§ Непрерывные отображения

$\exists\, f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n,\ x_0 \in E$

Опр f - непр в x_0, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

или

$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \underbrace{x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(f(x_0))}_{f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))}$

NB

x_0 - пред.точка E : f - непр в $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

x_0 - изол. $\qquad f$ - непр в x_0

Локальные св-ва непр. отобр

1) f, g - непр в $(\cdot)\ x_0 \Rightarrow f + g$ - непр в $(\cdot)\ x_0$

2) $\lambda : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}$ - непр $\Rightarrow \lambda f$ - непр в $(\cdot)\ x_0$

3) Если f - непр в $x_0 \Rightarrow f$ - огр в $U(x_0)$

4) при $n = 1$ $\qquad \Rightarrow f \cdot g$ - непр в $(\cdot)\ x_0$

f, g - непр в $(\cdot)\ x_0$ $\qquad \dfrac{f}{g}$ - непр в $(\cdot)\ x_0 \quad (g(x_0) \neq 0)$

5) $\left.\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n & f\text{ - непр в } x_0 \\ g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k & g\text{ - непр в } f(x_0) \end{array}\right| \Rightarrow g \circ f$ - непр в x_0

NB $\exists\ F \subset E \subset \mathbb{R}^n$

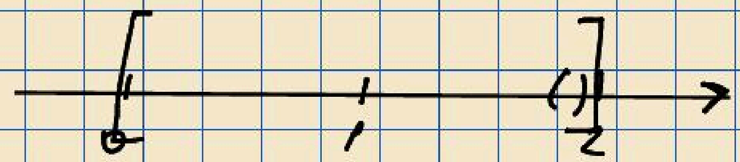
$(\cdot)\ x_0$ – наз. внутр. точкой F в E, если

$\exists\ B(x_0):\quad B(x_0) \cap E \subset F$

Ex

$E = [0;2]$

$F = [1;2]$



$x=2$ – внутр. F в E

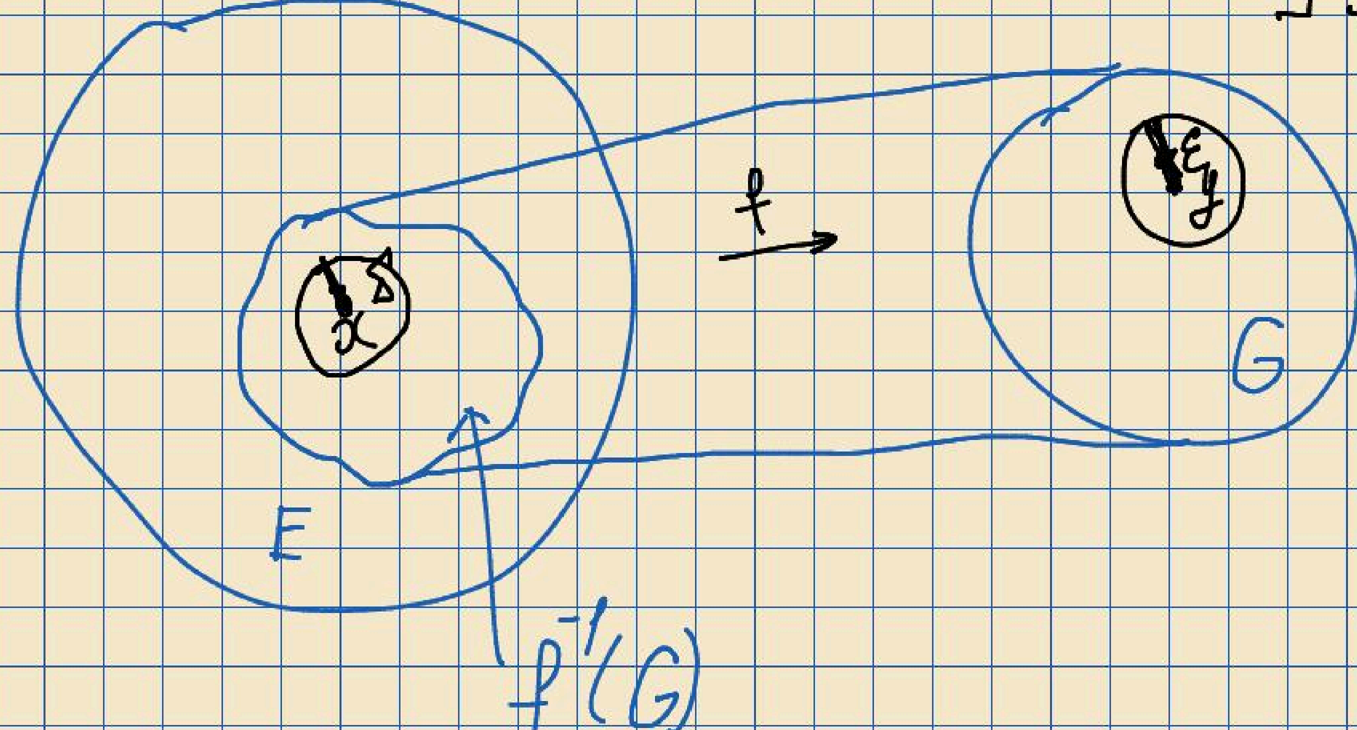
Опр F наз откр в E, если $\forall x \in F$: x – внутр F в E

