ЛЕКЦИЯ 3

Ряд Тейлора функции комплексного переменного. Ряд Лорана.

2.6. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД ЛОРАНА

Можно доказать, что из аналитичности функции в некоторой точке, т.е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а, следовательно, и аналитичность этих производных.

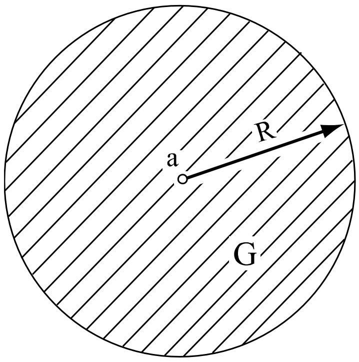

Рис. 2.7

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга G, ограниченного окружностью радиусом R с центром в точке $z = a$ (рис. 2.7). Можно показать, что во всякой точке z, находящейся внутри круга G, т.е. $|z-a| < R$, функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы степенного ряда типа (1.22):

$$f(z) = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + ... + C_n(z-a)^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n ,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_0 = f(a), \quad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 1, 2, ...$$

Полученный ряд называется *рядом Тейлора.* Форма его записи не отличается от разложения в ряд Тейлора функцией действительного переменного:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ... \qquad (2.23)$$

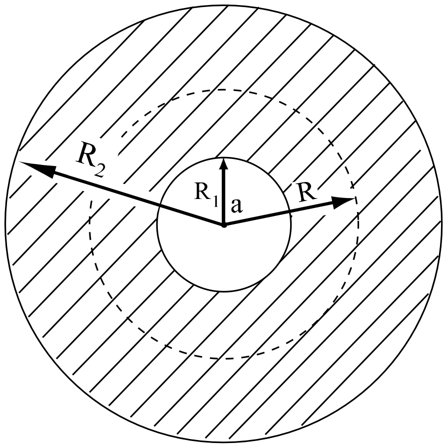

Рис. 2.8

Существование производных любого порядка от функции $f(z)$ в любой точке внутри круга G следует из аналитичности функции $f(z)$ внутри этого круга и утверждения, сформулированного в начале данного пункта

Пусть теперь функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией внутри кольца между концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в точке $z = a$ (рис. 2.8) и z – произвольная внутренняя точка этого кольца, т.е. $R_1 < |z - a| < R_2$. Тогда можно доказать, что функция $f(z)$ может быть представлена рядом, сходящимся в любой точке z этого кольца:

$$
\begin{gathered}
f(z) = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots + \\
+ \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n,
\end{gathered} \tag{2.24}
$$

где коэффициенты C_n определяются формулой:

$$
C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \tag{2.25}
$$

кривая Г – любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке $z = a$ радиуса R, т.е. $|z - a| = R$, $R_1 < R < R_2$.

Полученное разложение называется *рядом Лорана.*

Можно доказать, что *разложить аналитическую функцию в ряд Лорана можно единственным способом.* То есть. если функция $f(z)$ является в некотором кольце с центром в точке $z = a$ аналитической, то не существует двух различных рядов указанного вида, сходящихся в этом кольце и имеющих своей суммой функцию $f(z)$.

Так как ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, то *разложить функцию* $f(z)$ в ряд *Тейлора* в круге с центром в точке $z = a$ также *можно лишь единственным способом.*