НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПЕРВООБРАЗНАЯ, ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функции** $f(x)$ в данном интервале $(a;b)$, $b>a$, если в каждой точке этого интервала производная $F(x)$ равна $f(x)$, то есть

$$F'(x)=f(x).$$

Замечание: Интервал $(a;b)$ может быть и бесконечным.

Поскольку

$$(F(x)+c)'=f(x),$$

где c – постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Теорема. Любые две первообразные функции $f(x)$ в данном интервале $(a;b)$, $b>a$ могут отличаться только на постоянное слагаемое.

Другими словами, если

$$\Phi'(x)=f(x) \text{ и } \Psi'(x)=f(x),$$

то $\Phi(x)-\Psi(x)=c=const.$

Доказательство.

$(\Phi(x)-\Psi(x))'=\Phi'(x)-\Psi'(x)=f(x)-f(x)=0$, и так как производная разности двух первообразных оказалась равной нулю, сама разность функций является постоянной.

Определение 2. Множество всех первообразных одной функции $f(x)$ в данном интервале $(a; b)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается

$$\int f(x)dx,$$

причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией,

$f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Очевидно, что $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$

где

$F'(x) = f(x)$,

c – произвольная постоянная интегрирования, слово "произвольная" подчеркивает, что постоянная может принимать любые значения.

Теорема. Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Операция по нахождению первообразной или неопределенного интеграла называют интегрированием.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА (НИ)

Будем предполагать, что все рассматриваемые в этом разделе функции определены на некотором фиксированном промежутке $(a; b)$

1) $\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)}$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + c)' = F(x)' = f(x)$$

.

2) $\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$

Доказательство следует из определения дифференциала функции и первого свойства НИ

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

3) $\boxed{\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C}$

Доказательство.

$$\int d\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx = \int f(x)dx = \Phi(x) + C.$$

! ! !

Примечание.

Все последующие доказательства проводятся с точностью до постоянной интегрирования, что следует из определения интеграла.

4) $\boxed{\int mf(x)dx = m\int f(x)dx, \text{ если } m - \text{постоянная.}}$

Доказательство. Поскольку

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

причем $F'(x) = f(x)$, а

$$\left(mF(x)\right)' = mF'(x) = mf(x),$$

$mF(x)$ - первообразная подынтегральной функции $mf(x)$, а значит

$$\int mf(x)dx = m(F(x) + c),$$

Но $F(x) + c = \int f(x)dx$, следовательно,

$$\int mf(x)dx = m\int f(x)dx.$$

5) $\boxed{\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.}$

Доказательство. Пусть

$\int f(x)dx = \Phi(x) + C_1$ и $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, где $\Phi'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$.

Поскольку

$$(\Phi(x) + G(x))' = \Phi'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

$\Phi(x) + G(x)$ является первообразной функции $f(x) + g(x)$, следовательно,

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \Phi(x) + G(x) + C_1 + C_2 = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

№	Интеграл	Доказательство
1.	$\int 0 \cdot dx = C$	$(C)' = 0$.
2.	$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	$(x + C)' = 1$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = x^{\alpha}$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$(\ln\|x\| + C)' = \frac{1}{x}$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
11.	$\int shx\, dx = chx + c$	$(chx + c)' = shx$
12.	$\int chx\, dx = shx + c$	$(shx + c)' = chx$
13.	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$	$(thx + c)' = \frac{1}{ch^2 x}$
14.	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$	$(-cthx + c)' = \frac{1}{sh^2 x}$
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\arccos x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\text{-}\operatorname{arcctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$
17.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C.$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$
18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C$ $(k \neq 0)$	$\left(\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C\right)' =$ $= \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm k}}\right) =$ $= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)\sqrt{x^2 \pm k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}}$
19.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$	$\left(\arcsin\frac{x}{a} + c\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} =$ $= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
20.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$	$\left(\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} =$ $= \frac{1}{a^2 + x^2}$
21.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$	$\left(\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c\right)' =$ $= \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} =$ $= \frac{1}{x^2 - a^2}$

В заключение заметим, что , в отличие от производной, далеко не всякий интеграл от элементарной функции выражается через элементарные функции. Среди таких интегралов встречаются интегралы, которые находят большое применение в различных разделах математики и физики. Например, вероятностный интеграл $\int e^{-x^2}dx$, интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$, интегральный синус $\int \frac{\sin x}{x}dx$. а также $\int \sin(x^2)dx$ и $\int \cos(x^2)dx$ не выражаются через элементарные функции.

ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

I. Непосредственное интегрирование.

II. Замена переменной в интеграле и поднесение под дифференциал

III. Интегрирование по частям.

Рассмотрим каждый из этих приемов.

I. **<u>Непосредственное интегрирование</u>.**

Этим способом можно вычислить интегралы, которые при помощи тождественных преобразований подынтегрального выражения и при использовании свойств интегралов сводятся к табличным интегралам.

Примеры.

