mvbabushkin@itmo.ru

70 - прак

30 - экз

Глава 1 Введение

Ex

$y(x), y(t), y(h)$

Кролики

$$\Delta y_i \approx k y_i \, \Delta t_i \quad / \cdot \Delta t_i$$

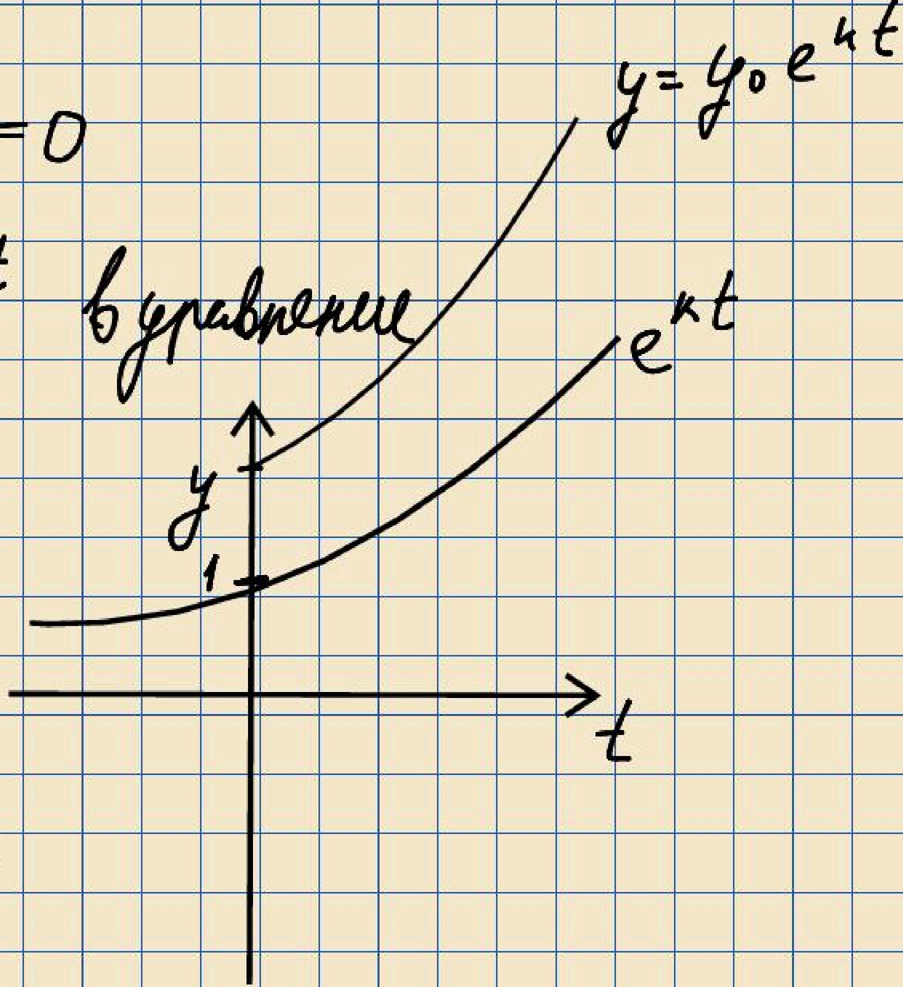
$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \approx k y_i$$

