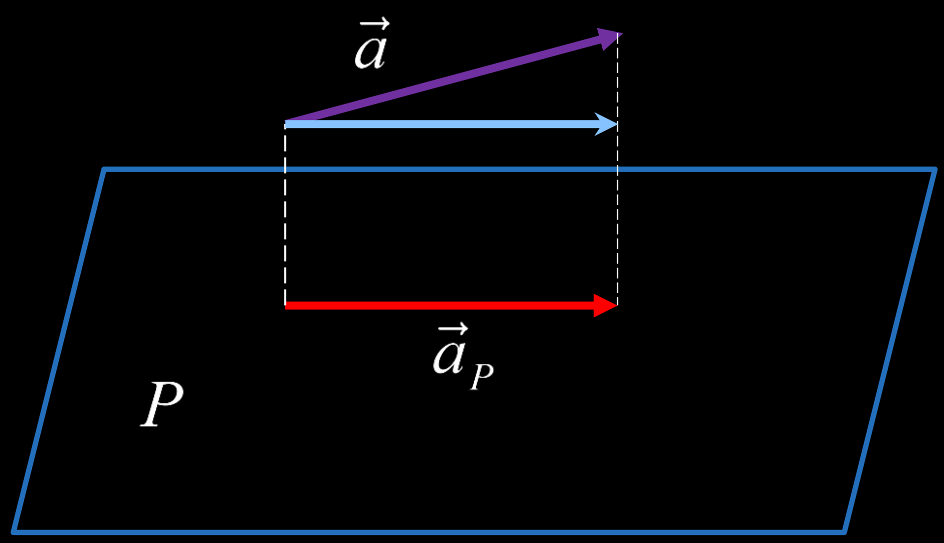
$$2)\ \vec{a} - \vec{a}_u \perp \vec{u}.$$



$$\vec{a}_u = \text{пр}_{\vec{u}}\vec{a} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Ортогональная проекция вектора на плоскость

Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на плоскость P называется вектор $\vec{a}_P$, такой что:



1) $\vec{a}_P \parallel P,$

2) $\vec{a} - \vec{a}_P \perp P.$

Определения.

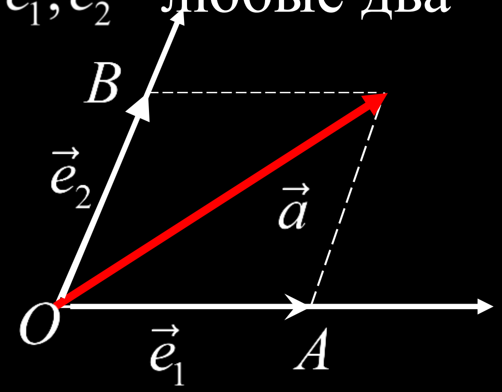
Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Покажем, что любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть представлен в виде $\vec{a} = \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ –любые два неколлинеарных вектора.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB};$$

$$\vec{a} = \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2$$



Базисом в пространстве геометрических векторов называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

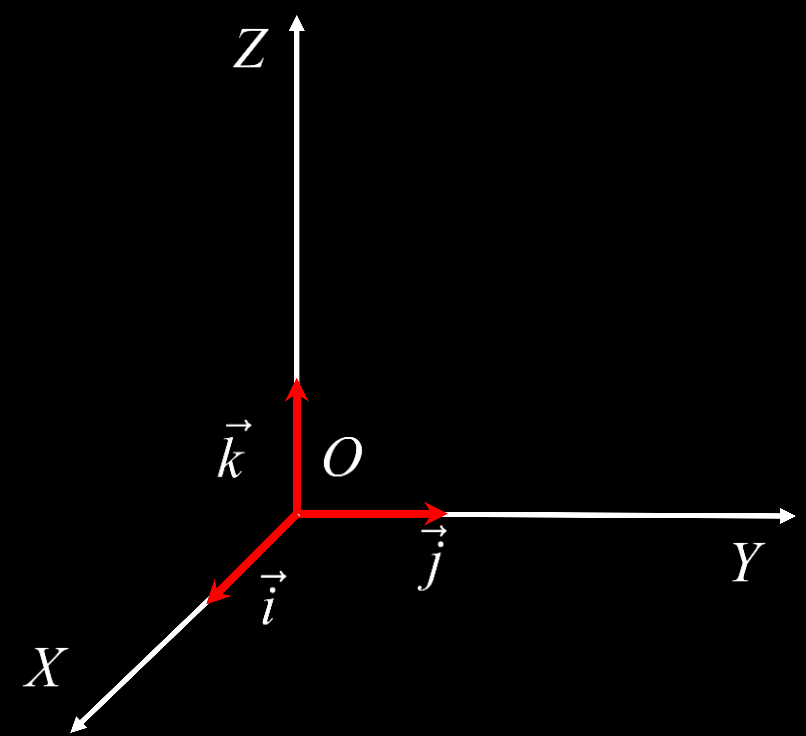
Базис называется *прямоугольным*, если базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

