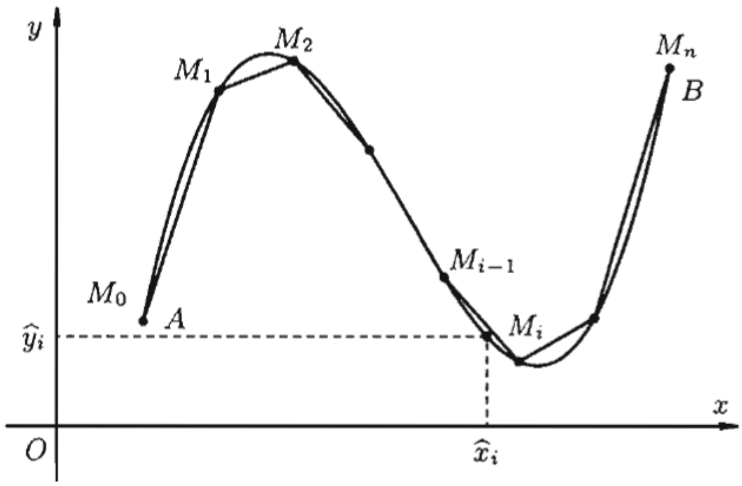
Криволинейные интегралы первого рода

Пусть требуется решить задачу определения массы тела, один размер которого значительно больше остальных (массивная цепь, например).

Очевидно, при составлении математической модели это тело можно считать массивной линией, то есть линией, обладающей массой. Введем понятие плотности линии - массу ее элемента единичной длины. Если плотность линии меняется от точки к точке, то это функция двух переменных, если линия плоская, или трех переменных для пространственной линии. Линия может быть прямой, тогда ее масса определяется интегралом Римана. Решение задачи для кривых приводит к криволинейному интегралу первого рода.



Рассмотрим массивную плоскую кривую AB плотностью $\rho = f(x, y)$. Разобьем кривую на n элементарных частей, длина каждого элемента Δl_i. Пусть n достаточно большое, чтобы можно было плотность приближенно считать постоянной на каждом интервале Δl_i. Выберем на каждом элементарном отрезке точку $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$. Тогда

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_i)\Delta l_i$$

называется ***интегральной суммой*** для $\rho = f(x, y)$ по кривой AB и определяет приближенное значение массы этой кривой.

Определение: ***Криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x\,,y)$ по кривой AB называется предел

$$I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n} f\left(\hat{x}_i\,,\,\hat{y}_i\right)\Delta l_i\,,$$

где $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ - максимальная длина элементов разбиения, если предел существует и не зависит ни от способа разбиения на отрезки, ни от выбора точек $\left(\hat{x}_i\,,\,\hat{y}_i\right)$. Итак, интеграл обозначают

$$I=\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{L} f(x,y)dl=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n} f\left(\hat{x}_i\,,\,\hat{y}_i\right)\Delta l_i\,.$$

Его значение соответствует точному значению массы кривой: $\mathrm{M}=\int\limits_{AB}\rho(x\,,\,y)dl$

.

Примечание. Криволинейный интеграл не зависит от направления интегрирования, то есть от того, интегрирование ведется от точки A к B или от B к A. Это следует из определения, поскольку Δl_i - длина элементарного отрезка, то есть положительная величина.

Как будет установлено ниже, это единственное свойство криволинейного интеграла первого рода, отличное от свойств определенного интеграла.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{BA} f(x,y)dl$, т.е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления интегрирования.

2. $\int\limits_{L} c\cdot f(x,y)dl=c\cdot\int\limits_{L} f(x,y)dl,\quad c=\mathrm{const}$

3. $\int\limits_{L}\left(f(x,y)\pm g(x,y)\right)dl=\int\limits_{L} f(x,y)dl\pm\int\limits_{L} g(x,y)dl$

4. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl$, если $L = L_1 \cup L_2$ и L_1, L_2 имеют единственную общую точку.

5. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\int\limits_L f(x,y)dl \le \int\limits_L g(x,y)dl.$$

6. **Теорема о среднем.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой *AB*, то на этой кривой найдется точка (x_c, y_c) такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = f(x_c, y_c)\cdot l$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла I рода в случаях, если кривая *L* задана параметрическим и явным образом.

1) Если кривая *AB* задана параметрически $x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Аналогично, в случае интегрирования функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой *AB*, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$$

2) Если кривая *AB* задана явно $y = y(x), x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx,$$

где $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$ - дифференциал длины дуги.

