Задача 1

Вычислить интеграл $\int_L (z+5)\cos z\,dz$ **по произвольной линии, соединяющей точки** $z_1 = 0$ **и** $z_2 = 2i$.

Решение:

1. **Анализ подынтегральной функции:** Функция $f(z) = (z+5)\cos z$ является аналитической во всей комплексной плоскости (так как это произведение полинома и косинуса). Согласно теореме Коши для аналитических функций, интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек. Поэтому мы можем воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

где $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$.

2. **Нахождение первообразной:** Найдем неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int (z+5)\cos z\,dz$$

Пусть $u = z + 5 \Rightarrow du = dz$. Пусть $dv = \cos z\,dz \Rightarrow v = \sin z$.

По формуле $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int (z+5)\cos z\,dz = (z+5)\sin z - \int \sin z\,dz = (z+5)\sin z + \cos z$$

Итак, $F(z) = (z+5)\sin z + \cos z$.

3. **Вычисление определенного интеграла:** Подставим пределы интегрирования $z_1 = 0$ и $z_2 = 2i$:

$$I = F(2i) - F(0) = [(2i+5)\sin(2i) + \cos(2i)] - [(0+5)\sin(0) + \cos(0)]$$

Воспользуемся связью тригонометрических и гиперболических функций: $\sin(iy) = i\sinh(y)$ $\cos(iy) = \cosh(y)$

Тогда для $2i$: $\sin(2i) = i\sinh(2)$ $\cos(2i) = \cosh(2)$

Подставляем:

$$I = (2i+5)(i\sinh 2) + \cosh 2 - [0+1]$$

$$I = 2i^2 \sinh 2 + 5i \sinh 2 + \cosh 2 - 1$$

Так как $i^2 = -1$:

$$I = -2 \sinh 2 + 5i \sinh 2 + \cosh 2 - 1$$

Группируем действительную и мнимую части:

$$I = (\cosh 2 - 2 \sinh 2 - 1) + i(5 \sinh 2)$$

Ответ: $(\cosh 2 - 2 \sinh 2 - 1) + 5i \sinh 2$

Задача 2

Вычислить интеграл $\int_C (-\bar{z} + 2z)\, dz$, где C — отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = -i$.

Решение:

1. **Параметризация пути:** Подынтегральная функция содержит $\bar{z}$, поэтому она не является аналитической, и интеграл нужно вычислять через параметризацию пути. Уравнение отрезка между z_1 и z_2:

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1]$$

$$z(t) = 1 + t(-i - 1) = (1 - t) - it$$

Отсюда найдем дифференциал dz:

$$dz = (-1 - i)\, dt$$

Выразим z и $\bar{z}$ через t:

$$z = (1 - t) - it$$

$$\bar{z} = (1 - t) + it$$

2. **Подстановка в интеграл:** Выразим подынтегральную функцию через t:

$$-\bar{z} + 2z = -[(1 - t) + it] + 2[(1 - t) - it]$$

$$= -(1-t) - it + 2(1-t) - 2it$$

$$= (1-t) - 3it$$

Теперь запишем интеграл по переменной t:

$$I = \int_0^1 ((1-t) - 3it)\,(-1-i)\,dt$$

Вынесем константу $(-1-i)$ за скобку:

$$I = (-1-i)\int_0^1 (1-t-3it)\,dt$$

3. **Интегрирование:**

$$\int_0^1 (1-t-3it)\,dt = [t - \frac{t^2}{2} - 3i\frac{t^2}{2}]_0^1$$

$$= (1 - \frac{1}{2} - \frac{3i}{2}) - 0 = \frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$$

Теперь умножим на константу перед интегралом:

$$I = (-1-i)\,(\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}) = -\frac{1}{2}(1+i)(1-3i)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - 3i + i - 3i^2)$$

Так как $i^2 = -1$:

$$= -\frac{1}{2}(1 - 2i + 3) = -\frac{1}{2}(4 - 2i) = -2 + i$$

Ответ: $-2 + i$

Задача 3

Вычислить интеграл $\int_\gamma (iz^2 - 2\bar{z})\, dz$, где γ — часть окружности $|z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

Решение:

1. **Параметризация пути:** Контур — это дуга окружности радиуса 2 в первой четверти. Используем полярную форму: $z = 2e^{i\phi}$, где ϕ меняется от 0 до $\pi/2$.

