

Практика 3

f - непрерывная - недостаточно
 надо еще f^{-1} - непрерывна
 = гомеоморфизм

$$\Rightarrow \partial(f(G)) = f(\partial G)$$

① Найти или доказать \neq

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(x^2 + y^2)y}{x^2 + y^2} \right| = |y|$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{\rho^2}{\rho^4 (\underbrace{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}_{\geq \frac{1}{2}})} \leq \frac{2}{\rho^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y}{x^3 + y}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) &= 1 \\ f\left(0, \frac{1}{n}\right) &= -1 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2 \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{n}\right) = -1$$

$$\textcircled{2} \quad u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ a, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

$$1) \quad a = \begin{cases} 1, & y=0 \\ -1, & y \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \quad a = \begin{cases} -1, & x=0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

- при каких a :
- 1) непрерывно по x на \mathbb{R} ?
 - 2) непрерывно по y на \mathbb{R} ?
 - 3) непрерывно по кривой $y = d\sqrt{x}$, $d \neq 0$?
 - 4) непрерывно на \mathbb{R}^2 ?

$$3) \quad u(x,y) = \frac{x-d^2}{x+d^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 = a$$

$a = -1$ не зависит от d

$$4) \quad u(0, \frac{1}{n}) = -1 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} u(x,y) \Rightarrow \nexists a$$

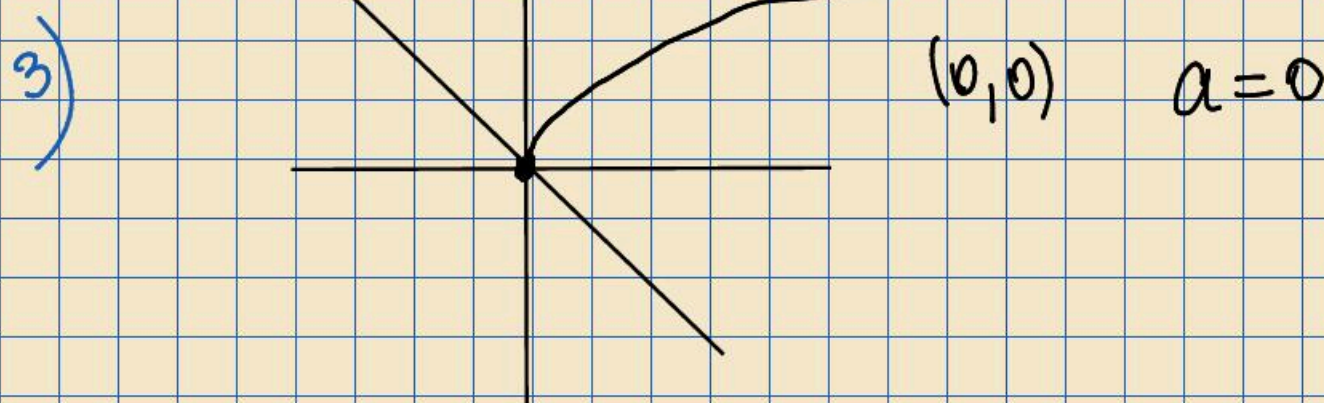
$$u(\frac{1}{n}, 0) = 1$$

$$\textcircled{3} \quad u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} e^{-\frac{1}{|x+y|}}, & x+y \neq 0 \\ a, & x+y = 0 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{|t|}}, & t \neq 0 \\ a, & t = 0 \end{cases}$$

$$4) \quad s e^{-|s|} = \frac{s}{e^{|s|}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

$$1, 2) \quad a = 0$$





④ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна

C -уровень: $M = \{x \mid f(x) = C\}$

Док-зательство. M -замкн. в \mathbb{R}^n

▷ A -п. точка

$$x_n \rightarrow A \quad x_n \in M$$

$$f(x_n) = C$$

$$f(A) = \lim_{A \in M} f(x_n) = \lim C = C$$

$$A \in M$$

⑤ Док-зательство, что

$$[a, b] \in \mathbb{R}$$

$[a, b]$ не гомеоморфен \mathbb{R}

⑥ Кривая имеет

$$[0, 1] \xrightarrow{f \text{ непрерывна}} [0, 1] \times [0, 1]$$

но не мет. Гом

(функция не непрерывна)

{конечное} \rightarrow {компактное}