Множество комплексных чисел

Множество действительных чисел состоит из подмножеств рациональных и иррациональных чисел. Над элементами этого множества можно производить операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корней. Не допустимо только извлечение корней четной степени из отрицательных чисел, то есть результат такого действия не является действительным числом. Поскольку любое явление природы описывается с помощью действительных чисел, при решении реальных задач нет необходимости и в указанной операции. Тем не менее, уже в средневековье ученых беспокоила эта "неполноценность" вещественных чисел. Вначале из чисто теоретических соображений появилось желание создать более универсальное множество, допускающее любые известные арифметические операции. Его назвали множеством комплексных чисел. Позднее было установлена универсальность этого множества – многие ограничения удалось снять, математические процедуры стали более стандартными.

Приведем пример. В школе нас учили, что наиболее известное уравнение – квадратное – не всегда имеет решение. Если его дискриминант меньше нуля, решений нет. Это следовало из того, что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Поскольку на множестве комплексных чисел этого ограничения нет, квадратное уравнение всегда имеет пару (различных или одинаковых) корней, и их можно вычислить. Более того, теперь уравнение любой степени имеет корни, причем их количество совпадает со степенью уравнения. Позднее были разработаны процедуры точного или приближенного вычисления корней уравнений практически любой степени.

Итак, введение этого множества привело к тому, что многие математические процедуры в результате снятия различных ограничений стали универсальными. Это во многих случаях значительно упростило математические вычисления. Однако при исследовании реально происходящих процессов или явлений конечные результаты не могут выражаться через комплексные числа или функции комплексного переменного. Следовательно, в этих случаях комплексные числа можно использовать только в промежуточных вычислениях.

Как же выглядят комплексные числа?

Комплексным числом z называет число вида

$$\boxed{z = x + i\,y,}$$

где x, y – действительные числа, i называют мнимой единицей ($i^2 = -1$).

Пример: Решить квадратное уравнение

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-13}}{1} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9i^2} = 2 \pm 3i\,,$$

$$z_1 = 2 + 3i\,, \quad z_2 = 2 - 3i.$$

Это квадратное уравнение не имеет корней в области действительных чисел. Но в области комплексных чисел оно имеет 2 комплексно-сопряженных корня.

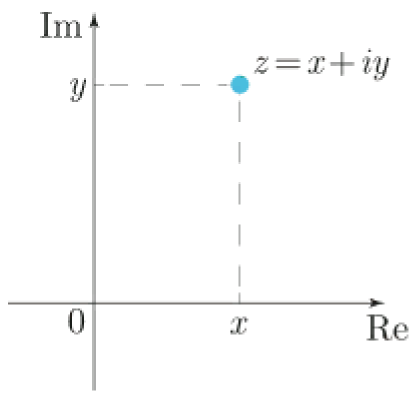
Формы записи комплексного числа

1) ***Алгебраическая форма*** представления комплексного числа.

Комплексное число z определяется формулой

$$\boxed{z = x + i\,y,}$$

где x, y – действительные числа, i - ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.



Алгебраическая форма имеет простое геометрическое истолкование. Мы помним, что все вещественные числа можно разместить на некоторой оси, называемой числовой осью. Множество комплексных чисел представляет собой точки ***комплексной плоскости***.

Если ввести декартову систему координат, то на горизонтальной оси расположены действительные числа x, на вертикальной – мнимые $i\,y$. Начало координат соответствует комплексному числу, действительная и мнимая части которого равны нулю. Комплексное число $3+2i$ представляет собой точку плоскости с координатами $(3;2)$.

Число x называется ***действительной частью комплексного числа*** $z=x+i\,y$ и обозначается $x=\operatorname{Re} z$, а y - ***мнимой частью числа*** z: $y=\operatorname{Im} z$.

Таким образом, множество комплексных чисел включает в себя множества действительных и мнимых чисел.

- Если $x=0$, то число $z=0+i\cdot y=i\cdot y$ называется ***чисто мнимым числом***;
- если $y=0$, то число $z=x+i\cdot 0=x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество ***R*** всех действительных чисел является подмножеством множеств ***C*** всех комплексных чисел, т.е.

