ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные

$$F(x, y(x), y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Уравнением, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Решением дифференциального уравнения на интервале I называется n-раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество на интервале I.

Общим решением ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, c_1, \dots c_n)$, содержащая n произвольных постоянных и удовлетворяющих условиям:

1) Функция $y = \varphi(x, c_1, \dots c_n)$, является решением ДУ при любых фиксированных значениях $c_1, \dots c_n$.
2) Каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y'(x_0) = y_0,\ \ \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можно найти такие значения постоянных $c_1 = c_1^0,\ c_2 = c_2^0, \dots, c_n = c_n^0$, что функция $y = \varphi(x, c_1^0, \dots, c_n^0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ n-го порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_1^0, \dots, c_n^0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, c_1, \dots c_n)$ при конкретных значениях постоянной $c_1 = c_1^0,\ c_2 = c_2^0, \dots, c_n = c_n^0$.

Рассмотрим задачу отыскания частного решения – задачу Коши

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y', y", \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = y_0 \,, y'(x_0) = y'_0, \ \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Теорема существования и единственности решение задачи Коши:

Если функция $f(x, y(x), y', y", \ldots, y^{(n-1)})$ и ее частные производная $f'_y(x, y)$, $f'_{y'}(x, y), \ldots, f'_{y^{(n-1)}}(x, y)$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных $x, y, y', y", \ldots, y^{(n-1)}$, то для всякой точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0 \,, y'(x_0) = y'_0, \ \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. (Без доказательства)

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

До сих пор мы решали только дифференциальные уравнения первого порядка. Существуют дифференциальные уравнения высших порядков, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

I тип. Рассмотрим уравнение вида

$$\boxed{y'' = f(x).} \tag{1}$$

Порядок уравнения можно понизить, введя новую функцию $y' = z(x)$.
Тогда $y'' = z'(x)$ и получаем ДУ первого порядка $z'(x) = f(x)$.
Этапы решения:

1. Сначала решаем уравнение $z'(x) = f(x)$ и находим функцию $z(x)$.
2. Затем решаем $y' = z(x)$ и получаем общее решение уравнения (1).
   На практике уравнение (1) решается без введения новой функции, а путем последовательного интегрирования уравнения.

Пример: $y'' = e^{2x}$.

Очевидно, что для получения решения $y(x)$ достаточно дважды проинтегрировать правую часть.

Заметим, что при первом интегрировании мы получаем постоянную интегрирования:

$$y' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

При втором интегрирование мы снова получаем постоянную интегрирования – уже другую:

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, общее решение дифференциального второго порядка содержит уже две произвольные постоянные.

Очевидно, что решая подобное простейшее уравнение n-го порядка, мы получим n произвольных постоянных. Следовательно, что для получения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задавать n дополнительных условий.

II тип. Уравнение вида

$$\boxed{F(x, y', y'') = 0.} \tag{2}$$

В этом случае следует взять за неизвестную функцию $z(x) = y'$. Тогда $z'(x) = y''$.

Подставляем в (2), получаем $F(x, z(x), z'(x)) = 0$ дифференциальное уравнение первого порядка.

Этапы решения:

1. Сначала решаем уравнение $F(x, z(x), z'(x)) = 0$ и находим функцию $z(x)$.
2. Затем решаем $y' = z(x)$ и получаем общее решение уравнения (2).

Пример. Решить уравнение

$$x^2 y'' = (y')^2.$$

Введем функцию $z = y'$ и решим уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2 z' = z^2.$$

Получив его решение $z = \frac{x}{1 - C_1 x}$, найдем исходную функцию y:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x}{C_1} - \frac{1}{{C_1}^2} ln\,|1 - C_1 x| + C_2, & C_1 \neq 0, \\ \frac{x^2}{2} + C_2, & C_1 = 0, \\ C_2 \quad (\text{это потер. реш.}\, z^2 = 0), & \end{cases} \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Для выделения из множества решений единственного решения можно задать условия:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

Например, $y(1) = 0,\ y'(1) = 2.$

Из последнего условия мы получим

$$C_1 = \frac{1}{2},$$

то есть

$$y(x) = -2x - 4\,ln\,|1 - x/2| + C_2.$$

Из первого условия получим

$$C_2 = 2 - 4\,ln\,2.$$

Теперь частное решение, удовлетворяющее двум дополнительным условиям, имеет вид

$$y(x) = 2(1-x) - 4\ln|2-x|.$$

III тип. Уравнение вида

$$\boxed{F(y, y', y'') = 0.} \tag{3}$$

В этом случае целесообразно сделать замену $z(y) = y'$.

Заметим, что переменной во введенной функции является не x – как в предыдущем случае, а y. Теперь

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$$

Подставляем в (3) и уравнение становится ДУ первого порядка $F(y, z(y), z'(y)) = 0$.

Этапы решения:

1. Сначала решаем уравнение $F(y, z(y), z'(y)) = 0$ и находим функцию $z(y)$.
2. Затем решаем $y' = z(y)$ и получаем общее решение уравнения (3).

Пример. Решить уравнение

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

Сделаем замену $z(y) = y'$ и запишем уравнение в виде

$$z \cdot z'(y) + z^2 = 2e^{-y}.$$

Это уравнение Бернулли.

Очевидно, что здесь целесообразна еще одна замена: $z^2(y) = p(y)$.

Уравнение принимает вид линейного уравнения первого порядка:

$$\frac{1}{2}p'(y) + p(y) = 2e^{-y}.$$

Решаем сначала соответствующее однородное ($p(y) = Ce^{-2y}$), а затем ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$p(y) = C(y) \cdot e^{-2y}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$C'(y) = 4e^{y} + C_1,$$

и значит,

$$p(y) = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}.$$

Следовательно, для определения функции $y(x)$ мы имеем уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}.$$

Это уравнения с разделяющимися уравнениями, и мы должны восстановить первообразные по дифференциалам:

$$\pm \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = dx\ .$$

В результате получим общее решение:

$$\pm\sqrt{4e^y + C_1} = 2x + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для того, чтобы найти частное решение, то есть, определить значения C_1 и C_2, недостаточно одного начального условия при решении задачи Коши. В случае дифференциального уравнения второго порядка задача Коши имеет два начальных условия:

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y'(x_0) = y_1.$$

Для данного примера зададим следующие начальные условия:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Тогда получим $C_1 = -4, C_2 = 0$.

И решение примет вид

$$\pm\sqrt{e^y - 1} = x \quad \text{или} \quad y(x) = ln(1 + x^2).$$