Глава 2. Уравнения 1-го порядка

§2.1 Д/у 1-го порядка и его решение

Опр Обыкновенное д/у 1-го порядка

(ду1) $F(x, y, y') = 0$

Опр функ φ — решение (ду1) на (a,b) $\langle a,b \rangle$, если

1) $\varphi \in C^1(a,b)$

2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$

Опр интегральная кривая (ду1) — это график его решения

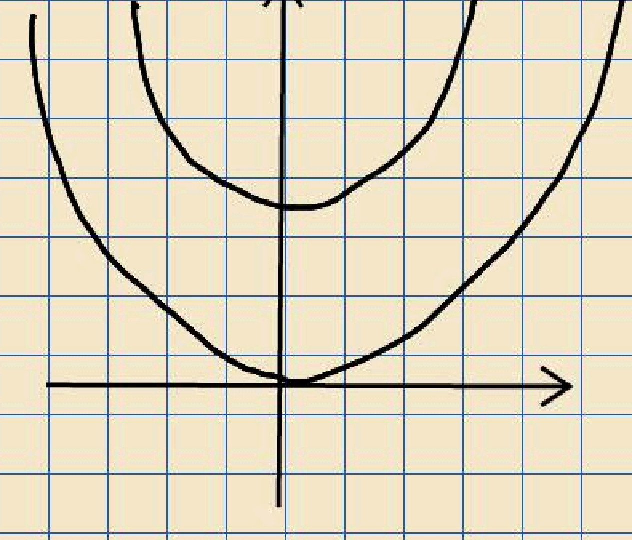
Опр Общее решение (ду1) — это мн-во всех его решений

Опр Общий интеграл (ду1) — это уравнение вида $\varphi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения (ду1) при нек. знач. C

Ex

$y' = 0$ $\quad (y' = f(x))$

$y = \frac{x^2}{2} + C, \; x \in \mathbb{R}$



Общее решение

$\{\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}\}$ $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

В дальнейшем пишем сокр

$\underbrace{y = \frac{x^2}{2} + C}_{\text{общ. интеграл}}, \quad C \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$

§2.2 Уравнения в нормальной форме

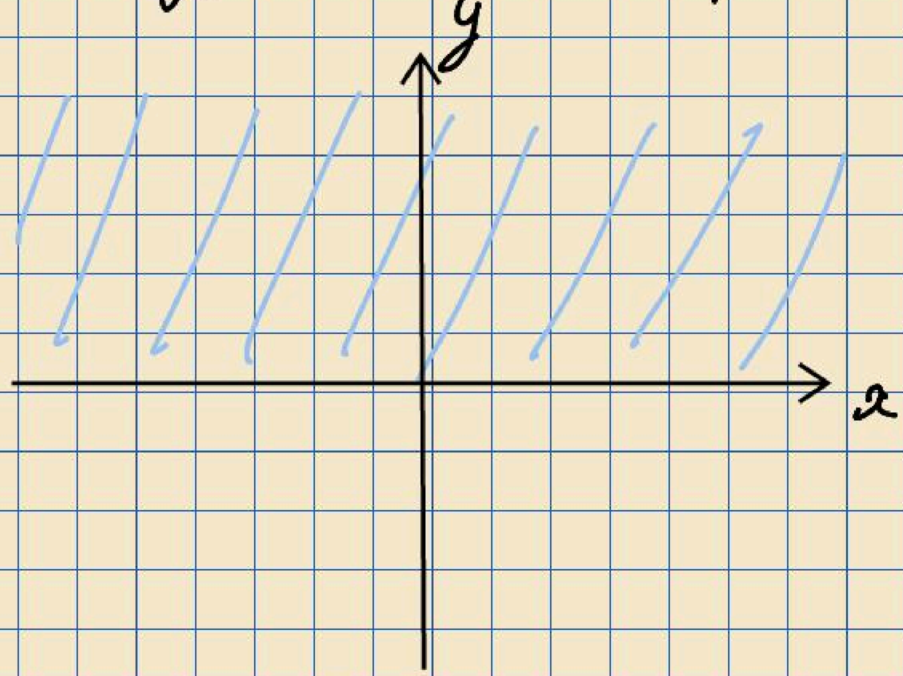
Опр (НУ) $y' = f(x,y)$

ур-ния, выраженные относительно производной или уравнения выраженные в норм. форме

