2.1. Типовой расчет 1. “ Дискретные случайные величины ”

2.1.1. Содержание типового расчета.

Типовой расчет состоит из двух задач. В каждой из них задана дискретная случайная величина. Требуется

1. Найти распределение этой случайной величины.
2. Провести контроль расчетов, сложив полученные вероятности. Их сумма должна быть равна единице.
3. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.
4. Вычислить вероятность P события, сформулированного в условии задачи.
5. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.1.2. Примеры выполнения задач типового расчета.

Задача 1. Стрелок стреляет в мишень до первого попадания, но не более четырех раз. Вероятность попадания при одном выстреле равна $p = 0{,}6$. Дискретная случайная величина X – число затраченных патронов. Найти распределение вероятностей величины X, вычислить $M(X)$, $D(X)$, σ(X). Определить вероятность P того, что стрелок израсходует не менее трех патронов. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение: Все расчеты приведены в таблице 2.1. Случайная величина X принимает значения $X = n$ ($n = 1, 2, 3, 4$). Подсчитаем их вероятности. Пусть вероятность промаха $q = 1 – p = 0{,}4$. Очевидно, $P(X = 1) = p$ (стрелок попал с первого раза), $P(X = 2) = qp$ (стрелок первый раз промахнулся, а во второй раз попал), $P(X = 3) = q^2 p$ (стрелок два раза промахнулся, а в третий раз попал), $P(X = 4) = q^3 p + q^4$ (стрелок три раза промахнулся, а в четвертый раз попал; или четыре раза промахнулся, но и в этом случае $X = 4$, так как стрелок стреляет не более четырех раз).

Таблица 2.1

X	P	$X \cdot P$	$X^2 \cdot P$	$F(x)$
1	0,6	0,6	0,6	0
2	$0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$	0,48	0,96	0,6
3	$0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$	0,288	0,864	0,84
4	$0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^4 = 0{,}064$	0,256	1,024	0,936
Σ	1,000	1,624	3,448	

Расчет математического ожидания случайных величин X и X^2 также приведен в таблице 2.1 по формулам (1.26), (1.32):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i; \qquad M(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i; \qquad D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

В столбцах XР и X^2Р записаны значения произведений $x_i p_i$ и $x_i^2 p_i$. В последней строке – суммы элементов соответствующих столбцов.

$M(X) = 1{,}624$; $M(X^2) = 3{,}448$; $D(X) = 3{,}448 - 1{,}624^2 \approx 0{,}81$; $\sigma \approx 0{,}9$.

Вероятность того, что стрелок израсходует не менее трех патронов соответствует вероятности события $X \geq 3$:

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}096 + 0{,}064 = 0{,}16.$

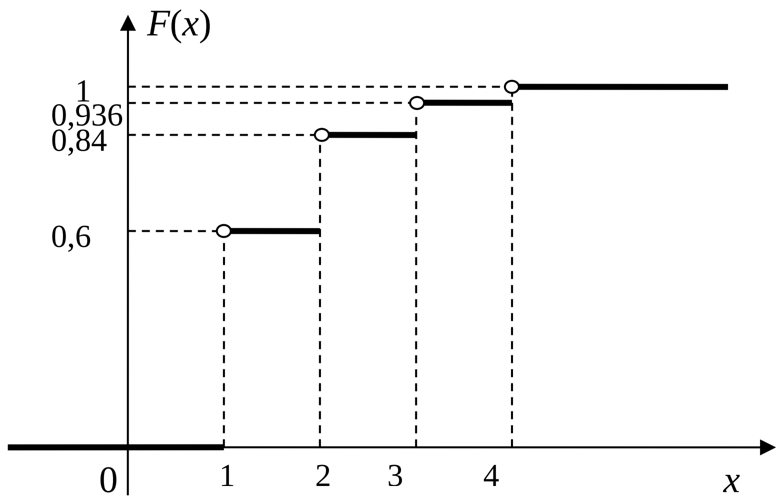

Рис. 2.1.

Функцию распределения $F(x)$ находим по формуле (1.20) как функцию накопленных вероятностей $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$. Полученные значения функции распределения записаны в последнем столбце таблицы 1.3.

Искомая функция распределения имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0,6 & 1 < x \le 2 \\ 0,84 & 2 < x \le 3 \\ 0,936 & 3 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$.

График функции распределения представлен на рис. 2.1.

