ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Вероятность случайного события в классической модели находится в предположении, что множество исходов опыта конечно. На практике встречаются задачи, в которых множество исходов опыта бесконечно (континуально). Примером может служить число точек на отрезке прямой; число точек, принадлежащих области на плоскости, области в пространстве. Аналогичная ситуация возникает, когда в результате эксперимента фиксируется непрерывно меняющаяся величина, например, масса, температура, время. *Один из подходов* к описанию таких ситуаций – *геометрическая вероятность*.

Пусть внутри ограниченной области Ω на плоскости расположена некоторая область D. В область Ω наудачу бросается «случайная точка». Пусть вероятность попадания точки в любую часть области Ω будет пропорциональна площади этой части и не будет зависеть ни от ее расположения, ни от ее формы.

Тогда вероятность попадания точки в область D находится по формуле:

$$P(D) = \frac{S_D}{S_\Omega}, \tag{1.2}$$

где S_D – площадь области D, S_Ω – площадь области Ω.

При аналогичных предположениях можно утверждать следующее.

Если отрезок *a* составляет часть отрезка *L* и на отрезок *L* наудачу бросается «случайная точка», то вероятность попадания этой точки в отрезок *a* равна $P(a) = l_a / l_L$, где l_a – длина отрезка *a*, l_L – длина отрезка *L*.

Если внутри трехмерной области Ω расположена область *G* и в область Ω наудачу бросается «случайная точка», то вероятность попадания этой точки в область *G* равна $P(G) = V_G / V_\Omega$, где V_G – объем области *G*, V_Ω – объем области Ω.

Задача 1.5. Внутрь круга радиуса *R* наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

Решение

Площадь круга $S_{круга} = \pi R^2$. Сторона вписанного в круг квадрата равна $R\sqrt{2}$. Тогда площадь квадрата $S_{кв} = 2R^2$. Вероятность попадания «случайной точки» в квадрат согласно формуле (1.2)

$$P = \frac{S_{кв}}{S_{круга}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 1.6. Отрезок *KB* разделен точкой *C* в отношении 2:1. На отрезок наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется правее точки *C*.

Решение

Если длина отрезка *CB* равна одной единице длины, то длина всего отрезка равна трем единицам длины. Вероятность искомого события равна отношению длины отрезка *CB* к длине отрезка *KB*.

$$P = \frac{l_{CB}}{l_{KB}} = \frac{1}{3}.$$

Задача 1.7. В куб наудачу помещают точку. Найти вероятность того, что она попадет в пирамиду, вершина которой совпадает с центром верхнего основания куба, а основание пирамиды совпадает с основанием куба.

Решение

Сформулируем событие *A* = {точка, случайным образом размещенная в кубе, окажется внутри пирамиды}, тогда

$$p = P(A) = \frac{V_{\text{пир.}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{\frac{1}{3}S_{осн.}h}{a^3} = \frac{\frac{1}{3}a^2a}{a^3} = \frac{1}{3},$$

где обозначено: a – длина ребра куба; $S_{осн.}$ – площадь основания пирамиды; h – высота пирамиды.

Геометрическая вероятность позволяет решать многие задачи, на первый взгляд не имеющие никакого отношения к геометрии.

Задача 1.8. (Задача о встрече). Два студента договорились встретиться между 13-ю и 14-ю часами, причем пришедший первым ждет другого не более 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если время прихода каждого заранее неизвестно и равно возможно в любой момент времени из указанного промежутка?