1)

$$\int \left(x+\sqrt{x}-2\cos x\right)dx = \int xdx + \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int \cos xdx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\sin x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sin x + C.$$

В этом примере сначала вместо интеграла от суммы взяли сумму интегралов, затем во втором интеграле радикал записали в виде степенной функции, а в третьем интеграле вынесли постоянную за знак интеграла. В результате получили сумму трех табличных интегралов.

$$2)\ \int \frac{x-2}{x^3}\,dx = \int\left(x^{-2} - 2x^{-3}\right)dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C =$$
$$= x^{-2} - x^{-1} + C$$

В этом примеры сначала почленно поделили числитель на знаменатель, а затем представили интеграл от разности в виде разности интегралов и вынесли постоянный сомножитель за знак интеграла. В результате получили разность табличных интегралов

$$3)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= -ctg\ x + tg\ x + C$$

При решении воспользовались тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

II. Замена переменной в интеграле

Наибольшее число известных интегралов вычисляются с использованием этого приема. Суть его в следующем. Вместо прежней переменной интегрирования вводится новая переменная так, чтобы вновь получившийся интеграл стал более простым, или более удобным для интегрирования.

Теорема.

Если $F(x) + C = \int f(x)\,dx$ и $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Доказательство.

Так как $(F(x)+C)' = f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t))+C)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C$$

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx = d\varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{matrix}\right\} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.}$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

Примеры.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \left\{\begin{matrix} t=x+2 \\ dt=dx \end{matrix}\right\} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C =$

$$=\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$$

После выделения полного квадрата в подкоренном выражении стала очевидной замена, приводящая интеграл к табличному. Замена приведена в фигурных скобках.

! ! !

Важно заметить, что в ходе замены переменной должна быть установлена связь не только между новой и старой переменными, но и между дифференциалами этих переменных.

2. $\displaystyle\int\frac{2xdx}{1+x^4} = \int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \left\{\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=d(x^2) \end{matrix}\right\} = \int\frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctg(x^2)+C.$

3. $\displaystyle\int\cos^4 x\sin xdx = \left\{\begin{matrix} z=\cos x \\ dz=-\sin xdx \end{matrix}\right\} = -\int z^4dz = -\frac{z^5}{5} = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

4. $\int e^{\sin x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix}\right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

В вышеприведенных примерах не всегда понятно, как выбирается замена переменной. Далее будет изложена теория, из которой следует, какую замену нужно производить в том, или ином случае.

Замечания.

1) $\boxed{\text{Если } \int f(x)dx = F(x) + c, \text{ то } \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c}$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int f(ax)dx = \left\{\begin{matrix} t = ax \\ dt = adx \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix}\right\} = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax) + c$$

1) 2) $\boxed{\int f(x+b)dx = F(x+b) + c}$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int f(x+b)dx = \left\{\begin{matrix} t = x+b \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int f(t)dt = F(t) + c = F(x+b) + c$$

.

3) $\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c}$

Доказательство следует из первого и второго следствий.

III. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям обычно используется, если подынтегральная функция представляет произведение функций разных типов - степенная и показательная, степенная и тригонометрическая, обратная тригонометрическая функция и степенная, показательная и тригонометрическая и т.д. Интегрирование в этом случае производится с помощью формулы

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du},$$

где u , v – функции одной переменной.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал произведения функций

$$d(u \cdot v) = d(u(x) \cdot v(x)) = (uv)' dx = (u'v + uv')dx = u'dx\, v + u\, v'dx = vdu + udv.$$

Интегрируем обе части равенства

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv,$$

тогда

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

откуда и следует формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При применении процедуры интегрирования по частям важен выбор функции u.

Укажем приоритеты выбора этой функции.

1) В первую очередь в качестве u выбирается одна из функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ $arctgx$, $arcctgx$.

2) При отсутствии этих функций в подынтегральном выражении в качестве u может быть выбрана находящаяся в числителе степенная функция с целым положительным показателем степени.

Других приоритетов при выборе этой функции нет, задание u в этом случае осуществляется перебором возможных вариантов.

Примеры.

1.

$$\int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x\,, \quad du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx\,, \quad v = \int xdx = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} =$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

.

Замечания:

а) из примера становится ясным, почему указанная процедура называется интегрированием по частям. Один интеграл вычисляется при определении v, другим интегралом является $\int vdu$, то есть вместо одного интегрирования производится два,

б) в качестве u в этом примере выбрана логарифмическая функция, поскольку она обладает высшим приоритетом по сравнению со степенной функцией,

в) при определении v постоянную интегрирования обычно считают нулем, поскольку в качестве v может использоваться любая из первообразных подынтегральной функции.

2. $\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x\,, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx\,, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

3. $\int x^2 e^x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2\ , & du = 2xdx \\ dv = e^x dx\ , & v = e^x \end{Bmatrix} = x^2 e^x - \int e^x 2xdx =$

$$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx = \begin{Bmatrix} u = x\ , & du = dx \\ dv = e^x dx\ , & v = e^x \end{Bmatrix} = x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx \right] =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C\ .$$

В этом примере для получения табличного интеграла пришлось интегрировать по частям дважды, при каждом интегрировании показатель степени степенной функции уменьшался на единицу. В итоге повторном применении указанной процедуры степенная функция из подынтегрального выражения исчезла. Именно поэтому интеграл стал проще. Если показатель степени дробный, степенная функция при интегрировании по частям не исчезает, а переходит в знаменатель, что усложняет интеграл.

