

### Контрольная работа 3.

#### Тема: Математическая статистика

#### Примерные варианты контрольной работы.

Во всех вариантах предполагается, что соответствующая генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

##### *Вариант 1*

1. Задана случайная выборка:  $\{0,786; 0,782; 0,779; 0,791; 0,785; 0,784\}$  – результаты независимых равнооточных измерений. Найти оценку математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

2. По результатам задачи 1 построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью 0,95.

3. Согласно протоколу на поставку партия листового проката может быть сдана заказчику, если дисперсия толщины листов не превышает значения 0,15 с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Было проведено 76 измерений толщины прокатанных листов. Оценка дисперсии оказалась равной 0,18. Может ли быть сдана данная партия листового проката?

4. В двух сериях независимых измерений с числом экспериментов соответственно  $n_1 = 13$  и  $n_2 = 9$  получены оценки математического ожидания  $\bar{x}_1 = 10,7$ ;  $\bar{x}_2 = 9,8$  и оценки дисперсий  $S_1^2 = 0,45$ ;  $S_2^2 = 1,44$ . Проверить с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ :

1) гипотезу о равенстве дисперсий;

2) гипотезу о равенстве математических ожиданий.

В качестве альтернативных гипотез рассмотреть:

1) а)  $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ; б)  $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ .

2) а)  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ ; б)  $H_1: \mu_1 > \mu_2$ .

5. В таблице 2.7 представлены экспериментальные данные зависимости  $y$  от  $x$ . Результаты измерения величины  $y$  являются независимыми, равнооточными, имеют нормальный закон распределения.

Таблица 2.7

$x$	0,2	0,3	0,4	0,7	0,9
$y$	3,4	3,0	3,0	1,7	1,4

По отдельной серии из  $n = 11$  повторных измерений получена оценка дисперсии  $S^2 = 0,012$ . Построить линейную модель регрессии. Проверить адекватность полученной модели с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Построить график модели регрессии.

6. При изучении зависимости величин  $X$  и  $Y$  по серии из  $n = 50$  измерений получена эмпирическая матрица ковариаций:

$$\begin{pmatrix} 1,80 & 0,72 \\ 0,72 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Найти выборочный коэффициент корреляции. Проверить гипотезу о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Если гипотеза принимается, сделать вывод о силе и направлении взаимосвязи между  $X$  и  $Y$ .

### **Вариант 2**

1. Случайная выборка (результаты независимых равнооточных измерений) задана таблицей 2.8:

*Таблица 2.8*

$x_i$	3	5	6	7
частота, $n_i$	8	9	10	3

Найти оценку математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения. Построить полигон и гистограмму.

2. По результатам задачи 1 найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью 0,99.

3. Для выполнения заказа на поставку стальных прутков диаметром 45 мм необходимо объединить продукцию двух станов. Это возможно лишь в том случае, если оба прокатных стана обеспечивают одинаковую точность проката. Для принятия решения об объединении двух партий в одну проконтролировали размеры случайно выбранных прутков: 31 пруток с первого стана и 28 прутков со второго. Оценки дисперсий полученных выборок получились равными  $S_1^2 = 0,27$  и  $S_2^2 = 0,12$  соответственно. С уровнем значимости  $\alpha = 0,01$  принять решение о возможности объединения продукции в одну партию. В качестве альтернативной гипотезы рассмотреть два варианта: а) второй стан обеспечивает более высокую точность; б) станы производят продукцию с различной точностью.

4. В таблице 2.9 приведены результаты 10 экспериментов по измерению изменения состава металла при выпуске из конвертора:  $X$  – изменение содержания азота,  $\% \cdot 10000$ ;  $Y$  – начальная концентрация углерода,  $\%$ .

Таблица 2.9

$X$	–3	–2,5	3,5	–1	–1,5	1,5	–4	7	–2	0
$Y$	0,12	0,10	0,08	0,06	0,08	0,10	0,14	0,03	0,12	0,08

Найти: а) эмпирическую матрицу ковариаций; б) выборочный коэффициент корреляции.

5. В условиях задачи 4 проверить гипотезу о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Если гипотеза принимается, сделать вывод о направлении взаимосвязи между  $X$  и  $Y$ .

6. В таблице 2.9 представлены экспериментальные данные зависимости  $Y$  от  $x$ . Построить линейную модель регрессии. На чертеж нанести экспериментальные точки и график полученной модели.

### Вариант 3

1. Дана случайная выборка  $\{0,127; 0,129; 0,133; 0,131; 0,136\}$  – результаты независимых равнооточных измерений. Найти оценку математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

2. По результатам задачи 1 построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью 0,9.