Примечание. Криволинейный интеграл первого рода существует, если подынтегральная функция непрерывна в точках кривой, сама кривая гладкая, производная уравнения кривой также непрерывна. При этих условиях существует интеграл Римана в вышеприведенной формуле, следовательно, и криволинейный интеграл.

Примеры: 1. Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{2xy}{\sqrt{5-4y}}dl$, где $AB-$дуга параболы $y=1-x^2$, заключенная между точками A и B с абсциссами 1 и 3 соответственно.
Поскольку $y'=-2x$, получаем

$$\int\limits_{AB}\frac{2xy}{\sqrt{5-4y}}dl = \int\limits_1^3\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\sqrt{5-4\left(1-x^2\right)}}\sqrt{1+4x^2}dx = \int\limits_1^3 2x\left(1-x^2\right)dx =$$

$$=\left(x^2-\frac{2}{4}x^4\right)\Bigg|_1^3 = 9-\frac{81}{2}-1+\frac{1}{2}=-32\,.$$

2. Вычислить $\int\limits_L\left(x^3-xy^2\right)ydl$, где $L-$ длина дуги окружности $x^2+y^2=9$, заключенной между точками, полярные углы которых 0 и $\frac{\pi}{6}$.

Запишем уравнение окружности в параметрическом виде $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, тогда параметр t меняется от 0 до $\frac{\pi}{6}$.

Поскольку $x'=-3\sin t,\quad y'=3\cos t$, $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=3$, тогда

$$\int_L \left(x^3 - xy^2\right) y dl = \int_0^{\pi/6} \left(27\cos^3 t - 27\cos t \sin^2 t\right) 3\sin t \; 3\, dt =$$

$$= 243 \int_0^{\pi/6} \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) \sin t \cos t \; dt = \frac{243}{2} \int_0^{\pi/6} \cos 2t \sin 2t \; dt =$$

$$= \frac{243}{4} \int_0^{\pi/6} \sin 4t \; dt = -\frac{243}{16} \cos 4t \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{243}{16} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - 1 \right) = \frac{729}{32} .$$

3. Вычислить $\int_{AB} \left(x^2 y + 3y^2 z\right) dl$ по прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, если $A(1, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}.$$

Очевидно, $x' = 3$, $y' = 2$, $z' = -1$.

Тогда $\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} = \sqrt{14}$.

Точке A соответствует $t = 0$, для точки B $t = 1$.

$$\int_{AB} \left(x^2 y + 3y^2 z\right) ds = \int_0^1 \left[(3t+1)^2 (2t-1) + 3(2t-1)^2 (-t+2)\right] \sqrt{14} \; dt =$$

$$= \sqrt{14} \int_0^1 \left[(3t+1)^2 (2t-1) + 3(2t-1)^2 (-t+2)\right] dt =$$

$$= \sqrt{14} \int_0^1 \left[18t^3 + 3t^2 - 4t - 1 - 12t^3 + 36t^2 - 27t + 6\right] dt =$$

$$= \sqrt{14} \left[6\frac{t^4}{4} + 39\frac{t^3}{3} - 31\frac{t^2}{2} + 5t \right]_0^1 = \sqrt{14} \left(\frac{3}{2} + 13 - \frac{31}{2} + 5 \right) = 4\sqrt{14} .$$

Криволинейный интеграл второго рода

Решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой (и других) приводит к понятию криволинейного интеграла II рода.

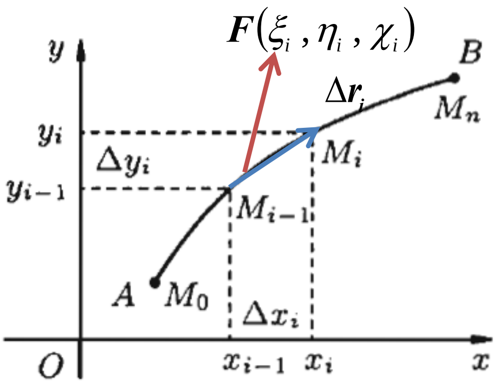
Криволинейный интеграл II рода определяется почти так же, как и интеграл I рода.

Выберем декартову систему координат, совместим с ней ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Вычислим работу некоторой силы

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

на криволинейном участке пути AB. Разобьем кривую AB на n элементарных частей и соединим соседние точки кривой прямыми, получившиеся при этом хорды образуют ломаную линию, которая при n достаточно большом мало отличается от кривой AB.