при $\Delta t_i \to 0$

$$y' = k y(t)$$

$$F(t, y, y') = 0$$

Подставим $y(t) = e^{kt}$ в уравнение



$$(e^{kt})' = k e^{kt}$$

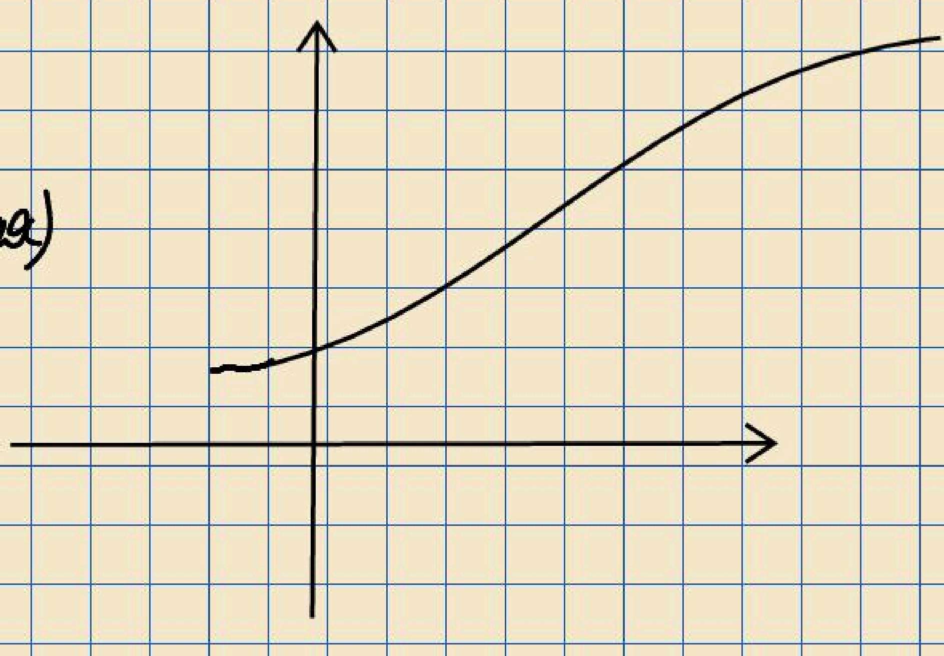
$$k e^{kt} = k e^{kt}$$

$$0 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Подставим $y(t) = C e^{kt}$

$$C k e^{kt} = C k e^{kt}$$

$$0 = 0$$



Новая модель (логистическая)

$$y' = k y (a - y)$$

$$F = m \ddot{x} = m x''$$

$$F(t, x, x') = m x''$$

Глава 2. Уравнения 1-го порядка

§2.1 Д/у 1-го порядка и его решение

Опр Обыкновенное д/у 1-го порядка

$(дy1)\quad F(x, y, y') = 0$

Опр функц φ – решение $(дy1)$ на (a, b) $\langle a, b\rangle$, если

1) $\varphi \in C^1(a, b)$

2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$

Опр интегральная кривая $(дy1)$ – это график его решения

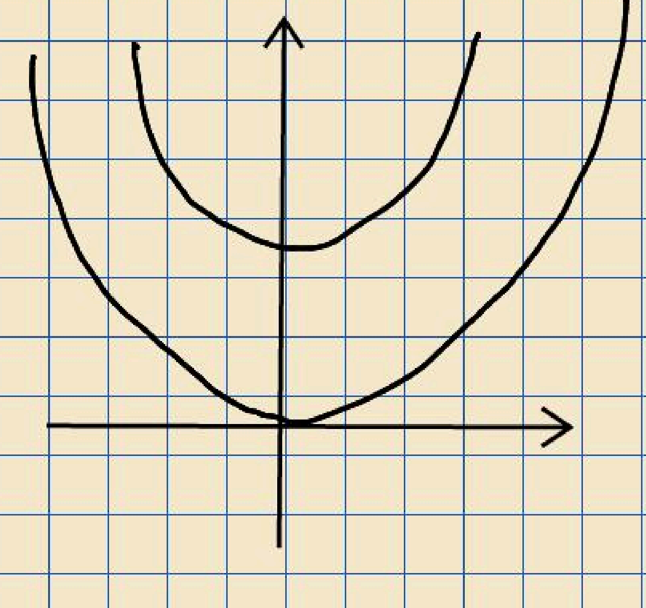
Опр Общее решение $(дy1)$ – это мн-во всех его решений

Опр Общий интеграл $(дy1)$ – это уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения $(дy1)$ при нек. знач. C

Ex

$y' = 0 \qquad (y' = f(x))$

$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$



Общее решение

$\{\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\}\ a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

В дальнейшем пишем сокр

$\underbrace{y = \frac{x^2}{2} + C}_{\text{Общ. интеграл}}, \quad C \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