3. По выборке объема  $n = 30$  рассчитана оценка дисперсии  $S^2 = 2,5$ . Считая, что математическое ожидание известно, проверить гипотезу о том, что дисперсия ГС равна  $\sigma_0^2 = 2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,1$ . Альтернативная гипотеза  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .

4. По двум независимым выборкам объемов  $n_1 = 20$  и  $n_2 = 45$  найдены оценки математического ожидания  $\bar{x}_1 = 16$ ;  $\bar{x}_2 = 19$ . Дисперсии генеральной совокупности известны:  $\sigma_1^2 = 2$ ;  $\sigma_2^2 = 4$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,1$  проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий. Альтернативная гипотеза  $H_1: a_1 \neq a_2$ .

5. В таблице 2.10 представлены экспериментальные данные зависимости  $Y$  от  $x$ . Результаты измерения величины  $y$  являются независимыми, равнооточными, имеют нормальный закон распределения.

Таблица 2.10

$x$	1,0	1,2	1,3	1,7	1,8	2,0
$Y$	-8	-1	-1	11	11	18

По отдельной серии из  $n = 19$  повторных измерений получена оценка дисперсии  $S^2 = 0,65$ . Построить линейную модель регрессии. Проверить адекватность полученной модели с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Построить график модели регрессии.

6. При изучении зависимости величин  $X_1$  и  $X_2$  по серии из  $n = 20$  измерений получены оценки математического ожидания  $\bar{X}_1 = 2$ ;  $\bar{X}_2 = 2,5$ ; оценки дисперсий  $S_1^2 = 0,25$ ;  $S_2^2 = 0,49$  и оценка ковариации  $\tilde{K}_{1,2} = 0,28$ . Найти выборочный коэффициент корреляции  $r$ . Построить доверительный интервал для коэффициента корреляции с доверительной вероятностью  $P = 0,95$ . уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Проверить гипотезу о существовании линейной зависимости между  $X_1$  и  $X_2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Написать выборочные уравнения прямых регрессии.

#### Вариант 4

1. Задана случайная выборка / 3,23; 3,18; 3,25; 3,22; 3,20; 3,26; 3,27/ – результаты независимых равнооточных измерений. Найти оценку математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

2. По результатам задачи 1 построить доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии с доверительной вероятностью 0,95.

3. В двух сериях независимых экспериментов с числом измерений, соответственно,  $n_1 = 15$  и  $n_2 = 10$  получены оценки математического ожидания  $\bar{X}_1 = 20,5$ ;  $\bar{X}_2 = 18,7$  и оценки дисперсии  $S_1^2 = 2,2$ ;  $S_2^2 = 5,5$ . Известно, что результаты измерений в каждой серии имеют нормальный закон распределения. Используя двусторонние критерии, проверить с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  гипотезу о равенстве дисперсий и гипотезу о равенстве математических ожиданий.

4. По случайной нормальной выборке объема  $n = 18$  найдена оценка дисперсии  $S^2 = 14,6$ . Проверить гипотезу  $H_0$  о равенстве дисперсии выборки  $\sigma^2$  значению  $\sigma_0^2 = 20$  при альтернативной гипотезе  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ .

5. В таблице 2.11 представлены экспериментальные данные двумерной выборки  $(X, Y)$ . Найти матрицу ковариаций и коэффициент корреляции случайной величины  $(X, Y)$ .

Таблица 2.11

$X$	0,5	-4,0	2,5	4,5	-0,5	-0,5	-2,0	0,0
$Y$	0,22	0,12	0,24	0,24	0,17	0,18	0,14	0,18

6. По результатам задачи 5 проверить гипотезу о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Написать уравнения прямых регрессии, построить их графики.

### Вариант 5

1. Задана случайная выборка / 71,3; 71,8; 71,1; 71,4; 71,6 / - результаты независимых равнооточных измерений. Найти оценку математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

2. По результатам задачи 1 построить доверительный интервал для для математического ожидания и дисперсии с доверительной вероятностью 0,95.

3. По случайной нормальной выборке объема  $n = 16$  найдена оценка математического ожидания  $\bar{X} = 22,5$ . Проверить гипотезу  $H_0$  о равенстве математического ожидания выборки  $a$  значению  $a_0 = 24,0$  при альтернативной гипотезе  $H_1: a < a_0$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ , если оценка  $\sigma$ , найденная по той же выборке, равна  $S = 3,2$ .

4. Номинальный диаметр шариков, изготавливаемых станком-автоматом, равен  $d_0 = 20$  мм. В выборке из 16 шариков средний диаметр оказался равным 20,5 мм. Используя двусторонний критерий при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ , проверить гипотезу о соответствии партии стандарту, если дисперсия известна и равна  $\sigma^2 = 0,49$ .

