

mrbabushkin@itmo.ru

70 - прак

30 - экз

## Тема! Введение

Ex  $y(x), y(t), y(h)$   
Кривки

$$\Delta y_i \approx k y_i \Delta t_i \quad / \cdot \Delta t_i$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \approx k y_i$$

при  $\Delta t_i \rightarrow 0$

$$y' = k y(t)$$

$$F(t, y, y') = 0$$

Подставим  $y(t) = e^{kt}$  в уравнение

$$(e^{kt})' = k e^{kt}$$

$$k e^{kt} = k e^{kt}$$

$$0 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Подставим  $y(t) = C e^{kt}$

$$C k e^{kt} = C k e^{kt}$$

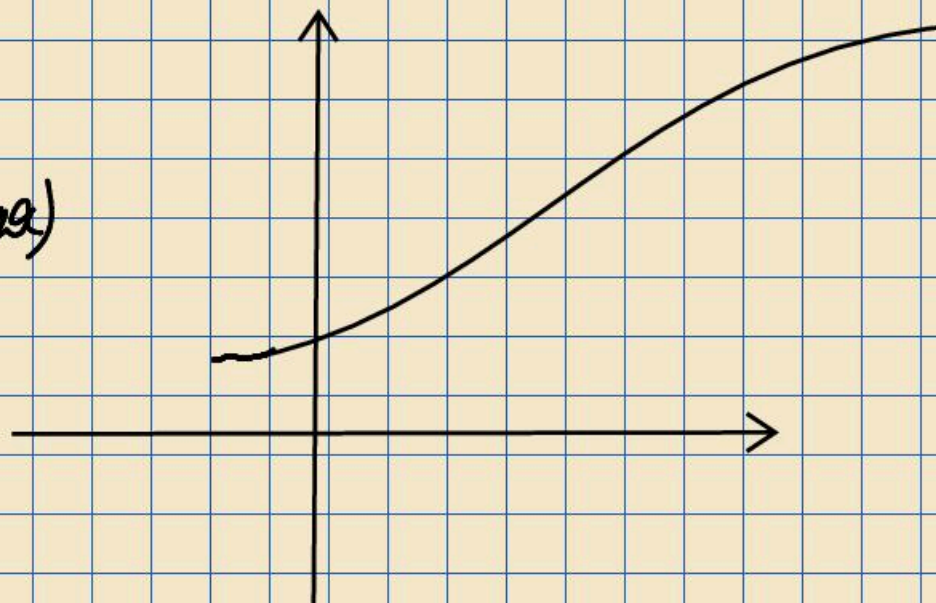
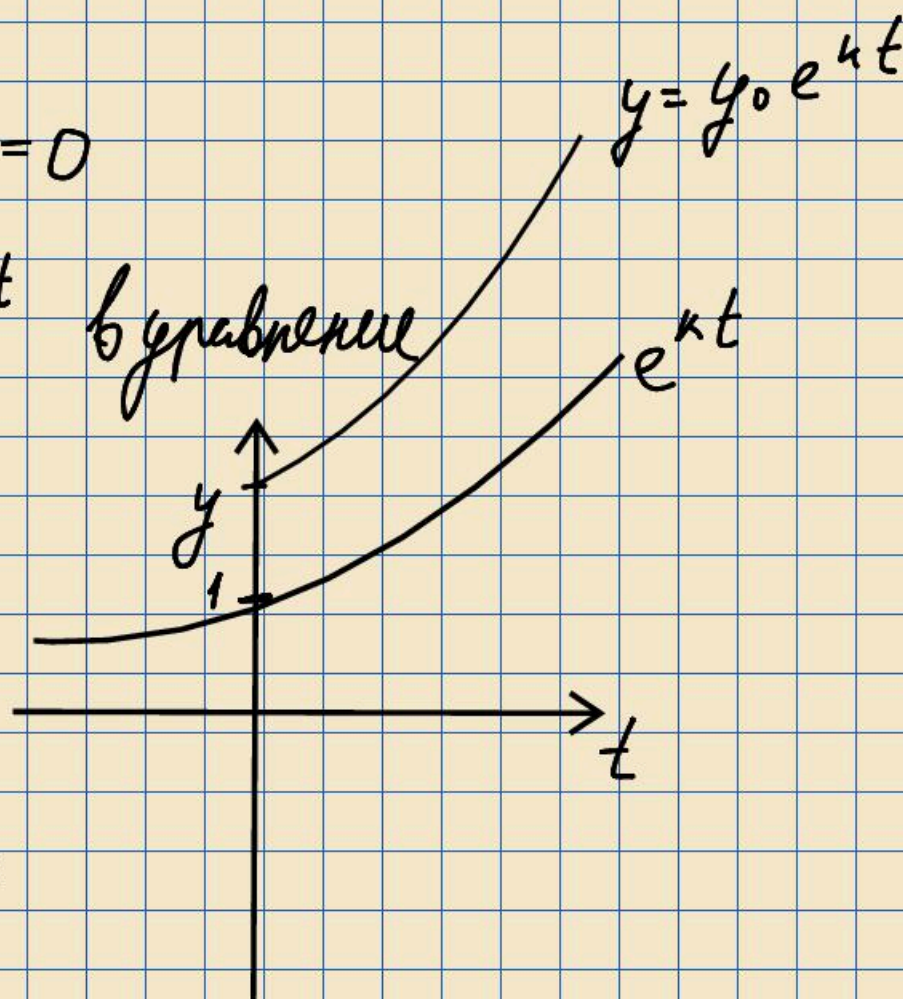
$$0 = 0$$

Логистическая модель (логистическая)

$$y' = k y (a - y)$$

$$F = m a = m x''$$

$$F(t, x, x') = m x''$$





## Глава 2. Уравнения 1-го порядка

### § 2.1 D/y 1-го порядка и его решение

Опр Обыкновенное d/y 1-го порядка

$$(dy) \quad F(x, y, y') = 0$$

Опр Функ  $f$  - решение

(dy) на  $(a, b)$ ,  <sup>$\langle a, b \rangle$</sup>  если

1)  $f \in C^1(a, b)$

2)  $F(x, f(x), f'(x)) \equiv 0$

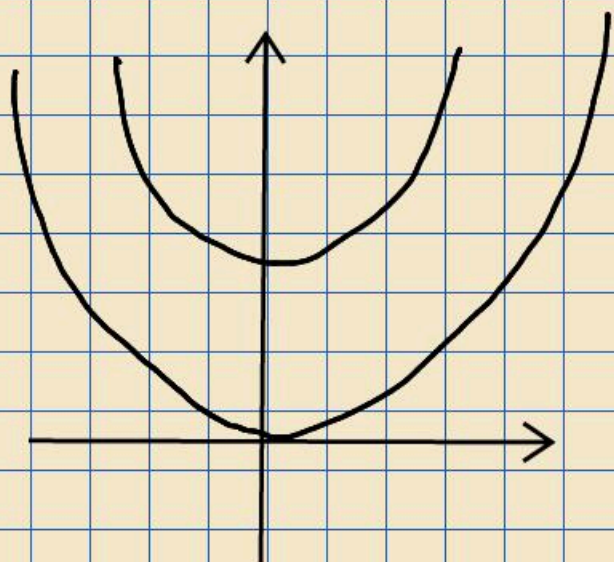
Опр интегральная кривая (dy) - это график его решения

Опр Общее решение (dy) - это мн-во всех его решений

Опр Общий интеграл (dy) - это уравнение вида  $\Phi(x, y, C) = 0$ , определяющее некоторые решения (dy) при нек. знач.  $C$

Ex  $y' = 0 \quad (y' = f(x))$

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$



Общее решение

$$\{f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

В дальнейшем пишем сокр

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Общ. интеграл



## §2.2 Уравнения в нормальной форме

Опр (нф)  $y' = f(x, y)$

ур-ния, выраженные относительно производной  
или уравнения выраженные в норм. форме

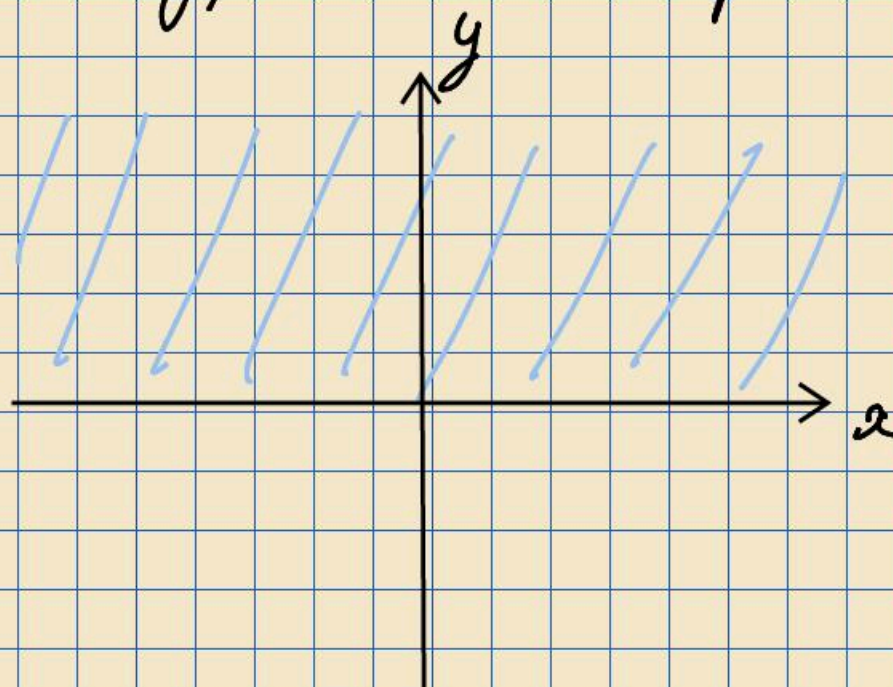
Опр Область определения (нф) - область опр  $\text{dom } f$

Ex

$$y' = x\sqrt{y}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \times [0, +\infty]$$

$$f'(x) = f'(x, \varphi(x))$$



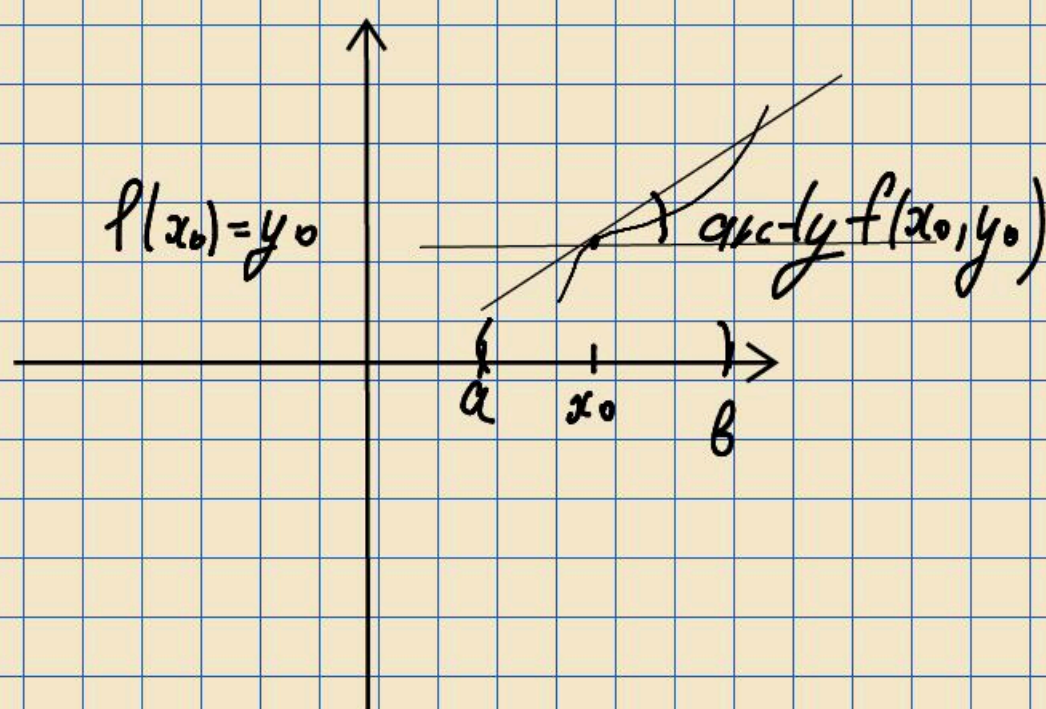
$\forall$  точка кривой лежит в обл. опр

Теорем существования (нф)

$\triangleleft \varphi$ -реш на  $(a, b)$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(x, \varphi(x))$$

$$f'(x_0) = f'(x_0, y_0)$$



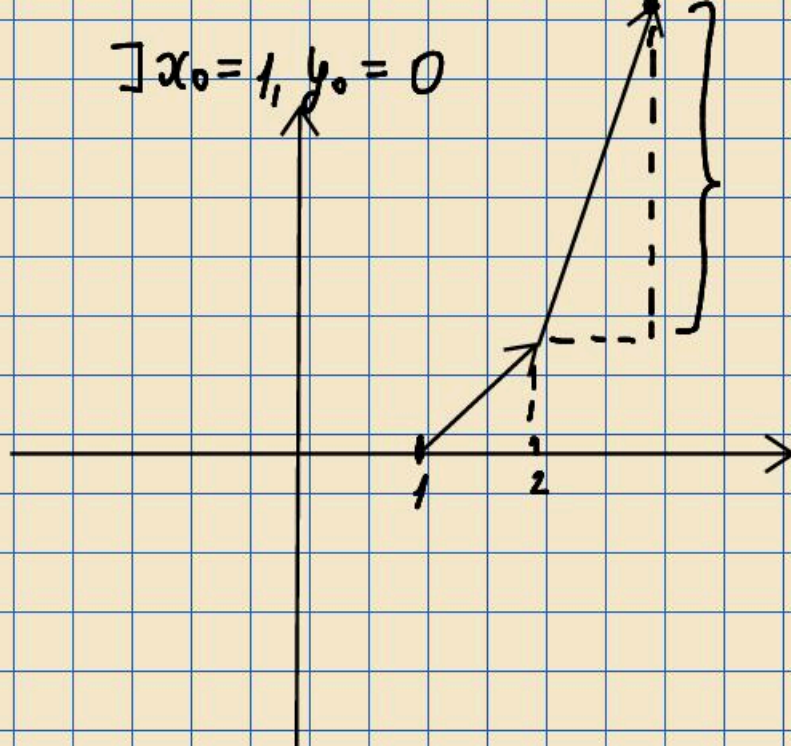


Ex

$$y' = y + x$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$



$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Опр

Ломаная Эйлера - это ломаная с верши  $\{(x_k, y_k)\}$ , где

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \end{cases}$$



## § 2.3 Уравнения в дифференциалах

Опр

$$(y \neq 0) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

- уравнение в дифференциалах

NB

ур-ния

$$y'_x = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$$\text{и } x'_y = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

сводится к (yy)  
записать произв как отном диффр

Опр

Ф-ия  $y = f(x)$  - р-ня (yy) на  $(a, b)$ , если

1)  $f \in C^1(a, b)$

2)  $P(x, f(x)) dx + Q(x, f(x)) f'(x) dx = 0$

Если верно при  $\forall x$ , то верно и там

Аналогично определяется решение вида  $x = \varphi(y)$

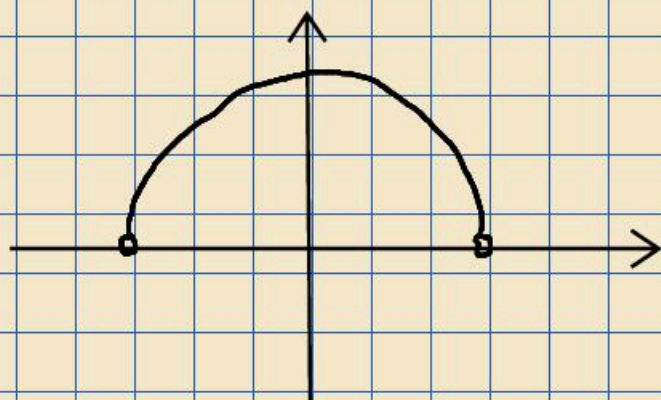
Опр

Область опр ур-ия (yy) - это мн-во  $\text{dom } P \cap \text{dom } Q$

Ex

$$x dx + y dy = 0$$

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$





подставим в ур-ие

$$x dx + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$
$$0=0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y dy + x dx = 0$$

оп (1)  $P(x) dx + Q(y) dy$  - ур-ие с разделенными переменными

МВ Общее решение ур-ия (1) имеет вид

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C$$

Сх

$$x dx + y dy = 0$$

$$\int x dx + \int y dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R^2 = C)$$