С учетом направления прохождения ломаной каждая элементарная хорда представляет собой вектор, обозначим его $\Delta \boldsymbol{r}_i$. Если n достаточно большое, можно приближенно считать, что сила не меняется в пределах элементарного участка. Выберем на каждом элементе точку (ξ_i, η_i, χ_i) и подсчитаем в ней значение силы $\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i, \chi_i)$. Работа силы на участке $\Delta \boldsymbol{r}_i$, как известно, определяется скалярным произведением этих векторов. В ортонормированном базисе $\Delta \boldsymbol{r}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j} + \Delta z_i \boldsymbol{k}$. Тогда работа на элементарном участке примет вид

$$P(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta x_m + Q(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta y_m + R(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta z_m,$$

Работа силы на всей ломаной равна

$$\sum_{m=1}^{n}\left(P(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta x_m + Q(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta y_m + R(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta z_m\right),$$

то есть сумме, напоминающей интегральную сумму Римана.

Увеличиваем число разбиений, причем так, чтобы длина каждого элементарного отрезка уменьшалась, стремясь при $n \to \infty$ к нулю. При этом условии ломаная практически не отличается от кривой AB, истинное значение работы, совершаемое силой при прохождении кривой AB

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n}\left(P(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta x_m + Q(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta y_m + R(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta z_m\right).$$

Поскольку работа, совершаемая силой при прохождении кривой конкретна, этот предел существует и имеет конечное значение. По аналогии считаем этот предел интегралом

$$\int_{AB}\left(P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n}\left(P(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta x_m + Q(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta y_m + R(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta z_m\right).$$

Этот криволинейный интеграл второго рода дает истинное значение работы.

Отвлечемся от реального смысла задачи. В этом случае предел интегральной суммы существует не всегда. Отсюда получаем

Определение: ***Криволинейным интегралом второго рода*** $\int_{AB}\left(P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz\right)$ называется предел интегральной суммы $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n}\left(P(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta x_m + Q(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta y_m + R(\xi_m, \eta_m, \chi_m)\,\Delta z_m\right)$, если он существует и не зависит от способа разбиения кривой AB и выбора точек (ξ_m, η_m, χ_m).

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

1) Если кривая AB задана параметрически $x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)dt.$$

Аналогично, в случае интегрирования функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\big)dt$$

2) Если кривая AB задана явно $y = y(x), x \in [a,b]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx,$$

где $dy = y'(x)dx$.

В частности, $\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{a}^{b} P(x, y(x))dx.$

Примечание. 1. Из полученной формулы следует, что все свойства определенного интеграла совпадают со свойствами криволинейного интеграла второго рода, в том числе

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Отметим лишь некоторые свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$\int_{AB} = -\int_{BA}$$

(проекция дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления).

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е.

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}.$$

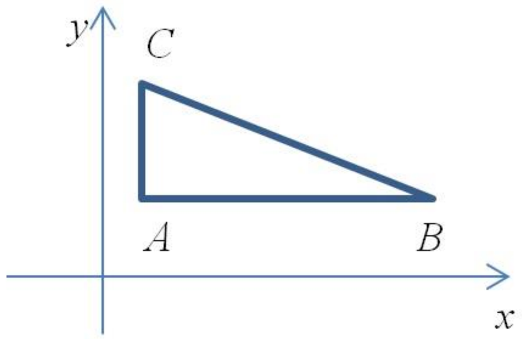
3. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int_L P(x;y)dx = 0 \quad (\text{все } \Delta x_i = 0);$$

аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oy:

$$\int_L Q(x;y)dy = 0 \quad (\text{все } \Delta y_i = 0).$$

Пример:

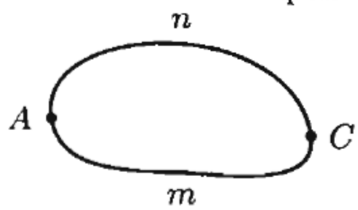


$$\oint_{ABC} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

$$\int_{CA} P(x,y)dx = 0, \int_{AB} Q(x,y)dy = 0$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой (обозначается $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

❑ Действительно,



$$\oint_{AmCnA} = \int_{AmC} + \int_{CnA}$$

С другой стороны,

$$\oint_{CnAmC} = \int_{CnA} + \int_{AmC}.$$

Таким образом,

$$\oint_{AmCnA} = \oint_{CnAmC}.$$

Примеры.

1. Вычислить $\int_{AB}\left((x-4y)\,dx + 4x\,dy\right)$,

где AB - четверть окружности $x^2 + y^2 = 9$, расположенная в первой четверти.

