Лекция 8

- Общее уравнение алгебраической поверхности второго порядка.
- Приведение к каноническому виду уравнений поверхностей, не содержащих произведений переменных.
- Эллипсоид, гиперболоиды, конус второго порядка, параболоиды, цилиндрические поверхности второго порядка.
- Их основные свойства и построение по сечениям, параллельным координатным плоскостям.

Поверхности второго порядка.

Определение.

Алгебраической поверхностью 2-го порядка называется поверхность, уравнение которой в Д.П.С.К. можно представить в виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + M = 0, \qquad (*)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0.$

Для любой поверхности 2-го порядка всегда можно подобрать такую новую декартову прямоугольную систему координат, в которой приведенное выше уравнение примет вид канонического уравнения поверхности.

Классификация поверхностей 2-го порядка.

1. Эллипсоид $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Чтобы представить форму эллипсоида и изобразить его на чертеже, применяем метод параллельных сечений.

Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Сечение плоскостями, параллельными плоскости *XOY*:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

1) при $|h|<c$ плоскость $z=h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями

$$a^*=a\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\ b^*=b\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

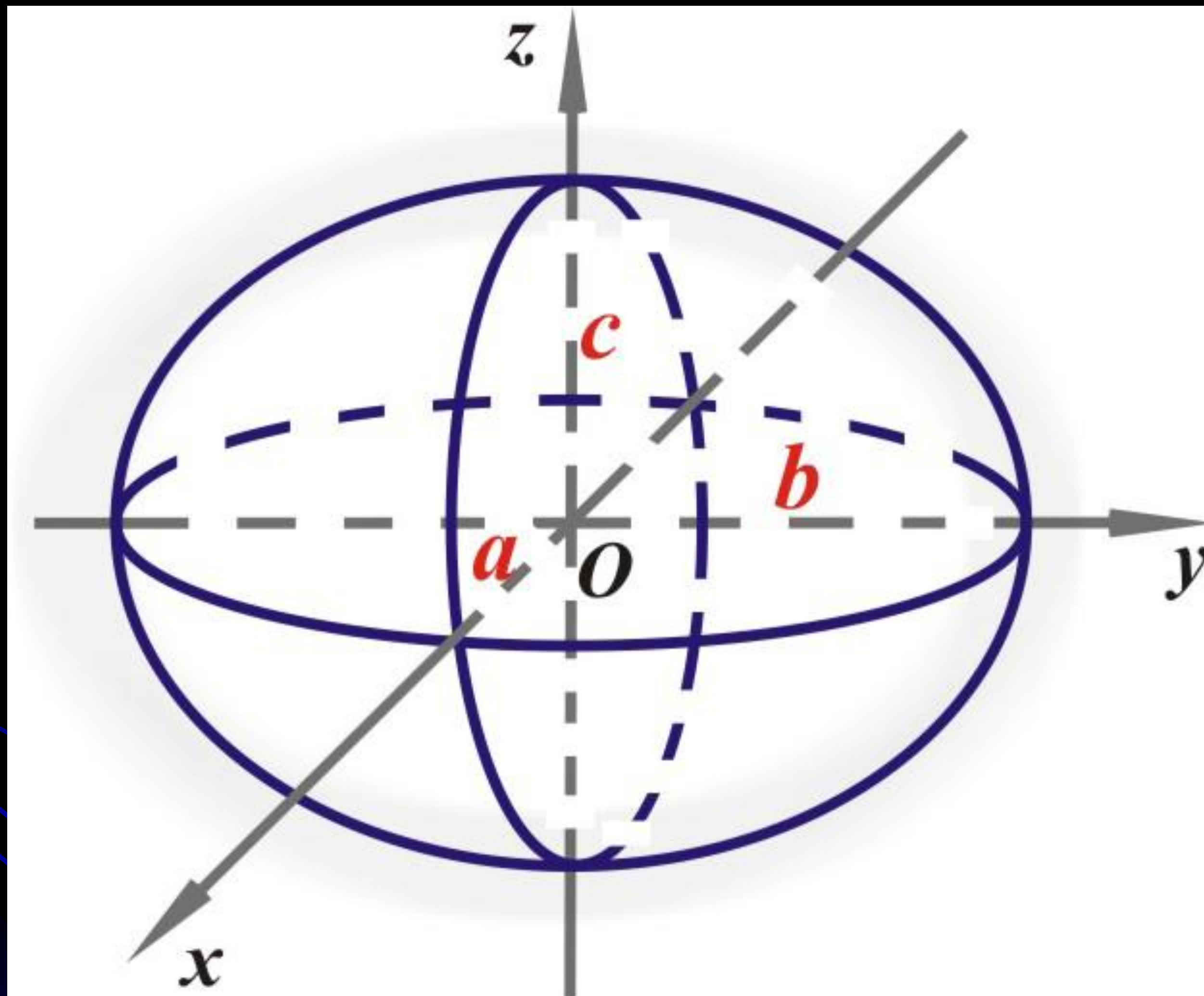
Самый крупный эллипс образуется в сечении плоскостью $z = 0$. При возрастании $|h|$ величины a^* и b^* убывают, т. е. размеры эллипса уменьшаются.

2) при $|h| = c$ плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид в точке $(0,0,h)$, то есть плоскости $z = \pm c$ касаются эллипсоида.

3) при $|h| > c$ плоскость эллипсоид не пересекает.

Аналогичная картина получается при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям OXZ и OYZ.

