ЛЕКЦИЯ 2

Знакопеременные числовые ряды. Функциональные ряды.

1.5. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ.

До сих пор мы рассматривали только ряды, все члены которых положительны. Если все члены ряда – отрицательные числа, то такой ряд получается умножением всех членов знакоположительного ряда на (–1), что не изменяет сходимости ряда (теорема 1, п.1.2). Поэтому, для исследования такого ряда достаточно исследовать соответствующий знакоположительный ряд.

Теперь перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные слагаемые. Такие ряды называются *знакопеременными*. Изучение таких рядов начнем с частного случая *знакочередующихся* рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный. В качестве примера знакочередующегося ряда приведем ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \qquad (1.16)$$

Для удобства будем считать, что первый член знакочередующегося ряда положителен. Такой ряд можно записать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad (1.17)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – положительные числа. Исследование знакочередующегося ряда с отрицательным первым членом сводится к исследованию ряда (1.17) умножением всех его членов на –1.

Знакочередующиеся ряды удобно исследовать с помощью *достаточного* признака сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (1.17) абсолютные величины членов не возрастают: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда с четным числом членов

$$S_{2m}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2m-1}-a_{2m}.$$

Сгруппируем слагаемые попарно:

$$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2m-1}-a_{2m}).$$

Все разности в скобках неотрицательны, так как по условию абсолютные величины членов ряда не возрастают. Поэтому сумма S_{2m} неотрицательна и при увеличении m не убывает.

Запишем S_{2m}, группируя слагаемые иным способом:

$$S_{2m} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}) .$$

Сумма в больших скобках также неотрицательна. Поэтому $S_{2m} \le a_1$, для любого m, т.е. является неубывающей последовательностью, ограниченной сверху и, следовательно, (по аксиоме Вейерштрасса) имеет неотрицательный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. При этом, так как $0 \le S_{2m} \le a_1$, то из свойств пределов следует, что $0 \le S \le a_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечетного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

Найдем предел S_{2m+1}.

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$.

Мы показали, что частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел *S*. Из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд сходится. При этом сумма ряда *S* не превосходит первого члена ряда a_1.

Следствие. Из доказанного выше следует, что для произвольного знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница, выполняется оценка: $|S| \le |a_1|$.

Перейдем к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда, в котором положительные и отрицательные слагаемые следуют в произвольном порядке. Для таких рядов справедлив признак абсолютной сходимости.

Признак абсолютной сходимости. Если для знакопеременного ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.18}$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{1.19}$$

то заданный ряд (1.18) также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (1.18) и (1.19):

$$\frac{a_1+|a_1|}{2}+\frac{a_2+|a_2|}{2}+\ldots+\frac{a_n+|a_n|}{2}+\ldots \tag{1.20}$$

Слагаемые этого ряда

– при $a_n > 0$ $|a_n| = a_n$ и $\dfrac{a_n+|a_n|}{2} = |a_n|$;

– при $a_n < 0$ $|a_n| = -a_n$ и $\dfrac{a_n+|a_n|}{2} = 0.$

Как мы видим, слагаемые ряда (1.20) неотрицательны и либо равны слагаемым сходящегося ряда (1.19), либо меньше их. Поэтому ряд (1.20) сходится на основании признака сравнения, связанного с неравенством.

Умножив все члены сходящегося ряда (1.19) на $\dfrac{1}{2}$, получим сходящийся ряд (см. теорему 1 п. 1.2):

$$\frac{|a_1|}{2}+\frac{|a_2|}{2}+\ldots+\frac{|a_n|}{2}+\ldots. \tag{1.21}$$

Построим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (1.20) и (1.21):

$$\left(\frac{a_1+|a_1|}{2}-\frac{|a_1|}{2}\right)+\left(\frac{a_2+|a_2|}{2}-\frac{|a_2|}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}\right)+\ldots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п.1.2. Но ряд (1.18) получается из записанного ряда умножением всех его слагаемых на 2:

$$2\left(\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|}{2}\right)=2\frac{a_n}{2}=a_n.$$

Следовательно, на основании теоремы 1 п. 1.2 исходный ряд (1.18) также сходится.

Признак абсолютной сходимости является достаточным, но не необходимым. Это означает, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их слагаемых, расходятся. Ряд (1.16) как раз такого типа. Он сходится на основании признака Лейбница (пример 1.30). Между тем ряд, составленный из абсолютных его величин, является гармоническим и, следовательно, расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Абсолютно сходящимися являются ряды, рассмотренные в примерах 1.31 и 1.32.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Ряд (1.16) является условно сходящимся.

Следует заметить, что деление сходящихся знакопеременных рядов на абсолютно и условно сходящиеся весьма существенно. Абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды. Это свойство, которое мы приведем без доказательства, формулируется следующим образом.