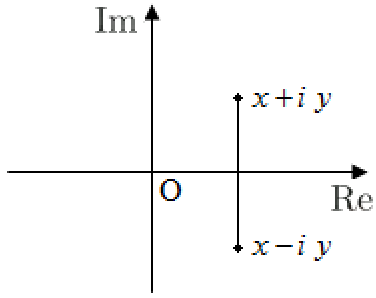
$$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{C}.$$

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными $(z_1=z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1=x_2,\ y_1=y_2$.

В частности, комплексное число $z=x+iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x=y=0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - i \cdot y$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

Комплексно сопряженному числу соответствует точка, симметричная исходному числу относительно оси OX.



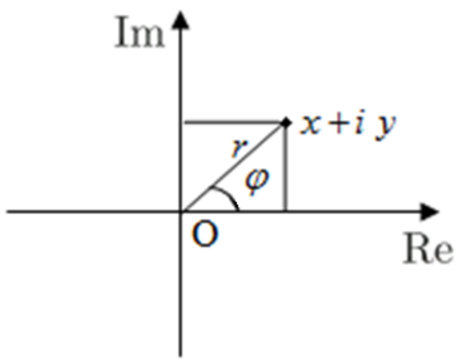
2) ***Тригонометрическая форма*** представления комплексного числа

Алгебраическая форма представления не всегда удобна. Появилась необходимость другого представления комплексного числа. Проведем отрезок, соединяющий точку плоскости, соответствующую комплексному числу z, с началом координат и построим треугольник. Обозначим расстояние между комплексным числом и началом координат r.

Назовем r ***модулем комплексного числа***, то есть $r = |z|$.

Угол наклона луча, идущего к комплексному числу, обозначим φ и назовем его ***аргументом комплексного числа***. Ясно, что

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x},$$



причем

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

В результате получаем ***тригонометрическую форму представления комплексного числа***

$$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}.$$

Комплексно сопряженное число имеет вид $\bar{z} = r\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)$.

- Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.
- Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ - величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2 \ldots)$:

$$\boxed{\varphi = \operatorname{Arg}\, z \;=\; \arg z + 2\pi k\ ,}$$

где $\arg\ z$ - главное значение аргумента, заключенное в промежутке $\left[0, 2\pi\right)$, иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $\left(-\pi, \pi\right]$, т. е. $-\pi < \arg z \le \pi$.

3) ***Показательная форма*** представления комплексного числа

В свое время великим российским математиком Эйлером получена формула

$$\boxed{e^{\pm i\,\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi\ .}$$

Это дало возможность ввести ***показательную форму представления комплексного числа***

$$\boxed{z = r\, e^{i\,\varphi}},$$

комплексно сопряженное число $\boxed{\bar{z} = r\, e^{-i\,\varphi}}$

Замечание. Вышеприведенные формулы позволяют осуществлять переход от одной формы представления комплексного числа к другой.

Доказано, что для комплексных чисел справедливы свойства операций сложения и умножения, аналогичные свойствам действительных чисел, то есть работают переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Сложение комплексных чисел

Для выполнения операции сложения оба комплексных числа удобнее представить в алгебраической форме

$$\boxed{z_1 = x_1 + i\ y_1\ , \quad z_2 = x_2 + i\ y_2\ .}$$

Осуществим сложение этих чисел, используя переместительный и распределительный законы

$$\boxed{z_1 + z_2 = x_1 + i\ y_1 + x_2 + i\ y_2 = x_1 + x_2 + i\ y_1 + i\ y_2 = x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right)}$$

В результате проведенной операции получено комплексное число, действительная часть которого $x_1 + x_2$, а мнимая $y_1 + y_2$.

Замечание. Вычитание комплексных чисел производится аналогично.

Примеры.

1. Просуммировать числа $z_1 = 4 + i\,, \quad z_2 = 5\,, \quad z_3 = 3 - 7i\,.$

$$z_1 + z_2 + z_3 = (4 + 5 + 3) + i\,(1 + 0 - 7) = 12 - 6\,i\,.$$

2. Вычесть из $z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = 5 - 8i\,.$

$$z_1 - z_2 = (3 - 5) + (2 + 8)\,i = -2 + 10\,i\,.$$

Умножение комплексных чисел

а) Представим комплексные числа в алгебраической форме $z_1 = x_1 + i\ y_1\ , \quad z_2 = x_2 + i\ y_2$. Перемножим эти числа, используя переместительный и распределительный законы

$$\boxed{\begin{gathered} z_1 z_2 = (x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = x_1 x_2 + i\,y_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(y_1 x_2 + y_2 x_1)\,. \end{gathered}}$$

В результате проведенной операции получено комплексное число, действительная часть которого $x_1 x_2 - y_1 y_2$, а мнимая $(y_1 x_2 + y_2 x_1)$.

