«Математическая вертикаль +»
2021/2022 уч. год

Материалы по алгебре для 10 класса
Комплексные числа

Замечание для учителя

Программа курса алгебры предполагает 6 часов на изучение темы «Комплексные числа». Конечно, пройти за это время весь материал, содержащийся в данной разработке, невозможно. Необязательные разделы мы постарались отметить звёздочками. Например, раздел 2.1 про числа вида $a + b\sqrt{2}$ несложен и очень полезен для лучшего усвоения идеи о расширении поля действительных чисел, но вовсе не является обязательным для дальнейшего понимания. Нам кажется необходимым, чтобы школьники имели представление о комплексной плоскости и умели выполнять операции с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

В каждом из первых четырёх разделов имеется достаточное количество тематических задач для решения. Последний раздел «Разные задачи» содержит два блока. Небольшой блок «Ключевые задачи» содержит не очень сложные, но важные, на наш взгляд, задачи. Их можно использовать для повторения темы «Комплексные числа». Более обширный блок дополнительных задач предназначен для наиболее сильных, интересующихся школьников. Для успешного решения этих задач могут понадобиться дополнительные теоретические сведения.

Замечания, вопросы, комментарии присылайте на почту `mv@179.ru`.

Список используемых обозначений

- $\odot$ отмечает определения;
- $\boxed{\rightarrow}$ отмечает примеры;
- $\boxed{?}$ отмечает вопросы.
- Звёздочкой «*» отмечены задачи и разделы, не входящие в обязательную программу. Часто они сложнее остальных, иногда — гораздо сложнее.
- Λ отмечает задачи на логику.

Содержание

1 Введение

Можно ли извлечь квадратный корень из отрицательного числа? На уроках математики мы много раз обсуждали, что это невозможно. Ведь квадрат всякого числа неотрицателен. Однако математики придумали специальное, «новое число» — мнимую единицу — квадрат которой по определению равен -1. Это число не соответствует никакой точке на числовой прямой, и нет никакого смысла говорить об отрезке такой длины или о температуре такой величины. Зачем же тогда такое число нужно?

Во-первых, математики далеко не всегда рассматривают задачи, соответствующие реальной жизни. Красота математических структур и доказательств приносит их ценителям не меньшее наслаждение, чем, например, многим людям — красота музыки.

Комплексные числа впервые упоминаются в труде Кардано (1545 г.), по сути — в процессе формального решения квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Кардано в комментарии к своему решению пишет: «эти сложнейшие величины бесполезны, хотя и весьма хитроумны».

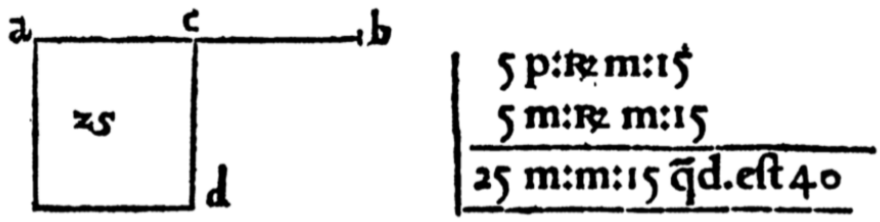


Рис. 5.1. Из книги Кардано Ars Magna.[1]

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

Но оказалось, что комплексные числа не только сложны и красивы, но и очень полезны. Уже в 1572 году Бомбелли заметил, что с их помощью можно находить в том числе и действительные («обычные») корни уравнений третьей степени. А сейчас комплексные числа используются во многих разделах математики и физики и помогают решать в том числе и очень прикладные задачи!

Закон Ома для сложной цепи

Z:U = $ZI = (iL\omega + R)I$ (i - мнимая единица, U - напряженность, L – индуктивность, ω – частота, R – омическое сопротивление, I – электрический ток).

Физика элементарных частиц, теория информации

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)exp(2\pi i\omega t)d\omega \leftrightarrow \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)exp(-2\pi i\omega t)dt$$

Квантовая механика

$$a(\partial S/\partial t)-i\hbar(\partial a/\partial t)+(a/2m)(\nabla S)^2-(i\hbar/2m)a\Delta S-$$

$$-(i\hbar/m)\nabla S\nabla a-(\hbar^2/2m)\Delta a+Ua=0.$$

2 Комплексные числа: алгебраические операции

2.1 *Числа вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b

Вы знаете, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных корней, т.е. квадрат никакого рационального числа не может быть равен 2.

Для положительного действительного числа, квадрат которого равен 2, введено обозначение «$\sqrt{2}$»:

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Благодаря введению этого обозначения корни уравнения $x^2 = 2$ можно записать вот так:

$$x_1 = \sqrt{2} \ \text{ и } x_2 = -\sqrt{2}.$$

Вопрос 1. Каков геометрический смысл числа $\sqrt{2}$?
Подсказка. Рассмотрите диагональ квадрата со стороной 1.

Пример 1. Найти корни уравнения $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Замечание 1. Поскольку дискриминант уравнения положителен, оно имеет два действительных корня.

Решение. $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$.
Ответ. $3 \pm \sqrt{2}$.

Выражения вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, обозначают некоторые действительные числа.

Пример 2. Найти сумму, произведение и частное чисел $3 - 2\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$.
Решение.

- $(3 - 2\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 3 + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$;
- $(3 - 2\sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2}) = 3 \cdot 1 - 2\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -1 + \sqrt{2}$;
- $(3-2\sqrt{2}) : (1+\sqrt{2}) = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2})^2} = \dfrac{3 + 4 - 5\sqrt{2}}{1 - 2} = \dfrac{7 - 5\sqrt{2}}{1 - 2} = \dfrac{7 - 5\sqrt{2}}{-1} = -7 + 5\sqrt{2}$.

Ответ. $4 - \sqrt{2}$; $\quad -1 + \sqrt{2}$; $\quad -7 + 5\sqrt{2}$.

Вопрос 2. Все ответы в примере 2 имеют вид $a + b\sqrt{2}$, где a, b — какие-то рациональные коэффициенты. Как вы думаете, случайно ли это? Будут ли, например, сумма, произведение и частное чисел $17 - 37\sqrt{2}$ и $91 + 3\sqrt{2}$ иметь аналогичный вид?

Задача 1. **а)** Докажите, что если $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, то $a = c$ и $b = d$.
б) Докажите, что произведение и сумму чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, можно единственным образом представить в таком же виде.

Пример 3. Решить уравнение $(3+2\sqrt{2})x = 1$:

Решение.

$$x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}};$$
$$x = \frac{1\cdot(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})};$$
$$x = \frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2};$$
$$x = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8};$$
$$x = 3-2\sqrt{2}.$$

Ответ. $3-2\sqrt{2}$.

Задача 2. Представьте следующие числа в виде $a+b\sqrt{2}$, где a, b — рациональные числа:

а) $3+\sqrt{32}$;
б) $2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
в) $\dfrac{21}{3-\sqrt{2}}$;
г) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$;
д) $\sqrt{0{,}16}+\sqrt{4{,}5}$;
е) $1+\dfrac{9}{\sqrt{18}}$;
ж) $\dfrac{26}{91-5\sqrt{338}}$;
з) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{0{,}5+\sqrt{0{,}5}}$.