Опр Область определения (НУ) - область опр $\operatorname{dom} f$

Ex

$y' = x\sqrt{y}$



$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \times [0, +\infty]$

$\varphi'(x) = f(x; \varphi(x))$

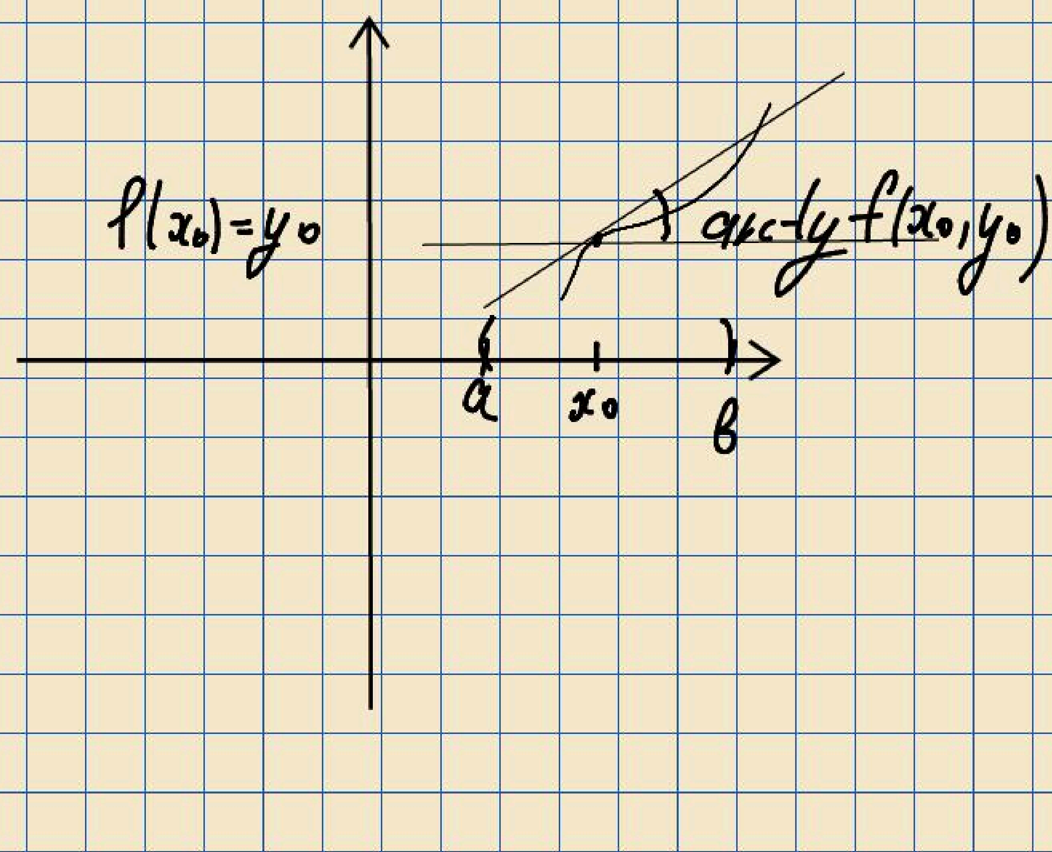
$\forall$ точка инт кривой лежит в обл. опр

Геом смысл (НУ)

$\measuredangle$ φ - реш на (a, b)

