Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский технологический университет «МИСиС».

Кафедра Математики

Л. И. Родина

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Москва
2020

§ 1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим некоторый эксперимент, все возможные исходы которого равны $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Исходы $\omega_1, \ldots, \omega_N$ будем называть *элементарными событиями,* а их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ — конечным *множеством элементарных событий. Событием* называется любое подмножество A множества элементарных событий.

Припишем каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N$, некоторый «вес», обозначаемый $p\,(\omega_i)$, и называемый *вероятностью* исхода ω_i. Будем считать, что $p\,(\omega_i)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $0 \leqslant p\,(\omega_i) \leqslant 1$ (неотрицательность),
2) $p\,(\omega_1) + \ldots + p(\omega_N) = 1$ (нормированность).

Определение 1. *Вероятностью* $P(A)$ любого события $A \in \mathfrak{A}$ называется сумма вероятностей элементарных событий, составляющих событие A :

$$P(A) = \sum_{\{i:\ \omega_i \in A\}} p\,(\omega_i).$$

Свойства вероятностей.

1) $P(\varnothing) = 0; \quad P(\Omega) = 1;$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$
3) Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B);$
4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

Классический способ задания вероятностей.

Существует много практических ситуаций, в которых из соображений симметрии все мыслимые исходы рассматривают как равновозможные. Поэтому, если пространство элементарных событий

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, где $N = N(\Omega) < \infty$, полагают

$$p(\omega_1) = \ldots = p(\omega_N) = \frac{1}{N},$$

следовательно, вероятность любого события $A \in \mathfrak{A}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где $N(A)$ — число элементарных событий, составляющих событие A, $N(\Omega)$ — число всех элементарных событий.

Задача 1 для ИДЗ № 1.

Варианты 1 – 30.

1. В библиотеке имеется 10 учебников, из которых 6 из основного и 4 из дополнительного списка. Для написания курсовой работы студент взял наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что среди взятых учебников

1) 2 учебника из основного списка;

2) не менее 1 учебника из основного списка.

2. В отдел технического контроля поступила партия из 1000 аппаратов, среди которых находятся 4 бракованных аппарата. Найти вероятность того, что из двух взятых наугад аппаратов

1) оба окажутся стандартными;

2) один аппарат будет бракованным;

3) бракованных будет не более одного.

3. Изготовлено 12 изделий, из которых 8 отличного качества. Наудачу отобрано 9 изделий. Найти вероятность того, что среди них не менее 5, но не более 7 отличного качества.

4. Из 5 приборов один бракованный. Найти вероятность того, что из двух одновременно взятых приборов 1) оба исправны, 2) один бракованный.

5. Из урны, содержащей 6 белых и 8 черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

6. Некто в случайном порядке расставил на полке тома пятитомника. Найти вероятность того, что

1) все тома расставлены по порядку;

2) первый и последний тома стоят на своих местах.

7. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что наудачу образованное с помощью карточек двузначное число кратно 15.

8. В студенческой группе 12 юношей и 8 девушек. Пять путевок в профилакторий, выделенных на группу, разыгрываются по жребию. Найти вероятность того, что

1) путевки получат 3 девушки и 2 юноши;

2) путевки получат только девушки.

9. Десять изготовленных деталей, среди которых 4 бракованных, случайным образом раскладываются в 2 ящика по 5 деталей в каждом. Найти вероятность того, что в обоих ящиках окажется по одинаковому числу бракованных деталей.

10. В кошельке лежат 3 монеты достоинством в 5 рублей и 4 монеты достоинством в 10 рублей. Наудачу берется одна монета, затем вторая достоинством в 10 рублей. Найти вероятность того, что

1) первая извлеченная монета имела достоинство 20 рублей;

2) первая извлеченная монета имела достоинство 5 рублей.

11. На электростанции работают 15 сменных инженеров, из которых 3 женщины. В смену заняты 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене окажется не менее двух мужчин.

12. В ящике 40 деталей, из которых 10 с дефектами. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу одновременно деталей 1) одна с дефектом, 2) хотя бы одна с дефектом.

13. Тома четырехтомника расставлены на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что

1) хотя бы один том не стоит на своем месте;

2) первый том стоит на своем месте.

14. Имеются три билета стоимостью по 50 рублей и пять билетов по 30 рублей Наугад берутся три билета. Найти вероятность того,

общая стоимость этих билетов не превышает 110 рублей.

15. Из 50 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 40. Найти вероятность того, что взятый студентом билет, содержащий три вопроса, будет состоять только из подготовленных им вопросов.

16. В ящике четыре детали 1-го вида, по две 2-го, 3-го и 4-го видов деталей, мало отличающихся друг от друга. Найти вероятность того, что среди 6 взятых одновременно деталей

1) три 1-го, две 2-го и одна 3-го видов;

2) детали только двух видов.

17. Бросают одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что

1) произведение выпавших очков равно 6;

2) сумма выпавших очков равна 6.

18. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что наудачу образованное с помощью карточек трехзначное число делится на 50.

19. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Найти вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенные грани.

20. В ящике 10 деталей, из которых 5 с дефектами. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу одновременно деталей: 1) одна с дефектом, 2) хотя бы одна с дефектом.

21. Имеется 5 билетов стоимостью по 10 рублей, 3 билета по 30 рублей и 2 билета по 50 рублей. Найти вероятность того, что суммарная стоимость трех взятых наудачу билетов равна 70 рублей.

22. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что наудачу образованное с помощью карточек двузначное число нечетное.

23. После извлечения и возвращения одной из 36 карт колоды карты перемешиваются и из колоды снова извлекается одна карта. Найти вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

24. Из урны, содержащей 5 белых и 10 черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того,

что последний оставшийся в урне шар будет белым.

25. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что

1) сумма выпавших очков не менее четырех;

2) произведение очков равно четырем.

26. Восемь книг расставлены наудачу на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

27. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 60 Вт — 8 штук; по 75 Вт — 12 штук. Найти вероятность того, что три наудачу одновременно извлеченные лампы одинаковой мощности.

28. Среди 15 сверл 5 изношенных. Найти вероятность того, что среди трех наудачу извлеченных сверл хотя бы одно изношенное.

29. В ящике 15 деталей, из них 8 окрашены в синий цвет, остальные в красный. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу извлеченных деталей три окажутся окрашенными в красный цвет.

30. В цехе работают 12 мужчин и 18 женщин. Найти вероятность того, что среди двух наудачу выбранных человек 1) оба мужчины, 2) мужчина и женщина.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим случай, когда множество элементарных событий несчетно, например, представляет собой совокупность точек некоторого множества Ω в n-мерном евклидовом пространстве. Предполагаем, что множество Ω ограничено и его n-мерный объем $V(\Omega) > 0$.

Опыт состоит в том, что в пределы множества Ω «случайным образом» бросается точка X. Выражение «случайным образом» в данном случае означает, что все точки множества Ω равноправны в отношении попадания туда случайной точки X. Естественно предполагать, что вероятность попадания точки X в какое-то подмножество A пространства Ω пропорциональна n-мерному объему множества A.

Определение 2. Вероятность события A равна отношению объема множества A к объему всего пространства Ω :

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

Если Ω — ограниченное множество на плоскости, имеющее положительную площадь $S(\Omega)$, то $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$. Если множество Ω расположено на прямой, то $P(A) = \dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$, где $L(\Omega)$ — длина Ω.

Задача 2 для ИДЗ №1.

На интервале $(0, 1)$ наудачу берутся три точки: x, y, z. Требуется определить вероятность того, что скалярное произведение вектора $a = (x, y, z)$ на вектор b будет:

a) больше единицы;

b) меньше двух.

1. $b = (2, 3, 1)$. 2. $b = (2, 1, 1)$. 3. $b = (2, 3, 2)$.

4. $b = (1, 2, 4)$. 5. $b = (2, 4, 4)$. 6. $b = (2, 4, 1)$.

7. $b = (3, 4, 1)$. 8. $b = (2, 3, 3)$. 9. $b = (1, 2, 3)$.

10. $b = (1, 2, 2)$. 11. $b = (2, 3, 1)$. 12. $b = (2, 1, 1)$.

13. $b = (2, 3, 2)$. 14. $b = (1, 2, 4)$. 15. $b = (2, 3, 4)$.
16. $b = (2, 4, 1)$. 17. $b = (3, 4, 1)$. 18. $b = (2, 4, 3)$.
19. $b = (1, 2, 3)$. 20. $b = (1, 2, 2)$. 21. $b = (2, 3, 1)$.
22. $b = (2, 1, 1)$. 23. $b = (2, 3, 2)$. 24. $b = (1, 2, 4)$.
25. $b = (2, 3, 4)$. 26. $b = (2, 4, 1)$. 27. $b = (3, 4, 1)$.
28. $b = (2, 4, 3)$. 29. $b = (1, 2, 3)$. 30. $b = (1, 2, 2)$.

§ 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Определение 3. Пусть $P(B) > 0$. *Условная вероятность* события A при условии, что произошло событие B, определяется равенством
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

При *классическом определении* вероятностей $P(A|B) = \dfrac{N(AB)}{N(B)}$, где $N(AB)$ — число элементарных исходов, входящих одновременно в события A и B, $N(B)$ — число исходов, составляющих событие B. Для *геометрического определения* вероятностей
$$P(A|B) = \frac{V(AB)}{V(B)},$$
где $V(AB)$ — n-мерный объем пересечения событий A и B, $V(B)$ — объем события B.

Определение 4. События A и B называются *независимыми,* если
$$P(AB) = P(A)P(B);$$
в этом случае $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.

Определение 5. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми (в совокупности),* если для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, где

$k = 2, \ldots, n$ выполнено равенство

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Задача 3 для ИДЗ № 1.

Варианты 1 – 30.

1. На полке стоят 10 учебников, 3 из которых нужны студенту для написания курсовой работы. Студент взял наудачу 3 учебника и оказалось, что среди них есть по крайней мере один нужный. Найти вероятность, что он взял два или три нужных учебника.

2. В отдел технического контроля поступила партия из 1000 аппаратов, среди которых находятся 4 бракованных. Известно, что из двух взятых наугад аппаратов хотя бы один стандартный. Найти вероятность того, что оба окажутся стандартными.

3. Брошены 3 игральные кости. Найти условную вероятность того, что появилась хотя бы одна пятерка, если известно, что сумма выпавших очков равна 11.

4. Брошены 3 игральные кости. Найти условную вероятность того, что появилась хотя бы одна тройка, если известно, что сумма выпавших очков равна 7.

5. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим события
$A = \{$на первой кости выпала тройка $\}$;
$B = \{$на второй кости выпала четверка $\}$;
$C = \{$сумма очков на обеих костях равна семи$\}$.
Найти пары независимых событий.

6. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим события
$A = \{$на первой кости выпала двойка $\}$;
$B = \{$на второй кости выпала тройка $\}$;
$C = \{$сумма очков на обеих костях равна пяти$\}$.
Найти пары независимых событий.

7. На полке в случайном порядке расставили тома пятитомника. Найти вероятность того, что все тома расставлены по порядку, при условии, что первый и последний тома стоят на своих местах.

8. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что

1) сумма цифр наудачу образованного с помощью карточек двузначного числа равна 9;

2) произведение цифр равно 25,

если известно, что это число кратно 5.

9. В студенческой группе 8 юношей и 8 девушек. Пять путевок в профилакторий, выделенных на группу, разыгрываются по жребию. Будут ли независимыми события:

1) путевку получит хотя бы один юноша;

2) путевку получит хотя бы одна девушка.

10. Десять изготовленных деталей, среди которых 4 бракованных, случайным образом раскладываются в 2 ящика по 5 деталей в каждом. Найти вероятность того, что в обоих ящиках окажется по одинаковому числу бракованных деталей, если известно, что в первом есть хотя бы одна бракованная деталь.

11. В кошельке лежат 4 монеты достоинством в 5 рублей и 4 монеты достоинством в 10 рублей. Наудачу берутся три монеты. Найти вероятность того, что этих монет достаточно для оплаты билета на автобус стоимостью 20 рублей, если известно, что среди них есть по крайне мере одна монета в 5 рублей.

12. На электростанции работают 15 сменных инженеров, из которых 3 женщины. В смену заняты 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене окажутся все мужчины, если известно, что там окажется не менее двух мужчин.

13. Тома пятитомника расставлены на полке в случайном порядке. Будут ли независимыми события:

1) первый стоит на своем месте;

2) последний том стоит на своем месте.

14. Тома пятитомника расставлены на полке в случайном порядке. Будут ли независимыми события:

1) первые два тома стоят на своем месте;

2) последние два тома стоят на своем месте.

15. Имеются три билета стоимостью по 50 рублей и пять билетов

по 30 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все билеты имеют одинаковую стоимость, если известно, что общая стоимость билетов больше, чем 120 рублей.

16. Имеются три билета стоимостью по 50 рублей и пять билетов по 30 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что среди билетов есть билеты разной стоимости, если известно, что общая стоимость билетов не превышает 110 рублей.

17. Монета брошена 5 раз. Зависимы или независимы следующие события: «при первом бросании появился герб» и «появилось ровно 3 герба» ?

18. Монета брошена 5 раз. Зависимы или независимы следующие события: «при первом бросании появился герб» и «при последнем бросании появился герб» ?

19. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. С помощью карточек наудачу образовали трехзначное число. Найти вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 8, если известно, что число делится на 10.

20. На 10 карточках написаны различные цифры от 0 до 9. С помощью карточек наудачу образовали трехзначное число. Найти вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 10, если известно, что число делится на 5.

21. Имеется 5 билетов стоимостью по 10 рублей, 3 билета по 30 рублей и 2 билета по 50 рублей. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу билетов 1 билет за 10 рублей и 2 билета по 30 рублей, если суммарная стоимость этих билетов равна 70 рублей.

22. В ящике находится 6 белых и 4 красных мячей. Из ящика наудачу извлекаются 3 мяча. Зависимы или независимы события: «появилось хотя бы 2 белых мяча» и «все мячи одного цвета» ?

23. Из колоды в 36 карт наудачу одновременно извлекаются две карты. Зависимы или независимы события: «появилась девятка и десятка» и «обе извлеченные карты одной масти» ?

24. Из колоды в 36 карт наудачу одновременно извлекаются две карты. Зависимы или независимы события: «появились две десятки» и «извлеченные карты разных мастей» ?

25. Игральная кость бросается три раза. Найти вероятность того, что произведение очков равно четырем, если известно, что сумма выпавших очков четная.

26. Игральная кость бросается три раза. Найти вероятность того, что произведение очков равно 12, если известно, что сумма выпавших очков нечетная.

27. 6 шаров случайным образом распределяются по 5 ящикам. Известно, что ровно два ящика остались пустыми. Найти условную вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

28. Шесть человек садятся в лифт на первом этаже 10-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах при условии, что на втором и третьем этаже никто не выходил.

29. В ящике 10 деталей, из них 5 окрашены в синий цвет и 5 — в красный. Найти вероятность того, что среди трех наудачу извлеченных деталей все окажутся окрашенными в красный цвет, если известно, что среди них есть по крайней мере одна красная деталь.

30. В цехе работают 10 мужчин и 8 женщин. Будут ли независимыми события: «среди двух наудачу выбранных человек хотя бы один мужчина» «среди двух наудачу выбранных человек хотя бы одна женщина».

§ 4. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Формулы сложения вероятностей.

Вероятность *объединения* событий A и B выражается формулой

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события A и B несовместны, то есть $AB = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность *дополнения* к событию A находится по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность *объединения* событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, то

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Формулы умножения вероятностей.

Вероятность *пересечения* событий A и B находится через условную вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad \text{или} \quad P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Для независисых событий A и B

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1}).$$

Если события $A_1, \dots, A_n$ — независимы, то

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)\dots P(A_n).$$

Задача 4 для ИДЗ № 1.

Варианты 1 – 30.

1. Последовательно посланы четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0.6. Найти вероятность приема не менее двух сигналов.

2. Вероятность выигрыша партии в волейбол одной из команд равна 0,6, а другой — 0,4, и не зависит от исхода предыдущих партий. Найти вероятность того, что из трех сыгранных партий одна из команд выиграет две партии подряд.

3. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым — 0,7, третьим — 0,6. Найти вероятность того, что в мишени будет одна пробоина.

4. Два спортсмена пытаются выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый выполнит норму — 0,85; второй — 0,9. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена 1) одним из них; 2) хотя бы одним из них.

5. В коробке смешаны гаечные ключи трех типов: 10 ключей первого типа, 30 — второго и 20 — третьего типа. Найти вероятность того, что три выбранных наудачу ключа будут одного типа.

6. Найти вероятность того, что заказанные переговоры не состоятся в данный промежуток времени, если вероятность занятости всех каналов связи в этот промежуток равна 0,82, а вероятность отсутствия вызываемого лица — 0,25.

7. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй — 0,3, третий — 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит хотя бы один вызов.

8. Вероятность эксплуатации электролампочки до трех месяцев равна 0,9, а от трех до пяти месяцев (при условии, что она прослужила три месяца) равна 0,6. Найти вероятность того, что три лампочки будут в эксплуатации более пяти месяцев.

9. В цехе две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой 0,8, второй — 0,9. Найти вероятность того, что план выполнен

1) только одной бригадой;

2) хотя бы одной бригадой.

10. Блок содержит три микросхемы. Вероятности выйти из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2 и 0,4. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока

1) выйдет из строя не менее двух микросхем;

2) не выйдет из строя ни одна;

3) выйдет из строя хотя бы одна микросхема.

11. Вероятность отказа хотя бы одного прибора из четырех поставленных на испытания равна 0,3439. Найти вероятность отказа одного прибора, если для всех приборов она одна и та же.

12. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 0,25 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

13. Имеется коробка с 9 новыми теннисными мячами. Для игры берут 3 мяча и после игры кладут их обратно. При последующем выборе использованные мячи не отличаются от новых. Найти вероятность того, что после трех игр в коробке не останется новых мячей.

14. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос равна 0,9; на второй — 0,85

и на третий вопрос — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

15. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.

16. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

17. В новогодней электрогирлянде из 10 последовательно соединенных лампочек перегорела одна. С целью устранения неисправности наудачу выбранную лампочку заменяют новой, после чего проверяют работу гирлянды. Найти вероятность того, что гирлянда будет исправной после замены: 1) одной; 2) двух; 3) трех; 4)четырех; 5) пяти ламп.

18. Цех производит 95% стандартных изделий, причем 90% из них первого сорта. Найти вероятность того, что среди трех случайно отобранных изделий хотя бы одно первого сорта.

19. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком $p_1 = 0,3$, вторым — $p_2 = 0,6$. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй — 3 выстрела. Найти вероятность того, что цель не будет поражена.

20. В двух партиях 75% и 85% доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Найти вероятность того, что среди них

1) хотя бы одно бракованное;

2) одно доброкачественное и одно бракованное.

21. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна 0,63, а вероятность того, что они совместно не появятся, равна 0,03. Найти вероятности появления каждого события в отдельности.

22. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Ве-

роятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

23. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно с вероятностями 0,8; 0,75; 0,7. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя хотя бы один элемент.

24. В мешке смешаны нити, среди которых 30 % белых, остальные красные. Найти вероятность того, что вынутые наудачу две нити: 1) разных цветов; 2) одного цвета.

25. Прибор, работающий в течение времени T, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может отказать за это время. Вероятность безотказной работы в течение этого времени для первого узла равна 0,8; для второго — 0,9; для третьего узла — 0,7. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя хотя бы один узел.

26. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты проводятся последовательно до наступления события. Найти вероятность того, что придется производить пятый опыт.

27. Вероятность того, что механизм проработает без отказа 150 часов, равна 5/7, а 400 часов — 4/7. Механизм проработал 150 часов. Найти вероятность того, что он еще проработает 250 часов.

28. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что:

1) двигатель заработает при третьем включении зажигания;

2) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

29. Устройство приводится в движение двумя двигателями. Вероятность отказа второго двигателя равна 0,1. При отказе первого двигателя нагрузка на второй возрастает, и он отказывает с вероятностью 0,4. Вероятность безотказной работы обоих двигателей, совместно работающих, равна 0,87. Найти вероятность безотказной работы первого двигателя.

30. Вероятность того что, первый станок потребует наладки за смену, равна 0,15, второй — 0,1, третий — 0,12. Найти вероятность того, что хотя бы один станок потребует наладки за смену, если станки одновременно потребовать наладки не могут.

§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Определение 6. События $A_1, \dots, A_n$ образуют *полную группу,* если выполнены следующие условия:
1) $A_1, \dots, A_n$ несовместны, т. е. $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$;
2) $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$;
3) $P(A_i) > 0,\ i = 1, \dots, n$.

Формула полной вероятности. Если $A_1, \dots, A_n$ образуют полную группу, то вероятность события B находится по формуле:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k)\,.$$

Формула Байеса. Если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Пусть события $A_1, \dots, A_n$ образуют полную группу, тогда

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}\,.$$

Задача 5 для ИДЗ № 1.

Варианты 1 – 30.

1. На склад поступила продукция трех фирм, выпускающих телефонные аппараты. Объемы продукции первой, второй и третьей фирм относятся как 3:5:4. Известно, что кнопочные аппараты среди продукции первой фирмы составляют в среднем 92%, второй — 90%, третьей — 85%. Найти вероятность того, что наудачу взятый аппарат, оказавшийся кнопочным, изготовлен второй фирмой.

2. Три группы студентов сдавали экзамен по математике. В первой группе успешно сдали 80% студентов, во второй — 75%, в третьей — 90%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент из этих групп сдал успешно экзамен, если численность первой группы в 1,5 раза больше численности второй и в 1,2 раза больше численности третьей группы.

3. В магазин поступают плащи с трех фабрик. Производительности фабрик относятся 2:5:3. Комбинированные плащи среди продукции составляют в среднем 97%, 96%, 98% соответственно. Наудачу выбранный плащ оказался комбинированным. С какой фабрики вероятнее всего он поступил?

4. В магазин поступили радиоприемники с трех заводов. Среди 50 приемников с первого завода 10 приемников первого класса, из 60 со второго завода 15 первого класса. Найти вероятность того, что наудачу взятый радиоприемник будет первого класса, если из 40 приемников с третьего завода 10 первого класса.

5. Среди реализуемых магазином магнитофонов 35% изготовлены на первом заводе, 25% — на втором и остальные — на третьем. Доля двухкассетных магнитофонов в продукции этих заводов составляет соответственно 85%, 75%, 90%. Найти вероятность того, что у случайного покупателя этого магазина купленный им двухкассетный магнитофон изготовлен на третьем заводе.

6. На первом станке изготовлено 20 деталей, из них 7 с дефектом, на втором 30 деталей, из них 4 с дефектом, на третьем — 50 деталей, из них 10 с дефектом. С общего конвейера взята наудачу деталь, оказавшаяся без дефекта. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

7. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что

в первой группе получили положительные оценки 20 из 30 студентов, во второй группе 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

8. На склад поступила продукция трех цехов в соотношении 2:5:3. Средний процент второсортных изделий для продукции первого цеха равен 3%, для второго — 2%, для третьего — 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие, оказавшееся второсортным, произведено первым цехом.

9. В магазин поступили часы с трех заводов: с первого — 40% часов, со второго — 45% и остальные часы с третьего завода. В продукции первого завода спешат 20% часов, второго — 30% и третьего — 10%. Найти вероятность того, что купленные в этом магазине часы спешат.

10. Партия транзисторов, среди которых 10% с дефектами, поступила на контроль. Упрощенная схема контроля такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект и с вероятностью 0,03 признает исправный транзистор дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор признан дефектным. Найти вероятность того, что на самом деле транзистор исправный.

11. При передаче сообщений “точка” и “тире” эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 0,4 сообщений “точка” и 1/3 сообщений “тире”. Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

12. На радиолокатор с вероятностью 0,8 поступает полезный сигнал, с вероятностью 0,2 — сигнал с помехой. Полезный сигнал приемное устройство регистрирует с вероятностью 0,7, помеху — с вероятностью 0,3. Устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

13. Прибор состоит из двух последовательно включенных блоков. Надежность первого блока равна 0,9, второго — 0,8. Во время испытания зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказал только первый блок.

14. Нормальный режим функционирования робота зарегистрирован в 60% случаях работы, форсированный — в 30% случаях и недогруженный — в 10%. Его надежность при нормальном режиме равна 0,8, при форсированном — 0,6, при недогруженном — 0,9. Найти полную надежность робота.

15. В продажу поступили телевизоры от трех фирм. Продукция первой фирмы содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второй — 10% и третьей — 5%. Найти вероятность приобретения исправного телевизора, если в магазин поступило 30% телевизоров от первой фирмы, 20% от второй и 50% от третьей.

16. Система обнаружения самолета из-за помех может давать ложные показания с вероятностью 0,05, а при наличии цели система обнаруживает ее с вероятностью 0,9. Вероятность появления цели в зоне обнаружения 0,25. Найти вероятность ложной тревоги.

17. По летящей цели производится три выстрела. Вероятность попадания в нее при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. При одном попадании цель будет сбита с вероятностью 0,3, при двух — 0,6, при трех попаданиях цель будет сбита наверняка. Найти вероятность того, что цель будет сбита.

18. На склад поступают детали с трех станков. Вероятность выпуска брака на первом станке равна 0,03, на втором — 0,02, на третьем — 0,01. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго, а третьего в два раза больше второго. Найти вероятность того, что:

1) наудачу взятая со склада деталь будет бракованной;

2) она произведена на втором станке.

19. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в пропорции 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний — 0,3, мелкий — 0,1. Найти вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее.

20. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-2 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-2, равны соответственно 0,6 и

0,4. Получен сигнал о разладе автомата. Найти вероятность того, что он снабжен сигнализатором С-1.

21. Вступительные экзамены сдают 500 абитуриентов МТ факультета и 300 МС факультета. Вероятность успешной сдачи экзаменов на МТ равна 0,6, на МС — 0,7. Наудачу выбранный абитуриент успешно сдал экзамен. Найти вероятность, что он с МТ факультета.

22. Три токаря обрабатывают однотипные детали. Первый обрабатывает за смену 40 деталей, второй — 45, третий — 50. Вероятность получения брака при изготовлении одной детали для первого токаря равна 0,03, для второго — 0,05, для третьего — 0,02. Из общей выработки за смену наудачу выбрана деталь, оказавшаяся бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена первым токарем.

23. Из 45 однотипных деталей 10 изготовлены на первом станке-автомате, из них 2 нестандартные, 15 — на втором, из них одна нестандартная, 20 — на третьем, из них три нестандартные. Все детали поступают на общий конвейер. Взятая наудачу с него деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

24. Имеются три партии компьютеров в количестве 25, 35 и 40 штук. Вероятность того, что компьютеры, поставляемые разными фирмами-производителями, проработают без ремонта заданное время, равны для этих партий соответственно $0,75$; $0,82$ и $0,9$. Найти вероятность того, что наудачу выбранный компьютер

1) проработает без ремонта заданное время;

2) вышедший из строя компьютер из второй партии.

25. Экзамен по математике сдают 25 студентов ТК факультета и 30 МТ факультета. Вероятность успешной сдачи экзаменов на ТК равна 0,8, на МТ — 0,7. Наудачу выбранный студент успешно сдал экзамен. Какова вероятность того, что он с ТК факультета.

26. Опытный образец, чтобы быть запущенным в серию, должен выдержать два испытания: первое с вероятностью 0,6 и второе — с вероятностью 0,7; при этом если образец не выдерживает второе испытание, то после восстановления образца оно проводится еще раз. Найти вероятность того, что образец выдержит испытания и будет

запущен в серию.

27. В сборочный цех попадают детали с трех станков-автоматов, первый из которых дает 0,3% брака, второй — 0,1% и третий — 0,2%. Найти вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с автоматов поступило соответственно 500, 200 и 300 деталей.

28. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе положительную оценку получили 15 из 20 студентов, во второй — 20 из 25 и в третьей — 18 из 20. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа с положительной оценкой написана студентом третьей группы.

29. На складе телеателье 60 кинескопов, из которых 15 изготовлены первым заводом, 20 — вторым, остальные — третьим. Вероятность выпуска кинескопа высшего качества на первом заводе $2/3$, на втором — $3/4$, на третьем — $4/5$. Найти вероятность того, что наудачу взятый со склада кинескоп, оказавшийся высшего качества, изготовлен на третьем заводе.

30. Изделие проверяется одним из двух контролеров. Вероятность того, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,55, ко второму — 0,45. Вероятность того, что изделие признано стандартным первым контролером, равна 0,9, а вторым — 0,98. Изделие признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

§ 6. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим последовательность n испытаний, например, n подбрасываний монеты (монета не обязательно симметрична). Результат наблюдений запишем в виде упорядоченного набора $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$ в случае появления «герба» (назовем это «успехом») и $a_i = 0$ в случае появления «решетки» («неуспех»). Пространство всех элементарных исходов имеет следующую структуру:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = 0, 1\}.$$

Припишем каждому элементарному событию $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ вероятность $p(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}$, где числа p и q неотрицательны и $p + q = 1$.

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где $\mathfrak{A}$ — система всех подмножеств пространства Ω, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \in \mathfrak{A}$, определяет вероятностную модель, отвечающую n независимым испытаниям с двумя исходами, которую называют *схемой Бернулли.*

Рассмотрим события

$$A_k = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_1 + \ldots + a_n = k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

означающие, что в n испытаниях произойдет ровно k «успехов». Вероятность события A_k будем обозначать $P_n(k)$, она равна

$$P(A_k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Набор вероятностей $P(A_0), \ldots, P(A_n)$ называется *биномиальным распределением.*

Наивероятнейшее число k_0 появления «успехов» в n испытаниях удовлетворяет неравенствам

$$np - q \leqslant k_0 < np + p.$$

Если $np - q$ не является целым числом, то k_0 единственно. Если $np - q$ — целое число, то наивероятнейших значений два: $k_0^1 = np - q$ и $k_0^2 = np + p = k_0^1 + 1$.

Поскольку при больших n ($n > 20$) непосредственное использование формулы для вероятностей биномиального распределения сложно, то для приближенного вычисления $P_n(k)$ используют предельные теоремы: локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа и теорему Пуассона.

1. Локальная предельная теорема применяется, если надо вычислить вероятность $P_n(k)$ и $npq > 10$. Сначала найдем

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \text{и} \quad x = \frac{k - np}{\sigma}.$$

Из таблицы или с помощью калькулятора находим приближенное значение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

Если $x < 0$, пользуемся четностью функции $\varphi(x)$. Вероятность $P_n(k)$ находится из приближенного равенства

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma}\,\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\dfrac{(k-np)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа применяется для приближенного нахождения сумм вероятностей $P_n(k)$. Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что событие A наступит число раз, не меньше k_1 и не больше k_2, то есть

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Предполагаем, что число $k_2 - k_1$ достаточно велико. Вначале находим приближенные значения

$$\sigma = \sqrt{npq}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma}.$$

По таблице находим значения функции Лапласа

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad i = 1, 2,$$

учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная. Теорема Муавра–Лапласа утверждает, что

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

3. Теорема Пуассона применяется, если n велико, а npq мало (то есть $npq < 10$.) Это бывает в том случае, если вероятность p или q является достаточно маленьким числом. Пусть p мало (если q мало, можно понимать q как вероятность «успеха»). Найдем $\lambda = np$, тогда по теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться калькулятором или таблицей распределения Пуассона.

Задача 6 для ИДЗ № 1.

Варианты 1 – 30.

1. При установившемся технологическом процессе станок-автомат производит 2/3 числа изделий первого сорта и 1/3 — второго. Найти:

1) ряд распределения случайного числа первосортных изделий среди пяти отобранных изделий;

2) что является более вероятным: получить два первосортных изделия среди трех отобранных наудачу или три первосортных среди пяти наудачу отобранных?

2. Изделия, изготовляемые на станке-автомате, в среднем имеют 20% изделий первого сорта. Найти вероятность того, что среди 5 изделий будет:

1) 4 изделия первого сорта;

2) хотя бы 4 изделия первого сорта.

3. При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20% — вторым и 10% — третьим. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, можно было утверждать, что доля первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали по абсолютной величине не более чем на 0,05.

4. При установившемся технологическом процессе станок-автомат производит 75% продукции высшего качества. Найти вероятность того, что в партии из 150 изделий окажется наивероятнейшее число изделий высшего качества.

5. По техническим условиям диаметр валиков, изготавливаемых на автоматическом станке, должен быть не менее 37,8 мм и не более 37,9 мм. Настроенный станок производит в среднем 98% валиков, удовлетворяющих предъявляемым требованиям. Определить вероятность того, что среди 900 изготовленных валиков будет бракованных: а) от 3% и более; б) менее 2%.

6. В большой серии испытаний 70% проб указывают на наличие и 30% на отсутствие загрязнения. Найти вероятность того, что при взятии 8 проб пять из них будут указывать на загрязнение.

7. Настроенный станок производит в среднем 80% валиков, диаметр которых укладывается в поле допуска. Найти вероятность того, что среди 100 валиков будет не менее 75 валиков, диаметр которых укладывается в поле допуска.

8. Передается код из 6 импульсов. Найти вероятность того, что не менее двух импульсов будут искажены, если искажения независимы и появляются с вероятностью 0,25.

9. Вероятность допущения дефекта при производстве механизма равна 0,4. Отобрано для контроля 500 механизмов. Найти величину наибольшего отклонения частоты изготовления механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

10. Среди деталей, изготовляемых в цехе, в среднем 4% брака. Найти вероятность того, что среди 6 деталей, взятых на контроль:

1) две детали будут бракованными;

2) не более двух деталей будут бракованными;

3) бракованными окажутся от 2 до 4 деталей.

11. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при одном броске равна 0,4. Сколько нужно произвести бросков, чтобы наивероятнейшее число попаданий мяча в корзину оказалось равным 12?

12. При проверке качества изготовленных на заводе часов установлено, что в среднем 2% часов нуждаются в дополнительной регулировке. Проверяется качество 200 изготовленных часов. Найти вероятность того, что среди них 190 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке.

13. При вращении антенны радиолокатора за время облучения цели (например, самолета) успевают отразиться 8 импульсов. Найти вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора, если для этого необходимо прохождение через приемник не менее 5 импульсов, а вероятность подавления импульса помехой равна 0,1 (подавление различных импульсов помехами суть независимые события).

14. При проверке качества микросхем установлено, что 95% из них служит не менее гарантированного срока в 2000 часов. Найти вероятность того, что в партии из 500 штук доля микросхем со сроком службы менее гарантированного будет отличаться от вероятности изготовления такой микросхемы не более, чем на 0,02.

15. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Найти вероятность того, что в партии из 2000 ламп:

1) число стандартных — не менее 101 штук;

2) число нестандартных — менее 201 штуки.

16. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

17. Вероятность попадания в “десятку” при одном выстреле равна 0,2. Найти наименьшее число независимых выстрелов, которые нужно произвести, чтобы с вероятностью, не менее 0,9 попасть хотя бы раз в “десятку”.

18. Батарея дала 14 выстрелов по военному объекту с вероятностью попадания в него, равной 0,2. Найти

1) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность;

2) вероятность разрушения объекта, если для этого требуется не менее 4 попаданий.

19. Имеется 100 приборов, работающих независимо друг от друга в одинаковых условиях и подключаемых к питанию с вероятностью 0,8 за период функционирования. Найти вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся подключенными к питанию от 70 до 86 приборов.

20. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна $2/3$, а отрицательной — $1/3$.

21. Установлено, что в среднем 0,5% шариков для шарикоподшипника оказываются бракованными. Найти вероятность того, что среди 10000 шариков бракованными окажутся: 1) 40 штук; 2) 50 штук; 3) 60 штук.

22. При проверке качества изготовленных на заводе часов установлено, что в среднем 98% их отвечает предъявляемым требованиям, а 2% нуждается в дополнительной регулировке. Проверяется качество 300 изготовленных часов. Если при этом среди них обнаружится 11 или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, то вся партия возвращается заводу для доработки. Найти вероятность того, что партия будет принята.

23. Вероятность пробоя одного конденсатора за время равна 0,2. Найти вероятность того, что за время из 100 конденсаторов, работающих независимо, выйдут из строя: 1) не менее 20 конденсаторов; 2) менее 28 конденсаторов; 3) от 14 до 26 конденсаторов.

24. Вероятность появления события в каждом из независимых повторных испытаний равна 0,8. Сколько испытаний нужно провести, чтобы событие появилось не менее 75 раз с вероятностью 0,9?

25. Вероятность изготовления деталей номинальных размеров равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажутся

50 деталей номинальных размеров.

26. Визуальное наблюдение искусственного спутника Земли (ИСЗ) возможно в данном пункте с вероятностью 0,1 (отсутствует облачность) каждый раз, когда он пролетает над этим пунктом. Сколько раз должен пролететь ИСЗ над пунктом наблюдения, чтобы с вероятностью не меньше 0,9975 (практически достоверно), удалось сделать над ним не менее пяти наблюдений?

27. Найти вероятность того, что на 243-километровой трассе переключение передач (событие А) произойдет 70 раз, если вероятность такого переключения на каждом километре трассы равна 0,25.

28. Вероятность появления события в каждом из n независимых повторных испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится при 100 испытвниях:

1) не менее 75 раз и не более 90 раз;

2) не менее 75 раз; 3) не более 74 раз.

29. Устройство состоит из 1000 независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) 0,002 вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти вероятность того, что за время T откажут три элемента.

30. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

§ 7. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ИДЗ - 2

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — конечное или счетное пространство элементарных исходов.

Определение 1. Любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется (дискретной) *случайной величиной* , заданной на множестве Ω.

Примеры. Монету бросили 2 раза. ξ_1 — число выпавших гербов, ξ_2 — разность между числом гербов и числом решек.

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ принимает значения $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Если ξ принимает счетное число значений, то $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Определение 2. Набор чисел $p_k = P(\xi = x_k)$, $x_k \in X$, называется *распределением вероятностей случайной величины* ξ.

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\},$$

определенная для любого $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины* ξ.

Случайная величина ξ называется *дискретной,* если ее множество значений X не более чем счетное. Дискретная случайная величина представима в виде суммы

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k), \quad \text{где} \quad A_k = \{\omega : \xi = x_k\},$$

$I(A_k)$ — индикатор множества A_k. Если множество значений X — конечное, то случайная величина ξ называется *простой.*

ОСНОВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Вырожденное распределение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, сосредоточенное в точке a, если вероятность $P\{\xi = a\}$=1. Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geqslant a. \end{cases}$$

2. Распределение Бернулли. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ 1 - p, \ 0 \leqslant x < 1, \\ 1, \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Биномиальное распределение. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), $0 < p < 1$, $n \geqslant 1$, если

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{l} C_n^p p^k (1-p)^{n-k}, \ l \leqslant x < l+1, \\ 1, \quad x \geqslant n. \end{cases}$$

4. Геометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p, $0 < p < 1$, если

$$P\{\xi = k\} = p\,(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5. Распределение Пуассона. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, $\lambda > 0$, если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Свойства функций распределения

Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ из множества X.

1) $F(x)$ — ограниченная функция, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

2) $F(x)$ — неубывающая функция, то есть, если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;

3) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$; кроме того, $F(x) = 0$, если $x < x_{min}$, $F(x) = 1$, если $x \geqslant x_{max}$.

4) $F(x)$ непрерывна справа ($F(x+0) = F(x)$) и кусочно-постоянная; $F(x)$ возрастает в точках $x_k \in X$ скачками величиной

$$p_k = P(\xi = x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0).$$

Пусть ξ_1, ξ_2 — случайные величины, принимающие значения в конечном (или счетном) множестве $X \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Случайные величины ξ_1, ξ_2 называются *независимыми,* если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ выполнено

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = P(\xi_1 = x_1) \cdot P(\xi_2 = x_2).$$

Матем. ожидание случайных величин

Рассматриваем дискретные случайные величины, представимые в виде суммы

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k),$$

где $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$, $I(A_k)$ — индикатор множества A_k.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k).$$

Свойства математического ожидания

1) Если $\xi \geqslant 0$, то $M\xi \geqslant 0$.

2) Если $\xi = I(A)$, то $M\xi = P(A)$.

3) $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$, a, b — постоянные.

4) Если $\xi \leqslant \eta$, то $M\xi \leqslant M\eta$.

5) $|M\xi| \leqslant M|\xi|$.

6) Если ξ и η независимы, то $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

Числовые характеристики случайных величин

Определение 5. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Для дискретной случайной величины $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k)$ диспесия равна

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - M\xi)^2 P(A_k).$$

Найдем

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\big(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\big) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Свойства дисперсии

Свойство неотрицательности $D\xi \geqslant 0$. Если $\xi = C$, где C — постоянная, то $D\xi = 0$.

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi, \ a, b \text{ — постоянные.}$$

$$D(a\xi + b) = M\big(a\xi + b - M(a\xi + b)\big)^2 =$$

$$= M\big(a\xi + b - aM\xi - b\big)^2 = M\big(a\xi - aM\xi\big)^2 =$$

$$= a^2 M(\xi - M\xi)^2 = a^2 D\xi.$$

В частности, $D(a\xi) = a^2 D\xi$, $D(\xi + b) = D\xi$.

Определение 6. Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Дисперсия суммы случайных величин

Пусть ξ и η — случайные величины.

$$D(\xi + \eta) = M\big(\xi + \eta - M(\xi + \eta)\big)^2 =$$

$$= M\big((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta)\big)^2 =$$

$$= D\xi + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + D\eta.$$

Определение 7. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называется число

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{Cov}(\xi,\eta).$$

Пусть ξ и η — *независимые* случайные величины. Тогда

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) =$$

$$M(\xi\eta - \eta M\xi - \xi M\eta + M\xi M\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = 0.$$

Следовательно, $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$.

Для произвольного числа случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$D\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{k<\ell}\mathrm{Cov}(\xi_k,\xi_\ell).$$

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — попарно независимы (достаточно их попарной некоррелированности), то

$$D\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k.$$

Определение 8. Коэффициентом корреляции называется отношение

$$\varrho(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Случайные величины ξ и η называются *некоррелироваными,* если $\varrho(\xi,\eta) = 0$.

Свойства корреляции:

1) $-1 \leqslant \varrho(\xi,\eta) \leqslant 1$.

2) Если $\varrho(\xi,\eta) = \pm 1$, то ξ и η линейно зависимы, то есть

$$\eta = a\xi + b,$$

где $a > 0$, если $\varrho(\xi,\eta) = 1$, и $a < 0$, если $\varrho(\xi,\eta) = -1$.

Задача 1 для ИДЗ № 2.

Варианты 1 – 30.

1. Человек стоит в начале координат на числовой оси. Он бросает монету и после каждого броска делает один шаг вправо при выпадении решетки и один шаг влево при выпадении герба. Пусть X — абсцисса, соответствующая положению человека после 10 бросков. Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $P\{\xi = i\} = \dfrac{1}{5}$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти распределение, функции распределения, математические ожидания и дисперсии величин $\xi_1 = -\xi$, $\xi_2 = |\xi|$.

3. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $P\{\xi = k\} = \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти матеметическое ожидание случайной величины ξ.

4. Проводится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $0,4$. Рассматривается случайная величина ξ — число появления события A в трех опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ, найти ее матеметическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

5. Монета подбрасывается 8 раз. Рассматривается случайная величина ξ — число выпавших гербов. Построить ряд распределения случайной величины ξ, найти ее матеметическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

6. Монета подбрасывается 6 раз. Рассматривается случайная величина ξ — разность между числом выпавших гербов и решек. Построить ряд распределения случайной величины ξ, найти ее матеметическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Проводится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Построить ряд распределения

случайной величины ξ — числа появлений события $\bar{A}$, противоположного событию A в n опытах, найти ее матеметическое ожидание и дисперсию.