4. $\int e^x \cos xdx = \begin{Bmatrix} u = \cos x\ , & du = -\sin xdx \\ dv = e^x dx\ , & v = e^x \end{Bmatrix} = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx =$

$$= \begin{Bmatrix} u = \sin x\ , & du = \cos xdx \\ dv = e^x dx\ , & v = e^x \end{Bmatrix} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx\ .$$

В этом примере после дважды примененной процедуры интегрирования по частям табличного интеграла не получилось, однако, из формулы

$$\int e^x \cos xdx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx,$$

следует

$$2\int e^x \cos xdx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

или

$$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C\ .$$

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Далее будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов функций. В первую очередь рассмотрим интегралы от дробно рациональных функций. Важность этого класса интегралов следует из того, что наибольшее число интегралов других классов сводятся именно к этим интегралам.

Интегрирование простейших дробно-рациональных функций

Известны 4 простейшие дробно-рациональные функции. Интегралы от них вычисляются следующим образом

$$\boxed{\text{I.}\ \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C}$$

Доказательство: $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C$

$$\text{II.}\ \boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C\,.}$$

Доказательство: $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C\,.$

$$\text{III.}\ \boxed{\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx,\quad (p^2-4q<0)}$$

$$\text{IV.}\ \boxed{\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx \quad (p^2-4q<0)}$$

(при $p^2-4q \geq 0$ эти два интеграла могут быть сведены к более простому виду).

Простейшие дроби III и IV типов преобразуются одинаково по следующей схеме:

1) Выделяется полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где

$$a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4q - p^2}{4} \geq 0.$$

2) Делается замена переменной $\left\{t = x + \frac{p}{2}, \quad dt = dx\right\}$, и интеграл разбивается на два.

Тогда интеграл III типа сводится к следующим простым интегралам:

$$\boxed{\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx} = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \left\{\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2}, \\ dt = dx \end{array}\right\} = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{(2N-Mp)}{2a}arctg\frac{(2x+p)}{2a} + C.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{(4x+3)}{(x^2+4x+5)}dx$.

Поскольку $p^2 - 4q = 16 - 20 = -4 < 0$, данный интеграл является интегралом третьего типа. Решаем его, используя вышеприведенную процедуру

$$\int \frac{(4x+3)}{(x^2+4x+5)}dx = \int \frac{(4x+3)}{(x+2)^2+1}dx = \{t = x+2, \quad dt = dx\} = \int \frac{(4t-8+3)}{(t^2+1)}dt =$$

$$=\int\frac{4tdt}{(t^2+1)}dt-5\int\frac{dt}{(t^2+1)}=2\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)}-5\int\frac{dt}{(t^2+1)}=2\ln\left|t^2+1\right|-5arctgt+C=$$

$$=2\ln\left|x^2+4x+5\right|-5arctg(x+2)+C.$$

С интегралом IV типа сложнее. После той же замены переменной получаем

$$\boxed{\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx}=\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right)^m}=\left\{\begin{array}{l}t=x+\frac{p}{2}\\ dt=dx\\ x=t-\frac{p}{2}\end{array}\right\}=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^m}dt+\int\frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-m+1}}{(-m+1)}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{M}{2}\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}\Bigg|_{t=x+\frac{p}{2}}.$$

Один из интегралов сведен к табличному и вычислен. Для вычисления второго требуется, так называемая, рекуррентная формула, вывод которой осуществляется с помощью интегрирования по частям.

$$J_m=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\left\{\begin{array}{ll}u=\frac{1}{(t^2+a^2)^m}, & du=-m(t^2+a^2)^{-m-1}2tdt=-2m\frac{tdt}{(t^2+a^2)^{m+1}}\\ dv=dt, & v=t\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^m}+2m\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}=\frac{t}{(t^2+a^2)^m}+2m\int\frac{(t^2+a^2-a^2)dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^m}+2m\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}-2ma^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}},$$

откуда следует

$$J_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

Определяем

$$\boxed{J_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m\right],}$$

где

$$J_{m+1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}.$$

Покажем на примерах, как применяется рекуррентная формула.

Пример 1. Вычислить $J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$.

Поскольку $J_1 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C$,

применяем рекуррентную формулу при $m=1$:

$$\boxed{J_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m\right],}$$

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + J_1\right] = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a}\right] + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a}\right] + C.$$

Пример 2. Вычислить $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^3}$.