Теорема. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.

В условно сходящихся рядах нельзя переставлять члены. Можно показать, что в случае их перестановки может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд. Заметим, что когда говорят о перестановке членов, подразумевают, что меняются местами бесконечное множество членов. При перестановке конечного числа членов сумма ряда не изменится.

1.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ РЯДА.

Пусть задан сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ...$$

Во многих практических задачах нужно вычислить сумму такого ряда. Как известно, его сумма *S* является пределом последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Поэтому для достаточно больших *n* имеем приближенное равенство $S \approx S_n$, точность которого возрастает с увеличением *n*.

Будем искать сумму ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$, т.е. найдем такое *n*, чтобы выполнялось неравенство $|S - S_n| < \varepsilon$. Тогда S_n будет суммой нашего ряда с точностью ε. Но $S - S_n = r_n$ – остаток ряда, который в этом случае, как мы знаем, является суммой сходящегося ряда. Таким образом, задача сводится к нахождению такого n, чтобы выполнялось условие $|r_n| < \varepsilon$, а затем вычислению частичной суммы S_n.

Рассмотрим, как оценка остатка ряда проводится в различных случаях.

1. Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Даламбера.

В этом случае существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho < 1$. Выберем *q* такое, что $\rho < q < 1$.

Согласно определения предела последовательности можно найти номер *N* такой, что для любого $n<N$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ или $a_{n+1}<q\cdot a_n$. Тогда для остатка ряда будет справедливо неравенство:

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots<a_{n+1}+q\cdot a_{n+1}+q^2\cdot a_{n+1}+\ldots=\frac{a_{n+1}}{1-q}.$$

Ряд, стоящий в правой части неравенства, является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$, и мы воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии. Следовательно, при $n<N$ справедлива оценка

$$0\le r_n<\frac{a_{n+1}}{1-q} \tag{1.22}$$

2. Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится по радикальному признаку Коши.

Это означает, что существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$. Как и в первом случае, выберем q такое, что $\rho<q<1$. Тогда существует номер N такой, что для любого $n<N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n}<q$ или $a_n<q^n$. Проведем оценку остатка ряда.

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots<q^{n+1}+q^{n+2}+q^{n+3}+\ldots=\frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Как и в предыдущем случае, мы воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$. Следовательно, для остатка ряда при $n<N$ справедлива оценка:

$$0\le r_n<\frac{q^{n+1}}{1-q}. \tag{1.23}$$

3. Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится по интегральному признаку Коши.

В этом случае существует на промежутке $[1;+\infty)$ непрерывная убывающая функция $y=f(x)$ такая, что для любого n $a_n=f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится.

Тогда, как видно из рис. 1.2, остаток ряда $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots$ равен площади ступенчатой фигуры, лежащей ниже графика функции $y=f(x)$. Для остатка ряда справедливо неравенство:

$$0\le r_n<\int_n^{+\infty}f(x)dx. \tag{1.24}$$

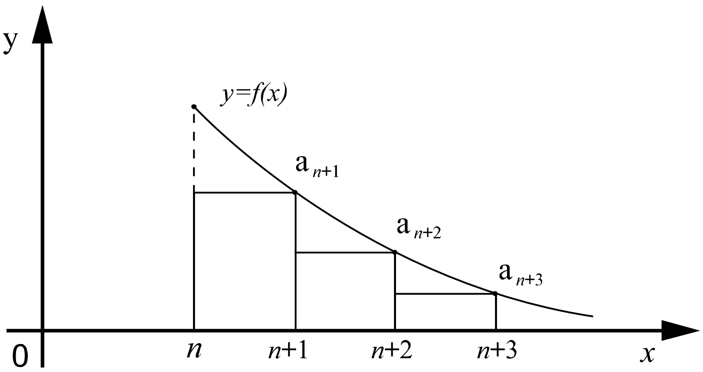

Рис. 1.2.

4. Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку сравнения, связанному с неравенством.

Это означает, что существует сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что для любых n $a_n \le b_n$. Обозначим остаток ряда с общим членом a_n через r_n и остаток ряда с общим членом b_n через R_n:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots;$$

$$R_n = b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \dots.$$

Каждый из этих остатков является суммой сходящегося знакоположительного ряда. Так как по условию $a_{n+1} \le b_{n+1}$, $a_{n+2} \le b_{n+2}$, …, то на основании названного признака сравнения сумма первого ряда не превосходит суммы второго ряда, т.е.

$$0 \le r_n \le R_n. \tag{1.25}$$

5. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку абсолютной сходимости.

Следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Рассмотрим остатки исходного ряда и ряда, составленного из модулей:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots;$$

$$R_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \dots.$$

При любом m имеем

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$\lim_{m\to\infty} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \le \lim_{m\to\infty} (|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|),$$

или

$$|r_n| \le R_n. \qquad (1.26)$$

6. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Лейбница.