8. Событие A состоит в появлении двух гербов при бросании трех монет. Производится 10-кратное бросание трех монет. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа появления события A при 10 испытаниях.

9. Событие A состоит в появлении двух гербов при бросании трех монет. Производится 8-кратное бросание трех монет. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi/8$, где ξ — число появления события A при 8 испытаниях, $\eta = \xi/8$ — частота события A.

10. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго — p_2. Рассматриваются две случайные величины: ξ_1 — число попаданий первого стрелка, ξ_2 — число попаданий второго стрелка и их разность $\zeta = \xi_1 - \xi_2$. Построить ряд распределения сл. величины ζ и найти $M\zeta$, $D\zeta$.

11. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка $0,6$ для второго — $0,7$. Рассматриваются две случайные величины: ξ_1 — число попаданий первого стрелка, ξ_2 — число попаданий второго стрелка и их сумма $\zeta = \xi_1 + \xi_2$. Построить ряд распределения сл. величины ζ и найти $M\zeta$, $D\zeta$.

12. Четыре неразличимых шара случайным образом раскладываются по трем ящикам. Пусть случайная величина ξ равна числу занятых ящиков. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математич. ожидание и дисперсию ξ.

13. Четыре неразличимых шара случайным образом раскладываются по трем ящикам. Пусть случайная величина ξ равна числу шаров в первом ящике. Построить функцию распределения случайной величины ξ, найти математич. ожидание и дисперсию ξ.

14. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимы, $M\xi_1 = 1$, $M\xi_2 = 2$,

$D\xi_1 = 1$, $D\xi_2 = 4$. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 4\xi_1 + 4$; б) $(\xi_1 - \xi_2 + 1)^2$.

15. Дискретные независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 заданы законами распределения: $P(\xi_1 = 1) = 0,2$, $P(\xi_1 = 2) = 0,8$, $P(\xi_2 = 0,5) = 0,3$, $P(\xi_2 = 1) = 0,7$. Найти математическое ожидание произведения $\xi_1 \cdot \xi_2$ двумя способами: а) составив закон распределения $\xi_1 \cdot \xi_2$; б) пользуясь свойствами математического ожидания.

16. Дискретные независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 заданы законами распределения: $P(\xi_1 = 1) = 0,4$, $P(\xi_1 = 2) = 0,6$, $P(\xi_2 = 0,5) = 0,7$, $P(\xi_2 = 1) = 0,3$. Найти математическое ожидание суммы $\xi_1 + \xi_2$ двумя способами: а) составив закон распределения $\xi_1 \cdot \xi_2$; б) пользуясь свойствами математического ожидания.

17. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

18. Человек, имеющий 5 ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого и в случайном порядке. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний, если неподошедшие ключи не исключаются из дальнейших испытаний.

19. Человек, имеющий 6 ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого и в случайном порядке. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний, если неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний.

20. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков на первой кости и Y — большее из двух выпавших чисел. Выписать совместное распределение X и Y. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

21. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число «единиц», Y — произведение выпавших очков. Выписать совместное распределение X и Y. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

22. Три РАЗЛИЧИМЫХ шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Рассмотрим случайные величины X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти распре-

деление случайных величин X и Y, построить их функции распределения, найти математические ожидания и дисперсии.

23. Три НЕРАЗЛИЧИМЫХ шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Рассмотрим случайные величины X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти распределение случайных величин X и Y, построить их функции распределения, найти математические ожидания и дисперсии.

24. Три РАЗЛИЧИМЫХ шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y, ковариацию и коэффициент корреляции этих величин. Являются ли величины X и Y независимыми?

25. Три НЕРАЗЛИЧИМЫХ шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число занятых ящиков и Y — число шаров в первом ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y, ковариацию и коэффициент корреляции этих величин. Являются ли величины X и Y независимыми?

26. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при двух независимых бросаниях правильной игральной кости.

27. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и суммой выпавших очков при двух независимых бросаниях правильной игральной кости.

28. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2},$$
$$P(\xi_2 = 1) = P(\xi_2 = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Будут ли случайные величины $\xi_1\xi_2$ и ξ_2 независимыми?

29. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2},$$
$$P(\xi_2 = 1) = P(\xi_2 = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Будут ли независимыми случайные величины $\xi_1 + \xi_2$ и ξ_2?

30. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi_2 = 1) = P(\xi_2 = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Будут ли $\xi_1\xi_2$ и ξ_2 некоррелированными?

§ 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$.

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\},$$

определенная для любого $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения случайной величины* ξ.

Свойства функций распределения.

1) $F(x)$ — неубывающая функция;

2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

3) $F(x)$ непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Случайная величина ξ называется *дискретной,* если ее множество значений не более чем счетное. Дискретная случайная величина представима в виде суммы $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k I(A_k)$, где $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$, $I(A_k)$ — индикатор множества A_k. Функция распределения дискретной случайной величины кусочно-постоянная и равна

$$F_\xi(x) = \sum_{\{k:\, x_k \leqslant x\}} P(\xi = x_k).$$

Случайная величина ξ называется *непрерывной,* если ее функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$. Случайная величина ξ *абсолютно непрерывна,* если существует такая неотрицательная функция $f = f_\xi(x)$, называемая плотностью, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, \; x \in \mathbb{R}.$$

Если задана функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ, то плотность этой случайной величины $f_\xi(x)$ равна

$$f_\xi(x) = \big(F_\xi(x)\big)'.$$

Плотность распределения любой случайной величины удовлетворяет равенству $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 1.$

Вероятность попадания случайной величины ξ *на участок* $(\alpha, \beta]$ выражается формулой

$$P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$$

Если случайная величина ξ имеет плотность, то

$$P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)dx.$$

Кроме *дискретных* и *абсолютно-непрерывных,* существуют еще *сингулярные* функции распределения. Так называются непрерывные функции распределения, точки роста которых образуют множество нулевой меры Лебега. Указанными тремя типами исчерпываются все такие функции. Это означает, что произвольная функция распределения может быть представлена в виде $p_1F_1 + p_2F_2 + p_3F_3$, где F_1 — дискретная, F_2 — абсолютно непрерывная, F_3 — сингулярная функции распределения, p_i — неотрицательные числа, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

ОСНОВНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Равномерное распределение. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, $a<b$, если плотность этой случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

2. Треугольное распределение (распределение Симпсона). Случайная величина ξ имеет треугольное распределение на отрезке $[a,b]$, если плотность этой случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{b-a}-\dfrac{2}{(b-a)^2}\,|a+b-2x|, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

3. Показательное распределение. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda>0$, если плотность

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

4. Нормальное распределение. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (m,σ), $\sigma>0$, если плотность

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

5. Распределение Коши. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами (α, λ), $\lambda > 0$, если она имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, называется интеграл Лебега от $\mathfrak{F}$-измеримой функции $\xi = \xi(\omega)$ по мере P :

$$M\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega),$$

если данный интеграл Лебега существует.

Если ξ имеет плотность, то $M\xi$ может быть вычислено по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_k с вероятностями $p_k = P\{\xi = x_k\}$, то

$$M\xi = \sum_k x_k p_k,$$

если последний ряд сходится абсолютно.

Если случайная величина $\zeta = g(\xi)$, то для вычисления $M\zeta$ можно применять формулы:

$$M\zeta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx,$$

$$M\zeta = Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Если случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx.$$

Задача 2 для ИДЗ № 2.

Варианты 1 – 30.

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-4, -1]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X + 1$.

2. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1, 2]$ и равна 0 для остальных x. Найти плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = X + 3$.

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[2, 5]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X - 1$.

4. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = C(2x+3)$ при $x \in [1, 5]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную C, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X - 1$.

5. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = C(x^2-2)$ при $x \in [2, 6]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную C, функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = X + 1$.

6. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = -2X + 3$.

7. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 1$.

8. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = -X + 1$.

9. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения и математическое ожидание $Y = X + 2$.

10. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) =$

$C(x^2+1)$ при $x \in [0,2]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную C, математическое ожидание и плотность случайной величины $Y = 2X - 1$.

11. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0,1)$. Найти плотность $Y = 4X$. Какое распределение имеет Y?

12. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0,1)$. Найти плотность $Y = X + 4$. Какое распределение имеет Y?

13. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2,2]$. Найти плотность $Y = 4X$.

14. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2,2]$. Найти плотность $Y = X + 4$.

15. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти распределение $Y = 4X + 2$. Является ли Y нормально распределенной случайной величиной?

16. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти распределение $Y = -2X$. Является ли Y нормально распределенной случайной величиной?

17. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2,1]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 1$.

18. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = x$ при $x \in [0,1]$, $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1,2]$ и равна 0 для остальных x. Найти плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = 3X - 3$.

19. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1,7]$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X - 1$.

20. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = C(2x+3)$ при $x \in [1,5]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную C, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X + 5$.

21. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = C(x^2-2)$ при $x \in [2,4]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную

C, функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = X - 2$.

22. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-4, 4]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 4$.

23. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины $Y = -X + 2$.

24. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $a > 0$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = 3X + 5$.

25. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и равна 0 для остальных x. Найти функцию распределения и математическое ожидание $Y = X - 3$.

26. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = C(x^2 + 1)$ при $x \in [0, 2]$ и равна 0 для остальных x. Найти постоянную C, математическое ожидание и плотность случайной величины $Y = -X + 1$.

27. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти плотность $Y = 5X$. Какое распределение имеет Y?

28. Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами $(0, 1)$. Найти плотность $Y = X - 4$. Какое распределение имеет Y?

29. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-3, 3]$. Найти плотность $Y = 4X + 2$.

30. Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Найти плотность $Y = X - 5$.

§ 9. МНОГОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определены случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, то говорят, что задан *случайный вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение 1. Функция

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\}$$

называется *многомерной функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ или функцией распределения случайного вектора ξ.

Для двух случайных величин ξ_1, ξ_2 функция распределения

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = F(x, y) = P\{\xi_1 \leqslant x, \xi_2 \leqslant y\}$$

и обладает следующими свойствами:

1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;

2) $F(+\infty, +\infty) = 1$;

3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

4) $F(x, y)$ — неубывающая функция переменных x и y.

Если величины ξ_1, ξ_2 имеют функцию распределения $F(x, y)$, то

$$P\{a_1 < \xi_1 \leqslant b_1, a_2 < \xi_2 \leqslant b_2\} = \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

Определение 2. *Плотностью совместного распределения* $f(x, y)$ системы двух случайных величин (ξ_1, ξ_2) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Функция $f(x, y)$ неотрицательная и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$$

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию распределения $F(x, y)$ по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv.$$

Плотности распределения отдельных величин ξ_1 и ξ_2 выражаются через двумерную плотность $f(x, y)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy; \;\; f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$$

О п р е д е л е н и е 3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми,* если для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$ имеет место равенство

$$P\big\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\big\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \ldots P\{\xi_n \in B_n\}.$$

Т е о р е м а 1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда их функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n),$$

где $F_i(x_i)$ — функции распределения величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Т е о р е м а 2. Предположим, что распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ абсолютно непрерывно. Тогда необходимым и достаточным условием независимости случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ служит соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n),$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ — совместная плотность распределения, а $f_i(x_i)$ — плотности распределения величин ξ_i, $i = 1, \dots, n$.

Если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие плотности $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то плотность их *суммы* $\xi_1 + \xi_2$ вычисляется с помощью *формулы свертки:*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Задача 3 для ИДЗ № 2.

Варианты 1 – 30.

1. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{6}$, $y = \dfrac{\pi}{3}$, если известна функция распределения

$$F(x,y) = \sin x \sin y \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2. Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти функцию распределения двумерной случайной величины и вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник с вершинами $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(\sqrt{3},1)$, $D(\sqrt{3},0)$.

3. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, плотность распределения двух случайных величин $f(x,y) = Cxy$; вне прямоугольника $f(x,y) = 0$. Найти

а) постоянную C; б) функцию распределения системы.

4. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, плотность распределения двух случайных величин $f(x,y) = Cx^2y^2$; вне прямоугольника $f(x,y) = 0$. Найти

а) постоянную C; б) функцию распределения системы.

5. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Найти распределение случайной величины ξ_1 и скалярного произведения $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами $(1, 1)$.

6. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Найти распределение скалярного произведения $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами $(1, 1)$.

7. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) задана плотностью совместного распределения $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{4}$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

8. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Найти плотность распределения и функцию распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2). Найти одномерные плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2. Являются ли эти величины независимыми?

9. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

Найти коэффициент a. Установить, являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми. Найти одномерные плотности этих случайных величин.

10. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2.

11. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $f_{\xi_1, \xi_2}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$,

где $G = \left\{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 - \frac{1}{2}u\right\}$. Найти плотность распределения $f_{\xi_1}(x)$ случайной величины ξ_1.

12. Плотность совместного распределения ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $f_{\xi_1,\xi_2}(u,v) = \dfrac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2+v^2 \geqslant 1$ и $f_{\xi_1,\xi_2}(u,v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

13. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $F_{\xi_i}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$, $i = 1,2$. Найти $P\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\}$.

14. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $F_{\xi_i}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$, $i = 1,2$. Найти $P\{\xi_1 \leqslant \xi_2 - 1\}$.

15. Рассматривается совместная работа двух приборов. Случайные величины T_1 и T_2 представляют собой, соответственно, время безотказной работы первого прибора и время безотказной работы второго. Оба прибора выходят из строя независимо друг от друга. Каждая из случайных величин T_1, T_2 имеет показательное распределение с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Найти вероятности следующих событий: A — в течение времени τ после начала работы оба прибора будут продолжать работу, B — в течение времени τ после начала работы первый прибор будет продолжать работу, а второй выйдет из строя, C — второй прибор выйдет из строя раньше, чем первый.

16. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,a]$. Найти плотности распределения случайной величины $\xi_1 - \xi_2$.

17. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,a]$. Найти плотности распределения случайной величины ξ_1/ξ_2.

18. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geqslant 0$ каждая. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 - \xi_2$; б) $|\xi_1 - \xi_2|$.

19. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показатель-

ное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geqslant 0$ каждая. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi_1 + \xi_2$; б) ξ_1/ξ_2.

20. Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2, если ξ_1 равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, а ξ_2 имеет показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geqslant 0$.

21. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти плотности распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Найти $P\{0,5 \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leqslant 2,5\}$.

22. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены показательно с одним и тем же параметром α.

23. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

24. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Докажите, что произведение $\xi_1 \cdot \xi_2$ имеет плотность $\dfrac{2\ln|x|}{\pi^2(x^2-1)}$.

25. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma)$. Найти функцию распределения случайной величины $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

26. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma)$. Найти функцию распределения случайной величины $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

27. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2.

28. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$ и $(0,2)$. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности ξ_1 и ξ_2.

29. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Найти плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$.

30. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 2)$. Найти плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$.

§ 10. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots,$ — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ со значением в множестве $X = \{x_0, x_1, \dots\}$. Если выполнено условие

$$P\{\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}, \dots, \xi_0 = x_{i_0}\} = P\{\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}\}$$

(в предположении $P(\xi_n = x_{i_n}, \dots, \xi_0 = x_{i_0}) > 0$), то последовательность $\xi_0, \xi_1, \dots$ называется марковской цепью.

Цепь Маркова $\xi_0, \xi_1, \dots$ называется однородной, если для любых i, j вероятность $P(\xi_n = x_j | \xi_{n-1} = x_i) = p_{ij}$ не зависит от n. Мы будем рассматривать только однородные цепи Маркова. Матрица P с элементами p_{ij} называется матрицей вероятностей перехода за один шаг, эта матрица является *стохастической,* т. е. $p_{ij} \geqslant 0$ для любых i, j и $\sum_j p_{ij} = 1$.

Матрица $P^{(n)}$ с элементами $p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = x_j | \xi_0 = x_i)$ называется матрицей вероятностей перехода за n шагов. Для любых $n \geqslant 0, m \geqslant 0$ справедливо уравнение Колмогорова–Чепмена

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}.$$

Обозначим $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots)$— распределение вероятностей цепи Маркова на $n-$м шаге: $p_i^{(n)} = P(\xi_n = x_i)$, ($p^{(0)}$ называется начальным распределением,) тогда выполнены равенства

$$p^{(n+m)} = p^{(n)} P^m \quad \text{и} \quad p^{(n)} = p^{(0)} P^n.$$

Состояние x_i называется *несущественным,* если существуют такие состояние $x_j \in X$ и число m, что $p_{ij}^{(m)} > 0$, но $p_{ji}^{(n)} = 0$ для всех n, остальные состояния называются *существенными.* Состояние x_j достижимо из состояния x_i, если существует такое $m \geqslant 0$, что $p_{ij}^{(m)} > 0$. Состояния x_i и x_j называются *сообщающимися,* если x_j достижимо из x_i и x_i достижимо из x_j. Цепь Маркова, все состояния которой составляют один класс сообщающихся состояний, называется неразложимой.

Пусть $f_{ii}^{(\ell)} = P_i\{\xi_\ell = x_i, \xi_d \neq x_i, 1 \leqslant d \leqslant \ell - 1\}$— вероятность первого возвращения в состояние x_i,

$$f_{ij}^{(\ell)} = P_i\{\xi_\ell = x_j, \xi_d \neq x_j, 1 \leqslant d \leqslant \ell - 1\}$$

для $x_i \neq x_j$— вероятность первого попадания в состояние x_j в момент времени ℓ, когда $\xi_0 = x_i$. Тогда $f_{ij} = \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} f_{ij}^{(\ell)}$ — вероятность того, что система, находящаяся в начальный момент в состоянии x_i, рано или поздно попадет в состояние x_j. Состояние x_i называется *возвратным,* если $f_{ii} = 1$.

