ЛЕКЦИЯ 3

Степенные ряды. Ряды Тейлора. Приложения рядов к приближенным вычислениям.

1.8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ИХ ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ.

Важным частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды. *Степенным рядом* называется ряд, члены которого – степенные функции:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \ , \qquad (1.29)$$

где a и коэффициенты ряда $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – постоянные числа. При $a = 0$ степенной ряд имеет вид:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (1.30)$$

Сначала изучим свойства степенных рядов вида (1.30). Заметим, что при любых a_n он сходится в точке (x=0). Прежде всего выясним, какой вид имеет область сходимости такого ряда. Ответ на этот вопрос даёт теорема Абеля.

Теорема Абеля. 1. Если степенной ряд (1.30) сходится при некотором значении x_0, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$.

2. Если ряд (1.30) расходится при некотором значении x_1, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_1|$.

3. Ели ряд (1.30) сходится не при всех значениях x, но сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то существует число R>0, называемое *радиусом сходимости*, такое, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство.

1. По условию, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ сходится. Тогда, по необходимому признаку сходимости, предел его общего члена равен нулю, т.е. $\lim_{n\to} a_nx_0^n = 0$. Из этого вытекает, что последовательность $a_nx_0^n$ ограничена, т.е. существует M>0 такое, что:

$$\left|a_nx_0^n\right| < M, \quad n = 0,1,2,... \qquad (1.31)$$

Перепишем ряд (1.30) в виде:

$$a_0 + a_1 x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (1.32)$$

Члены ряда (1.32), в силу неравенства (1.31), меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (1.33)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (1.33) является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (1.32) меньше соответствующих членов ряда (1.33), то по признаку сравнения, связанного с неравенством, ряд (1.32) тоже сходится. А это значит, что ряд (1.30) при $|x| < |x_0|$ сходится абсолютно.

2. Докажем вторую часть теоремы. По условию в точке x_1 ряд расходится. Пусть мы выбрали x так, что $|x| > |x_1|$. Если предположить, что при x ряд сходится, то по первой части теоремы будет следовать, что при x_1 ряд сходится, что противоречит условию. Следовательно, ряд в точке x расходится.

3. Из первых двух частей теоремы следует, что если x_0 – точка сходимости степенного ряда (1.30), то во всех точках, расположенных на интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ ряд сходится абсолютно, а если x_1 – точка расходимости, то во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$ ряд расходится (рис. 1.3).

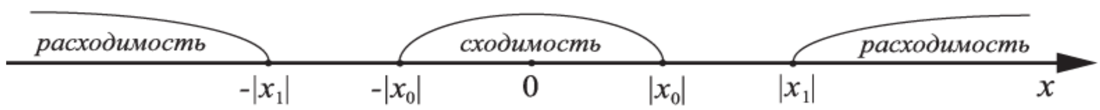

Рис. 1.3.

Интервал $(|x_0|, |x_1|)$ назовём интервалом неопределённости. Рассмотрим середину этого интервала. В средней точке ряд либо сходится, в этом случае интервал сходимости расширится; либо расходится, в этом случае расширится область расходимости. В любом случае интервал неопределенности сузится вдвое. Вновь рассмотрим середину интервала неопределенности и т.д. В пределе мы получим интервал (–R; R) такой, что внутри этого интервала ряд будет сходиться абсолютно, а вне этого интервала ряд будет расходиться (рис. 1.4.). Число R

называется *радиусом сходимости* степного ряда. При $x = \pm R$ ряд может сходиться абсолютно или условно, может расходиться. Этот вопрос решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

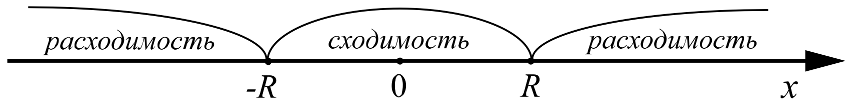

Рис. 1.4.

Одним из способов нахождения радиуса сходимости является исследование степенного ряда на абсолютную сходимость по признаку Даламбера. Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \neq 0$, обозначим этот предел $\frac{1}{R}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{R}$.

Если $\frac{|x|}{R} < 1$, или $|x| < R$, то ряд (1.30) сходится абсолютно. Если $\frac{|x|}{R} > 1$, или $|x| > R$, то ряд из модулей расходится, его члены возрастают, следовательно не стремятся к нулю и члены ряда (1.30) и по достаточному признаку расходимости ряд (1.30) расходится. Если $\frac{|x|}{R} = 1$ или $x = \pm R$, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Мы получили, что ряд (1.30) ведёт себя так, как показано на рис. 1.4, т.е число R является радиусом сходимости степенного ряда.

Для нахождения радиуса сходимости аналогичным образом можно использовать радикальный признак Коши.

1.9. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.

Теорема 1. Пусть степенной ряд (1.30) имеет радиус сходимости *R*>0. Тогда ряды, полученные из (1.30) почленным дифференцированием и интегрированием имеют тот же радиус сходимости.

Доказательство. Проведем доказательство в частном случае, предположив, что для ряда (1.30) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, который, как показано в п.1.8. равен $\frac{1}{R}$, где *R* – радиус сходимости ряда (1.30). При этом ряд сходится абсолютно в интервале $|x| < R$.

Запишем ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (1.30):

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots$$

Здесь общий член ряда $\tilde{u}_n(x) = na_n x^{n-1}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\tilde{u}_{n+1}(x)|}{|\tilde{u}_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|a_{n+1}|\cdot|x|^n}{n\cdot|a_n|\cdot|x|^{n-1}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{|x|}{R}.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно при $\frac{|x|}{R} < 1$ или $|x| < R$.

Рассмотрим ряд, полученный почленным интегрированием ряда (1.30):

$$a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + ... + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{n+2} ...$$

Общий член этого ряда $u_n(x) = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$. Аналогично исследуем его на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+2}(n+1)}{(n+2)\cdot|a_n|\cdot|x|^{n+1}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{R}.$$

Ряд сходится абсолютно при $\frac{|x|}{R} < 1$ или $|x| < R$.

Мы показали, что при почленном дифференцировании и интегрировании интервал сходимости не меняется.

Замечание. Теорема 1 утверждает, что ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием имеют тот же интервал сходимости (–*R*; *R*), что и исходный ряд. Однако в точках $x = \pm R$ эти ряды могут вести себя по–разному.

Теорема 2. Пусть степенной ряд (1.30) имеет радиус сходимости *R* и *r* – любое число, удовлетворяющее условию 0<*r*<*R*. Тогда ряд (1.30) на отрезке [–*r*; *r*] сходится равномерно.

Доказательство. Так как число *r* принадлежит интервалу сходимости ряда (1.30), то числовой ряд

$$|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + ... + |a_n|r^n ...$$

сходится. Если $x \in [-r; r]$, то $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$ для любого *n*. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (1.30) сходится равномерно при $x \in [-r; r]$.

Теорема 3. Степенной ряд (1.30) в каждой точке его интервала сходимости обладает следующими свойствами:

– его сумма является непрерывной функцией;

– его можно почленно дифференцировать и интегрировать, то есть, если $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = S'(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x S(t)dt.$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_0\in[-r;r]$. Выберем число *r* так, что $|x_0|<r<R$. По теореме 2 на отрезке $[-r;r]$ ряд (1.30) сходится равномерно. Из свойств равномерно сходящихся рядов следует данная теорема.

Заметим, что теоремы 1–3 справедливы при $R=\infty$.

Рассмотрим теперь ряды вида (1.29) по степеням (x–a). Ряды вида (1.30) являются частным случаем рядов (1.29) при a=0. Положив $x-a=t$, ряд (1.29) приводится к ряду вида (1.30):

$$a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n+... \tag{1.35}$$

Пусть ряд (1.35) имеет радиус сходимости R. Это значит, что он сходится абсолютно при $-R<t<R$ и расходится при $|t|>R$. Но тогда ряд (1.29) сходится абсолютно, если $-R<x-a<R$ или $a-R<x<a+R$, и расходится, если $|x-a|>R$. Таким образом, областью абсолютной сходимости степенного ряда (1.29) является интервал длины $2R$ с центром в точке a (рис. 1.5). Вне этого интервала ряд расходится. На концах интервала сходимости, т.е. при $x=a-R$ и $x=a+R$, в зависимости от конкретных случаев может иметь место абсолютная или условная сходимость или расходимость.

Рис. 1.5.

Свойства степенных рядов по степеням x сохраняются и для рядов по степеням x–a. Сумма степенного ряда (1.29) есть непрерывная функция на интервале сходимости, этот ряд можно почленно дифференцировать: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(x-a)^{n-1}$ и интегрировать:

$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}=\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-a)^n\right)dt$ внутри интервала сходимости, причем полученные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (1.29).

Интервал сходимости ряда (1.29) можно находить так же с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши, как и ряда (1.30).

1.10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА.

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \ldots +$$
$$+ a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + \ldots, \qquad (1.36)$$

интервал сходимости которого $(a-R,\ a+R)$, $R>0$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x-a$ или в окрестности точки a. Найдем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ этого степенного ряда. Воспользуемся тем, что в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, причем получившийся ряд имеет тот же интервал сходимости, что и исходный. Продифференцируем последовательно тождество (1.36):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \ldots +$$
$$+ na_n(x-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x-a)^n + \ldots;$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n+1)\cdot n\cdot a_{n+1}(x-a)^{n-1} + \ldots;$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + \ldots +$$
$$+ n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot a_{n+1}(x-a)^{n-2} + \ldots;$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot a_n + (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot a_{n+1}(x-a) + \ldots;$$
$$\ldots$$

Положим в полученных тождествах $x=a$:

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad f'''(a) = 2\cdot 3a_3, \ \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot a_n, \ \ldots$$

Откуда находим коэффициенты:

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ \ldots$$

Подставим найденные коэффициенты в (1.36):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \qquad (1.37)$$

Полученный ряд (1.37) называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$. В частном случае, при $a=0$ ряд (1.37) принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-a) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (1.38)$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Формула (1.37) получена в предположении, что $f(x)$ является суммой ряда (1.36). При этом она имеет производные всех порядков в точке $x=a$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x=a$.

Поставим обратную задачу. Путь дана бесконечно дифференцируемая в точке $x=a$ функция $f(x)$. Составим для неё формально ряд Тейлора по формуле (1.37). Будет ли данный ряд сходиться к функции $f(x)$? Оказывается, что иногда сходится, а иногда нет. Выясним, при каких условиях сумма ряда Тейлора данной функции совпадает с этой функцией. Запишем частичную сумму ряда Тейлора.

$$S(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Эта частичная сумма называется *многочленом Тейлора степени* n. Разность между функцией $f(x)$ и ее многочленом Тейлора степени n называется *остаточным членом ряда Тейлора* и обозначается $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x). \qquad (1.39)$$

Не следует смешивать остаточный член ряда Тейлора с остатком ряда Тейлора. Остаток ряда Тейлора – это разность между его суммой $S(x)$ и частичной суммой: $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Остаток ряда Тейлора совпадает с остаточным членом только в том случае, если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, что, как мы уже сказали, выполняется не всегда.

Теорема. Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая в точке $x=a$ функция $f(x)$ являлась суммой составленного для него ряда Тейлора , необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ является суммой ряда Тейлора, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f(x)$, тогда из соотношения (1.39) имеем:

$$\lim_{n\to} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(f(x) - S_n(x)\big) = f(x) - \lim_{n\to 0} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to} R_n(x) = 0.$ Тогда из (1.39) получим $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x) - S_n(x)\big) = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to 0} S_n(x) = f(x)$. Это и значит, что $f(x)$ является суммой ряда.

Из этой теоремы следует, что для исследования вопроса о разложимости функции в ряд Тейлора нужно исследовать поведение его остаточного члена $R_n(x)$ при $n \to \infty$. Если $\lim\limits_{n\to} R_n(x) = 0.$ для данного значения x, то ряд Тейлора сходится в этой точке к $f(x)$. Если же $R_n(x)$ не стремится к нулю, то ряд Тейлора либо расходится, либо его сумма в этой точке не совпадает со значением функции $f(x)$.

Приведем без доказательства выражение для остаточного члена ряда Тейлора, которое называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (1.40)$$

где c – некоторое число, заключенное между a и x. Записанная формула для остаточного члена во многих случаях позволяет исследовать его поведение при $n \to \infty$.

Подставим в формулу (1.39) выражения для частичной суммы ряда Тейлора и остаточного члена в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f'''(a)}{n!}(x-a)^n + ... + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (1.41)$$

где c содержится между a и x.

Формула (1.41) называется *формулой Тейлора*, а ее частный случай при a=0 – *формулой Маклорена.*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-a) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (1.42)$$

где c заключено между 0 и x.

1.11. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Рассмотрим разложение в степенные ряды некоторых элементарных функций.

1. *Разложение функции* $f(x) = e^x$. Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = e^x; \qquad f''(x) = e^x, \ \ldots, \qquad f^{(n)}(x) = e^x, \ \ldots$$

При x=0 получим: $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1$. Запишем ряд Маклорена, воспользовавшись формулой (1.38):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

В примере 1.47 было показано, что этот ряд сходится на всей числовой оси и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$.

Для того, чтобы установить, к чему сходится полученный ряд, исследуем его остаточный член. В нашем случае a=0, $f^{(n+1)}(c) = e^c$ и по формуле (1.40) имеем:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где c заключено между 0 и x. Функция e^x монотонно возрастает, поэтому $e^c < e^{|x|}$, так как $c < |x|$. Для остаточного члена получаем оценку:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Тогда из неравенства для $\left|R_n(x)\right|$ следует, что остаточный член стремится к нулю при $n\to\infty$ для любого значения x и сумма ряда, составленного для функции $f(x)=e^x$, совпадает с этой функцией.

Итак, на всей числовой оси имеет место разложение.

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{1.42}$$

2. *Разложение функции* $f(x)=\sin x$. Находим производные и вычисляем их при x=0:

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\quad f'(0)=1$.

$f''(x)=-\sin x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$; $\quad f''(0)=0$.

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$; $\quad f'''(0)=-1$.

$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$; $\quad f^{(4)}(0)=0$

…

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Замечаем, что $f(0)=0$, значения четных производных при x=0 равны нулю, значения нечетных производных при x=0 чередуются: 1; –1; 1; –1; … . Используя формулу (1.38), получим для функции $\sin x$ следующий ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Легко проверить, что этот ряд сходится на всей числовой оси. Исследуем его остаточный член:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\sin\left(c+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где c содержится между 0 и x. Рассмотрим абсолютную величину остаточного члена:

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{\left|\sin\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При выводе разложения показательной функции было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,

откуда заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при любом *x*. А это означает, что $\sin x$ является суммой полученного ряда при любых *x*:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (1.43)$$

3. *Разложение функции* $f(x)=\cos x$. Разложение функции $\cos x$ можно получить таким же образом, как и было получено разложение в ряд функции $\sin x$. Однако проще воспользоваться свойствами степенных рядов и почленно продифференцировать формулу (1.43):

$$(\sin x)'=(x)'-\left(\frac{x^3}{3!}\right)'+\left(\frac{x^5}{5!}\right)'-\left(\frac{x^7}{7!}\right)'+...+\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)'+\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'+...$$

откуда получаем разложение, справедливое для любых x:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (1.44)$$

4. *Биномиальный ряд.* Разложим по степеням *x* функцию $f(x)=(1+x)^m$, где m – любое действительное число, отличное от нуля. Найдём производные этой функции и вычислим их при *x*=0.

$f(x)=(1+x)^m; \qquad f'(0)=1.$

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}; \qquad f''(0)=m.$

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}; \qquad f'''(0)=m(m-1).$

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1-x)^{m-3}; \qquad f'''(0)=m(m-1)(m-2).$

…

$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}; \qquad f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)...(m-n+1).$

Воспользовавшись формулой (1.38), получим ряд Маклорена для функции $(1+x)^m$:

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$$

Этот ряд называется *биноминальным.* Найдем его интервал сходимости, воспользовавшись признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=|x|.$$

Ряд сходится при $|x| < 1$, т.е. в интервале $x \in (-1; 1)$. Можно показать, что остаточный член ряда $R_n(x)$ в этом интервале стремится к нулю при $n \to \infty$. Однако, в связи со сложностью этого доказательства мы его опускаем.

Итак, в интервале (–1; 1) имеет место разложение:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \qquad (1.45)$$

При $|x|>1$ ряд (1.45) расходится, если только m не является натуральным числом. На границах интервала сходимости ряд сходится или расходится в зависимости от конкретных значений m. Если m – натуральное число, то начиная с $n=m+1$ все коэффициенты ряда обращаются в нуль и получается многочлен, совпадающий с формулой бинома Ньютона.

5. *Разложение функции* $f(x) = \ln(1+x)$.

Рассмотрим ряд

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

Этот ряд является геометрической прогрессией с первым членом, равным единице, и со знаменателем $q=x$. Как было показано выше (пример 1.4), этот ряд сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$.Поэтому

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (1.46)$$

Равенство (1.46) является разложением функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в степенной ряд. Подставим в (1.46) – t вместо x, получим равенство:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots$$

справедливое при $|t| < 1$. Проинтегрируем этот степенной ряд почленно в пределах от 0 до x при условии $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x).$$

$$\int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots)dt = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + (-1)\frac{t^{n+1}}{n+1} + \ldots \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}. \qquad (1.47)$$

Равенство (1.47) есть разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Оно справедливо при $|x| < 1$. Можно доказать, что это разложение справедливо и при x=1.

6. Разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Подставим в равенство (1.46) $-t^2$ вместо x, получим:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n}.$$

Это равенство справедливо при $|t| < 1$. Проинтегрируем полученный степенной ряд от 0 до x при условии $|x| < 1$:

$$\int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots)dt = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots + (-1) \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Мы получили разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (1.48)$$

Это разложение справедливо при $|x| < 1$. Однако можно показать, что оно верно и при x=±1.

1.12. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ.

Числовые и функциональные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. Рассмотрим наиболее важные из этих применений.

1.12.1. Вычисление значений функций с помощью рядов.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ с заданной точностью ε. Предположим, что функцию можно разложить в степенной ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

в интервале $(a - R, a+R)$ и что точка $x = x_0$ принадлежит этому интервалу. Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \ldots + a_n(x_0-a)^n + \ldots$$

Взяв некоторое число первых членов ряда, получим приближенное равенство

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \ldots + a_n(x_0-a)^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с возрастанием n. Абсолютная погрешность этого равенства равна модулю остатка ряда:

$$|f(x) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)|.$$

Желая вычислить значение функции $f(x)$ с точностью $\varepsilon>0$, мы должны взять сумму такого числа n первых членов, чтобы $|r_n(x_0)| < \varepsilon$.

Методы оценки остатка ряда мы рассмотрели в п.1.6. Приведем еще один метод оценки ряда с помощью остаточного члена ряда Тейлора. Если функция разложена в степенной ряд, то этот ряд есть ряд Тейлора (или Маклорена) (см. п. 1.10). в этом случае абсолютная погрешность равна модулю остаточного члена ряда Тейлора (формула (1.40)).

Таким образом

$$|f(x) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1} \right| \tag{1.51}$$

где c содержится между a и x_0.

В зависимости от каждого конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда. Заметим, что программы вычисления значений элементарных функций для калькуляторов и компьютеров созданы именно на основе рядов.

1.12.2. Приближенное вычисление интегралов.

Многие практически важные определенные интегралы не могут быть вычислены по формуле Ньютона–Лейбница, так как первообразная не всегда выражается в элементарных функциях. Однако если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то этот ряд можно почленно проинтегрировать, а полученный ряд вычислить с наперед заданной точностью.

1.12.3. Нахождение производной любого порядка.

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 (см. формулу (1.37)) позволяет находить значения производной любого порядка $f^{(n)}(x)$ в точке $x=x_0$.

Действительно, из формулы для коэффициентов Тейлора $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ следует:

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n! \tag{1.52}$$