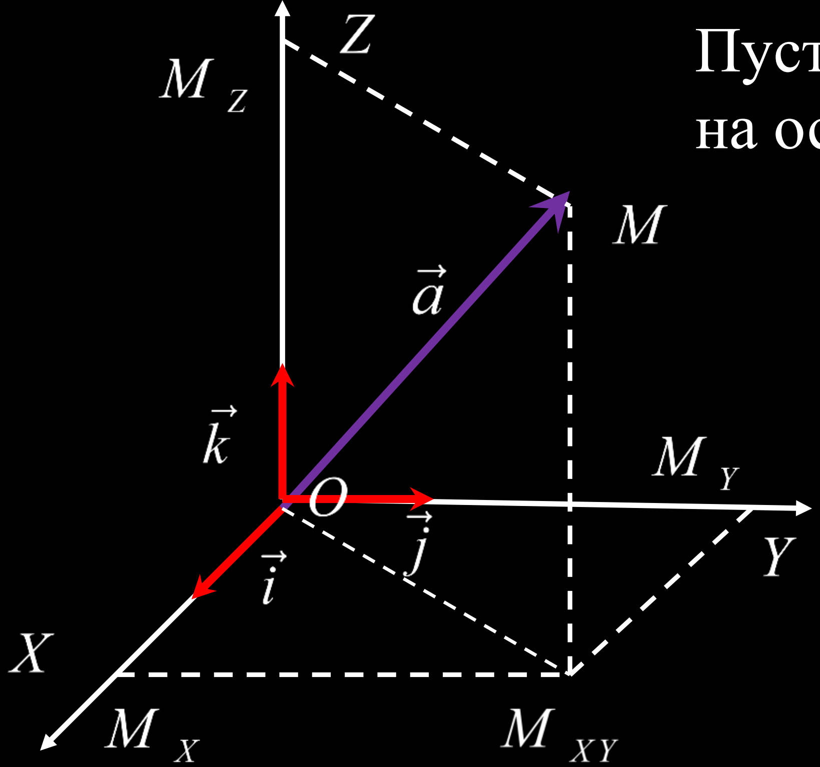
Декартова прямоугольная система координат.

Зафиксируем в пространстве точку O и приложим к ней три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины $\vec{i}\,,\ \vec{j}\,, \vec{k}\,.$ По направлению этих векторов направим оси OX (ось абсцисс), OY (ось ординат) и OZ (ось аппликат).

Определение.

Совокупность точки O (начала координат) и прямоугольного базиса $B = \{\vec{i}\,,\ \vec{j}\,, \vec{k}\,\}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат* (Д.П.С.К.).





Пусть x , y, z– проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси OX, OY, OZ : $x = np_{\vec{i}}\overrightarrow{OM}$

$$y = np_{\vec{j}}\overrightarrow{OM},$$

$$z = np_{\vec{k}}\overrightarrow{OM}.$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{XY}} + \overrightarrow{M_{XY}M} =$$

$$= \overrightarrow{OM_X} + \overrightarrow{OM_Y} + \overrightarrow{OM_Z} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – разложение вектора $\vec{a}$ по базису

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; а ($x$, y, z) – координаты вектора $\vec{a}$.

