ЛЕКЦИЯ 5

Классификация особых точек аналитической функции. Вычет в особой точке. Основная теорема о вычетах.

2.7. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Если в точке $z = a$ функция $f(z)$ аналитична, ее можно представить в виде разложения в ряд Тейлора по формуле (2.23). Полученное разложение называется *разложением функции* $f(z)$ *в окрестности точки* a.

Если $f(a) = 0$, то точка a называется *нулем функции* $f(z)$. Если точка a является нулем функции $f(z)$, то разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots,$$

так как $C_0 = f(a) = 0$.

Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{n-1} = 0,$$

но $C_n \neq 0$ и, следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = C_n(z-a)^n + C_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \tag{2.31}$$

то точка a называется *нулем функции* $f(z)$ *порядка* n. Если $n = 1$, то нуль называется *простым.*

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что, если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то

$$f(a) = f'(a) = \ldots f^{(n-1)}(a) = 0, \tag{2.32}$$

но $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Если n =1, то точка a является простым нулем, т.е. для простого нуля выполняется условие $f(a) = 0, \quad f'(a) \neq 0.$

Разложение (2.31) можно переписать в виде

$$f(z)=(z-a)^n(C_n+C_{n+1}(z-a)+...)=(z-a)^n\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма степенного ряда:

$$\varphi(z)=C_n+C_{n+1}(z-a)+\dots,$$

имеющего, очевидно, тот же круг сходимости, что и данный ряд (2.31). Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a)=C_n\neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: всякая функция вида

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z), \qquad (2.33)$$

где n – целое положительное число, $\varphi(a)\neq 0$, а $\varphi(z)$ - аналитична в точке a, имеет в этой точке нуль порядка n.

В подразделе 2.4. было введено понятие *особой точки* функции *f(z)* как точки $z = a$, в которой функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена). Особая точка a называется *изолированной,* если в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z = a$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящийся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a, кроме этой точки a, будем называть *разложением функции в ряд Лорана в окрестности* данной *изолированной особой точки.*

В формуле (2.24) будем называть

$$C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+...+C_n(z-a)^n+...$$

правильной частью, а ряд

$$\frac{C_{-1}}{z-a}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+...+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+... \qquad (2.34)$$

главной частью ряда Лорана, и рассмотрим, как связано поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ с разложением в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Точка $z = a$ называется *устранимой особой точкой*, если в разложении (2.24) отсутствует главная часть, т.е. $C_{-1} = C_{-2} = ... = C_{-n} = ... = 0$. В этом случае особенность устраняется, если доопределить функцию *f(z)* в точке $z = a$, положив $f(a) = C_0$. Полученная функция будет аналитической как в окрестности точки $x = a$, так и в самой этой точке.

Если главная часть ряда Лорана (2.34) состоит из конечного числа слагаемых, т.е. $C_{-n} \neq 0$, а $C_{-n-1} = C_{-n-2} = C_{-n-3} = ... = 0$, то точка *a* называется *полюсом n-го порядка*. В случае $n = 1$ полюс называется *простым.* Если же главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество ненулевых слагаемых, то точка *a* называется *существенно особой точкой* функции *f*(*z*).

Существует важная закономерность. Если точка $z = a$ является полюсом функции *f*(*z*), то она является нулем функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Причем точка $z = a$ тогда и только тогда является полюсом порядка *n* функции *f*(*z*), когда эта точка является нулем порядка *n* для функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, при этом функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(a) \neq 0$ (функция $\varphi(z)$ аналитична при $z = a$). В частности, если $z = a$ – простой полюс функции *f*(*z*), то она может быть записана в виде

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)\varphi(z),$$

где $\varphi(a) \neq 0$.