Таким образом, эллипсоид является замкнутой овальной поверхностью, обладающей тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Величины a,b и c называются полуосями эллипсоида.


z
c
b
a
O
y
x

2. Однополостный гиперболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

1) Сечения плоскостями, параллельными координатной плоскости *XOY*:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

Плоскость $z = h$ пересекает однополостный гиперболоид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, b^* = b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}},$

Очевидно, что самый маленький эллипс будет в сечении координатной плоскостью $z = 0$ (он называется горловым эллипсом). При возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают .

2) Сечение плоскостями, параллельными плоскости *OXZ* :

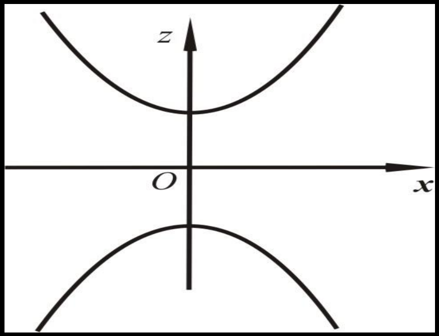
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$$

При $|h| = b$ – пара пересекающихся прямых

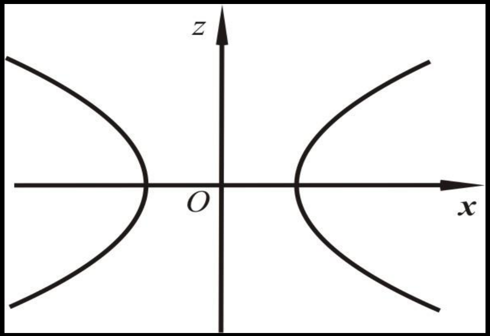
$$z=\pm\frac{c}{a}x,$$

при $|h| \neq b$ – гипербола.

$|h| > b$:



$|h| < b$:

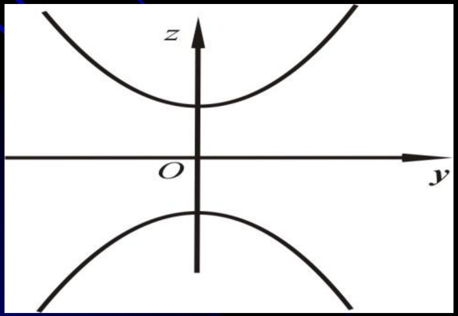


3) Сечение плоскостями, параллельными плоскости OYZ :

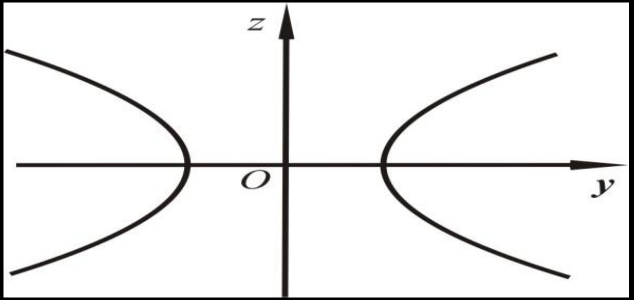
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

- При $|h| = a$ – пара пересекающихся прямых $z = \pm \dfrac{c}{a} y,$
  при $|h| \neq a$ - гипербола.

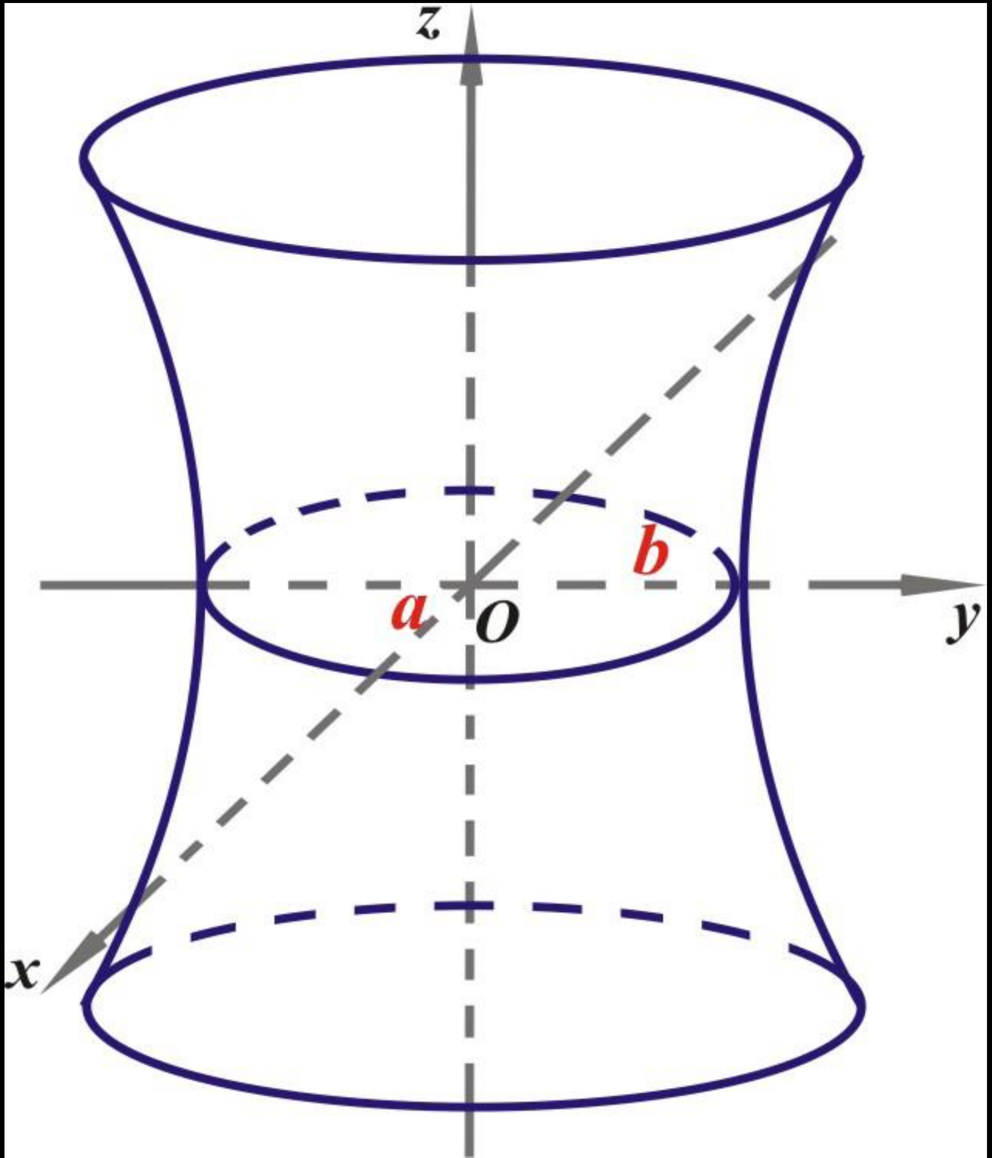
$|h| > a$:



$|h| < a$:



Таким образом, однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся в обе стороны от горлового эллипса.



3. Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$

1) Сечения плоскостями, параллельными плоскости XOY:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

При $|h|>c$ в сечении эллипс с полуосями

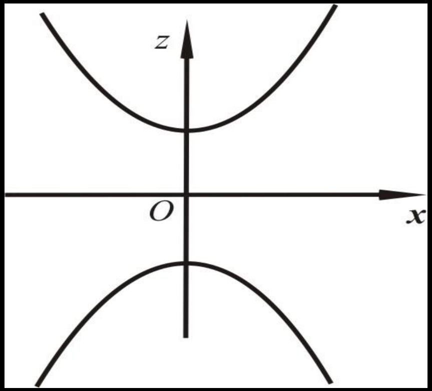
$$a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\ b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

При возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают, то есть размеры эллипса увеличиваются.

- при $|h|=c$ плоскость $z=h$ пересекает двуполостный гиперболоид в точке $(0,0,h)$.
- при $|h|<c$ плоскость гиперболоид не пересекает.

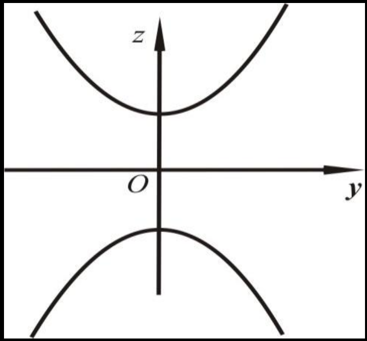
2) В сечении плоскостями, параллельными плоскости OXZ - гипербола:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

