§ 2.3 Уравнения в дифференциалах

Опр

$$(уд) \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

— уравнение в дифференциалах

NB Ур-ния

$$y'_x = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

и $x'_y = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ сводятся к (уд)

записать произв как отнош дифф

Опр Ф-ия $y = \varphi(x)$ - реш (уд) на (a,b), если

1) $\varphi \in C^1(a,b)$
2) $P(x,\varphi(x))\,\cancel{dx} + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\cancel{dx} = 0$

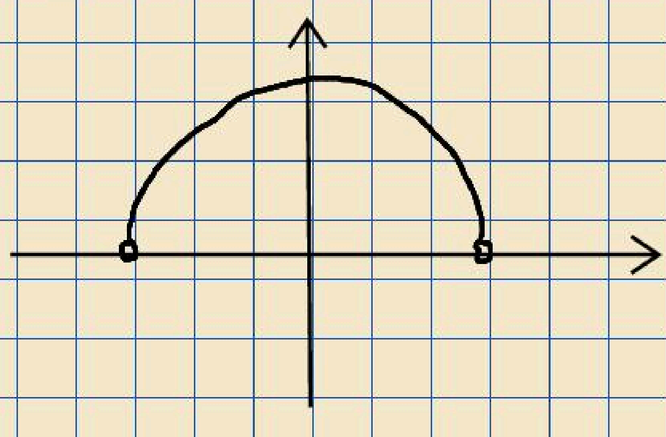
Если верно при $\forall x$, то верно и так

Аналогично определяется решение вида $x = \psi(y)$

Опр Область опр ур-ия (уд) - это мн-во $\mathrm{dom}\,P \cap \mathrm{dom}\,Q$

Ex $x\,dx + y\,dy = 0$

$y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$



подставим в ур-ие

$$x\,dx + \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = 0$$

$$0 = 0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

Опр (1) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy$ – ур-ие с разделёнными переменными

NB Общий интеграл ур-ия (1) имеет вид

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$$

Ex

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R^2 = 2C)$$