Ответ: $M(X) = 1,624$; $D(X) \approx 0,81$; $\sigma \approx 0,9$; $P = 0,16$.

Задача 2. Стрелок делает пять независимых выстрелов в мишень. вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число попаданий в цель. Найти распределение вероятностей величины X, вычислить $M(X)$, $D(X)$, σ(X). Определить вероятность P того, что цель будет поражена, т.е. будет хотя бы одно попадание. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение: Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, где $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, тогда вероятности $P(X = m)$ можно вычислить по формуле (1.21):

$$P(X=0)=P_5(0)=C_5^0 p^0 q^5=(0,4)^5=0,0102.$$

$$P(X=1)=P_5(1)=C_5^1 p^1 q^4=5\cdot 0,6\cdot (0,4)^4=0,0768.$$

$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2 p^2 q^3=10\cdot 0,6^2\cdot (0,4)^3=0,2304.$$

$$P(X=3)=P_5(3)=C_5^3 p^3 q^2=10\cdot 0,6^3\cdot (0,4)^2=0,3456.$$

$$P(X=4)=P_5(4)=C_5^4 p^4 q^1=5\cdot 0,6^4\cdot (0,4)=0,2592.$$

$$P(X=5)=P_5(5)=C_5^5 p^5 q^0=0,6^5=0,0778.$$

Проверка: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 0,0102+0,0768+0,2304+0,3456+0,2592+0,0778=1$.

Распределение вероятностей случайной величины X приведено в табл. 2.2.

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины X, имеющей *биномиальное распределение*, могут быть найдены по формулам (1.33):

$$M(X)=np=5\cdot 0,6=3; \qquad D(X)=npq=(np)q=3\cdot 0,4=1,2. \qquad \sigma(X)=\sqrt{1,2}\approx 1,095.$$

Таблица 2.2

X	P	$F(x)$
0	$(0,4)^5 = 0,0102$	0
1	$5\cdot 0,6\cdot (0,4)^4 = 0,0768$	0,0102
2	$10\cdot (0,6)^2\cdot (0,4)^3 = 0,2304$	0,087
3	$10\cdot (0,6)^3\cdot (0,4)^2 = 0,3456$	0,3174
4	$5\cdot (0,6)^4\cdot 0,4 = 0,2592$	0,663

5	$(0,6)^5 = 0,0778$	0,9222
Σ	1,000	

Вероятность того, что цель будет поражена, т.е. будет хотя бы одно попадание соответствует вероятности события $X \geq 1$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0102 = 0,9898.$$

Функцию распределения $F(x)$ находим по формуле (1.20) как функцию накопленных вероятностей $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$. Полученные значения функции распределения записаны в последнем столбце таблицы 2.2,

Искомая функция распределения имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0,0102 & 0 < x \leq 1 \\ 0,087 & 1 < x \leq 2 \\ 0,3174 & 2 < x \leq 3 \\ 0,663 & 3 < x \leq 4 \\ 0,9222 & 4 < x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$.

График функции распределения представлен на рис. 2.2.

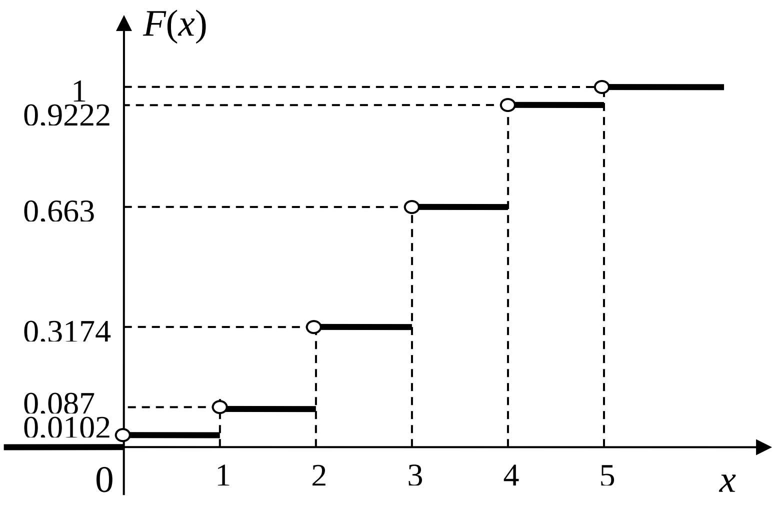

Рис. 2.2.

