Задачи для занятия

1. Расставить пределы интегрирования двумя способами в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где

1.1. D – область, ограниченная линиями $y = 2\sqrt{x+1}$, $x + y = 2$, $y = 0$.

1.2. D – область, ограниченная линиями $y = x^2/2$, $y = 4 - x$.

1.3. D: $y^2 \le 8x,\ y \le 2x, y + 4x \le 24$

1.4. D: $x^2 + y^2 \le 9,\ y^2 - x^2 \le 1$

2. Вычислить интеграл по области, ограниченной указанными линиями:

2.1. $\iint\limits_{D_1} e^y dxdy, \quad D_1 : y = \ln x,\ x = 3,\ y = 0;$

2.2. $\iint\limits_{D_2} \cos(x+y)dxdy, \quad D_2 : x + y = \dfrac{\pi}{2}, y = x, y = 0;$

2.3. $\iint\limits_D (xy+3)dxdy$, D: $y = \sqrt{x+2}$, $x = 2$, $y = 0$.

2.4. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, если G – четырехугольник с вершинами в точках A(0,0), B(0,2), C(2,3), D(2,1).

2.5. $\iint\limits_G \dfrac{x}{y+1} dxdy, \quad G : y = x^2 + 3, y = 4x, x = 0$

2.6. $\iint\limits_D \dfrac{5x^4}{1+y^2} dxdy, \quad D : x = 0,\ x = 1,\ y = -\dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{4};$

2.7. $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2} dxdy,\ D : y = \dfrac{1}{x}, y = x, y = 3.$

2.8. $\iint\limits_D ye^{xy} dxdy, \quad D : x = -1, x = 0, y = 0, y = 1;$

2.9. $\iint\limits_D (x^3 + 3y)dxdy, \quad D : x + y = 1, y = x^2 - 1, x \ge 0;$

2.10. $\iint\limits_D y^2(2x+1)dxdy, \quad D : x = 2 - y^2, x = 0;$

2.11. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D : x^2 + y^2 = 9, x + y = 3.$

2.12. $\iint\limits_D xdxdy$, D: $y^2 - x^2 \le 1$, $y^2 + x^2 \le 9$, $x \ge 0$.

3. Измените порядок интегрирования в двойных интегралах:

3.1. $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-2-y}^{2+y} f(x;y)dx;$ **3. 2.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{(x+1)^2}^{\sqrt{x+1}} f(x;y)dy;$ **3. 3.** $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-2x}^{4-x^2} f(x;y)dy;$

3.4. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x;y)dy.$ **3.5.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x;y)dx$; **3. 6.** $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{2}{y}} f(x;y)dx$.

3.7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$ **3.8.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/9}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y^2/9}^{1} f(x,y)dx$.

4. Вычислить двойной интеграл по области *D*, ограниченной указанными линиями, используя полярные координаты:

4.1. $\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\quad D_1: x^2+y^2=2,\ x\le 0,\ y\ge 0;$

4.2. $\iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D_2: x^2-2x+y^2=0;$

4.3. $\iint\limits_{D_3} ydxdy,\ D_3:\ x^2+y^2-4y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x^2+y^2-8y=0,\ x=0.$

4.4. $\iint\limits_{D} \arcsin(x^2+y^2)dxdy,\quad D: x^2+y^2=1,\ y\le 0,\ x\ge 0;$

4.5. $\iint\limits_{D} \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, D: $x^2+y^2\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 16,\ \ y\ge x/\sqrt{3},\ \ y\le\sqrt{3}x.$

4.6. $\iint\limits_{D} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)\right)dxdy,\ D: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1.$

4.7. $\iint\limits_{D} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\ D: y=x,\ x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-y=0;$

4.8. $\iint\limits_{D} \ln(1+x^2+y^2)dxdy,\quad D: y=\sqrt{16-x^2},\ \ x\ge 0;$

4.9. $\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy,\ \ D: x^2+y^2=4,\ \ x^2+y^2=16,\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ \ y=x\sqrt{3},\quad x\ge 0,\ y\ge 0.$

4.10. $\iint\limits_{D} \sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{4+x^2+y^2}}dxdy$, *D*: $1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0$.

