§ Нормированные пр-ва

] X – лин пр-во

Опр $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ наз нормой

$\forall x, y \in X$:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – однородность
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – $\triangle$

NB $\|x\| \geq 0$ – следует из п 1-3 ($y = -x$)

Ex

1) $X = \mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$
2) $X = \mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$

$$\|x\|_p = \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$$

NB $\rho(x,y) = \|x-y\|$

3) на $C[a,b]$ $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Пр-во $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – мн-во линейных операторов: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

] $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$\|\ \|$ в $\mathbb{R}^n$

$\|\ \|$ в $\mathbb{R}^m$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \cdot \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

$\exists C \cdot \forall x \in \mathbb{R}^m : \|Ax\| \leq C\|x\|$

Те $\|A\| = \inf\{C \cdot \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^m\}$

3) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

$\triangleright$ Из опр. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

$\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$ ◁

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\triangleright$ $\measuredangle$ $\|(AB)(x)\| \leq \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \underbrace{\boxed{\|A\| \, \|B\|}}_{=C} \cdot \|x\|$

$\|ABx\| \leq C \cdot \|x\|$

$\|AB\| = \inf\{C\} \leq \|A\| \, \|B\|$

5) $\exists A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$

$\|A\| \leq C_A = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ (в $\mathbb{R}^n$ стандартная форма $\|\cdot\|_2$)

$\triangleright$ $\|Ax\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_A \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq C_A$ ◁

<u>Ex</u>

1) $L(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$A = (a)_{1 \times 1}$

$Ax = ax$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|ax\| = \sup\limits_{x = \pm 1} |ax| = |a|$

2) $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$L: \; x \in \mathbb{R} \to y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad Ax = x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sup_{x = \pm 1} |x| \sqrt{\sum a_i^2} = \|\vec{a}\|$$

3) $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto Ax = y \in \mathbb{R}$$

$$A = (a_1 \ldots a_n)$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (\vec{a}, \vec{x})$$

$$\sup_{\|x\| = 1} |Ax| = \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\|\vec{x}\|}_{= 1} = \|\vec{a}\|$$

§ Компактные множества

$\exists\ (X, \rho)$ - Метрич. пр-во

Опр $\exists\ A \subset X$, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - система откр. множеств

Если $M \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, то $\{G_\alpha\}$ - наз открытым покрытием

Опр Мн-во $K \subset X$ наз компактным, если из $\forall$ откр. покрытия можно выделить конечное

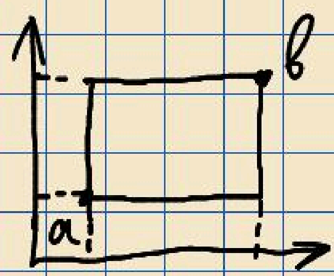
Ex

$[0, 1]$ - компакт в $\mathbb{R}$

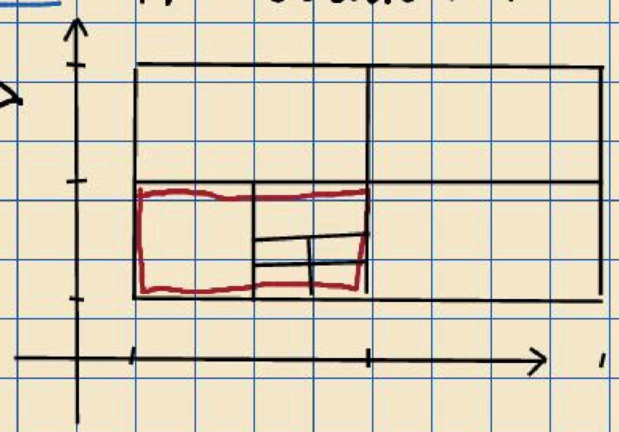
Опр Брус в $\mathbb{R}^n$: $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i\ \forall i = 1 \dots n\}$

где $a = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$

$b = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^n$



Lm Π - компакт



$\triangleright$ $\exists\ G_\alpha$ - откр. покрытие из которого нельзя выделить конечное $\square$

2^n брусов

$\Pi_0 \supset \Pi_1 \supset \dots$

Кантор по каждой координате

для i-ой коорд $[a_i^0, b_i^0] \supset [a_i^1, b_i^1] \supset$

$\exists\ \xi_i \in \bigcap\limits_j [a_i^j, b_i^j]$

$\xi = (\xi_1 \cdots \xi_n) \in \bigcap \Pi_i$

$\in G_{\alpha_0} \supset \Pi_{i_0}$

Th (Критерий компактности в $\mathbb{R}$)

$K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт $\Leftrightarrow$ K - огр и замк

Опр Мн-во $M \subset X$ ($\mathbb{R}^n$) наз. огр, если $\exists B_r(a) \supset M$

$B_r(0) \supset M$

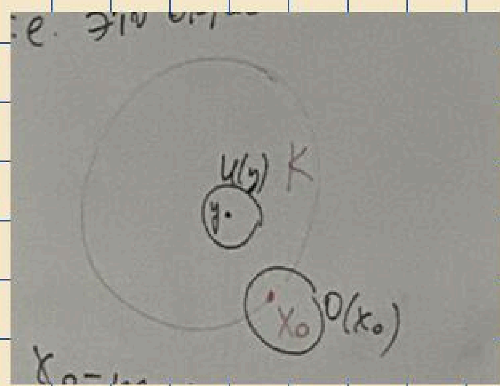
$\triangleright$ „$\Rightarrow$"] K - компакт

1) Док, что K-замк] x_0 - пред точк K и $x_0 \notin K$

$\forall y \in K \ \exists U(y), \ O(x_0) \quad U(y) \cap O(x_0) = \emptyset$

$\cup U(y)$ - открытое покрытие K $\Rightarrow U(y_1), U(y_2), .., U(y_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1(x_0), O_2(x_0) . \ O_m(x_0)$



$\tilde{O}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{m} O_i(x_0)$ - открытое мн-во, т.е это окр x_0

но $\tilde{O}(x_0) \cap K = \emptyset$

что противоречит тому, что x_0 - пред точка

2) Док, что K-огр

$\forall y \in K \ \exists B_{r_y}(0) \ni y$

$\bigcup_{y \in K} B_{r_y}(0)$ - откр покрытие $K \Rightarrow B_{r_1}(0), .. B_{r_m}(0)$

$B_r(0) \supset K, \ r = \max\{r_1 ... r_m\}$

„$\Leftarrow$"] K - огр и замкнуто

Т.к K-огр $\Rightarrow \exists B_r(0) \supset K \Rightarrow \exists \Pi$ - брус : $\Pi \supset K$

] $\{G_\alpha\}$ - открытое покрытие K

$(\cup G_\alpha) \cup \underset{\uparrow \text{откр}}{K^c} \supset \Pi \Rightarrow \{\underbrace{G_1 \ . \ G_m}_{\text{конечное покрытие } K}, \cancel{K^c}\}$ - покр Π

$\triangleleft$