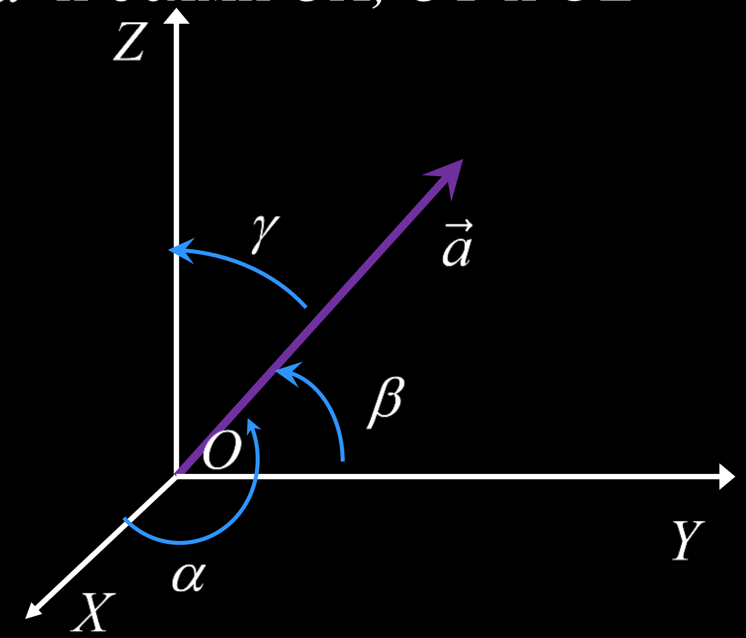
Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OM_X}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_Y}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_Z}\right|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора

Пусть α, β и γ – углы между вектором $\vec{a}$ и осями *OX*, *OY* и *OZ* соответственно.

Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами его орта.

Действия над векторами, заданными в Д.П.С.К.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

1) $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \alpha \cdot x_1\vec{i} + \alpha \cdot y_1\vec{j} + \alpha \cdot z_1\vec{k}$

2) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}.$

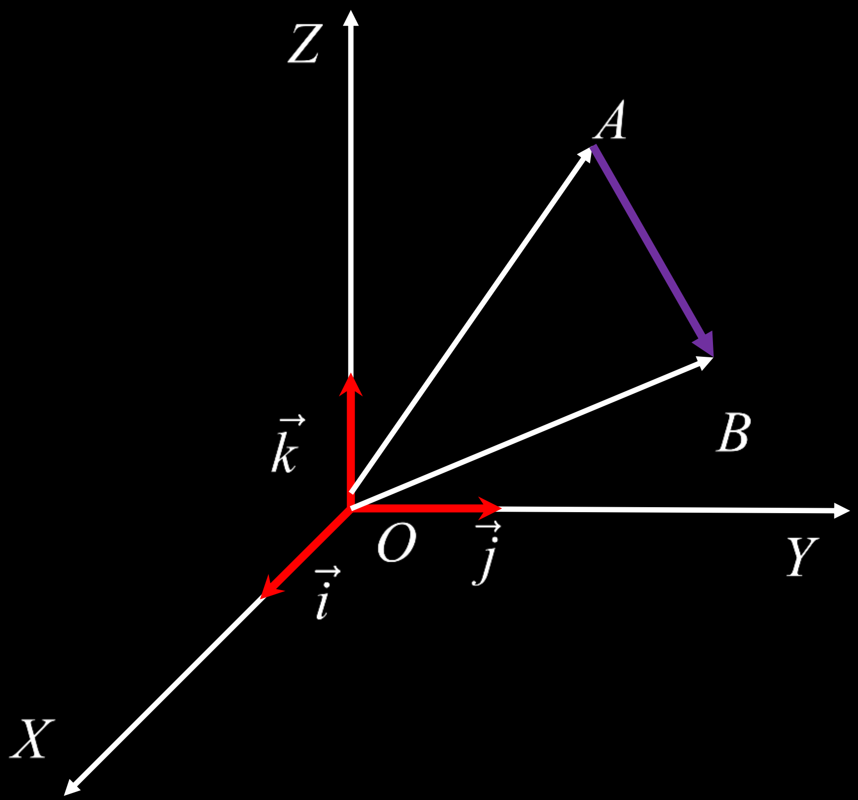
3) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$

