2.2. Типовой расчет “Непрерывные случайные величины”

2.1.1. Содержание типового расчета

Непрерывная случайная величина X распределена с постоянной плотностью C в интервале (q_1, q_2), попадает с вероятностью R в интервал (z_1, z_2) и имеет там плотность распределения вида $\varphi(x) = A \cdot |x - z_3|$, вне указанных интервалов функция плотности равна нулю. Значения некоторых параметров указаны в условии типового расчета.

Требуется:

1. Найти недостающие значения параметров.

2. Найти плотность распределения и функцию распределения случайной величины X: записать их аналитически и построить их графики.

3. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

4. Вычислить вероятность события $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ двумя способами: с помощью функции плотности распределения и функции распределения.

5. Найти медиану случайной величины X.

2.1.2.Пример выполнения типового расчета

Условие

q_1	q_2	z_1	z_2	z_3	R	C	A
–3		0	2	2	0,30	0,35	

Выполнение типового расчета

1. Найдем сначала недостающие значения параметров. Известно, что наша случайная величина распределена с постоянной плотностью 0,35 в интервале (–3; q_2), попадает с вероятностью 0,30 в интервал (0, 2) и имеет там плотность распределения

$$\varphi(x) = A \cdot |x-2|.$$

Находим вероятность попадания случайной величины X в интервал (–3; q_2):

$$P(-3 < X < q_2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

С другой стороны, вероятность этого события можно найти как площадь криволинейной трапеции (в нашем случае прямоугольника), расположенной над интервалом (–3; q_2) и ограниченной сверху кривой распределения,

$$P(-3 < X < q_2) = 0{,}35 \cdot (q_2 - (-3)) = 0{,}7.$$

Отсюда получаем $q_2 = -1$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 2) можно вычислить с помощью интеграла:

$$P(0 < X < 2) = 0{,}3 = \int_0^2 \varphi(x)dx = A\int_0^2 |x-2|dx.$$

Так как для $x \in (0,2)$ $|x - 2| = 2 - x$, то

$$0{,}3 = A \cdot \int_0^2 (2-x)dx = 2A.$$

2. Теперь можно записать плотность распределения вероятностей нашей случайной величины X:

$$\varphi(X) = \begin{cases} 0; & -\infty < x < -3, \\ 0{,}350; & -3 < x \le -1, \\ 0; & -1 < x \le 0, \\ 0{,}15(2-x); & 0 < x \le 2, \\ 0; & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

На рис. 2.4 представлен график функции плотности $y = \varphi(x)$.

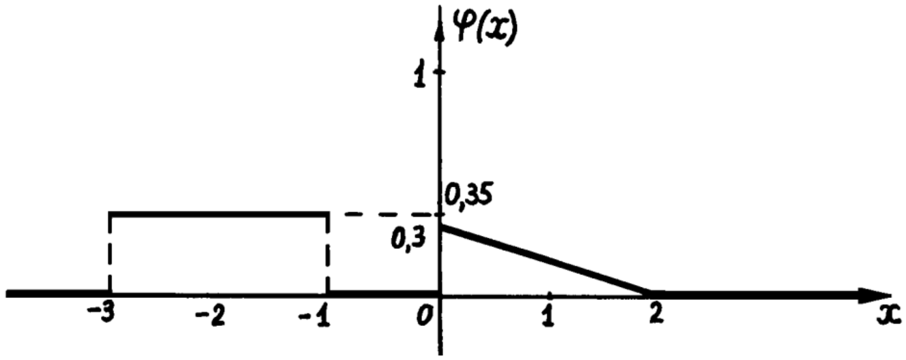

Рис. 2.4

Далее отметим, что в каждой точке x значение функции $F(x)$ равно площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, снизу осью $0x$ и лежащей левее перпендикуляра, восстановленного из точки x, поэтому уже сейчас можем приближенно построить график функции $F(x)$.

В интервалах, где $\varphi(x) = 0$, функция $F(x)$, очевидно, постоянна, причем для $x \le -3$, $F(x) \equiv 0$, при $x \ge 2$ $F(x) \equiv 1$, а в интервале $(-1; 0)$ $F(x) = 0{,}7 = P(-3 < X < -1)$.