Задача 3. Укажите среди решений следующих уравнений все числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа:

а) $2x^2 = 1$;
б) $(3-2\sqrt{2})x = 1$;
в) $x^2+2x-1 = 0$;
г) $x^3+x^2-2x-2 = 0$;
д) $(x^2-2x-2)(2x^2+8x+7) = 0$.

Задача 4. Докажите, что число $\sqrt{3}$ нельзя представить в виде $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональные числа.

Задача 5. Найдите все рациональные a, при которых выполнено равенство:

а) $(a+\sqrt{2})(-2+4a\sqrt{2}) = 3-\sqrt{2}$;
б) $(a+\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$.

Задача 6. **а)** Проверьте, что $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1$.
б) Найдите $(1-\sqrt{2})^5\cdot(1+\sqrt{2})^6$.
в) Докажите, что $(1-\sqrt{2})^{2n}\cdot(1+\sqrt{2})^{2n} = 1$ для любого натурального n.

Задача 7*. (*Уравнение Пелля*) Докажите, что уравнение $x^2-2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах. *Решение этой задачи можно посмотреть, например, в книге [1] в задачах 310–313. Решению уравнений Пелля посвящена книга [2].*

Задача 8*. Рассмотрим теперь числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — *целые*. Верно ли, что сумма, разность, произведение и частное любых двух из них представимы в том же виде? Если нет, то попробуйте придумать дополнительные условия, при которых указанное свойство будет выполняться.
Почитать про множество таких чисел можно в книге [2], стр. 15–16.

2.2 Выражения вида $a+b\sqrt{-1}$ с действительными a и b. Действия над ними

Рассмотрим символ $\sqrt{-1}$, для которого по определению:

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1.$$

Выражение «$\sqrt{-1}$» нужно рассматривать как символ, не имеющий значения среди обычных (действительных) чисел. Точно так же, как выражение «$\sqrt{2}$» не имеет значения среди рациональных чисел.

Как и с числами вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные, с выражениями вида $a+b\sqrt{-1}$, где a и b действительные, можно производить арифметические операции. Условимся, что эти операции происходят по тем же правилам, что и для выражений с «$\sqrt{2}$».

$\boxed{\rightarrow}$ | **Пример 4.** Представьте выражение $\sqrt{-25}$ в виде $b\cdot\sqrt{-1}$, где b — действительное число.
Решение. $\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5\sqrt{-1}$.
Ответ. $5\sqrt{-1}$.

Задача 9. Представьте в виде $b\cdot\sqrt{-1}$, где b — действительное число:

а) $\sqrt{-4}$; **б)** $\sqrt{-49}$; **в)** $\sqrt{-100}$; **г*)** $\sqrt{-2}$.

Задача 10. Вычислите значение выражения:

а) $(-\sqrt{-1})^2$; **б)** $(3\sqrt{-1})^2$; **в)** $1{,}7\cdot(\sqrt{-1})^4$; **г)** $-10\cdot(-\sqrt{-1})^{2022}$.

$\boxed{\rightarrow}$ | **Пример 5.** Пусть $z=3-2\cdot\sqrt{-1}$ и $w=1+\sqrt{-1}$. Найти $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$ и $z:w$.
Решение.

- $z+w=3-2\sqrt{-1}+1+\sqrt{-1}=3+1+(-2+1)\sqrt{-1}=4-\sqrt{-1}$;
- $z-w=3-2\sqrt{-1}-1+\sqrt{-1}=3-2\sqrt{-1}-1-\sqrt{-1}=2-3\sqrt{-1}$;
- $z\cdot w=(3-2\sqrt{-1})\cdot(1+\sqrt{-1})=3\cdot1+3\cdot\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}\cdot1-2\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=3+3\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}-2\cdot(-1)=5+\sqrt{-1}$;
- $z:w=\dfrac{3-2\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}=\dfrac{(3-2\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})}{(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})}=\dfrac{3-2\sqrt{-1}\cdot1-3\sqrt{-1}+2\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}{1^2-(\sqrt{-1})^2}=\dfrac{3-2\sqrt{-1}-3\sqrt{-1}+2\cdot(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-5\sqrt{-1}}{1+1}=\dfrac{1-5\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\sqrt{-1}.$

Ответ. $4-\sqrt{-1}$, $2-3\sqrt{-1}$, $5+\sqrt{-1}$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\sqrt{-1}$.

Задача 11. Найдите $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$, $z:w$, если:
а) $z=1-\sqrt{-1}$, $w=1+2\sqrt{-1}$; **б)** $z=0{,}5+5\sqrt{-1}$, $w=-\sqrt{-1}$.

2.3 Алгебраическая форма записи комплексного числа $z = a + bi$. Арифметические операции над комплексными числами

Мы много раз обсуждали, что уравнение $x^2 = -1$ не имеет корней (среди действительных чисел), а символ «$\sqrt{-1}$» не соответствует никакому действительному числу.Введём для $\sqrt{-1}$ специальное обозначение.

⊙ **Определение 1.** *Мнимая единица* (обозначаемая буквой i) — это символ, для которого выполняется соотношение $i^2 = -1$.

Рассматривают также выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Это «новый вид чисел» — *комплексные числа.*

Определение 2. *Комплексным числом* z называется пара действительных чисел $(a; b)$. *Алгебраической формой записи комплексного числа* z называется выражение $z = a + bi$. При этом число a называют *вещественной* (или *действительной*) *частью* комплексного числа z (и обозначают $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* комплексного числа z (и обозначают $\operatorname{Im} z$). Если $a = 0$, то комплексное число называется *чисто мнимым.* Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.
Два комплексных числа называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.

? **Вопрос 3.** Верно ли, что наши «обычные» действительные числа — частный случай комплексных чисел?

Каждое вещественное число $x \in \mathbb{R}$ можно рассматривать как комплексное число $x+0i$, поэтому говорят, что множество комплексных чисел является расширением множества вещественных чисел, а множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Комплексные числа — это новый объект, не встречавшийся нам ранее. Мы его только что определили. Теперь договоримся о том, как с этим объектом выполнять арифметические операции.

Определение 3. Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда:

- *Суммой комплексных чисел* z и w называется комплексное число
$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$
- *Разностью двух комплексных чисел* z и w называется комплексное число
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$
- *Произведением двух комплексных чисел* z и w называется комплексное число
$$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$
- *Частным от деления комплексного числа* z на комплексное число w называется такое комплексное число u, что
$$u \cdot w = z$$

? **Вопрос 4.** Может ли сумма двух чисто мнимых чисел быть действительным числом?

? **Вопрос 5.** В каком случае разность двух комплексных чисел является действительным числом?

Вопрос 6. Определение умножения выше выглядит достаточно громоздко. Можно ли вместо того, чтобы учить это определение, обычным способом раскрыть скобки в выражении $(a+bi)(c+di)$ и затем учесть, что $i^2=-1$?

Подсказка. Раскройте скобки и убедитесь, что получится как раз то, что написано в определении!

Можно доказать, что свойства сложения и умножения комплексных чисел такие же, как и у действительных чисел.

Теорема 1 (*Свойства арифметических операций*). Для любых комплексных чисел выполняются равенства:

- $z+w=w+z$ (*коммутативность сложения*)
- $(z+w)+u=z+(w+u)$ (*ассоциативность сложения*)
- $z\cdot w=w\cdot z$ (*коммутативность умножения*)
- $(z\cdot w)\cdot u=z\cdot(w\cdot u)$ (*ассоциативность умножения*)
- $z\cdot(w+u)=z\cdot w+z\cdot u$ (*дистрибутивность сложения и умножения*)

Задача 12. Докажите перечисленные в теореме 1 свойства.