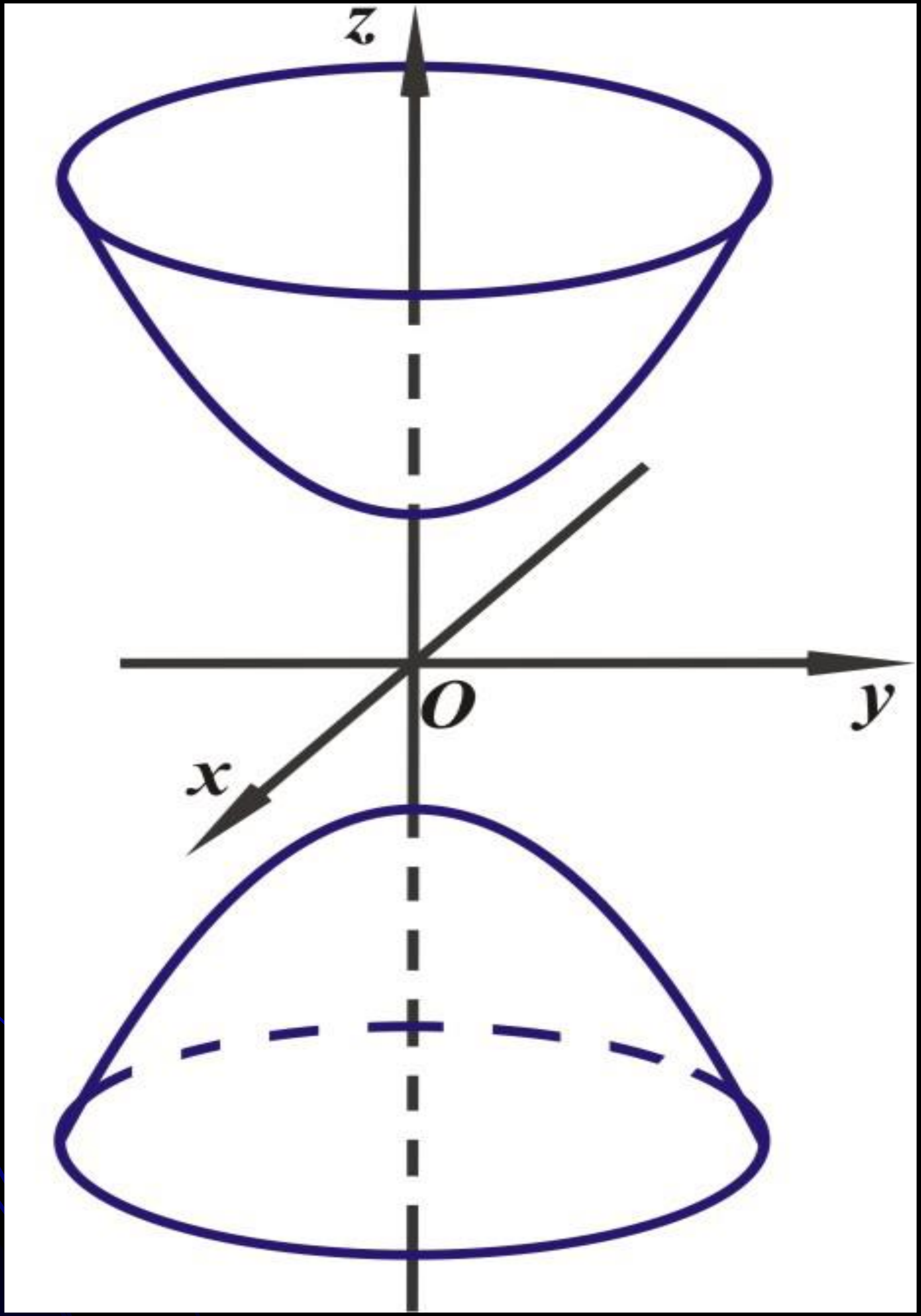


3) В сечении плоскостями, параллельными плоскости OYZ – гипербола:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$



т. о., двуполостный гиперболоид есть поверхность, состоящая из двух отдельных «полостей»; каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Двуполостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.


z
O
y
x

4. Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

Заметим, что если некоторая точка *M* (отличная от начала координат) лежит на этой поверхности, то все точки прямой, которая проходит через начало координат и точку *M*, также лежат на этой поверхности. Прямые, из которых составлен конус, называются его образующими, точка, через которую все они проходят, называется вершиной конуса.

1)Сечения плоскостями, параллельными плоскости *XOY*:

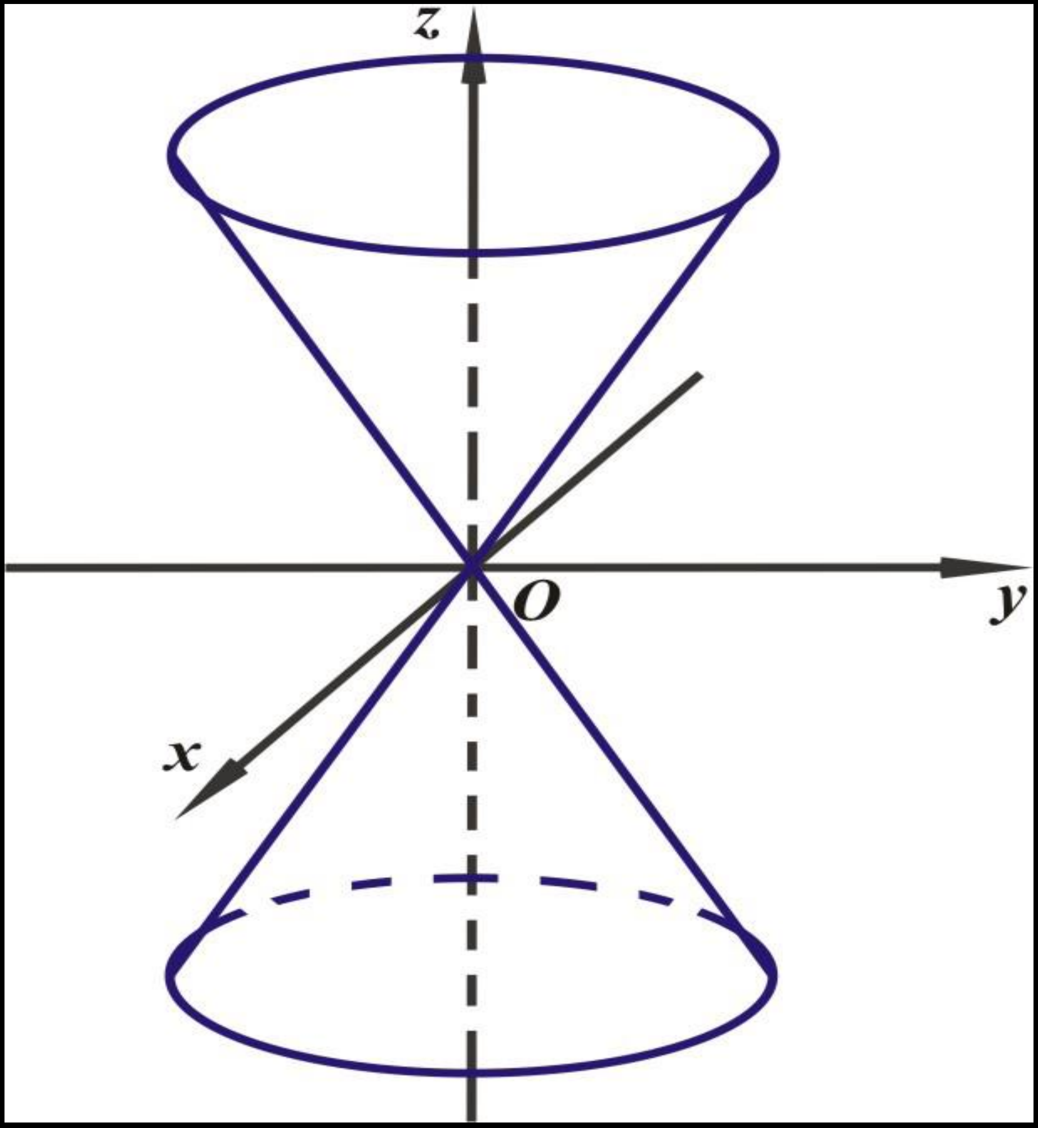
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$$

Плоскость $z=h$ пересекает конус по эллипсу. Если $|h|$, убывая, приближается к 0, то полуоси эллипса также убывают и приближаются к нулю. При $h=0$, в сечении получается точка (0,0,0).