Применяем рекуррентную формулу при $m=2$:

$$\boxed{J_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m\right],}$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^2} + 3J_2\right],$$

но J_2 определено выше, тогда

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^2} + \frac{3}{2a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)} + \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a}\right]\right\} =$$

$$= \frac{t}{4a^2\left(t^2 + a^2\right)^2} + \frac{3t}{8a^4\left(t^2 + a^2\right)} + \frac{3}{8a^5} arctg\frac{t}{a}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^3} = \frac{t}{4a^2\left(t^2 + a^2\right)^2} + \frac{3t}{8a^4\left(t^2 + a^2\right)} + \frac{3}{8a^5} arctg\frac{t}{a}.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2}dx$.

Преобразуем интеграл, используя вышеуказанную процедуру

$$\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2}dx = \int \frac{(2x+7)}{\left[(x+1)^2 + 9\right]^2}dx = \{t = x+1, \quad dt = dx\} = \int \frac{(2t - 2 + 7)}{\left(t^2 + 9\right)^2}dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{\left(t^2 + 9\right)^2} + 5\int \frac{dt}{\left(t^2 + 9\right)^2}.$$

Поскольку

$$\int \frac{dt}{\left(t^2 + 3^2\right)^2} = \frac{1}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2 + 9\right)} + \frac{1}{3} arctg\frac{t}{3}\right] + C,$$

что следует из примера 1, получаем

$$\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2}dx = -\frac{1}{\left(t^2 + 9\right)} + \frac{5}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2 + 9\right)} + \frac{1}{3} arctg\frac{t}{3}\right] + C =$$

$$= \frac{5x-13}{18(x^2+2x+10)} + \frac{5}{54} arctg \frac{(x+1)}{3} + C.$$

II. Дробно-рациональные функции, их интегрирование

Определение. Дробно рациональной функцией называется выражение вида $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены.

Определение. Дробь называется правильной, если старшая степень многочлена, находящегося в числителе, меньше старшей степени многочлена в знаменателе, то есть $m < n$, в противном случае дробь неправильная.

При вычислении интегралов от дробно рациональных функций $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$ необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) Установить, является ли подынтегральная функция правильной или неправильной дробью. Если дробь неправильная, представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби.

2) Выяснить, является ли правильная дробь простейшей, если да, то приступить к ее интегрированию.

3) Если дробь не является простейшей, представить ее в виде суммы простейших дробей и после этого приступить к интегрированию.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{(3x^5 - 2x^4 + x^3 + 6x - 5)}{(x-2)} dx.$$

Дробь неправильная, значит необходимо выделить целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3x^5-2x^4+x^3+6x-5 & x-2 \\
\cline{2-2}
3x^5-6x^4 \qquad\qquad\quad & 3x^4+4x^3+9x^2+18x+42 \\
\hline
-\,4x^4+x^3+6x-5 & \\
4x^4-8x^3 \qquad\quad & \\
\hline
-\,9x^3+6x-5 & \\
9x^3-18x^2 \quad & \\
\hline
-\,18x^2+6x-5 & \\
18x^2-36x \quad & \\
\hline
-\,42x-5 & \\
42x-84 & \\
\hline
79 &
\end{array}
$$

В результате

$$\int\frac{\left(3x^5-2x^4+x^3+6x-5\right)}{(x-2)}dx=\int\left(3x^4+4x^3+9x^2+18x+42+\frac{79}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{5}x^5+x^4+3x^3+9x^2+42x+79\ln|x-2|+C\,.$$

Примечание. Интегрирование целой части, выделенной из неправильной дроби, сложности не представляет, поскольку приводит к интегралам от степенных функций.

Теорема. Правильная несократимая дробно рациональная функция $\dfrac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}$, $(m<s+2k\,)$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{A_1}{(x-a)^s}+\frac{A_2}{(x-a)^{s-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{s-2}}+\ldots.+\frac{A_s}{(x-a)}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}}+\ldots..+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)}.$$

(Без доказательства)

Правила определения коэффициентов разложения:

1) После представления правильной дробно рациональной функции в виде суммы простейших дробей приводим правую часть формулы к общему знаменателю, следя за тем, чтобы общий знаменатель суммы дробей совпадал со знаменателем разлагаемой дроби.

2) Так как знаменатели дробей в левой и правой частях равенства совпадают, приравняем их числители, в результате получаем равенство многочленов, расположенных в левой и правой частях формулы.

3) Из условия, что многочлены равны только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему уравнений относительно коэффициентов разложения, причем доказано, что она имеет единственное решение.

4) После определения из полученной системы значений коэффициентов разложения интегрируем простейшие дроби.

Пример 1. $\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx$.

Интеграл от дробно рациональной функции, дробь правильная, несократимая и не являющаяся простейшей. Тогда

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)}.$$

После приведения правой части равенства к общему знаменателю получаем

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} \equiv \frac{A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)^2}.$$

Приравниваем числители дробей

$$3x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3),$$

откуда следует

$$3x+2 \equiv A\left(x^2+6x+9\right) + B(x-2) + D\left(x^2+x-6\right). \qquad (*)$$

Требуем равенства коэффициентов при одинаковых степенях многочленов, в результате приходим к системе уравнений относительно коэффициентов разложения

$$\begin{array}{c||l} x^2 & A + D = 0 \\ x & 6A + B + D = 3 \\ 1 & 9A - 2B - 6D = 2 \end{array}$$

Итак, получена система трех уравнений относительно A, B, D. Известно, что ее решение единственно. Решение может быть получено разными способами.