$$dz = 2ie^{i\phi}\, d\phi$$

$$z^2 = (2e^{i\phi})^2 = 4e^{2i\phi}$$

$$\bar{z} = 2e^{-i\phi}$$

2. **Подстановка в интеграл:**

$$I = \int_0^{\pi/2} (i(4e^{2i\phi}) - 2(2e^{-i\phi}))\,(2ie^{i\phi})\, d\phi$$

$$I = \int_0^{\pi/2} (4ie^{2i\phi} - 4e^{-i\phi})(2ie^{i\phi})\, d\phi$$

Раскроем скобки: 1-е слагаемое: $(4ie^{2i\phi}) \cdot (2ie^{i\phi}) = 8i^2 e^{3i\phi} = -8e^{3i\phi}$ 2-е слагаемое: $(-4e^{-i\phi}) \cdot (2ie^{i\phi}) = -8ie^0 = -8i$

$$I = \int_0^{\pi/2} (-8e^{3i\phi} - 8i)\, d\phi$$

3. **Интегрирование:**

$$I = -8\int_0^{\pi/2} e^{3i\phi}\, d\phi - 8i\int_0^{\pi/2} d\phi$$

$$I = -8\left[\frac{e^{3i\phi}}{3i}\right]_0^{\pi/2} - 8i\,[\phi]_0^{\pi/2}$$

Вычислим первое слагаемое:

$$\frac{-8}{3i}(e^{3i\pi/2} - e^0) = \frac{-8}{3i}(-i-1) = \frac{8i+8}{3i} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3i} = \frac{8}{3} - \frac{8i}{3}$$

(Примечание: $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$)

Вычислим второе слагаемое:

$$-8i\,(\frac{\pi}{2} - 0) = -4\pi i$$

Суммируем:

$$I = (\frac{8}{3} - \frac{8i}{3}) - 4\pi i = \frac{8}{3} - i\,(\frac{8}{3} + 4\pi)$$

Ответ: $\frac{8}{3} - i\,(\frac{8}{3} + 4\pi)$

Задача 4

Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $\int_{|z-2|=2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$

Решение:

1. **Определение особых точек:** Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ имеет две особые точки (полюса первого порядка): $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$.
2. **Проверка принадлежности контуру:** Контур интегрирования — окружность с центром в точке 2 и радиусом 2: $|z-2| = 2$.
   - Точка $z = 2$: находится в центре круга (внутри).
   - Точка $z = 1$: проверим условие $|1-2| = |-1| = 1$. Так как $1 < 2$, точка лежит внутри контура.

   Обе точки лежат внутри области интегрирования.
3. **Применение основной теоремы о вычетах:**

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f(z_k))$$

4. **Вычисление вычетов:** Для простого полюса z_0: $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$.
   - **Вычет в точке** $z = 1$**:**

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to1}\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

   - **Вычет в точке** $z = 2$**:**

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \to 2}(z-2)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z \to 2}\frac{z}{z-1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

5. **Суммирование:**

$$I = 2\pi i(-1 + 2) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

Решение:

1. **Метод решения:** Для вычисления несобственного интеграла вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ используем вычеты в верхней полуплоскости.

$$I = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} \text{Res}(f(z), z_k)$$

Функция $f(z) = \frac{1}{z^4+10z^2+9}$.

2. **Нахождение полюсов:** Решим уравнение $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$. Сделаем замену $t = z^2$:

$$t^2 + 10t + 9 = 0$$

По теореме Виета корни: $t_1 = -1, t_2 = -9$.

Теперь найдем z:

   1. $z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$
   2. $z^2 = -9 \Rightarrow z = \pm 3i$

3. **Выбор полюсов в верхней полуплоскости ($Im(z) > 0$):** Подходят точки $z_1 = i$ и $z_2 = 3i$.

4. **Вычисление вычетов:** Для функции вида $\frac{1}{Q(z)}$ вычет в простом полюсе z_k равен $\frac{1}{Q'(z_k)}$. $Q(z) = z^4 + 10z^2 + 9$, тогда $Q'(z) = 4z^3 + 20z$.

   - **Вычет в точке $z_1 = i$:**

$$Q'(i) = 4i^3 + 20i = -4i + 20i = 16i$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{16i}$$

- **Вычет в точке $z_2 = 3i$:**

$$Q'(3i) = 4(3i)^3 + 20(3i) = 4(-27i) + 60i = -108i + 60i = -48i$$

$$\text{Res}(f, 3i) = \frac{1}{-48i} = -\frac{1}{48i}$$

5. **Суммирование и ответ:** Сумма вычетов:

$$\sum = \frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} = \frac{3}{48i} - \frac{1}{48i} = \frac{2}{48i} = \frac{1}{24i}$$

   Интеграл равен:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{24i} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}$