В сечении конуса плоскостями, параллельными плоскостям *OXZ* *и* *0YZ* - гипербола при $h \neq 0$, и пара пересекающихся прямых при $h=0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$



5. Эллиптический параболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

1. В сечении плоскостями, параллельными плоскостям OXZ и OYZ, – парабола.

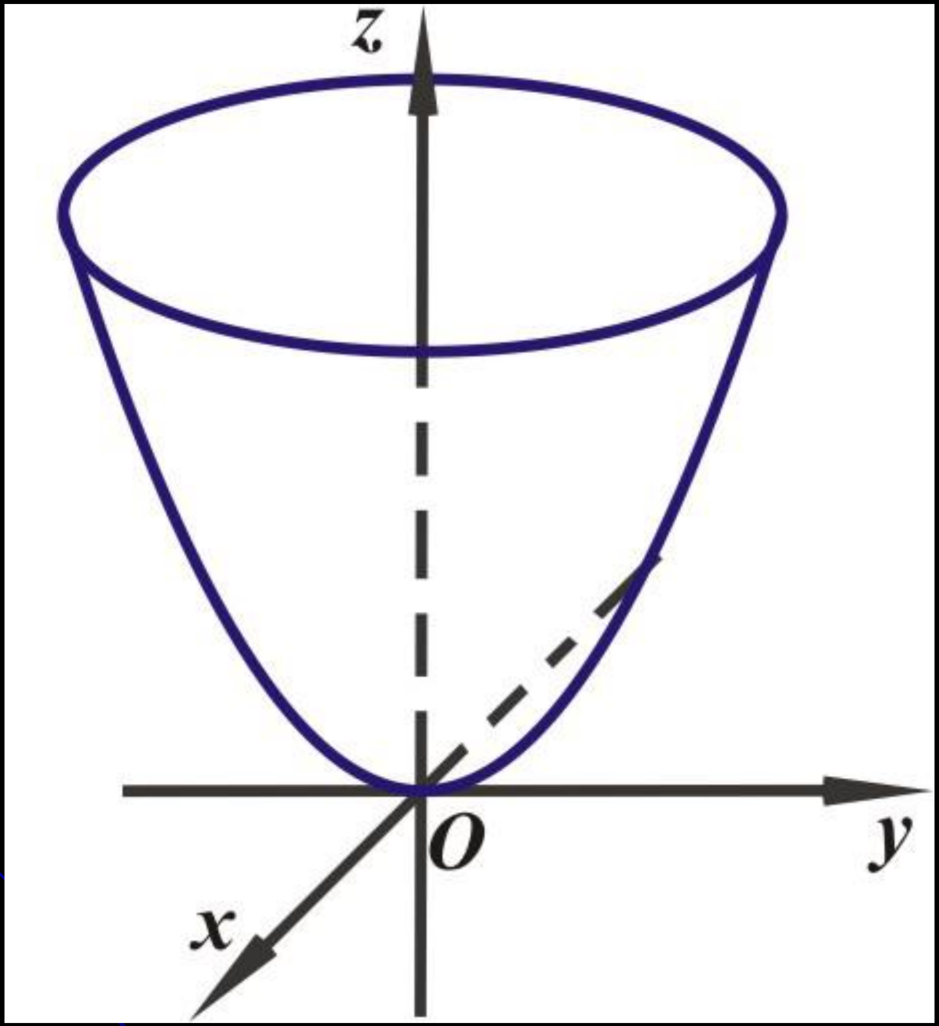
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=z-\dfrac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=z-\dfrac{h^2}{a^2}\\ x=h\end{cases}$$

2. Сечения плоскостями, параллельными плоскости XOY:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h.\\ z=h\end{cases}$$

При $h>0$ в сечении эллипс. При возрастании $|h|$ размеры эллипса увеличиваются. При $h=0$ эллипс вырождается в точку. При $h<0$ плоскость и параболоид не пересекаются.

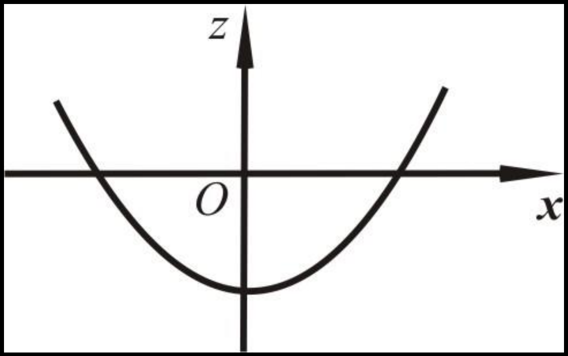
Следовательно, эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.


z
O
y
x

6. Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$

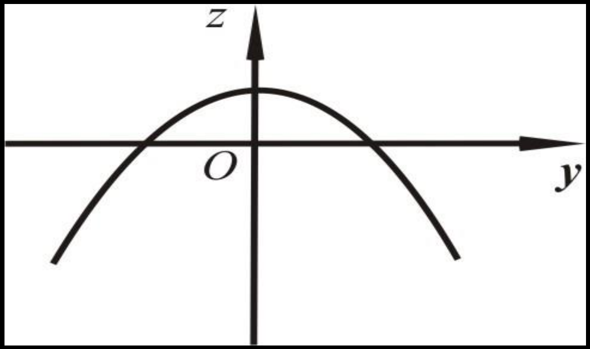
1) В сечении плоскостями, параллельными плоскости OXZ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = z + \frac{h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases}$$ – парабола.