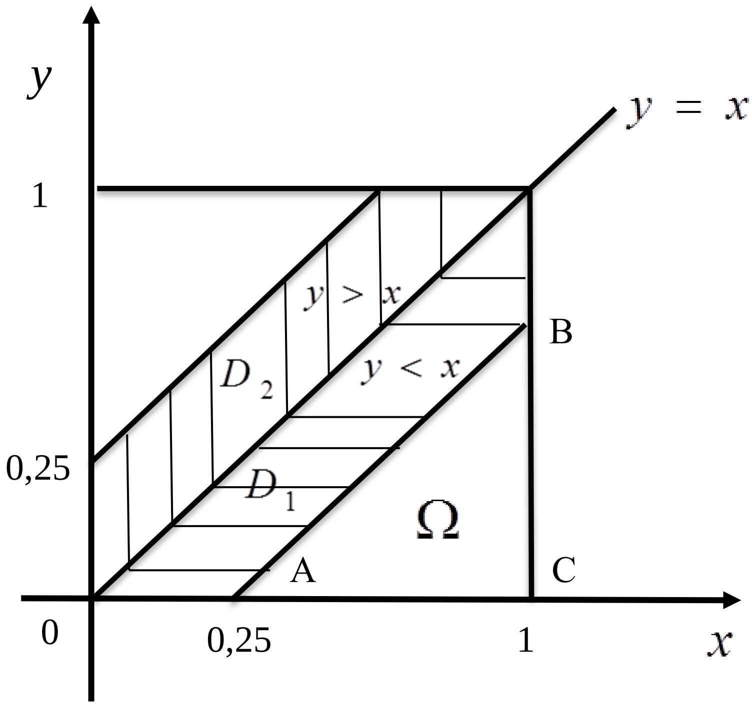

Рис. 1.1

Решение

Пусть x (час) – время прихода первого студента после 13 часов, аналогично y (час) – время прихода второго; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Встреча состоится, если $|x - y| \le 15$ мин = 0,25 часа. Изобразим на координатной плоскости $x0y$ множество

$\Omega = \{0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1\}$ - квадрат и множество $D = \{|x - y| \le 0{,}25\}$. Множество D является объединением множеств D_1 и D_2 (рис. 1.1).

$$D = D_1 \cup D_2, \quad \text{где} \quad D_1 = \{y \le x; \quad y \ge x - 0{,}25\}; \quad D_2 = \{y \ge x; \quad y \le x + 0{,}25\}.$$

Тогда вероятность встречи по формуле (1.2) равна:

$$P(D) = \frac{S_D}{S_\Omega} = \frac{1 - 2S_{\Delta ABC}}{1} = 1 - 0{,}75^2 = 0{,}4375.$$

Задача 1.9. Числа p и q выбраны случайным образом из отрезка [0; 2]. Какова вероятность, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни?

Решение

Множество Ω - квадрат на плоскости $p0q$ со стороной длины 2, поэтому $S_\Omega = 2^2 = 4$ (см. рис. 1.2). Квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант $p^2 - 4q \ge 0$, откуда $q \le \dfrac{p^2}{4}$. Изобразим на координатной плоскости $p0q$ параболу $q = \dfrac{p^2}{4}$

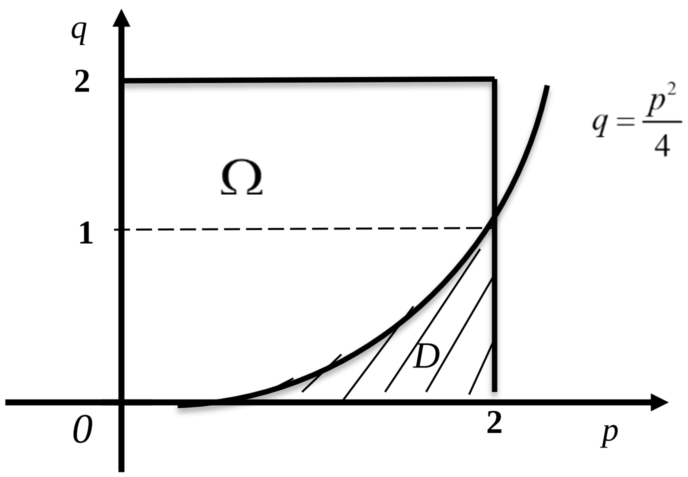

Рис. 1.2.

Интересующая нас область D: $q \le \dfrac{p^2}{4}$ заштрихована на рис. 1.2. Найдем ее площадь с помощью определенного интеграла:

$$S_D = \int_0^2 \frac{p^2}{4}\,dp = \left.\frac{p^3}{12}\right|_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Тогда вероятность $P(D) = \dfrac{S_D}{S_\Omega} = \dfrac{2/3}{4} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}1667.$

Задача 1.10. (Задача Бюффона). На плоскости нанесено бесконечное множество параллельных прямых, расстояние между любыми соседними одинаково и равно 1 см. Какова вероятность, что брошенная наугад на плоскость иголка длины l, $l \le 1$ см, пересечет какую-нибудь прямую?

