

1

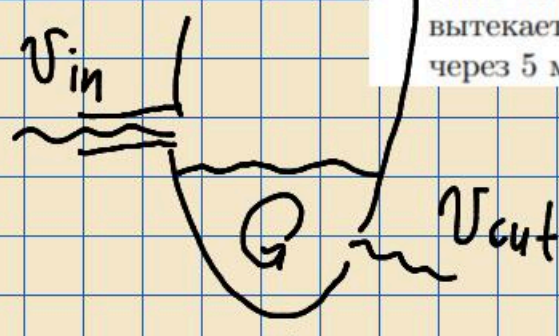
Практика 1

$$V = 10 \text{ л}$$

$$v_{in} = 2 \text{ л/мин}$$

$$n = 0,3 \text{ кг/л}$$

$$t = 5 \text{ мин, мс}^{-1}?$$



1. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0.3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

$y(t)$ — масса соли в сосуде в момент t

$$\Delta t: \text{втекает } n \cdot v_{in} \cdot \Delta t = 0,6 \Delta t$$

$$\text{вытекает } \frac{y(t) + \alpha(\Delta t)}{V} \cdot V \cdot \Delta t \quad \text{т.к. еще втекает}$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6 \Delta t - 0,2 \Delta t (y(t) + \alpha(\Delta t))$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = 0,6 - 0,2 (y(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta t))$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,6 - 0,2y(t)$$

$$\int \frac{dy}{0,6 - 0,2y} = \int dt, \quad 0,6 - 0,2y \neq 0$$

$$-5 \ln |0,6 - 0,2y| = t + C$$

$$\ln |0,6 - 0,2y| = -\frac{t+C}{5}$$

$$0,6 - 0,2y = e^{-\frac{t+C}{5}}$$

$$y = 3 - 5e^{-\frac{t}{5}} \cdot C', \quad C' > 0$$

$$y(t) = 3 - C'e^{-t/5}, \quad C' > 0$$

$y=3$ — не подходит

$$t=0 \cdot y(0)=0$$

$$c'=3$$

$$y(t) = 3(1 - e^{-t/5})$$

$$y(5) = 3 - \frac{3}{e}$$

2. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1.5 м/с, через 4 с ее скорость стала 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

$$ma = \sum F \quad \text{III} \quad k$$

$v(t)$ - скор в момент t

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F_{\text{сопр}} = k v(t)$$

$$m \frac{dv(t)}{dt} = \frac{k}{m} v(t) \quad / \cdot v(t) \cdot dt$$

$$\int \frac{dv(t)}{v(t)} = \int \frac{k}{m} dt$$

$$\ln |v(t)| = \frac{k}{m} t + C$$

$$v(t) = c' e^{\frac{k}{m} t}, \quad c' > 0$$

находим константы

$$1 \quad v(0) = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow c' = 1,5$$

$$2. \quad v(4) = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow 1,5 e^{\frac{k}{m} \cdot 4} = 1$$

$$\frac{k}{m} = \frac{\ln \frac{2}{3}}{4}$$

$$v(t) = \frac{3}{2} e^{\ln \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{t/4} = \left(\frac{2}{3} \right)^{t/4 - 1}$$

$$v = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{t}{4} - 1} = 0,001$$

$$S = \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4-1} dt = \frac{4}{\ln \frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4} \Big|_0^{\infty} = -\frac{6}{\ln \frac{2}{3}}$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

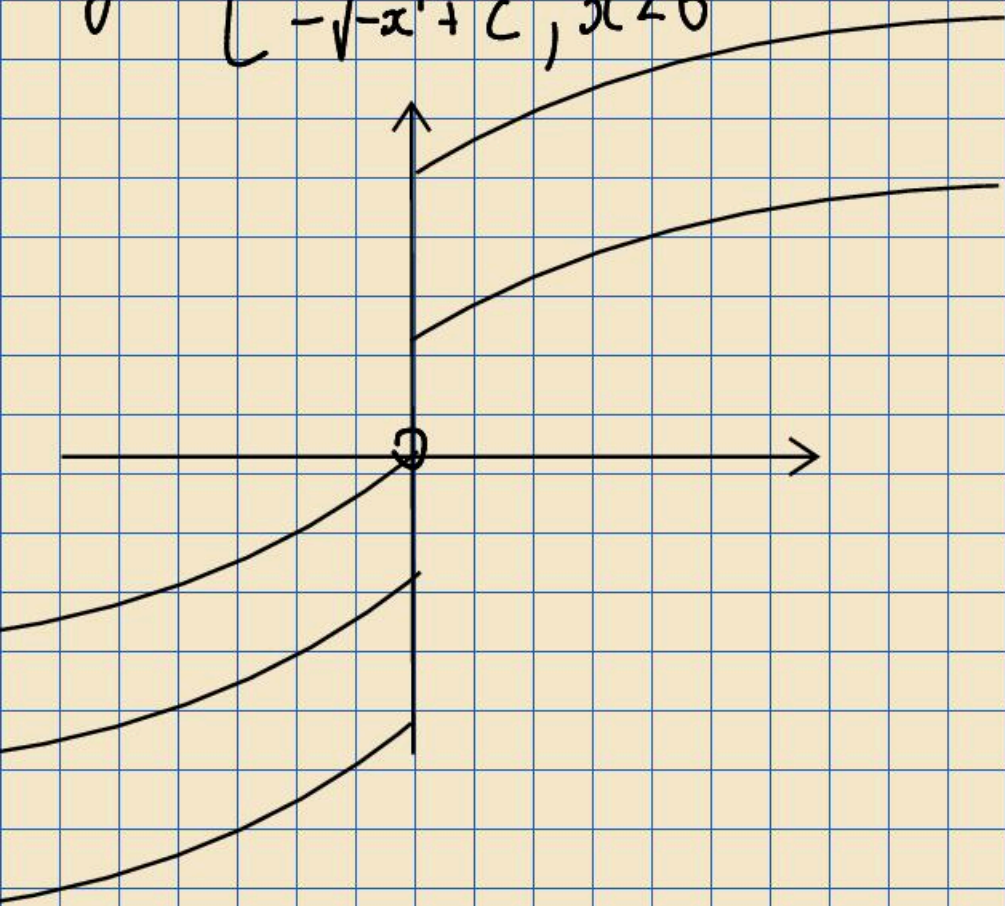
Решение уравнений

$$1. y' = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \begin{cases} x > 0 & \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ x < 0 & \frac{dx}{2\sqrt{-x}} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} + C, & x > 0 \\ -\sqrt{-x} + C, & x < 0 \end{cases}$$



$$2. xy' \cos y + \sin y = \sin^2 y$$

$$\frac{dy \cos y}{\sin^2 y - \sin y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d \sin y}{\sin y (\sin y - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{d \sin y}{\sin y} + \int \frac{d \sin y}{\sin y - 1} = \ln |x| + C$$

$$\ln \left| \frac{\sin y - 1}{\sin y} \right| = \ln |x| + C$$

$$x = C' \left(1 - \frac{1}{\sin y}\right) \text{ и } y = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Проверка ОДЗ

$x = 0$ — не является решением

$\sin y = 0$ — не подходит

$\sin y = 1$ — не является решением