5. При изучении зависимости величин  $X$  и  $Y$  по серии из  $n = 20$  измерений получена эмпирическая матрица ковариаций  $\begin{pmatrix} 2,00 & 2,25 \\ 2,25 & 4,50 \end{pmatrix}$ .  $\bar{X} = 0,5$ ;  $\bar{Y} = 1,5$ . Проверить гипотезу о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Сделать вывод о силе и направлении взаимосвязи между  $X$  и  $Y$ . Написать уравнения прямых регрессии, построить их графики.

6. В таблице 2.12 представлены экспериментальные данные зависимости  $Y$  от  $X$ . Результаты измерения величины  $Y$  являются независимыми, равнооточными, имеют нормальный закон распределения.

Таблица 2.12

$X$	0,1	0,2	0,3	0,6	0,8
$Y$	0,1	0,5	0,9	1,8	2,2

По отдельной серии из  $n = 13$  повторных измерений получена оценка дисперсии  $S^2 = 0,003$ . Построить линейную модель регрессии. Проверить адекватность полученной модели с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$ . Построить график полученной модели.

## Ответы к вариантам контрольной работы.

### Вариант 1

1.  $\bar{x} = 0,7845$ ;  $S^2 = 16,3 \cdot 10^{-6}$ ;  $S = 4,04 \cdot 10^{-3}$ .

2.  $a = 0,7845 \pm 4,24 \cdot 10^{-3}$ , или  $a \in (0,7803; 0,7887)$ ;  $\sigma \in (2,52 \cdot 10^{-3}; 9,90 \cdot 10^{-3})$ .

3. Да, так как  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  при  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ .  $Z = 90 < \chi_{0,05}^2(75) = 96,2$ .

4. 1а)  $F = 3,2 < F_{кр} = F_{0,975}(8; 12) = 3,51 \Rightarrow H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  принимается.  $S_{св} = 0,920$ .

1б)  $F = 3,2 > F_{кр} = F_{0,95}(8; 12) = 2,85 \Rightarrow H_0$  отвергается, принимается

альтернативная гипотеза  $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ .

2а)  $t = 2,256 > t_{кр} = t_{0,975}(20) = 2,09 \Rightarrow H_0: a_1 = a_2$  отвергается, принимается

гипотеза  $H_1: a_1 \neq a_2$ .

2б)  $t = 2,256 > t_{кр} = t_{0,95}(20) = 1,73 \Rightarrow H_0$  отвергается, принимается альтернативная

гипотеза  $H_1: a_1 > a_2$ .

5.  $y = 2,5 - 0,3X$ , где  $X = 10(x - 0,5)$ ,  $\Rightarrow y = -3x + 4$ ;  $S_{ао}^2 = 0,033$ .

$F = 2,75 < F_{кр} = F_{0,95}(3; 10) = 3,71 \Rightarrow$  линейная модель адекватна.

6.  $r = 0,6$ ; доверительный интервал  $\rho \in (0,4; 0,75)$ ;  $T = 0,279$ . Гипотеза о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  не противоречит экспериментальным данным. С увеличением  $X$  среднее значение  $Y$  увеличивается. Связь между  $X$  и  $Y$  достаточно сильная.

### Вариант 2

1.  $\bar{x} = 5$ ;  $S^2 = 1,862$ ;  $S = 1,365$ .

2.  $a = 5 \pm 0,69$  или  $a \in (4,31; 5,69)$ ;  $\sigma \in (1,044; 1,944)$ .

3. а)  $F = 2,25 < F_{кр} = F_{0,99}(30; 27) = 2,47 \Rightarrow$  гипотеза о равенстве дисперсий принимается;

б)  $F = 2,25 < F_{кр} = F_{0,995}(30; 27) = 2,73 \Rightarrow$  гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

4. а)  $\tilde{K} = \begin{pmatrix} 11,29 & -8,53 \cdot 10^{-2} \\ -8,53 \cdot 10^{-2} & 10,32 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$ ; б)  $r = -0,79$ .

5.  $\rho \in (-0,85; -0,3)$ . Так как значение  $\rho = 0$  не принадлежит найденному доверительному интервалу, гипотеза о существовании линейной зависимости не противоречит экспериментальным данным.  $T = 0,632 < |r|$ , проверка с помощью критерия подтверждает принятие гипотезы о существовании линейной зависимости. С увеличением значения одной величины среднее значение другой уменьшается.

$$6. y_{\text{лин}} = 9,1 \cdot 10^{-2} - 0,75 \cdot 10^{-2}(x - 0,2).$$

### Вариант 3

$$1. \bar{x} = 0,1312; S^2 = 12,2 \cdot 10^{-6}; S = 4,35 \cdot 10^{-3}.$$

$$2. a = 0,1312 \pm 0,0044 \text{ или } a \in (0,1268; 0,1356); \sigma \in (2,095 \cdot 10^{-3}; 10,03 \cdot 10^{-3}).$$

3.  $Z = 37,5 \in (18,49; 43,77) \Rightarrow$  гипотеза о равенстве дисперсий принимается с уровнем значимости  $\alpha$ .