Пример.

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(3-4i) = 6 - 8i + 9i - 12\,i^{\,2} = (6+12) + (-8+9)i = 18 + i\,.$$

b) Зададим комплексные числа в показательной форме

$$\boxed{z_1 = r_1\,e^{i\,\varphi_1}\,, z_2 = r_2\,e^{i\,\varphi_2}}$$

Тогда

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1\,e^{i\,\varphi_1} r_2\,e^{i\,\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{i\,\varphi_1} e^{i\,\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

Модуль комплексного числа после умножения $r_1 r_2$, аргумент $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Замечание. Второй вариант умножения проще. Еще заметнее это при делении чисел и возведении в степень.

Деление комплексных чисел

a) Представим комплексные числа в алгебраической форме

$z_1 = x_1 + i\,y_1\,,\quad z_2 = x_2 + i\,y_2\,.$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2}\,.$$

Для доказательства возможности этой операции необходимо избавиться от мнимой единицы в знаменателе. Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+i\ y_1)(x_2-i\ y_2)}{(x_2+i\ y_2)(x_2-i\ y_2)}=\frac{x_1x_2-i^2y_1y_2+i\ y_1x_2-i\ x_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i\,(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

Пример

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{3-4i}=\frac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{6+8i+9i+12\,i^2}{9-16\,i^2}=\frac{(6-12)+(8+9)i}{9+16}=-\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i.$$

b) Зададим комплексные числа в показательной форме

$$z_1=r_1\,e^{i\,\varphi_1},\quad z_2=r_2\,e^{i\,\varphi_2}\ .$$

Тогда

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\,\varphi_1}}{r_2\,e^{i\,\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

Модуль частного $\frac{r_1}{r_2}$, аргумент $(\varphi_1-\varphi_2)$.

Возведение в степень комплексного числа

Из формулы произведения комплексных чисел

$$z_1z_2=r_1r_2\ e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Очевидно, что это правило сохраняется для любого конечного числа *n* множителей. В частности, когда все *n* множители одинаковы, то получим формулу

$$\boxed{z^n=\left(r\ e^{i\,\varphi}\right)^n=r^n e^{i\,n\,\varphi}}$$

или в тригонометрической форме (*Формула Муавра*):

$$\boxed{z^n=(r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\,)}$$

Пример. Возвести во вторую степень число $z=\sqrt{3}+i$.

<u>1 способ:</u> $z^2=\left(\sqrt{3}+i\right)^2=3+2i\sqrt{3}+i^2=2+2i\sqrt{3}$.

<u>2 способ:</u>
Переведем число в показательную форму записи:

$$z^2=2^2e^{\frac{\pi}{3}i}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2+2i\sqrt{3}.$$

Замечание. Нетрудно заметить, что при больших значениях показателя степени второй вариант решения становится затруднительным.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Комплексно сопряженное от комплексно сопряженного числу z равно числу z, то есть

$$\boxed{\overline{\overline{z}}=z.}$$

Доказательство. Пусть $z=x+i\,y$, тогда по определению $\bar{z}=x-i\,y$, следовательно, $\overline{\overline{z}}=x+i\,y=z$.

2) Комплексно сопряженное от суммы чисел равно сумме комплексно сопряженных чисел

$$\boxed{\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2}.$$

Доказательство. Если $z_1=x_1+i\,y_1$, $z_2=x_2+i\,y_2$, то

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i\left(y_1+y_2\right),$$

очевидно, $\overline{z_1+z_2}=x_1+x_2-i\left(y_1+y_2\right)=x_1-i\,y_1+x_2-i\,y_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

3) $$\boxed{\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.}$$

Доказательство. Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$,

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} r_2 e^{-i\varphi_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 .$$

4) $\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}}$

Доказательство. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1 e^{-i\varphi_1}}{r_2 e^{-i\varphi_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

5) $\boxed{\overline{z^\alpha} = \bar{z}^\alpha}$

Доказательство.

$$z = re^{i\varphi}, \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$$

$$\overline{z^\alpha} = r^\alpha e^{-i\alpha\varphi} = \left(re^{-i\varphi}\right)^\alpha = \bar{z}^\alpha$$

6) $\boxed{z \cdot \bar{z} = r^2}$ (Доказательство самостоятельно)

Извлечение корня *n*-ой степени из комплексного числа

Извлечение корня *n*–й степени из комплексного числа есть действие, обратное возведению комплексного числа в *n*–ю степень. Следовательно, если

$$\boxed{\omega = \sqrt[n]{z}, \text{ то } z = \omega^n.}$$

Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ и } \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

По формуле Муавра получим

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Отсюда

$$r = \rho^n, n\theta = \varphi + 2\pi\kappa.$$

Так как r и ρ – положительные числа, то

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{r},}$$

где корень понимается в арифметическом смысле.