2) В сечении плоскостями, параллельными плоскости OYZ :

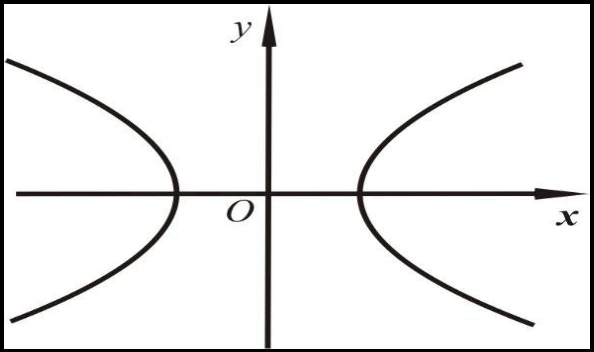
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} - z \\ x = h \end{cases}$$ – парабола.



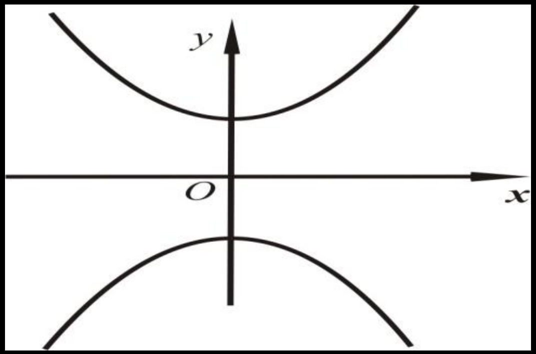
3) В сечении плоскостями, параллельными плоскости XOY:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h. \\ z = h \end{cases}$$

Если $h>0$, то гипербола пересекает плоскость OXZ,



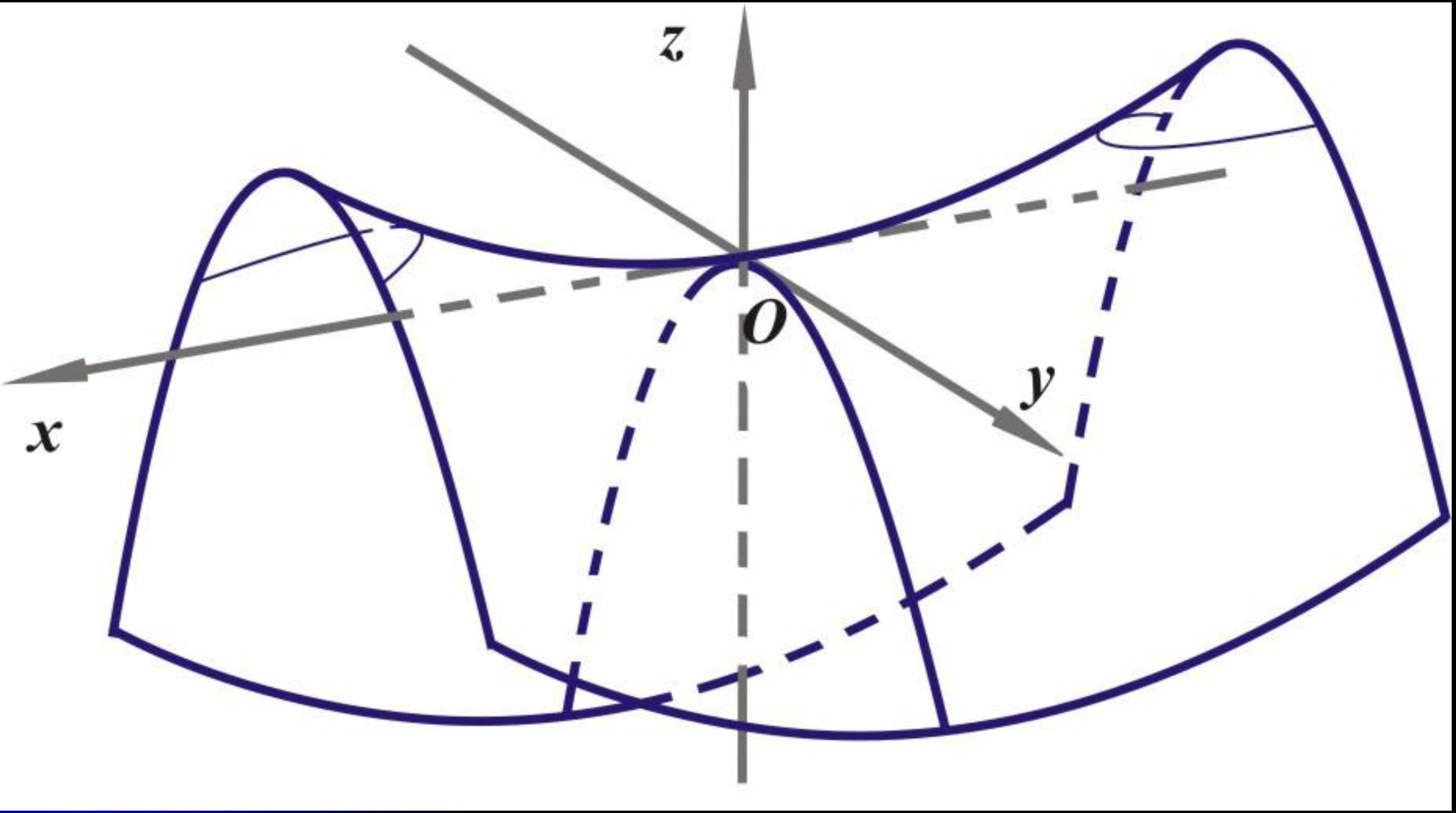
если $h<0$- гипербола пересекает плоскость OYZ.



