§ Нормированные пр-ва

] X – лин пр-во

Опр $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ наз нормой

$\forall x, y \in X$

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \ \lambda \in \mathbb{R}$ – однородность
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – $\triangle$

NB $\|x\| \geq 0$ - следует из п 1-3 $(y = -x)$

Ex

1) $X = \mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$
2) $X = \mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$

$$\|x\|_p = \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$$

NB $\rho(x,y) = \|x-y\|$

3) на $C[a,b]$ $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Пр-во $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - мн-во линейных операторов $: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

] $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$\|\,\|$ в $\mathbb{R}^n$

$\|\,\|$ в $\mathbb{R}^m$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \cdot \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

$\exists C \cdot \forall x \in \mathbb{R}^m : \|Ax\| \leq C\|x\|$

Те $\|A\| = \inf\{C \cdot \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^m\}$

3) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

$\triangleright$ Из опр. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

$\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$ $\triangleleft$

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\triangleright$ $\measuredangle$ $\|(AB)(x)\| \leq \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \boxed{\|A\| \|B\|}^{= C} \cdot \|x\|$

$\|ABx\| \leq C \cdot \|x\|$

$\|AB\| = \inf\{C\} \leq \|A\| \|B\|$

5) $\exists A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$

$\|A\| \leq C_A = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (в $\mathbb{R}^n$ стандартная форма $\|\cdot\|_2$)

$\triangleright$ $\|Ax\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_A \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq C_A$ $\triangleleft$

<u>Ex</u>

1) $L(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$A = (a)_{1 \times 1}$

$Ax = ax$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|ax\| = \sup\limits_{x = \pm 1} |ax| = |a|$

2) $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$L: \quad x \in \mathbb{R} \to \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad Ax = x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sup_{x = \pm 1} |x| \sqrt{\sum a_i^2} = \|\vec{a}\|$$

3) $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto Ax = y \in \mathbb{R}$$

$$A = (a_1 \ldots a_n)$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = (\vec{a}, \vec{x})$$

$$\sup_{\|x\| = 1} |Ax| = \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} = \|\vec{a}\|$$