Условие коллинеарности двух векторов.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha\vec{b} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \alpha(x_2, y_2, z_2).$$

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha x_2, \\ y_1 = \alpha y_2, \\ z_1 = \alpha z_2, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha.$$

Длина отрезка.



$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

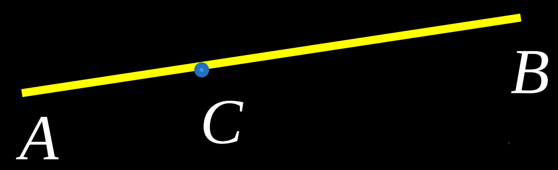
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении.

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

Точка $C(x; y; z)$ лежит на отрезке AB таким образом, что $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \lambda.$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$



$$\overrightarrow{AC} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1). \end{cases}$$

Замечание.

Если точка C является серединой отрезка AB, то ее координаты вычисляются по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2};\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}.$

Скалярное произведение векторов

Определение. ***Скалярным произведением*** **вектор**а $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b}).}$$

Так как

$$\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b})=np_{\vec{a}}\vec{b},$$

$$|\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b})=np_{\vec{b}}\vec{a},\quad \text{то}$$

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b},}$$

Применение скалярного, произведения в физике.

Пусть материальная точка M движется по прямой от точки A до точки B. Путь, проходимый при этом равен S. Допустим, что на точку M действует постоянная по величине и направлению сила $\vec{F}$ под углом φ к направлению перемещения. Тогда работа

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\varphi = (\vec{F}, \vec{S}).$$

Таким образом, работа постоянной силы на прямолинейном участке равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a} \perp \vec{b}\ (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0) \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$

(условие перпендикулярности векторов).

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^0 = 0.$

$\Leftarrow$ Пусть $(\vec{a}, \vec{b}) = 0,\ \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0.$

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0.$

Так как $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0,$ то $\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

Доказательство. $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

3) $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b}),\forall\,\alpha\in R$.

Доказательство.

$$(\alpha\vec{a},\vec{b}))=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}(\alpha\cdot\vec{a})\overset{3\ \text{св-во проекций}}{=}|\vec{b}|\cdot\alpha\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=\alpha\cdot(\vec{a},\vec{b}).$$

4) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$.

Доказательство.

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=|\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})\overset{2\ \text{св-во проекций}}{=}|\vec{c}|\cdot(np_{\vec{c}}\vec{a}+np_{\vec{c}}\vec{b})=$$

$$=|\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{b}=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}).$$

5) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$

Доказательство. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}|^2.$

6)Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, то $(\vec{a}, \vec{b}) > 0,$
если тупой, то $(\vec{a}, \vec{b}) < 0.$

Следует из того, что знак скалярного произведения определяется знаком $\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}).$

Скалярное произведение в Д.П.С.К.

Пусть $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

Тогда

$$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) +$$

$$+ z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + x_1z_2\left(\vec{i},\vec{k}\right) + y_1z_2(\vec{j},\vec{k}) + z_1z_2(\vec{k},\vec{k}).$$

Заметим , что $(\vec{i},\vec{i}) = \left|\vec{i}\right|^2 = 1, (\vec{j},\vec{j}) = \left|\vec{j}\right|^2 = 1, (\vec{k},\vec{k}) = \left|\vec{k}\right|^2 = 1.$

Так как векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ − взаимно перпендикулярные орты, то

$$(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{i}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{j}) = 0$$

Следовательно,

$$\boxed{(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Косинус угла между двумя векторами.

Так как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$, то $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$

Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$ то

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})=0,$ т.е. $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$