Определение 4. В множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ есть два выделенных элемента — **ноль**: $0=0+0i$ и **единица**: $1=1+0i$.

Теорема 2. Для нуля, единицы и любого $z\in\mathbb{C}$ верны следующие свойства:

$$z+0=z \text{ и } z\cdot 1=z.$$

Вопрос 7*. Все действительные числа, кроме нуля, делятся на положительные и отрицательные. Как вы думаете, можно ли таким же образом разделить комплексные числа? Будут ли при этом выполняться свойства для сложения и умножения (положительное на положительное даёт положительное и т.п.)?

Вопрос 8. Мы знаем, что для каждого действительного числа существует противоположное ему число, в сумме с которым данное число даёт 0. Например, -4 и 4 или $5-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}-5$. А как обстоят дела с противоположными комплексными числами?

Для каждого комплексного числа z существует такое w, что $z+w=0$. В этом случае число w называется *противоположным* числом к числу z. Пишут $w=-z$.
Если $z=a+bi$, то $-z=-a+(-b)i$. Действительно, $z+(-z)=a+bi+(-a)+(-b)i=a+bi-a-bi=0$.

Теорема 3. Для любого комплексного числа z и любого ненулевого комплексного числа w существует единственное комплексное число u, являющееся частным от деления z на w.

Доказательство. Будем выполнять привычные нам алгебраические преобразования. Их корректность для комплексных чисел следует из теоремы 1.

$$z:w=\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Поскольку $w\neq 0$, то $c^2+d^2\neq 0$ и полученные дроби определены. □

? **Вопрос 9.** На уроках математики мы встречались с взаимно обратными числами — например, взаимно обратны 7 и $1/7$, 0,2 и 5, $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$. А как обстоят дела с числом, обратным к данному комплексному числу?

Для каждого комплексного числа $z \neq 0$ существует такое u, что $z \cdot u = 1$. В этом случае число u называется *обратным* числом к числу z. Пишут $u = \frac{1}{z} = z^{-1}$.

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 6.** Найдём сумму, произведение, разность и частное выражений $1-2i$ и $3+i$.

Решение.

- $(1-2i)+(3+i) = 1+3-2i+i = 4-i$;
- $(1-2i)\cdot(3+i) = 1\cdot 3 - 2i\cdot 3 + 1\cdot i - 2i\cdot i = 3-6i+i-2\cdot(-1) = 5-5i$;
- $(1-2i)-(3+i) = 1-2i-3-i = -2-3i$;
- $(1-2i) : (3+i) = \dfrac{1-2i}{3+i} = \dfrac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{1\cdot 3 - 2i\cdot 3 + 1\cdot(-i) - 2i\cdot(-i)}{3^2-i^2} = \dfrac{3-6i-i+2i^2}{3^2-(-1)} = \dfrac{3-7i+2\cdot(-1)}{9+1} = \dfrac{1-7i}{10} = 0{,}1-0{,}7i.$

Ответ. $4-i$, $5-5i$, $-2-3i$, $0{,}1-0{,}7i$.

Основные числовые множества в математике.

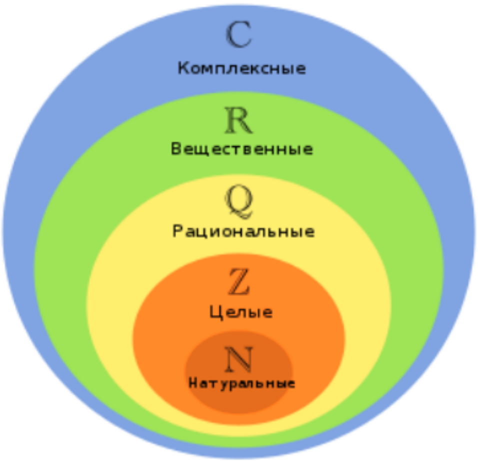
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, то есть тех, которые используются для счёта предметов;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Расширение множества $\mathbb{N}$: к натуральным числам добавили 0 и «отрицательные числа», т.е. числа, противоположные натуральным.

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Расширение множества $\mathbb{Z}$: к целым числам добавили отношения целых чисел, записываемые дробями $\frac{m}{n}$, где m и n — целые, $n \neq 0$.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Расширение множества $\mathbb{Q}$: к рациональным числам добавили положительные и отрицательные «иррациональные числа», которые позволяют измерять длины любых отрезков. Действительные числа записывают при помощи бесконечных десятичных дробей.

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Расширение множества $\mathbb{R}$: при помощи i — мнимой единицы, т.ч. $i^2=-1$. Комплексные числа записываются в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Комплексные числа позволяют решить любые квадратные уравнения и уравнения более высоких степеней. Комплексные числа используют в различных разделах математики и физики.



Если использовать символ $\subset$, который означает «быть подмножеством», то мы можем так представить систему числовых множеств:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Задача 13. Найдите действительную и мнимую части чисел:

а) $1 + i$;
б) $987 - 123i$;
в) $0{,}999i - 1{,}001$;
г) $\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) $2022i$;
е) $\sqrt{3} - \sqrt{5}i$;
ж) $\pi^\pi + \frac{1000}{0{,}025}$;
з) $-2 - 2i^2$.

Задача 14. Найдите:

а) $\operatorname{Im}(2{,}1 - 3{,}04i)$; **б)** $\operatorname{Re}(-3{,}6 + \frac{2}{9}i)$; **в)** $\operatorname{Im}(3 + \frac{4}{i})$; **г)** $\operatorname{Re}\dfrac{6+5i}{3-i}$.

Задача 15. Найдите сумму, произведение, разность и частное чисел:
а) $2 + 3i$ и $1 - i$; **б)** $10 - 0{,}5i$ и $6 + 4i$; **в)** $0{,}22 + i$ и $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

Задача 16. Найдите степени числа i:
а) i^3; **б)** i^4; **в)** i^5; **г)** i^6; **д)** i^{100}; **е)** i^{101}; **ж)** i^{2022}; **з)** i^{-1}; **и)** i^{-2}; **к)** i^{-50}.

Задача 17. Рассмотрим выражение i^n при натуральном n. Как найти **а)** значение этого выражения; **б)** действительную и мнимую части в зависимости от n?
в) Та же задача, но теперь n — целое.

Задача 18. Найдите значение выражения:
а) $(2i)^2$; **б)** $(-\frac{2}{3}i)^3$; **в)** $(-3i^{11})^{10}$; **г)** $i^3 - 2i^5 + (2i)^4 + \frac{3}{i}$.

Задача 19. Найдите значение выражения и представьте в алгебраической форме:

а) $(1+i)^2$;
б) $(1+i)^3$;
в) $(1+i)^4$;
г) $(1+i)^6$;
д) $(1+i)^{10}$;
е*) $(1+i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$;
ж*) $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$.