2.8. ВЫЧЕТЫ, ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть точка $z = a$ является правильной точкой или изолированной особой точкой однозначной функции *f*(*z*). Тогда можно выбрать простой контур *C*, однократно обходящий точку *a* в положительном направлении (например, окружность достаточно малого радиуса), так, чтобы на контуре C и всюду внутри этого контура, за исключением быть может самой точки a, функция $f(z)$ была аналитической. *Вычетом функции f(z) относительно точки a* называется число, обозначаемое через $\operatorname{res} f(a)$ и определяемое равенством

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\,. \tag{2.35}$$

Из теоремы Коши для составного контура следует, что вычет данной функции относительно заданной точки не зависит от формы и размеров контура C, если этот контур удовлетворяет указанным выше требованиям.

Если точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то коэффициент C_{-1} первого члена главной части разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a (см. формулу (2.25)) равен

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

и, следовательно, вычет функции $f(z)$ относительно точки a совпадает с коэффициентом C_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a:

$$\operatorname{res} f(a) = C_{-1}\,. \tag{2.36}$$

Если a является правильной точкой функции $f(z)$, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю и, следовательно, вычет функции относительно правильной точки равен нулю. Тот же вывод следует и относительно устранимой особой точки.

Если a – полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю, если $C_{-1} = 0$.

Вычеты можно вычислять по следующим формулам.

Теорема. Если a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a}\big((z-a)\,f(z)\big)\,. \tag{2.37}$$

Доказательство. Если a является простым полюсом функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{C_{-1}}{z-a}, \tag{2.38}$$

где $\varphi(z)$ является суммой правильной части разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a. По этой причине $\varphi(z)$ является аналитической и тем более непрерывной функцией в точке a. Из (2.38) имеем

$$C_{-1} = (z-a)f(z) - (z-a)\varphi(z)$$

и, переходя к пределу при $C \to a$, получим

$$C_{-1} = \lim_{z\to a}\big((z-a)f(z)\big),$$

так как вследствие непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке a, существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}\phi(z) = \phi(a)$ и $\lim\limits_{z\to a}\big((z-a)f(z)\big) = 0$, откуда следует формула (2.37).

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула.

Теорема. Пусть точка $z = a$ является простым полюсом функции $f(z)$ и функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{g(z)}, \tag{2.39}$$

где $\psi(z)$, $g(z)$ – функции, аналитические в точке a, причем для функции $g(z)$ точка a является нулем первого порядка, а $\psi(a) \neq 0$, тогда

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\psi(a)}{g'(a)}. \tag{2.40}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.37):

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a}\left((z-a)\frac{\psi(z)}{g(z)}\right) = \lim_{z\to a}\frac{\psi(z)}{\frac{g(z)}{z-a}} = \frac{\psi(a)}{\lim\limits_{z\to a}\frac{g(z)}{z-a}}.$$

Но, так как $g(a) = 0$, то в соответствии с определением производной

$$\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{g(z)-g(a)}{z-a}=g'(a),$$

причем $g'(a)\neq 0$, так как согласно условию, для функции $g(z)$ точка a является нулем первого порядка. Откуда следует:

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{\psi(a)}{g'(a)}.$$

Теорема. Если точка $z = a$ является полюсом порядка n функции $f(z)$, то вычет в этой точке можно определить по формуле

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-a)^n f(z)\Big). \qquad (2.41)$$

Доказательство. Если точка $z = a$ является полюсом порядка n функции $f(z)$, то в окрестности этой точки

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{C_{-1}}{z-a}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n},$$

где $\varphi(z)$ является суммой правильной части разложения в ряд Лорана и, следовательно, аналитична в точке $z = a$. Умножим обе части записанного равенства на $(z-a)^n$, получим справедливое в некоторой окрестности точки a (кроме самой точки a) равенство

$$(z-a)^n f(z)=(z-a)^n\varphi(z)+C_{-1}(z-a)^{n-1}+C_{-2}(z-a)^{n-2}+\ldots+C_{-n}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства $n - 1$ раз:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-a)^n f(z)\Big)=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-a)^n\varphi(z)\Big)+(n-1)!C_{-1}.$$

Для функции $(z-a)^n\varphi(z)$ точка $z = a$ является нулем порядка не ниже, чем n, следовательно, в точке a обращаются в нуль производные этой функции во всяком случае до порядка $n - 1$ включительно. Поэтому при $z = a$ первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, и переходя в нем к пределу при $z\to a$, получим

$$C_{-1} = \operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z) \right).$$

Замечание. В тех случаях, когда разложение функции *f(z)* в ряд Лорана (2.24) не вызывает затруднений, бывает проще взять в качестве вычета коэффициент C_{-1} согласно формуле (2.36). В частности, так обычно поступают для нахождения вычета в существенно особой точке.