В этом случае остаток ряда сам является суммой знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница. При доказательстве этого признака было показано, что сумма ряда по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена ряда. Поэтому, для остатка ряда справедлива оценка:

$$|r_n| \le |a_{n+1}|. \qquad (1.27)$$

1.7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Пусть дана последовательность функций $u_n(x)$, n=1, 2, 3, …, определённых на множестве D.

Определение. Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + u_{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1.28)$$

называется *функциональным рядом.*

Если в формуле (1.28) придать x какое–либо значение x_0 из области D, то получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Этот ряд может сходиться (абсолютно или условно) или расходиться. Для одних точек области D ряд (1.28) может сходиться, для других – расходиться. Множество всех точек, для которых ряд сходится, называются *областью* его *сходимости*. Соответственно, множество всех точек, для которых ряд сходится абсолютно, называется *областью абсолютной сходимости.*

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых его n членов

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$$

является функцией переменной x.

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует конечный предел частичной суммы $S_n(x)$ при $x \to \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости, частичная сумма $S_n(x)$ конечного предела не имеет. Следовательно, сумма $S(x)$ функционального ряда является некоторой функцией переменной x, определенной в области сходимости ряда. В этом случае пишут $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Остаток $r_n(x)$ есть ряд, полученный из ряда (1.28) отбрасыванием его первых n членов: $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + ...$

На области сходимости ряда функциональный ряд сходится, следовательно сходится и его остаток и является функцией от x. При этом справедливы формулы:

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x); \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \ .$$

Пример 1.45. Найти область сходимости и сумму функциональных рядов:

а) $1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; б) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

Решение:

а) Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем q=x. Как показано в примере 1.4, такой ряд сходится при условии $|q| < 1$. Следовательно, областью сходимости ряда будет интервал: $|x| < 1$ или $x \in (-1; 1)$. Сумма ряда $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

б) Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{x}$. Область сходимости, соответственно, найдётся из условия $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ или $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Сумма ряда $S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}$.

Определение сходимости ряда (1.28) на области G можно записать в символическом виде следующим образом:

$$\forall x \in G \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(x): \quad \forall n > N(x) \Rightarrow \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Определение. Ряд (1.28) *сходится равномерно* на области G к сумме $S(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in G \Rightarrow \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Отличие равномерной сходимости ряда от обычной сходимости состоит в том, что для любого ε>0 существует N общее для всех x из области G, в то время как при обычной сходимости найденное N зависит от x и могут быть ситуации, при которых общее N для всех x из области G отыскать нельзя.

Имеется достаточно простой признак равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема Вейерштрасса (признак равномерный сходимости). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в некотором промежутке не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов знакоположительного сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. если $|u_n(x)| \le a_n$ для всех *x* из этого промежутка, то функциональный ряд в этом промежутке сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Пусть σ – сумма числового ряда, σ_n – его частичная сумма, ρ_n – остаток. Так как числовой ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$. Это можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \Rightarrow |\sigma - \sigma_n| < \varepsilon, \text{ т.е. } \quad \rho_n < \varepsilon .$$

Пусть *S(x)* – сумма функционального ряда, $S_n(x)$ – его частичная сумма, $r_n(x)$ – его остаток, $R_n(x)$ – остаток ряда, составленного из модулей заданного функционального ряда. По условию,

$$|u_{n+1}(x)| \le a_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \le a_{n+2}, \quad \dots .$$

Тогда для любого m

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+m}(x)| \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} .$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем:

$$|r_n(x)| \le R_n(x) \le \rho_n .$$

Отсюда, во–первых, следует абсолютная сходимость функционального ряда (остаток ряда из модулей меньше остатка сходящегося ряда); во–вторых:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \Rightarrow |r_n(x)| \le \rho_n < \varepsilon ,$$

т.е. $|r_n(x)| < \varepsilon$ или $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для всех *x* из рассматриваемого промежутка, что и соответствует равномерной сходимости функционального ряда.

Равномерно сходящиеся ряды обладают рядом свойств, которыми неравномерно сходящиеся ряды не обладают. Приведём без доказательства некоторые теоремы о свойствах равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. Сумма функционального ряда с непрерывными членами $u_n(x)$, равномерно сходящаяся на некотором интервале, непрерывна на этом интервале.

Теорема 2. Если функциональный ряд с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке [a, b], то его можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. если

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \int_a^b S(x)dx .$$

Теорема 3. Если функциональный ряд с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на данном интервале, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, а ряд, составленный из производных его членов, равномерно сходится на этом интервале, то данный ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке этого интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = S'(x).$$