Представляет особый интерес добавление к этой системе дополнительных, "лишних" уравнений, упрощающих получение решения.

Рассуждают при этом следующим образом.

Тождество (*) предполагает, что равенство справедливо при любых значениях переменной x

$$3x + 2 \equiv A\left(x^2 + 6x + 9\right) + B(x-2) + D\left(x^2 + x - 6\right) \qquad (*)$$

следовательно, его можно использовать и при конкретных значениях переменной.

Примем $x = 2$, тогда тождество приводит к уравнению

$$8 = 25A + B \cdot 0 + D \cdot 0,$$

откуда следует $A = \dfrac{8}{25}$.

Из первого уравнения полученной выше системы следует $D = -\dfrac{8}{25}$, после чего из второго получаем $B = -\dfrac{48}{25} + \dfrac{8}{25} + 3 = \dfrac{35}{25} = \dfrac{7}{5}$.

Поскольку к решению системы привлекалось дополнительное уравнение, третье уравнение системы оказалось лишним. Используем его для проверки полученного результата

$$\frac{72}{25} - \frac{70}{25} + \frac{48}{25} = \frac{50}{25} = 2.$$

Теперь

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx = \int \left(\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)} \right) dx =$$

$$= \frac{8}{25}\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x+3)^2} - \frac{8}{25}\int \frac{dx}{(x+3)} =$$

$$= \frac{8}{25}\ln|x-2| - \frac{7}{5(x+3)} - \frac{8}{25}\ln|x+3| + C = \frac{8}{25}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| - \frac{7}{5(x+3)} + C.$$

Пример 2. $\int \frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную дробно рациональную функцию, которую следует разложить на простейшие дроби. Для этого многочлен в знаменателе необходимо представить в виде произведения простейших множителей. Это возможно, если удается определить все корни многочлена в знаменателе, что не всегда получается. Часто поступают следующим образом. Перебором вариантов подбирается один из корней, в нашем примере это $x=1$. Очевидно, многочлен в знаменателе нацело делится на $(x-1)$. Проверим это

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-x^2} & x^2+2x+2 \\ 2x^2-2 & \\ -\underline{2x^2-2x} & \\ 2x-2 & \\ -\underline{2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$, причем второй множитель действительных корней не имеет, поскольку его дискриминант равен (-4).

Теперь

$$\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)} = \frac{(x-4)}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Mx+N}{(x^2+2x+2)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю, имеем

$$\frac{(x-4)}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)},$$

в результате

$$A(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)\equiv x-4\,.$$

Это тождество приводит к системе уравнений

$$\begin{array}{r||l} x^2 & A+M=0 \\ x & 2A-M+N=1 \\ 1 & 2A-N=-4 \end{array}$$

Добавим к этой системе уравнений дополнительное уравнение, полученное из тождества при $x=1$:

$$5A=-3,$$

откуда следует $A=-\dfrac{3}{5}$.

Теперь из первого уравнения системы $M=\dfrac{3}{5}$, из последнего уравнения $N=-\dfrac{6}{5}+4=\dfrac{14}{5}$.

Проверим результат, подставив полученные значения коэффициентов в оставшееся второе уравнение

$$2A-M+N=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}+\frac{14}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

В итоге

$$\int\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx=-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{5}\int\frac{(3x+14)}{(x^2+2x+2)}dx\,.$$

Первый интеграл табличный, второй является интегралом третьего типа, решаем его, используя описанную выше процедуру.

$$\int\frac{(3x+14)}{(x^2+2x+2)}dx=\int\frac{(3x+14)}{(x+1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix} z=x+1 \\ dz=dx \end{matrix}\right\}=\int\frac{(3z-3+14)}{z^2+1}dz=3\int\frac{zdz}{z^2+1}+$$

$$+11\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{3}{2}\ln\left|z^2+1\right|+11\,arctgz+C=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+1\right|+11arctg(x+1)+C\,.$$

Итак,

$$\int\frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx=-\frac{3}{5}\ln|x-1|+\frac{3}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{11}{5}\,arctg(x+1)+C\,.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x^4 + 4}$.