Запишем параметрическое уравнение этой окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

Нетрудно заметить, что при прохождении этой части окружности от точки A, лежащей на оси абсцисс, до точки B на оси ординат параметр t меняется от 0 до $\pi/2$.

Поскольку $x' = -3\sin t$, $y' = 3\cos t$, получаем

$$\int_{AB}\left((x-4y)\ dx + 4x\ dy\right)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left((3cost - 12sint)(-3\ sint) + 4\ \cdot 3cost\ \cdot 3\ cost\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-9\cos t \sin t + 36)\, dt = -9 \int_0^{\pi/2} \sin t \ \ d(\sin t) + 36 \ \int_0^{\pi/2} dt = -9 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} + 6\pi$$

$$= 18\pi - \frac{9}{2}\ .$$

2. Вычислить $\int\limits_{AB} \left(\left(xy - x^2 \right) dx + x\, dy \right)$

по дуге параболы $y = 2x^2$ от точки $A(0\,,0)$ до $B(1\,,2)$.

Поскольку $y' = 4x$, имеем

$$\int_{AB} \left((xy - x^2)\ dx + x\ dy \right) = \int_0^1 (2x^3 - x^2 + x \cdot 4x) dx = \left(\frac{2x^4}{4} + x^3 \right) \Bigg|_0^1 =$$

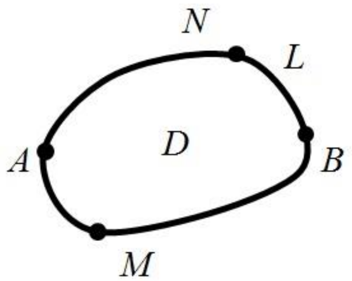
$$= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Формула Грина

Установим связь между криволинейным интегралом второго рода и двойным интегралом. Докажем так называемую ***формулу Грина***

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x\,,\,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x\,,\,y)dx + Q(x\,,\,y)dy\,.$$

Здесь $D-$ область интегрирования двойного интеграла, $L-$замкнутый контур, ограничивающий область D.



Верхняя часть контура *ANB* имеет уравнение $y = q(x)$, уравнение его нижней части *AMB:* $y = g(x)$.

Рассмотрим интеграл

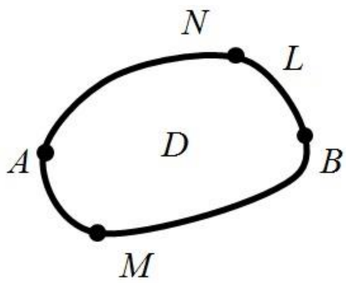
$$\iint_D \frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{q(x)} \frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y}\, dy \right) dx = \int_a^b \left[P(x\,,\,q(x)) - P(x\,,\,g(x)) \right] dx =$$

$$= \int_a^b P(x\,,\,q(x))dx - \int_a^b P(x\,,\,g(x))dx = \int_{ANB} P(x\,,\,y)dx - \int_{AMB} P(x\,,\,y)dx =$$

$$= -\left[\int_{AMB} P(x\,,\,y)dx + \int_{BNA} P(x\,,\,y)dx \right] = -\oint_L P(x\,,\,y)dx$$

При выведении этой формулы сначала двойной интеграл сводится к повторному, затем проводится внутреннее интегрирование по y, после чего получаются два интеграла Римана, которые сводятся к двум криволинейным интегралам второго рода, что в конечном итоге дает криволинейный интеграл по замкнутому контуру L.

Для доказательства второй части формулы Грина примем, что область изменения $y \in (c\,,\,d)$, кроме того, уравнение *NAM* левой стороны контура L задается уравнением $x = \varphi(y)$, правой его части $MBN : x = \psi(y)$. Тогда



$$\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int\limits_c^d \left[Q(\psi(y),y) - Q(\varphi(y),y) \right] dy =$$

$$= \int\limits_c^d Q(\psi(y),y)dy - \int\limits_c^d Q(\varphi(y),y)dy = \int\limits_{MBN} Q(x,y)dy - \int\limits_{MAN} Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{MBN} Q(x,y)dy + \int\limits_{NAM} Q(x,y)dy = \oint\limits_L Q(x,y)dy .$$

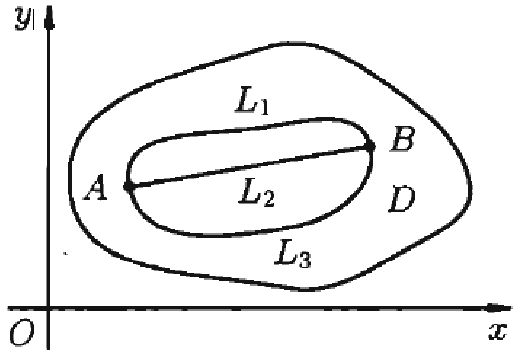
При проведении этих преобразований используется описанная выше процедура приведения двойного интеграла к криволинейному, отличие в том, что вначале проводится интегрирование по x, затем по y.