если $h=0$- пара пересекающихся прямых:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Гиперболический параболоид имеет форму седла. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.



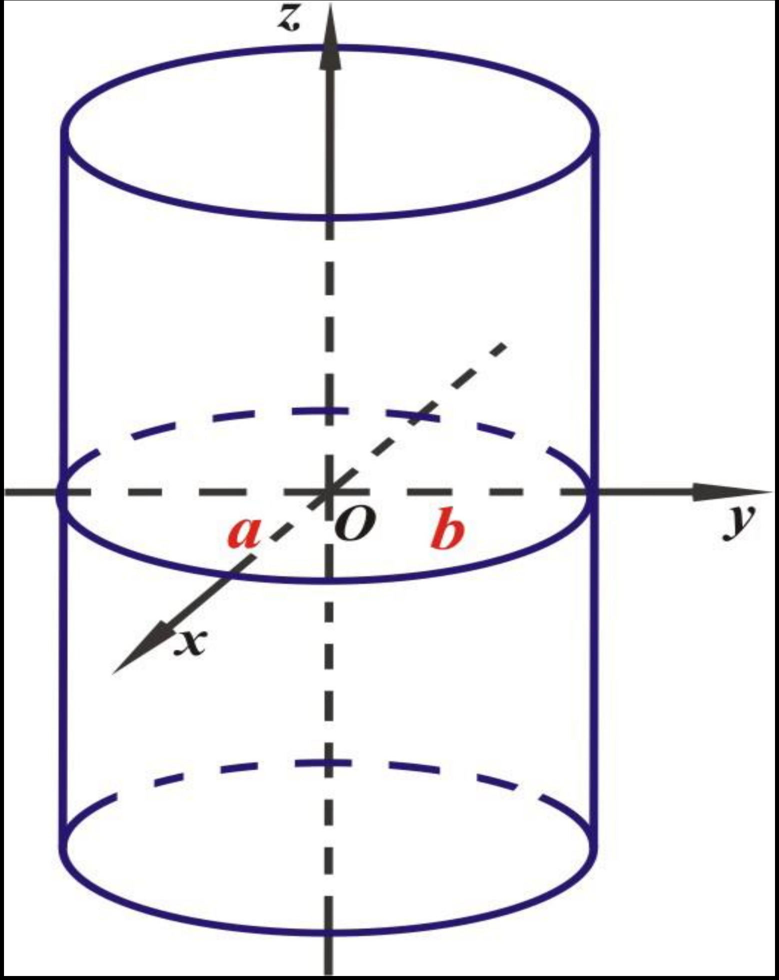
7. Эллиптический цилиндр второго порядка.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Сечения плоскостями, параллельными плоскости *XOY*:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=h \end{cases}$$

При любом *h* плоскость пересекает эллиптический цилиндр по эллипсу с полуосями *a* и *b*, расположенному симметрично относительно осей *OX* и *OY*.