Решение

Пусть иголка AB длины l пересечет какую-нибудь прямую L. Обозначим через h, $0 \le h \le 1$, расстояние от ее нижнего края A до соседней (нижней) прямой (см. рис. 1.3), через α - угол между иголкой и прямой L, $0 \le \alpha \le \pi$. Построим $BC \perp L$; $AC \,||\, L$. Из прямоугольного треугольника ABC:

$$BC = AB \sin\alpha = l \sin\alpha\,.$$

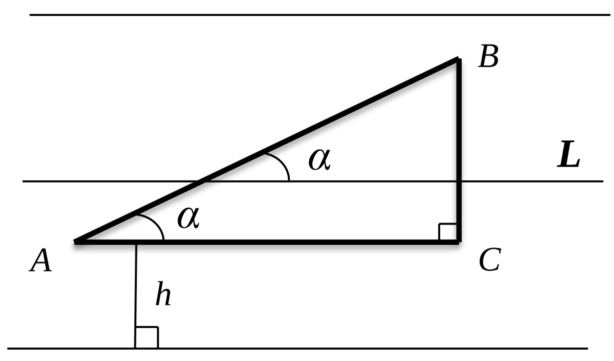

Рис. 1.3.

Иголка пересекает прямую L в том и только в том случае, если

$h+BC\ge 1;\qquad h+l\sin\alpha\ge 1;\qquad h\ge 1-l\sin\alpha$, обозначим это множество через *D*.

На рисунке 1.4 изображена координатная плоскость $\alpha 0h$, область Ω - прямоугольник: $0\le\alpha\le\pi$, $0\le h\le 1$; графики функций $h=l\sin\alpha$ и $h=1-l\sin\alpha$. Область *D* заштрихована. Очевидно, ее площадь равна:

$$S_D=\int_0^{\pi} l\sin\alpha\, d\alpha=-l\cos\alpha\Big|_0^{\pi}=2l.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(D)=\frac{S_D}{S_\Omega}=\frac{2l}{\pi}.$$

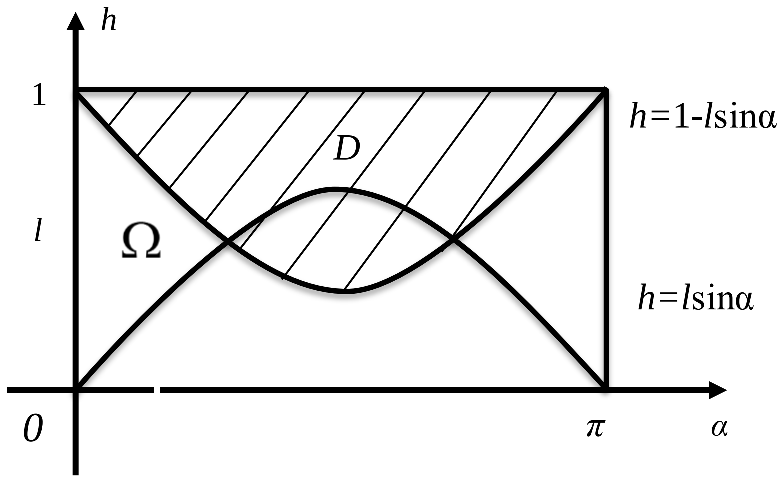

Рис. 1.4.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1. На пульт управления в течение минуты в случайные моменты времени должны поступить 2 сигнала, причем они регистрируются только в том случае, если между моментами их поступления проходит не менее 3 секунд. Найти вероятность того, что сигналы будут зарегистрированы.

4.2. Наудачу взяты два положительных числа *x* и *y*, каждое из которых не превышает 1. Найти вероятность того, что $\{x+y\le 1;\quad xy\ge 0{,}09\}$.

4.3. Стержень случайным образом разломан на 3 части. Найти вероятность того, что из полученных кусков можно составить треугольник.

Ответы

4.1. 0,9025. **4.2.** $0{,}09 \ln 9 - 0{,}4 \approx 0{,}202$. **4.3.** 0,125.