Задача 20. Найдите значение выражения. Ответ запишите в виде комплексного числа в алгебраической форме:

а) $(2-i)(i-3)$;
б) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$;
в) $(2i - i^2)^2 + (1-3i)^3$;
г) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;
д) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$;
е) $\dfrac{(1-i)^2}{2+i}$;
ж) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;
з) $\dfrac{(1-i)^3}{i\cdot(3-i)}$;
и) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$;
к) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;
л) $\dfrac{(7+i)(2+i)}{i-1} - \dfrac{(7-i)(i-2)}{i+1}$;
м) $\dfrac{(1-5i)^2 - (1+i)^3}{(1+2i)^3 + (7+i)^2}$;
н) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^2$;
о) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{13}$;
п) $(\sqrt{3}+i)^7 + (\sqrt{3}-i)^7$;
р) $\dfrac{(1+\sqrt{3})^2\cdot(1+i)^3}{(2i)^7\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2}$.

2.4 Комплексно-сопряжённые числа. Модуль комплексного числа

Определение 5. Если дано комплексное число $z = a+bi$, то комплексное число $\overline{z} = a-bi$ называется *комплексно-сопряжённым* (или просто *сопряжённым*) к этому числу z.

Теорема 4. Сумма и произведение сопряжённых чисел есть число действительное.

Доказательство. Пусть даны сопряжённые числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$. Тогда:

- $z + \overline{z} = a + bi + (a - bi) = a + a + bi - bi = 2a \in \mathbb{R}$;
- $z \cdot \overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a \cdot a + a \cdot (-bi) + bi \cdot a + bi \cdot (-bi) = a^2 + abi - abi + b^2 \cdot (-i^2) =$
  $= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Определение 6. *Модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$. Обозначение: $|z|$.

Задача 21. Найдите число, сопряжённое к данному:
а) $7 + 3i$; **б)** $1000 - 2022i$; **в)** 0; **г)** $5\sqrt{3}i + 3{,}024$; **д)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i - \sqrt[3]{\pi}i^3$; **е)** $2\frac{1}{3} - \sqrt{2}i$;
ж) год вашего рождения.

Задача 22. Найдите сумму и произведение чисел z и $\overline{z}$, если

а) $z = 3 + 4i$; **б)** $z = \sqrt{6}i$; **в)** $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Задача 23. Найдите:
а) $|1 + i|$, **б)** $|1 - i\sqrt{3}|$, **в)** $|-\sqrt{10}i|$, **г)** $|1{,}5 - 0{,}8i|$, **д)** $|-4\pi|$, **е)** $|\frac{5}{13}i - \frac{12}{13}|$,
ж) $|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i|$, **з)** $|0|$.

Задача 24. Свойства комплексного сопряжения. Докажите,что для любых $z, w \in \mathbb{C}$:

а) $\overline{\overline{z}} = z$;
б) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
в) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
г) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$;
д) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
е) $\overline{z} : \overline{w} = \overline{z : w}$.

Задача 25. Свойства модуля комплексных чисел. Докажите, что для любых $z, w \in \mathbb{C}$:

а) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
б) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$;
в) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$;
г) $|z|^2 = z\overline{z}$;
д) $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

Задача 26. Найдите:

а) $\overline{(2-i)(2+i)}$, **б)** $|(2 + i) \cdot (1{,}1 + 1{,}3i)|$, **в)** $\left|\dfrac{(1+3i)^2(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(-6+8i)(1+2i)^5}\right|$.

Задача 27. Пусть z и w — комплексные числа. Докажите, что:
а) $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = \mathrm{Re}(\overline{z}w)$;
б) $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$;
в) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

Задача 28*. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.
Подсказка. Воспользуйтесь комплексными числами.

Задача 29. **а)** Докажите, что если z_0 — корень уравнения $z^3 - 5z^2 + 6z - 17 = 0$, то $\overline{z_0}$ — тоже корень этого уравнения.
б) Верен ли аналогичный факт для произвольного уравнения $P(z) = 0$, где P — некоторый многочлен с действительными коэффициентами?

Задача 30. Может ли число $z = 0{,}5 + \sqrt{2}i$ в некоторой степени равняться единице?

2.5 *Квадратный корень из комплексного числа

В множестве комплексных чисел можно извлекать квадратные корни.

Пример 7. Решите на множестве комплексных чисел уравнение $z^2 = -3 + 4i$.

Решение. Применим метод неопределённых коэффицентов. Пусть $z = a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.
Тогда $z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2ab \cdot i$.
По условию $z^2 = -3 + 4i$, поэтому получаем систему

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3, \\ 2ab = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим эту систему. Заметим, что $b \neq 0$, так как $2ab = 4$. Тогда:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ a^2 - b^2 = -3; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ \frac{4}{b^2} - b^2 = -3; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ 4 - b^2 = -3b^2; \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ b^4 - 3b^2 - 4 = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ \left[\begin{array}{l} b^2 = -1, \\ b^2 = 4. \end{array}\right. \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку $b^2 = -1$ не имеет решений в множестве действительных чисел, то

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b}, \\ b^2 = 4; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $z = \pm(1 + 2i)$.

Замечание 2. Как и полагается, уравнение $z^2 = -3 + 4i$ имеет два решения, которые являются противоположными числами.

Определение 7. В множестве комплексных чисел *квадратным корнем* из комплексного числа $x + yi$ называется комплексное число $a + bi$ такое, что $(a + bi)^2 = x + yi$.

Теорема 5. В множестве комплексных чисел из каждого ненулевого комплексного числа $x + yi$ можно извлечь квадратный корень, причём таких корня ровно два: $\pm(a + bi)$.

Идея доказательства. Действительные числа a и b определяются из равенства $(a + bi)^2 = x + yi$. После раскрытия скобок можно составить систему на неизвестные a, b, имеющую в общем случае два решения, отличающиеся только знаками.

Обозначение квадратных корней такое же, как и раньше: $\sqrt{x + yi}$.

В отличие от множества действительных чисел в множестве комплексных чисел нельзя определить понятие положительного и отрицательного числа, поэтому квадратный корень из ненулевого числа имеет в $\mathbb{C}$ два значения:
$\sqrt{x + yi} = \pm(a + bi)$, где $(a + bi)^2 = x + yi$.

Задача 31*. Найдите квадратные корни в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел:
а) $\sqrt{8 - 6i}$; **б)** $\sqrt{5 + 12i}$; **в)** $\sqrt{i}$; **г)** $\sqrt{-i}$; **д)** $\sqrt{1 + i}$; **е)** $\sqrt{1 - i}$.

Задача 32*. Решите все комплексные решения уравнения:
а) $z^2 = i$; **б)** $z^2 = 3 - 4i$; **в)** $z^3 = 1$.

Подсказка. Используйте метод неопределённых коэффициентов.

2.6 Квадратные уравнения

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 8.** Решите уравнение: $x^2 = -4$.

Решение. $x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$.

Ответ. $\pm 2i$.

Задача 33. Решите уравнение:

а) $x^2 = -16$; **б)** $x^2 + 0{,}36 = 0$; **в)** $x(x-3) + 3(x+3) = 0$; **г)** $0{,}2x^2 + 0{,}3 = 0$.

При решении квадратных уравнений в 8 классе вы сталкивались с ситуациями, когда дискриминант был отрицательным. Тогда мы считали, что уравнение не имеет корней, потому что мы знали только действительные числа. Теперь же мы можем утверждать, что уравнение будет иметь корни, но они будут принадлежать множеству комплексных чисел. Разберём пример.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 9.** Решите квадратное уравнение: $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Решение. $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Ответ. $-1 \pm i$.

Задача 34. Решите уравнение:

а) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
б) $x^2 + 10x + 26 = 0$;
в) $x^2 - 12x + 72 = 0$;
г) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = 0$;
д) $x^2 + x + 1 = 0$;
е) $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$.