§22 Уравнения в нормальной форме

Опр (ну) $y' = f(x,y)$

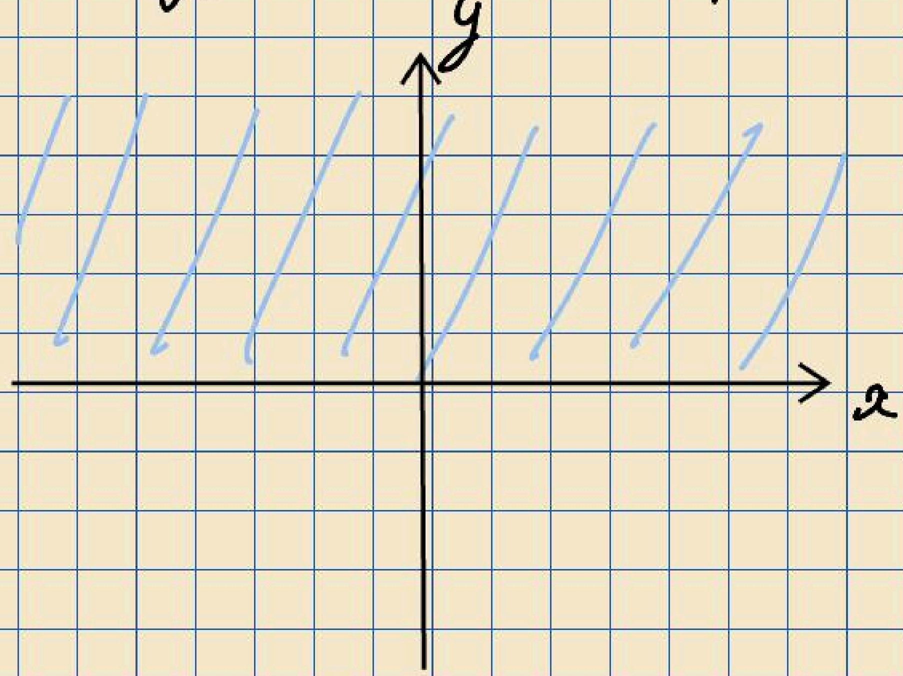
ур-ния, выраженные относительно производной или уравнения выраженные в норм. форме

Опр Область определения (ну) - область опр $\operatorname{dom} f$

Ex

$y' = x\sqrt{y}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \times [0, +\infty]$



$\varphi'(x) = f(x; \varphi(x))$

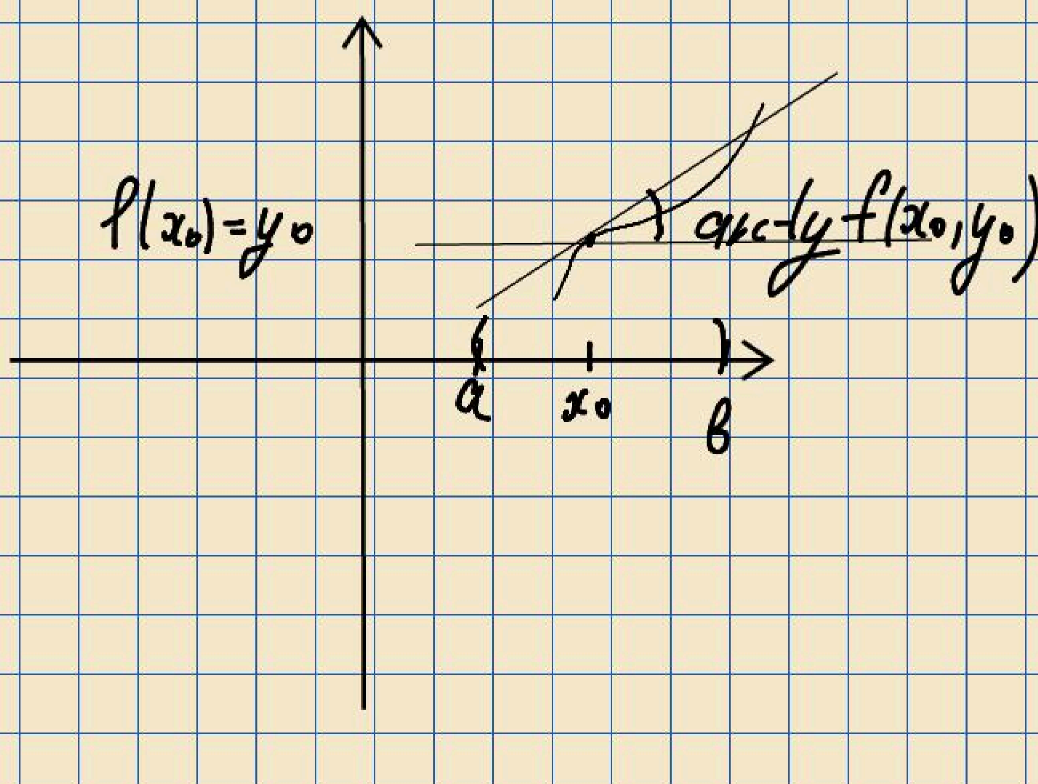
$\forall$ точка инт кривой лежит в обл. опр