Далее, при движении x вправо внутри интервала $(-3; -1)$ $F(x)$ “равномерно” возрастает от 0 до 0,7 – поэтому здесь ее график представляет собой отрезок прямой, соединяющий точки $(-3; 0)$ и $(-1; 0{,}7)$. А внутри интервала $(0; 2)$ функция $F(x)$ растет не равномерно: к концу интервала рост $F(x)$ уменьшается м совсем прекращается в т. $x = 2$. Ясно, что в этом интервале график функции $F(x)$ представляет собой отрезок параболы, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(2; 1)$. Так как $F(x)$ должна быть непрерывной, то парабола должна проходить через точку $(0; 0{,}7)$. Построенный таким образом график функции распределения $y = F(x)$ изображен на рис. 2.5.

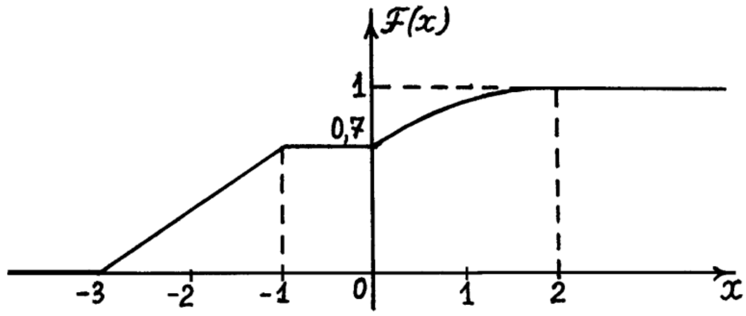

Рис. 2.5.

3. Найдем теперь функцию распределения случайной величины X аналитически.

Для

$x \in (-\infty; -3]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0,$$

для $x \in (-3; -1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int_{-3}^{x} 0{,}35dt = 0{,}35(x+3);$$

для $x \in (-1; 0]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int_{-3}^{-1} 0{,}35dt + \int_{-1}^{x} 0 \cdot dt = 0{,}7;$$

для $x \in (0; 2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = 0{,}7 + \int_{0}^{x} 0{,}15(2-t)dt = 0{,}7 - 0{,}15\left(\frac{(2-x)^2}{2} - 2\right) =$$
$$= 1 - 0{,}0075(x-2)^2.$$

И далее $F(x) = 1(x > 2)$.

Итак, выпишем функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0; & -\infty < x \le -3, \\ 0{,}35(x+3); & -3 < x \le -1, \\ 0{,}7; & -1 < x \le 0, \\ 1-0{,}075(x-2)^2; & 0 < x \le 2, \\ 1; & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

и сопоставим ее с графиком функции $F(x)$, полученным выше: они полностью соответствуют друг другу.

4. Найдем числовые характеристики случайной величины X:

а) математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx=\int_{-3}^{-1} x\cdot 0{,}35dx+\int_{0}^{2} x\cdot 0{,}15(2-x)dx=-1{,}2\,;$$

б) дисперсия

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx=\int_{-3}^{-1} x^2\cdot 0{,}35dx+\int_{0}^{2} x^2\cdot 0{,}15(2-x)dx=3{,}233;$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=3{,}233-(-1{,}2)^2=1{,}793;$$

в) среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1{,}339\,.$$

5. Вычислим вероятность события

$$P\big(|X-M(X)|<\sigma(X)\big)=P(-1{,}2-1{,}339<X<-1{,}2+1{,}339)=$$

$$=P(-2{,}539<X<0{,}139)=\int_{-2{,}539}^{-1} 0{,}35dx+\int_{0}^{0{,}139} 0{,}15(2-x)dx=0{,}579.$$

С другой стороны $P(-2{,}539 < X < 0{,}139) = F(0{,}139) - F(-2{,}539) = 0{,}579$.

6. Найдем медиану m_X случайной величины X. По определению

$$P(X<m_X)=P(X>m_X)=0{,}5\,,$$

т. е. площади двух криволинейных трапеций, ограниченных кривой распределения и расположенных слева и справа от m_x, должны быть равны. Поэтому очевидно, что в нашем случае точка m_X должна принадлежать интервалу (–3; –1). Имеем:

$$-3 < x \le 1; \quad F(x) = 0{,}35(x+3)\ .$$

Решая уравнение $F(x) = 1/2$, находим медиану

$$m_x = -11\ /\ 7 = -1{,}571\ .$$

2.1.3. Оформление отчета

В отчете по типовому расчету должны быть представлены расчеты: недостающих параметров случайной величины X, ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения), вероятности $P\left(\left|X - M(X)\right| < \sigma\right)$, медианы, а также должны быть записаны аналитически функции распределения и плотности распределения и построены их графики. Все числовые значения должны быть вычислены в десятичных дробях с тремя знаками после запятой.