Иногда представление знаменателя дроби в виде произведения простейших скобок может быть осуществлено без определения корней знаменателя. Покажем, как это можно сделать в данном примере

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Дальнейшее упрощение знаменателя нецелесообразно, так как ни один из полученных квадратных трехчленов не имеет действительных корней. Итак,

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{1}{\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)} = \frac{Mx + N}{\left(x^2 - 2x + 2\right)} + \frac{Px + Q}{\left(x^2 + 2x + 2\right)}.$$

После приведения дробей к общему знаменателю приходим к тождеству

$$\left(Mx + N\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) + \left(Px + Q\right)\left(x^2 - 2x + 2\right) \equiv 1$$

или

$$Mx\left(x^2 + 2x + 2\right) + N\left(x^2 + 2x + 2\right) + Px\left(x^2 - 2x + 2\right) + Q\left(x^2 - 2x + 2\right) \equiv 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях тождества

$$\begin{array}{c||l} x^3 & M + P = 0 \\ x^2 & 2M + N - 2P + Q = 0 \\ x & 2M + 2N + 2P - 2Q = 0 \\ 1 & 2N + 2Q = 1 \end{array}$$

В этом случае не удается для упрощения решения системы уравнений привлечь дополнительных уравнений. Однако третье уравнение системы с помощью первого уравнения приводится к виду $2N - 2Q = 0$, откуда получаем $Q = N$. Теперь из последнего уравнения получаем

$$Q = N = \frac{1}{4}.$$

Из первого уравнения $P = -M$. Подставляя все это во второе уравнение, имеем $2M + \frac{1}{4} + 2M + \frac{1}{4} = 0$, откуда следует

$$M=-\frac{1}{8},$$

после чего
$$P=\frac{1}{8}.$$

Итак,

$$\frac{1}{x^4+4}=-\frac{x-2}{8\left(x^2-2x+2\right)}+\frac{x+2}{8\left(x^2+2x+2\right)}.$$

Вычисляем интегралы

$$-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{\left(x^2-2x+2\right)}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{(x-1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{8}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{tdt}{t^2+1}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{16}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{1}{8}arctgt=-\frac{1}{16}\ln\left|(x-1)^2+1\right|+\frac{1}{8}arctg(x-1)$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{(x+1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}z=x+1\\ dz=dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{8}\int\frac{z+1}{z^2+1}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{2z}{z^2+1}dz+\frac{1}{8}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{16}\ln\left|z^2+1\right|+\frac{1}{8}arctgz=\frac{1}{16}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{1}{8}arctg(x+1)$$

В итоге

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}arctg(x+1)+\frac{1}{8}arctg(x-1)+C.$$

III. Интегрирование тригонометрические функции

1. **Рассматриваются интегралы** $\boxed{\int R(\cos x,\sin x)dx,}$ где $R-$ дробно рациональная функция двух аргументов $\cos x$ и $\sin x$.

Эти интегралы заменой переменной сводятся к интегралам $\int\overline{R}(t)dt$, причем $\overline{R}-$ дробно рациональная функция аргумента t.

Решение этой задачи осуществляется с помощью универсальной подстановки

$$\boxed{t=tg\frac{x}{2}.}$$

Покажем, что функции $\cos x$ и $\sin x$, а также dx оказываются дробно рациональными функциями новой переменной t.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\\ &\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}}$$

При получении первой формулы учитывалось, что

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha.$$

Кроме того

$$\boxed{\begin{aligned}&x = 2arctgt,\\ &dx = \frac{2}{1+t^2}dt.\end{aligned}}$$

Итак,

$$\boxed{\int R(\cos x, \sin x)dx = \left\{\begin{aligned}&\boxed{t = tg\frac{x}{2},}\\ &\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ &\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\\ &dx = \frac{2}{1+t^2}dt\end{aligned}\right\} = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \overline{R}(t)dt.}$$

Таким образом, задача приведения рассматриваемого интеграла к интегралу предыдущего класса решена. Однако, как показывает опыт, эта замена приводит к сложным интегралам от дробно рациональных функций, вычисление которых весьма затруднительно, если вообще возможно.

В некоторых случаях с помощью других подстановок удается получить более простые дробно рациональные функции. В отличие от универсальной, эти подстановки, называют иногда специальными, так как применимы они лишь при выполнении некоторых условий.

Специальные замены

а) Замена $\boxed{t = \sin x}$ применима, если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, т.е. при выполнении условия

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

б) Замена $\boxed{t = \cos x}$ применима, если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, т.е. при выполнении условия

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x),$$

в) Замена $\boxed{t = tgx}$ применима, если подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$ одновременно, т.е. при выполнении условия

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x).$$

Тогда $\cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1}{1 + tg^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$,

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\left(1 + tg^2 x\right)} = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Так как $x = arctgt$, значит $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \left\{ \begin{aligned} & \boxed{t = tg\ x,} \\ & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ & dx = \frac{1}{1+t^2}dt \end{aligned} \right\} = \int R\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int \overline{R}(t)dt$$

Таким образом, приведение рассматриваемого класса интегралов к предыдущему классу возможно двумя способами. Либо применением универсальной подстановки, приводящей почти всегда к интегралам от сложных дробно рациональных функций, либо использованием, если это возможно, наиболее подходящей специальной подстановки.

Опыт показывает, что применение универсальной подстановки целесообразно, когда не работает ни одна из специальных подстановок.

Если допустимы несколько специальных подстановок, желательно осуществить каждую из них, чтобы выбрать ту, которая приводит к интегралу от самой простой дробно рациональной функции.

Пример 1. Вычислить $\int tg^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$.