2.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Основная теорема о вычетах. Пусть L_0 – простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Пусть внутри контура L_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением *n* изолированных особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда интеграл от функции $f(z)$ по контуру L_0 равен сумме вычетов в точках $a_1, a_2, ..., a_n$, умноженный на $2\pi i$:

$$\int_{L_0} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f\left(a_k\right). \tag{2.42}$$

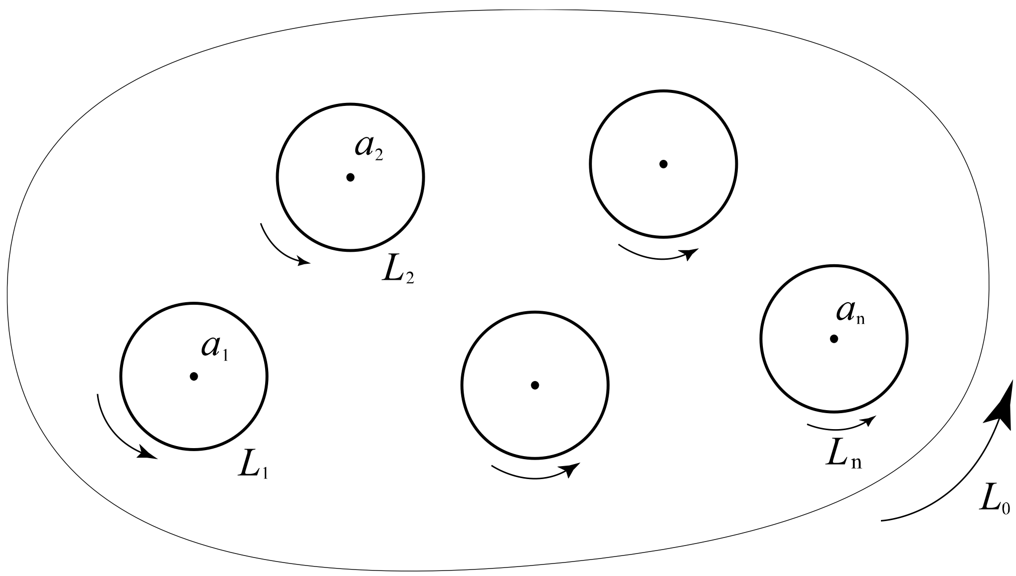

Рис. 2.11

Доказательство. Окружим точки $a_1, a_2, ..., a_n$, лежащие внутри контура L_0, окружностями $L_1, L_2, ..., L_n$ столь малых радиусов, чтобы все они лежали внутри контура L_0 и внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$, при этом никакие две из этих окружностей не должны иметь общих точек (рис. 2.11). Тогда в силу теоремы Коши для составного контура (см. формула (2.21)), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} f(z)dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} f(z)dz\ ,$$

где при интегрировании все контуры обходят против часовой стрелки.

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} f(z)dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции, находящихся внутри контура L_0 (см. определение вычета, формулу (2.35)). Из этого утверждения следует формула (2.42).

С помощью вычетов можно вычислять некоторые несобственные интегралы, в частности, интегралы от рациональных функций. Приведем следующую теорему без доказательства.

Теорема. Пусть $f(x)$ – дробно – рациональная функция, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены соответственно степеней m и n. Если $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси, т.е. $Q_n(x) \neq 0$ для любых действительных x, и $n \geq m+2$, т.е. степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i S\ , \tag{2.43}$$

где S означает сумму вычетов функции $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.