Состояние x_j имеет *период* d, если d есть наибольший общий делитель чисел n таких, что $p_{jj}^{(n)} > 0$. Если $d = 1$, состояние называется непериодическим. В неразложимой цепи Маркова все состояния имеют одинаковый период, в частности, одновременно являются непериодическими.

Однородная цепь Маркова называется *эргодической,* если пределы $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ существуют, не зависят от i, $\pi_j > 0$ и $\sum\limits_j \pi_j = 1$.

Теорема. Пусть $P = \{p_{ij}\}$— матрица переходных вероятностей марковской цепи с конечным числом состояний $X = \{1, 2, \ldots, N\}$.

1) Если существует n_0 такое, что $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$, то существуют числа $\pi_1, \ldots, \pi_N$ такие, что

$$\pi_j > 0, \quad \sum_j \pi_j = 1, \tag{1}$$

$$\text{для любого } i \in X \ \pi_j^{(n)} \to \pi, \ n \to \infty. \tag{2}$$

2) Обратно, если существуют числа $\pi_1, \ldots, \pi_N$, удовлетворяющие (1) и (2), то найдется n_0 такое, что $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$.

3) Числа $\pi_1, \ldots, \pi_N$ удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{\alpha} \pi_\alpha p_{\alpha j}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Всякое неотрицательное решение системы (3), удовлетворяющее условию $\sum\limits_j \pi_j = 1$, называется *стационарным распределением* вероятностей для цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P.

Задачи.

1. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \ldots, n$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностью p на один шаг вправо или, с вероятностью $q = 1 - p$, на один шаг влево. Попадая в точки 0 и n частица остается в них навсегда (поглощающие экраны). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Указать существенные и несущественные состояния.

2. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \ldots, n$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностью p на один шаг вправо или, с вероятностью $q = 1 - p$, на один шаг влево. Попадая в точки 0 и n частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или $n - 1$ (отражающие экраны). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Указать существенные и несущественные состояния.

3. Точка двигается по вершинам правильного треугольника, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из соседних вершин. Выписать матрицу переходных вероятностей. Указать возвратные и невозвратные состояния.

4. Пусть $\{-6, -5, \ldots, 0, 1, \ldots, 6\}$— множество состояний цепи Маркова ξ_n. Переходные вероятности $p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$ при $i \neq 0$

определяются соотношениями

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} j = i+1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad j = i-1 \geqslant 0, \\ 0 \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Провести классификацию цепи Маркова и множества ее состояний, если а) $p_{0,6} = 1$, $p_{0,i} = 0$ $(i \neq 6)$; б) $p_{0,6} = p_{0,-6} = 1/2$, $p_{0,i} = 0$ $(|i| \neq 6)$.

5. Пусть $\{-6, -5, \ldots, 0, 1, \ldots, 6\}$— множество состояний цепи Маркова ξ_n. Переходные вероятности $p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$ при $i \neq 0$ определяются соотношениями

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} j = i+1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad j = i-1 \geqslant 0, \\ 0 \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Провести классификацию цепи Маркова и множества ее состояний, если $p_{0,6} = p_{0,-5} = 1/2$, $p_{0,i} = 0$ $(i \neq -5, i \neq 6)$.

6. Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P периодической, если

а) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, б) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Для периодических цепей указать период.

8. Указать возвратные и невозвратные состояния цепи Маркова

с матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Доказать, что все состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода P возвратны, если:

а) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

10. Случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, независимы и

$$P(\xi_n = 1) = p, \quad P(\xi_n = -1) = 1 - p = q.$$

Положим $S_0 = 0$; $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$. Является ли последовательность S_n цепью Маркова? Найти $P(S_n = m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

11. В N ячейках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть $\mu_0(n)$— число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

12. В N ячейках независимо друг от друга размещаются комплекты, состоящие из m частиц. Частицы одного комплекта размещаются в ячейках по одной, и все возможные выборы m мест из N имеют одинаковые вероятности. Обозначим через $\mu_0(n)$ число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n комплектов. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

13. Ящик вначале содержит N белых шаров. За 1 шаг из ящика по схеме случайного равновероятного выбора вынимают один шар

и заменяют его новым, который — независимо от предыстории процесса — является черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через ξ_n число белых шаров в ящике после n-го шага. Является ли последовательность ξ_n цепью Маркова? Найти $p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

14. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть S_n— сумма выпавших очков, а ξ_n— остаток S_n от деления на 3. Является ли ξ_n цепью Маркова? Найти матрицу переходных вероятностей.

15. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть S_n— наибольшее из чисел, выпавших в первых n бросаниях. Найти матрицу $P^{(n)}$.

16. Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и скажем, что в момент времени n наблюдалось состояние X_1, если испытания с номерами $n - 1$ и n привели к результату УУ (успех, успех). Аналогично X_2, X_3, X_4 означают исходы УН, НУ, НН. Найти матрицу P и все ее степени.

17. Точка двигается по вершинам правильного шестиугольника, причем за каждый шаг она, независимо от предыдущих движений, перемещается с одинаковыми вероятностями в одну из соседних вершин. Выписать матрицу переходных вероятностей. Будет ли данная цепь Маркова периодической?

18. В ящике первоначально находилось 5 новых мячей. Для игры берут 1 мяч, а после игры возвращают его обратно. Пусть $\xi(n)$— число новых мячей после n игр. Найти матрицу переходных вероятностей за один шаг, указать возвратные и невозвратные состояния.

19. У мальчика в левом кармане сначала было 2 монеты по 1 рублю, а в правом — 2 монеты по 50 копеек. Он случайным образом достает из каждого кармана по 1 монете и перекладывает их в другой карман. Пусть ξ_n— число 50-копеечных монет в левом кармане после n перекладываний. Найти матрицу переходных вероятностей, указать возвратные и невозвратные состояния.

20. В лифт одновременно могут зайти не более 5 человек. Если в лифте не менее 2-х человек, то на каждом этаже из лифта выходят с одинаковыми вероятностями 1 или 2 человека. Если в лифте 1 человек, он едет до следующего этажа. Кроме того, на каждом этаже в

лифт с одинаковыми вероятностями либо никто не заходит, либо заходит 1 человек. Найти матрицу переходных вероятностей. Указать возвратные и невозвратные состояния.

21. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова за один шаг имеет вид:

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \text{ б) } P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарное распределение.

22. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

а) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\text{в) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ г) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Пусть цепь Маркова имеет два состояния. Доказать, что имеет место один из следующих трех случаев:

а) цепь эргодична; б) состояния не сообщаются; в) матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Эргодичная цепь Маркова с двумя состояниями имеет предельные вероятности p и $q = 1 - p$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.

25. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\{p_{ij}\}$ и стационарным распределением π_j. Показать, что если $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$ и $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$, то $p_{12} = p_{23} = p_{31}$ и $p_{13} = p_{21} = p_{32}$.

26. В некотором университете каждый студент имеет одну из трех оценок за экзамен по математике : $3, 4$ или 5. Студенты, имеющие оценки $3, 4, 5$, сохраняют свои оценки к следующей сессии с веро-

ятностями 2/3, 2/3, 1/2 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями могут получить любую из двух других оценок. Найти:

1) распределение оценок в следующей сессии, если в данной сессии оценку 3 имело 30% студентов, 4— 50%, 5— 20%;

2) предельное распределение по оценкам (если бы студенты учились вечно).

27. В некотором университете каждый студент имеет одну из трех оценок за экзамен по математике : $3, 4$ или 5. Студенты, имеющие оценки 4 и 5, сохраняют свои оценки к следующей сессии с вероятностями 2/3 и 1/2 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями могут получить любую из двух других оценок. Студенты, получившие 3, на следующем экзамене могут получить 3 с вероятностью 2/3 или 4 с вероятностью 1/3. Найти:

1) распределение оценок в следующей сессии, если в данной сессии оценку 3 имело 30% студентов, 4— 50%, 5— 20%;

2) предельное распределение по оценкам (если бы студенты учились вечно).

28. В 5 ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещаются шары. Пусть S_n — число ПУСТЫХ ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодичной цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение ?

29. В 5 ящиках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещаются шары. Пусть S_n — число ЗАНЯТЫХ ящиков после размещения n шаров. Найти вероятности перехода. Является ли S_n эргодичной цепью Маркова? Существует ли у данной цепи Маркова стационарное распределение ?

30. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

а) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$; г) $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М.: Academia, 2008. 368 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
3. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987. 241 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 479 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2004. 404 с.
6. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Теория вероятностей. Примеры и задачи. Учебное пособие. Ижевск.: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. 132 с.
7. Феллер В. Введение в теория вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984. 528 с.