§ Предел отображения

$\vartriangleleft\ f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = y = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots x_m) \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$

$y \in \mathbb{R}^n$

NB $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}^1} \neq \overline{\mathbb{R}}$

$\{\infty\} \neq \{-\infty, +\infty\}$

Опр. "Коши" $\exists\ f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 - пред точка E, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^m}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \subset \overline{\mathbb{R}^n} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap E}_{\substack{0 < \rho(x, x_0) < \delta \\ 0 < \|x - x_0\| < \delta}} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$0 < \rho(f(x), A) < \varepsilon$

$\parallel \quad \parallel$

"Гейне"

$$\forall x^k: x^k \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0,\ x^k \neq x_0,\ x^k \in E \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x^k) = A$$

Th. опр по Коши $\iff$ опр по Гейне

$\vartriangleright$ как в 1 семе

"$\Rightarrow$" 2 раза попадание в окрестность

"$\Leftarrow$" от противного, отрицание $\blacktriangleleft$

Св-ва предела $f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$

1) $\lim\limits_{x \to x} f(x) = A \in \mathbb{R}^n$, $A = (A_1 \ldots A_n) \Leftrightarrow f_i(x) \underset{x \to x_0}{\to} A_i \;\; \forall i \in 1..n$

2) Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}^n}$, то он единств

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n$, то $f(x)$ огр в $U(x_0)$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g) = \lim\limits_{x \to x_0} f + \lim\limits_{x \to x_0} g$ (Если он определен)

5) $\lambda(x): \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \to x_0} \lambda(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

6) при $n=1$: $\lim (f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$

7) Критерий Коши

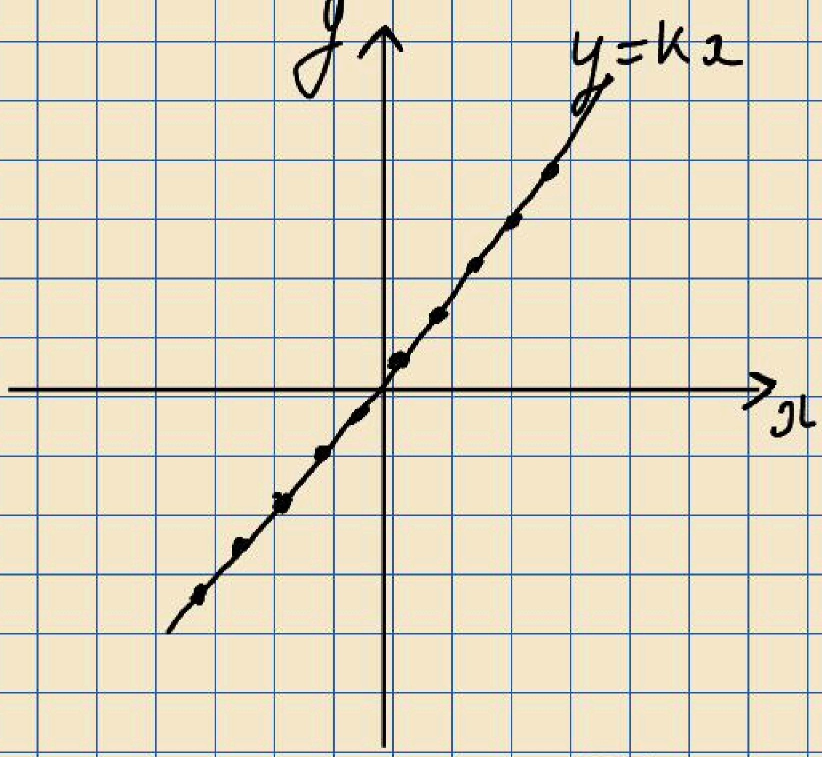
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x, y \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\; \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Ex ① $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ – ?

$$0 \le \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \le \frac{(x^2+y^2) y^2}{x^2 + y^2} \le y^2$$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$



$$f(x,kx)=\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2} \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} f(x,y)$$

2-ой способ: $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \nexists$

Идея: $\measuredangle \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0} 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}}\ \nexists$$

Th (о $\exists$ повторного предела)

$\exists\, f:\mathbb{R}^2\supset \mathring{U}(x_0,y_0)\mapsto \mathbb{R}$

и $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A\in\mathbb{R}$

и $\exists \delta > 0 \ \forall y: \ 0 < |y - y_0| < \delta \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$

Тогда $\underbrace{\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)}= A$

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

$\triangleright$ для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}_{\delta_1}(x_0, y_0): |f(x,y) - A| < \varepsilon$
для $y \in \mathring{U}_{\delta_2}(y_0) \quad \delta_2 = \min\{\delta, \delta_2\}$ $\Big| \ x \to x_0 \Rightarrow |\varphi(y) - A| < \varepsilon$

$\blacktriangleleft$

Th (о вычислении предела в полярных координатах)

$\exists f \ \mathbb{R}^2 \supset \mathring{U}(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$

и $\exists \rho_0 > 0: \ \forall \rho \in (0, \rho_0), \ \forall \varphi \in [0, 2\pi)$

$|f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - A| \leq F(\rho)$, где $F(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0+]{} 0$

Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = \left| \frac{\rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\rho^2} \right| \leq \rho^2 \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

(5)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos\varphi \cdot \sin\varphi \xrightarrow[\rho \to 0]{} \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

если $f(x, kx)$ или

$f(\alpha t, \beta t)$ - ок пред $= A$?

Ответ: нет

<u>Ex</u>

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} \quad \nexists$$