Рассмотрим, как можно решать в множестве комплексных чисел квадратные уравнения с комплексными коэффициентами.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 10.** Решите уравнение $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

Замечание 3. Будем решать так же, как и обычное квадратное уравнение, используя дискриминант. Так можно делать потому, что в множестве комплексных чисел верны те же алгебраические формулы, что и в множестве действительных чисел, в частности, формулы сокращенного умножения.

Решение. Коэффициенты этого уравнения $a = 1$, $b = 2i$, $c = -5$. Дискриминант равен $D = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = -4 + 20 = 16$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2i \pm 4}{2} = -i \pm 2.$$

Ответ. $x_1 = 2 - i$, $x_2 = -2 - i$.

Задача 35. Решить квадратное уравнение с комплексными коэффициентами в множестве $\mathbb{C}$:

а) $z^2 + 2iz - 2 = 0$;
б) $4z^2 - 8iz - 5 = 0$;
в) $z^2 - 2iz - 1 = 0$;
г) $w^2 + 6iw - 13 = 0$;
д) $4w^2 - 4iw - 9 = 0$;
е) $49u^2 + 28iu - 4 = 0$;
ж) $iu^2 + 6u - 10i = 0$;
з) $iw^2 - 1{,}2w - i = 0$;
и) $36iz^2 - 48z - 97i = 0$;
к) $(2+i)z^2 - 4z - 2 + i = 0$;
л*) $w^2 + (6+8i)w - 7 - 24i = 0$;
м*) $iz^2 - (2+4i)z + 4 + 2i = 0$.

Замечание 4. Оказывается, любое уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с действительными или комплексными коэффициентами, имеет корень в множестве комплексных чисел. Это утверждение называется *основной теоремой алгебры*. Это сложная и не имеющая чисто алгебраического доказательства теорема. Однако несложно доказать следствие из нее:

T **Теорема 6** (*Следствие из основной теоремы алгебры*). Число комплексных корней уравнения $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами, равно степени многочлена $P(x)$.

Доказательство. Пусть степень $P(x)$ равна n. По основной теореме алгебры у многочлена $P(x)$ есть корень a, — значит, по теореме Безу, он представим в виде $(x - a)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен, степень которого на 1 меньше степени $P(x)$, и у него по основной теореме алгебры тоже будет хотя бы один корень, который может не равняться a, а может и совпасть с a (в последнем случае корень a окажется *кратным*). Применим теорему Безу к $Q(x)$ и будем использовать её таким же образом до тех пор, пока на месте $Q(x)$ не окажется многочлен первой степени. Таким образом, мы разложили многочлен $P(x)$ на n линейных множителей, а значит он имеет ровно n корней (некоторые из них могут совпадать).

Подробнее об основной теореме алгебре, её истории и роли в математике можно почитать в замечательной статье А. Тоома [6].

Также рекомендуем непростую, но очень интересную книгу [7]. Она посвящена решению уравнений 3-й, 4-й степени и теореме о невозможности представления в радикалах общего решения уравнений более высоких степеней.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 11.** Решите уравнение $x^3 - 1 = 0$.

Замечание 5. В множестве действительных чисел это уравнение имеет единственное решение, но в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ решений больше.

Решение. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
$x - 1 = 0$ или $x^2 + x + 1 = 0$
$x = 1$ или $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ответ. 1; $x = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2.7 Задачи

Задача 36. Найдите:
а) $(3-i)(4+5i)-(17-9i)(i+1)$; **б)** $\mathrm{Re}\,\frac{3+5i}{2+i}$;
в) такие действительные значения a и b, при которых выполняется равенство:

$$(a+3i)(5+bi)=-1+43i.$$

Задача 37. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|=2i(z+1)$.

Задача 38. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условию $z^2+2\bar{z}+1=0$.

Задача 39. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=|z|$.

Задача 40. Решите уравнение:
а) $z^2+2iz=0$; **б)** $z^2=8+15i$; **в)** $z^2+6z+13=0$.

Задача 41. Решите уравнение
а) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Разложите этот многочлен на два множителя, каждый из которых – квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.
б) Найдите все действительные корни уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.
в) Найдите все комплексные корни уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

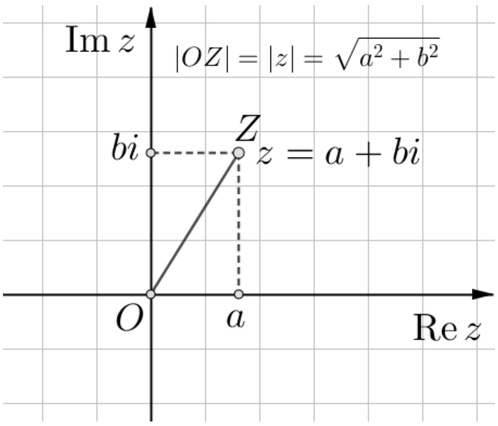
Задача 42. Многочлен $x^n+x^{(n-1)}+\ldots+x+1$ называется многочленом деления круга.
а) Для каких n многочлен деления круга имеет действительные корни? Сколько таких корней? Чему они равны?
б***)** Разложите многочлен деления круга четной степени на множители.

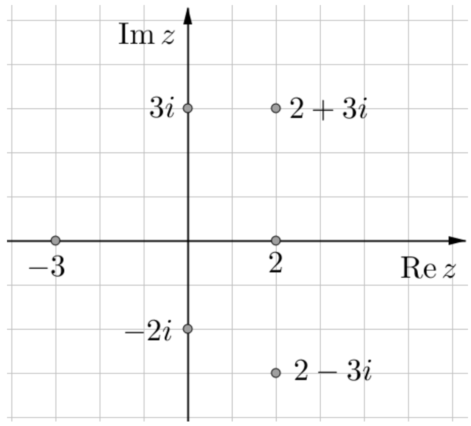
Задача 43*. Найдите все комплексные решения уравнения $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos\varphi$.

3 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

3.1 Комплексная плоскость. Действительная и мнимая оси

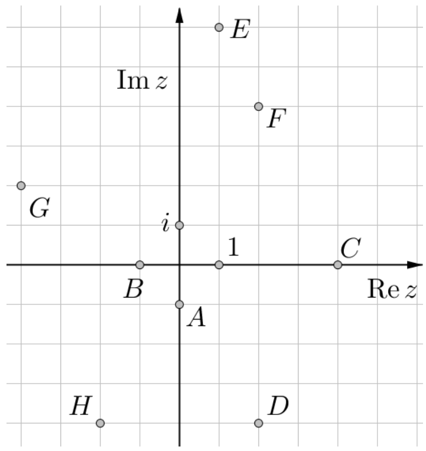
Сопоставим комплексному числу $z = a + bi$ точку на координатной плоскости с координатами $(a; b)$. Мы получим взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками координатной плоскости. Точку координатной плоскости, соответствующую комплексному числу $z = a + bi$, будем обозначать такой же буквой z. Напомним, что *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называют число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.





Определение 8. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*; ось Ox называется *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

Задача 44. Для каждой точки, отмеченной на рисунке справа, запишите соответствующее ей комплексное число.



Задача 45. Изобразите на комплексной плоскости:
а) числа $1 + i$, $1 - i$, $-1 - i$, 1, -2, i, $-i$, $3i$;
б) множества[1] $\{z\colon \operatorname{Re} z = 2\}$, $\{z\colon \operatorname{Im} z = -1\}$.