Из равенства $n\theta = \varphi + 2\pi\kappa$ получим $\boxed{\theta = \frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}.}$ Следовательно

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right).}$$

Придавая κ последовательно значения $0,1,2,\ldots$, *n*–1, получим *n* различных значений $\sqrt[n]{z}$. Все они имеют одинаковый модуль.

Если взять $k>n-1$, то значения θ будут отличаться от полученных ранее на числа, кратные 2π, т.е. значения $\sqrt[n]{z}$ будут повторятся.

Таким образом, корень *n*–й степени из комплексного числа имеет ровно *n* разных значений.

Пример. Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

Ясно, что

$$z^6 = -1$$

или

$$z^6 = \cos(\pi + 2\pi n) + i\sin(\pi + 2\pi n) = \cos(2n+1)\pi + i\sin(2n+1)\pi,$$

где n – любое целое число.

Используя формулу Муавра, имеем $z_{1-6} = \cos\frac{(2n+1)}{6}\pi + i\sin\frac{(2n+1)}{6}\pi$.

При $n = 1$ получаем $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$,

при $n = 2$ $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

при $n = 3$ $z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$,

при $n = 4$ $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$,

при $n = 5$ $z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$,

при $n = 6$ $z_6 = \cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

при $n = 7$ получаем $z_7 = \cos\frac{15\pi}{6} + i\sin\frac{15\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = i$.

Следовательно, седьмой корень совпадает с первым, аналогично восьмой – со вторым и так далее. Как и следовало ожидать, корней у уравнения шестой степени ровно 6.

Разложение многочлена на множители.

Основная теорема высшей алгебры и ее следствия.

Для изучения ряда свойств действительных многочленов, то есть функций вида

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \cdots, a_n, x$ --действительные числа, $a_n \neq 0$, оказывается полезным рассмотреть более общий случай многочленов в комплексной области, то есть функций вида

$$\boxed{P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,}$$

где $a_0, a_1, \cdots, a_n, z$ --комплексные числа, $a_n \neq 0$.

Числа $a_0, a_1, \cdots, a_n$ называются коэффициентами многочлена, натуральное число n - его степенью.

Число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется корнем многочлена $P(z)$, если $P(z_0) = 0$.

Теорема Безу. Число $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен нацело делится на $z - z_0$, то есть справедливо тождество:

$$P(z) = (z - z_0)Q(z) \ ,$$

где $Q(z)$ - многочлен степени (n-1).

Сформулируем основную теорему алгебры:

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен степени $n \geq 1$ в комплексной плоскости имеет хотя бы один корень.

Следствие 1. Всякий многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней (с учетом их кратности), то есть справедлива формула, называемая *разложением многочлена на множители:*

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_N)^{k_N} \ ,$$

где $z_i \neq z_l$ при $i \neq l$ $,i,l = 1,2,\cdots,N$ и $k_1 + \cdots + k_N = n$.

Числа $z_1,\cdots,z_N$, и только они, являются корнями многочлена, причем, если $k_i \geq 2$, то соответствующий корень z_i называется кратным корнем кратности k_i.

Следствие 2. Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с действительными коэффициентами имеет следующее *разложение на множители*:

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l} \ ,$$

где $x_1,\cdots x_r$ - действительные корни многочлена (если они есть), а $x^2 + p_i x + q_i$ - квадратные трехчлены с отрицательным дискриминантом, $i = 1,\cdots,l$.

Пример:

Решить уравнение $x^3 - 8 = 0$.
Очевидно, уравнение можно записать в виде $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. Тогда

$x_1 = 2$- действительный корень,
остальные два корня (комплексных корня) определяются из уравнения

$$x^2 + 2x + 4 = 0.$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Итак, уравнение имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня.