№ 2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

Е.Л. Плужникова
Б.Г. Разумейко

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2011

УДК 517.9
П40

Р е ц е н з е н т
канд. физ.-мат. наук, проф. *В.В. Пташинский*

Плужникова, Е.Л.
П40 Математический анализ : дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Е.Л. Плужникова, Б.Г. Разумейко. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2011. – 238 с.
ISBN 978-5-87623-549-7

В пособии приведены основные формулы и понятия по теме «Дифференциальные уравнения», разобрано большое количество типовых задач различных уровней сложности по этим темам. Представлены различные варианты домашних заданий по данному курсу. Наличие в пособии типовых вариантов контрольных работ и тестов, предназначенных для проверки усвоения этого курса, позволит студенту подготовиться к экзаменационной сессии.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517.9

ISBN 978-5-87623-549-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, т.е. уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция – функция одной переменной, то такое дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

Например

$$ydx + \mathrm{ctg}\, x\, dy = 0;$$

$$y''' - y'' - 6y' = 0;$$

$$y'' - 2y' \,\mathrm{tg} x = \sin^3 x -$$

обыкновенные дифференциальные уравнения.

Если же неизвестная функция – функция нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Например

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt -$$

уравнения в частных производных.

Далее будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на интервале (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно, и такая, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ вместо неизвестной функции в дифференциальное уравнение превращает его в истинное на интервале (a, b) тождество.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА

Уравнение $F(x, y, y') = 0$, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, а $x' = \dfrac{dx}{dy}$, дифференциальное уравнение можно записывать с помощью дифференциалов в виде:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции.

В некоторых случаях удобно рассматривать x как функцию переменной y и записывать уравнение в виде $x' = g(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения 1-го порядка на интервале (a, b) называется непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, такая, что подстановка функции $y = y(x)$ вместо неизвестной функции в дифференциальное уравнение превращает его в истинное на интервале (a, b) тождество. График функции $y = y(x)$ называется *интегральной кривой*.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка на интервале (a, b) называется непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x, c)$, такая что:

1) при любом значении произвольной постоянной c она является решением данного уравнения;

2) для любого заданного начального условия $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in (a, b)$, существует единственное значение $c = c_0$, при котором решение $y = y(x, c_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости XOY.

Частным решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется всякое решение $y = y(x, c_0)$, получающееся из общего решения $y = y(x, c)$ при заданном значении $c = c_0$.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде: $U(x, y, c) = 0$. Тогда соотношение $U(x, y, c) = 0$ называется *общим интегралом* этого уравнения.

Соотношение, которое получается из общего интеграла при конкретном значении постоянной c, называется *частным интегралом*.

Задачей Коши называется задача нахождения решения $y = y(x)$ для дифференциального уравнения $f(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически это равносильно следующему: требуется найти интегральную кривую уравнения $f(x, y, y') = 0$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема существования и единственности

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости XOY, содержащей точку (x_o, y_o). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и имеет в этой области непрерывную частную производную f'_y, то для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует такой интервал $(x_0 - h,\ x_0 + h,)$, на котором решение дифференциального уравнения при начальном условии $y(x_0) = y_0$ существует и единственно.

Особым решением называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки (x_0, y_0) особого решения существуют, по крайней мере, две интегральные кривые, проходящие через эту точку. Особые решения не получаются из общего решения ни при каких значениях произвольной постоянной c. График особого решения называется *особой интегральной кривой* уравнения. Геометрически − это огибающая семейства интегральных кривых дифференциального уравнения, определяемых его общим интегралом.

Задача решения дифференциального уравнения состоит в нахождении общего решения или общего интеграла данного уравнения. Если дополнительно задано начальное условие, то требуется выделить частное решение или частный интеграл, удовлетворяющие поставленному начальному условию.

Уравнение $y' = f(x, y)$ определяет в каждой точке области G, где существует функция $f(x, y)$, значение y', т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в этой точке. Поэтому каждой точке области G уравнение $y' = f(x, y)$ ставит в соответствие некоторое направление, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$. Геометрически его можно изобразить черточкой, или стрелкой, проходящей через эту точку. Тем самым уравнение $y' = f(x, y)$ определяет *поле направлений* на плоскости XOY. Тогда интегральные кривые данного дифференциального уравнения – это такие кривые, для которых касательная к кривой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Задача построения интегральной кривой может быть решена методом изоклин. Множество точек $(x, y) \in G$, в которых $y' = k$, где k − некоторая константа, называется *изоклиной* дифференциального уравнения. В точках изоклины направление поля одинаково, т.е. направление касательных в точках изоклины параллельны. Придавая параметру k близкие числовые значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые заданного дифференциального уравнения.

Пример 2.1. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых $y = \frac{c}{x}$.

Решение

Продифференцировав по переменной x равенство $y = \frac{c}{x}$, получим $y' = -\frac{c}{x^2}$. Выразим из уравнения $y = \frac{c}{x}$ константу c:

$$c = yx.$$

Подставив $c = yx$ в равенство $y' = -\frac{c}{x^2}$, получим искомое дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{yx}{x^2};$$

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Пример 2.2. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых $x^3 = c(x^2 - y^2)$.

Решение

Продифференцировав по переменной x равенство $x^3 = c(x^2 - y^2)$, получим $3x^2 = c(2x - 2yy')$. Выразим из уравнения $x^3 = c(x^2 - y^2)$ константу c:

$$c = \frac{x^3}{x^2 - y^2}.$$

Подставив это выражение в равенство $3x^2 = c(2x - 2yy')$, получим искомое дифференциальное уравнение

$$3x^2 = \frac{x^3}{x^2 - y^2}(2x - 2yy');$$

$$3x^2(x^2 - y^2) = x^3(2x - 2yy');$$

$$3(x^2 - y^2) = x(2x - 2yy');$$

$$2xyy' = 3y^2 - x^2.$$

3. ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

3.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$

функцию $f(x, y)$ можно разложить на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной

$$f(x, y) = \varphi(x) g(y),$$

то такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Пусть задано уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \varphi(x) g(y).$$

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) g(y).$$

Разделим обе части уравнения на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)dx} = \varphi(x).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$\frac{dy}{g(y)} = \varphi(x)dx.$$

Интегрируя левую часть уравнения по y, а правую часть по x, получим общий интеграл уравнения в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int \varphi(x)dx = c.$$

Заметим, что при делении на $g(y)$ могли потеряться решения вида $y = a$, где a – корень уравнения $g(y) = 0$. Поэтому случай $g(y) = 0$ надо рассмотреть отдельно. Если ни при каких значениях константы c решение $y = a$ не получается, то $y = a$ – *особое решение*.

Если требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, то находим сначала общее решение $y = y\ (x, c)$ и затем, подставляя начальное условие $y\ (x_0) = y_0$ в общее решение, находим значение константы c.

Заметим, что уравнение с разделяющимися переменными также может быть записано в виде

$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0.$$

Здесь коэффициенты перед dx и dy могут быть представлены в виде произведения двух множителей, каждый из которых зависит только от одной переменной.

Пример 3.1. Решить задачу Коши: $(x-1)e^{1+x^2}\operatorname{tg} y = e^{2x}y'$, $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение

В условии задано уравнение с разделяющимися переменными. Подставим в исходное уравнение $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$(x-1)e^{1+x^2}\operatorname{tg} y = e^{2x}\frac{dy}{dx}.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$(x-1)e^{1+x^2}\operatorname{tg} y\, dx = e^{2x}dy.$$

Разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} y$ (при этом можем потерять решение $\operatorname{tg} y = 0$):

$$(x-1)e^{1+x^2}dx = \frac{e^{2x}dy}{\operatorname{tg} y}.$$

Разделим обе части уравнения на e^{2x}:

$$\frac{e^{1+x^2}(x-1)}{e^{2x}}dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} y}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \int\frac{\cos y\, dy}{\sin y} = \int\frac{d\sin y}{\sin y} = \ln\left|\sin y\right| + c;$$

$$\int \frac{e^{1+x^2}(x-1)}{e^{2x}}dx = \int e^{x^2-2x+1}(x-1)dx = \int e^{(x-1)^2}(x-1)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{сделаем замену: } (x-1)^2 = t; \\ 2(x-1)dx = dt; \\ (x-1)dx = dt/2 \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{(x-1)^2} + c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$\ln|\sin y| = \frac{1}{2}e^{(x-1)^2} + c.$$

При делении на $\operatorname{tg} y$ могли потерять решение $\operatorname{tg} y = 0$, т.е. $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$ Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ является решением исходного уравнения. Из общего решения его получить невозможно. Следовательно, $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ − особое решение.

Тогда получили решение заданного уравнения

$$\ln|\sin y| = \frac{1}{2}e^{(x-1)^2} + c; \; y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \frac{\pi}{6}$. Для этого найдем константу *c*, подставив $x = 1$ и $y = \frac{\pi}{6}$ в общий интеграл:

$$\ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}e^{(1-1)^2} + c;$$

$$\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^0 + c;$$

$$\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, частный интеграл данного уравнения

$$\ln|\sin y| = \frac{1}{2}e^{(x-1)^2} + \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Пример 3.2. Решить задачу Коши: $y' = 2^{x-y}$, $y(1) = 2$.

Решение

Подставим в исходное уравнение $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2^{x-y}.$$

Так как $2^{x-y} = 2^x \cdot 2^{-y}$, то

$$\frac{dy}{dx} = 2^x \cdot 2^{-y}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, для этого умножим обе части уравнения на dx и разделим на $2^{-y} \neq 0$:

$$dy = 2^x \cdot 2^{-y}\, dx;$$

$$\frac{dy}{2^{-y}} = 2^x\, dx;$$

$$2^y\, dy = 2^x\, dx.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int 2^y\, dy = \frac{2^y}{\ln 2} + c;$$

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{2^y}{\ln 2} = \frac{2^x}{\ln 2} + \tilde{c}.$$

Умножим обе части уравнения на ln2:

$$2^y = 2^x + c,$$

где $c = \tilde{c} \ln 2$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$. Для того найдем константу c, подставив в общий интеграл $x = 1$ и $y = 2$:

$$2^2 = 2 + c \Rightarrow c = 2.$$

Следовательно, частный интеграл данного уравнения

$$2^y = 2^x + 2.$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{4y-5}{8x-3}$, $y(0) = 2$.

Решение

В условии задано уравнение с разделяющимися переменными. Подставим в исходное уравнение $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y-5}{8x-3}.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = \frac{4y-5}{8x-3}dx.$$

Разделим обе части уравнения на $4y - 5$ (при этом можем потерять решение $y = 5/4$):

$$\frac{dy}{4y-5} = \frac{dx}{8x-3}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dy}{4y-5} = \frac{1}{4}\ln|4y-5| + c;$$

$$\int\frac{dx}{8x-3} = \frac{1}{8}\ln|8x-3| + c.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\ln|4y-5| = \frac{1}{8}\ln|8x-3| + \tilde{c}.$$

Умножим обе части уравнения на 8:

$$2\ln|4y-5| = \ln|8x-3| + 8\tilde{c};$$

$$\ln(4y-5)^2 = \ln|8x-3| + \ln c,$$

где $\ln c = 8\tilde{c}$;

$$\ln(4y-5)^2 = \ln\left|c(8x-3)\right|.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$(4y-5)^2 = c(8x-3).$$

Решение $y = 5/4$ содержится в общем интеграле при $c = 0$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$. Для этого подставим в общий интеграл $x = 0$ и $y = 2$ и найдем константу c:

$$(8-5)^2 = c(8\cdot 0-3);$$
$$9 = -3c \Rightarrow c = -3.$$

Итак, частный интеграл данного уравнения

$$(4y-5)^2 = -3(8x-3).$$

Пример 3.4. Решить задачу Коши: $(2e^{4x}+3)y' = y^2e^{4x}$, $y(0) = 1$.

Решение

В условии задано уравнение с разделяющимися переменными. Подставим в исходное уравнение $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$(2e^{4x}+3)\frac{dy}{dx} = y^2e^{4x}.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$(2e^{4x}+3)dy = y^2e^{4x}dx.$$

Разделим обе части уравнения на $y^2(2e^{4x}+3)$, при этом можем потерять решение $y = 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{e^{4x}dx}{2e^{4x}+3}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}+c;$$

$$\int\frac{e^{4x}dx}{2e^{4x}+3} = \left|\begin{array}{l} 2e^{4x}+3 = t, \\ dt = 8e^{4x}dx \end{array}\right| = \frac{1}{8}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t|+c = \frac{1}{8}\ln\left|2e^{4x}+3\right|+c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{8}\ln\left|\,2e^{4x}+3\,\right|+\tilde{c}.$$

Умножим обе части данного выражения на −8:

$$\frac{8}{y}=c-\ln\left|\,2e^{4x}+3\,\right|,$$

где $c=-8\tilde{c}$.

Тогда общее решение данного уравнения

$$y=\frac{8}{c-\ln\left|\,2e^{4x}+3\,\right|}.$$

При делении на y^2 могли потерять решение $y = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Из общего решения его получить невозможно. Следовательно, $y = 0$ – особое решение.

Тогда решение данного уравнения

$$y=\frac{8}{c-\ln\left|\,2e^{4x}+3\,\right|};\; y=0.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в общее решение и найдем константу c:

$$1=\frac{8}{c-\ln 5}\Rightarrow c=\ln 5+8.$$

Итак, частное решение данного уравнения

$$y=\frac{8}{\ln 5+8-\ln\left|\,2e^{4x}+3\,\right|}.$$

Пример 3.5. Найти общее решение уравнения $xdx + ydy = xy^2dx + yx^2dy$.

Решение

Сгруппируем слагаемые:

$$xdx - xy^2dx = yx^2dy - ydy;$$

$$x\,(1-y^2)dx = y(x^2-1)dy.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на $(1-y^2)$ (x^2-1), при этом можем потерять решения $y=-1$; $y=1$; $x=-1$ и $x=1$:

$$\frac{xdx}{x^2-1}=\frac{ydy}{1-y^2}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{ydy}{1-y^2}=\left|\begin{aligned}&1-y^2=t;\\&dt=-2ydy;\\&ydy=-dt/2\end{aligned}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|+c;$$

$$\int\frac{xdy}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\tilde{c};$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|=-\tilde{c}.$$

Умножим на 2:

$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|1-y^2\right|=\ln c,$$

где $\ln c=-2\tilde{c}$;

$$\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)=c\,.$$

При делении на $(1-y^2)$ (x^2-1) могли потерять решения $y=-1$; $y=1$; $x=-1$ и $x=1$, но они содержаться в общем интеграле при $c=0$. Таким образом, данное уравнение особых решений не имеет.

Итак, общий интеграл данного уравнения

$$\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)=c\,.$$

Пример 3.6. Написать уравнение кривой, проходящей через точку $M\,(2,\,1)$, зная, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты этой точки.

Решение

Составим дифференциальное уравнение семейства кривых, удовлетворяющих требуемому в задаче условию. Так как угловой коэффициент касательной в точке равен первой производной функции в этой точке, и, по условию задачи, равен квадрату ординаты этой точки, то имеем дифференциальное уравнение

$$y' = y^2.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим в полученное уравнение $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на y^2 (при этом можем потерять решение $y = 0$):

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c;$$

$$\int dx = x + c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$-\frac{1}{y} = x + c;$$

$$y = -\frac{1}{x+c}.$$

При делении на y^2 было потеряно решение $y = 0$. Следовательно, $y = 0$ – особое решение.

Тогда решение данного уравнения

$$y = -\frac{1}{x+c}, y = 0.$$

Так как искомая кривая проходит через точку M (2, 1), то найдем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию $y(2) = 1$. Для этого подставим $x = 2$ и $y = 1$ в общее решение и найдем константу c:

$$1 = -\frac{1}{2+c} \Rightarrow 2 + c = -1;\, c = -3.$$

Тогда частное решение данного уравнения

$$y = -\frac{1}{x-3}.$$

Следовательно, уравнение искомой кривой

$$y = \frac{1}{3-x}.$$

3.2. Дифференциальные уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c), \quad \text{где} \quad b \neq 0$$

с помощью замены $t = ax + by + c$ можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 3.7. Найти общее решение уравнения $y' = \sqrt[3]{(4x - 9y + 1)^2}$.

Решение

Приведем данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, сделав замену $t = 4x - 9y + 1$.

Так как $t' = 4 - 9y'$, то $y' = \dfrac{4 - t'}{9}$.

Подставим $t = 4x - 9y + 1$ и $y' = \dfrac{4 - t'}{9}$ в исходное уравнение:

$$\frac{4 - t'}{9} = \sqrt[3]{t^2};$$

$$4 - t' = 9\sqrt[3]{t^2};$$

$$t' = 4 - 9\sqrt[3]{t^2}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $t' = \frac{dt}{dx}$:

$$\frac{dt}{dx} = 4 - 9\sqrt[3]{t^2}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $4 - 9\sqrt[3]{t^2}$ (при этом можем потерять решения $t = \pm\frac{8}{27}$):

$$\frac{dt}{4 - 9\sqrt[3]{t^2}} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int \frac{dt}{4 - 9\sqrt[3]{t^2}} = \left| \begin{matrix} t = z^3; \\ dt = 3z^2 dz \end{matrix} \right| = \int \frac{3z^2 dz}{4 - 9z^2} = -\frac{3}{9}\int \frac{z^2 dz}{z^2 - 4/9} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(z^2 - 4/9 + 4/9)dz}{z^2 - 4/9} = -\frac{1}{3}\int \frac{(z^2 - 4/9)dz}{z^2 - 4/9} -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\int \frac{dz}{z^2 - 4/9} = -\frac{1}{3}\int dz - \frac{4}{27}\cdot\frac{3}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z - 2/3}{z + 2/3}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}\ln\left|\frac{3z - 2}{3z + 2}\right| + c = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{t} - \frac{1}{9}\ln\left|\frac{3\sqrt[3]{t} - 2}{3\sqrt[3]{t} + 2}\right| + c;$$

$$\int dx = x + c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения

$$-\frac{1}{3}\sqrt[3]{t} - \frac{1}{9}\ln\left|\frac{3\sqrt[3]{t} - 2}{3\sqrt[3]{t} + 2}\right| = x + \tilde{c}.$$

Умножим обе части выражения на –9:

$$3\sqrt[3]{t} + \ln\left|\frac{3\sqrt[3]{t} - 2}{3\sqrt[3]{t} + 2}\right| = -9x + c.$$

При делении на $4 - 9\sqrt[3]{t^2}$ могли потерять решения $t = \pm\frac{8}{27}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $t = \pm\frac{8}{27}$ являются решением исходного уравнения. Из общего решения их получить невозможно. Следовательно, $t = \pm\dfrac{8}{27}$ − особое решение.

Тогда решение данного уравнения

$$3\sqrt[3]{t} + \ln\left|\frac{3\sqrt[3]{t} - 2}{3\sqrt[3]{t} + 2}\right| = -9x + c;\ t = \pm\frac{8}{27}.$$

Подставив $t = 4x - 9y + 1$, получим

$$3\sqrt[3]{4x - 9y + 1} + \ln\left|\frac{3\sqrt[3]{4x - 9y + 1} - 2}{3\sqrt[3]{4x - 9y + 1} + 2}\right| = -9x + c;\ 4x - 9y + 1 = \pm\frac{8}{27}.$$

Пример 3.8. Решить задачу Коши: $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$, $y(0) = 2$.

Решение

Так как $y' = -\dfrac{3x + 3y - 1}{2x + 2y} = -\dfrac{3(x + y) - 1}{2(x + y)}$, то можно сделать замену $x + y = t$. Тогда

$y' = t' - x' = t' - 1$.

Подставляя в уравнение $x + y = t$ и $y' = t' - 1$, получим

$$t' - 1 = -\frac{3t - 1}{2t};$$

$$t' = 1 - \frac{3t - 1}{2t};$$

$$t' = \frac{2t - 3t + 1}{2t};$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1 - t}{2t}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $\dfrac{1 - t}{2t}$ (при этом можем потерять решение $t = 1$):

$$\frac{2tdt}{1 - t} = dx \Rightarrow -\frac{2tdt}{t - 1} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{2tdt}{t-1}=2\int\frac{t-1+1}{t-1}dt=2\left(\int dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=2\left(t+\ln\left|t-1\right|\right)+c;$$

$$\int dx=x+c.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения

$$-2\left(t+\ln\left|t-1\right|\right)=x+c;$$

$$2t+\ln\left(t-1\right)^2=-x+c.$$

При делении на $\frac{1-t}{2t}$ могли потерять решение $t = 1$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $t = 1$ является решением данного уравнения. Из общего интеграла его получить невозможно ни при каком значении константы c. Следовательно, $t = 1$ − особое решение. Тогда решение уравнения

$$2t+\ln(t-1)^2=-x+c;\ t=1.$$

Сделав обратную замену $t = x + y$, получим

$$2\left(x+y\right)+\ln(x+y-1)^2=-x+c;\ x+y=1.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 0$ и $y = 2$ в общий интеграл:

$$4 + \ln 1 + 0 = c \Rightarrow c = 4.$$

Следовательно, частный интеграл данного уравнения

$$3x + 2y + \ln(x + y - 1)^2 = 4\ .$$

3.3. Дифференциальные уравнения, однородные относительно *x* и *y*

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

или к виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного порядка, т.е. существует такое целое число k, что для любого t справедливо тождество $P(tx, ty) = t^k P(x, y)$ и $Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$.

С помощью подстановки $y = xt$ (или $x = yt$) однородное уравнение приводят к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 3.9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0.$$

Решение

Данное уравнение однородное, так как функции $4x^2 + 3xy + y^2$ и $4y^2 + 3xy + x^2$ являются однородными функциями одного и того же измерения (второго).

Разделим обе части уравнения на dx, а затем выразим y':

$$(4y^2 + 3xy + x^2)\frac{dy}{dx} = -(4x^2 + 3xy + y^2);$$

$$(4y^2 + 3xy + x^2)y' = -(4x^2 + 3xy + y^2);$$

$$y' = -\frac{4x^2 + 3xy + y^2}{4y^2 + 3xy + x^2}.$$

Сделаем замену $y = tx$, тогда $y' = xt' + t$. Подставим их в полученное уравнение:

$$xt' + t = -\frac{4x^2 + 3x^2 t + (xt)^2}{4(xt)^2 + 3x^2 t + x^2};$$

$$xt' = -\frac{4x^2 + 3x^2 t + x^2 t^2}{4x^2 t^2 + 3x^2 t + x^2} - t;$$

$$xt' = -\left(\frac{4 + 3t + t^2}{4t^2 + 3t + 1} + t\right);$$

$$xt' = -\frac{4 + 3t + t^2 + 4t^3 + 3t^2 + t}{4t^2 + 3t + 1};$$

$$xt' = -\frac{4 + 4t + 4t^2 + 4t^3}{4t^2 + 3t + 1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $t' = \dfrac{dt}{dx}$:

$$x\frac{dt}{dx}=-\frac{4+4t+4t^2+4t^3}{4t^2+3t+1}.$$

Разделим обе части уравнения на $\dfrac{4+4t+4t^2+4t^3}{4t^2+3t+1}$, умножим на dx и разделим на x:

$$\frac{4t^2+3t+1}{4t^3+4t^2+4t+4}dt=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|;$$

$$\int\frac{4t^2+3t+1}{4t^3+4t^2+4t+4}dt=\frac{1}{4}\int\frac{4t^2+3t+1}{t^3+t^2+t+1}dt.$$

Разложим знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла на множители:

$$t^3+t^2+t+1=t^2(t+1)+t+1=(t+1)(t^2+1).$$

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{4t^2+3t+1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$4t^2+3t+1=A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1);$$

$$4t^2+3t+1=At^2+A+Bt^2+Ct+Bt+C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях последнего уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases}4=A+B,\\3=C+B,\\1=A+C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4-B,\\C=3-B,\\4-B+3-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4-B,\\C=3-B,\\-2B=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\C=0,\\B=3.\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{4t^2+3t+1}{t^3+t^2+t+1}=\frac{1}{t+1}+\frac{3t}{t^2+1}.$$

Значит,

$$\frac{1}{4}\int\frac{4t^2+3t+1}{t^3+t^2+t+1}dt=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{t+1}+\int\frac{3tdt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln|t+1|+\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{3}{8}\ln\left|t^2+1\right|.$$

Следовательно, получили общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{3}{8}\ln\left|t^2+1\right|=-\ln|x|+c_1.$$

Умножим обе части на 8:

$$2\ln|t+1|+3\ln\left|t^2+1\right|=8c_1-8\ln|x|;$$

$$8\ln|x|+2\ln|t+1|+3\ln\left|t^2+1\right|=8c_1;$$

$$\ln x^8+\ln(t+1)^2+\ln(t^2+1)^3=8c_1;$$

$$\ln(x^8(t+1)^2(t^2+1)^3)=\ln c,\text{ где }\ln c=8c_1;$$

$$x^8(t+1)^2(t^2+1)^3=c.$$

Сделаем обратную замену $t=\dfrac{y}{x}$, тогда

$$x^8\left(\frac{y}{x}+1\right)^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)^3=c;$$

$$x^8\frac{1}{x^2}(y+x)^2\frac{1}{x^6}(y^2+x^2)^3=c;$$

$$(y+x)^2(y^2+x^2)^3=c.$$

При делении на $4t^3+4t^2+4t+4$ могли потерять решение $t=-1$, т.е. $y=-x$, но оно содержится в общем интеграле при $c=0$. Таким образом, данное уравнение особых решений не имеет.

Следовательно, общий интеграл данного уравнения

$$(y+x)^2(y^2+x^2)^3=c.$$

Пример 3.10. Найти общее решение уравнения $xy' - y = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}$.

Решение

Данное уравнение однородное, так как его можно привести к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Разделим обе части уравнения на $x \neq 0$:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(y/x)}.$$

Сделаем замену $y/x = t$, тогда $y = xt$, $y' = (xt)' = x't + xt' = t + xt'$.

Подставим $y/x = t$ и $y' = t + xt'$ в данное уравнение:

$$t + xt' - t = \frac{1}{\operatorname{arctg}t};$$

$$xt' = \frac{1}{\operatorname{arctg}t};$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\operatorname{arctg}t}.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$xdt = \frac{dx}{\operatorname{arctg}t}.$$

Умножим обе части на $\operatorname{arctg}t$:

$$x \operatorname{arctg}t dt = dx .$$

Разделим на $x \neq 0$:

$$\operatorname{arctg}t dt = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$\int \operatorname{arctg} t\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям:} \\ \operatorname{arctg} t = u, \ \dfrac{1}{1+t^2}dt = du; \\ dv = dt, \ \ v = \int dt = t \end{array} \right| =$$

$$= t\operatorname{arctg} t - \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + c\,.$$

Следовательно,

$$t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| = \ln|x| + \tilde{c};$$

$$t\operatorname{arctg} t = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \tilde{c}.$$

Умножим на 2:

$$2t\operatorname{arctg} t = 2\ln|x| + \ln\left|t^2+1\right| + c,$$

$$2t\operatorname{arctg} t = \ln x^2 + \ln\left|t^2+1\right| + c;$$

$$2t\operatorname{arctg} t = \ln\left(x^2(t^2+1)\right) + c.$$

Сделаем обратную замену $t = \dfrac{y}{x}$:

$$2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)\right) + c;$$

$$2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(y^2 + x^2\right) + c.$$

Итак, общий интеграл данного дифференциального уравнения

$$2y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ln\left(y^2 + x^2\right) + cx\,.$$

Пример 3.11. Найти общее решение уравнения $(2x^2 + 2xy)dy = (4xy - 3y^2)dx$.

Решение

Исходное уравнение однородное, так как функции $2x^2 + 2xy$ и $4xy - 3y^2$ являются однородными функциями одной и той же степени (второй). Сделаем замену $y = tx$, тогда $dy = xdt + tdx$. Подставив их в исходное уравнение, получим

$$(2x^2 + 2x^2t)(tdx + xdt) = (4x^2t - 3x^2t^2)dx;$$
$$(2x^2 + 2x^2t)tdx + (2x^2 + 2x^2t)xdt = (4x^2t - 3x^2t^2)dx;$$
$$x^2(2 + 2t)tdx + x^3(2 + 2t)dt = x^2(4t - 3t^2)dx.$$

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$(2 + 2t)tdx + x(2 + 2t)dt = (4t - 3t^2)dx;$$
$$(2 + 2t)tdx - (4t - 3t^2)dx = -x(2 + 2t)dt;$$
$$(2t + 2t^2 - 4t + 3t^2)dx = -x(2 + 2t)dt;$$
$$(5t^2 - 2t)dx = -x(2 + 2t)dt.$$

Разделим обе части уравнении на $x(5t^2 - 2t)$, при этом можем потерять решения $t = 0$, $t = 2/5$ и $x = 0$:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(2 + 2t)dt}{5t^2 - 2t}.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$
$$\int \frac{(2 + 2t)dt}{5t^2 - 2t} = \int \frac{(2 + 2t)dt}{t(5t - 2)}.$$

Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2 + 2t}{t(5t - 2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{5t - 2} = \frac{A(5t - 2) + Bt}{t(5t - 2)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева:

$$2 + 2t = A(5t - 2) + Bt.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях последнего уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5A + B = 2, \\ -2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 7, \\ A = -1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\frac{(2+2t)dt}{5t^2-2t}=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{7}{5t-2}\right)dt=-\int\frac{dt}{t}+7\int\frac{dt}{5t-2}=-\ln|t|+\frac{7}{5}\ln|5t-2|+c$$

Следовательно,

$$\ln|t|-\frac{7}{5}\ln|5t-2|=\ln|x|+\tilde{c}.$$

Умножим обе части на 5:

$$5\ln|t|-7\ln|5t-2|=5\ln|x|+\tilde{c};$$

$$7\ln|5t-2|-5\ln|t|+5\ln|x|=-\tilde{c};$$

$$\ln\left|(5t-2)^7\right|-\ln\left|t^5\right|+\ln\left|x^5\right|=5\tilde{c};$$

$$\ln\left|\frac{(5t-2)^7x^5}{t^5}\right|=\ln c;$$

$$\frac{(5t-2)^7x^5}{t^5}=c.$$

Решения $t=\frac{2}{5}$ и $x=0$ не потеряны, так как они содержатся в общем решении при $c_1=0$; решение $t=0$ потеряно, так как оно не содержится в общем решении ни при каком значений константы c. Следовательно, $t=0$ − особое решение.

Тогда решение данного уравнения

$$\frac{(5t-2)^7x^5}{t^5}=c;\ t=0;$$

$$(5t-2)^7x^5=ct^5;\ t=0.$$

Сделаем обратную замену $t=\frac{y}{x}$, тогда

$$\left(5\frac{y}{x}-2\right)^7x^5=c\left(\frac{y}{x}\right)^5;\ \frac{y}{x}=0;$$

$$\frac{(5y-2x)^7}{x^7}x^5=c\frac{y^5}{x^5};\ y=0;$$

$$\left(5y-2x\right)^7 x^3 = cy^5;\ y=0.$$

Итак, общее решение данного уравнения

$$\left(5y-2x\right)^7 x^3 = cy^5;\ y=0.$$

3.4. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным

Пусть дано уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Обозначим определитель $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Тогда:

1) если $\delta \neq 0$, то уравнение приводится к однородному заменой

$$\begin{cases} x = u+\alpha, \\ y = v+\beta, \end{cases}$$

где (α, β) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \end{cases}$

2) если $\delta = 0$, то уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $a_1x + b_1y = t$.

Пример 3.12. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{x+3y-4}{3x-y-2}$.

Решение

Так как $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1-9 \neq 0$, то делаем замену $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$,

где коэффициенты α и β находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 4 = 0, \\ 3\alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4-3\beta, \\ 3(4-3\beta) - \beta - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4-3\beta, \\ 12 - 9\beta - \beta - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4-3\beta, \\ 10 - 10\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x = u + 1, \\ y = v + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du, \\ dy = dv; \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 1 + 3(v + 1) - 4}{3(u + 1) - (v + 1) - 2};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 3v}{3u - v}.$$

Получили однородное уравнение. Сделаем еще одну замену

$$t = \frac{v}{u} \Rightarrow v = tu\,.$$

Тогда

$$v' = t'u + t.$$

Значит, уравнение примет вид

$$t'u + t = \frac{u + 3tu}{3u - tu};$$

$$t'u = \frac{u + 3tu}{3u - tu} - t;$$

$$t'u = \frac{1 + 3t}{3 - t} - t;$$

$$t'u = \frac{1 + 3t - 3t + t^2}{3 - t};$$

$$u\frac{dt}{du} = \frac{1 + t^2}{3 - t};$$

$$udt = \frac{1 + t^2}{3 - t}du.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $u \neq 0$:

$$dt = \frac{t^2+1}{3-t}\frac{du}{u}.$$

Далее разделим на $\frac{t^2+1}{3-t}$:

$$\frac{3-t}{t^2+1}dt = \frac{du}{u}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$\int\frac{3-t}{t^2+1}dt = -\int\frac{t-3}{t^2+1}dt = -\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 3\int\frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\operatorname{arctg}t + c.$$

Тогда

$$3\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln|u| + \tilde{c};$$

$$6\operatorname{arctg}t = \ln(t^2+1) + 2\ln|u| + 2\tilde{c};$$

$$6\operatorname{arctg}t = \ln\left(t^2+1\right) + \ln u^2 + c;$$

$$6\operatorname{arctg}t = \ln\left(u^2(t^2+1)\right) + c.$$

Подставим $t = \frac{v}{u}$:

$$6\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \ln\left(u^2\left(\frac{v^2}{u^2}+1\right)\right) + c;$$

$$6\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \ln\left(v^2+u^2\right) + c.$$

Подставив $u = x-1$, $v = y-1$, получим общий интеграл данного уравнения

$$6\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-1} = \ln\left((y-1)^2 + (x-1)^2\right) + c.$$

3.5. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные на некотором интервале (α, β) известные функции.

Заметим, что для линейного дифференциального уравнения первого порядка выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, т.е. данное уравнение всегда имеет единственное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \boldsymbol{R}$.

Если $Q(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным*.

Общее решение однородного уравнения получается разделением переменных:

$$y' + P(x)y = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy + P(x)ydx = 0.$$

Разделим обе части уравнения на y (при делении на y можем потерять решение $y = 0$):

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0;$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Интегрируя левую часть уравнения по y, а правую часть по x получаем

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \tilde{c}.$$

Выразим y:

$$|y| = e^{-\int P(x)dx + \tilde{c}};$$

$$|y| = e^{\tilde{c}} \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Пусть $e^{\tilde{c}} = c$, тогда общее решение однородного уравнения

$$y = ce^{-\int P(x)dx}.$$

Заметим, что решение $y = 0$ мы не теряем, так как оно получается при $c = 0$.

Для решения неоднородного уравнения применяем метод вариации произвольной постоянной, который заключается в следующем. Сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения. Затем, заменив постоянную c на функцию $c(x)$, ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставив в исходное уравнение $y_{\text{ч.н}}$ и $y'_{\text{ч.н}}$, находим функцию $c(x)$. Общее решение неоднородного уравнения будет равно сумме общего решения однородного уравнения $y_{\text{о.о}}$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{ч.н}}$:

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}.$$

Так же решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно с помощью метода Бернулли, который заключается в следующем. Решение ищем в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции переменной x. Тогда имеем

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

Подставляя значения y и y' в уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, получаем

$$u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) + P(x)\, u(x)\, v(x) = Q(x).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'(x)\, v(x) + u(x)(v'(x) + P(x)\, v(x)) = Q(x).$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v'(x) + P(x)\, v(x) = 0$. Относительно $v(x)$ имеем линейное однородное уравнение, следовательно, как было показано ранее

$$v = ce^{-\int P(x)dx}.$$

Затем найдем функцию $u(x)$ из условия $u'(x)\,v(x) = Q(x)$.

Замечание

Иногда удобнее рассматривать уравнение $x' + P(y)x = Q(y)$ – линейное относительно переменной y.

Пример 3.13. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \dfrac{e^2}{2}$.

Решение

Данное уравнение – линейное неоднородное. Рассмотрим два способа решения линейного уравнения: метод вариации произвольной постоянной и метод Бернулли.

Метод вариации произвольной постоянной

Рассмотрим однородное уравнение $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = 0,$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Подставим $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\ln x}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на y:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c;$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + c.$$

Тогда

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + \tilde{c};$$

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + \ln|c|;$$
$$y = c\ln x\,.$$

Итак, общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c\ln x\,.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c(x)\ln x\,.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч.н}} = c'(x)\ln x + c(x)\frac{1}{x}.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}$ и $y'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(x)\ln x + c(x)\frac{1}{x} - \frac{c(x)\ln x}{x\ln x} = x\ln x;$$
$$c'(x)\ln x = x\ln x;$$
$$c'(x) = x.$$

Тогда

$$c(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = c(x)\ln x = \frac{x^2}{2}\ln x\,.$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c\ln x + \frac{x^2}{2}\ln x\,.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(e) = \frac{e^2}{2}$. Для этого найдем константу c, подставив $x = e$ и $y = \frac{e^2}{2}$ в найденное общее решение неоднородного уравнения:

$$\frac{e^2}{2} = c\ln e + \frac{e^2}{2}\ln e;$$
$$\frac{e^2}{2} = c + \frac{e^2}{2} \Rightarrow c = 0.$$

Тогда $y = \frac{x^2}{2}\ln x$ – решение задачи Коши.

Метод Бернулли

Решение ищем в виде произведения двух функций $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

Подставляя значения y и y' в уравнение $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, получаем

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x\ln x} = x\ln x.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x\ln x}\right) = x\ln x.$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы

$$v' - \frac{v}{x\ln x} = 0\ .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x\ln x};$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{dv}{v} = \ln|v| + c;$$
$$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + c.$$

Тогда

$$\ln|v| = \ln|\ln x| + \tilde{c};$$
$$\ln|v| = \ln|\ln x| + \ln|c|;$$
$$v = c\ln x.$$

Так как нам достаточно найти какое-нибудь одно ненулевое решение уравнения, то при $c = 1$ получим $v = \ln x$.

Найдем функцию $u(x)$ из условия $u'v = x\ln x$. Подставим $v = \ln x$:

$$u'\ln x = x\ln x;$$
$$u' = x;$$
$$u = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Тогда

$$y = uv = \ln x\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$$

Получили общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x + c\ln x.$$

Подставив начальные условия, получим $c = 0$.

Итак, решение задачи Коши:

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x.$$

Пример 3.14. Решить задачу Коши: $y' - 3y\frac{1}{x^2+1} = -\frac{5\operatorname{arctg}x}{x^2+1}e^{3\operatorname{arctg}x}$, $y(0) = 2$.

Решение

Данное уравнение – линейное неоднородное. Рассмотрим однородное уравнение

$$y' - 3y\frac{1}{x^2+1} = 0,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x^2+1}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на y:

$$\frac{dy}{y}=\frac{3dx}{x^2+1}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+c;$$

$$\int\frac{3dx}{x^2+1}=3\operatorname{arctg}x+c.$$

Тогда

$$\ln|\,y\,|=3\operatorname{arctg}x+\tilde{c};$$

$$|\,y\,|=e^{\tilde{c}+3\operatorname{arctg}x}=e^{\tilde{c}}e^{3\operatorname{arctg}x}.$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}}=ce^{3\operatorname{arctg}x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}}=c(x)e^{3\operatorname{arctg}x}.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч.н}}=c'(x)e^{3\operatorname{arctg}x}+c(x)e^{3\operatorname{arctg}x}\frac{3}{1+x^2}.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}$ и $y'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(x)e^{3\operatorname{arctg}x}+c(x)e^{3\operatorname{arctg}x}\frac{3}{1+x^2}-3c(x)e^{3\operatorname{arctg}x}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{5\operatorname{arctg}x}{x^2+1}e^{3\operatorname{arctg}x};$$

$$c'(x)e^{3\operatorname{arctg}x}=-\frac{5\operatorname{arctg}x}{x^2+1}e^{3\operatorname{arctg}x};$$

$$c'(x)=-\frac{5\operatorname{arctg}x}{x^2+1}.$$

Тогда

$$c(x) = -\int \frac{5\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx = \begin{vmatrix} \operatorname{arctg} x = t; \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{vmatrix} = -5\int t dt = -5\frac{t^2}{2} + c = -\frac{5\operatorname{arctg}^2 x}{2} + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение

$$y_{\text{ч.н}} = c(x)e^{3\operatorname{arctg} x} = -\frac{5\operatorname{arctg}^2 x}{2}e^{3\operatorname{arctg} x}.$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = ce^{3\operatorname{arctg} x} - \frac{5}{2}e^{3\operatorname{arctg} x}\operatorname{arctg}^2 x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 0$ и $y = 2$ в найденное общее решение неоднородного уравнения:

$$2 = ce^0 - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}^2 0 \cdot e^0 \Rightarrow c = 2.$$

Итак, решение задачи Коши:

$$y = 2e^{3\operatorname{arctg} x} - \frac{5}{2}e^{3\operatorname{arctg} x}\operatorname{arctg}^2 x.$$

Пример 3.15. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{2y}{2x-3} = \frac{4\ln(2x-5)}{2x-3}.$$

Решение

Данное уравнение – линейное неоднородное. Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + \frac{2y}{2x-3} = 0,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x-3}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на y:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{2x-3}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c;$$

$$\int \frac{2dx}{2x-3} = \ln|2x-3| + c.$$

Тогда

$$\ln|y| = -\ln|2x-3| + \tilde{c};$$

$$\ln|y| = \ln c - \ln|2x-3|;$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{2x-3}\right|.$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = \frac{c}{2x-3}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{c(x)}{2x-3}.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч.н}} = \frac{c'(x)}{2x-3} - \frac{2c(x)}{(2x-3)^2}.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}$ и $y'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$\frac{c'(x)}{2x-3} - \frac{2c(x)}{(2x-3)^2} + \frac{2c(x)}{(2x-3)(2x-3)} = \frac{4\ln(2x-5)}{2x-3};$$

$$\frac{c'(x)}{2x-3}=\frac{4\ln(2x-5)}{2x-3};$$

$$c'(x)=4\ln(2x-5).$$

Тогда

$$c(x)=4\int\ln(2x-5)dx=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям:}\\ u=\ln(2x-5),\ du=\dfrac{2}{2x-5}dx;\\ dv=dx,\qquad v=x\end{array}\right|=$$

$$=4\left(x\ln(2x-5)-\int x\frac{2}{2x-5}dx\right)=4\left(x\ln(2x-5)-\int\frac{2x-5+5}{2x-5}dx\right)=$$

$$=4\left(x\ln(2x-5)-\int dx-5\int\frac{dx}{2x-5}\right)=4\left(x\ln(2x-5)-x-\frac{5}{2}\ln|2x-5|\right)+c=$$

$$=4x\ln(2x-5)-4x-10\ln|2x-5|+c=(4x-10)\ln(2x-5)-4x+c.$$

При c = 0 получим частное решение

$$y_{\text{ч.н}}=\frac{c(x)}{2x-3}=\frac{(4x-10)\ln(2x-5)-4x}{2x-3}.$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y=\frac{c}{2x-3}+\frac{(4x-10)\ln(2x-5)-4x}{2x-3}.$$

Пример 3.16. Решить задачу Коши: $(y^4 + 2x)y' = y$, $y(0) = 1$.

Решение

Данное уравнение не является линейным относительно функции y. Будем рассматривать x, как функцию переменной y. Подставим $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

$$(y^4+2x)\frac{dy}{dx}=y.$$

Разделим обе части уравнения на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$y^4+2x=y\frac{dx}{dy}.$$

Разделив обе части уравнения на y, получим линейное относительно x неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = y^3.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = 0,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Умножим обе части уравнения на dy и разделим на x:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|\, x\,| + c;$$

$$\int \frac{2dy}{y} = 2\ln|\, y\,| + c.$$

Тогда

$$\ln|\, x\,| = 2\ln|\, y\,| + \tilde{c};$$

$$\ln|\, x\,| = \ln y^2 + \ln|c|;$$

$$x = cy^2.$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = cy^2.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = c(y)y^2 .$$

Тогда

$$x'_{\text{ч.н}} = c'(y)y^2 + c(y)2y.$$

Подставим $x_{\text{ч.н}}$ и $x'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(y)y^2 + c(y)2y - \frac{2c(y)y^2}{y} = y^3;$$

$$c'(y)y^2 = y^3;$$

$$c'(y) = y.$$

Тогда

$$c(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$x_{\text{ч.н.}} = c(y)y^2 = \frac{y^2}{2}y^2 = \frac{y^4}{2}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения

$$x = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}} = cy^2 + \frac{y^4}{2}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 1$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение неоднородного уравнения:

$$0 = c + \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}.$$

Итак, решение задачи Коши

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{y^4}{2}.$$

Пример 3.17. Решить задачу Коши: $dx = \left(4y^7 - 5y + 2 + \frac{2x}{y}\right)dy$, $y(0) = 1$.

Решение

Рассмотрим x, как функцию независимой переменной y. Тогда $x' = 4y^7 - 5y + 2 + \frac{2x}{y}$ – линейное относительно x неоднородное уравнение. Рассмотрим однородное уравнение

$$x' = \frac{2x}{y},$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Подставим $x' = \dfrac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y}.$$

Умножим обе части уравнения на dy и разделим на x:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$\int \frac{2dy}{y} = 2\ln|y| + c.$$

Тогда

$$\ln|x| = 2\ln|y| + \tilde{c};$$

$$\ln|x| = \ln y^2 + \ln|c|;$$

$$x = cy^2.$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = cy^2.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = c(y)y^2.$$

Тогда

$$x'_{\text{ч.н}} = c'(y)y^2 + c(y)2y.$$

Подставим $x_{\text{ч.н}}$ и $x'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(y)y^2 + c(y)2y - \frac{2c(y)y^2}{y} = 4y^7 - 5y + 2;$$

$$c'(y)y^2 = 4y^7 - 5y + 2;$$

$$c'(y) = 4y^5 - \frac{5}{y} + \frac{2}{y^2}.$$

Тогда

$$c(y) = \int \left(4y^5 - \frac{5}{y} + \frac{2}{y^2} \right) dy = \frac{4y^6}{6} - 5\ln|y| - \frac{2}{y} + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение

$$x_{\text{ч.н}} = c(y)y^2 = \left(\frac{2y^6}{3} - 5\ln|y| - \frac{2}{y} \right) y^2 = \frac{2y^8}{3} - 5y^2 \ln|y| - 2y.$$

Так как $x = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}}$, то общее решение нашего уравнения

$$x = cy^2 + \frac{2}{3}y^8 - 5y^2 \ln|y| - 2y \cdot$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в общее решение неоднородного уравнения и найдем константу c:

$$0 = c + \frac{2}{3} \cdot 1^8 - 5\ln 1 - 2 \Rightarrow c = \frac{4}{3}.$$

Итак, решение задачи Коши

$$x = \frac{4}{3}y^2 + \frac{2}{3}y^8 - 5y^2 \ln|y| - 2y.$$

3.6. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$, а $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные на некотором интервале (α, β) известные функции, называется *уравнением Бернулли*. Заметим, что при $m = 0$ это уравнение является линейным, а при $m = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными.

С помощью замены $z = y^{1-m}$ уравнение Бернулли приводят к линейному уравнению. Также решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций $y(x) = u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции переменной x, или применив метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Отметим, что при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$.

Пример 3.18. Решить задачу Коши: $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, $y(1) = 0$.

Решение

Данное уравнение – это уравнение Бернулли, где $m = \frac{1}{2}$.

1 способ

Разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{4}{x}\sqrt{y} + x\,.$$

Сделаем замену

$$z = \sqrt{y}\ .$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'\,.$$

После подстановки в исходное уравнение получим линейное уравнение

$$2z' = \frac{4}{x}z + x.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$2z' = \frac{4}{x}z;$$

$$2\frac{dz}{dx} = \frac{4}{x}z.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $2z$:

$$\frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения

$$\int\frac{dz}{z}=\ln|\,z\,|+c;$$
$$\int\frac{2dx}{x}=2\ln|\,x\,|+c.$$

Тогда

$$\ln|\,z\,|=2\ln|\,x\,|+\tilde{c};$$
$$\ln|\,z\,|=\ln\left|x^2\right|+\ln|c|;$$
$$z=cx^2.$$

Получили общее решение однородного уравнения:

$$z_{\text{о.о}}=cx^2.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$z_{\text{ч.н}}=c(x)x^2.$$

Тогда

$$z'_{\text{ч.н}}=c'(x)x^2+c(x)2x.$$

Подставим $z_{\text{ч.н}}$ и $z'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$2c'(x)x^2+4xc(x)=\frac{4}{x}c(x)x^2+x;$$
$$2c'(x)x^2=x;$$
$$c'(x)=\frac{1}{2x};$$

$$c(x)=\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+c.$$

При c = 0 получим частное решение неоднородного уравнения

$$z_{\text{ч.н}} = c(x)x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln|\,x\,|\,.$$

Так как $z = z_{\text{о.о}} + z_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$z = cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|.$$

Сделаем обратную замену $z = \sqrt{y}$, тогда

$$\sqrt{y} = cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|;$$

$$y = \left(cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|\right)^2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 1$ и $y = 0$ в найденное общее решение неоднородного уравнения:

$$0 = \left(c + \frac{1}{2}\ln 1\right)^2 \Rightarrow c = 0.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = \frac{x^4}{4}\ln^2|x|.$$

2 способ

Решение ищем в виде произведения двух функций $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$y'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Подставляя значения y и y' в уравнение $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, получаем

$$u'v + uv' = \frac{4uv}{x} + x\sqrt{uv}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}\,.$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' - \frac{4v}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4v}{x}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на v:

$$\frac{dv}{v} = \frac{4dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c;$$

$$4\int \frac{dx}{x} = 4\ln|x| + c.$$

Тогда

$$\ln|v| = 4\ln|x| + c;$$

$$\ln|v| = \ln x^4 + \ln|c|;$$

$$v = cx^4.$$

Так как нам достаточно найти какое-нибудь одно ненулевое решение уравнения, то при $c = 1$ получим $v = x^4$.

Найдем функцию $u(x)$ из условия $u'v = x\sqrt{uv}$. Подставим $v = x^4$:

$$u'x^4 = x\sqrt{ux^4};$$

$$u'x^4 = x^3\sqrt{u};$$

$$u'x = \sqrt{u}.$$

Подставим $u' = \frac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx}x = \sqrt{u}.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $\sqrt{u}$:

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c;$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Тогда

$$2\sqrt{u} = \ln|x| + \tilde{c};$$

$$u = \frac{1}{4}(\ln|x| + c)^2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{4}x^4\left(\ln|x| + c\right)^2$$

Подставив начальные условия, получим $c = 0$. Тогда

$$y = \frac{1}{4}x^4\ln^2|x|.$$

3 способ

Решим данное уравнение методом вариации произвольной постоянной. Для этого решим сначала соответствующее линейное однородное уравнение $y' = \frac{4}{x}y$. После разделения переменных получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x}.$$

Проинтегрировав обе части полученного уравнения, получим

$$\ln|y| = 4\ln|x| + \tilde{c};$$
$$\ln|y| = \ln x^4 + \ln|c|;$$
$$y = cx^4.$$

Далее будем искать решение уравнения Бернулли, полагая

$$y = c(x)x^4.$$

Тогда

$$y' = c'(x)x^4 + 4c(x)x^3.$$

Подставим $y_.$ и y' в исходное уравнение:

$$c'(x)x^4 + 4c(x)x^3 = \frac{4}{x}c(x)x^4 + x\sqrt{c(x)x^4};$$

$$c'(x)x^4 = x^3\sqrt{c(x)};$$

$$c'(x)x = \sqrt{c(x)}.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dc'(x)}{\sqrt{c(x)}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$2\sqrt{c(x)} = \ln|x| + c.$$

Выразим

$$c(x) = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + c\right)^2.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{4}x^4\left(\ln|x| + c\right)^2.$$

Подставив начальные условия, получим $c = 0$. Значит,

$$y = \frac{1}{4}x^4\ln^2|x|.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = \frac{x^4}{4}\ln^2|x|.$$

Пример 3.19. Решить задачу Коши: $2y' - y = \dfrac{e^x}{y}$, $y(0) = 1$.

Решение

Данное уравнение – это уравнение Бернулли, где $m = -1$. Умножим левую и правую части уравнения на y:

$$2yy' - y^2 = e^x.$$

Сделаем замену $z = y^2$. Тогда $z' = 2yy'$.

После подстановки в исходное уравнение получим линейное уравнение

$$z' - z = e^x.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z' - z = 0;$$

$$\frac{dz}{dx} = z.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на z:

$$\frac{dz}{z} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c;$$

$$\int dx = x + c.$$

Тогда

$$\ln|z| = x + \tilde{c};$$

$$|z| = e^{x+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}} e^x;$$

$$z = ce^x.$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$z_{\text{о.о}} = ce^x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$z_{\text{ч.н}} = c(x)e^x.$$

Тогда

$$z'_{\text{ч.н}} = c'(x)e^x + c(x)e^x.$$

Подставим $z_{\text{ч.н}}$ и $z'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(x)e^x + c(x)e^x - c(x)e^x = e^x$$
$$c'(x)e^x = e^x$$
$$c'(x) = 1;$$

$$c(x) = \int dx = x + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$z_{\text{ч.н}} = c(x)e^x = xe^x.$$

Так как $z = z_{\text{о.о}} + z_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$z = ce^x + xe^x.$$

Сделаем обратную замену $z = y^2$, тогда общее решение неоднородного уравнения

$$y^2 = ce^x + xe^x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение неоднородного уравнения:

$$1^2 = ce^0 + 0 \Rightarrow c = 1.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y^2 = e^x(1 + x).$$

Пример 3.20. Решить задачу Коши: $4ydx = (-e^y y^4 x^5 - 3x)dy$, $y(1) = 1$.

Решение

Разделим правую и левую части уравнения на dy:

$$4y\frac{dx}{dy} = -e^y y^4 x^5 - 3x;$$

$$4yx' + 3x = -e^y y^4 x^5.$$

Получили уравнение Бернулли, если рассматривать x как функцию от переменной y. Разделим обе части уравнения на x^5:

$$\frac{4yx'}{x^5}+\frac{3}{x^4}=-e^y y^4.$$

Сделаем замену

$$z=x^{-4}.$$

Тогда

$$z'=-4x^{-5}x'\Rightarrow\frac{4x'}{x^5}=-z'.$$

После подстановки в исходное уравнение получим линейное уравнение

$$-yz'+3z=-e^y y^4.$$

Разделим обе части уравнения на $-y$:

$$z'-\frac{3z}{y}=e^y y^3.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$z'-\frac{3z}{y}=0;$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{3z}{y}.$$

Умножим обе части уравнения на dy и разделим на z:

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения

$$\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+c;$$

$$\int\frac{3dx}{x}=3\ln|x|+c.$$

Тогда

$$\ln|z|=3\ln|y|+\tilde{c};$$

$$\ln|z| = \ln\left|y^3\right| + \ln|c|.$$

Значит, общее решение однородного уравнения

$$z_{\text{о.о}} = cy^3$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$z_{\text{ч.н}} = c(y)y^3.$$

Тогда

$$z'_{\text{ч.н.}} = c'(y)y^3 + c(y)3y^2.$$

Подставим $z_{\text{ч.н}}$ и $z'_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$c'(y)y^3 + c(y)3y^2 - \frac{3c(y)y^3}{y} = e^y y^3;$$

$$c'(y)y^3 = e^y y^3;$$

$$c'(y) = e^y;$$

$$c(y) = \int e^y dy = e^y + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$z_{\text{ч.н}} = c(y)y^3 = e^y y^3.$$

Так как $z = z_{\text{о.о}} + z_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$z = cy^3 + e^y y^3.$$

Сделаем обратную замену $z = \dfrac{1}{x^4}$, тогда общее решение нашего уравнения

$$\frac{1}{x^4} = cy^3 + e^y y^3.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Для этого найдем константу c, подставив $x = 1$ и $y = 1$ в найденное общее решение уравнения:

$$1 = c + e \Rightarrow c = 1 - e.$$

Итак, решение задачи Коши

$$\frac{1}{x^4} = (1-e)y^3 + e^y y^3 .$$

3.7. Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е.

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Тогда уравнение можно записать в виде

$$du(x, y) = 0.$$

Поэтому его общий интеграл имеет вид

$$u(x, y) = c.$$

Чтобы левая часть рассматриваемого уравнения являлась полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы в области, где ищется решение, существовали непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ и выполнялось условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} .$$

Функция $u(x, y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя, например, равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ по x при фиксированном значении y, получаем

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx = g(x, y) + \varphi(y) .$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x, y)\right) + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

находим функцию $\varphi(y)$.

Пример 3.21. Решить задачу Коши: $(2x+ye^{xy})dx+(1+xe^{xy})dy =$ $= 0$, $y(0) = 1$.

Решение

В данном случае

$$P(x,y)=2x+ye^{xy};$$
$$Q(x,y)=1+xe^{xy}.$$

Найдем частные производные

$$P\left(x,y\right)=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=e^{xy}+yxe^{xy};$$
$$Q\left(x,y\right)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}.$$

Таким образом, получили

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и, значит, имеет вид $du(x, y) = 0$, где

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ye^{xy};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=1+xe^{xy}.$$

Тогда

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(2x+ye^{xy}\right)dx=\frac{2x^2}{2}+y\frac{e^{xy}}{y}+c(y)=x^2+e^{xy}+c(y).$$

Найдем частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+e^{xy}+c(y))'_y=xe^{xy}+c'(y)=Q(x,y).$$

Следовательно,

$$xe^{xy}+c'(y)=1+xe^{xy};$$
$$c'(y)=1.$$

Откуда

$$c(y) = y + c_1.$$

Значит, общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид

$$x^2 + e^{xy} + y = c.$$

Найдем частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$. Для этого, подставив $x = 0$ и $y = 1$ в найденное ранее выражение, найдем константу c:

$$0 + e^0 + 1 = c \Rightarrow c = 2.$$

Итак, частный интеграл данного уравнения

$$x^2 + e^{xy} + y = 2.$$

Пример 3.22. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

Решение

В данном случае

$$P(x, y) = \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1;$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}\right).$$

Таким образом, получили

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и, значит, имеет вид $du(x, y) = 0$, где

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1;$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}.$$

Тогда

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{y}dx=d\left(\frac{x}{y}\right);\\ \left(\frac{y}{x}\right)'_x=-\frac{y}{x^2}\Rightarrow-\frac{y}{x^2}dx=d\left(\frac{y}{x}\right)\end{array}\right|=\int\sin\frac{x}{y}d\left(\frac{x}{y}\right)+$$

$$+\int\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+x+c(y)=-\cos\frac{x}{y}+\sin\frac{y}{x}+x+c(y).$$

Найдем частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\cos\frac{x}{y}+\sin\frac{y}{x}+x+c(y)\right)'_y=$$

$$=\sin\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+c'(y)=Q(x,y).$$

Следовательно,

$$-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+c'(y)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2};$$

$$c'(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Откуда

$$c(y)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+c_1.$$

Значит, общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид

$$\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=c.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение $F(x, y, y',\ldots, y^{(n)}) = 0$, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y\,(x)$ и ее первые n производные $y'(x)$, …, $y^{(n)}(x)$ называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.*

Если уравнение $F(x, y, y',\ldots, y^{(n)}) = 0$ можно записать в виде $y^{(n)} = f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a, b) является такая функция $y = y(x)$, n раз дифференцируемая на (a, b), которая при подстановке в данное уравнение обращает его в истинное на интервале (a, b) тождество.

Задачей Коши называется задача нахождения решения $y = y(x)$, для дифференциального уравнения $F(x, y, y',\ldots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема существования и единственности

Если дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ таково, что функция $f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна по всем аргументам $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$,

то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ существует такой интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$, на котором существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такая функция $y = y(x, c_1, c_2,\ldots, c_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $c_1, c_2,\ldots, c_n$ является решением этого дифференциального уравнения и такая, что для любой задачи Коши найдутся постоянные $c_1, c_2,\ldots, c_n$, определяемые из системы уравнений

$$y_0 = y(x_0, c_1, c_2, ..., c_n);$$

$$y'_0 = y'(x_0, c_1, c_2, ..., c_n);,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, ..., c_n).$$

Всякое решение, полученное из общего решения при конкретных значениях постоянных c_1, c_2,…, c_n, называют *частным решением* этого уравнения.

Уравнение вида $\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, определяющее общее решение $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, как неявную функцию, называют *общим интегралом* дифференциального уравнения n-го порядка.

Для дифференциального уравнения второго порядка задача Коши состоит в нахождении решения $y = y\ (x)$, для дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0.$$

Геометрически это равносильно следующему. Требуется найти интегральную кривую уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$, угловой коэффициент касательной к которой в этой точке равен y'_0.

5. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

В некоторых частных случаях удается понизить порядок уравнения. Рассмотрим наиболее типичные случаи.

1. Уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решают n-кратным интегрированием функции $f(x)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\Big(\int f(x)dx\Big)dx + c_1x + c_2 \text{ и т.д.}$$

2. Уравнения вида

$$F(x, y^{(k)},\dots, y^{(n)}) = 0$$

в явном виде не содержат искомую функцию y и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно.

С помощью замены $y^{(\kappa)} = p(x)$ понижаем порядок уравнения на k единиц. Затем исходную функцию $y(x)$ получаем k-кратным интегрированием найденной функции $p(x)$.

3. Уравнения вида

$$F(y, y',\dots, y^{(n)}) = 0$$

не содержат в явном виде независимую переменную x. Порядок этого уравнения можно понизить на одну единицу заменой $y' = p(y)$. За новый аргумент принимаем y, тогда y', y'', …, $y^{(n)}$ находят по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'' = pp',\ y''' = p\left(p'\right)^2 + p^2p'',$$

где $p' = \dfrac{dp}{dy},\ p'' = \dfrac{d^2p}{dy^2}$.

Заметим, что при решении задачи Коши для уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка, определять значения постоянных c_i удобнее в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения. Это связано с тем, что интегрирование может значительно упроститься, когда постоянные c_i принимают числовые значения.

Пример 5.1. Решить задачу Коши: $y^{(IV)} = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$.

Решение

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1;$$

$$y'' = \int\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1\right)dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + c_1 x + c_2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x + c_1 x + c_2;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x + c_1 x + c_2\right)dx = \frac{1}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8}\frac{\sin 2x}{2} + c_1\frac{x^2}{2} + +c_2 x + c_3 =$$

$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 =$$

$$= \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{32}\cos 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения

$$y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{32}\cos 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого найдем константы c_1, c_2, c_3 и c_4, подставив $x = 0$, $y = \frac{1}{32}$, $y' = 0$, $y'' = \frac{1}{8}$ и $y''' = 0$ в найденное общее решение уравнения и в производные:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{48}\cdot 0 + \dfrac{1}{32}\cos 0 + c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 + c_3\cdot 0 + c_4, \\ 0 = \dfrac{1}{12}\cdot 0 - \dfrac{1}{16}\sin 0 + c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 + c_3, \\ \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}\cdot 0 - \dfrac{1}{8}\cos 0 + c_1\cdot 0 + c_2, \\ 0 = \dfrac{1}{2}\cdot 0 + \dfrac{1}{4}\sin 0 + c_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{32} + c_4, \\ 0 = c_3 \\ \dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{8} + c_2, \\ 0 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 0, \\ c_2 = \dfrac{1}{4}, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Получили решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{8}x^2.$$

Пример 5.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'''y'' = y''^2 - a^2$.

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде искомую функцию y и ее первую производную y'.

Сделаем замену $y'' = p(x)$, тогда $y''' = p'(x)$. Подставим их в исходное уравнение:

$$2xp'p = p^2 - a^2.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Представим $p' = \dfrac{dp}{dx}$. Тогда

$$2xp\frac{dp}{dx} = p^2 - a^2.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$2xpdp = \left(p^2 - a^2\right)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $x(p^2 - a^2)$, при этом можем потерять решения $p = \pm a$:

$$2\frac{pdp}{p^2 - a^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{2pdp}{p^2 - a^2} = \left| \begin{matrix} p^2 - a^2 = z; \\ 2pdp = dz \end{matrix} \right| = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln\left|p^2 - a^2\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Тогда

$$\ln\left|p^2 - a^2\right| = \ln|x| + \tilde{c}_1;$$

$$\ln\left|p^2 - a^2\right| = \ln|x| + \ln c_1;$$

$$p^2 - a^2 = c_1 x.$$

Заметим, что решение $p = \pm a$ содержится в общем интеграле при $c_1 = 0$. Выразим p из общего интеграла:

$$p = \pm\sqrt{c_1 x + a^2}.$$

Подставим $y'' = p(x)$:

$$y'' = \pm\sqrt{c_1 x + a^2}.$$

Тогда

$$y' = \pm\int\sqrt{c_1 x + a^2}\,dx = \left| \begin{matrix} t = c_1 x + a^2, \\ dt = c_1 dx, \\ dx = \dfrac{dt}{c_1} \end{matrix} \right| = \pm\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{c_1} = \pm\frac{1}{c_1}\int\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \pm\frac{1}{c_1}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_2 = \pm\frac{2}{3c_1}t^{\frac{3}{2}} + c_2 = \pm\frac{2}{3c_1}\sqrt{\left(c_1 x + a^2\right)^3} + c_2.$$

$$y=\int\left(\pm\frac{2}{3c_1}\sqrt{\left(c_1x+a^2\right)^3}+c_2\right)dx=\pm\frac{2}{3c_1}\int\sqrt{\left(c_1x+a^2\right)^3}\,dx+c_2\int dx=$$

$$=\left|\begin{aligned}&t=c_1x+a^2,\\&dx=\frac{dt}{c_1}\end{aligned}\right|=\pm\frac{2}{3c_1}\int\sqrt{t^3}\,\frac{dt}{c_1}+c_2x=\pm\frac{2}{3c_1^2}\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+c_2x+c_3=$$

$$=\pm\frac{4}{15c_1^2}\sqrt{t^5}+c_2x+c_3=\pm\frac{4}{15c_1^2}\sqrt{\left(c_1x+a^2\right)^5}+c_2x+c_3.$$

Итак, общее решение данного уравнения:

$$y=\pm\frac{4}{15c_1^2}\sqrt{\left(c_1x+a^2\right)^5}+c_2x+c_3.$$

Пример 5.3. Решить задачу Коши:

$$\left(1+x^2\right)y''-2xy'=\left(1+x^2\right)^2e^x,\ y(0)=0 \text{ и } y'(0)=3.$$

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде искомую функцию y. Сделаем замену $y'=p(x)$, тогда $y''=p'(x)$. Подставим в исходное уравнение:

$$(1+x^2)\,p'-2xp=\left(1+x^2\right)^2e^x.$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\left(1+x^2\right)p'-2xp=0,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Подставим $p'=\dfrac{dp}{dx}$:

$$\left(1+x^2\right)\frac{dp}{dx}=2xp.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$\left(1+x^2\right)dp=2xpdx.$$

Разделим обе части уравнения на $(1 + x^2)p$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dp}{p} = \ln|\, p\,| + c;$$

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \ln\left|1+x^2\right| + c\,.$$

Тогда

$$\ln|p| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln|c_1|\,;$$

$$p = c_1\left(1+x^2\right).$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$p_{\text{о.о}} = c_1\left(1+x^2\right).$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$p_{\text{ч.н.}} = c(x)\left(1+x^2\right)$$

Тогда

$$p'_{\text{ч.н.}} = c'(x)\left(1+x^2\right) + 2xc(x)\,.$$

Подставим $p_{\text{ч.н}}$ и $p'_{\text{ч.н}}$ в линейное неоднородное уравнение:

$$(1+x^2)\left(c'(x)\left(1+x^2\right) + 2xc(x)\right) - 2xc(x)\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)^2 e^x;$$

$$c'(x)(1+x^2)^2 + 2xc(x)\left(1+x^2\right) - 2xc(x)\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)^2 e^x;$$

$$c'(x)(1+x^2)^2 = \left(1+x^2\right)^2 e^x;$$

$$c'(x) = e^x.$$

Тогда

$$c(x) = \int e^x dx = e^x + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение

$$p_{\text{ч.н}} = c(x)\left(1+x^2\right) = e^x(1+x^2).$$

Так как $p = p_{\text{о.о}} + p_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$p = c_1\left(1+x^2\right) + e^x\left(1+x^2\right).$$

Подставим в найденное общее решение $y' = p$:

$$y' = c_1\left(1+x^2\right) + e^x\left(1+x^2\right).$$

Найдем константу c_1, подставив $x = 0$ и $y' = 3$ в полученное выше выражение:

$$3 = c_1(1+0^2) + e^0(1+0^2);$$

$$3 = c_1 + 1 \Rightarrow c_1 = 2.$$

Тогда

$$y' = 2\left(1+x^2\right) + e^x\left(1+x^2\right);$$

$$y = \int\left(2(1+x^2) + e^x(1+x^2)\right)dx = 2\int(1+x^2)dx + \int e^x(1+x^2)dx.$$

Найдем каждый из полученных интегралов:

$$2\int(1+x^2)dx = 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c;$$

$$\int e^x(1+x^2)dx = \left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям:}\\ u = 1+x^2; \quad du = 2xdx;\\ dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x\end{array}\right| = e^x(1+x^2) - \int 2xe^x dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям:}\\ u = 2x; \quad du = 2dx;\\ dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x\end{array}\right| = e^x(1+x^2) - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) =$$

$$= e^x(1+x^2) - 2xe^x + 2e^x + c = e^x(1+x^2 - 2x + 2) + c =$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 3) + c.$$

Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + e^x(x^2 - 2x + 3) + c_2 .$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$. Для этого найдем константу c_2, подставив $x = 0$, $y = 0$ в найденное общее решение уравнения:

$$0 = 3\left(0 + \frac{0^3}{3}\right) + e^0(0^2 - 2 \cdot 0 + 3) + c_2 \Rightarrow c_2 = -3.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + e^x(x^2 - 2x + 3) - 3 .$$

Пример 5.4. Решить задачу Коши:

$$y'' + y' = (x+1)e^{2x},\ y(0) = 1 \text{ и } y'(0) = -7/9.$$

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде искомую функцию y. Сделаем замену $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$p' + p = (x+1)e^{2x} .$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$p' + p = 0 .$$

Подставим $p' = \dfrac{dp}{dx}$:

$$\frac{dp}{dx} = -p .$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на p:

$$\frac{dp}{p} = -dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dz}{p} = \ln|\, p \,| + c;$$

$$-\int dx = -x + c.$$

Тогда

$$\ln|p| = -x + \tilde{c}\ .$$

Выразим p:

$$p = e^{\tilde{c}-x} = e^{\tilde{c}} e^{-x} = c_1 e^{-x}\ .$$

Получили общее решение однородного уравнения:

$$p_{\text{о.о}} = c_1 e^{-x}\ .$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение ищем в виде

$$p_{\text{ч.н}} = c(x) e^{-x}\ .$$

Тогда

$$p'_{\text{ч.н}} = c'(x) e^{-x} - c(x) e^{-x}\ .$$

Подставим $p_{\text{ч.н}}$ и $p'_{\text{ч.н}}$ в неоднородное уравнение:

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = (x+1)e^{2x}\ ;$$

$$c'(x)e^{-x} = (x+1)e^{2x}\ ;$$

$$c'(x) = (x+1)e^{3x}\ .$$

$$c(x) = \int (x+1)e^{3x} dx = \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям:} \\ x+1 = u,\ dx = du; \\ dv = e^{3x}dx,\ v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + c =$$

$$= \frac{1}{9}e^{3x}\left(3(x+1)-1\right) + c = \frac{1}{9}e^{3x}(3x+2) + c\ .$$

При $c = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$p_{\text{ч.н}} = c(x)e^{-x} = \frac{1}{9}e^{3x}(3x+2)e^{-x} = \frac{1}{9}e^{2x}(3x+2).$$

Так как $p = p_{\text{о.о}} + p_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$p = c_1 e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}(3x+2).$$

Сделаем обратную замену $y' = p$:

$$y' = c_1 e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}(3x+2).$$

Подставив $x = 0$ и $y' = -7/9$ в полученное выше выражение, найдем константу c_1:

$$-\frac{7}{9} = c_1 e^0 + \frac{1}{9}e^0(3\cdot 0+2) = c_1 + \frac{2}{9} \Rightarrow c_1 = -\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = -1.$$

Тогда

$$y' = -e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}(3x+2).$$

Следовательно,

$$y = \int\left(-e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}(3x+2)\right)dx = -\int e^{-x}dx + \frac{1}{9}\int e^{2x}(3x+2)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям:}\\ u = 3x+2,\ du = 3dx;\\ dv = e^{2x}dx,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right| = e^{-x} + \frac{1}{9}\left((3x+2)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}dx\right) =$$

$$= e^{-x} + \frac{1}{18}\left((3x+2)e^{2x} - 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right) + c_2 = e^{-x} + \frac{1}{18}e^{2x}(3x+2-\frac{3}{2}) + c_2 =$$

$$= e^{-x} + \frac{1}{36}e^{2x}(6x+1) + c_2.$$

Получили общее решение уравнения

$$y = e^{-x} + \frac{1}{36}e^{2x}(6x+1) + c_2 .$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого $x = 0$ и $y = 1$ подставим в найденное общее решение и найдем константу c_2:

$$1 = e^0 + \frac{1}{36}e^0(6\cdot 0+1) + c_2;$$

$$1 = 1 + \frac{1}{36} + c_2;$$

$$c_2 = -\frac{1}{36} .$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = e^{-x} + \frac{1}{36}e^{2x}(6x+1) - \frac{1}{36} .$$

Пример 5.5. Решить задачу Коши: $yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Сделаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = pp'$, где $p' = \frac{dp}{dy}$.

Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$ypp' = p^2 .$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Подставим $p' = \frac{dp}{dy}$:

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 .$$

Разделим обе части уравнения на p^2 (при делении можем потерять решение $p = 0$):

$$\frac{ydp}{pdy} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на dy и разделим на y:

$$\frac{ydp}{p} = dy;$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dz}{p} = \ln |\, p \,| + c;$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |\, y \,| + c.$$

Тогда

$$\ln |p| = \ln |y| + \tilde{c};$$

$$\ln |p| = \ln |y| + \ln |c_1|;$$

$$p = c_1 y\,.$$

Решение $p = 0$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_1 = 0$. Сделаем обратную замену $y' = p$:

$$y' = c_1 y.$$

Найдем константу c_1, подставив $y = 1$ и $y' = 2$ в полученное выше выражение:

$$2 = c_1\,.$$

Тогда

$$y' = 2y.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2y\,.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = 2ydx.$$

Разделим обе части уравнения на y (при этом можем потерять решение $y = 0$):

$$\frac{dy}{y} = 2dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dz}{y} = \ln|\, y\,| + c;$$

$$\int 2dx = 2x + c.$$

Тогда

$$\ln|y| = 2x + \tilde{c}_2;$$

$$|y| = e^{2x+\tilde{c}_2} = e^{\tilde{c}_2} e^{2x}.$$

$$y = c_2 e^{2x}.$$

Получили общее решение заданного уравнения (решение $y = 0$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_2 = 0$):

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение и найдем константу c_2:

$$1 = c_2 e^0 \Rightarrow c_2 = 1.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = e^{2x}.$$

Пример 5.6. Решить задачу Коши: $yy'' - y'(1 + y') = 0$, $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Сделаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = pp'$, где $p' = \dfrac{dp}{dy}$.

Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$ypp' = p(1 + p).$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Подставим $p' = \dfrac{dp}{dy}$:

$$yp\frac{dp}{dy} = p(1+p).$$

Разделим обе части уравнения на $p\,(1 + p)$ (при делении можем потерять решения $p = 0$ и $p = –1$):

$$\frac{ydp}{(p+1)dy} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на dy и разделим на y:

$$\frac{ydp}{p+1} = dy;$$

$$\frac{dp}{p+1} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{dp}{p+1} = \ln\left|\,p+1\right| + c;$$

$$\int\frac{dy}{y} = \ln\left|\,y\,\right| + c.$$

Тогда

$$\ln\left|p+1\right| = \ln\left|y\right| + \tilde{c};$$

$$\ln\left|p+1\right| = \ln\left|y\right| + \ln\left|c_1\right|;$$

$$p+1 = c_1 y.$$

Решение $p = –1$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_1 = 0$, особое решение $p = 0$ не содержится в решении ни при каком значении константы c_1. Следовательно, получили решение уравнения

$$p = c_1 y - 1,\ p = 0.$$

Подставив $y' = p$ в совокупность, получим:

$$y' = c_1 y - 1,\ y' = 0.$$

Найдем константу c_1, подставив $y = 1$ и $y' = 2$ в полученное выше выражение:

$$2 = c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = 3.$$

Тогда

$$y' = 3y - 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 1.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = (3y - 1)dx .$$

Разделим обе части уравнения на $(3y – 1)$ (при этом можем потерять решение $y = \frac{1}{3}$):

$$\frac{dy}{3y-1} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{3y-1} = \frac{1}{3}\ln|3y-1| + c;$$

$$\int dx = x + c.$$

Тогда

$$\frac{1}{3}\ln|3y-1| = x + \tilde{c}_2;$$

$$\ln|3y-1| = 3x + 3\tilde{c}_2;$$

$$3y - 1 = c_2 e^{3x}.$$

Решение $y = \frac{1}{3}$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_2 = 0$.

Итак, общее решение заданного уравнения

$$3y = 1 + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение уравнения и найдем константу c_2:

$$3 = 1 + c_2 e^0 \Rightarrow c_2 = 2.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{3x} .$$

Пример 5.7. Решить задачу Коши:

$$2(y')^2 = y''(2y - 5) \text{ , } y(0) = 1 \text{ и } y'(0) = 2.$$

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Сделаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = pp'$, где $p' = \frac{dp}{dy}$.

Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$2p^2 = pp'(2y - 5).$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Подставим $p' = \frac{dp}{dy}$:

$$2p^2 = p\frac{dp}{dy}(2y - 5) .$$

Разделим обе части уравнения на p^2 (при этом можем потерять решение $p = 0$):

$$2 = \frac{(2y - 5)dp}{pdy} .$$

Умножим обе части уравнения на dy, а затем разделим на $(2y - 5)$:

$$2dy = \frac{(2y - 5)dp}{p};$$

$$\frac{2dy}{2y - 5} = \frac{dp}{p} .$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dp}{p} = \ln|\, p\,| + c;$$

$$\int \frac{2dy}{2y-5} = \int \frac{d(2y-5)}{2y-5} = \ln|\,2y-5\,| + c.$$

Тогда

$$\ln|p| = \ln|2y-5| + \tilde{c}\ ;$$

$$\ln|p| = \ln|2y-5| + \ln c_1\,;$$

$$\ln|p| = \ln|c_1(2y-5)|\ ;$$

$$p = c_1(2y-5)\ .$$

Решение $p = 0$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_1 = 0$. Сделаем обратную замену $y' = p$:

$$y' = c_1(2y-5)\,.$$

Подставив $y = 1$ и $y' = 2$ в полученное выше выражение, найдем константу c_1:

$$2 = c_1(2-5) \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3}\,.$$

Тогда

$$y' = -\frac{2}{3}(2y-5)\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}(2y-5)\,.$$

Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $(2y - 5)$ (при этом можем потерять решение $y = \dfrac{5}{2}$):

$$\frac{dy}{2y-5} = -\frac{2}{3}dx\,.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{2y-5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2y-5)}{2y-5} = \frac{1}{2}\ln|\,2y-5\,| + c;$$

$$\int dx = x + c.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\ln|2y-5| = -\frac{2}{3}x + \tilde{c}_2;$$

$$\ln|2y-5| = -\frac{4}{3}x + 2\tilde{c}_2;$$

$$2y-5 = e^{2\tilde{c}_2 - \frac{4}{3}x};$$

$$2y-5 = c_2 e^{-\frac{4}{3}x};$$

$$y = \frac{1}{2}\left(5 + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}\right).$$

Решение $y = \frac{5}{2}$ мы не потеряли, так как оно содержится в общем решении при $c_2 = 0$.

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение и найдем константу c_2:

$$1 = \frac{1}{2}\left(5 + c_2 e^0\right) \quad \Rightarrow c_2 = 2(1 - \frac{5}{2}) = -3.$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{2}\left(5 - 3e^{-\frac{4}{3}x}\right).$$

Пример 5.8. Решить задачу Коши

$$2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2, \; y(0) = 1 \text{ и } y'(0) = 1.$$

Решение

Данное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Сделаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = pp'$, где $p' = \frac{dp}{dy}$.

Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$2ypp' - 3p^2 = 4y^2 .$$

Получили уравнение Бернулли. Сделаем замену $p^2 = z$, тогда $2pp' = z'$. После подстановки в исходное уравнение получим линейное уравнение

$$yz' - 3z = 4y^2 .$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$yz' - 3z = 0,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению. Подставим $z' = \dfrac{dz}{dy}$:

$$y\frac{dz}{dy} = 3z.$$

Умножим обе части уравнения на dy:

$$ydz = 3zdy.$$

Разделим обе части уравнения на yz:

$$\frac{dz}{z} = \frac{3dy}{y}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\frac{dz}{z} = \ln|\,z\,| + c;$$

$$\int\frac{dy}{y} = \ln|\,y\,| + c.$$

Тогда

$$\ln|z| = 3\ln|y| + \tilde{c}_1 ;$$

$$\ln|z| = 3\ln|y| + \ln|c_1| .$$

$$z = c_1 y^3 .$$

Получили общее решение однородного уравнения

$$z_{\text{о.о}} = c_1 y^3 .$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$z_{\text{ч.н}} = c(y) y^3 .$$

Тогда

$$z'_{\text{ч.н}} = c'(y) y^3 + 3y^2 c(y) .$$

Подставим $z_{\text{ч.н}}$ и $z'_{\text{ч.н}}$ в линейное неоднородное уравнение:

$$y\left(c'(y)y^3 + 3y^2c(y)\right) - 3c(y)y^3 = 4y^2;$$
$$c'(y)y^4 + 3c(y)y^3 - 3c(y)y^3 = 4y^2;$$
$$c'(y)y^4 = 4y^2;$$
$$c'(y) = \frac{4}{y^2} .$$

Тогда

$$c(x) = \int \frac{4}{y^2} dx = -\frac{4}{y} + c.$$

При $c = 0$ получим частное решение:

$$z_{\text{ч.н}} = c(y)y^3 = -\frac{4}{y} y^3 = -4y^2 .$$

Так как $z = z_{\text{о.о}} + z_{\text{ч.н}}$, то общее решение уравнения $yz' - 3z = 4y^2$

$$z = c_1 y^3 - 4y^2 .$$

Сделаем обратную замену $p^2 = z$. Тогда получим

$$p^2 = c_1 y^3 - 4y^2 .$$

Выразим отсюда p:

$$p = \pm\sqrt{c_1 y^3 - 4y^2} .$$

Подставим $y' = p$:

$$y' = \pm\sqrt{c_1 y^3 - 4y^2}\ .$$

Так как по условию задачи $y'(0) = 1 > 0$, то перед корнем выбираем знак «+»:

$$y' = \sqrt{c_1 y^3 - 4y^2}\ .$$

Подставив $y = 1$ и $y' = 1$ в полученное выше выражение, найдем константу c_1:

$$1 = \sqrt{c_1 - 4}\ ;$$

$$1 = c_1 - 4 \Rightarrow c_1 = 5\ .$$

Тогда

$$y' = \sqrt{5y^3 - 4y^2} = |y|\sqrt{5y-4} = y\sqrt{5y-4}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{5y-4}\ .$$

Разделим обе части уравнения на $y\sqrt{5y-4}$ и умножим на dx:

$$\frac{dy}{y\sqrt{5y-4}} = dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int dx = x + c;$$

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{5y-4}} = \left|\begin{matrix} 5y-4=t^2; \\ y=\dfrac{t^2+4}{5}; \\ dy=\dfrac{2tdt}{5} \end{matrix}\right| = \int\frac{2tdt}{5\left(\dfrac{t^2+4}{5}\right)t} = \int\frac{2dt}{t^2+4} = 2\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5y-4}}{2} + c.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5y-4}}{2}=x+c_2.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$ в найденное общее решение и найдем константу c_2:

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5\cdot 1-4}}{2}=0+c_2;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=c_2.$$

Итак, решение задачи Коши

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5y-4}}{2}=x+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

6. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА

Линейным однородным дифференциальным уравнения n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех ее производных. Оно имеет вид

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_n(x)y = 0,$$

где $P_i(x)$ – непрерывные на интервале (a, b) функции ($i = 0,1,2, ..., n$).

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называют *линейно зависимыми* на интервале (a, b), если существуют такие константы c_1, c_2, …, c_n, не равные одновременно нулю $\left(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 > 0\right)$, что для всех значений переменной x из интервала (a, b) справедливо равенство

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 .$$

Если же это тождество выполняется только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, то данные функции называются *линейно независимыми* на интервале (a, b).

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка. Функциональный определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b), то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале.

Совокупность любых n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется его *фундаментальной системой решений*.

Определитель Вронского фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены.

Общее решение однородного уравнения n-го порядка имеет вид

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x),$$

где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимые решения уравнения, образующие фундаментальную систему решений.

Пример 6.1. Показать, что система функций $\left\{e^{-3x}\cos x, e^{-3x}\sin 2x\right\}$ линейно независима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Решение

Доказываем методом от противного. Предположим, что система функций $\left\{e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x\right\}$ линейно зависима на интервале $-\infty < x < \infty$. Тогда по определению существуют такие константы α и β, не равные одновременно нулю $\left(\alpha^2 + \beta^2 > 0\right)$ такие, что

$$\alpha e^{-3x}\cos 2x + \beta e^{-3x}\sin 2x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-3x} \neq 0$:

$$\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x = 0.$$

Подставив $x = 0$, получим

$$\alpha\cos 0 + \beta\sin 0 = 0;$$

$$\alpha = 0.$$

Если подставить $\alpha = 0$ в уравнение $\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x = 0$, то получим $\beta = 0$ (так как функция $\sin 2x$ тождественно не равна нулю). Таким образом, получили, что равенство нулю линейной комбинации функций $e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x$ возможно только в случае $\alpha = \beta = 0$. Значит, предположение о линейной зависимости данной системы функций привело к противоречию, следовательно, система функций $\left\{e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x\right\}$ линейно независима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Пример 6.2. Показать, что система функций $\left\{e^{x}, e^{2x}, e^{3x}\right\}$ линейно независима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Решение

Доказываем методом от противного. Предположим, что система функций $\left\{e^{x}, e^{2x}, e^{3x}\right\}$ линейно зависима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Тогда по определению существуют такие константы α, β и γ, не равные одновременно нулю $\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0\right)$, такие, что

$$\alpha e^x+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $e^x \neq 0$:

$$\alpha+\beta e^x+\gamma e^{2x}=0.$$

Дифференцировав тождество, получим

$$\beta e^x+2\gamma e^{2x}=0.$$

Разделим обе части уравнения на e^x:

$$\beta+2\gamma e^x=0.$$

Дифференцировав тождество, получим

$$2\gamma e^x=0.$$

Так как $e^x > 0$, то $\gamma = 0$. Подставив $\gamma = 0$ в уравнение $\beta+2\gamma e^x=0$, получим, что $\beta = 0$. Затем, подставим $\beta = 0$ и $\gamma = 0$ в уравнение $\alpha+\beta e^x+\gamma e^{2x}=0$ и получим, что и $\alpha = 0$. Таким образом, получили, что равенство нулю линейной комбинации функций e^x, e^{2x}, e^{3x} возможно только в случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Значит, предположение о линейной зависимости данной системы функций привело к противоречию, следовательно, система функций $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$ линейно независима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Пример 6.3. Найти определитель Вронского для системы функций $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$.

Решение

Пусть

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{2x},\ y_3(x) = e^{3x}.$$

Тогда

$$y'_1(x) = e^x,\ y'_2(x) = 2e^{2x},\ y'_3(x) = 3e^{3x};$$
$$y''_1(x) = e^x,\ y''_2(x) = 4e^{2x},\ y''_3(x) = 9e^{3x}.$$

Составим определитель Вронского для системы функций $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя воспользуемся свойством, что умножение всех элементов некоторого столбца на число не равное нулю равносильно умножению определителя на это число. Из первого столбца вынесем множитель e^x, из второго столбца – множитель e^{2x}, а из третьего – e^{3x}. Затем, из второй и третьей строки вычтем первую и разложим определитель по элементам первого столбца.

Тогда

$$W(x)=e^x e^{2x} e^{3x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=e^{6x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}=e^{6x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=e^{6x}(8-6)=2e^{6x}.$$

Заметим, что определитель Вронского этой системы не равен нулю ни при каком значении переменной x, а значит, система функций $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$ линейно независима на интервале $-\infty < x < \infty$.

Пример 6.4. Показать, что $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$ является общим решением дифференциального уравнения $y'''-4y'=0$.

Решение

Убедимся в том, что функции $y_1=1, y_2=e^{2x}, y_3=e^{-2x}$ являются решениями данного уравнения.

Пусть $y_1=1$. Так как $y_1'=y_1''=y_1'''=0$, то при подстановке в уравнение $y'''-4y'=0$ получим истинное тождество 0 = 0.

Пусть $y_2=e^{2x}$. Так как $y_2'=2e^{2x}, y_2''=4e^{2x}, y_2'''=8e^{2x}$, то при подстановке в уравнение $y'''-4y'=0$ получим истинное тождество $8e^{2x}-4\cdot 2e^{2x}=0$.

Пусть $y_3=e^{-2x}$. Так как $y_3'=-2e^{-2x}, y_3''=4e^{-2x}, y_3'''=-8e^{-2x}$, то при подстановке в уравнение $y'''-4y'=0$ получим истинное тождество $-8e^{-2x}-4\cdot(-2e^{-2x})=0$.

Следовательно, $y_1=1, y_2=e^{2x}, y_3=e^{-2x}$ – частные решения данного уравнения. Данные частные решения линейно независимы, так как определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix}=$$

$$=8+8=16\neq 0.$$

Значит, функции 1, e^{2x}, e^{-2x} составляют фундаментальную систему решений уравнения $y'''-4y'=0$, и, следовательно, $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$ является общим решением данного уравнения.

Пример 6.5. Выяснить, составляют ли функции $e^{3x}, e^{-3x}, \operatorname{sh}3x$ фундаментальную систему решений уравнения $y'''-9y'=0$.

Решение

Убедимся в том, что функции $y_1=e^{3x}, y_2=e^{-3x}, y_3=\operatorname{sh}3x$ являются решениями данного уравнения.

Пусть $y_1=e^{3x}$. Так как $y_1'=3e^{3x}, y_1''=9e^{3x}, y_1'''=27e^{3x}$, то при подстановке в уравнение $y'''-9y'=0$ получим истинное тождество $27e^{3x}-9\cdot 3e^{3x}=0$.

Пусть $y_2=e^{-3x}$. Так как $y_2'=-3e^{-3x}, y_2''=9e^{-3x}, y_2'''=-27e^{-3x}$, то при подстановке в уравнение $y'''-9y'=0$ получим истинное тождество $-27e^{-3x}-9\cdot(-3e^{-3x})=0$.

Пусть $y_3=\operatorname{sh}3x$. Так как $y_3'=3\operatorname{ch}3x, y_2''=9\operatorname{sh}3x, y_2'''=27\operatorname{ch}3x$, то при подстановке их в уравнение $y'''-9y'=0$ получим истинное тождество $27\operatorname{ch}3x-9\cdot 3\operatorname{ch}3x=0$.

Следовательно, $y_1=e^{3x}, y_2=e^{-3x}, y_3=\operatorname{sh}3x$ – частные решения данного уравнения. Составим определитель Вронского:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} & \operatorname{sh}3x \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} & 3\operatorname{ch}3x \\ 9e^{3x} & 9e^{-3x} & 9\operatorname{sh}3x \end{vmatrix}=$$

$$=27\cdot\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} & \operatorname{sh}3x \\ e^{3x} & -e^{-3x} & \operatorname{ch}3x \\ e^{3x} & e^{-3x} & \operatorname{sh}3x \end{vmatrix}=0.$$

Определитель Вронского тождественно равен нулю, так как он содержит две одинаковые строки. Следовательно, данные функции линейно зависимы, а значит, не могут составлять фундаментальную систему решений данного уравнения.

Пример 6.6. Найти определитель Вронского для системы функций $\left\{e^x, x^2e^x\right\}$. Доказать, что на некотором интервале данные функции линейно независимы, составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой и записать общее решение полученного уравнения.

Решение

Пусть

$$y_1 = e^x, y_2 = x^2e^x.$$

Тогда

$$y_1' = e^x, y_2' = x^2e^x + 2xe^x.$$

Составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & x^2e^x + 2xe^x \end{vmatrix} = e^x(x^2e^x + 2xe^x) -$$

$$-e^x x^2e^x = e^{2x}(x^2 + 2x - x^2) = 2xe^{2x}.$$

Так как определитель Вронского не равен нулю при $x \neq 0$, то данная система функций линейно независима на интервале $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, а значит, образует на этом интервале фундаментальную систему решений некоторого однородного дифференциального уравнения второго порядка, общим решением которого является функция $y = c_1e^x + c_2x^2e^x$. Составим это уравнение.

Так как $y = c_1e^x + c_2x^2e^x$, то $c_1e^x + c_2x^2e^x - y = 0$, а значит, функции y, e^x, x^2e^x линейно зависимы, и, следовательно, определитель Вронского системы функций $\left\{y, e^x, x^2e^x\right\}$ должен быть равен нулю.

Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & e^x & x^2e^x \\ y' & e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ y'' & e^x & x^2e^x + 2xe^x + 2xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & e^x & x^2e^x \\ y' & e^x & e^x\left(x^2 + 2x\right) \\ y'' & e^x & e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Из второго столбца вынесем множитель e^x, из третьего столбца – множитель e^x. Затем из второй и третьей строки вычтем первую и разложим определитель по элементам второго столбца:

$$W(x)=e^{2x}\begin{vmatrix} y & 1 & x^2 \\ y' & 1 & x^2+2x \\ y'' & 1 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=e^{2x}\begin{vmatrix} y & 1 & x^2 \\ y'-y & 0 & 2x \\ y''-y & 0 & 4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=-e^{2x}\begin{vmatrix} y'-y & 2x \\ y''-y & 4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=-e^{2x}\left((y'-y)(4x+2)-2x(y''-y)\right)=0.$$

Так как $e^{2x}\neq 0$, то разделим обе части тождества на $-e^{2x}$:

$$(y'-y)(4x+2)-2x(y''-y)=0;$$
$$-2xy''+(4x+2)y'+y(2x-4x-2)=0;$$
$$xy''-(2x+1)y'+y(x+1)=0.$$

Итак, получили линейное однородное дифференциальное уравнение

$$xy''-(2x+1)y'+y(x+1)=0,$$

для которого система функций $\left\{e^x, x^2e^x\right\}$ является фундаментальной системой, и $y=c_1e^x+c_2x^2e^x$ – общее решение полученного уравнения.

Пример 6.7. Найти определитель Вронского для системы функций $\left\{x, x^3, e^x\right\}$. Доказать, что на некотором интервале данные функции линейно независимы, составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой и записать общее решение полученного уравнения.

Решение

Пусть

$$y_1=x, y_2=x^3, y_3=e^x.$$

Тогда

$$y_1'=1, y_2'=3x^2, y_3'=e^x;$$
$$y_1''=0, y_2''=6x, y_3''=e^x.$$

Составим определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^3 & e^x \\ 1 & 3x^2 & e^x \\ 0 & 6x & e^x \end{vmatrix}.$$

Из третьего столбца вынесем множитель e^x, а затем, из второй и третьей строки вычтем первую и разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$W(x)=e^x\begin{vmatrix} x & x^3 & 1 \\ 1 & 3x^2 & 1 \\ 0 & 6x & 1 \end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix} x & x^3 & 1 \\ 1-x & 3x^2-x^3 & 0 \\ -x & 6x-x^3 & 0 \end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix} 1-x & 3x^2-x^3 \\ -x & 6x-x^3 \end{vmatrix}=$$

$$=e^x\left((1-x)(6x-x^3)+x(3x^2-x^3)\right)=e^x\left(6x-x^3-6x^2+x^4+3x^3-x^4\right)=$$

$$=e^x\left(6x-6x^2+2x^3\right)=2xe^x\left(3-3x+x^2\right).$$

Так как определитель Вронского не равен нулю при $x\neq 0$, то данная система функций линейно независима на интервале $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$, а значит, образует на этом интервале фундаментальную систему решений некоторого однородного дифференциального уравнения третьего порядка, общим решением которого является функция $y=c_1x+c_2x^3+c_3e^x$.

Так как $c_1x+c_2x^3+c_3e^x-y=0$, то функции y, x, x^3, e^x линейно зависимы, и, следовательно, определитель Вронского системы функций $\left\{y, x, x^3, e^x\right\}$ должен быть равен нулю. Тогда

$$W(x)=\begin{vmatrix} y & x & x^3 & e^x \\ y' & 1 & 3x^2 & e^x \\ y'' & 0 & 6x & e^x \\ y''' & 0 & 6 & e^x \end{vmatrix}=0.$$

Из четвертого столбца вынесем множитель e^x, а затем, из первой, второй и третьей строки вычтем четвертую и разложим определитель по элементам четвертого столбца:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y & x & x^3 & e^x \\ y' & 1 & 3x^2 & e^x \\ y'' & 0 & 6x & e^x \\ y''' & 0 & 6 & e^x \end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix} y & x & x^3 & 1 \\ y' & 1 & 3x^2 & 1 \\ y'' & 0 & 6x & 1 \\ y''' & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=e^x\begin{vmatrix} y-y''' & x & x^3-6 & 0 \\ y'-y''' & 1 & 3x^2-6 & 0 \\ y''-y''' & 0 & 6x-6 & 0 \\ y''' & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix} y-y''' & x & x^3-6 \\ y'-y''' & 1 & 3x^2-6 \\ y''-y''' & 0 & 6x-6 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$W(x)=e^x\left(-x\begin{vmatrix} y'-y''' & 3x^2-6 \\ y''-y''' & 6x-6 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} y-y''' & x^3-6 \\ y''-y''' & 6x-6 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=e^x\Big(-x\big((y'-y''')(6x-6)-(y''-y''')(3x^2-6)\big)+(y-y''')(6x-6)-$$

$$-(y''-y''')(x^3-6)\Big)=e^x\Big((y'-y''')(6x-6x^2)+(y''-y''')(3x^3-6x)+$$

$$+y(6x-6)-y'''(6x-6)-y''(x^3-6)+y'''(x^3-6)\Big)=$$

$$=e^x\Big(y'''(6x^2-6x-3x^3+6x-6x+6+x^3-6)+y''(3x^3-6x-x^3+6)+$$

$$+y'(6x-6x^2)+y(6x-6)\Big)=e^x\Big(y'''(6x^2-6x-2x^3)+y''(2x^3-6x+6)+$$

$$+y'(6x-6x^2)+y(6x-6)\Big)=0.$$

Так как $e^x\neq 0$, то разделим обе части тождества на e^x:

$$y'''(6x^2-6x-2x^3)+y''(2x^3-6x+6)+y'(-6x^2+6x)+y(6x-6)=0\,.$$

Разделим обе части тождества на -2:

$$y'''(x^3-3x^2+3x)-y''(x^3-3x+3)+y'(3x^2-3x)-y(3x-3)=0.$$

Итак, получили линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'''x(x^2-3x+3)-y''(x^3-3x+3)+3xy'(x-1)-3y(x-1)=0\,,$$

для которого система функций $\{x,\ x^3,\ e^x\}$ является фундаментальной системой, и $y=c_1x+c_2x^3+c_3e^x$ – общее решение полученного уравнения.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Известно, что квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом не имеет действительных решений. Например, уравнение

$$x^2 + 9 = 0$$

не имеет решений в области действительных чисел.

Часто бывает необходимо расширить множество вещественных чисел так, чтобы на этом множестве было разрешимо любое квадратное уравнение.

Выберем в Декартовой плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс OX и осью ординат OY. Тогда (a, b) − точка с абсциссой a и ординатой b. Для точек (a, b) и (c, d) определим сумму и произведение по следующим правилам:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Выбранная нами ось абсцисс, т.е. множество точек $(a, 0)$, ничем не отличается по своим свойствам от вещественной прямой, и мы полагаем $(a, 0) = a$. Для точки $(0, 1)$ на оси ординат вводится обозначение i «мнимой единицы», являющейся корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$:

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Произвольное комплексное число запишем в виде

$$z=(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)=x+iy;\ x,y\in \boldsymbol{R}.$$

Форма записи комплексного числа в виде $z = x + iy$, где $x, y \in \boldsymbol{R}$, называется *алгебраической формой записи*.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*. Множество комплексных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{C}$. Ось абсцисс плоскости $\boldsymbol{C}$ называется вещественной (или действительной) осью, а ось ординат – мнимой осью. Соответственно, в записи $z = x + iy$ число $x = \mathrm{Re}\, z$ – вещественная часть, а $y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть комплексного числа z. В геометрической интерпретации комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой с координатами (x, y) или радиусом-вектором этой точки (рис. 7.1).

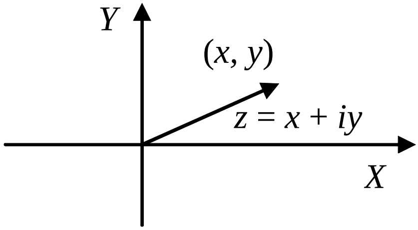

Рис. 7.1

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому комплексному числу $z = x + iy$ комплексно сопряженное с ним число $\overline{z} = x - iy$. Геометрически оно сводится к отражению плоскости $\boldsymbol{C}$ относительно действительной оси (рис. 7.2).

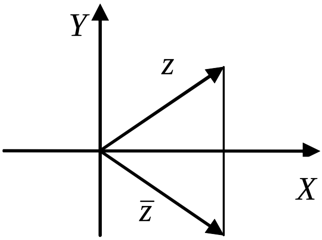

Рис. 7.2

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное вещественное число

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Положение точки (x, y) на плоскости, как известно, определяется заданием ее полярных координат: расстояние $r = |z|$ от начала координат до точки (x, y) и угол φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором, изображающим комплексное z. Угол φ называется *аргументом комплексного числа* z ($z \neq 0$) и обозначается Argz. Аргумент комплексного числа z определяется неоднозначно. Используется следующее обозначение:

$$\varphi = \mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z},$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Полярные координаты определяются по формулам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Тогда $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ − тригонометрическая форма комплексного числа z.

Если обозначить $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то комплексное число может быть записано в показательной форме $z = re^{i\varphi}$

Такая форма записи удобна для возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа.

Операции над комплексными числами и их свойства

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданными в алгебраической форме, определяются равенствами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2);$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на –1. Заметим, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняется следующим свойствам:

1) коммутативность:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

2) ассоциативность:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

3) дистрибутивность:

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Модуль произведения комплексных чисел z_1 и z_2 равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов множителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|;\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Аналогично,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Деление на множестве комплексных чисел вводится как операция, обратная умножению. *Частным* от деления двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z такое, что

$$zz_2 = z_1.$$

Практически частное от деления двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ может быть найдено следующим образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x^2{}_2 + y^2{}_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Из формулы для умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме легко выводится *формула Муавра*

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Пусть $n \in N,\ 0 \neq z \in C,\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$ Тогда существует ровно n различных корней n-й степени из z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

В частности, корни n-й степени из единицы выражаются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + \sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0,1,2,\ldots n-1.$$

Они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиуса 1.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

Многочленом n-й степени называется выражение вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

где $z \in \boldsymbol{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты многочлена (комплексные числа, причем $a_n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$).

Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

называется *алгебраическим уравнением n-й степени*.

Число z_0, для которого $P_n(z_0) = 0$, называется корнем (нулем) многочлена $P_n(z)$. Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ только в том случае, когда $P_n(z)$ делится без остатка на бином $(z - z_0)$, т. е.

$$P_n(z) = (z - z_0) Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z)$ – многочлен $(n - 1)$-й степени.

Число z_0 называют *корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k*, если

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Произвольный многочлен степени $n \geq 1$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, считаемых со своими кратностями.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_k$ – все действительные корни многочлена $P_n(z)$, кратности которых соответственно равны $r_1, r_2, \ldots, r_k$; а $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_m \pm i\beta_m$ – все пары комплексно сопряженных корней этого же многочлена кратности $s_1, s_2, \ldots, s_m$ соответственно. Тогда многочлен $P_n(z)$ может быть представлен в виде

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{r_1} \ldots (z - z_k)^{r_k} (z^2 + p_1 z + q_1)^{s_1} \ldots (z^2 + p_m z + q_m)^{s_m},$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_k + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$; $\alpha_i \pm i\beta_i$ – корни уравнения $z^2 + p_i z + q_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Пример 7.1. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1}$.

Решение

Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$z = -1 = \cos\pi + i \sin\pi.$$

Тогда по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1$$

получим

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+\sin\frac{\pi+2\pi k}{3},$$
$$k=0,1,2.$$

Итак,

$$w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$w_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$
$$w_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 7.2. Решить квадратное уравнение $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Решение

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ можно найти по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Тогда для уравнения $z^2 + 2z + 2 = 0$

$$D=4-4\cdot 2=-4<0.$$

Следовательно, корни комплексные сопряженные и

$$z_1=\frac{-4+\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4+2\sqrt{-1}}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i;\ z_2=\frac{-4-2i}{2}=-2-i.$$

Пример 7.3. Решить уравнение $(z + 1)^4 + 16 = 0$.

Решение

Выразим

$$(z+1)^4=-16.$$

Тогда

$$z+1=\sqrt[4]{-16}\,.$$

Найдем корни четвертой степени из −16. Запишем комплексное число w = –16 в тригонометрической форме:

$$w = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Тогда по формуле

$$\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1\,.$$

получим

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$w_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$w_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2};$$

$$w_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

Тогда корни уравнения найдем по формуле

$$z=-1+\sqrt[4]{-16}\,.$$

Итак,

$$z_0=-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2};\ z_1=-1-\sqrt{2}+i\sqrt{2};\ z_2=-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2};$$
$$z_3=-1+\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

8. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальное уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где a, b и c ($a \neq 0$) – действительные числа, называется *линейным однородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Квадратное уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0,$$

которое получается заменой $y'' = k^2$, $y' = k$, $y = 1$, называется *характеристическим уравнением*.

Для составления общего решения необходимо найти корни соответствующего характеристического уравнения, т.е. решить квадратное уравнение $ak^2 + bk + c = 0$.

Напомним формулы для нахождения корней квадратного уравнения. Сначала надо найти дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$. Тогда,

– если $D > 0$, то корни k_1 и k_2 действительные несовпадающие и

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

– если $D = 0$, то корни k_1 и k_2 действительные совпадающие и $k_1 = k_2 = -\frac{b}{2a}$;

– если $D < 0$, то корни k_1 и k_2 комплексные сопряженные и

$$k_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|D|}}{2a} i,$$

$$k_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|D|}}{2a} i;$$

Здесь $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ – действительная часть комплексного числа; $\beta = \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ – мнимая часть.

Тогда общее решение однородного уравнения $ay'' + by' + cy = 0$ находим по одной из формул:

1) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$,

если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 вещественные несовпадающие;

2) $y = (c_1 + c_2 x) e^{k_1 x}$,

если k_1 и k_2 вещественные совпадающие($k_1 = k_2$);

3) $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$,

если k_1 и k_2 комплексные, где $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$.

Пример 8.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение. Так как $D = 25 - 24 = 1$, то корни вещественные несовпадающие и

$$k_1 = \frac{5+1}{2} = 3, \ k_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Пример 8.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 9 = 0;$$

$$k^2 = -9.$$

$$k = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i.$$

Так как корни комплексные сопряженные, где $\alpha = 0$, $\beta = 3$, то общее решение будет иметь вид

$$y = e^{0\cdot x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x);$$
$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Пример 8.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение. Так как $D = 4 - 4 = 0$, то корни вещественные совпадающие и

$$k_1 = k_2 = -1.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

Пример 8.4. Решить задачу Коши: $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение. Так как $D = 36 - 4\cdot 13 =$ $= -16$, то корни комплексные сопряженные и

$$k_1 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i; \; k_2 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i.$$

Таким образом, $\alpha = -3$, $\beta = 2$. Тогда общее решение будет иметь вид

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычислим первую производную:

$$y' = -3e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-3x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x).$$

Затем найдем константы c_1 и c_2, подставив $x = 0$, $y = 1$, $y' = 3$ в найденное общее решение уравнения и в производную:

$$\begin{cases} 1 = e^0(c_1\cos 0 + c_2\sin 0), \\ 3 = -3e^0(c_1\cos 0 + c_2\sin 0) + e^0(-2c_1\sin 0 + 2c_2\cos 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1, \\ 3 = -3c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 3. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$y = e^{-3x}(\cos 2x + 3\sin 2x)\,.$$

9. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n (a_n \neq 0)$ – некоторые действительные числа, называется *линейным однородным уравнением* n*-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Уравнение

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0,$$

которое получается заменой производных искомой функции соответствующими степенями k ($y^{(i)} = k^i$), причем сама функция заменяется единицей, называется *характеристическим уравнением* данного дифференциального уравнения.

Характеристическое уравнение имеет n корней (действительных или комплексных, среди которых могут быть совпадающие). Тогда общее решение однородного уравнения строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

1) каждому действительному простому корню k характеристического уравнения соответствует частное решение e^{kx};

2) каждому действительному корню k кратности m соответствуют m линейно независимых частных решений e^{kx}, $x\,e^{kx}$, …, $x^{m-1}e^{kx}$;

3) каждой паре комплексных сопряженных простых корней $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два линейно независимых частных решения $e^{\alpha x}\cos \beta x$; $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности m соответствуют $2m$ линейно независимых частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x} x\cos\beta x, \ldots, e^{\alpha x} x^{m-1}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x} x\sin\beta x, \ldots, e^{\alpha x} x^{m-1}\sin\beta x.$$

Пример 9.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(\mathrm{VI})} + 2y^{(\mathrm{V})} + y^{(\mathrm{IV})} = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^6 + 2k^5 + k^4 = 0;$$
$$k^4(k^2 + 2k + 1) = 0;$$

$$k^4 = 0 \qquad \text{или} \qquad k^2 + 2k + 1 = 0;$$
$$k_{1,2,3,4} = 0 \qquad\qquad k_{5,6} = -1.$$

Итак,

$k_{1,2,3,4} = 0$ – действительный корень кратности 4, ему в общем решении соответствует слагаемое $e^{0\cdot x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)$;

$k_{5,6} = -1$ – действительный корень кратности 2, ему в общем решении соответствует слагаемое $\left(c_5 + c_6x\right)e^{-x}$.

Тогда общее решение

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + (c_5 + c_6x)e^{-x}.$$

Пример 9.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 8y = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^3 + 8 = 0.$$

Разложим по формуле суммы кубов:

$$(k + 2)(k^2 - 2k + 4) = 0.$$

Тогда

$$k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2$$

или

$$k^2 - 2k + 4 = 0;$$
$$D = 4 - 16 = -12;$$
$$k_{2,3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Итак,

$k_1 = -2$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое c_1e^{-2x};

$k_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}i$ – комплексные сопряженные корни кратности 1, где $\alpha = 1,\ \beta = \sqrt{3}$; им в общем решении соответствует слагаемое $\left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x\right)e^x$.

Тогда общее решение

$$y = c_1 e^{-2x} + \left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x\right)e^x .$$

Пример 9.3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(\mathrm{V})} - 2y^{(\mathrm{IV})} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0 .$$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$k^4(k-2) + 2k^2(k-2) + k - 2 = 0;$$

$$(k-2)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0;$$

$$(k-2)(k^2+1)^2 = 0;$$

Тогда

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2$$

или

$$(k^2+1)^2 = 0 \Rightarrow k_{2,3,4,5} = \pm i .$$

Итак,

$k_1 = 2$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_1 e^{2x}$;

$k_{2,3,4,5} = \pm i$ – комплексные сопряженные корни кратности 2, где $\alpha = 0,\ \beta = 1$; им в общем решении соответствует слагаемое $e^0((c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x)$.

Тогда общее решение

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x .$$

Пример 9.4. Решить задачу Коши:

$y^{(\mathrm{IV})}-10y''+9y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=8,\ y'''(0)=24.$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4-10k^2+9=0.$$

Получили биквадратное уравнение. Сделаем замену $k^2=t$:

$$t^2-10t+9=0;$$

$$D=100-36=64\Rightarrow t=\frac{10\pm8}{2}=\begin{cases}9,\\1.\end{cases}$$

Тогда

$$k^2=1\Rightarrow k_1=1, k_2=-1$$

или

$$k^2=9\Rightarrow k_3=3, k_4=-3.$$

Итак,

$k_1=1$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое c_1e^x;

$k_2=-1$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое c_2e^{-x};

$k_3=3$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое c_3e^{3x};

$k_4=-3$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое c_4e^{-3x}.

Тогда общее решение однородного уравнения

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычислим первые три производные:

$$y'=c_1e^x-c_2e^{-x}+3c_3e^{3x}-3c_4e^{-3x};$$
$$y''=c_1e^x+c_2e^{-x}+9c_3e^{3x}+9c_4e^{-3x};$$
$$y'''=c_1e^x-c_2e^{-x}+27c_3e^{3x}-27c_4e^{-3x}.$$

Подставив $x=0,\ y=0,\ y'=0,\ y''=8$ и $y'''=24$ в общее решение и в найденные производные, получим систему

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4, \\ 0 = c_1 - c_2 + 3c_3 - 3c_4, \\ 8 = c_1 + c_2 + 9c_3 + 9c_4, \\ 24 = c_1 - c_2 + 27c_3 - 27c_4. \end{cases}$$

Решим систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 9 & 8 \\ 1 & -1 & 27 & -27 & 24 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Из второй и третьей строк вычтем первую, из четвертой строки вычтем вторую:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 24 & -24 & 24 \end{array}\right).$$

Вторую строку разделим на -2; третью строку разделим на 8, а четвертую на 24, а затем из четвертой строки вычтем третью:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} -2c_4 = 0, \\ c_3 + c_4 = 1, \\ c_2 - c_3 + 2c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 1, \\ c_2 = 1, \\ c_1 = -2. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = -2e^{x} + e^{-x} + e^{3x}.$$

Пример 9.5. Решить задачу Коши:

$$y^{(\mathrm{IV})} - 16y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = -8.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 - 16 = 0.$$

Разложим по формуле разности квадратов:

$$(k^2 - 4)(k^2 + 4) = 0.$$

Тогда

$$k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2$$

или

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow k = \pm 2i.$$

Итак,

$k_1 = 2$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_1 e^{2x}$;

$k_2 = -2$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_2 e^{-2x}$;

$k_{3,4} = \pm\, 2i$ – комплексные сопряженные корни кратности 1, где $\alpha = 0$, $\beta = 2$; им в общем решении соответствует слагаемое $(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)e^{0 \cdot x}$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычислим первые три производные:

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} - 2c_3 \sin 2x + 2c_4 \cos 2x;$$
$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} - 4c_3 \cos 2x - 4c_4 \sin 2x;$$
$$y''' = 8c_1 e^{2x} - 8c_2 e^{-2x} + 8c_3 \sin 2x - 8c_4 \cos 2x.$$

Подставив $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ и $y''' = -8$ в общее решение и в найденные производные, получим систему

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 0 = 2c_1 - 2c_2 + 2c_4, \\ 0 = 4c_1 + 4c_2 - 4c_3, \\ -8 = 8c_1 - 8c_2 - 8c_4. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на 2, третье – на 4, четвертое − на 8:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 0 = c_1 - c_2 + c_4, \\ 0 = c_1 + c_2 - c_3, \\ -1 = c_1 - c_2 - c_4. \end{cases}$$

Из первого уравнения вычтем третье, из второго уравнения вычтем четвертое:

$$\begin{cases} 0 = 2c_3, \\ 1 = 2c_4, \\ 0 = c_1 + c_2 - c_3, \\ -1 = c_1 - c_2 - c_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0, \\ c_4 = \dfrac{1}{2}, \\ 0 = c_1 + c_2, \\ -\dfrac{1}{2} = c_1 - c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0, \\ c_4 = \dfrac{1}{2}, \\ c_1 = -c_2, \\ -\dfrac{1}{2} = -2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0, \\ c_4 = \dfrac{1}{2}, \\ c_1 = -\dfrac{1}{4}, \\ c_2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Пример 9.6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(\mathrm{V})} + 16y' = 0$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^5 + 16k = 0.$$

$$k(k^4 + 16) = 0.$$

$$k_1 = 0 \text{ или } k^4 + 16 = 0.$$

Найдем все значения корня $\sqrt[4]{-16}$. Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Тогда по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

получим

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{4}\right) = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$

$$w_4 = 2\left(\cos\frac{7}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

Итак,

$k_1 = 0$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_1 e^{0\cdot x}$;

$k_{2,3} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ – комплексные сопряженные корни кратности 1, где $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}$; им в общем решении соответствует слагаемое $\left(c_2\cos\sqrt{2}x + c_3\sin\sqrt{2}x\right)e^{\sqrt{2}x}$;

$k_{4,5} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ – комплексные сопряженные корни кратности 1, где $\alpha = -\sqrt{2},\ \beta = \sqrt{2}$; им в общем решении соответствует слагаемое $\left(c_4\cos\sqrt{2}x + c_5\sin\sqrt{2}x\right)e^{-\sqrt{2}x}$.

Тогда общее решение

$$y = c_1 + \left(c_2\cos\sqrt{2}x + c_3\sin\sqrt{2}x\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(c_4\cos\sqrt{2}x + c_5\sin\sqrt{2}x\right)e^{-\sqrt{2}x}.$$

10. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА

Линейным неоднородным дифференциальным уравнения n-го порядка называется уравнение вида

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + P_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_0(x)y = f(x),$$

где $P_i(x)$ и $f(x)$ – непрерывные на интервале (a, b) функции ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка имеет вид

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}},$$

где $y_{\text{о.о}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения;
$y_{\text{ч.н}}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Если известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения может быть найдено *методом вариации произвольных постоянных*, схематично изложенным ниже.

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \ldots + c_ny_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3(x)y_3 + \ldots + c_n(x)y_n,$$

где $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ – некоторые неизвестные функции переменной x. Для их определения составляем систему

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Заметим, что определитель этой системы − это определитель Вронского фундаментальной системы решений, а значит, он не равен нулю, и данная система имеет единственное решение. Решив эту систему относительно $c'_1(x)$, $c'_2(x),\ldots, c'_n(x)$, получим

$$\frac{dc_i}{dx} = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Тогда

$$c_i = \int \varphi_i(x)dx,\ i = 1, 2,\ \ldots, n\,.$$

Пример 10.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, зная фундаментальную систему решений $y_1 = \frac{\sin x}{x}, y_1 = \frac{\cos x}{x}$ соответствующего однородного уравнения.

Решение

Так как фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$\left\{ \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right\},$$

то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}\,.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x)\frac{\sin x}{x} + c_2(x)\frac{\cos x}{x}\,.$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + c_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ c_1'(x)\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' + c_2'(x)\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x)\sin x = -c_2'(x)\cos x, \\ c_1'(x)\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + c_2'(x)\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)\cos x}{\sin x}, \\ \dfrac{-c_2'(x)\cos x\left(x\cos x - \sin x\right)}{\sin x} + c_2'(x)\left(-x\sin x - \cos x\right) = x \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)\cos x}{\sin x}, \\ -c_2'(x)\dfrac{\cos x\left(x\cos x - \sin x\right) + \sin x\left(x\sin x + \cos x\right)}{\sin x} = x \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)\cos x}{\sin x}, \\ -c_2'(x)\dfrac{x\cos^2 x - \cos x\sin x + x\sin^2 x + \cos x\sin x}{\sin x} = x \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)\cos x}{\sin x}, \\ -c_2'(x)x(\cos^2 x + \sin^2 x) = x\sin x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)\cos x}{\sin x}, \\ c_2'(x) = -\sin x \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = \cos x, \\ c_2'(x) = -\sin x. \end{cases}$$

Тогда

$$c_1(x) = \int\cos x dx = \sin x + c_1;$$

$$c_2(x) = -\int\sin x dx = \cos x + c_2.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

11. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть дано линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $ay'' + by' + cy = f(x)$.

Общее решение неоднородного уравнения будет равно сумме общего решения однородного уравнения $y_{\text{о.о}}$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{ч.н}}$:

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}.$$

Методы нахождения общего решения однородного уравнения были рассмотрены ранее. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения можно применить метод вариации произвольных постоянных или метод неопределенных коэффициентов (метод подбора).

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $ay'' + by' + cy = 0$. Пусть

$$y_{\text{о.о}} = c_1 y_1 + c_2 y_2 .$$

2. Затем, полагая c_1 и c_2 функциями от x, находим частное решение неоднородного уравнения. Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

3. Общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения $y_{\text{о.о}}$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{ч.н}}$:

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}.$$

Метод неопределенных коэффициентов

В некоторых простейших случаях частное решение неоднородного уравнения может быть найдено *методом неопределенных коэффициентов.*

1. Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n, тогда:

– если λ не является корнем характеристического уравнения ($a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$), то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\lambda x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

– если λ – корень характеристического уравнения, т.е. $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\lambda x} Q_n(x) x^r,$$

где r – кратность корня λ, т.е. $r = 1$, если $\lambda = k_1 \neq k_2$ и $r = 2$, если

$\lambda = k_1 = k_2$;

$Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

2. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, тогда:

– если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами;

– если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = x e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

где $T_N(x)$ и $S_N(x)$ – многочлены степени $N = max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами.

Принцип суперпозиции

Пусть дано линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x).$$

Если $y_i(x)$ – решение уравнения $ay'' + by' + cy = f_i(x), i = 1, 2, \ldots, k,$ то общее решение исходного уравнения

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_k(x).$$

Пример 11.1. Решить задачу Коши: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, $y(1)=e$ и $y'(1) = 2e$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0;$$

$$(k-1)^2 = 0;$$

$$k_{1,2} = 1.$$

Получили $k_1 = k_2 = 1$ – корни вещественные совпадающие. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = (c_1 + c_2 x)e^x = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x.$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0, \\ c_1'(x)(e^x)' + c_2'(x)(xe^x)' = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Разделим первое и второе уравнение на e^x:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)x; \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -1; \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Тогда

$$c_1(x) = -\int dx = -x + c_1;$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c_2.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение

$$y_{\text{ч.н}} = -xe^x + xe^x \ln|x|.$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c_1 e^x + c_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln|x|.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = e$ и $y'(1) = 2e$. Найдем производную:

$$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 xe^x - e^x - xe^x + e^x \ln|x| + e^x + xe^x \ln|x|;$$
$$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 xe^x - xe^x + e^x \ln|x| + xe^x \ln|x|.$$

Подставив $x = 1$, $y = e$ и $y' = 2e$ в найденное общее решение уравнения и в производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} e = c_1 e + c_2 e - e + e\ln 1, \\ 2e = c_1 e + c_2 e + c_2 e - e + e\ln 1 + e\ln 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e = c_1 e + c_2 e, \\ 3e = c_1 e + 2c_2 e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2, \\ 3 = 2 - c_2 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$y = e^x + xe^x - xe^x + xe^x \ln|x|.$$

Итак, получили решение задачи Коши

$$y = e^x + xe^x \ln|x|.$$

Пример 11.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$
$$k_1 = -3,\ k_2 = -2.$$

Так как корни действительные несовпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x) e^{-3x} + c_2(x) e^{-2x}.$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-3x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ c_1'(x)(e^{-3x})' + c_2'(x)(e^{-2x})' = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^{-3x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -3c_1'(x)e^{-3x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-c_2'(x)e^{-2x}}{e^{-3x}}, \\ -3c_1'(x)e^{-3x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{x}, \\ 3c_2'(x)e^{x}e^{-3x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{x}, \\ c_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{x}, \\ c_2'(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}, \\ c_2'(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Тогда

$$c_2(x) = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}} = \left| \begin{array}{c} e^{2x} = t, \\ 2e^{2x}dx = dt, \\ e^{2x}dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\ln|1+t| + c_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+e^{2x}\right| + c_2;$$

$$c_1(x) = -\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}} = -\int \frac{e^{2x}e^{x}dx}{1+e^{2x}} = \left| \begin{array}{c} e^{x} = t, \\ e^{x}dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= -\int \frac{(1+t^2-1)dt}{1+t^2} = -\int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = -t + \operatorname{arctg} t + c_1 = -e^{x} + \operatorname{arctg} e^{x} + c_1.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = (\operatorname{arctg} e^x - e^x)e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln\left(1+e^{2x}\right).$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + e^{-3x}\operatorname{arctg} e^x - e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(e^{2x}+1).$$

Пример 11.3. Найти общее решение уравнения $y'' + 7y' = \dfrac{7}{1+e^{7x}}$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 7y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 7k = 0;$$
$$k_1 = 0,\ k_2 = -7.$$

Так как корни действительные несовпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2e^{-7x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x) + c_2(x)e^{-7x}.$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-7x} = 0, \\ c_1'(x)(1)' + c_2'(x)(e^{-7x})' = \dfrac{7}{1+e^{7x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{-7x}, \\ -7c_2'(x)e^{-7x} = \dfrac{7}{1+e^{7x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{-7x}, \\ c_2'(x) = -\dfrac{e^{7x}}{1+e^{7x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{1+e^{7x}}, \\ c_2'(x) = -\dfrac{e^{7x}}{1+e^{7x}}. \end{cases}$$

Тогда

$$c_2(x) = -\int \frac{e^{7x}dx}{1+e^{7x}} = \left| \begin{aligned} & e^{7x}+1=t, \\ & 7e^{7x}dx = dt, \\ & e^{7x}dx = \frac{dt}{7} \end{aligned} \right| = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln\left| t \right| + c_2 =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln\left(e^{7x}+1\right) + c_2;$$

$$c_1(x) = \int \frac{dx}{1+e^{7x}} = \left| \begin{aligned} & e^{7x} = t, \\ & 7e^{7x}dx = dt, \\ & dx = \frac{dt}{7e^{7x}} = \frac{dt}{7t} \end{aligned} \right| = \int \frac{dt}{7t(1+t)} = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{t(t+1)} =$$

$$= \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{7}\ln|t| - \frac{1}{7}\ln|t+1| + c_1 =$$

$$= \frac{1}{7}\ln\left|e^{7x}\right| - \frac{1}{7}\ln\left(e^{7x}+1\right) + c_1 = x - \frac{1}{7}\ln\left(e^{7x}+1\right) + c_1.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = x - \frac{1}{7}\ln\left(e^{7x}+1\right) - \frac{1}{7}e^{-7x}\ln\left(e^{7x}+1\right).$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н.}}$, то общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1 + c_2e^{-7x} + x - \frac{1}{7}\ln\left(e^{7x}+1\right) - \frac{1}{7}e^{-7x}\ln\left(e^{7x}+1\right).$$

Пример 11.4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}.$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+2k+5=0;$$
$$D=4-20=-16;$$
$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=-1\pm 2i.$$

Корни комплексные сопряженные кратности 1, где $\alpha=-1$, $\beta=2$. Тогда общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}}=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x);$$

$$y_{\text{о.о}}=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}}=c_1(x)e^{-x}\cos 2x+c_2(x)e^{-x}\sin 2x.$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x}\cos 2x+c_2'(x)e^{-x}\sin 2x=0, \\ c_1'(x)\left(e^{-x}\cos 2x\right)'+c_2'(x)\left(e^{-x}\sin 2x\right)'=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x)e^{-x}\cos 2x+c_2'(x)e^{-x}\sin 2x=0, \\ c_1'(x)\left(-e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x\right)+c_2'(x)\left(-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cos 2x\right)= \end{cases}$$
$$=\frac{e^{-x}}{\sin 2x}.$$

Разделим первое и второе уравнения системы на e^{-x}, а затем ко второму уравнению прибавим первое:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x+c_2'(x)\sin 2x=0, \\ c_1'(x)\left(-\cos 2x-2\sin 2x\right)+c_2'(x)\left(-\sin 2x+2\cos 2x\right)=\dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x+c_2'(x)\sin 2x=0, \\ -2c_1'(x)\sin 2x+2c_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{c_2'(x)\sin 2x}{\cos 2x}, \\ \dfrac{2c_2'(x)\sin^2 2x}{\cos 2x} + 2c_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{c_2'(x)\sin 2x}{\cos 2x}, \\ \dfrac{2c_2'(x)\sin^2 2x + 2c_2'(x)\cos^2 2x}{\cos 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{c_2'(x)\sin 2x}{\cos 2x}, \\ \dfrac{2c_2'(x)(\sin^2 2x + \cos^2 2x)}{\cos 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{c_2'(x)\sin 2x}{\cos 2x}, \\ \dfrac{2c_2'(x)}{\cos 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2\sin 2x}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}, \\ c_2'(x) = \dfrac{\cos 2x}{2\sin 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{1}{2}, \\ c_2'(x) = \dfrac{\cos 2x}{2\sin 2x}. \end{cases}$$

Тогда

$$c_2(x) = \int\frac{\cos 2x\,dx}{2\sin 2x} = \left| \begin{array}{l} \sin 2x = t, \\ 2\cos 2x dx = dt, \\ \cos 2x dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\,t\,| + c_2 = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + c_2;$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x + c_1.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x \ln|\sin 2x|;$$

$$y_{\text{ч.н}} = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|\right).$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|\right).$$

Пример 11.5. Решить задачу Коши: $y'' - 6y' + 8y = 8x^2 + 4x - 2$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 8 = 0;$$
$$D = 36 - 32 = 4;$$
$$k_1 = 4,\ k_2 = 2.$$

Так как корни действительные несовпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Так как $f(x) = 8x^2 + 4x - 2 = e^0(8x^2 + 4x - 2)$, где $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами:

$$y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx + C.$$

Найдем производные:

$$y'_{\text{ч.н}} = 2Ax + B;$$

$$y''_{\text{ч.н}} = 2A.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}, y'_{\text{ч.н}}$ и $y''_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$2A-6(2Ax+B)+8(Ax^2+Bx+C)=8x^2+4x-2;$$
$$2A-12Ax-6B+8Ax^2+8Bx+8C=8x^2+4x-2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8A=8, \\ -12A+8B=4, \\ 2A-6B+8C=-2. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} A=1, \\ -12+8B=4, \\ 2-6B+8C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ 8B=16, \\ -6B+8C=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=2, \\ C=1. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}}=x^2+2x+1\,.$$

Так как $y=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y=c_1e^{4x}+c_2e^{2x}+x^2+2x+1\,.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=1$. Вычислим производную:

$$y'=4c_1e^{4x}+2c_2e^{2x}+2x+2\,.$$

Подставив $x=0$, $y=0$ и $y'=1$ в общее решение уравнения и в найденную производную, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2+1, \\ 1=4c_1+2c_2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=-c_1-1, \\ 1=4c_1-2c_1-2+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2=-c_1-1, \\ 1=2c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}, \\ c_1=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + x^2 + 2x + 1.$$

Пример 11.6. Решить задачу Коши: $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(-5x^2 + 7x + 2)$, $y(0) = 2$ и $y'(0) = 7$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k + 2 = 0;$$
$$k_1 = -2,\ k_2 = -1.$$

Так как корни действительные несовпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Так как $f(x) = e^{-2x}(-5x^2 + 7x + 2)$, где $\lambda = -2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{-2x}(Ax^2 + Bx + C)x = e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx).$$

Найдем производные:

$$y'_{\text{ч.н}} = -2e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) + e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C);$$
$$y''_{\text{ч.н}} = 4e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) - 2e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C) -$$
$$-2e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C) + e^{-2x}(6Ax + 2B) =$$
$$= 4e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) - 4e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C) + e^{-2x}(6Ax + 2B).$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}, y'_{\text{ч.н}}$ и $y''_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$4e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) - 4e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C) + e^{-2x}(6Ax + 2B) +$$
$$+3\left(-2e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) + e^{-2x}(3Ax^2 + 2Bx + C)\right) +$$
$$+2e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) = e^{-2x}(-5x^2 + 7x + 2).$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$-e^{-2x}(3Ax^2+2Bx+C)+e^{-2x}(6Ax+2B)=e^{-2x}(-5x^2+7x+2).$$

Разделим левую и правую части тождества на e^{-2x}:

$$-3Ax^2-2Bx-C+6Ax+2B=-5x^2+7x+2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим систему

$$\begin{cases}-3A=-5,\\ 6A-2B=7,\\ 2B-C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5}{3},\\ -2B=7-6\cdot\dfrac{5}{3},\\ C=2B-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5}{3},\\ B=\dfrac{3}{2},\\ C=1.\end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left(\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right).$$

Так как $y=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+e^{-2x}\left(\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычислим производную:

$$y'=-2c_1e^{-2x}-c_2e^{-x}-2e^{-2x}\left(\frac{5x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right)+e^{-2x}(5x^2+3x+1).$$

Подставив $x=0$, $y=2$ и $y'=7$ в общее решение уравнения и в найденную производную, получим следующую систему:

$$\begin{cases}7=-2c_1e^0-c_2e^0-2e^0\cdot 0+e^0\cdot 1,\\ 2=c_1e^0+c_2e^0+e^0\cdot 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7=-2c_1-c_2+1,\\ 2=c_1+c_2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6=-2c_1-c_2,\\ 2=c_1+c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8=-c_1,\\ 2=c_1+c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-8,\\ c_2=10.\end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши

$$y = -8e^{-2x} + 10e^{-x} + e^{-2x}\left(\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right).$$

Пример 11.7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 7e^{-2x}\sin 7x + e^{-2x}(28x + 14)\cos 7x.$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 4 = 0;$$

$$(k+2)^2 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = -2.$$

Так как корни действительные совпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим два способа нахождения частного решения.

1 способ

Решение будем искать методом вариации произвольной постоянной в виде

$$y_{\text{ч.н}} = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)xe^{-2x},$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – неизвестные функции переменной x, которые найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ c_1'(x)(e^{-2x})' + c_2'(x)(xe^{-2x})' = 7e^{-2x}\sin 7x + e^{-2x}(28x+14)\cos 7x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ -2c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = 7e^{-2x}\sin 7x + e^{-2x}(28x+14)\cos 7x. \end{cases}$$

Ко второму уравнению прибавим первое, предварительно умноженное на 2:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ c_2'(x)e^{-2x} = 7e^{-2x}\sin 7x + e^{-2x}(28x+14)\cos 7x. \end{cases}$$

Разделим первое и второе уравнения на e^{-2x}:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_2'(x) = 7\sin 7x + (28x+14)\cos 7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)x, \\ c_2'(x) = 7\sin 7x + (28x+14)\cos 7x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -7x\sin 7x - x(28x+14)\cos 7x, \\ c_2'(x) = 7\sin 7x + (28x+14)\cos 7x. \end{cases}$$

Тогда

$$c_2(x) = \int\left(7\sin 7x + \left(28x+14\right)\cos 7x\right)dx = \left| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям:} \\ u = 28x+14,\ du = 28dx; \\ \cos 7x dx,\ v = \dfrac{\sin 7x}{7} \end{matrix} \right| =$$

$$= -7\cdot\frac{1}{7}\cos 7x + \left(\frac{1}{7}\left(28x+14\right)\sin 7x - \int\frac{28}{7}\sin 7x dx\right) =$$

$$= -\cos 7x + \left(4x+2\right)\sin 7x + \frac{4}{7}\cos 7x = -\frac{3}{7}\cos 7x + \left(4x+2\right)\sin 7x + c_2;$$

$$c_1(x) = \int\left(-7x\sin 7x - \left(28x^2+14x\right)\cos 7x\right)dx =$$
$$= -\underbrace{7\int x\sin 7x dx}_{I_1} - \underbrace{\int\left(28x^2+14x\right)\cos 7x dx}_{I_2};$$

$$I_1 = 7\int x\sin 7x dx = \left| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям:} \\ u = x,\ du = dx; \\ \sin 7x dx = dv,\ v = -\dfrac{1}{7}\cos 7x \end{matrix} \right| =$$

$$= -7\cdot\frac{1}{7}x\cos 7x + 7\cdot\frac{1}{7}\int\cos 7x dx = -x\cos 7x + \frac{1}{7}\sin 7x;$$

$$I_2=\int\left(28x^2+14x\right)\cos 7x\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям:}\\ u=28x^2+14x,\ \ du=(56x+14)dx;\\ dv=\cos 7x\,dx,\ \ v=\dfrac{\sin 7x}{7}\end{array}\right|=$$

$$=(28x^2+14x)\frac{\sin 7x}{7}-\int\frac{\sin 7x}{7}(56x+14)dx=$$

$$=(4x^2+2x)\sin 7x-\int(8x+2)\sin 7x\,dx==\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям:}\\ u=8x+2,\ \ du=8dx;\\ dv=\sin 7x\,dx,\ \ v=-\dfrac{\cos 7x}{7}\end{array}\right|=$$

$$=(4x^2+2x)\sin 7x-\left((8x+2)\left(-\frac{\cos 7x}{7}\right)+\int\frac{\cos 7x}{7}8dx\right)=$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\sin 7x+\frac{1}{7}(8x+2)\cos 7x-\frac{1}{7}\cdot\frac{8}{7}\sin 7x=$$

$$=\left(4x^2+2x-\frac{8}{49}\right)\sin 7x+\frac{1}{7}(8x+2)\cos 7x.$$

Тогда

$$c_1(x)=-I_1-I_2=x\cos 7x-\frac{1}{7}\sin 7x-\left(4x^2+2x-\frac{8}{49}\right)\sin 7x-$$

$$-\frac{1}{7}\left(8x+2\right)\cos 7x=\left(x-\frac{8x+2}{7}\right)\cos 7x+$$

$$+\left(-4x^2-2x+\frac{8}{49}-\frac{1}{7}\right)\sin 7x=-\frac{1}{7}\left(x+2\right)\cos 7x+$$

$$+\left(-4x^2-2x+\frac{1}{49}\right)\sin 7x+c_1.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left(-\frac{1}{7}\left(x+2\right)\cos 7x+\left(-4x^2-2x+\frac{1}{49}\right)\sin 7x\right)+$$

$$+e^{-2x}x\left(-\frac{3}{7}\cos 7x+(4x+2)\sin 7x\right);$$

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left(\left(-4x^2-2x+\frac{1}{49}+4x^2+2x\right)\sin 7x+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{7}(x+2)-\frac{3x}{7}\right)\cos 7x\right);$$

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left(\frac{1}{49}\sin 7x-\frac{1}{7}(4x+2)\cos 7x\right).$$

2 способ

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Так как $f(x)=7e^{-2x}\sin 7x+e^{-2x}(28x+14)\cos 7x$ и $\lambda=-2\pm 7i$ не является корнем характеристического уравнения, а степень многочлена $N=\max\{n, m\}=\max\{0, 1\}=1$, то решение необходимо искать в виде

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right).$$

Найдем производные:

$$y'_{\text{ч.н}}=-2e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)+$$

$$+e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right).$$

$$y''_{\text{ч.н}}=4e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)-$$

$$-2e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right)-$$

$$-2e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right)+$$

$$+e^{-2x}\left(-49(Ax+B)\sin 7x+7A\cos 7x+7A\cos 7x-49(Cx+D)\cos 7x-\right.$$

$$\left.-7C\sin 7x-7C\sin 7x\right);$$

$$y''_{\text{ч.н}}=4e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)-$$

$$-4e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right)+$$

$$+e^{-2x}\left(-49(Ax+B)\sin 7x+14A\cos 7x-49(Cx+D)\cos 7x-14C\sin 7x\right).$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}, y'_{\text{ч.н}}$ и $y''_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$4e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)-$$

$$-4e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right)+$$
$$+e^{-2x}\left(-49(Ax+B)\sin 7x+14A\cos 7x-49(Cx+D)\cos 7x-14C\sin 7x\right)-$$
$$-8e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)+$$
$$+4e^{-2x}\left(7(Ax+B)\cos 7x+A\sin 7x-7(Cx+D)\sin 7x+C\cos 7x\right)+$$
$$+4e^{-2x}\left((Ax+B)\sin 7x+(Cx+D)\cos 7x\right)=7e^{-2x}\sin 7x+$$
$$+e^{-2x}(28x+14)\cos 7x.$$

После приведения подобных слагаемых получим:

$$e^{-2x}\left(-49(Ax+B)\sin 7x+14A\cos 7x-49(Cx+D)\cos 7x-14C\sin 7x\right)=$$
$$=7e^{-2x}\sin 7x+e^{-2x}(28x+14)\cos 7x.$$

Разделим левую и правую части тождества на e^{-2x}:

$$-49(Ax+B)\sin 7x+14A\cos 7x-49(Cx+D)\cos 7x-14C\sin 7x=$$
$$=7\sin 7x+(28x+14)\cos 7x.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при $\cos 7x$, $\sin 7x$, $x\cos 7x$, $x\sin 7x$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 14A-49D=14, \\ -49B-14C=7, \\ -49C=28, \\ -49A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -49D=14, \\ -49B+8=7, \\ C=-\dfrac{28}{49}=-\dfrac{4}{7}, \\ A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-\dfrac{2}{7}, \\ B=\dfrac{1}{49}, \\ C=-\dfrac{4}{7}, \\ A=0. \end{cases}$$

Тогда

$$y_{\text{ч.н}}=e^{-2x}\left(\frac{1}{49}\sin 7x-\frac{1}{7}(4x+2)\cos 7x\right).$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+e^{-2x}\left(\frac{1}{49}\sin 7x-\frac{1}{7}(4x+2)\cos 7x\right).$$

Пример 11.8. Решить задачу Коши: $y'' + 4y = \sin 2x + 1$, $y(0) = 1/4$ и $y'(0) = 0$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0;$$
$$k^2 = -4;$$
$$k_{1,2} = \pm 2i.$$

Так как корни комплексные сопряженные, где $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x);$$

$$y_{\text{о.о.}} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с помощью принципа суперпозиции. Решение $y_{\text{ч.н}}$ будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = y_{\text{ч.н}1} + y_{\text{ч.н}2},$$

где $y_{\text{ч.н}1}$ – частное решение уравнения $y'' + 4y = \sin 2x$;

$y_{\text{ч.н}2}$ – частное решение уравнения $y'' + 4y = 1$.

Найдем частное решение уравнения $y'' + 4y = \sin 2x$ методом неопределенных коэффициентов. Так как $f_1(x) = \sin 2x$ и $\lambda = 2i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, а степень многочлена $N = \max\{n, m\} = \max\{0, 0\} = 0$, то решение $y_{\text{ч.н}1}$ будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}1} = x(A\sin 2x + B\cos 2x).$$

Найдем производные:

$$y'_{\text{ч.н}1} = (A\sin 2x + B\cos 2x) + x(2A\cos 2x - 2B\sin 2x);$$
$$y''_{\text{ч.н}1} = (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x +$$
$$+x(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) = 4A\cos 2x - 4B\sin 2x +$$
$$+x(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x).$$

Подставим $y_{\text{ч.н1}}$ и $y''_{\text{ч.н1}}$ в уравнение $y'' + 4y = \sin 2x$:

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x + x(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) +$$
$$+4x(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x.$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x = \sin 2x.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при $\sin 2x$ и $\cos 2$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 4A = 0, \\ -4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, частное решение уравнения $y'' + 4y = \sin 2x$

$$y_{\text{ч.н1}} = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Найдем частное решение уравнения $y'' + 4y = 1$ методом неопределенных коэффициентов. Так как. $f_2(x) = 1$, а $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н2}} = A.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч.н2}} = 0, \ y''_{\text{ч.н2}} = 0.$$

Подставим $y_{\text{ч.н2}}$ и $y''_{\text{ч.н2}}$ в уравнение $y'' + 4y = 1$:

$$0 + 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Тогда частное решение уравнения $y'' + 4y = 1$

$$y_{\text{ч.н2}} = \frac{1}{4}.$$

Так как

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н1}} + y_{\text{ч.н2}},$$

то общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям $y(0) = 1/4$ и $y'(0) = 0$.

Вычислим производную:

$$y' = -2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}x\cdot 2\sin 2x.$$

Подставив $x = 0$, $y = 1/4$ и $y' = 0$ в общее решение неоднородного уравнения и в производную, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} = c_1\cos 0 + c_2\sin 0 + \dfrac{1}{4}, \\ 0 = -2c_1\sin 0 + 2c_2\cos 0 - \dfrac{1}{4}\cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ 0 = 2c_2 - \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}.$$

Пример 11.9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 3(5 - 2x)\cos 2x.$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0;$$
$$k^2 = -4;$$
$$k_{1,2} = \pm 2i.$$

Так как корни комплексные сопряженные, где $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = e^{0\cdot x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x);$$
$$y_{\text{о.о}} = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Так как $f(x)=3(5-2x)\cos 2x$ и $\lambda=2i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, а степень многочлена $N=\max\{n, m\}=$ $=\max\{0, 1\}=1$, то решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}}=x(Ax+B)\cos 2x+x(Cx+D)\sin 2x;$$

$$y_{\text{ч.н}}=(Ax^2+Bx)\cos 2x+(Cx^2+Dx)\sin 2x.$$

Найдем производные:

$$y'_{\text{ч.н.}}=(2Ax+B)\cos 2x+(Ax^2+Bx)(-2\sin 2x)+(2Cx+D)\sin 2x+$$
$$+(Cx^2+Dx)2\cos 2x=\cos 2x(2Ax+B+2Cx^2+2Dx)+$$
$$+\sin 2x(2Cx+D-2Ax^2-2Bx);$$

$$y''_{\text{ч.н}}=\cos 2x(2A+4Cx+2D)-2\sin 2x(2Ax+B+2Cx^2+2Dx)+$$
$$+2\cos 2x(2Cx+D-2Ax^2-2Bx)+\sin 2x(2C-4Ax-2B);$$

$$y''_{\text{ч.н.}}=(2A+4Cx+2D+4Cx+2D-4Ax^2-4Bx)\cos 2x+$$
$$+(2C-4Ax-2B-4Ax-2B-4Cx^2-4Dx)\sin 2x.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}, y'_{\text{ч.н}}$ и $y''_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$(2A+4Cx+2D+4Cx+2D-4Ax^2-4Bx)\cos 2x+$$
$$+(2C-4Ax-2B-4Ax-2B-4Cx^2-4Dx)\sin 2x+$$
$$+4(Ax^2+Bx)\cos 2x+4(Cx^2+Dx)\sin 2x=3(5-2x)\cos 2x;$$

$$(2A+4Cx+4D+4Cx-4Ax^2-4Bx+4Ax^2+4Bx)\cos 2x+$$
$$+(2C-4Ax-4B-4Ax-4Cx^2-4Dx+4Cx^2+4Dx)\sin 2x=$$
$$=(15-6x)\cos 2x;$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$(8Cx+2A+4D)\cos 2x+(2C-8Ax-4B)\sin 2x=(-6x+15)\cos 2x.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при cos2x, sin2x, $x$cos2x, $x$sin2x, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2A + 4D = 15, \\ 2C - 4B = 0, \\ 8C = -6, \\ -8A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4D = 15, \\ -\dfrac{3}{2} - 4B = 0, \\ C = -\dfrac{3}{4}, \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \dfrac{15}{4}, \\ B = -\dfrac{3}{8}, \\ C = -\dfrac{3}{4}, \\ A = 0. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = -\frac{3}{8}x\cos 2x + x\left(\frac{15}{4} - \frac{3}{4}x\right)\sin 2x = -\frac{3}{8}x\cos 2x - \frac{x}{4}(3x - 15)\sin 2x \cdot$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{3}{8}x\cos 2x - \frac{x}{4}(3x - 15)\sin 2x \cdot$$

12. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для решения линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

где a_0, a_1, a_2, …, a_n ($a_n \neq 0$) – некоторые действительные числа, находим сначала фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 .$$

Общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного, которое можно найти с помощью метода вариации произвольной постоянной или метода неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов

1. Пусть $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n, тогда:

– если λ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\lambda x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

– если λ – корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\lambda x} Q_n(x) x^r,$$

где r – кратность корня λ, как корня характеристического уравнения;

$Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

2. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, тогда:

– если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами;

– если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{ч.н}} = x^r e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

где $T_N(x)$ и $S_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами;

r – кратность корня $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения.

Пример 12.1. Решить задачу Коши: $y^{(\mathrm{IV})} - y = 8e^x$, $y(0) = 0$. $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(\mathrm{IV})} - y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 - 1 = 0;$$
$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0;$$
$$(k - 1)(k + 1)(k^2 + 1) = 0;$$
$$k - 1 = 0 \ \text{ или } \ k + 1 = 0 \ \text{ или } \ k^2 + 1 = 0,$$
$$k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_{3,4} = \pm i.$$

Итак,

$k_1 = 1$ − действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_1 e^x$;

$k_2 = -1$ − действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_2 e^{-x}$;

$k_{3,4} = \pm i$ – комплексные сопряженные корни кратности 1 ($\alpha = 0$, $\beta = 1$), им в общем решении соответствует слагаемое $c_3\cos x + c_4\sin x$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Решение будем искать методом неопределенных коэффициентов. Так как

$f(x)=8e^x$ и $\lambda = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1, то

$$y_{\text{ч.н}} = Axe^x.$$

Найдем первые четыре производные:

$$y'_{\text{ч.н}} = Ae^x + Axe^x;$$
$$y''_{\text{ч.н}} = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x;$$
$$y'''_{\text{ч.н}} = 2Ae^x + Ae^x + Axe^x = 3Ae^x + Axe^x;$$
$$y^{(\text{VI})}{}_{\text{ч.н}} = 3Ae^x + Ae^x + Axe^x = 4Ae^x + Axe^x.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}$ и $y^{(\text{IV})}_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$4Ae^x + Axe^x - Axe^x = 8e^x;$$
$$4Ae^x = 8e^x \Rightarrow A = 2.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = 2xe^x .$$

Так как $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x + 2xe^x \cdot$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Найдем первые три производные:

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x} - c_3\sin x + c_4\cos x + 2e^x + 2xe^x;$$
$$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x + 2e^x + 2e^x + 2xe^x;$$
$$y''' = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3\sin x - c_4\cos x + 4e^x + 2e^x + 2xe^x.$$

Подставив $x=0,\ y=0,\ y'=2,\ y''=4$ и $y'''=6$ в общее решение неоднородного уравнения, а также в производные, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 2 = c_1 - c_2 + c_4 + 2, \\ 4 = c_1 + c_2 - c_3 + 4, \\ 6 = c_1 - c_2 - c_4 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения вычтем третье, из второго уравнения вычтем четвертое:

$$\begin{cases} 2c_3 = 0, \\ 2c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0, \\ c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0, \\ c_4 = 0, \\ c_2 = 0, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$y = 2xe^x .$$

Пример 12.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(\mathrm{IV})} + 10y''' + 9y'' = 6 - 27x .$$

Решение

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(\mathrm{IV})} + 10y''' + 9y'' = 0 .$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 + 10k^3 + 9k^2 = 0;$$

$$k^2(k^2 + 10k + 9) = 0;$$

$$k^2 = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 10k + 9 = 0;$$

$$D = 100 - 36 = 64 \Rightarrow k_{3.4} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \left[\begin{array}{l} -9, \\ -1. \end{array}\right.$$

Итак,

$k_{1,2} = 0$ – действительный корень кратности 2, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_1 + c_2 x$;

$k_3 = -9$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_3 e^{-9x}$;

$k_4 = -1$ – действительный корень кратности 1, ему в общем решении соответствует слагаемое $c_4 e^{-x}$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-9x} + c_4 e^{-x} .$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Решение будем искать методом неопределенных коэффициентов. Так как $f(x) = 6 - 27x$ и $\lambda = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 2, то

$$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B)x^2 = Ax^3 + Bx^2.$$

Найдем первые четыре производные:

$$y'_{\text{ч.н}} = 3Ax^2 + 2Bx;$$
$$y''_{\text{ч.н}} = 6Ax + 2B;$$
$$y'''_{\text{ч.н}} = 6A;$$
$$y^{(\text{VI})}{}_{\text{ч.н}} = 0.$$

Подставим $y_{\text{ч.н}}{}''$, $y'''_{\text{ч.н}}$ и $y^{(\text{IV})}_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение:

$$0 + 10 \cdot 6A + 9(6Ax + 2B) = 6 - 27x;$$
$$60A + 54Ax + 18B = 6 - 27x.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при одинаковых степенями x, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 54A = -27, \\ 60A + 18B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}, \\ -30 + 18B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}, \\ B = 2. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2.$$

Так как $y_{.} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-9x} + c_4 e^{-x} - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2.$$

13. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нормальной системой n линейных дифференциальных уравнений первого порядка называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

где t – независимая переменная;

$x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ – неизвестные функции независимой переменной t;

функции $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в правой части системы определены в некоторой $(n + 1)$-мерной области D.

Решением нормальной системы на интервале (a, b) изменения аргумента t называется совокупность непрерывно дифференцируемых на этом интервале функций $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$, обращающих каждое уравнение системы в истинное тождество при $t \in (a, b)$.

Задачей Коши для нормальной системы называется задача нахождения решения $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ системы, удовлетворяющего заданным начальным условиям $x_1(t_0) = x_0^1$, $x_2(t_0) = x_0^2$, …, $x_n(t_0) = x_0^n$.

Теорема существования и единственности

Если функции $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нормальной системы определены и непрерывны в некоторой $(n + 1)$-мерной области D и имеют в этой области непрерывные частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то для любой точки $(t_0, x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in D$ найдется $\delta > 0$ такое что на интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ задача Коши имеет, и притом единственное, решение.

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удается свести к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных кроме одного.

Пример 13.1. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы по переменной t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 1.$$

Подставив $\dfrac{dy}{dt}$ во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 1 = x + e^t.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' - x = e^t + 1.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$x'' - x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 1 = 0;$$
$$k^2 = 1;$$
$$k_1 = 1,\ k_2 = -1.$$

Корни действительные несовпадающие. Тогда общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = x_{\text{ч.н}1} + x_{\text{ч.н}2},$$

где $x_{\text{ч.н1}}$ – частное решение уравнения $x'' - x = e^t$;

$x_{\text{ч.н2}}$ – частное решение уравнения $x'' - x = 1$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения $x'' - x = e^t$ методом неопределенных коэффициентов. Так как $f_1(t) = e^t$ и $\lambda = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1, то частное решение $x_{\text{ч.н1}}$ будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н1}} = Ate^t .$$

Найдем первые две производные:

$$x'_{\text{ч.н1}} = Ae^t + Ate^t;$$

$$x''_{\text{ч.н1}} = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t.$$

Подставив $x_{\text{ч.н1}}$ и $x''_{\text{ч.н1}}$ в уравнение $x'' - x = e^t$, получим

$$2Ae^t + Ate^t - Ate^t = e^t;$$

$$2Ae^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, частное решение уравнения $x'' - x = e^t$

$$x_{\text{ч.н1}} = \frac{1}{2}te^t .$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения $x'' - x = 1$ методом неопределенных коэффициентов. Так как $f_2(t) = 1$ и $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $x_{\text{ч.н2}}$ будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н2}} = B .$$

Найдем первые две производные:

$$x'_{\text{ч.н2}} = 0;$$
$$x''_{\text{ч.н2}} = 0.$$

Подставив $x_{\text{ч.н2}}$ и $x''_{\text{ч.н2}}$ в уравнение $x'' - x = 1$, получим:

$$0 - B = 1 \Rightarrow B = -1.$$

Следовательно, частное решение уравнения $x'' - x = 1$

$$x_{\text{ч.н2}} = -1.$$

Тогда частное решение уравнения $x'' - x = e^t + 1$:

$$x_{\text{ч.н}} = x_{\text{ч.н1}} + x_{\text{ч.н2}} = \frac{1}{2}te^t - 1.$$

Так как $x = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}}$, то общее решение данного неоднородного уравнения

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t - 1.$$

Выразим y из первого уравнения исходной системы:

$$y = x' - t.$$

Так как

$$x' = c_1e^t - c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t,$$

то

$$y = x' - t = c_1e^t - c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t - t.$$

Итак, получили общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_1e^t + c_2e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^t - 1, \\ y = c_1e^t - c_2e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^t + \dfrac{1}{2}e^t - t \end{cases}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Для этого подставим $t = 0$, $x = 1$ и $y = 0$ в общее решение системы:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 - 1, \\ 0 = c_1 - c_2 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2, \\ 0 = 2 - c_2 - c_2 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4}, \\ c_2 = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}e^{t} + \dfrac{5}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{t} - 1, \\ y = \dfrac{3}{4}e^{t} - \dfrac{5}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{t} + \dfrac{1}{2}e^{t} - t. \end{cases}$$

Пример 13.2. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{cases}$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы по переменной t:

$$x'' = 4x' + 6y' \Rightarrow y' = \frac{1}{6}(x'' - 4x').$$

Подставим y' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{6}(x'' - 4x') = 2x + 3y + t.$$

Выразим y из первого уравнения системы:

$$y = \frac{1}{6}(x' - 4x).$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{6}(x'' - 4x') = 2x + \frac{3}{6}(x' - 4x) + t.$$

Умножим обе части уравнения на 6:

$$x'' - 4x' = 12x + 3x' - 12x + 6t.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x'' - 7x' = 6t.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' - 7x' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 7k = 0;$$
$$k(k - 7) = 0;$$

$$k_1 = 0,\ k_2 = 7.$$

Корни действительные несовпадающие. Тогда общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = c_1 + c_2 e^{7t}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов. Так как $f(x) = 6x$ и $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то частное решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = (At + B)t = At^2 + Bt.$$

Найдем первые две производные:

$$x'_{\text{ч.н}} = 2At + B;$$
$$x''_{\text{ч.н}} = 2A.$$

Подставив $x'_{\text{ч.н}}$ и $x''_{\text{ч.н}}$ в уравнение $x'' - 7x' = 6t$, получим

$$2A - 7(2At + B) = 6t;$$
$$2A - 14At - 7B = 6t.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при одинаковых степенях t:

$$\begin{cases} -14A = 6, \\ 2A - 7B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{7}, \\ -\dfrac{6}{7} - 7B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{7}, \\ B = -\dfrac{6}{49}. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$x_{\text{ч.н}} = -\frac{3}{7}t^2 - \frac{6}{49}t.$$

Так как $x = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$x = c_1 + c_2 e^{7t} - \frac{3}{7}t^2 - \frac{6}{49}t\,.$$

Выразим y из первого уравнения исходной системы:

$$y = \frac{1}{6}(x' - 4x).$$

Так как

$$x' = 7c_2e^{7t} - \frac{6}{7}t - \frac{6}{49},$$

то

$$y = \frac{1}{6}(7c_2e^{7t} - \frac{6}{7}t - \frac{6}{49} - 4c_1 - 4c_2e^{7t} + \frac{12}{7}t^2 + \frac{24}{49}t) =$$

$$= \frac{1}{6}(3c_2e^{7t} - 4c_1 + \frac{12}{7}t^2 - \frac{18}{49}t - \frac{6}{49}) = \frac{1}{2}c_2e^{7t} - \frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{7}t^2 - \frac{3}{49}t - \frac{1}{49}.$$

Следовательно, общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2e^{7t} - \frac{3}{7}t^2 - \frac{6}{49}t, \\ y = \frac{1}{2}c_2e^{7t} - \frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{7}t^2 - \frac{3}{49}t - \frac{1}{49}. \end{cases}$$

Пример 13.3. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \cos t + \sin t; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -2.$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы по переменной t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - \sin t.$$

Подставив $\frac{dy}{dt}$ во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - \sin t = -2x - y + \cos t + \sin t;$$

$$x'' - x' + 2x + y = \cos t + 2\sin t.$$

Выразим y из первого уравнения системы:

$$y = x' - x + \cos t.$$

Тогда

$$x'' - x' + 2x + x' - x + \cos t = \cos t + 2\sin t\,.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' + x = 2\sin t\,.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' + x = 0\,.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0;$$
$$k^2 = -1;$$
$$k_1 = i,\ k_2 = -i.$$

Так как корни комплексные сопряженные, где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = c_1 \cos t + c_2 \sin t\,\cdot$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов. Так как $f(t) = 2\sin t$ и $\lambda = i$ – корень характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = (A\cos t + B\sin t)t.$$

Найдем первые две производные:

$$x'_{\text{ч.н}} = (-A\sin t + B\cos t)t + A\cos t + B\sin t;$$
$$x''_{\text{ч.н}} = (-A\cos t - B\sin t)t + (-A\sin t + B\cos t) - A\sin t + B\cos t =$$
$$= (-A\cos t - B\sin t)t - 2A\sin t + 2B\cos t.$$

Подставив $x_{\text{ч.н}}$ и $x''_{\text{ч.н}}$ в уравнение $x'' + x = 2\sin t$, получим

$$(-A\cos t - B\sin t)t - 2A\sin t + 2B\cos t + (A\cos t + B\sin t)t = 2\sin t;$$
$$-2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях последнего уравнения при $\sin t$ и при $\cos t$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения

$$x_{\text{ч.н}} = -t\cos t.$$

Так как $x = x_{\text{о.о.}} + x_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$x = c_1\cos t + c_2\sin t - t\cos t\ .$$

Из первого уравнения исходной системы выразим y:

$$y = x' - x + \cos t$$

Так как

$$x' = -c_1\sin t + c_2\cos t - \cos t + t\sin t\ \ ,$$

то

$$y = -c_1\sin t + c_2\cos t - \cos t + t\sin t - c_1\cos t - c_2\sin t + t\cos t + \cos t;$$

$$y = -(c_1 + c_2)\sin t + (c_2 - c_1)\cos t + t(\sin t + \cos t).$$

Итак, получили общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t - t\cos t, \\ y = -(c_1 + c_2)\sin t + (c_2 - c_1)\cos t + t(\sin t + \cos t). \end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = -2$. Для этого подставим $t = 0$, $x = 1$ и $y = -2$ в общее решение системы

$$\begin{cases} 1 = c_1\cos 0 + c_2\sin 0, \\ -2 = -(c_1 + c_2)\sin 0 + (c_2 - c_1)\cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ -2 = c_2 - c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t - t\cos t, \\ y = -2\cos t + t(\sin t + \cos t). \end{cases}$$

Пример 13.4. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы по переменной t:

$$x'' = -4x' - 2y' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(-x'' - 4x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2}\right).$$

Подставим y' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{2}\left(-x'' - 4x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2}\right) = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1}.$$

Выразим y из первого уравнения системы:

$$y = -2x - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{e^t-1}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\left(-x'' - 4x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2}\right) = 6x + 3\left(-2x - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{e^t-1}\right) - \frac{3}{e^t-1}.$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$-x'' - 4x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2} = 12x + 3\left(-4x - x' + \frac{2}{e^t-1}\right) - \frac{6}{e^t-1};$$

$$-x'' - 4x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2} = 12x - 12x - 3x' + \frac{6}{e^t-1} - \frac{6}{e^t-1};$$

$$-x'' - x' - \frac{2e^t}{(e^t-1)^2} = 0;$$

$$x'' + x' = -\frac{2e^t}{(e^t-1)^2}.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' + x' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + k = 0;$$
$$k_1 = 0, k_2 = -1.$$

Так как корни действительные несовпадающие, то общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{о.о}} = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$x_{\text{ч.н}} = c_1(t) + c_2(t)e^{-t}.$$

Функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2{}'(t)e^{-t} = 0, \\ c_1'(t)\left(1\right)' + c_2'(t)\left(e^{-t}\right)' = -\dfrac{2e^t}{(e^t-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -c_2{}'(t)e^{-t}, \\ -c_2'(t)e^{-t} = -\dfrac{2e^t}{(e^t-1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -c_2{}'(t)e^{-t}, \\ c_2'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{(e^t-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -\dfrac{2e^t}{(e^t-1)^2}, \\ c_2'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{(e^t-1)^2}. \end{cases}$$

Тогда

$$c_2(t) = \int \frac{2e^{2t}dt}{(e^t-1)^2} = 2\int \frac{e^t e^t dt}{(e^t-1)^2} = \left| \begin{matrix} e^t - 1 = z, \\ e^t = z+1, \\ e^t dt = dz \end{matrix} \right| = 2\int \frac{(z+1)dz}{z^2} = 2\int \frac{dz}{z} + 2\int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= 2\ln|z| - 2\frac{1}{z} + c_2 = 2\ln\left|e^t - 1\right| - \frac{2}{e^t-1} + c_2;$$

$$c_1(t) = -\int \frac{2e^t dt}{(e^t-1)^2} = \left| \begin{matrix} e^t - 1 = z, \\ e^t = z+1, \\ e^t dt = dz \end{matrix} \right| = -2\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + c_1 = \frac{2}{e^t-1} + c_1.$$

При $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим частное решение неоднородного уравнения

$$x_{\text{ч.н}} = \frac{2}{e^t-1} + \left(2\ln\left|e^t-1\right| - \frac{2}{e^t-1} \right)e^{-t};$$

$$x_{\text{ч.н}} = \frac{2}{e^t-1} + 2e^{-t}\ln\left|e^t-1\right| - \frac{2e^{-t}}{e^t-1};$$

$$x_{\text{ч.н}} = \frac{2-2e^{-t}}{e^t-1} + 2e^{-t}\ln\left|e^t-1\right|;$$

$$x_{\text{ч.н}} = \frac{2e^{-t}(e^t - 1)}{e^t - 1} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|;$$

$$x_{\text{ч.н}} = 2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|.$$

Так как $x_{.} = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}}$, то общее решение неоднородного уравнения

$$x = c_1 + c_2e^{-t} + 2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| \cdot$$

Выразим y из первого уравнения исходной системы:

$$y = -2x - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{e^t - 1}$$

Так как

$$x' = -c_2e^{-t} - 2e^{-t} - 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| + 2e^{-t}\frac{e^t}{e^t - 1};$$

$$x' = -c_2e^{-t} - 2e^{-t} - 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| + \frac{2}{e^t - 1},$$

то

$$y = -2\left(c_1 + c_2e^{-t} + 2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-c_2e^{-t} - 2e^{-t} - 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| + \frac{2}{e^t - 1}\right) + \frac{1}{e^t - 1};$$

$$y = -2c_1 - 2c_2e^{-t} - 4e^{-t} - 4e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| +$$

$$+\frac{1}{2}c_2e^{-t} + e^{-t} + e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right| - \frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^t - 1};$$

$$y = -2c_1 - \frac{3}{2}c_2e^{-t} - 3e^{-t} - 3e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|.$$

Следовательно, общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2e^{-t} + 2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|, \\ y = -2c_1 - \frac{3}{2}c_2e^{-t} - 3e^{-t} - 3e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|. \end{cases}$$

14. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные; а $f_i(t)$ – непрерывные на некотором интервале функции.

Данную систему дифференциальных уравнений можно записать в матричной форме

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейные однородные системы

Линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X'(t) = AX(t).$$

Фундаментальной системой решений системы дифференциальных уравнений называется совокупность n линейно независимых решений $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, где

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}.$$

Если $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ – фундаментальная система решений, то общее решение однородной системы имеет вид

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \ldots + c_n X_n(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Чтобы решить линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, можно свести эту систему к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, а также для нахождения фундаментальной системы решений можно использовать методы линейной алгебры.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Ненулевой вектор $\vec{x}_\lambda$ называется собственным вектором линейного оператора A, если

$$A(\vec{x}_\lambda) = \lambda \vec{x}_\lambda.$$

Число λ − собственное значение линейного оператора A, отвечающее собственному вектору $\vec{x}_\lambda$

Число λ является собственным значением линейного оператора A тогда и только тогда, когда λ – корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Это уравнение называется *характеристическим* и записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Для решения системы дифференциальных уравнений $X'(t) = AX(t)$ из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят корни λ_1, λ_2, …, λ_n, а затем для каждого корня λ_i (с учетом кратности) определяется соответствующее ему частное решение $X_{\lambda_k}(t)$. Общее решение системы имеет вид

$$X(t) = c_1 X_{\lambda_1}(t) + c_2 X_{\lambda_2}(t) + \dots + c_n X_{\lambda_n}(t) .$$

При этом возможны следующие случаи:

1) λ_k – действительный корень кратности 1. Тогда

$$X_{\lambda_k}(t) = Y_k e^{\lambda_k t} = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \dots \\ y_{nk} \end{pmatrix} e^{\lambda_k t},$$

где Y_k – собственный вектор линейного оператора A, соответствующий собственному значению λ_k.

2) λ_k – комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения будет также сопряженное с λ_k число $\overline{\lambda}_k$. Вместо комплексных частных решений $X_{\lambda_k}(t) = Y_k e^{\lambda_k t}$ и $X_{\overline{\lambda}_k}(t) = Y_k e^{\overline{\lambda}_k t}$, где Y_k – собственный вектор линейного оператора A, соответствующий собственному значению λ_k, необходимо взять действительные частные решения $X_{1k}(t) = \operatorname{Re} Y_k e^{\lambda_k t}, X_{2k}(t) = \operatorname{Im} Y_k e^{\lambda_k t}$.

3) λ_k – действительный корень кратности r. Тогда соответствующее этому собственному значению частное решение системы ищем в виде вектора

$$X_{\lambda_k}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}t+\ldots+\alpha_{1r}t^{r-1}\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}t+\ldots+\alpha_{2r}t^{r-1}\\ \ldots\\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}t+\ldots+\alpha_{nr}t^{r-1}\end{pmatrix}e^{\lambda_k t},$$

где коэффициенты α_{ij} находим из системы линейных уравнений, которая получается в результате подстановки вектора $X_{\lambda_k}(t)$ в исходную систему после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t.

Пример 14.1. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-y;\end{cases}$ $x(0)=3,\ y(0)=0.$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & -1\end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 6 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-\lambda)(-1-\lambda)-18=0;$$

$$-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2-18=0;$$

$$\lambda^2-\lambda-20=0.$$

Получили собственные значения λ_1 = 5 и λ_2 = –4 (действительные несовпадающие). Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 = 5 и λ_2 = –4. Для этого необходимо решить однородные системы

$$\begin{pmatrix}2-\lambda_{\iota} & 3\\ 6 & -1-\lambda_{\iota}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

При λ_1 = 5 получим систему

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow -3y_1+3y_2=0\Rightarrow y_1=y_2\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 6y_1 + 3y_2 = 0 \Rightarrow 2y_1 = -y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная система решений

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-4t}\right\}.$$

Следовательно, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-4t},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = c_1e^{5t} + c_2e^{-4t}, \\ y = c_1e^{5t} - 2c_2e^{-4t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 3$, $y(0) = 0$. Для этого подставим $t = 0$, $x = 3$ и $y = 0$ в общее решение системы:

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2, \\ 0 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3c_2, \\ c_1 = 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = 2. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x = 2e^{5t} + e^{-4t}, \\ y = 2e^{5t} - 2e^{-4t}. \end{cases}$$

Пример 14.2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0;$$

$$(2-\lambda)^3-(2-\lambda)+2-\lambda+1-1-(2-\lambda)=0;$$

$$8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3-2+\lambda=0;$$

$$6-11\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=0;$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

Первый корень находим подбором среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6, являющихся делителями числа 6.

Легко убедится, что $\lambda=1$ – корень этого уравнения. Разделим многочлен $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$ на многочлен $\lambda-1$:

$$\begin{array}{r|l}
-\ \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 & \lambda-1\\ \cline{2-2}
\underline{\lambda^3-\lambda^2\qquad\qquad\quad} & \lambda^2-5\lambda+6.\\
-\ -5\lambda^2+11\lambda-6 & \\
\underline{-5\lambda^2+5\lambda\quad\ \ } & \\
-\ 6\lambda-6 & \\
\underline{6\lambda-6} & \\
0 &
\end{array}$$

Тогда

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0\,;$$

$$\lambda_1=1 \quad \text{или} \quad \lambda^2-5\lambda+6=0;$$

$$\lambda_2=2,\lambda_3=3.$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ (действительные несовпадающие). Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Для этого необходимо решить однородные системы

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_\iota & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_\iota & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_\iota \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$ получим матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y_1=y_2-y_3=0, \\ \quad y_2=y_3=c, \\ \qquad y_3=c. \end{cases}.$$

Тогда $\vec{x}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$.

При $\lambda_2 = 2$ получим матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1=y_3=c, \\ y_2=y_3=c, \\ y_3=c. \end{cases}$$

Тогда $\vec{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 2$.

При $\lambda_3 = 3$ получим матрицу системы

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_3 - y_2 = c, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = c. \end{cases}$$

Тогда $\vec{x}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 3$.

Следовательно, фундаментальная система решений

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \right\}.$$

Значит, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

т.е. общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}, \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \\ z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}. \end{cases}$$

Пример 14.3. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(-\lambda)+5=0;$$

$$-4\lambda+\lambda^2+5=0;$$

$$\lambda^2-4\lambda+5=0;$$

$$D = 16 - 20 = -4;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} = 2\pm i.$$

Тогда получили собственные значения $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$ (комплексные сопряженные). Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$. Для этого необходимо решить однородную систему

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & -5 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 2 + i$ получим систему

$$\begin{pmatrix} 4-2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 2-i & (-2-i)(2-i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 2-i & -4-2i+2i+i^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 2-i & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (2-i)y_1 - 5y_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, этому значению λ соответствует решение

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i\sin t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ie^{2t}\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_1(t)=\mathrm{Re}\left(e^{2t}\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix}+ie^{2t}\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+2\sin t\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix};$$

$$X_2(t)=\mathrm{Im}\left(e^{2t}\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix}+ie^{2t}\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+2\sin t\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+2\sin t\end{pmatrix}.$$

Получили фундаментальную систему решений

$$\left\{e^{2t}\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+2\sin t\end{pmatrix}\right\}.$$

Следовательно, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+2\sin t\end{pmatrix}.$$

т.е.

$$\begin{cases}x=5c_1e^{2t}\cos t+5c_2e^{2t}\sin t,\\y=c_1e^{2t}(2\cos t+\sin t)+c_2e^{2t}(2\sin t-\cos t).\end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=1$. Для этого подставим $t=0$, $x=0$ и $y=1$ в общее решение системы:

$$\begin{cases}0=5c_1,\\1=2c_1-c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=0,\\c_2=-1.\end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases}x=-5e^{2t}\sin t,\\y=e^{2t}(\cos t-2\sin t).\end{cases}$$

Пример 14.4. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\\dfrac{dy}{dt}=4y-x;\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=2.$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(2-\lambda)+1=0;$$

$$8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2+1=0;$$

$$\lambda^2-6\lambda+9=0;$$

$$(\lambda-3)^2=0;$$

$$\lambda_{1,2}=3.$$

Получили собственное значение $\lambda = 3$ (действительный корень кратности 2).

Решение системы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \end{pmatrix} e^{3t} \text{ или } \begin{cases} x=(\alpha_1+\beta_1 t)e^{3t}, \\ y=(\alpha_2+\beta_2 t)e^{3t}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x'=3(\alpha_1+\beta_1 t)e^{3t}+\beta_1 e^{3t}, \\ y'=3(\alpha_2+\beta_2 t)e^{3t}+\beta_2 e^{3t}. \end{cases}$$

После подстановки в исходную систему получим

$$\begin{cases} 3(\alpha_1+\beta_1 t)e^{3t}+\beta_1 e^{3t}=2(\alpha_1+\beta_1 t)e^{3t}+(\alpha_2+\beta_2 t)e^{3t}, \\ 3(\alpha_2+\beta_2 t)e^{3t}+\beta_2 e^{3t}=4(\alpha_2+\beta_2 t)e^{3t}-(\alpha_1+\beta_1 t)e^{3t}. \end{cases}$$

Сократим первое и второе уравнения системы на e^{3t}:

$$\begin{cases} 3\alpha_1+3\beta_1 t+\beta_1=2\alpha_1+2\beta_1 t+\alpha_2+\beta_2 t, \\ 3\alpha_2+3\beta_2 t+\beta_2=4\alpha_2+4\beta_2 t-\alpha_1-\beta_1 t. \end{cases}$$

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях уравнений:

$$\begin{cases} 3\beta_1 = 2\beta_1 + \beta_2, \\ 3\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 3\beta_2 = 4\beta_2 - \beta_1, \\ 3\alpha_2 + \beta_2 = 4\alpha_2 - \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_2, \\ \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2, \\ \beta_2 = \beta_1, \\ -\alpha_2 + \beta_2 = -\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_2, \\ \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Обозначим $\beta_1 = c_1$, $\alpha_1 = c_2$, тогда

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_2 = c_1, \\ c_1 + c_2 = \alpha_2. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение системы

$$\begin{cases} x = (c_2 + c_1 t)e^{3t}, \\ y = (c_1 + c_2 + c_1 t)e^{3t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = 2$. Для этого подставим $t = 0$, $x = 1$ и $y = 2$ в общее решение системы:

$$\begin{cases} 1 = c_2, \\ 2 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = 1. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x = (1 + t)e^{3t}, \\ y = (2 + t)e^{3t}. \end{cases}$$

Пример 14.5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda(2\lambda + \lambda^2 + 16) - 8 \cdot 4 = 0;$$

$$\lambda(2\lambda + \lambda^2 + 16) + 32 = 0;$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0;$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) + 16(\lambda + 2) = 0;$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 16) = 0;$$

$$\lambda_1 = -2, \; \lambda_{2,3} = \pm 4i.$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4i$, $\lambda_3 = -4i$. Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4i$. Для этого необходимо решить однородные системы

$$\begin{pmatrix} -\lambda_\iota & 8 & 0 \\ 0 & -\lambda_\iota & -2 \\ 2 & 8 & -2-\lambda_\iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = -2$ получим матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4y_2 = -4c, \\ y_2 = y_3 = c, \\ y_3 = c. \end{cases}$$

Тогда $\vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -2$. Значит, действительному корню $\lambda_1 = -2$ соответствует решение $X_1(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

При $\lambda_2 = 4i$ получим матрицу системы

$$\begin{pmatrix} -4i & 8 & 0 \\ 0 & -4i & -2 \\ 2 & 8 & -2-4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 1 & 4 & -2i-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ i & 4i & 2-i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 4i+2 & 2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 2i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} iy_1 = 2y_2, \\ 2iy_2 = -y_3, \\ y_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2ic, \\ y_3 = -2ic, \\ y_2 = c. \end{cases}$$

Тогда $\vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 4i$.

Следовательно, значению $\lambda_2 = 4i$ соответствует решение

$$X(t) = \vec{x}_{\lambda_2} e^{4it} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{4it} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} (\cos 4t + i \sin 4t) = \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_2(t) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix};$$

$$X_3(t) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix}.$$

Получили фундаментальную систему решений

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}; \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix} \right\}.$$

Значит, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2\cos 4t \\ \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = -4c_1 e^{-2t} + 2c_2 \sin 4t - 2c_3 \cos 4t, \\ y = c_1 e^{-2t} + 2c_2 \cos 4t + c_3 \sin 4t, \\ z = c_1 e^{-2t} + 2c_2 \sin 4t - 2c_3 \cos 4t. \end{cases}$$

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(t_0) = x_0^1,\ \ x_2(t_0) = x_0^2,\ \ \ldots,\ \ x_n(t_0) = x_0^n$.

Решение $X_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ системы дифференциальных уравнений называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $\boldsymbol{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

для всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ неравенство $|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$ не выполняется, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым*.

Другим словами, решение системы $X_0(t)$ будет устойчивым, если все достаточно близкие к нему в начальный момент времени решения остаются близкими и при $t > t_0$.

Устойчивое решение $X_0(t)$ системы дифференциальных уравнений называется *асимптотически устойчивым*, если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения системы $X(t)$, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

выполнено условие:

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t) - \varphi_\iota(t)| = 0,\ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Классификация положений равновесия линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

причем $\det A \neq 0$.

Точка (0,0), в которой правые части уравнения системы обращаются в ноль, называется *точкой покоя системы*.

Для исследования точки покоя системы необходимо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найти его корни λ_1, λ_2.

Возможны следующие случаи.

1. Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 − действительные несовпадающие ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$):

а) если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым узл*ом (рис. 15.1);

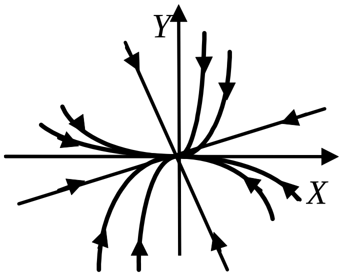

Рис. 15.1

б) если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым узлом* (рис. 15.2);

в) если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, то точка покоя неустойчива и называется *седлом* (рис. 15.3).

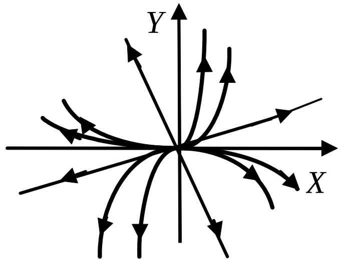

Рис. 15.2

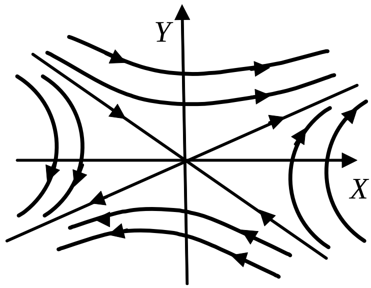

Рис. 15.3

2. Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 − комплексные ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$):

а) если $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым фокусом* (рис. 15.4);

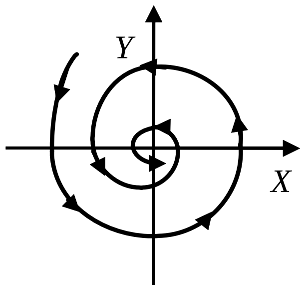

Рис. 15.4

б) если $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым фокусом* (рис. 15.5);

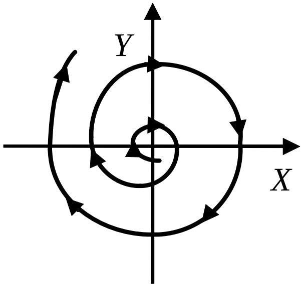

Рис. 15.5

в) если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя устойчива и называется *центром* (рис. 15.6).

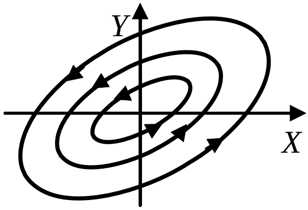

Рис. 15.6

3. Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 − действительные совпадающие ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$):

а) если $\lambda < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым вырожденным узлом* (рис. 15.7). Если, в частности, система имеет вид $\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$, то особая точка – дикритический узел;

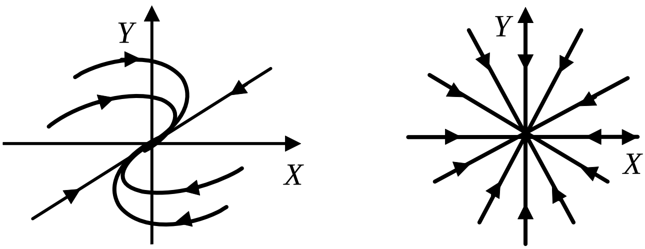

Рис. 15.7

б) если $\lambda > 0$, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым вырожденным узлом* (рис. 15.8).

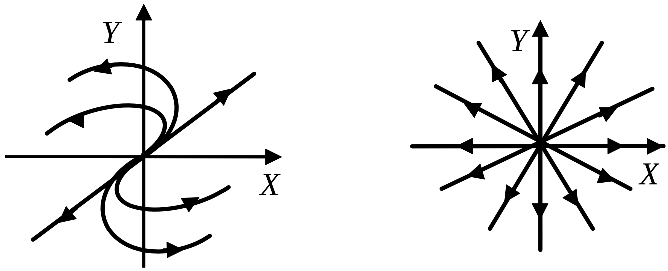

Рис. 15.8

Пример 15.1. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя и найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (8-\lambda)(1-\lambda) + 6 = 0;$$

$$8 - \lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 6 = 0;$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ (действительные несовпадающие). Так как $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то точка покоя неустойчива. Положение равновесия – неустойчивый узел.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$. Для этого необходимо решить однородные системы

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda_1 & -3 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 2$ получим систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 2y_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 - 3y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 3y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная система решений

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}\right\}.$$

Следовательно, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = c_1e^{2t} + 3c_2e^{7t}, \\ y = 2c_1e^{2t} + c_2e^{7t}. \end{cases}$$

Итак, точка покоя (0, 0) − неустойчивый узел; общее решение системы

$$\begin{cases} x = c_1e^{2t} + 3c_2e^{7t}, \\ y = 2c_1e^{2t} + c_2e^{7t}. \end{cases}$$

Пример 15.2. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя и найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-\lambda)(4-\lambda)-15=0;$$

$$8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2-15=0;$$

$$\lambda^2-6\lambda-7=0.$$

Получили собственные значения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=7$ (действительные несовпадающие). Так как $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$, то точка покоя неустойчива. Положение равновесия – седло.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=7$. Для этого необходимо решить однородные системы

$$\begin{pmatrix}2-\lambda_\iota & 3\\ 5 & 4-\lambda_\iota\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=-1$ получим систему

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow y_1+y_2=0\Rightarrow y_1=-y_2\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2=7$

$$\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow 5y_1-3y_2=0\Rightarrow 5y_1=3y_2\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная система решений

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}e^{-t},\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}e^{7t}\right\}.$$

Следовательно, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{7t},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{7t}, \\ y = c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{7t}. \end{cases}$$

Итак, точка покоя (0, 0) – седло, неустойчива; общее решение системы $\begin{cases} x = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{7t}, \\ y = c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{7t}. \end{cases}$

Пример 15.3. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя и найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$

Решение

Запишем матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3-\lambda)(1-\lambda) + 8 = 0;$$

$$-3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 8 = 0;$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0;$$

$$D = 4 - 20 = -16;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$ (комплексные). Так как $\alpha = -1 < 0$, то точка покоя (0, 0) асимптотически устойчива. Положение равновесия – устойчивый фокус.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = -1 + 2i$. Для этого необходимо решить однородную систему

$$\begin{pmatrix} -3-\lambda_1 & 4 \\ -2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = -1 + 2i$ получим систему

$$\begin{pmatrix} -3+1-2i & 4 \\ -2 & 1+1-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -2-2i & 4 \\ -2 & 2-2i \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1+i & i^2-1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1+i & -2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow (1+i)y_1-2y_2=0\Rightarrow\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, этому значению λ соответствует решение

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{(-1+2i)t}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t)=e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix}+$$

$$+ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix};$$

$$X_1(t)=\mathrm{Re}\left(e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix}+ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix}\right)=$$

$$=e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix};$$

$$X_2(t)=\mathrm{Im}\left(e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix}+ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix}\right)=$$

$$=e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix};\ e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix}\right\}.$$

Следовательно, общее решение системы в векторном виде может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{-t}\cos 2t + 2c_2 e^{-t}\sin 2t, \\ y = c_1 e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t). \end{cases}$$

Итак, точка покоя (0,0) – устойчивый фокус; общее решение системы

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{-t}\cos 2t + 2c_2 e^{-t}\sin 2t, \\ y = c_1 e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t). \end{cases}$$

16. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Общие сведения о преобразовании Лапласа

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t) \equiv 0$, если $t < 0$;

2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;

3) с возрастанием t модуль функции $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е. существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $t > 0$ имеем

$$\left| f(t) \right| < Me^{\delta t}.$$

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, где $s > \delta$, определяемая равенством $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

Тот факт, что функция $F(p)$ есть изображение $f(t)$, будем символически записывать так:

$$F(p) \doteqdot f(t).$$

Функция $F(p)$, определена в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > \delta$ и является в этой полуполосе аналитической функцией.

Свойства преобразования Лапласа

Пусть $F(p) \doteqdot f(t), G(p) \doteqdot g(t), \mathrm{Re}\, p > \delta$.

1. *Свойство линейности*. Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p).$$

2. *Теорема подобия*. Для любого постоянного $a > 0$

$$f(at) \doteqdot \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

3. *Дифференцирование оригинала*. Если функции $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0);$$
$$f''(t) \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

4. *Теорема смещения изображения* (умножение оригинала на показательную функцию). Для любого комплексного числа λ

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot F(p - \lambda).$$

5. *Дифференцирование изображения*. Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала:

$$F'(p) \doteqdot -tf(t);$$
$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t).$$

6. *Интегрирование оригинала*. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

7. *Интегрирование изображения*. Если интеграл $\int_p^{+\infty} F(u) du$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\int_p^{+\infty} F(u) du \doteqdot \frac{f(t)}{t}.$$

8. *Теорема запаздывания*. Для любого положительного числа τ

$$f(t - \tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p).$$

9. *Теорема умножения изображений*. Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем

$$F(p)G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части равенства называется *сверткой функций* $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается символом (fg).

Нахождение оригиналов дробно-рациональных функций

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$, где $F(p)=\dfrac{S(p)}{Q(p)}$ – правильная рациональная дробь; $\dfrac{S(p)}{Q(p)}$ раскладывают на сумму простейших дробей и находят для каждой из них оригинал, используя приведенные выше свойства преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (табл. 16.1).

Таблица 16.1

Таблица оригиналов и изображений

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t\sin\beta t$	$\dfrac{2\beta p}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}t\cos\beta t$	$\dfrac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{\left((p-\alpha)^2+\beta^2\right)^2}$
$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}t\sin\beta t$	$\dfrac{2\beta(p-\alpha)}{\left((p-\alpha)^2+\beta^2\right)^2}$
$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$	$t^n\cos\beta t$	$n!\dfrac{\mathrm{Re}((p+i\beta)^{n+1})}{\left(p^2+\beta^2\right)^{n+1}}$
$\mathrm{ch}\,\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$	$t^n\sin\beta t$	$n!\dfrac{\mathrm{Im}((p+i\beta)^{n+1})}{\left(p^2+\beta^2\right)^{n+1}}$

В результате, нахождение оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)=\dfrac{S(p)}{Q(p)}$ сведется к нахождению оригиналов изображений следующего вида

$$\frac{A}{p-\alpha},\ \frac{A}{(p-\alpha)^k},\ \frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k}.$$

Тогда

$$\frac{A}{p-\alpha} \doteqdot Ae^{\alpha t};$$

$$\frac{A}{(p-\alpha)^k} \doteqdot \frac{t^{k-1}e^{\alpha t}}{(k-1)!}.$$

Для нахождения оригинала изображения $\dfrac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k}$ необходимо в знаменателе выделить полный квадрат по переменной p.

Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Будем считать, что $a_n \neq 0$ и что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до n-го порядка включительно являются функциями-оригиналами.

Пусть $x(t) \doteqdot X(p), f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0);$$

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0);$$

....

$$x^{(n)}(t) \doteqdot p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0).$$

Применяя к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа и пользуясь свойствами линейности преобразования, получаем операторное уравнение

$$a_n\left(p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)\right) + \ldots + a_1\left(pX(p) - x(0)\right) + \\ + a_0 X(p) = F(p).$$

Решаем операторное уравнение относительно $X(p)$, а затем для оригинала $X(p)$ находим его изображение, которое и будет решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям.

Решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения, только вместо одного операторного уравнения получается система операторных уравнений.

Пример 16.1. Найти изображение функции $f(t)=e^{4t}$.

Решение

Для функции $f(t)=e^{4t}$ имеем $\delta = 4$, поэтому изображение $F(p)$ определено при $\operatorname{Re} p > 4$. Найдем изображение данной функции по формуле

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt .$$

Тогда

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{4t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{4t-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-4)t}dt=\left.\frac{e^{-(p-4)t}}{-(p-4)}\right|_0^{+\infty}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{e^{-(p-4)b}}{-(p-4)}-\frac{1}{-(p-4)}=\frac{1}{p-4},$$

так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^{-(p-4)b}}{-(p-4)}=0$ при $\operatorname{Re} p > 4$.

Итак,

$$e^{4t}\risingdotseq\frac{1}{p-4}.$$

Пример 16.2. Найти изображение функции $f(t)=t^2$.

Решение

Для функции $f(t)=t^2$ имеем $\delta = 0$, поэтому изображение $F(p)$ определено при $\operatorname{Re} p > 0$. Найдем изображение данной функции по формуле

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\ .$$

Тогда

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-pt}dt=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям:}\\ u=t^2,\quad dv=e^{-pt}dt,\\ du=2tdt,\ v=\int e^{-pt}dt=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{array}\right|=$$

$$=-t^2\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{2te^{-pt}}{p}dt=-\lim_{b\to+\infty}b^2\frac{e^{-pb}}{p}+\frac{2}{p}\int\limits_0^{+\infty}te^{-pt}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям:}\\ u=t,\quad dv=e^{-pt}dt,\\ du=dt,\ v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{array}\right|=0+\frac{2}{p}\left(-t\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{p}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{p}\left(-\lim_{b\to+\infty}b\frac{e^{-pb}}{p}+\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}dt\right)=-\frac{2}{p^2}\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{2}{p^3}\lim_{b\to+\infty}e^{-pt}+\frac{2}{p^3}=\frac{2}{p^3}\ ,$$

так как при $\operatorname{Re}p>0$

$$\lim_{b\to+\infty}e^{-pt}=0;$$

$$\lim_{b\to+\infty}b\frac{e^{-pb}}{p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{pe^{pb}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{pe^{pb}}=0;$$

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2e^{-pb}}{p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{pe^{pb}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\frac{2b}{p^2e^{pb}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{p^3e^{pb}}=0.$$

Итак,

$$t^2\doteqdot\frac{2}{p^3}\,.$$

Пример 16.3. Найти изображение функции $f(t)=\cos t$.

Решение

Найдем изображение данной функции по формуле

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt .$$

Так как $f(t)=\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, то

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{it-pt}dt+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-it-pt}dt=$$

$$=\left.\frac{e^{it-pt}}{2(i-p)}\right|_0^{+\infty}+\left.\frac{e^{-it-pt}}{2(-i-p)}\right|_0^{+\infty}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{e^{-(p-i)t}}{2(i-p)}-\frac{1}{2(i-p)}+\lim_{b\to+\infty}\frac{e^{-(p+i)t}}{2(-i-p)}-\frac{1}{2(-i-p)}=$$

$$=-\frac{1}{2(i-p)}+\frac{1}{2(i+p)}=$$

$$=\frac{i-p-i-p}{2(i-p)(i+p)}=\frac{-p}{i^2-p^2}=\frac{-p}{-1-p^2}=\frac{p}{p^2+1},$$

так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{e^{-(p-i)t}}{2(i-p)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{e^{-(p+i)t}}{2(-i-p)}=0$.

Итак, получили $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

Пример 16.4. Решить задачу Коши: $x''+3x'=e^t$, $x(0)=0, x'(0)=-1$.

Решение

Пусть

$$x(t)\risingdotseq X(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1.$$

По таблице оригиналов и изображений

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Применив к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^2 X(p) + 1 + 3pX(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Выразим отсюда $X(p)$:

$$(p^2 + 3p)X(p) = \frac{1}{p-1} - 1;$$

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+3p)} - \frac{1}{(p^2+3p)};$$

$$X(p) = \frac{1 - p + 1}{(p-1)(p^2+3p)};$$

$$X(p) = \frac{2-p}{(p-1)(p^2+3p)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2+3p)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2-p}{(p-1)p(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+3} =$$

$$= \frac{Ap(p+3) + B(p-1)(p+3) + Cp(p-1)}{(p-1)(p+3)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A, B и C.

$$2 - p = Ap(p+3) + B(p-1)(p+3) + Cp(p-1).$$

Подставим $p = -3$:

$$5 = 12C \Rightarrow C = \frac{5}{12}.$$

Подставим $p = 1$:

$$1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Подставим $p = 0$:

$$2 = -3B \Rightarrow B = -\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{2-p}{(p-1)p(p+3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем решение задачи Коши:

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{2}{3} + \frac{5}{12}e^{-3t}.$$

Пример 16.5. Решить задачу Коши: $x'' + 2x' = 5\cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 4$.

Решение

Пусть

$$x(t) \risingdotseq X(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 4.$$

По таблице оригиналов и изображений

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}.$$

Применив к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^2X(p) - p - 4 + 2pX(p) - 2 = \frac{5p}{p^2+1}.$$

Выразим отсюда $X(p)$:

$$(p^2+2p)X(p)=\frac{5p}{p^2+1}+6+p;$$

$$X(p)=\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p)}+\frac{6+p}{p^2+2p};$$

$$X(p)=\frac{5}{(p^2+1)(p+2)}+\frac{6+p}{p^2+2p}.$$

Разложим дробь $\dfrac{5}{(p^2+1)(p+2)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{5}{(p^2+1)(p+2)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p+2}=\frac{(Ap+B)(p+2)+C(p^2+1)}{(p^2+1)(p+2)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A, B и C:

$$5=(Ap+B)(p+2)+C(p^2+1).$$

Подставим $p=-2$:

$$5=5C\Rightarrow C=1.$$

Подставим $p=0$:

$$5=2B+C;$$
$$5=2B+1\Rightarrow B=2.$$

Подставим $p=1$:

$$5=3A+3B+2C;$$
$$5=3A+6+2\Rightarrow A=-1.$$

Тогда

$$\frac{5}{(p^2+1)(p+2)}=\frac{-p+2}{p^2+1}+\frac{1}{p+2}.$$

Разложим дробь $\dfrac{6+p}{p^2+2p}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{6+p}{p^2+2p}=\frac{6+p}{(p+2)p}=\frac{D}{p}+\frac{M}{p+2}=\frac{D(p+2)+Mp}{p(p+2)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты D и M.

$$6+p=D(p+2)+Mp.$$

Подставим $p = -2$:

$$4=-2M \Rightarrow M=-2.$$

Подставим $p = 0$:

$$6=2D \Rightarrow D=3.$$

Тогда

$$\frac{6+p}{p^2+2p}=\frac{3}{p}-\frac{2}{p+2}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{-p+2}{p^2+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{3}{p}-\frac{2}{p+2};$$

$$X(p)=\frac{2}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{3}{p}-\frac{1}{p+2}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем решение задачи Коши:

$$x(t)=2\sin t-\cos t+3-e^{-2t}.$$

Пример 16.6. Решить задачу Коши: $x''+4x=10te^t+8\sin 2t$, $x(0) =$ $= 0$, $x'(0) = 1$.

Решение

Пусть

$$x(t) \doteqdot X(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$x''(t) \doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1.$$

По таблице оригиналов и изображений

$$te^t \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2};$$

$$\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}.$$

Применив к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 1 + 4X(p) = \frac{10}{(p-1)^2} + \frac{16}{p^2+4}.$$

Выразим отсюда $X(p)$:

$$(p^2+4)X(p) = \frac{10}{(p-1)^2} + \frac{16}{p^2+4} + 1;$$

$$X(p) = \frac{10}{(p^2+4)(p-1)^2} + \frac{16}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{(p^2+4)}.$$

Разложим дробь $\frac{10}{(p^2+4)(p-1)^2}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{10}{(p^2+4)(p-1)^2} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{(p-1)^2} =$$

$$= \frac{(Ap+B)(p-1)^2 + C(p^2+4)(p-1) + D(p^2+4)}{(p^2+4)(p-1)^2}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A, B, C и D:

$$10 = (Ap+B)(p-1)^2 + C(p^2+4)(p-1) + D(p^2+4).$$

Подставим $p = 1$:

$$10 = 5D \Rightarrow D = 2.$$

Далее приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p, получим следующую систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B-2A-C+D=0, \\ -2B+A+4C=0, \\ D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C, \\ B+2C-C+2=0, \\ -2B-C+4C=0, \\ D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C, \\ B=-C-2, \\ 2C+4+3C=0, \\ D=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C, \\ B=-C-2, \\ 5C=-4, \\ D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{5}, \\ B=-\dfrac{6}{5}, \\ C=-\dfrac{4}{5}, \\ D=2. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{10}{(p^2+4)(p-1)^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{4p-6}{p^2+4} - \frac{4}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+4} - \frac{6}{5}\frac{1}{p^2+4} - \frac{4}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{16}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{(p^2+4)};$$

$$X(p) = \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4} - \frac{4}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{16}{(p^2+4)^2}.$$

Так как

$$\frac{16}{(p^2+4)^2} = 2\frac{(p^2+4)-(p^2-4)}{(p^2+4)^2} = \frac{2}{p^2+4} - \frac{2(p^2-4)}{(p^2+4)^2},$$

то

$$X(p) = \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4} - \frac{4}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{2}{p^2+4} - \frac{2(p^2-4)}{(p^2+4)^2};$$

$$X(p) = \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+4} + \frac{9}{5}\frac{1}{p^2+4} - \frac{4}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2} - \frac{2(p^2-4)}{(p^2+4)^2}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем решение задачи Коши:

$$x(t) = \frac{4}{5}\cos 2t + \frac{9}{5}\sin 2t - \frac{4}{5}e^t + 2te^t - 2t\cos 2t.$$

Пример 16.7. Решить задачу Коши: $x'' - 2x' + 5x = 7 - 5t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Решение

Пусть

$$x(t) \doteqdot X(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

По таблице оригиналов и изображений

$$1 \doteqdot \frac{1}{p};$$

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}.$$

Применив к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^2X(p) - 2pX(p) + 5X(p) = \frac{7}{p} - \frac{5}{p^2}.$$

Выразим отсюда $X(p)$:

$$X(p)(p^2 - 2p + 5) = \frac{7}{p} - \frac{5}{p^2};$$

$$X(p)(p^2 - 2p + 5) = \frac{7p - 5}{p^2};$$

$$X(p) = \frac{7p - 5}{p^2(p^2 - 2p + 5)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{7p - 5}{p^2(p^2 - 2p + 5)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{7p-5}{p^2(p^2-2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{Ap(p^2-2p+5)+B(p^2-2p+5)+(Cp+D)p^2}{p^2(p^2-2p+5)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A, B, C и D:

$$7p-5=Ap(p^2-2p+5)+B(p^2-2p+5)+(Cp+D)p^2.$$

Подставим $p = 0$:

$$-5=5B\Rightarrow B=-1.$$

Далее приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p, получим следующую систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -2A+B+D=0, \\ 5A-2B=7, \\ B=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=-A, \\ -2A-1+D=0, \\ 5A+2=7, \\ B=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=-1, \\ D=3, \\ A=1, \\ B=-1. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{7p-5}{p^2(p^2-2p+5)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p-3}{p^2-2p+5}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{7p-5}{p^2(p^2-2p+5)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p-3}{p^2-2p+5}.$$

Так как

$$\frac{p-3}{p^2-2p+5}=\frac{p-3}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1-2}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-\frac{2}{(p-1)^2+4},$$

то

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{2}{(p-1)^2+4}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем решение задачи Коши:

$$x(t)=1-t-e^t\cos 2t+e^t\sin 2t.$$

Пример 16.8. Решить задачу Коши: $x^{(IV)}+2x''+x=t,\ \ x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=0$.

Решение

Пусть

$$x(t)\risingdotseq X(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p);$$

$$x'''(t)\risingdotseq p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p);$$

$$x^{(IV)}(t)\risingdotseq p^4X(p)-p^3x(0)-p^2x'(0)-px''(0)-x'''(0)=p^4X(p).$$

По таблице оригиналов и изображений

$$t\risingdotseq\frac{1}{p^2}.$$

Применив к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^4X(p)+2p^2X(p)+X(p)=\frac{1}{p^2}.$$

Выразим отсюда $X(p)$:

$$X(p)(p^4+2p^2+1)=\frac{1}{p^2};$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p^4+2p^2+1)};$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}.$$

Разложим дробь $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}+\frac{Mp+N}{\left(p^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{Ap\left(p^2+1\right)^2+B\left(p^2+1\right)^2+(Cp+D)p^2\left(p^2+1\right)+\left(Mp+N\right)p^2}{p^2\left(p^2+1\right)^2}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *M* и *N*:

$$1=Ap\left(p^2+1\right)^2+B\left(p^2+1\right)^2+(Cp+D)p^2\left(p^2+1\right)+\left(Mp+N\right)p^2;$$

$$1=Ap^5+2Ap^3+Ap+Bp^4+2Bp^2+B+Cp^5+Cp^3+Dp^4+$$
$$+Dp^2+Mp^3+Np^2.$$

Подставим $p = 0$:

$$1 = B.$$

Далее приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p, получим следующую систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 2A+C+M=0, \\ 2B+D+N=0, \\ A=0, \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0, \\ D=-1, \\ M=0, \\ N=-1, \\ A=0, \\ B=1. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(p^2+1\right)-\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(p^2+1\right)}-\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2},$$

то

$$X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(p^2+1\right)}+\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2};$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{3}{2}\frac{1}{\left(p^2+1\right)}+\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем решение задачи Коши:

$$x(t)=t-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}t\cos t.$$

Пример 16.9. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+2y,\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1.$

Решение

Пусть

$$x(t)\risingdotseq X(p);$$
$$y(t)\risingdotseq Y(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1;$$
$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$$

Переходя к операторной системе, получаем

$$\begin{cases}pX(p)-1=-Y(p),\\ pY(p)-1=2X(p)+2Y(p)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pX(p)+Y(p)=1,\\ -2X(p)+(p-2)Y(p)=1.\end{cases}$$

Запишем матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix}p & 1\\ -2 & p-2\end{pmatrix}.$$

Решим данную систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$ с помощью формул Крамера:

$$X(p)=\frac{\det A_1}{\det A};\ Y(p)=\frac{\det A_2}{\det A},$$

где det A – определитель матрицы A;

det A_1 – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой первого столбца на столбец свободных членов;

det A_2 – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой второго столбца на столбец свободных членов.

Найдем определители det$A$, detA_1 и detA_2:

$$\det A=\begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & p-2 \end{vmatrix}=p^2-2p+2;$$

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix}=p-2-1=p-3;$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=p+2.$$

Тогда получим решение системы операторных уравнений

$$X(p)=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{p-3}{p^2-2p+2}=\frac{p-3}{(p-1)^2+1}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{2}{(p-1)^2+1};$$

$$Y(p)=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{p+2}{p^2-2p+2}=\frac{p+2}{(p-1)^2+1}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{3}{(p-1)^2+1}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{2}{(p-1)^2+1}\doteqdot e^t\cos t-2e^t\sin t;$$

$$Y(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{3}{(p-1)^2+1}\doteqdot e^t\cos t+3e^t\sin t.$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x(t)=e^t\cos t-2e^t\sin t, \\ y(t)=e^t\cos t+3e^t\sin t. \end{cases}$$

Пример 16.10. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

Решение

Пусть

$$x(t) \risingdotseq X(p);$$
$$y(t) \risingdotseq Y(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$
$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p).$$

Далее, по таблице оригиналов и изображений

$$e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3};$$
$$e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}.$$

Переходя к операторной системе, получаем

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 5X(p) - 3Y(p) + \dfrac{2}{p-3}, \\ pY(p) = X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-5)X(p) + 3Y(p) = \dfrac{2}{p-3} + 1, \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{5}{p+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-5)X(p) + 3Y(p) = \dfrac{p-1}{p-3}, \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{5}{p+1}. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} p-5 & 3 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Решим данную систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$ с помощью формул Крамера:

$$X(p)=\frac{\det A_1}{\det A};\ Y(p)=\frac{\det A_2}{\det A},$$

где $\det A$ – определитель матрицы A;

$\det A_1$ – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой первого столбца на столбец свободных членов;

$\det A_2$ – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой второго столбца на столбец свободных членов.

Найдем определители $\det A$, $\det A_1$ и $\det A_2$:

$$\det A=\begin{vmatrix} p-5 & 3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix}=(p-5)(p-1)+3=p^2-5p-p+5+3=$$
$$=p^2-6p+8=(p-4)(p-2);$$

$$\det A_1=\begin{vmatrix} \dfrac{p-1}{p-3} & 3 \\ \dfrac{5}{p+1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{(p-1)^2}{p-3}-\frac{15}{p+1}=\frac{\left(p^2-2p+1\right)(p+1)-15(p-3)}{(p-3)(p+1)}=$$
$$=\frac{p^3-2p^2+p+p^2-2p+1-15p+45}{(p-3)(p+1)}=\frac{p^3-p^2-16p+46}{(p-3)(p+1)};$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} p-5 & \dfrac{p-1}{p-3} \\ -1 & \dfrac{5}{p+1} \end{vmatrix}=\frac{5(p-5)}{p+1}+\frac{p-1}{p-3}=\frac{5(p-5)(p-3)+(p-1)(p+1)}{(p+1)(p-3)}=$$
$$=\frac{5\left(p^2-5p-3p+15\right)+p^2-1}{(p+1)(p-3)}=\frac{6p^2-40p+74}{(p+1)(p-3)}.$$

Тогда получим решение системы операторных уравнений

$$X(p)=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{p^3-p^2-16p+46}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)};$$

$$Y(p)=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{6p^2-40p+74}{(p+1)(p-3)(p-4)(p-2)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{p^3-p^2-16p+46}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{p^3-p^2-16p+46}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-4}+\frac{D}{p-2}=$$

$$=\frac{A(p+1)(p-4)(p-2)+B(p-3)(p-4)(p-2)}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}+$$

$$+\frac{C(p-3)(p+1)(p-2)+D(p-3)(p+1)(p-4)}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты *A*, *B*, *C* и *D*:

$$A(p+1)(p-4)(p-2)+B(p-3)(p-4)(p-2)+C(p-3)(p+1)(p-2)+$$
$$+D(p-3)(p+1)(p-4)=p^3-p^2-16p+46.$$

Подставим $p=-1$:

$$B(-4)(-5)(-3)=-1-1+16+46;$$
$$-60B=60\Rightarrow B=-1.$$

Подставим $p=4$:

$$C\cdot 5\cdot 2=64-16-64+46;$$
$$10C=30\Rightarrow C=3.$$

Подставим $p=2$:

$$D(-1)\cdot 3(-2)=8-4-32+46;$$
$$6D=18\Rightarrow D=3.$$

Подставим $p=3$:

$$A\cdot 4(-1)=27-9-48+46;$$
$$-4A=16\Rightarrow A=-4.$$

Тогда

$$\frac{p^3-p^2-16p+46}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}=-\frac{4}{p-3}-\frac{1}{p+1}+\frac{3}{p-4}+\frac{3}{p-2}.$$

Разложим дробь $\frac{6p^2-40p+74}{(p+1)(p-3)(p-4)(p-2)}$. на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{6p^2-40p+74}{(p+1)(p-3)(p-4)(p-2)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-4}+\frac{D}{p-2}=$$

$$=\frac{A(p+1)(p-4)(p-2)+B(p-3)(p-4)(p-2)}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}+$$

$$+\frac{C(p-3)(p+1)(p-2)+D(p-3)(p+1)(p-4)}{(p-3)(p+1)(p-4)(p-2)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A, B, C и D:

$$A(p+1)(p-4)(p-2)+B(p-3)(p-4)(p-2)+C(p-3)(p+1)(p-2)+$$
$$+D(p-3)(p+1)(p-4)=6p^2-40p+74.$$

Подставим $p=-1$:

$$B(-4)(-5)(-3)=6+40+74;$$
$$-60B=120\Rightarrow B=-2.$$

Подставим $p=4$:

$$C\cdot 5\cdot 2=6\cdot 16-160+74;$$
$$10C=10\Rightarrow C=1.$$

Подставим $p=2$:

$$D(-1)\cdot 3(-2)=24-80+74;$$
$$6D=18\Rightarrow D=3.$$

Подставим $p=3$:

$$A\cdot 4(-1)=54-120+74;$$
$$-4A=8\Rightarrow A=-2.$$

Тогда

$$\frac{6p^2-40p+74}{(p+1)(p-3)(p-4)(p-2)}=-\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p-4}+\frac{3}{p-2}.$$

Следовательно,

$$X(p) = -\frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1} + \frac{3}{p-4} + \frac{3}{p-2};$$
$$Y(p) = -\frac{2}{p-3} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p-4} + \frac{3}{p-2}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p) \doteqdot -4e^{3t} - e^{-t} + 3e^{4t} + 3e^{2t};$$
$$Y(p) \doteqdot -2e^{3t} - 2e^{-t} + e^{4t} + 3e^{2t}.$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x(t) = -4e^{3t} - e^{-t} + 3e^{4t} + 3e^{2t}, \\ y(t) = -2e^{3t} - 2e^{-t} + e^{4t} + 3e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 16.11. Решить задачу Коши системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

Решение

Пусть

$$x(t) \doteqdot X(p);$$
$$y(t) \doteqdot Y(p);$$
$$z(t) \doteqdot Z(p)$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$
$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$
$$z'(t) \doteqdot pZ(p) - z(0) = pZ(p).$$

Переходя к операторной системе, получаем

$$\begin{cases} pX(p)-1=2X(p)-Y(p)+Z(p), \\ pY(p)-1=X(p)+Z(p), \\ pZ(p)=-3X(p)+Y(p)-2Z(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-2)X(p)+Y(p)-Z(p)=1, \\ -X(p)+pY(p)-Z(p)=1, \\ 3X(p)-Y(p)+(p+2)Z(p)=0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix} p-2 & 1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ 3 & -1 & p+2 \end{pmatrix}.$$

Решим данную систему относительно $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ с помощью формул Крамера:

$$X(p)=\frac{\det A_1}{\det A};\ Y(p)=\frac{\det A_2}{\det A};\ Z(p)=\frac{\det A_3}{\det A},$$

где $\det A$ – определитель матрицы A;

$\det A_1$ – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой первого столбца на столбец свободных членов;

$\det A_2$ – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой второго столбца на столбец свободных членов;

$\det A_3$ – определитель, получаемый из определителя матрицы A заменой третьего столбца на столбец свободных членов.

Найдем определители $\det A$, $\det A_1$, $\det A_2$ и $\det A_3$, разложив их по элементам первой строки:

$$\det A=\begin{vmatrix} p-2 & 1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ 3 & -1 & p+2 \end{vmatrix}=(p-2)\begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p+2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & p+2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & p \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(p-2)\left(p^2+2p-1\right)-\left(-p-2+3\right)-\left(1-3p\right)=p^3+2p^2-p-2p^2-$$

$$-4p+2+p-1-1+3p=p^3-p;$$

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 0 & -1 & p+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p+2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p+2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & p \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=p^2+2p-1-p-2+1=p^2+p-2;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} p-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & p+2 \end{vmatrix} = (p-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & p+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= p^2 - 4 + p + 2 - 3 + 3 = p^2 + p - 2;$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} p-2 & 1 & 1 \\ -1 & p & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (p-2)\begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & p \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= p - 2 + 3 + 1 - 3p = 2 - 2p.$$

Тогда получим решение системы операторных уравнений

$$X(p) = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{p^2 + p - 2}{p^3 - p} = \frac{(p-1)(p+2)}{p(p-1)(p+1)} = \frac{p+2}{p(p+1)};$$

$$Y(p) = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{p^2 + p - 2}{p^3 - p} = \frac{p+2}{p(p+1)};$$

$$Z(p) = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{2 - 2p}{p^3 - p} = \frac{-2(p-1)}{p(p-1)(p+1)} = \frac{-2}{p(p+1)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{p+2}{p(p+1)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{p+2}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} = \frac{A(p+1) + Bp}{p(p+1)}$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A и B:

$$A\left(p+1\right) + Bp = p + 2\,.$$

Подставим $p = -1$:

$$-B = 1 \Rightarrow B = -1.$$

Подставим $p = 0$:

$$A = 2.$$

Тогда

$$\frac{p+2}{p(p+1)}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Разложим дробь $\frac{-2}{p(p+1)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{-2}{p(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}=\frac{A(p+1)+Bp}{p(p+1)}.$$

Приравняем числители дробей, стоящих справа и слева и найдем коэффициенты A и B:

$$A\left(p+1\right)+Bp=-2.$$

Подставим $p = -1$:

$$-B=-2 \Rightarrow B=2.$$

Подставим $p = 0$:

$$A = -2.$$

Тогда

$$\frac{-2}{p(p+1)}=-\frac{2}{p}+\frac{2}{p+1}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p+1};$$

$$Y(p)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p+1};$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p}+\frac{2}{p+1}.$$

По таблице оригиналов и изображений найдем оригиналы для $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$:

$$X(p) \doteqdot 2-e^{-t};$$

$$Y(p) \doteqdot 2 - e^{-t};$$

$$Z(p) \doteqdot -2 + 2e^{-t}.$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} x(t) = 2 - e^{-t}, \\ y(t) = 2 - e^{-t}, \\ z(t) = -2 + 2e^{-t}. \end{cases}$$

17. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Постановка задачи для уравнения диффузии (теплопроводности)

Задача о распространении тепла в тонком однородном стержне длины l $(0 \le x \le l)$, боковая поверхность которого теплоизолирована, и задача о диффузии вещества в трубке длиной l сводятся к решению уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

которое называется *уравнением диффузии* (*теплопроводности*).

Уравнение диффузии (теплопроводности) имеет бесконечно много решений. Чтобы получить единственное решение, задают дополнительные условия – начальное и граничные условия на границе области. Начальное условие задается в виде $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l$.

Граничные условия бывают различные. Будем рассматривать четыре основных типа граничных условий при $t \in [0, \infty)$:

$$\textit{1 тип: } -\begin{cases} u(0,\ t) = \alpha(t), \\ u(l,\ t) = \beta(t); \end{cases}$$

$$\textit{2 тип:} -\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \alpha(t), \\ u(l,\ t) = \beta(t); \end{cases}$$

$$\textit{3 тип: } -\begin{cases} u(0,\ t) = \alpha(t), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,\ t) = \beta(t); \end{cases}$$

$$\textit{4 тип: } -\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \alpha(t), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,\ t) = \beta(t). \end{cases}$$

Задача нахождения решения уравнения диффузии (теплопроводности), удовлетворяющего начальному условию и граничным условиям 1–4 типов, называется *смешанной задачей* для уравнения диффузии (теплопроводности).

Классическим решением смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) называется функция $u(x, t)$, непрерывная вместе с первой производной по x в полуполосе $U = \{(x,\ t)/0 \le x \le l,\ \ 0 < t < \infty\}$, имеющая непрерывные производные первого порядка по переменной t и второго порядка по переменной x в области U и удовлетворяющая в этой области уравнению диффузии, начальному условию и одному из граничных условий 1–4 типов.

Решение уравнения диффузии (теплопроводности)

1. Приведем задачу к нулевым граничным условиям. Для этого функцию $u(x, t)$ ищем в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где функцию $w(x, t)$ подбираем так, чтобы граничные условия для функции $v(x, t)$ стали нулевыми.

При наличии граничных условий 1, 2 и 3 типов функцию $w(x, t)$ ищем в виде

$$w(x, t) = A(t)x + B(t),$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – неизвестные функции переменной t.

При наличии граничных условий 4 типа функцию $w(x, t)$ ищем в виде

$$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – неизвестные функции переменной t.

2. Запишем смешанную задачу для функции $v(x, t)$. Так как

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,\ t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,\ t);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\ t) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\ t).$$

Следовательно, уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t)$ примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+f(x,\ t);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial w}{\partial t}+f(x,\ t).$$

Обозначим $\tilde{f}(x,\ t)=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial w}{\partial t}+f(x,\ t)$. Тогда наше уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\tilde{f}(x,\ t)\,.$$

Запишем начальные условия для функции $v(x, t)$. Так как $v(x, t) = u(x, t) – w(x, t)$, то

$$v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=\varphi(x)-w\left(x,0\right)=\tilde{\varphi}\left(t\right).$$

В результате получим следующую смешанную задачу для функции $v(x,t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\tilde{f}(x,\ t),\ 0<x<l,\ t\geq 0,\\ \qquad\qquad v(x,0)=\tilde{\varphi}(x).\end{cases}$$

Граничные условия при этом могут иметь один из следующих типов:

1 тип: $v(0,\ t)=v(l,\ t)=0$;

2 тип: $\frac{\partial v}{\partial x}(0,\ t)=v(l,\ t)=0$;

3 тип: $v(0,\ t)=\frac{\partial v}{\partial x}(l,\ t)=0$;

4 тип: $\frac{\partial v}{\partial x}(0,\ t)=\frac{\partial v}{\partial x}(l,\ t)=0$.