Задача 46. Какие из следующих утверждений верны?
а) Если точка z комплексной плоскости лежит на мнимой оси, то ей соответствует чисто мнимое комплексное число (то есть $\operatorname{Re} z = 0$.)
б) Если число z — действительное, то соответствующая ей точка на комплексной плоскости лежит оси Ox.
в) Если действительные части чисел z_1 и z_2 одинаковы, то соединяющий их отрезок параллелен действительной оси.
г) Отрезок, соединяющий на комплексной плоскости точки z и $\overline{z}$, всегда проходит через начало координат.
д) Отрезок, соединяющий на комплексной плоскости точки z и $-z$, всегда проходит через начало координат.

[1]Напомним, что запись $\{z\colon$ некоторое свойство объекта $z\}$ читается так: «множество всех таких z, для которых выполняется указанное после двоеточия свойство».

Например, $\{n \in \mathbb{Z}\colon n$ делится на $2\}$ — это множество всех чётных целых чисел.

3.2 Геометрический смысл модуля, сопряжения и суммы

Задача 47. Для каждого из чисел $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = -4 + i$, $z_4 = 2 - i$ вычислите сопряжённое число и изобразите соответствующие точки $z_1, z_2, z_3, z_4, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}$ на комплексной плоскости.

? **Вопрос 10.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в комплексно-сопряжённую ей точку $\overline{z}$?

Задача 48. Вычислите модуль комплексных чисел $z_1 = 3+4i$, $z_2 = i\cdot z_1$, $z_3 = 5$, $z_4 = i\cdot z_3$, а также сопряжённых им чисел $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}$ и противоположных им чисел $-z_1, -z_2, -z_3, -z_4$. Изобразите все 12 точек на комплексной плоскости.

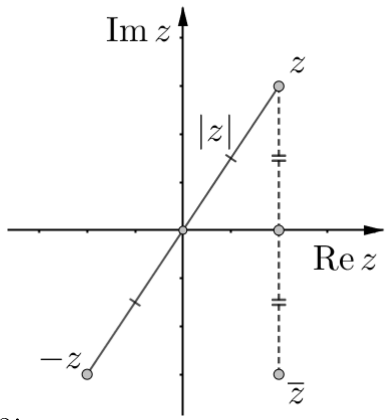
? **Вопрос 11.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в противоположную ей точку $-z$?

? **Вопрос 12.** Что представляет из себя геометрическое место точек комплексной плоскости, обладающих свойством $|z| = 5$?

В качестве ответа сформулируем теорему и приведём рисунок. Доказательство теоремы предлагаем вам провести самостоятельно.

T **Теорема 7.** На комплексной плоскости

- комплексно-сопряжённые точки z и $\overline{z}$ переходят друг в друга при осевой симметрии относительно действительной оси Ox;
- точки z и $-z$ переходят друг в друга при центральной симметрии относительно начала координат;
- модуль $|z|$ комплексного числа z равен длине отрезко, соединяющего начало координат с точкой z.



Задача 49. Изобразите на комплексной плоскости множества:

а) $\{z\colon |z| = 1\}$; **в)** $\{z\colon |z| < \frac{1}{2}\}$, **д)** $\overline{z} = z$; **ж)** $\operatorname{Re} z > 0$;
б) $\{z\colon |z| > 2\}$; **г)** $\{z\colon z^2 = |z|^2\}$; **е)** $\overline{z} = -z$; **з)** $\operatorname{Im} z < 2$.

Задача 50. Изобразите на комплексной плоскости:
а) точки $z_1 = 2i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = -4 + i$; $z_4 = 2 - i$ и точки $z_1 + i; z_2 + i; z_3 + i; z_4 + i$.
б) точки $z_1 = 2i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = -4 + i$; $z_4 = 2 - i$ и точки $z_1 - 3$; $z_2 - 3$; $z_3 - 3$; $z_4 - 3$.
в) $z_1 = 2i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = -4 + i$; $z_4 = 2 - i$ и $z_1 + 1 - i$; $z_2 + 1 - i$; $z_3 + 1 - i$; $z_4 + 1 - i$.

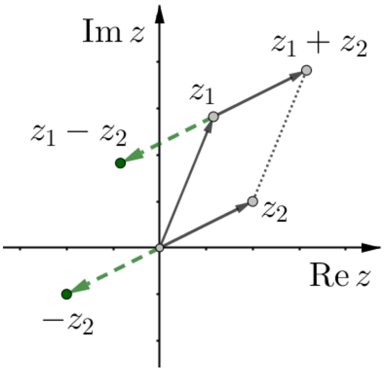
? **Вопрос 13.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z + i$?

? **Вопрос 14.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z - 3$?

? **Вопрос 15.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z+1-i$?

Мы уже поставили в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ точку на плоскости, имеющую координаты $(x; y)$. Теперь рассмотрим ещё и вектор, соединяющий начало координат с этой точкой. Иногда его называют радиус-вектором, соответствующим данной точке z. Координаты этого вектора те же, что и у точки: $\{x; y\}$.

Например, числу i соответствует точка с координатами $(0; 1)$ и вектор с координатами $\{0; 1\}$. В задаче 50(а) вы могли заметить, что прибавление числа i к числу z сдвигает точку на 1 вверх. То есть прибавление числа i соответствует параллельному переносу на вектор $\{0; 1\}$.



T **Теорема 8.** Радиус-вектор точки $z_1 + z_2$ на комплексной плоскости равен сумме радиус-векторов точек z_1 и z_2.

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда по определению сложения комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Теперь рассмотрим соответствующие радиус-векторы. Числу z_1 соответствует вектор с координатами $\{x_1; y_1\}$, числу z_2 — вектор с координатами $\{x_2; y_2\}$. Сложим эти два вектора. Как известно, координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых, то есть сумма этих векторов имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$. Но именно такие координаты имеет радиус-вектор вычисленного выше числа $z_1 + z_2$! Теорема доказана. □

? **Вопрос 16.** Каков геометрический смысл разности комплексных чисел?

Задача 51. Для чисел $z_1 = 2i + 1$, $z_2 = 7$, $z_3 = 3 - 4i$ вычислите $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$, $\dfrac{z_2 + z_3}{2}$, $\dfrac{z_3 + z_1}{2}$. Изобразите на комплексной плоскости эти шесть чисел.

? **Вопрос 17.** Каков геометрический смысл полусуммы двух комплексных чисел?

Задача 52. Докажите, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими точками на комплексной плоскости.

Задача 53. С помощью геометрической интерпретации докажите, что для любых комплексных чисел выполняются неравенства:
а) $|z - w| \leqslant |w - u| + |u - z|$;
б) $|z - w| \leqslant |z| + |w|$;
в) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Задача 54. Изобразите на комплексной плоскости множества:
а) $|z - i| \leqslant 2$, $\quad \arg z = -\frac{\pi}{6}$, $\quad |\arg z| < \frac{\pi}{4}$;
б) $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| < 1$, $\quad |z - i| + |z + i| = 2$;
в) $|z - i| + |z + i| \geqslant 4$.