$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$

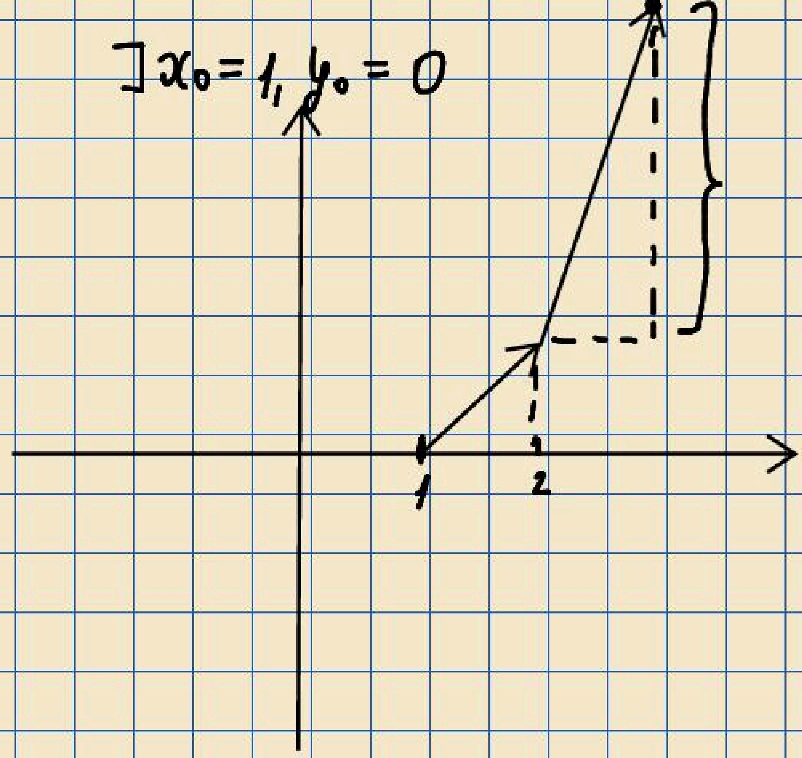


Ex

$$y' = y + x$$

$$y(x_0) = y_0$$

$\exists\, x_0 = 1,\ y_0 = 0$



$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Опр Ломаная Эйлера - это ломаная с верш $\{(x_k, y_k)\}$, где

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \end{cases}$$

§ 2.3 Уравнения в дифференциалах

Опр

$$(уд)\quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

— уравнение в дифференциалах

NB Ур-ния

$$y'_x = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

и $x'_y = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ сводятся к (уд)

записать произв как отнош дифф

Опр Ф-ия $y = \varphi(x)$ - реш (уд) на (a,b), если

1) $\varphi \in C^1(a,b)$

2) $P(x, \varphi(x))\,\cancel{dx} + Q(x, \varphi(x))\,\varphi'(x)\,\cancel{dx} = 0$

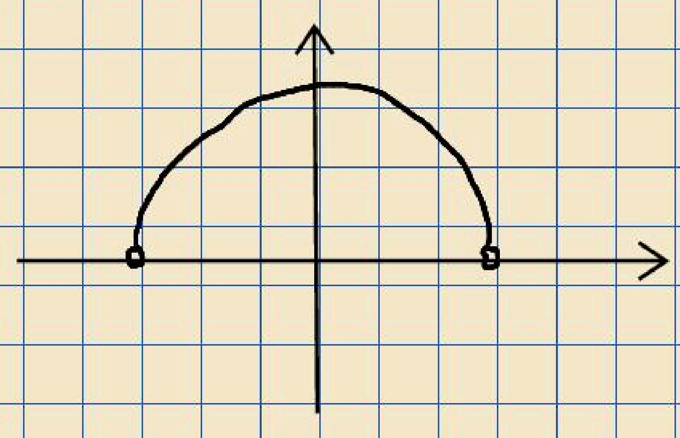
Если верно при $\forall x$, то верно тождество

Аналогично определяется решение вида $x = \psi(y)$

Опр Область опр ур-ия (уд) - это мн-во $\mathrm{dom}\,P \cap \mathrm{dom}\,Q$

Ex $x\,dx + y\,dy = 0$

$y = \sqrt{1-x^2},\ x \in (-1, 1)$



подставим в ур-ие

$$x\,dx + \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = 0$$

$$0 = 0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

Опр (1) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy$ — ур-ие с разделёнными переменными

NB Общий интеграл ур-ия (1) имеет вид

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$$

Ex

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R^2 = 2C)$$