Нетрудно проверить, что можно реализовать все приведенные выше подстановки. В самом деле, подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, нечетна относительно $\sin x$, так же она четна относительно одновременно $\cos x$ и $\sin x$. Универсальная же подстановка осуществима в этих интегралах всегда. Реализуем поочередно все подстановки, начиная с универсальной.

A) $$\int tg^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5} \frac{2dt}{1+t^2} = -64\int \frac{t^5}{\left(t^2-1\right)^5\left(t^2+1\right)} dt =$$

$$= -64\int \frac{t^5}{(t-1)^5(t+1)^5\left(t^2+1\right)} dt .$$

В результате получен интеграл от дробно рациональной функции, дробь правильная, несократимая. Ее можно представить в виде суммы одиннадцати простейших дробей. Относительно коэффициентов разложения получается система 12 алгебраических уравнений.

B) $$\int tg^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} \cos x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^3} \cos x\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x\, dx \end{aligned} \right\} = \int \frac{t^5}{\left(1-t^2\right)^3} dt = -\int \frac{t^5}{(t-1)^3(t+1)^3} dt .$$

Подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы шести простейших дробей, для отыскания коэффициентов разложения требуется решить систему 6 алгебраических уравнений. Задача значительно проще по сравнению с А).

C) $$\int tg^5 x\, dx = \left\{ \begin{aligned} t &= tgx \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned} \right\} = \int \frac{t^5}{t^2+1} dt .$$

Итак, необходимо вычислить интеграл от неправильной дробно рациональной функции, что значительно проще вычисления интеграла B), не говоря уж об A).

D) $$\int tg^5 x\,dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\sin x\,dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^5 x}\sin x\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & t = \cos x \\ & dt = -\sin x\,dx \end{aligned} \right\} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5}dt = -\int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t} \right)dt =$$

$$= \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C\,.$$

Таким образом, последний вариант замены переменной оказался самым удачным, с помощью этой подстановки интеграл вычислен. В ходе решения подтвердилось, что универсальная подстановка в рассмотренном примере приводит к значительно более трудоемким вычислениям.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2}$.

В этом случае не работает ни одна из специальных подстановок, приходится применять универсальную.

$$\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2} = \left\{ \begin{aligned} & t = tg\frac{x}{2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ & \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{2dt}{t^2+6t+3}\,.$$

Знаменатель получившейся подынтегральной функции имеет действительные корни, следовательно, дробь может быть представлена в виде суммы двух более простых дробей. Однако значения корней выражаются через радикалы, поэтому откажемся от требований теории, предпочтя выделение полного квадрата в знаменателе.

$$\int\frac{2dt}{t^2+6t+3}=\int\frac{2dt}{(t+3)^2-6}=\begin{Bmatrix}z=t+3\\ dz=dt\end{Bmatrix}=2\int\frac{dz}{z^2-6}=\frac{2}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+3-\sqrt{6}}{t+3+\sqrt{6}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}}\right|+C.$$

Итак, $$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}}\right|+C.$$

2. **Интегралы вида** $\boxed{\int\sin^m x\cos^n x\,dx.}$

Эти интегралы являются частным случаем интеграла $\int R(\cos x,\sin x)dx$, следовательно, к ним применима теория предыдущего параграфа.

а) Замена $\boxed{t=\sin x}$ применима, если n - нечетна, т.е. нечетная степень у $\cos x$.

б) Замена $\boxed{t=\cos x}$ применима, если m - нечетна, т.е. нечетная степень у $\sin x$.

в) Интересен случай, когда m и $n-$ четные. Теория предлагает в этом случае замену $t=tgx$, однако удобнее понизить общую степень подынтегральной функции с помощью одной из формул

$$\boxed{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Пример 3.

$$\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

3. **Интегралы вида** $\boxed{\int\sin ax\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\sin bx\,dx,\ \int\cos ax\cos bx\,dx.}$

Они решаются с помощью формул

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin((a+b)x)dx + \int \sin((a-b)x)dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((a+b)x)}{(a+b)} + \frac{\cos((a-b)x)}{(a-b)}\right] + C\,,$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos((a-b)x)dx - \int \cos((a+b)x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{(a+b)}\right] + C\,,$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos((a-b)x)dx + \int \cos((a+b)x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{(a+b)}\right] + C\,.$$

IV. Интегрирование показательных функций

Вычисляются интегралы вида $\boxed{\int R\left(a^x\right)dx,}$ где $R-$ дробно рациональная функция аргумента a^x.

В этом классе рекомендуется замена

$$\boxed{z=a^x\,,\quad dz=a^x\ln a\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{\ln a}\frac{dz}{z}\text{, тогда}\quad \int R\left(a^x\right)dx=\frac{1}{\ln a}\int\frac{R(z)\,dz}{z}.}$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}=\left\{\begin{aligned}&z=e^x\\&dz=e^x dx\end{aligned}\right\}=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$$

V. Интегрирование иррациональных выражений

Этот класс интегралов является наиболее сложным, так как включает в себя множество подклассов интегралов, в каждом из которых свои приемы вычислений. Более того, кажущаяся очевидной замена переменной чаще всего не приводит к положительному результату. Основная идея, реализуемая в этом классе интегралов, избавление от радикалов в подынтегральном выражении.