Объединяя обе формулы, приходим ***к формуле Грина***

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Пусть $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ - две произвольные точки односвязной области *D* плоскости *Oxy* (область D называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит *D* (область без «дыр»)). Точки *A* и *B* можно соединить различными линиями (на рис. это L1, L2 и L3).



По каждой из этих кривых интеграл

$$I=\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

имеет, вообще говоря, свое значение.

Если же его значения по всевозможным кривым *AB* одинаковы, то говорят, что интеграл *I* не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла *I* достаточно отметить лишь его начальную точку $A\left(x_1;y_1\right)$и его конечную точку $B\left(x_2;y_2\right)$пути. Записывают:

$$I=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла второго рода $\int_{AB}\left(P(x\,,\,y)\,dx+Q(x\,,\,y)\,dy\right)$ от пути интегрирования в односвязной области *D*, в которой функции $P(x,y),Q(x,y)$ непрерывны со своими частными производными, является

$$\frac{\partial Q(x\,,\,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y}.$$

Ясно, что если выполняется условие

$$\frac{\partial Q(x\,,\,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y},$$

То интеграл по замкнутому контуру равен 0:

$$\oint_L P(x\,,\,y)dx+Q(x\,,\,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x\,,\,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x\,,\,y)}{\partial y}\right)dxdy=0$$

Следствие. Если выполнено условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования $P'_y=Q'_x$, то подынтегральное выражение

$$P(x\,,\,y)dx+Q(x\,,\,y)dy$$

Является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$P(x\,,\,y)dx+Q(x\,,\,y)dy=dU(x,y).$$

Действительно, $P=U'_x, Q=U'_y \Rightarrow P'_y=U''_{xy}=Q'_x$.

Тогда

$$I=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}dU(x,y)=$$
$$=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1),$$

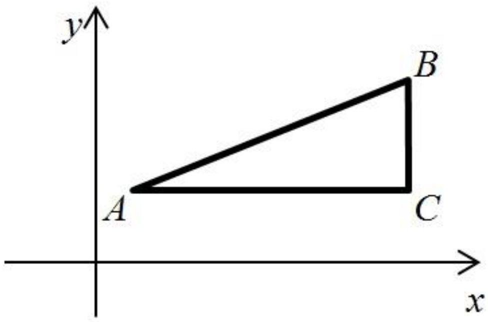
т.е.

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1).$$

Пример.

Вычислить интеграл $\int_{AB}\cos 2y\,dx-2x\sin 2y\,dy$, если $A\left(1\,,\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2\,,\frac{\pi}{4}\right)$.

Очевидно, $\frac{\partial P}{\partial y}=-2\sin 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2\sin 2y$, то есть выполняется условие независимости интеграла от пути интегрирования. Вычислим интеграл по ломаной ACB, изображенной на рисунке



$$\int\limits_{AB} \cos 2y\, dx - 2x \sin 2y\, dy = \int\limits_{AC} \cos 2y\, dx - 2x \sin 2y\, dy + \int\limits_{CB} \cos 2y\, dx - 2x \sin 2y\, dy =$$

$$\left(y = \frac{\pi}{6}\,,\ dy = 0 \right) \qquad\qquad (x = 2\,, \quad dx = 0)$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{1}{2} dx - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} 4 \sin 2y\, dy = \frac{1}{2}(2-1) + 2\cos 2y \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} + 2\left(0 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

1. Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L x dy - y dx$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

2. Работа переменной силы

Интеграл $I = \int\limits_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ можно записать как скалярное произведение вектора силы $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ и вектора перемещения $\overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$$\int\limits_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_L \vec{F}(x, y) \cdot \overrightarrow{dr}$$

В таком случае

$$\int\limits_L \vec{F}(x, y) \cdot \overrightarrow{dr}$$

выражает работу переменной силы $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки $M = M(x, y)$ вдоль кривой $L = AB$ от точки A до точки B.

Пример

Найти работу силы $\bar{F} = 4x^6\bar{i} + xy\bar{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Решение:

$$A = \int\limits_L 4x^6\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^1 (4x^6 + x\cdot x^3\cdot 3x^2)\,dx = \int\limits_0^1 7x^6\,dx = 1.$$