Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Куб суммы
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Арифметическая прогрессия

Последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией:
$a_{n+1} = a_n + d$, где d – разность прогрессии.

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ $\qquad$ $a_n = a_k + d(n - k)$

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ $\qquad$ $a_n + a_m = a_k + a_l$, *если* $n + m = k + l$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ $\qquad$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$

Геометрическая прогрессия

Определение: Последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называется геометрической прогрессией:
$b_{n+1} = b_n q$, где q – знаменатель прогрессии.

$b_n = b_1 q^{n-1}$ $\qquad$ $b_n = b_k q^{n-k}$

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ $\qquad$ $b_n b_m = b_k b_l$, *если* $n + m = k + l$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ $\qquad$ $S = \frac{b_1}{1 - q}$

Степень

Определение

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$, если n – натуральное число
a – основание степени, n - показатель степени

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a$ $\quad$ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\quad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Формулы

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\qquad$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Арифметический квадратный корень

Определение

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a - ($\sqrt{a}$)
- называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$(\sqrt{a})^2 = a$ $\quad$ $\sqrt{a^2} = |a|$ $\quad$ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Корнем k–ой степени из a (k - нечетное) называется число, k-ая степень которого равна a.

$(\sqrt[k]{a})^k = a$ $\quad$ $\sqrt[k]{a^k} = a$ $\quad$ $\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$ $\quad$ $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$

$(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$ $\quad$ $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$

Квадратное уравнение:

$ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Если $D < 0$	то уравнение	не имеет корней	$x \in \varnothing$
$D = 0$		имеет один корень	x_1
$D > 0$		имеет два корня	x_1; x_2

Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$
$x_1 + x_2 = -b/a$
$x_1 \cdot x_2 = c/a$

Логарифм

Определение

Логарифмом числа по b основанию a называется такое число, обозначаемое $\log_a b$, что $a^{\log_a b} = b$.

a - основание логарифма ($a > 0$, $a \neq 1$),
b - логарифмическое число ($b > 0$)

Десятичный логарифм: $\lg b = \log_{10} b$

Натуральный логарифм: $\ln b = \log_e b$ где $e = 2{,}71828$

Формулы

$\log_a 1 = 0$ $\quad$ $\log_a a = 1$ $\quad$ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\quad$ $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$ $\quad$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\quad$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$a^{\log_a b} = b$ $\quad$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Дроби

Сложение

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

Вычитание

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

Умножение

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Деление

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Составная дробь

$m\frac{a}{b} = \frac{m \cdot b + a}{b}$

Деление с остатком:

Формула деления с остатком: $n = m \cdot k + r$, где n – делимое, m - делитель, k - частное, r – остаток: $0 \leq r < m$

Пример:
Любое число можно представить в виде:
$n = 2k + r$, где $r = \{0; 1\}$
или $n = 4k + r$, где $r = \{0; 1; 2; 3\}$

Делимость натуральных чисел:

Пусть $n : m = k$, где n, m, k – натуральные числа.
Тогда m – делитель числа n, а n – кратно числу m.
Число n называется простым, если его делителями являются только единица и само число n.
Множество простых чисел: $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; \ldots; 41; 43; 47$ *и т.д.*$\}$
Числа n и m называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, кроме единицы.

Десятичные числа:

Стандартный вид: $317{,}3 = 3{,}173 \cdot 10^2$; $\quad$ $0{,}00003173 = 3{,}173 \cdot 10^{-5}$
Форма записи: $3173 = 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$

Модуль

Формулы $\qquad$ **Определение**

- $|x| \geq 0$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $|-x| = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x| \geq x$
- $|x : y| = |x| : |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

$|x|^2 = x^2$

$|x| = \left[\begin{array}{l} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{array}\right.$

Неравенства

Определения:
Неравенством называется выражение вида:
$a < b$ $(a \leq b)$, $\quad$ $a > b$ $(a \geq b)$

$a \leq b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < b \\ a = b \end{array}\right.$

Основные свойства:

$a < b \Leftrightarrow b > a$ $\qquad$ $a < b$ *и* $b < c \Leftrightarrow a < c$

$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ $\qquad$ $a < b$ *и* $c > 0 \Leftrightarrow ac < bc$