1. Интегралы вида $\boxed{\int R\left(x\,,\sqrt[m]{ax+b}\,,\sqrt[n]{ax+b}\,,\sqrt[p]{ax+b}\,,\sqrt[q]{ax+b}\right)dx,}$ где $R-$ дробно рациональная функция.

В этом случае работает $\boxed{\text{замена }\ ax+b=z^s,}$ где $s-$ наименьше общее кратное чисел $m\,,n\,,p\,,q$, другими словами, $s-$ наименьшее из чисел, делящихся нацело на $m\,,n\,,p\,,q$.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}=\left\{\begin{aligned}&x=z^6\\&dx=6z^5dz\end{aligned}\right\}=\int\frac{6z^5dz}{z^3-2z^2}=6\int\frac{z^3}{z-2}dz=6\int\frac{z^3-8+8}{z-2}dz=$$

$$=6\left[\int\left(z^2+2z+4\right)dz+8\int\frac{dz}{z-2}\right]=2z^3+6z^2+24z+48\ln|z-2|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+48\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|+C.$$

2. Интеграл вида

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+f}}\right)dx}$$

где n -натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+f}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+f} = t^n; \qquad x = \frac{ft^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{ft^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{ft^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{ft^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

3. Интегралы вида $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx.}$

Для этих интегралов имеются замены переменных, напрямую приводящие их к классу дробно рациональных функций. Однако предпочтительнее в этом случае замена, переводящая интеграл в класс тригонометрических функций. Это

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x = a\sin t, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t, \\ dx = a\cos t\, dt \end{Bmatrix}},$$

тогда $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx = \int R(a\sin t, a\cos t)a\cos t\, dt.$

Преобразование полученного в результате замены переменной интеграла происходит по правилам, установленным в классе тригонометрических функций.

4. Интегралы вида $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx.}$

Подынтегральная функция приводится к дробно рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$\boxed{x = a\, tgt, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt,}$$

откуда следует

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx = \int R\left(a\, tgt, \frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int \overline{R}(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Для преобразований полученного интеграла используем теорию, относящуюся к интегралам от тригонометрических функций.

5. Интегралы вида $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx.}$

Подынтегральная функция приводится к дробно рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$\boxed{x = \frac{a}{\sin t}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = a\frac{\cos t}{\sin t}, \quad dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt,}$$

откуда следует

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, a\frac{\cos t}{\sin t}\right)\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \overline{R}(\cos t, \sin t)\,dt.$$

Пример 1.

$$\int \frac{(1-x)}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left\{\begin{array}{l} x = 2\sin t, \ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2\cos t \\ dx = 2\cos t\, dt \end{array}\right\} = \int \frac{(1-2\sin t)2\cos t}{2\cos t}dt =$$

$$= \int (1 - 2\sin t)\,dt = t + 2\cos t + C = \arcsin\frac{x}{2} + 2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} + C = \arcsin\frac{x}{2} + 2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{(2+5x)}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx = \left\{ x = 3\,tgt, \quad \sqrt{9+x^2} = \frac{3}{\cos t}, \quad dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt \right\} =$$

$$= \int \frac{(2 + 15\,tgt)}{\frac{27}{\cos^3 t}}\frac{3}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{9}\int (2\cos t + 15\sin t)dt = \frac{2}{9}\sin t - \frac{5}{3}\cos t + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sin\left(arctg\frac{x}{3}\right) - \frac{5}{3}\cos\left(arctg\frac{x}{3}\right) + C.$$

Если учесть формулы

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}},$$

$$\sin x = tgx \cos x = tgx\sqrt{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\sqrt{1 + tg^2 x}},$$

то

$$\cos\left(arctg\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\left(arctg\frac{x}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 + x^2}},$$

$$\sin\left(arctg\frac{x}{3}\right) = \frac{tg\left(arctg\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1 + tg^2\left(arctg\frac{x}{3}\right)}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}.$$

Очевидно,

$$\int \frac{(2 + 5x)}{\sqrt{(9 + x^2)^3}} dx = \frac{2x}{9\sqrt{9 + x^2}} - \frac{5}{\sqrt{9 + x^2}} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x} dx = \left\{ x = \frac{1}{\sin t}, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\sin t}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = -\int ctg^2 t\, dt = -\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt =$$

$$= ctg\ t + t + C = ctg \arcsin\frac{1}{x} + \arcsin\frac{1}{x} + C = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Здесь учитывались формулы

$$ctg^2\ t = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$$

и

$$ctg \arcsin\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \arcsin\frac{1}{x}} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}} - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Интегрирование биноминальных дифференциалов

$\boxed{\int x^m(a+bx^n)^p dx,}$ где m, n и p -рациональные числа.

1) Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель m и n.

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s – знаменатель числа p.

3) Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p.