3. Найдем собственные функции однородного уравнения $\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ с нулевыми граничными условиями. Решение $v(x, t)$ ищем в виде $v(x, t) = X(x)T(t)$, где $X(x)$ – некоторая функция переменной x, а $T(t)$ – функция переменной t. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = X(x)T'(t);$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Подставив два последних выражения в уравнение $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, получим

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделим переменные:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu.$$

Легко показать, что уравнение имеет нетривиальное решение только при $\mu < 0$ для граничных условий 1–3 типов и при $\mu \le 0$ для граничного условия 4 типа.

При $\mu = -\lambda^2$ имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \Rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + \lambda^2 = 0;$$
$$k = \pm\lambda\sqrt{i}.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Далее решение зависит от типа граничных условий:

а) при граничных условиях 1 типа имеем

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0;$$
$$X(l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(\lambda l) + c_2 \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda l) = 0.$$

Так как c_2 не может быть равно 0, так как в этом случае получим решение тождественно равное 0, то

$$\sin(\lambda l) = 0;$$

$$\lambda l = \pi k,\ k = 1, 2, ... \Rightarrow \lambda = \frac{\pi k}{l},\ k = 1,\ 2,\ ...$$

Тогда

$\lambda_k{}^2 = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ – собственные значения,

$X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}$ – собственные функции ($k = 1,\ 2,\ 3...$);

б) при граничных условиях 2 типа имеем

$$\begin{cases} X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Так как

$$X'(x) = -\lambda c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \lambda \cos(\lambda x);$$

то

$$X'(0) = 0 \Rightarrow -\lambda c_1 \sin 0 + c_2 \lambda \cos 0 = 0 \Rightarrow c_2 \lambda = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(\lambda l) + c_2 \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(\lambda l) = 0\,;$$

$$c_1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \cos(\lambda l) = 0;$$

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0,\ 1,\ 2, ... \Rightarrow \lambda = \frac{\pi + 2\pi k}{2l}, k = 0,\ 1,\ 2, ...$$

Тогда

$\lambda_k{}^2 = -\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l}\right)^2$ – собственные значения,

$X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x\right)$ – собственные функции $(k = 0,\ 1,\ 2\ ,...)$;

в) при граничных условиях 3 типа имеем

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Так как

$$X'(x) = -\lambda c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \lambda \cos(\lambda x);$$

то

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0\ ;$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow -\lambda c_1 \sin(\lambda l) + c_2 \lambda \cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow c_2 \lambda \cos(\lambda l) = 0\ ;$$

$$c_2 \neq 0 \Rightarrow \cos(\lambda l) = 0;$$

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l}\right).$$

Тогда

$$\lambda_k^{\ 2} = -\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l}\right)^2 \text{ – собственные значения,}$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} x\right) \text{ – собственные функции } (k = 0, 1, 2, \ldots)\ ;$$

г) при граничных условиях 4 типа имеем

$$\begin{cases} X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Так как

$$X'(x) = -\lambda c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \lambda \cos(\lambda x);$$

то

$$X'(0) = 0 \Rightarrow -\lambda c_1 \sin 0 + c_2 \lambda \cos 0 = 0 \Rightarrow c_2 \lambda = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow -\lambda c_1 \sin(\lambda l) + c_2 \lambda \cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow -\lambda c_1 \sin(\lambda l) = 0;$$

$$c_1 \neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0;$$

$$\lambda l = \pi k \Rightarrow \lambda = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Здесь еще возможен случай, когда $\lambda = 0$, тогда

$$X(x) = c_1 x + c_2;$$

$$X'(x) = c_1.$$

Отсюда

$$\begin{cases} X'(0) = c_1 = 0, \\ X'(l) = c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_0 = 0 \\ &\lambda_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \text{ – собственные значения,}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_0(x) = 1, \\ &X_k(x) = \cos\frac{\pi k x}{l}, \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \text{ – собственные функции.}$$

4. Разложим функции $\tilde{f}(x, t)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ в ряд Фурье по ортогональной системе получившихся *собственных функций*:

– для граничных условий 1 типа

$$\tilde{f}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) X_k(x);$$

– для граничных условий типа 2 и 3 типов

$$\tilde{f}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) X_k(x);$$

– для граничных условий 4 типа

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) X_k(x).$$

5. Функцию $v(x, t)$ будем искать в виде:

– для граничных условий типа (1)

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x);$$

– для граничных условий 2 и 3 типов

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x);$$

– для граничных условий 4 типа

$$v(x,t)=\frac{T_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x).$$

Далее рассматриваем граничные условия 1 типа. Для граничных условий 2, 3 и 4 типов все действия будут аналогичными. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(t)X_k(x);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k''(x).$$

Подставим два последних выражения в уравнение $\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=$ $=\tilde{f}(x,t)$, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(t)X_k(x)=a^2\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k''(x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка, решив которое методом вариации произвольной постоянной, получим функцию $v(x, t)$.

Тогда $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$.

Пример 17.1. Решить смешанную задачу для уравнения диффузии

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1-\dfrac{x}{2}+e^{-3t},\\ 0<x<2,\ t>0;\\ u(x,0)=0;\\ u(0,t)=t,\ u(2,t)=0.\end{cases}$$

Решение

1. Сведем задачу к нулевым граничным условиям. Пусть

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + w(x,\, t),$$

где для функции $v(x,\, t)$ граничные условия нулевые, т.е.

$$v(0,\, t) = 0, v(2,\ t) = 0\ .$$

Тогда

$$\begin{cases} w(0,t) = u(0,\, t) = t, \\ w(2,t) = u(2,\, t) = 0. \end{cases}$$

Функцию $w(x,\, t)$ ищем в виде $w(x,\, t) = A(t)x + B(t)$, тогда

$$\begin{cases} w(0,\, t) = B(t) = t, \\ w(2,\, t) = 2A(t) + B(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(t) = t, \\ A(t) = -\dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $w(x,t) = -\dfrac{t}{2}x + t$.

2. Получим смешанную задачу для функции $v(x,\, t)$. Так как

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + w(x,\, t) = v(x,\, t) - \frac{t}{2}x + t\ ,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{x}{2} + 1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0.$$

Подставим $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия, получим задачу для нахождения функции $v(x,\, t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e^{-3t},\ 0 < x < 2,\ t > 0; \\ v(x,0) = 0; \\ v(0,t) = 0, v(2,t) = 0. \end{cases}$$

3. Решим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad 0<x<2 \\ X(0)=X(2)=0. \end{cases}$$

Тогда

$$X(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x).$$

Подставим $X(0) = 0$ и $X(2) = 0$:

$$X(0)=c_1\cos 0+c_2\sin 0=0 \Rightarrow c_1=0;$$
$$X(2)=c_1\cos(2\lambda)+c_2\sin(2\lambda)=0;$$
$$c_1=0 \Rightarrow c_2\sin(2\lambda)=0;$$

$$c_2\neq 0 \Rightarrow \sin(2\lambda)=0 \Rightarrow 2\lambda=\pi k,\ k=1,2,\ldots \Rightarrow \lambda=\frac{\pi k}{2},\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

Тогда

$$\lambda_k=-\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 \text{ – собственные значения,}$$

$$X_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{2} \text{ – собственные функции.}$$

4. Разложим функцию $f(x,t)=e^{-3t}$ в ряд Фурье по системе собственных функций $\left\{\sin\frac{\pi kx}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ по формуле

$$f(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi kx}{2},$$

где

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\ t)\sin\frac{\pi kx}{l}dx\,.$$

Тогда

$$f_k(t)=\frac{2}{2}\int_0^2 e^{-3t}\sin\frac{\pi kx}{2}dx=e^{-3t}\int_0^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx=e^{-3t}\,\frac{2}{\pi k}\left(-\cos\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$
$$=\frac{2e^{-3t}}{\pi k}\left(\cos 0-\cos\pi k\right)=\frac{2e^{-3t}}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right).$$

Следовательно,

$$e^{-3t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e^{-3t}}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)\sin\frac{\pi kx}{2}.$$

5. Функцию $v(x, t)$ будем искать в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{\pi kx}{2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\frac{\pi kx}{2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi kx}{2}.$$

Подставим e^{-3t}, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ в уравнение $\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e^{-3t}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\frac{\pi kx}{2} = -4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 T_k(t)\sin\frac{\pi kx}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2e^{-3t}}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)\sin\frac{\pi kx}{2}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых собственных функциях $X_k(t)$:

$$T_k'(t) = -4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 T_k(t) + \frac{2e^{-3t}}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right).$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

6. Решим полученное дифференциальное уравнение:

а) найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$T_k'(t) = -4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 T_k(t).$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Подставим $T_k'(t) = \frac{dT_k(t)}{dt}$:

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = -4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 T_k(t).$$

Умножим левую и правую части уравнения на dt и разделим на $T_k(t)$:

$$\frac{dT_k(t)}{T_k(t)} = -4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 dt.$$

Интегрируем обе части полученного выражения:

$$\ln\left|T_k(t)\right| = -4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 t + \tilde{c}_k;$$

$$\left|T_k(t)\right| = e^{-4\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 t + \tilde{c}_k} = e^{\tilde{c}_k} \cdot e^{(-\pi k)^2 t};$$

$$T_k(t) = c_k e^{-(\pi k)^2 t}, \text{ где } \quad c_k = e^{\tilde{c}_k}.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения

$$T_{k_{\text{о.о}}}(t) = c_k e^{-(\pi k)^2 t};$$

б) найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Решение ищем в виде

$$T_{k_{\text{ч.н}}}(t) = c_k(t) e^{-(\pi k)^2 t},$$

где $c_k(t)$ – некоторая неизвестная функция переменной t.

Тогда

$$T'_{k_{\text{ч.н}}}(t) = c'_k(t) e^{-(\pi k)^2 t} + c_k(t) e^{-(\pi k)^2 t}\left(-\left(\pi k\right)^2\right).$$

Подставим $T_{k_{\text{ч.н}}}(t)$ и $T'_{k_{\text{ч.н}}}(t)$ в неоднородное уравнение:

$$c'_k(t) e^{(-\pi k)^2 t} - c_k(t) e^{-(\pi k)^2 t}(\pi k)^2 = -(\pi k)^2 c_k(t) e^{-(\pi k)^2 t} + \frac{2e^{-3t}}{\pi k}(1-(-1)^k);$$

$$c'_k(t) e^{-(\pi k)^2 t} = \frac{2e^{-3t}}{\pi k}(1-(-1)^k);$$

$$c'_k(t) = \frac{2e^{-3t}}{\pi k}(1-(-1)^k) e^{(\pi k)^2 t};$$

$$c_k(t) = \int \frac{2e^{-3t+(\pi k)^2 t}}{\pi k}(1-(-1)^k)dt = \frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k}\int e^{t(\pi^2 k^2 - 3)}dt =$$

$$=\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k}\frac{e^{t(\pi^2k^2-3)}}{\pi^2k^2-3}+c_k\,.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$T_{k_{\text{ч.н}}}(t)=\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k}\frac{e^{t(\pi^2k^2-3)}}{\pi^2k^2-3}e^{-\pi^2k^2t}\,.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения

$$T_k(t)=T_{k_{\text{о.о}}}+T_{k_{\text{ч.н}}}=c_ke^{-\pi^2k^2t}+\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k}\frac{e^{-3t}}{\pi^2k^2-3}\,.$$

Следовательно,

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_ke^{-\pi^2k^2t}+\frac{2(1-(-1)^k)e^{-3t}}{\pi k(\pi^2k^2-3)}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}\,.$$

Коэффициент c_k найдем из условия $v(x,\ 0)=0$. Так как

$$v(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^k)e^0}{\pi k(\pi^2k^2-3)}+c_ke^0\right)\sin\frac{\pi kx}{2}=0,$$

то

$$c_k+\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k(\pi^2k^2-3)}=0\Rightarrow c_k=-\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k(\pi^2k^2-3)}\,.$$

Тогда

$$v(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^k)e^{-3t}}{\pi k(\pi^2k^2-3)}-\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k(\pi^2k^2-3)}e^{-\pi^2k^2t}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k(\pi^2k^2-3)}\left(e^{-3t}-e^{-\pi^2k^2t}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}\,.$$

Заметим, что

$$1-(-1)^k=\begin{cases}0, \text{ если } k=2n,\\ 2, \text{ если } k=2n+1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$v(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)(\pi^2(2n+1)^2-3)}\left(e^{-3t}-e^{\pi^2(2n+1)^2 t}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}.$$

Так как

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\ ,$$

то

$$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(e^{-3t}-e^{-\pi^2(2n+1)^2 t})}{\rho(2n+1)(\pi^2(2n+1)^2-3)}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}+t-\frac{t}{2}x\,.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Для получения варианта домашнего задания необходимо, пользуясь табл. 1, заполнить первую строку табл. 2, затем выписать соответствующие вашему номеру варианта данные из табл. 2. Например, вариант 10.15. Тогда по табл. 1 имеем

10	*C*	*K*	*F*	*M*	*D*	*A*	*B*	*G*

Вписываем эти буквы в первую строку табл. 2 и выбираем строку, соответствующую пятнадцатому варианту:

№ п/п	Коэффициенты							
	C	*M*	*F*	*M*	*D*	*A*	*B*	*G*
15	1	4	7	–6	5	2	3	4

Таблица 1

Порядок следования коэффициентов

Группа	Коэффициенты							
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*K*	*F*	*M*	*G*
2	*C*	*D*	*B*	*A*	*K*	*M*	*F*	*G*
3	*K*	*F*	*M*	*C*	*D*	*A*	*B*	*G*
4	*F*	*C*	*D*	*A*	*B*	*K*	*M*	*G*
5	*B*	*A*	*K*	*M*	*F*	*C*	*D*	*G*
6	*D*	*B*	*A*	*M*	*C*	*K*	*F*	*G*
7	*M*	*D*	*F*	*K*	*C*	*B*	*A*	*G*
8	*A*	*K*	*M*	*B*	*F*	*C*	*D*	*G*
9	*B*	*F*	*D*	*C*	*F*	*M*	*K*	*G*
10	*C*	*K*	*F*	*M*	*D*	*A*	*B*	*G*
11	*D*	*A*	*M*	*F*	*B*	*K*	*C*	*G*
12	*K*	*F*	*C*	*A*	*M*	*B*	*D*	*G*
13	*F*	*D*	*A*	*K*	*B*	*M*	*C*	*G*
14	*M*	*C*	*D*	*A*	*F*	*B*	*K*	*G*
15	*M*	*B*	*A*	*K*	*C*	*F*	*D*	*G*
16	*A*	*K*	*D*	*C*	*B*	*K*	*F*	*G*

Таблица 2

Данные для выполнения домашнего задания

№ п/п	Коэффициенты							
1	8	2	–1	3	6	4	7	1
2	7	–2	4	1	6	–3	8	3
3	–2	–4	10	9	3	7	–6	4
4	3	6	4	–4	5	2	3	1

5	–8	1	5	2	–3	–4	–9	3
6	7	3	10	–1	–5	3	–8	4
7	5	3	–1	4	9	3	–6	1
8	2	5	6	7	–9	4	1	3
9	6	1	5	–2	–3	4	8	4
10	–4	10	2	3	4	5	–8	1
11	2	–3	7	–6	5	1	9	3
12	–6	5	–1	7	3	8	10	4
13	3	–2	9	2	4	7	8	1
14	8	7	–3	–1	2	6	5	3
15	1	4	7	–6	5	2	3	4
16	2	5	–1	–2	–3	4	11	1
17	1	2	6	5	–7	4	3	3
18	10	9	–3	2	5	–7	1	4
19	4	5	–3	6	–4	2	11	1
20	11	9	1	–3	6	8	4	3
21	3	5	–2	8	9	–7	6	4
22	–3	2	4	–7	10	8	3	1
23	1	3	2	4	5	7	–3	3
24	3	–5	6	1	8	2	–7	4
25	–1	–2	4	5	7	3	8	1
26	2	10	–8	5	6	–7	4	3
27	–5	2	10	7	–9	3	6	4
28	–9	–5	–3	–4	2	8	–7	1
29	8	7	2	5	3	–6	4	3
30	11	–5	–3	–6	–7	–2	9	4

1. Решить дифференциальные уравнения:

1) $y' = \dfrac{Dy+K}{DAx+C},\ y(0)=F$;

2) $(K+Me^{Dx})y' = Cy^{A}e^{Dx}, \quad y(0)=1;$

3) $(Ax^2+Bxy)\,dy = (Cy^2+Dxy)\,dx$;

4) $y' + Cy\dfrac{1}{B^2+x^2} = \dfrac{K\operatorname{arctg}\dfrac{x}{B}}{x^2+B^2}\cdot e^{-\frac{C}{|B|}\operatorname{arctg}\frac{x}{|B|}},\ y(0)=G$;

5) $y' + \dfrac{Ay}{Ax+C} = \dfrac{D\ln(Bx+K)}{Ax+C}$;

6) $dx = (Dy^M + Ky^F + G + \dfrac{Ax}{y})dy, \quad y(0)=G$;

7) $Ay'' + By' = (Fx + K)e^{Dx}, \; y(0) = F, \; y'(0) = G$;

8) $A(y')^2 = y''(By + K)$;

9) $y'' + My' = \dfrac{F}{A + Be^{Mx}}$;

10) $y'' + (B + F)y' + BFy = e^{-Bx}(Kx^2 + Mx + G), \; y(0) = G, \; y'(0) = M$;

11) $y'' + 2Gy' + G^2 y = e^{-Gx}\sin Mx + e^{-Gx}(Dx + B)\cos Mx$;

12) $y'' + G^2 y = C(Ax + K)\cos Gx.$

2. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя и найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + By, \\ \dfrac{dy}{dt} = Cx + Dy. \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Gx + Ay + Ct, \\ \dfrac{dy}{dt} = Ax + Gy. \end{cases}$$

4. Решить смешанную задачу для уравнения диффузии

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B - Cx + e^{Dt}, \\ 0 < x < G, \; t > 0; \\ u(x,0) = 0; \\ u(0,t) = 0, \; u(G,t) = 0. \end{cases}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями 1-го порядка с разделяющимися переменными?

2. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$ пересекаться?

3. Составить дифференциальные уравнения по заданному семейству интегральных кривых:

$$1)\ y = \frac{c}{x^3};\ 2)\ x^3 = c(x^2 - y^2).$$

4. Изобразить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения:

$$1)\ y' = 1;\ 2)\ y' = \frac{1}{x}.$$

5. Найти линию, проходящую через точку (2, 3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между координатными осями, делится пополам в точке касания.

6. Найти линию, проходящую через точку (2, 0) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

7. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения:

1) $y = -\dfrac{2}{x^2},\ xy^2dx - dy = 0;$ 2) $y = \ln\cos x,\ y' = -\mathrm{tg}x;$

3) $x^2 + 2xy = c,\ (x+y)dx + xdy = 0;$ 4) $y = ce^{-3x},\ y' + 3y = 0.$

8. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1) $y' = x;$ 2) $y' = x^2;$

3) $y' = y;$ 4) $y' = y^2;$

5) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y y' = 0;$ 6) $ydx + ctgxdy = 0;$

7) $y' = y^2 + 2;$ 8) $(1 + e^{4x})y^2dy = e^{2x}dx.$

9. Решить задачу Коши:

1) $xy' - y = y^2,\ y(1) = 2;$ 2) $e^{2x-y}dy = xdx,\ y(0) = 0;$

3) $y' = e^{x^2}x(1 + 2y + y^2),\ y(0) = 1;$ 4) $y' = 2xy + x,\ y(1) = 0;$

5) $y'\ln y = e^{2x}, y(0) = 1;$ 6) $\sqrt{4+y^2}dx - 2ydy = x^2 ydy, y(0) = 0.$

10. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями 1-го порядка?

11. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1) $y' = \frac{y}{x} - 1;$ 2) $y' = -\frac{x+y}{y};$

3) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}};$ 4) $xy' = y + 2\sqrt{yx};$

5) $xy' = y + \sqrt{y^2 + x^2};$ 6) $(3x^2 - y^2)y' = 2xy;$

7) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x);$ 8) $(x^2 + y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0.$

12. Решить задачу Коши:

1) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x, y(1/2) = 0;$ 2) $(x+y)dx = xdy, y(1) = 0;$

3) $y' - 1 = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, y(1) = 0;$ 4) $y - xy' = 2(x + yy'), y(1) = 0.$

13. Какие уравнения называется линейными уравнения 1-го порядка?

14. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $xy' - y = x^2;$ 2) $y' + xy = 2e^{-\frac{x^2}{2}};$

3) $y' + 2y = 4x;$ 4) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

15. Решить задачу Коши:

1) $y' + 2xy = e^{-x^2}, y(0) = 2;$ 2) $xy' + 2y = 8x^2, y(2) = 3;$

3) $y' + y\cos x = \sin 2x, y(0) = 2;$ 4) $y' - y\operatorname{tg} x = 2\cos^2 x,\ y(0) = 1;$

5) $y'\operatorname{ctg}x - y\cos x = 2\cos^2 x\,\operatorname{ctg}x, y(0) = 0;$

6) $\sqrt{1-x^2}y' + y = \arcsin x,\ y(0) = 0;$

16. Какое уравнение называется уравнением Бернулли?

17. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $xy^2y' = x^2 + y^3;$ 2) $y' + \frac{xy}{x^2 - 1} = x\sqrt{y};$

3) $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y};$ 4) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3}.$

18. Решить задачу Коши:

1) $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 2;$ 2) $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y},\ y(1) = 1;$

3) $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2,\ y(0) = 1;$ 4) $y' + y = x\sqrt{y},\ y(0) = 1;$

$$5)\ 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1},\ y(\sqrt{2}) = 2;$$

$$6)\ 2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x),\ \ y(0) = 1.$$

19. Какие уравнения называется уравнениями в полных дифференциалах?

20. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1) $(3x - 5x^2y^2)dx + (3y^2 - \frac{10}{3}x^3 y)dy = 0;$

2) $(x\cos 2y - 3)dx - x^2 \sin 2y dy = 0;$

3) $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x + y^2}{y^2}dy = 0;$ 4) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx = \dfrac{2y}{x^3}dy.$

21. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\operatorname{tg} x\ y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0;$ 2) $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2;$

3) $yy'' + (y')^2 - y'\ln y = 0;$ 4) $xy'' = y'\ln(y'/x).$

22. Решить задачу Коши:

1) $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg} x,\ \ y\left(\pi/4\right) = 0,\ \ y'\left(\pi/4\right) = 0;$

2) $y''\left(1 + \ln x\right) + \dfrac{1}{x}y' = 2 + \ln x,\ \ y\left(1\right) = 1/2,\ \ y'\left(1\right) = 1;$

3) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0,\ y'(2) = 4;$

4) $y''y^3 + 1 = 0,\ \ y(1) = -1,\ \ y'(1) = -1;$

5) $4y^3y'' - y^4 + 16 = 0,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = 1/\sqrt{2};$

6) $y'y'' = \left(y'\ \right)^2 - \left(y'\right)^3,\ \ y\left(1\right) = 1;\ \ y'\left(1\right) = -1;$

7) $2yy'' - 3\left(y'\right)^2 = 4y^2,\ \ y\left(0\right) = 1,\ \ y'\left(0\right) = 1;$

8) $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1),\ y(2) = 0,\ y(2) = 1.$

23. Выяснить являются ли следующие системы функций линейно независимой в их области определения, и найти определитель Вронского этой системы:

1) $\{1,\ x\}$; 2) $\{1,\ x,\ x-5\}$;

3) $\{\sin x,\ \cos x\}$; 4) $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$;

5) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$; 6) $\{e^x, e^{4x},\ e^{3x}\}$;

7) $\{x,\ x^2-5\}$; 8) $\{e^{-x}\cos 3x,\ e^{-x}\cos 3x\}$.

24. Дана система функций $\{e^{-x}\sin 3x,\ e^{-x}\cos 3x\}$. Доказать, что эта система линейно независима и составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений.

25. Дана система функций $\{e^{-x},\ xe^{-x}\}$. Доказать, что эта система линейно независима, и составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений.

26. Дана система функций $\{1,\ x,\ x^2\}$. Доказать, что эта система линейно независима, и составить линейное однородное дифференциальное уравнение для которого эта система функций является фундаментальной системой решений.

27. Дана система функций $\{e^{-2x}, \cos 2x, \sin 2x\}$. Доказать, что эта система линейно независима, и составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений.

28. Дана система функций $\{1, x^2, x^4\}$. Доказать, что эта система линейно независима, и составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений.

29. Зная фундаментальную систему решений $\{e^{2x}, \cos x, \sin x\}$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ и $y''(0) = 0$.

29. Зная фундаментальную систему решений $\{1,\ x,\ e^{-4x}\}$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное ре-

шение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ и $y''(0) = 3$.

30. Зная фундаментальную систему решений $\{e^{2x}, \cos x, \sin x\}$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ и $y''(0) = 0$.

31. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2$.

31. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$.

32. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2 \pm i,\ \lambda_3 = -1$.

33. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

34. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' + 4y' = 0$;

3) $y'' - 4y = 0$; 4) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

35. Решить задачу Коши:

1) $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

3) $5y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

4) $y'' - 2y' + 10y = 0, y(0) = 0,\ y'(0) = 3$;

5) $y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$;

6) $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$.

36. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$; 2) $y''' + 9y' = 0$;

3) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$; 4) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$;

5) $5y^{IV} - 2y''' + 2y'' = 0$; 6) $y''' - 8y = 0$.

37. Решить задачу Коши:

1) $y''' - 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$;

2) $y''' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2$;

3) $y''' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$;

4) $y''' + y'' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1;$

5) $y^{\text{IV}} + 8y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 9,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0;$

6) $y''' - 10y'' + 25y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

38. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' - 2y + 3 = 0;$

2) $y''' - 2y + 1 = 0;$

3) $y'' + 9y' + 20y = x;$

4) $y'' + 6y' + 13y = 2 - x;$

5) $y'' - 3y' - 4y = (1 - x)e^{-x};$

6) $y'' - 2y'' + 10y = 10x^2 + 18x + 6;$

7) $y'' + 6y' + 10y = x + 5;$

8) $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right);$

9) $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x;$

10) $y'' + 4y = \cos 2x;$

11) $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x);$

12) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + \sin 2x + x;$

13) $y'' - 9y' + 20y = \sin 5x + x^2 e^{4x};$

14) $y'' + 2y' = 6(\sin x + \cos x) + 2e^{-2x};$

15) $y'' + y' - 10y = xe^{-2x} + 2x;$

16) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x + x^2 - x + 2.$

39. Решить задачу Коши:

1) $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x),\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2;$

3) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

4) $y'' + y' = (x + 3/2)e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

5) $y'' + 3y' + 2y = 2\sin 3x + 6\cos 3x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$

6) $y'' + y' - 6y = xe^{2x} + 5x^2,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

40. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 2 + i,\ \lambda_2 = 2 - i, \lambda_3 = 0$ и правая часть $f(x) = x^2$.

41. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = -2 - 3i$, $\lambda_2 = -2 + 3i$ и правая часть $f(x) = e^{-2x}(x+2)\sin x$.

42. Записать, в каком виде надо искать частные решения неоднородных дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$; 2) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos x$;

3) $y'' + 4y = x^2\cos 2x$; 4) $y'' - 6y' + 9y = x^3e^{3x}$;

5) $y'' - 2y' + 10y = e^x\sin 3x$; 6) $y'' + 9y = \cos 3x + (2x-1)\sin 3x$.

43. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; 2) $y'' - 3y' = \dfrac{5e^{-3x}}{3+e^{3x}}$;

3) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$; 4) $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x$;

5) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; 6) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

7) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$; 8) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;

9) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$; 10) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$;

11) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

44. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y''' - y' = -2x$; 2) $y''' + y = xe^{-x}$;

3) $y''' - 2y'' + y' = e^x + 2x$; 4) $y^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} = xe^x - 1$.

45. Решить задачу Коши:

1) $y''' + y' = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$;

2) $y''' + y = x^2e^{x/2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$;

3) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

46. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x - 3y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x; \end{cases}$

$$5)\ \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z; \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = y - 2x - 3z. \end{cases}$$

47. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$1) \begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = -2x - 5y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 4;$$

$$2)\ \begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x; \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1;$$

$$3)\ \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x - y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 2;$$

$$4)\ \begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = -x - 4y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1;$$

$$5)\ \begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1;$$

$$6)\ \begin{cases} x' = y - x, \\ y' = x - y, \end{cases} x(0) = 2, y(0) = -1;$$

$$7)\ \begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3.$$

48. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x' = 5x - 3y + te^{2t}, \\ y' = 3x - y + e^{3t}; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x' = 2x - y + (t+1)e^{3t}, \\ y' = x + 4y + 2te^{3t}; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x' = -x + 8y + te^{3t}, \\ y' = x + y + \sin 3t; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x' = 2x + y + (5-t)e^{-t}, \\ y' = x + 4y + t^2; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x' = 2x + y + e^{t}, \\ y' = 3x + 4y + \cos 2t. \end{cases}$$

49. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^{t}, \\ \dot{y} = x + 4y + e^{2t}, \end{cases} x(0) = -1/2, y(0) = 1/2;$$

2) $\begin{cases} x' = x - y + 5t - (t+1)e^t, \\ y' = -4x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = -2;$

3) $\begin{cases} x' = x - 5y + \sin 3t, \\ y' = 2x - y + 2 - 3t, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 3e^{4t}, \\ y' = 2x + 8y - t^2, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0;$

5) $\begin{cases} x' = x + y - \cos t, \\ y' = -2x - y + \sin t - t\cos t, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0;$

6) $\begin{cases} x' = 3x + y + te^{2t}, \\ y' = x + 3y + 1 - 2t, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 1.$

50. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя системы:

1) $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = x + y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = -2x + 5y/7, \\ y' = 7x - 3y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 3y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

51. Решить смешанную задачу для уравнения диффузии:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, 0 < x < 1, t > 0, u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = 0;$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 3, t > 0, u(0,t) = 0, u'_x(3,t) = 0, u(x,0) =$
$= \begin{cases} x, 0 < x \le 2, \\ 2, 2 < x < 3; \end{cases}$

3) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (2t-1)x, 0 < x < \pi, t > 0, u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, u(x,0) = 0;$

4) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, t > 0, u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = x(2-x).$

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа 1

Тема: дифференциальные уравнения 1-го порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$xy' \ln y = 1 - x^2 .$$

2. Решить задачу Коши: $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x,\ \ y(1) = 0$.

3. Решить задачу Коши: $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + 4x^3 y = 4e^{-4x}\left(x^3 + 1\right)y^2,\ y(0) = 1$.

5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = \ln x$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2 .$$

8. Решить задачу Коши: $y''y^3 + 1 = 0, y(1) = -1, y'(1) = -1$.

Контрольная работа 2

Тема: дифференциальные уравнения n-го порядка и системы дифференциальных уравнений.

1. Решить задачу Коши: $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^V + 4y''' = 0$.

3. Решить задачу Коши: $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(2x - 4)$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}.$$

7. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2 - 3t, \\ y' = x - y + 2 + t, \end{cases} \quad x(0) = \frac{3}{4}, y(0) = \frac{7}{4}.$$

8. Определить характер, исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бобкова Л.П., Дружининская И М., Федорова В.И. Высшая математика: Учеб. пособие / Под ред. Б.Г. Разумейко. – М.: МИСиС, 1999. – Ч. 2.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1981.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: УРСС, 2002.

Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч. 2 /Под ред. А.В. Ефимова, Б.Г. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2010.

Учебное издание

Плужникова Елена Леонидовна
Разумейко Борис Григорьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Редактор *М.Б. Линчевская*

Компьютерная верстка *М.А. Шамариной*

Подписано в печать 05.12.11	Бумага офсетная	
Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 14,9
Рег. № 277	Тираж 600 экз.	Заказ 3400

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35