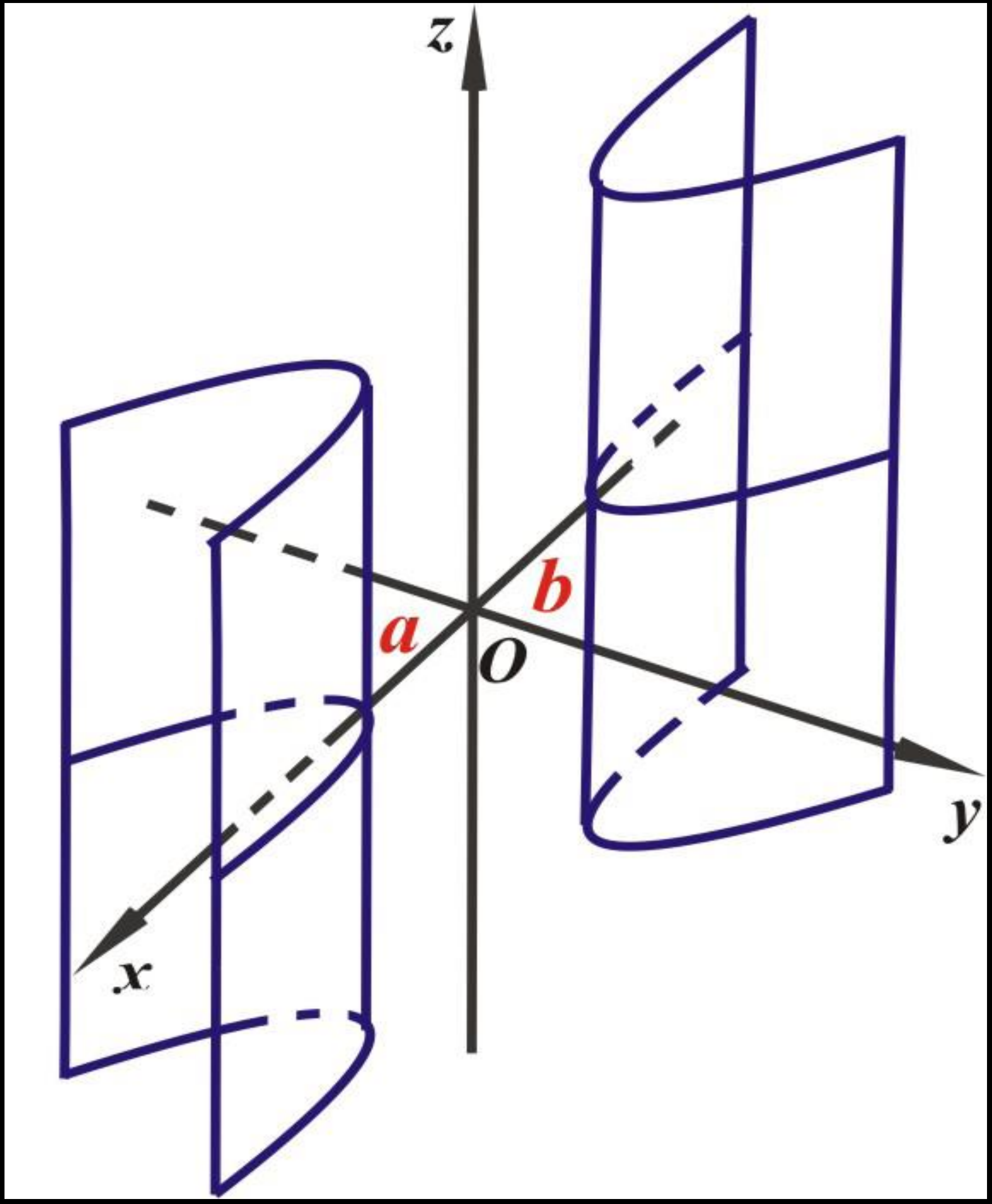


8. Гиперболический цилиндр второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В сечении плоскостями, параллельными плоскости *XOY*: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=h\end{cases}$

При любом h плоскость пересекает гиперболический цилиндр по гиперболе, расположенной симметрично относительно осей *OX* и *OY*.

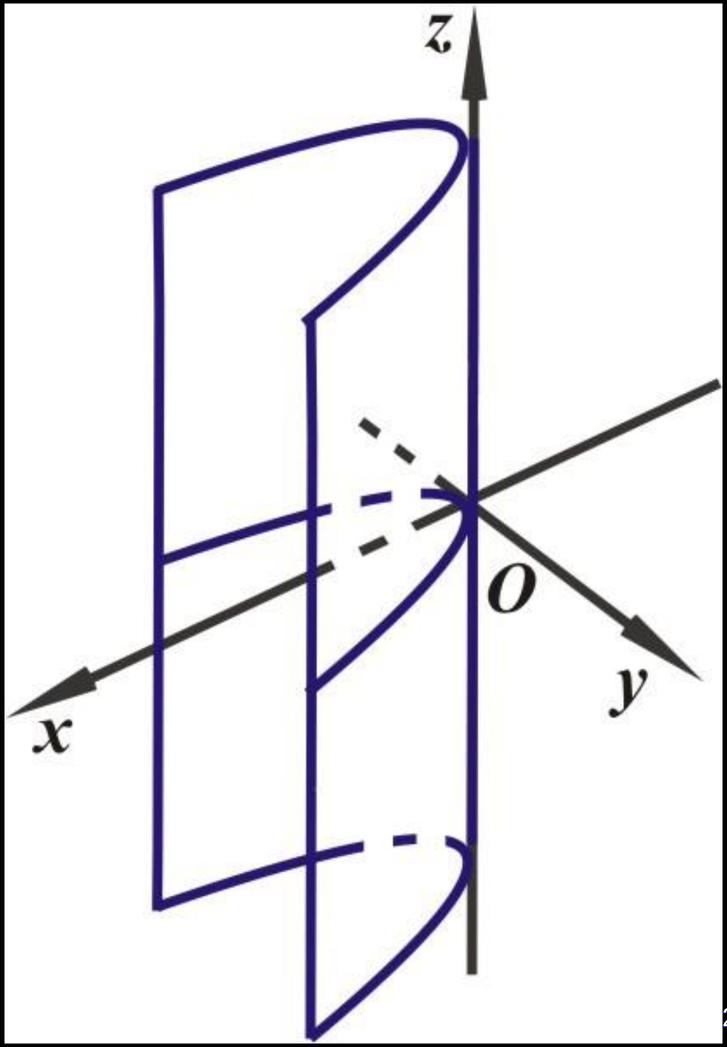


9. Параболический цилиндр второго порядка: $y^2 = 2px$.

В сечении плоскостями, параллельными плоскости XOY

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = h \end{cases}$$

При любом h плоскость пересекает параболический цилиндр по параболе, расположенной симметрично относительно оси OX .



10. Мнимый эллипсоид (не определяет никакого действительного образа) – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$

11. Пара пересекающихся плоскостей – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$

где $bx \pm ay = 0$ – уравнения плоскостей.

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – точка (0,0,0).

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – прямая, совпадающая с осью OZ.

14. $z^2=a^2$ - пара параллельных плоскостей.

15. $z^2=0$ - пара совпадающих параллельных плоскостей.

16. $z^2=-a^2$ - пара мнимых плоскостей.

17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый цилиндр (не определяет никакого действительного образа).