4.  $|U| \approx 6,9 > u_{\text{кр}} = 1,645 \Rightarrow H_0$  гипотеза отвергается с уровнем значимости  $\alpha$ , принимается гипотеза  $H_1$ .

$$5. y = 5,0 + 2,5 \frac{x - 1,5}{0,1} = 5,0 + 25(x - 1,5). S_{ad}^2 = 1,75.$$

$$F = 2,69 < F_{\text{кр}} = F_{0,95}(4; 18) = 2,93 \Rightarrow \text{линейная модель адекватна.}$$

6.  $r = 0,8; \rho \in (0,54; 0,96); T = 0,444$ . Гипотеза о существовании линейной зависимости между  $X_1$  и  $X_2$  принимается. С увеличением  $X_1$  среднее значение  $X_1$  увеличивается. Связь между  $X$  и  $Y$  достаточно сильная.

$$\text{Регрессия } X_2 \text{ на } X_1: \frac{x_2 - 2,5}{0,7} = 0,8 \frac{x_1 - 2}{0,5} \Leftrightarrow x_2 = 1,12x_1 + 0,26.$$

$$\text{Регрессия } X_1 \text{ на } X_2: \frac{x_2 - 2,5}{0,7} = \frac{1}{0,8} \cdot \frac{x_1 - 2}{0,5} \Leftrightarrow x_2 = 1,75x_1 - 1,0.$$

### Вариант 4

$$1. \bar{x} = 3,230; S^2 = 10,7 \cdot 10^{-4}; S = 3,27 \cdot 10^{-2}.$$

$$2. a = 3,230 \pm 0,0302, \text{ или } a \in (3,200; 3,260); \sigma^2 \in (4,445 \cdot 10^{-4}; 5,161 \cdot 10^{-3}).$$

3.  $F = 2,5; F_{\text{кр}} = F_{0,975}(9; 14) = 3,21$ . Гипотеза о равенстве дисперсий принимается.  $S_{\text{св}}^2 = 3,491; S_{\text{св}} = 1,8685; t_{\text{кр}} = t_{0,975} = 2,069$ . Гипотеза о равенстве математических ожиданий отвергается.

$$4. Z = \frac{kS^2}{\sigma_0^2} = 12,41; \chi_{0,005}^2(17) = 8,67; \Rightarrow H_0 \text{ принимается.}$$

$$5. S_{x^2}^2 = 6,747; S_{y^2}^2 = 19,7 \cdot 10^{-4}; S_{xy} = 0,1088; r = 0,9442.$$

$$6. T = 0,707; \text{Регрессия } Y \text{ на } X: y - 0,186 = 0,0161(x - 0,0625);$$

Регрессия  $X$  на  $Y$ :  $y - 0,186 = 0,0181(x - 0,0625)$ .

**Вариант 5**

1.  $\bar{x} = 71,44$ ;  $S^2 = 0,073$ ;  $S = 0,27$ .

2.  $a = 71,44 \pm 0,335$ , или  $a \in (71,105; 71,775)$ ;  $\sigma^2 \in (0,0262; 0,6021)$ .

3.  $t = -1,875$ ;  $t_{кр} = t_{0,05}(15) = -1,753$ .  $t < t_{кр} \Rightarrow H_0$  отвергается.

4.  $u = 2,86$ ;  $u_{кр} = u_{0,975} = 2,576$ .  $u > u_{кр} \Rightarrow H_0$  отвергается.

5.  $r = 0,75$ ;  $\rho \in (0,48; 0,9)$ ;  $T = 0,444 < r \Rightarrow$  Гипотеза о существовании линейной зависимости между  $X$  и  $Y$  принимается. Регрессия  $Y$  на  $X$ :  $y - 1,5 = 1,125(x - 0,5)$ ;

Регрессия  $X$  на  $Y$ :  $y - 1,5 = 2x - 1$ .

6.  $y = 1,1 + 0,3 \frac{x - 0,4}{0,1} = 3x - 0,1$ .  $S_{ao}^2 = 0,0133$ ;  $F = 4,44$ ;  $F_{0,95}(3; 12) = 3,39$ .

Линейная модель регрессии неадекватна.