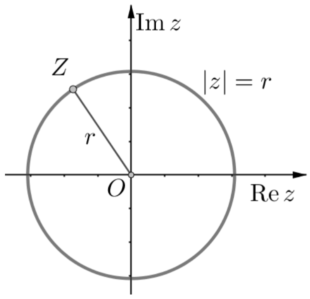
Задача 55*. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющее условию $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = 1$, где $a \in \mathbb{C}$.

3.3 Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Аргумент комплексного числа

Мы уже знаем, что модуль $|z|$ комплексного числа z равен длине отрезка, соединяющего начало координат с соответствующей точкой комплексной плоскости.

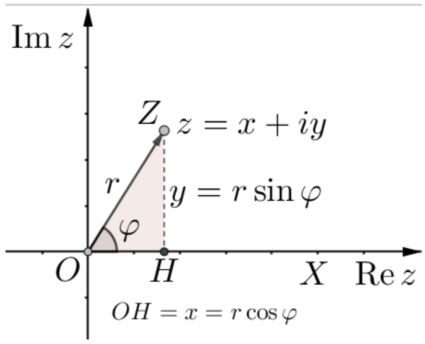
Вопрос 18. Можно ли однозначно определить комплексное число z, если известен его модуль $|z|$?

Подсказка. Рассмотрите два случая: $|z| = 0$ и $|z| \neq 0$.



Конечно, если дано ненулевое число r, то существует бесконечно много комплексных чисел z с одинаковым модулем $|z| = r$. На комплексной плоскости они заполняют целую окружность с центром в начале координат и радиусом r.

Вопрос 19. Какой ещё параметр комплексного числа нужно знать, чтобы, зная модуль $|z| = r$, вычислить его действительную часть $\operatorname{Re} z = x$ и мнимую часть $\operatorname{Im} z = y$?



Рассмотрим для начала точку Z в первой четверти комплексной плоскости, см. рис. справа. Тогда $OZ = |z| = r$. Обозначим угол $\angle ZOX$ через φ. Тогда $\operatorname{Re} z = x = r\cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = y = r\sin\varphi$. Таким образом,

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение 9. Любое комплексное число можно записать в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Определение 10. Множество всех углов φ, для которых $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, обозначается $\operatorname{Arg}(z)$, любой из этих углов называется *аргументом* числа $z : z = \arg\, z$. Для $z = 0$ аргумент не определен.

Задача 56. Докажите, что для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует единственное действительное число r и единственное действительное число $\varphi \in [0; 2\pi)$ такие, что

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

причём $r = |z|$.

Задача 57. Запишите в тригонометрической форме числа:

$$1+i; \quad 1-i; \quad \sqrt{3}+i; \quad -1-\sqrt{3}i; \quad i; \quad -i; \quad 1; \quad -1; \quad 2+i.$$

Задача 58. Изобразите на комплексной плоскости:

а) точки $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -4+i$, $z_4 = 2-i$ и точки $z_1\cdot i, z_2\cdot i, z_3\cdot i, z_4\cdot i$.

б) точки $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -4+i$, $z_4 = 2-i$ и точки $z_1\cdot 2$, $z_2\cdot 2$, $z_3\cdot 2$, $z_4\cdot 2$.

в*) $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -4+i$, $z_4 = 2-i$ и $z_1\cdot(2+i)$, $z_2\cdot(2+i)$, $z_3\cdot(2+i)$, $z_4\cdot(2+i)$.

Вопрос 20. Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z\cdot i$?

? **Вопрос 21.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z \cdot 2$?

? **Вопрос 22*.** Какое преобразование плоскости переводит каждую точку z в точку $z \cdot (2+i)$?

Задача 59. Докажите, что $(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$.

T **Теорема 9** (*Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме*). Произведением комплексного числа z с модулем r и аргументом φ и комплексного числа w с модулем ρ и аргументом ψ является комплексное число $z \cdot w$ с модулем $r \cdot \rho$ и аргументом $\varphi + \psi$. Таким образом, при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули перемножаются.

T **Теорема 10** (*Формула Муавра*). Для всех натуральных n и любого действительного φ выполняется равенство:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Задача 60. Докажите теорему 9 об умножении комплексных чисел в тригонометрической форме.

Задача 61. Докажите теорему 10 (формулу Муавра).

Задача 62. Найдите тригонометрическую форму следующих чисел: **а)** $5i$, **б)** $1+i$, **в)** $3+4i$, **г)** $\frac{5-i}{2-3i}$.

Задача 63. Пусть z – ненулевое комплексное число. Выразите тригонометрическую форму числа $\frac{1}{z}$ через тригонометрическую форму числа z.

Задача 64. Вычислите:

а) $(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20})$;

б) $\dfrac{\cos 341^\circ + i\sin 341^\circ}{\cos 11^\circ + i\sin 11^\circ}$;

в) $(\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\dfrac{(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})^{12}}{(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9})^{6}}$;

д) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^9}{(1+i)^{10}}$.

е) $(-1-i\sqrt{3})^{10}$; **ж)** $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{91}$.

Задача 65. Из тригонометрии известны формулы тройного угла: $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$ и $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\sin\varphi$.

а) Докажите эти формулы, используя формулу Муавра.

б) Выведите аналогичные формулы для $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$.

в) Выведите аналогичные формулы для $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

г) И наконец для $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ (должны получиться многочлены от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ соответственно).

4 *Корень n-й степени из комплексного числа. *Изображение корней n-й степени на комплексной плоскости

Определение 11. Корнем степени n из комплексного числа z называется комплексное число w, для которого $w^n = z$.

Задача 66*. Докажите формулу для корней степени n:

Теорема 11. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$, тогда

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, ..., n-1$.

Задача 67*. Докажите теорему 11 о представлении корней n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

Теорема 12. Существует ровно n различных корней n-й степени из ненулевого комплексного числа.

Задача 68*. Докажите теорему 12 о количестве корней из комплексного числа.

Вопрос 23. Справа изображён рисунок из диссертации Гаусса. Как вы думаете, иллюстрацией каких фактов он мог быть?

Задача 69*. Пользуясь формулой для корней степени n, найдите:

а) $\sqrt{i}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{-1}$;

б) $\sqrt[3]{1-i}$; $\sqrt[6]{-1}$; $\sqrt[4]{i\sqrt{3}-1}$.

Задача 70*. Рассмотрим многоугольник, вершинами которого являются корни n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$. Что это за многоугольник?

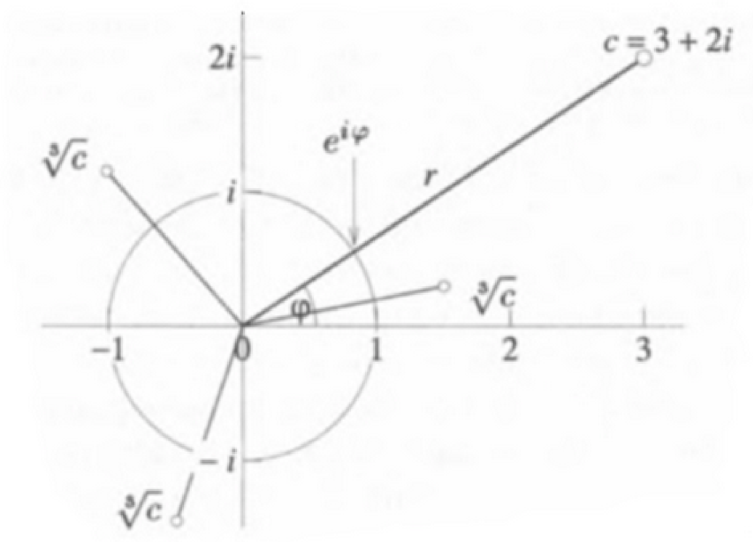


Рисунок из диссертации Гаусса (1799)

Задача 71*. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} + i$. Выпишите какое-нибудь из этих чисел.

