Глава 2: Предел и непрерывность

§1 Предел последовательности

Посл-ть $x_n \in X$ $\mathbb{N} \to X$

Опр $X \ni A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \rho(x_n, A) < \varepsilon$

$\|x_n - A\| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; x_n \in U_\varepsilon(A)$

$\forall U(A) \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; x_n \in U(A)$

$\rho(x_n, A) \to 0$

$\|x_n - A\| \to 0$

$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

$U_\varepsilon(\infty) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$

$\rceil X = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1 \quad x_n)$

$x^k = (x_1^k \cdots x_n^k)$

$\mathbb{R}^n \ni A = \lim\limits_{k\to\infty} x^k = (A_1, \ldots, A_n)$

Lm $x^k \to A \Leftrightarrow x_i^k \to A_i \quad \forall i = 1..n$

(покоординатная сх-ть)

$\triangleright$ „$\Leftarrow$" $\rceil x_i^k \to A_i$

$\measuredangle \; \|x^k - A\| = \rho(x^k, A) = \sqrt{\underbrace{(x_1^k - A_1)^2}_{\to 0} + \underbrace{(x_2^k - A_2)}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{(x_n^k - A_n)}_{\to 0}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

„$\Rightarrow$" $x^k \to A$

$|x_i - A_i| \leq \rho(x^k, A) \to 0$ $\blacktriangleleft$

NB Для $A = \infty$ утв неверно „$\Rightarrow$"- неверно

$(1, k) \to \infty$ „$\Leftarrow$"- ок

Свойства предела посл-ти в $\mathbb{R}^n$:

1) Предел единственен в $\overline{\mathbb{R}}^n$

2) Линейность: $\lim x^k + \lim y^k = \lim(x^k + y^k)$

$$\lim(\lambda^k \cdot x^k) = \lim \lambda^k \cdot \lim x^k, \quad \lambda^k \in \mathbb{R}$$

3) x^k сходится $\Rightarrow$ x^k огр

4) $x^k \to A \Rightarrow x^{k_m} \to A$ (подпослед)

5) т. Больцано-Вейерштрасса

x^k - огр $\Rightarrow \exists\, x^{k_m}$ - сход

x^k - неогр $\Rightarrow \exists\, x^{k_m} \to \infty$

▷ TODO

Опр x^k – фунд. (посл. Коши, сходящ. к себе)
если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Опр Метрич. пр-во (X, ρ) наз полным, если
$\forall x_n \in X$ - фунд $\Rightarrow x_n$ сход

Th (О полноте $\mathbb{R}^n$)
$\mathbb{R}^n$ - полное

NB „x_n - сход $\Rightarrow x_n$ - фунд" – верно в $\forall$ метр. пр-ве
$\triangleright$ $\|x_n - x_m\| \leq \underbrace{\|x_n - A\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|x_m - A\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$ $\blacktriangleleft$

Ex $(\mathbb{Q}, \rho)$, $\rho(x,y) = |x-y|$ – не будет полным

$\triangleright$ Пусть x^k - фунд, т.е. $\rho(x^k, x^m) < \varepsilon$
$\rho(x_i^k, x_i^m) \leq \rho(x^k, x^m) < \varepsilon$
$\Rightarrow \{x_i^k\}$ - фунд в $\mathbb{R} \Rightarrow$ сх-ся
$\Rightarrow x^k$ - сх-ся $\blacktriangleleft$