5. Найти массу пластинки

5.1. D: $1\le x^2+y^2\le e^2,\ \ \sqrt{3}x\le y\le 0$, если плотность распределения массы $\gamma(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

5.2. D: $x^2+y^2=2x,\ \ y=-x,\ \ y=x$, если плотность распределения массы $\gamma(x,y)=x$.

5.3. $D: x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge x,\ y\ge -\sqrt{3}x$, если плотность распределения массы $\gamma(x,y)=y.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

6.1. D: $y=x^2,\ y+x=2$.

6.2. D: $x^2+y^2=2,\ x=y^2\ (x\le y^2).$

6.3. D: $x^2+y^2=8y,\ y^2+x^2=10y,\ y=x,\ \ y=\sqrt{3}x$.

6.4. D: $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},\ x=0\ (x\ge 0)$.

7. Перейти к полярным координатам

7.1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{x^2+y^2}\ dy$.

7.2. $\iint\limits_{S} 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где S: $y=2x$, $y=-x,\ y=4$.

7.3. $\iint\limits_{S} \ln\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где S: $y=x^3,\ \ y=x^2$

8. Вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

8.1. $\iiint\limits_V (x+2z)\,dxdydz, \quad V: y=0, \quad x=1, \quad y=x, \quad z=x^2+3y^2, \quad z=0;$

8.2. $\iiint\limits_V y\,dxdydz, \quad V: y=x, \quad y=2, \quad x=0, \quad z=0, \quad z=8-x^2-y^2;$

8.3. $\iiint\limits_V (x-y)\,dxdydz, \quad V: y+x=2, \quad z=4-x^2-y^2, \; x=0, y=0, z=0, (x\ge 0, \; y\ge 0).$

9. Вычислить объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

9.1. V: $x^2+y^2=z$, $y=x+1, \quad y=1-x, \quad z=0$.

9.2. V: $z=x+y, \; z=0, \; x+y=1, x=0, y=0.$

10. Используя цилиндрические координаты, вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

10.1. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz, \quad V: \; z=0, \; z=4, \; x\ge 0, \; y\ge 0, \; x^2+y^2=4;$

10.2 $\iiint\limits_V (\sqrt{x^2+y^2})^3\,dxdydz, \quad V: \; 3z=\sqrt{x^2+y^2}, \; 9z=x^2+y^2.$

11. Вычислить с помощью тройного интеграла в цилиндрической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

11.1. $V: z=x, \; x=\sqrt{25-y^2}, \; y\ge 0, \; z\ge 0;$

11. 2. $V: x^2+y^2+z^2=2z, \; x^2+y^2=z.$

11.3. V: $x^2+y^2=5y$, $x^2+y^2=8y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \; z=0$

11.4. V: $x^2+y^2=4x, \quad x^2+y^2+z^2=16, \; z=0, (z\ge 0)$

11.5. V: $x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=2y, \; z=x+2y, \; z=0$

12. Используя сферические координаты, вычислить тройной интеграл по области, ограниченной указанными поверхностями:

12.1. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz, \quad V: x\ge 0, \; y\ge 0, \; z\ge 0, \; x^2+y^2+z^2=4;$

12.2. $\iiint\limits_V (2z-x^2-y^2)\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=2Rz.$

13. Вычислить с помощью тройного интеграла в сферической системе координат объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями:

13.1, $V: \quad 1\le x^2+y^2+z^2\le 9, \; y\le x, \; y\ge 0, \; z\ge 0;$

13.2. $V: \quad 2\le x^2+y^2+z^2\le 8, \; x\ge 0, \; y\ge 0, \; z\ge 0, \; z^2=x^2+y^2.$

14. Найти массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

14.1. V: $x^2+y^2+z^2=4z, \; x=0 \; (x\ge 0)$, если объемная плотность $\gamma(x,y,z)=z$.

14.2. V: $4(x^2+y^2)=z^2, \; z=6, \; y=0 \; (y\ge 0)$, если плотность распределения массы равна $\gamma=z$.

14.3. V: $x^2+y^2-z^2=-1$, $x^2+y^2=4, \; z=0 \; (z\ge 0).$, если объемная плотность равна $\mu(x,y,z)=z$.

14.4. V: $x^2+y^2+z^2=2z, \quad y=0 \quad (y\ge 0)$ если объемная плотность $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.