Геом смысл (ну)

$\measuredangle$ φ-реш на (a, b)

$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$

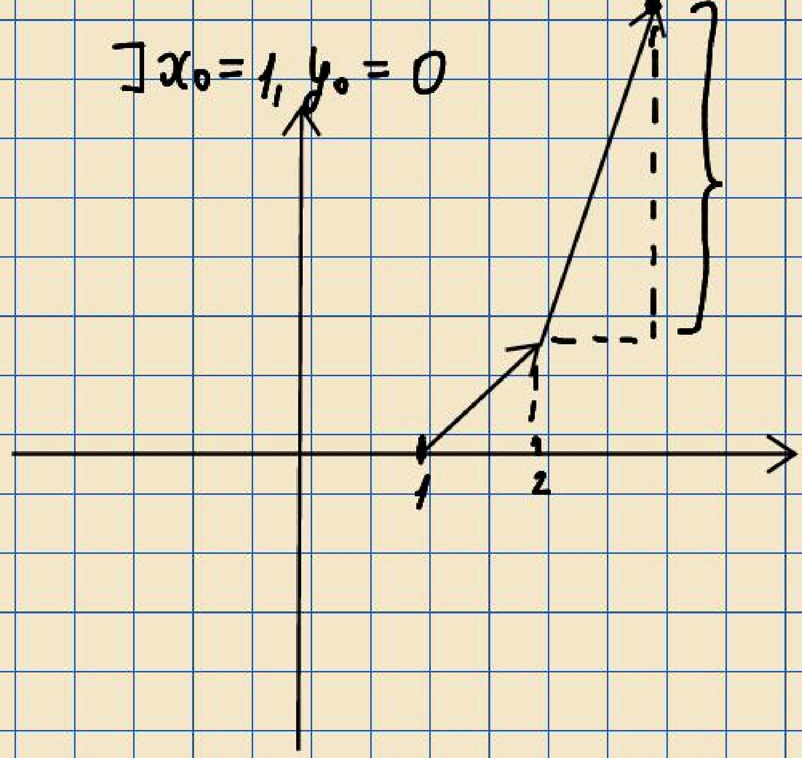


Ex

$$y' = y + x$$

$$y(x_0) = y_0$$

$\exists\, x_0 = 1,\ y_0 = 0$



$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Опр Ломаная Эйлера - это ломаная с верш $\{(x_k, y_k)\}$, где

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \end{cases}$$

§ 2.3 Уравнения в дифференциалах

Опр

(уд) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

– уравнение в дифференциалах

NB Ур-ния

$$y'_x = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

и $x'_y = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ сводятся к (уд)

записать произв как отнош дифф

Опр Ф-ия $y = \varphi(x)$ – реш (уд) на (a,b), если

1) $\varphi \in C^1(a,b)$
2) $P(x,\varphi(x))\cancel{dx} + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\cancel{dx} = 0$