$a < b$ *и* $c < 0 \Leftrightarrow ac > bc$ $\qquad$ $a < b$ *и* $c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

Модуль: уравнения и неравенства

1.
a) $|f(x)| = k \ (k > 0) \Rightarrow f(x) = \pm k$
b) $|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
c) $|f(x)| = -k \ (k > 0) \Rightarrow x \in \varnothing$

2. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$
$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

3. $|f(x)| + af^2(x) = k \Rightarrow |f(x)| + a|f(x)|^2 = k$ $\quad$ *Замена* : $y = |f(x)| \Rightarrow y + ay^2 = k$

4. $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f^2(x) = g^2(x) \Rightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) = 0$

5. $|f(x)| < k \Rightarrow f^2(x) < k^2 \Rightarrow (f(x) - k) \cdot (f(x) + k) < 0$

Периодическая дробь

$3{,}1737373\ldots = 3{,}1(73) = \frac{3173 - 31}{990}$ $\qquad$ Правило: $ab,cde(fg) = \frac{abcdefg - abcde}{99000}$

Признаки делимости чисел:

Проценты

Определение:
Процентом называется сотая часть от числа. $\qquad$ ***1%A = 0,01A***

Основные типы задач на проценты:
Сколько процентов составляет число A от числа B?

$\Rightarrow x = \frac{A}{B} \cdot 100\%$

B	**-**	**100%**
A	-	x%

Сложные проценты.
Число A увеличилось на 20%, а затем полученное число уменьшили на 25%.
Как, в итоге, изменилось исходное число?

1) $A_1 = (100\% + 20\%)A = 120\%A = 1{,}2A$
2) $A_2 = (100\% - 25\%)A_1 = 75\%A_1 = 0{,}75A_1 = 0{,}75 \cdot 1{,}2A = 0{,}9A = 90\%A$
3) $A_1 - A = 90\%A - 100\%A = -10\%A$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшилось на 10%. Изменение величины.
Как изменится время, если скорость движения увеличится на 25%?

$t = \frac{S}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{1{,}25v} = \frac{1}{1{,}25} \frac{S}{v} = 0{,}8\frac{S}{v} = 80\%t$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшится на 20%

$t = \frac{S}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{1{,}25v} = \frac{1}{1{,}25} \frac{S}{v} = 0{,}8\frac{S}{v} = 80\%t$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшится на 20%

Среднее арифметическое, геометрическое

Среднее арифметическое: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

Среднее геометрическое: $\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$

Уравнение движения

Пусть $S(t)$ - уравнение движения материальной точки, где S – путь, t – время движения.

	Признак	Пример
На 2	Числа, оканчивающиеся нулём или четной цифрой	…….6
На 4	Числа, у которых две последние цифры нули или выражают число, делящееся на 4.	……1 2
На 8	Числа, у которых три последние цифры нули или выражают число, делящееся на 8.	…..10 4
На 3	Числа, сумма цифр которых делится на 3.	57061 2
На 9	Числа, сумма цифр которых делится на 9.	35945 1
На 5	Числа, оканчивающиеся нулём или цифрой 5.	…….5
На 25	Числа, у которых две последние цифры нули или выражают число, делящееся на 25.	……7 5
На 10	Числа, оканчивающиеся нулём.	……0

Тогда: $v(t) = S'(t)$; $\quad a(t) = v'(t)$,
где v – скорость, a - ускорение.

Определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Первообразная элементарных функций

№	f(x)	F(x)	№	f(x)	F(x)
1	k	$kx + C$	6	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$			
4	$\sin x$	$-\cos x + C$	8	e^x	$e^x + C$
5	$\cos x$	$\sin x + C$	9	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Правила вычисления первообразной функции

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Функция	Первообразная
$k \cdot f(x)$	$k \cdot F(x)$
$f_1(x) + f_2(x)$	$F_1(x) + F_2(x)$
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a} F(ax + b)$

Правила вычисления производной функции

$(C)' = 0$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

$(u + v)' = u' + v'$ $\qquad$ Сложная функция:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\qquad$ $y = f(\varphi(x)) \Rightarrow y' = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$

Производные элементарных функций

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	x^n	nx^{n-1}	6	e^x	e^x
2	$\sin x$	$\cos x$	7	a^x	$a^x \ln a$
3	$\cos x$	$-\sin x$			
4	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
5	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

Равносильные уравнения:

Исходное уравнение		Равносильное уравнение (система)
$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow$	$f(x) + C = g(x) + C$
$f(x) \cdot g(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
$f^2(x) + g^2(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Числовые множества:

Натуральные числа	$N = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$
Целые числа	$Z = N \cup \{0; -1; -2; -3; \ldots\}$
Рациональные числа	$Q = Z \cup \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \ldots\right\}$
Действительные числа	$R = Q \cup \{\sqrt{2}; \sqrt{3};$ *и т.д.*; $\pi = 3{,}14\ldots; \}$

Тригонометрия

Основные триг. формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы суммы функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формулы суммы аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} \qquad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Формулы произведения функций

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы двойного аргумента

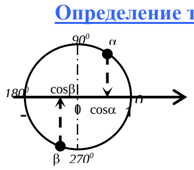
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

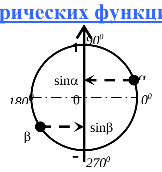
Формула дополнительного угла

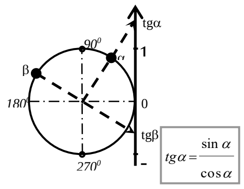
$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$ где

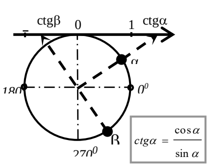
$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Определение тригонометрических функций









Универсальная подстановка

$$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

Свойства тригонометрических функций

Функция	Свойства			
	Область определения	Множество значений	Четность-нечетность	Период
cosx	$x\in(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	*cos(-x)= cosx*	2π
sinx	$x\in(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	*sin(-x)= -sinx*	2π
tgx	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	$(-\infty;\infty)$	*tg(-x)= -tgx*	π
ctgx	$x\neq\pi n,\ n\in Z$	$(-\infty;\infty)$	*ctg(-x)= -ctgx*	π

Тригонометрические уравнения

Косинус:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n \qquad \cos x=1\Rightarrow x=2\pi n$$
$$\cos x=-1\Rightarrow x=\pi+2\pi n$$
$$\cos x=a\Rightarrow x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z$$

Уравнения с синусом

Частные формулы:

$$\sin x=0\Rightarrow x=\pi n \qquad \sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$$
$$\sin x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

Общая формула:

$$\sin x=a\Rightarrow x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z$$

Уравнения с тангенсом и котангенсом

$$tgx=a\Rightarrow \qquad ctgx=a\Rightarrow$$
$$x=arctga+\pi n,\ n\in Z \qquad x=arcctga+\pi n,\ n\in Z$$

Формулы обратных триг функций

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2} \qquad arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$$

Если $0<x\le 1$, то ***arccos(-x) = π - arccos*** ***arcsin(-x) = - arcsinx***	Если $x>0$, то ***arctg(-x) = - arctgx*** ***arcctg(-x) = π - arcctgx***

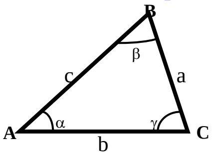
Обратные триг функции

Функция	Свойства	
	Область определения	Множество значений
arccosx	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
arcsinx	$[-1;1]$	$[-\pi/2;\pi/2]$

arctgx	$(-\infty;\infty)$	$(-\pi/2;\pi/2)$
arcctgx	$(-\infty;\infty)$	$(0;\pi)$

Геометрия

Теорема косинусов, синусов



Теорема косинусов:

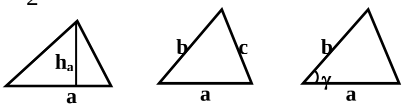
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

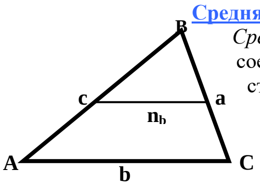
Площадь треугольника

$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ $S=\frac{abc}{4R}$ $S=p\cdot r$

Средняя линия



Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна её половине: $n_b=\frac{1}{2}b$

Средняя линия отсекает подобный треугольник, площадь которого равна одной четверти от исходного

Равносторонний треугольник

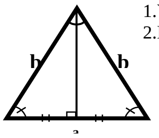
треугольник, у которого все стороны равны.

- Все углы равны 60^0.
- Каждая из высот является одновременно биссектрисой и медианой.
- Центры описанной и вписанной окружностей совпадают.
- Радиусы окружностей: $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Площадь $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

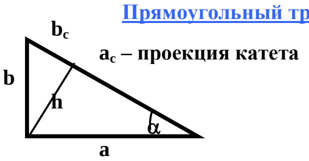
Равнобедренный треугольник

треугольник, у которого две стороны равны.



1.Углы, при основании треугольника, равны
2.Высота, проведенная из вершины, является биссектрисой и медиан

Прямоугольный треугольник

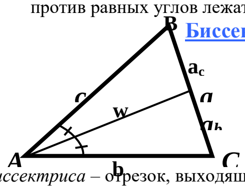


- Теорема Пифагора: $c^2=a^2+b^2$ Площадь: $S=\frac{1}{2}a\cdot b$
- Тригонометрические соотношения: $\cos\alpha=\frac{a}{c}$; $\sin\alpha=\frac{b}{c}$; $tg\alpha=\frac{b}{a}$
- Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.
- Радиусы окружностей: $r=\frac{a+b-c}{2}$; $R=\frac{c}{2}$
- Высота, опущенная на гипотенузу: $h=\sqrt{a_c\cdot b_c}=\frac{a\cdot b}{c}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a_c}{b_c}$
- Катеты: $a=\sqrt{a_c\cdot c}$; $b=\sqrt{b_c\cdot c}$

Основные соотношения в треугольнике

- Неравенство треугольника: **a + b > c; a + c > b; b + c > a**
- Сумма углов: $\alpha+\beta+\gamma=180^0$
- Против большей стороны лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.
- Против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.

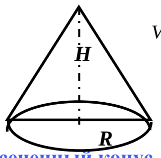
Биссектриса



Биссектриса – отрезок, выходящий из вершины треугольника и делящий угол пополам.

- Биссектриса делит противолежащую сторону на части , пропорциональные прилежащим сторонам: $a_b : a_c = b : c$
- Биссектриса делит площадь треугольника, пропорционально прилежащим сторонам.
- $w=\sqrt{b\cdot c-a_b\cdot a_c}$

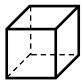
Конус



$V=\frac{1}{3}\pi R^2H$

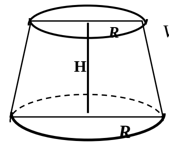
$S_{бок}=\pi RL$

$S_{бок.}=\pi R(R+L)$



куб $V=a^3$

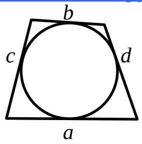
Усеченный конус

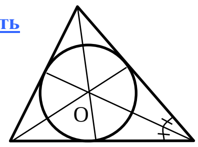


$V=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$

$S_{бок}=\pi(R_1+R_2)L$

Вписанная окружность

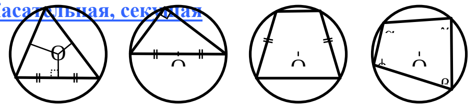




- Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис треугольника.
- Если окружность вписана в произвольный четырехугольник, тогда попарные суммы противолежащих сторон равны между собой: **a + b = c + d**

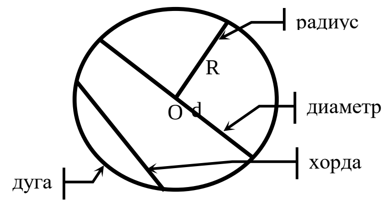
Описанная окружность

Касательная, секущая



- Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его трем сторонам.
- Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.
- Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда трапеция равнобочная.
- Если окружность описана около произвольного четырехугольника, тогда попарные суммы противолежащих углов равны между собой: $\alpha+\beta=\phi+\gamma$

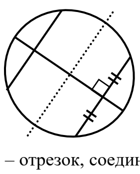
Длина окружности, площадь

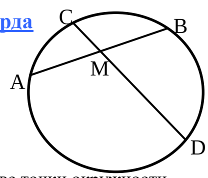


Длина окружности: $l=\pi\cdot d=2\pi\cdot R$

Площадь круга: $S=\pi\cdot R^2$

Хорда



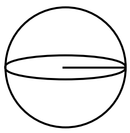


Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

- Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен хорде.
- В окружности равные хорды равноудалены от центра окружности.
- Отрезки пересекающихся хорд связаны равенством:

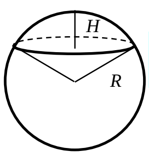
$$|AM|\cdot|MB|=|CM|\cdot|MD|$$

Шар



$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ $S_{бок}=4\pi R^2$

Шаровой сектор

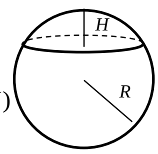


$V=\frac{2}{3}\pi R^2H$ $S_{бок}=\pi R\sqrt{2RH-H^2}$

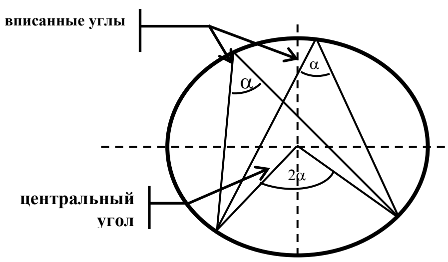
Шаровой сегмент

$S=2\pi RH$

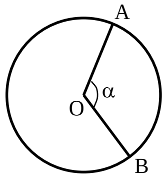
$V=\frac{1}{3}\pi^2H(3R-H)$



Центральный, вписанный угол



Сектор

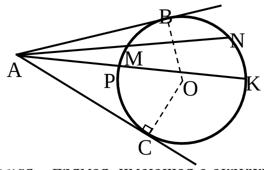


Сектор – часть круга, ограниченная двумя его радиусами.

Длина дуги сектора: $l=\frac{\pi R\alpha}{180^0}$

Площадь сектора: $S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^0}$

Касательная, секущая



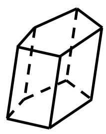
Касательная – прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

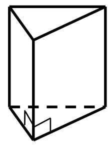
Секущая – прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

- $(AB)\perp(OB)$ $(AC)\perp(OC)$
- $|AB|=|AC|$
- $|AM|\cdot|AN|=|AP|\cdot|AK|=|AB|^2$

Призма

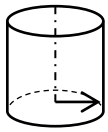
$V=S_{осн}\cdot H$





прямая призма

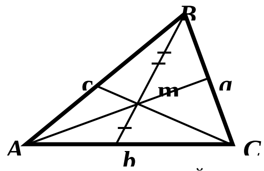
Цилиндр



$S_{бок}=2\pi RH$

$V=\pi R^2H$

Медиана

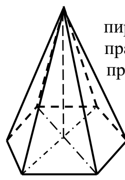


Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

- Медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2:1 (считая от вершины треугольника).
- Медиана делит треугольник на два треугольника с равными площадями.

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ $a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}$

Правильная пирамида

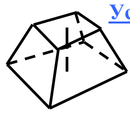


Правильная пирамида пирамида, у которой в основании правильный многоугольник, а вершина с проецируется в центр основания.

Все боковые рёбра равны между собой и все боковые грани – равные равнобедренные треугольники.

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$; $S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot h$,

Усеченная пирамида



$S_{бок}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)H$

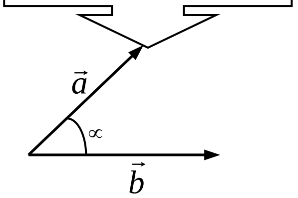
$V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2})$

Скалярное произведение

Скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|\cos\alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$$

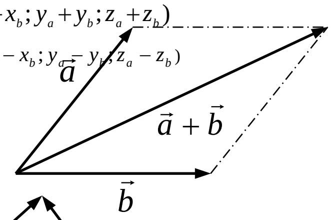


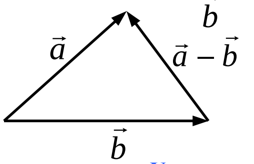
Сумма, разность векторов

$$\vec{a}(x_a;y_a;z_a)\quad и \quad b(x_b;y_b;z_a)$$

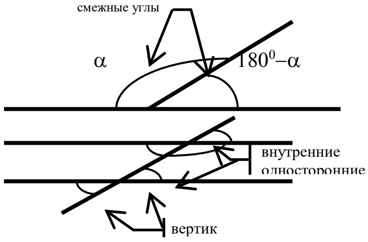
$$\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;y_a+y_b;z_a+z_b)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b;y_a-y_b;z_a-z_b)$$





Углы на плоскости



Перпендикулярность, коллинеарность

Перпендикулярные вектора:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Коллинеарные вектора:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}=\lambda$$

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\,b$$

Координаты вектора

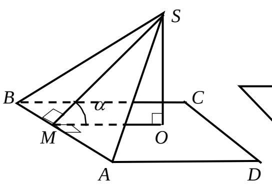
Координаты вектора: $\vec{a}(x_a;y_a;z_a)\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$

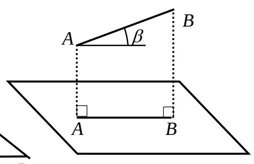
Длина вектора:

$$|\,\vec{a}\,|=\sqrt{x_a{}^2+y_a{}^2+z_a{}^2}$$

Умножение вектора на число: $\lambda\vec{a}=(\lambda x_a;\lambda y_a;\lambda z_a)$

Свойства прямых и плоскостей





(SO) – перпендикуляр к плоскости *(ABCD)*. *O* – проекция точки *S*.

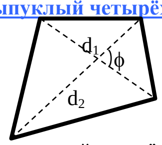
$|SO|$ – расстояние от точки *S* до плоскости *(ABCD)*.

α – двугранный угол между плоскостями *(SAB)* и *(ABCD)*.

Теорема о трёх перпендикулярах: $(AB)\perp(SM)\Leftrightarrow(AB)\perp(OM)$

Функция	Значения									
	0	0^0	$\frac{\pi}{6}$	30^0	$\frac{\pi}{4}$	45^0	$\frac{\pi}{3}$	60^0	$\frac{\pi}{2}$	90^0
cosx	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
sinx	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
tgx	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-	
ctgx	-		$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	

Выпуклый четырёхугольник



Произвольный выпуклый четырёхугольник:

- ✓ Сумма всех углов равна ***360⁰***.
- ✓ Площадь: $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$

Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны и углы равны между собой.

- ✓ Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и в него вписать окружность, причём центры этих окружностей совпадают.
- ✓ Сторона правильного *n*–угольника: $a_n=2R\sin\frac{180^0}{n}$

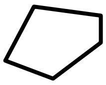
Площадь правильного *n*–угольника:

$$S_n=\frac{1}{2}P_n r;\quad S_n=\frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{360^0}{n}$$

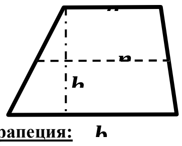
Произвольный выпуклый многоугольник

Произвольный выпуклый многоугольник:

- ✓ Сумма всех углов равна $\pi(n-2)\,или\,180^0(n-2)$
- ✓ Число диагоналей: $\frac{1}{2}n\cdot(n-3)$



Трапеция



Трапеция:

Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а другие не параллельны, называется трапецией.

- ✓ Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна: $n=\frac{a+b}{2}$ Площадь: $S=\frac{a+b}{2}h=nh$

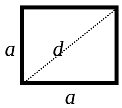
Квадрат

Квадрат:

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется квадратом.

- ✓ Диагональ квадрата $d=a\sqrt{2}$ Площадь:

$$S=a^2=\frac{1}{2}d^2$$



Ромб

Ромб:

Параллелограмм, все стороны которого равны называется ромбом.

- ✓ Диагональ ромба является его осью симметрии. Диагонали взаимно перпендикулярны. Диагонали являются биссектрисами углов.
- ✓ Площадь: $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$

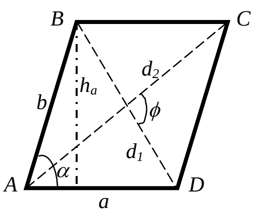
Параллелограмм

Параллелограмм:

Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельные называется параллелограммом.

- ✓ Середина диагонали является центром симметрии.
- ✓ Противоположные стороны и углы равны.
- ✓ Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.
- ✓ Диагонали делятся точкой пересечения пополам: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$
- ✓ Площадь:

$$S=a\cdot h_a=a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$$



Прямоугольный параллелепипед

V=abc ***$d^2=a^2+b^2+c^2$***