Ответ: $M(X) = 3$; $D(X) = 1,2$; $\sigma \approx 1,095$; $P = 0,9898$.

Задача 3. В партии из 30 деталей имеется 8 нестандартных, остальные стандартные. Наудачу отобраны 6 деталей. X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти распределение вероятностей дискретной случайной величины X, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Определить вероятность P того, что среди отобранных деталей не более двух нестандартных. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Распределение вероятностей дискретной случайной величины X получено в задаче 1.39 (п. 1.9) и приведено табл. 2.3. Вероятность события $X = 0$ получилась равной нулю, так как расчет вероятностей проводился с точностью четыре знака после запятой. При более точном расчете $P(X = 0) = 0{,}000047$.

Таблица 2.3

X	P	XP	X^2P	$F(x)$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0
1	0,0021	0,0021	0,0021	0
2	0,0272	0,0544	0,1088	0,0021
3	0,1452	0,4356	1,3068	0,0293
4	0,3450	1,3800	5,5200	0,1745
5	0,3548	1,7740	8, 8700	0,5195
6	0,1257	0,7542	4,5252	0,8743
Σ	1,0000	4,4003	20,3329	

Расчет математического ожидания случайных величин X и X^2 также приведен в таблице 2.3 по формулам (1.26), (1.32). В столбцах XP и X^2P записаны значения произведений x_ip_i и $x_i^2p_i$. В последней строке – суммы элементов соответствующих столбцов.

$M(X) \approx 4{,}4$; $M(X^2) = 20{,}3329$; $D(X) = 20{,}3329 - 4{,}4003^2 \approx 0{,}970$; $\sigma \approx 0{,}985$.

Вероятность того, что среди отобранных деталей не более двух нестандартных соответствует вероятности события $X \geq 4$.

$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}3450+0{,}3548+0{,}1257 = 0{,}8255.$

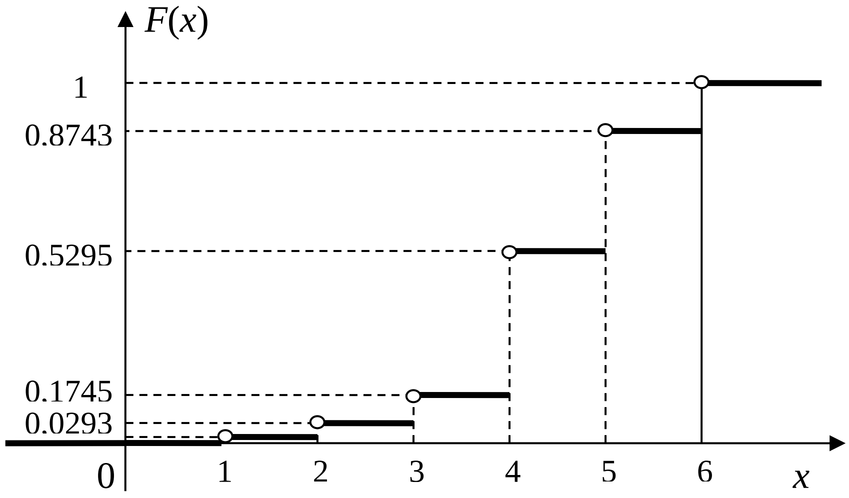

Рис. 2.3.

Функцию распределения $F(x)$ находим по формуле (1.20) как функцию накопленных вероятностей $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$. Полученные значения функции распределения записаны в последнем столбце таблицы 2.3.

Искомая функция распределения имеет вид: $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 0{,}0021 & 1 < x \leq 2 \\ 0{,}0293 & 2 < x \leq 3 \\ 0{,}1745 & 3 < x \leq 4 \\ 0{,}5195 & 4 < x \leq 5 \\ 0{,}8743 & 5 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}.$$

График функции распределения представлен на рис. 2.3.

Ответ: $M(X) = 4{,}4$; $D(X) = 0{,}970$; $\sigma \approx 0{,}985$; $P = 0{,}8255$.

2.1.3. Оформление отчета.

В отчете по типовому расчету должны быть представлены расчеты таблицы распределения заданной случайной величины X, ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения), и вероятности события, заданного в задаче, записаны расчетные формулы и даны необходимые пояснения.

Все числовые значения должны быть вычислены в десятичных дробях, вероятности с четырьмя знаками после запятой, числовые характеристики случайной величины X – с тремя знаками после запятой.