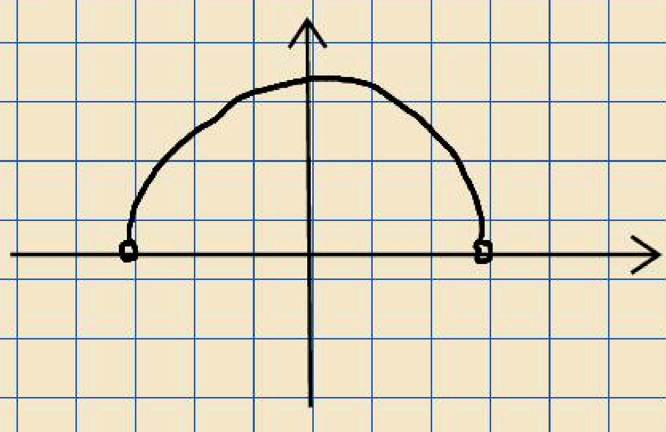
Если верно при $\forall x$, то верно и так

Аналогично определяется решение вида $x = \psi(y)$

Опр Область опр ур-ия (уд) – это мн-во $\mathrm{dom}\,P \cap \mathrm{dom}\,Q$

Ex $x\,dx + y\,dy = 0$

$y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$



подставим в ур-ие

$$x\,dx + \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = 0$$

$$0 = 0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

Опр (1) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy$ – ур-ие с разделенными переменными

NB Общий интеграл ур-ия (1) имеет вид

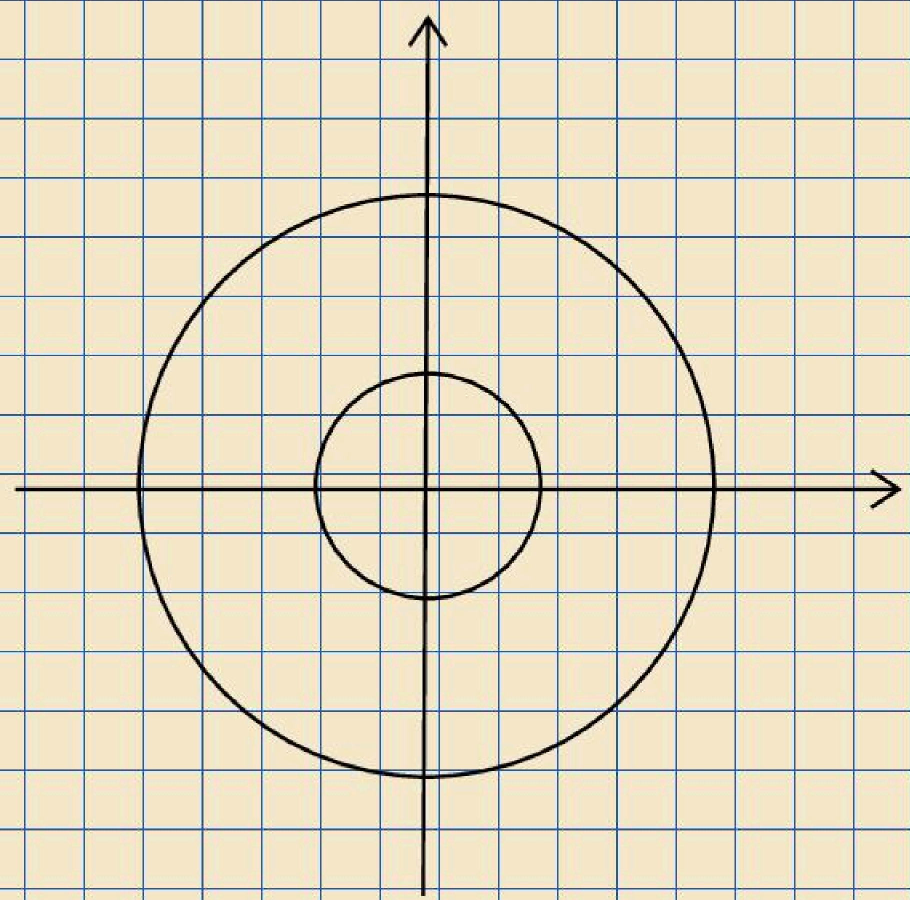
$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$$

Ex

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$



$$x^2 + y^2 = C$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R^2 = 2C)$$