Глава 1. $\mathbb{R}^n$

§. Метрические пространства

] X - произв. мн-во ($\neq \varnothing$)

Опр. $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ наз-ся расст (метрикой)

если: 1) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

1*) $\rho(x,y) \geq 0$ (следует из 1-3) $\rho(x,x) \leq 2\rho(x,y)$

(X, ρ) - метрическое пр-во

Примеры

1) $\forall X$ $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

2) $\mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$

3) $\mathbb{R}^2$: $\rho(a,b) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

$a = (x_1, y_1)$ $\rho(a,b) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

$b = (x_2, y_2)$ $\rho(a,b) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$

4) $\mathbb{R}^n$ $\rho_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

нер-во Минковского

$x = (x_1, x_2, .., x_n)$ $\triangleright$

$y = (y_1, y_2, \ y_n)$ $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$p \in \mathbb{N}$ $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ $\triangleleft$

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{i=1\ldots n} |x_i - y_i|$$

5) $C[a,b]$ $\quad \rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f-g|$ - равномерная метрика (Чебышёвская)

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|\,dx$$

$$\rho_p(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ - через Минковского для интегралов

без непр. сломается ① аксиома