Задача 72*. Изобразите на комплексной плоскости решения уравнения $z^8 = 256$.

Задача 73*. Найдите произведение всех корней 2022-й степени из числа i.

5 *Что ещё можно изучить про комплексные числа

С комплексными числами связаны огромные и очень интересные разделы математики. Желающие школьники могут познакомиться с:

- уравнениями прямой и окружности на комплексной плоскости,
- понятием двойного отношения четвёрки комплексных чисел,
- преобразованием инверсии и
- круговыми преобразованиями на комплексной плоскости.

Мы рекомендуем брошюру [5], книгу [4] и задачник [3].

6 Разные задачи

6.1 Ключевые задачи

Задача 74. Вычислите значение выражения: $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$.

Задача 75. Решите в комплексных числах уравнение $z+5z^3=2z^2$.

Задача 76. Изобразите на комплексной плоскости все точки, удовлетворяющие условию:

а) $|z-i+1| \le 1$;
б) $2 \le |z-2i| \le 3$;
в) $Rez = 2Imz$;
г) $|z| = 2|z-i|$.

Задача 77. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z|=|z-2i|$, найдите число с наименьшим модулем.

Задача 78. Представьте число в тригонометрической форме:
а) $2+2i$;
б) $\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}$;
в) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$.

Задача 79. Пусть $|z|=2$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$. Найдите модуль и один из аргументов числа z^3-8i.

Задача 80. Известно, что $|z_1|=|z_2|=|z_3|>0$ и $|z_1+z_2+z_3|=0$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник.

Задача 81. Найдите произведения:
а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; **б)** $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задача 82.
а) Выразите действительную и мнимую часть комплексного числа z через $z, \overline{z}$.
б) Как косинус аргумента комплексного числа z выражается через $z, \overline{z}, |z|$?

Задача 83*. Пользуясь формулой Муавра выведите формулы для:
а) $\sin 4\phi$ и $\cos 4\phi$; **б)** $\sin 5\phi$ и $\cos 5\phi$.

6.2 *Дополнительные задачи

Задача 84.
а) Найдите все решения уравнения $z^n = 1$ в комплексных числах.
б) (*Для знакомых с понятием группы*) Докажите, что множество решений уравнения $z^n = 1$ образует циклическую группу с операцией умножения комплексных чисел. Сколько всего образующих в этой группе?

Задача 85.
а) Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, заданное прибавлением комплексного числа $\omega = a + bi : z \to z + \omega$. Является ли это преобразование движением? Если да, то каким?
б) Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, заданное умножением на число $\omega = \cos\varphi + i\sin\varphi : z \to z \cdot \omega$. Является ли это преобразование движением? Если да, то каким?
в) Преобразование комплексной плоскости, заданное умножением на ненулевое вещественное число, называется *гомотетией*. Является ли это преобразование движением? Переводит ли оно прямые в прямые, отрезки в отрезки, окружности в окружности?
г) Каков «геометрический смысл» умножения комплексных чисел?

Задача 86. Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, заданное умножением на число i. В какую точку относительно этого преобразования переходит точка $1 + i$? Как в геометрии называется это преобразование плоскости?

Задача 87. В какое ГМТ гомотетия с коэффициентом 2 переводит прямую $y = 2x + 3$? параболу $y = x^2$? окружность $x^2 + y^2 = 1$?

Задача 88. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют условию $a + c = b + d$.

Задача 89. Найдите площадь треугольника на комплексной плоскости, вершинами которого являются точки $0, 1 + i, -1 + 2i$.

Задача 90. Найдите алгебраическое условие на переменные a, b, c (не использующее $\operatorname{Re} a$, $\operatorname{Im} z$, и т.п.), которое верно в том и только в том случае, когда точки комплексной плоскости a, b, c лежат на одной прямой.

Задача 91. Докажите, что отрезки AB и CD перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда для комплексных чисел a, b, c, d, соответствующих концам этих отрезков, верно, что $\frac{a-b}{c-d}$ является чисто мнимым числом.

Задача 92. Докажите, что если диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до любой стороны четырёхугольника равно половине длины соответствующей противоположной стороны.

Задача 93. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Выразите площадь треугольника на комплексной плоскости, вершинами которого являются 0, z_1 и z_2, через числа x_1, x_2, y_1, y_2.

Задача 94. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB. Докажите, что расстояние CD выражается формулой $|CD|^2 = R^2 + |AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2$, где R – радиус описанной окружности.

Определение 12. Отображения $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, для которых $ad - bc \neq 0$, называются *дробно-рациональными* или *отображениями Мёбиуса.*

Задача 95. Найдите образ прямой $y = x + 1$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$ относительно дробно-рационального отображения $\frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

Задача 96.
а) Докажите, что композиция дробно-рациональных отображений дробно-рациональна.
б) Докажите, что любое дробно-рациональное отображение можно представить в виде композиции линейных отображений $z \to az + b$ и инверсии $z \to \frac{1}{z}$.
в) Докажите, что дробно-рациональное отображение переводит прямые либо в прямые, либо в окружности. Верно ли аналогичное утверждение для окружностей?

Задача 97. Существует ли дробно-рациональное отображение, переводящее точки $0, 1, i$ в точки $-1, 2, 4$ соответственно?

Задача 98. Существует ли дробно-рациональное отображение, переводящее точки 0, 1, i, $1 + i$ в точки 0, $1 + i$, 1, $1 + \frac{1}{2}i$ соответственно?

Задача 99. Верно ли, что для любых двух прямых на комплексной плоскости существует дробно-рациональное отображение, переводящее одну в другую?

Задача 100. Рассмотрим множество троек различных комплексных чисел

$$X = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{C}, x \neq y, y \neq z, x \neq z\}.$$

Назовём две тройки чисел (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) эквивалентными, если существует дробно-рациональное преобразование φ, переводящее одну тройку в другую, т.е. $\varphi(x_1) = x_2$, $\varphi(y_1) = y_2$, $\varphi(z_1) = z_2$. Вычислите фактор-множество по данному отношению эквивалентности.

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, А. Шень. *Алгебра.* МЦНМО. 4-е изд. 2017. https://www.mccme.ru/free-books/shen/gelfand-shen-algebra.pdf

[2] В. О. Бугаенко. *Уравнения Пелля.* МЦНМО, 2001.
https://mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.13.pdf

[3] Алфутова Н.Б., Устинов А. В. «*Алгебра и теория чисел*». МЦНМО. 2002.
https://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf

[4] Я. П. Понарин. *Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах.* М.: МЦНМО, 2004.
https://mccme.ru/free-books/ponarin/ponarin-complex.pdf

[5] В. Е. Епихин. *Комплексные числа.* М.: МЦНМО, 2009.

[6] А.Тоом. *Дама с собачкой.* Журнал Квант №2.1990.
https://kvant.ras.ru/1990/02/dama_s_sobachkoj.htm

[7] В. Б. Алексеев. *Теорема Абеля в задачах и решениях.* М.: МЦНМО, 2001.
https://www.mccme.ru/free-books/pdf/alekseev.pdf