F наз замк в E, если $E \setminus F$ открыто в E

Th (Критерий непрерывности)

$\exists\ f:\ \mathbb{R}^m \supset E \mapsto \mathbb{R}^n$, Тогда $f \in C(E) \Leftrightarrow \forall G$-откр в $\mathbb{R}^n \Rightarrow f^{-1}(G)$-откр в E

▷ „$\Rightarrow$" $\exists\ f \in C(E)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ – откр в $\mathbb{R}^n$



$\exists\ x \in f^{-1}(G)$

$y = f(x) \in G$

$\exists\ B_\varepsilon(y) \subset G$

$\Rightarrow \exists B_\delta(x) \subset f^{-1}(G)$

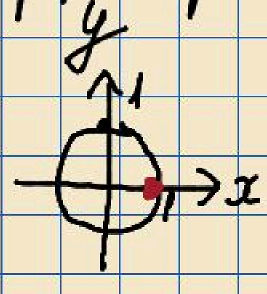
$\Rightarrow x$ – внутр $f^{-1}(G)$ в E

„$\Leftarrow$" $\exists\ x \in E \Rightarrow y = f(x)$ $\quad V(y)$ – откр $\Rightarrow f^{-1}(V(y))_{\ni x}$ – откр в E

$\Rightarrow f$ – непр в $(\cdot)\ x$ ◁

Ex Биективное непр отобр, обр. к которому разрывно

$\varphi \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \longrightarrow$



f - непр биекция

f^{-1} - не непр

Th (образ компакта)

Пусть K - компакт в $\mathbb{R}^m$, $f \in C(K)$, тогда $f(K)$ - компакт

$\triangleright$ Пусть $\{G_\alpha\}$ - откр. покрытие $f(K)$

$\Rightarrow f^{-1}(G_\alpha)$ - открыты и образуют покрытие K $\triangleleft$

Ex $a, b \in \mathbb{R}^n$

$[a, b]$ - отрезок в $\mathbb{R}^n$

$t \in [0, 1] \to x = a + t(b - a)$

$\Downarrow$

$[a, b]$ - компакт

Опр Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз связным (линейно связным), если $\forall a, b \in G$ $\exists$ путь $\gamma \subset G$, $a, b \in \gamma$

Глобальные св-ва непр отобр Пусть $f \in C(E)$

1) Образ связного мн-ва связен

$\triangleright$ Пусть E - связно

Пусть $a, b \in f(E) \Rightarrow f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in E$

$\exists \gamma : [0, 1] \to [f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$

$f \circ \gamma : [0, 1] \to [a, b] \Rightarrow f(E)$ - лин. связно $\triangleleft$

2) **Th** Кантора

f - непр на компакте $K \Rightarrow f$ - равн. непр на K

т.е. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$. $\forall x, y \in K$: $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

3) Th Вейерштрасса : $f: K \to \mathbb{R}$

f - непр на компакте $K \Rightarrow \exists \max\limits_K f, \min\limits_K f$

4) Th Больцано - Коши $f: K \to \mathbb{R}$

f - непр на связн К и $a, b \in f(K)$, $a < b \Rightarrow \forall c \in (a, b)\ \exists \xi \in K : f(\xi) = c$