Глава 1. $\mathbb{R}^n$

§. Метрические пространства

$\exists$ X - произв. мн-во $(\neq \varnothing)$

Опр $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ наз-ся расст (метрикой)

если: 1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

1*) $\rho(x,y) \geq 0$ (следует из 1-3) $\rho(x,x) \leq 2\rho(x,y)$

(X, ρ) - метрическое пр-во

Примеры

1) $\forall X$ $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

2) $\mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$

3) $\mathbb{R}^2$: $\rho(a,b) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

$a = (x_1, y_1)$ $\rho(a,b) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

$b = (x_2, y_2)$ $\rho(a,b) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$

4) $\mathbb{R}^n$ $\rho_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$p \in \mathbb{N}$

нер-во Минковского

$\triangleright$ $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ $\triangleleft$

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{i=1\ldots n} |x_i - y_i|$$

5) $C[a,b]$ $\quad \rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f-g|$ - равномерная метрика (Чебышёвская)

без непр. сломается ① аксиома

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|\,dx$$

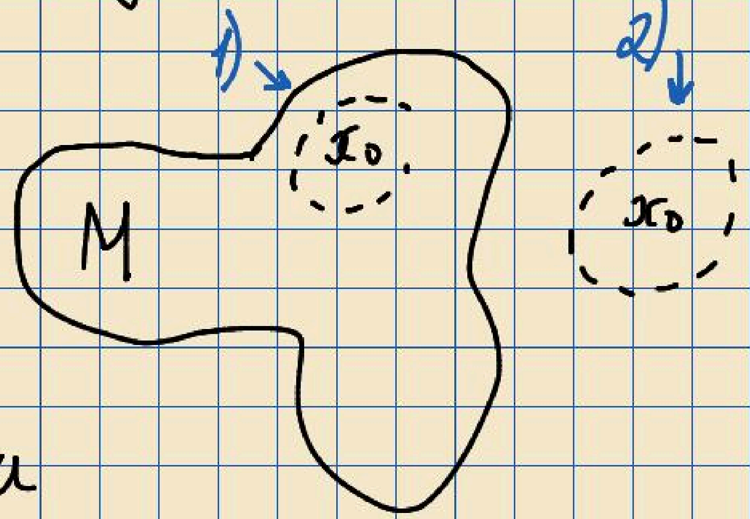
$$\rho_p(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ - через Минковского для интегралов

§ Типы точек и множеств

Опр Открытый шар: $B_r(x_0) = \{x \in X \ \ \rho(x,x_0) < r\}$
$x_0 \in X,\ r>0$

Закрытый шар: $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \le r\}$

Опр $\exists M \subset X$ Точка $x_0 \in X$ наз



1) x_0 - внутр точка M, если
$\exists B_r(x_0) \subset M$

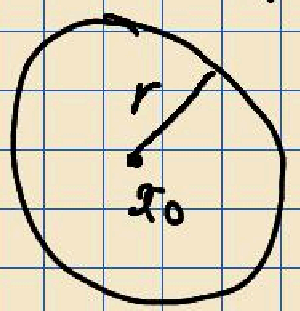
2) x_0 - внешняя точка M, если
x_0 - внутр $M^c = X \setminus M$

3) иначе x_0 - граничная точка M,
т.е $\forall r>0$ $B_r(x_0) \cap M \neq 0$
$B_r(x_0) \cap M^c \neq 0$

Опр Граница M: ∂M - мн-во всех гр. точек
$\mathrm{Int}\, M$ - внутренность M

Примеры

в $\mathbb{R}^2$ с дискретной метрикой $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$
$\overline{B_1}(x_0) = \mathbb{R}^2$

NB в $\mathbb{R}^n$ ρ_2 - стандартная метрика
$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$

Пример в $X = \mathbb{R}$
$M = \mathbb{Q} \cap [0,1]$
$x_0 = \frac{1}{2}$ - граничная

$\partial M = [0,1]$

Опр $S_r(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) = r\}$

Lm (о шарах) $\exists X = \mathbb{R}^n, \rho_2$ $\quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$

1) $\partial B_r(x_0) = \partial \overline{B}_r(x_0) \Rightarrow \partial S_r(x_0) = S_r(x_0)$

2) $\operatorname{Int} B_r(x_0) = \operatorname{Int} \overline{B}_r(x_0) = B_r(x_0)$

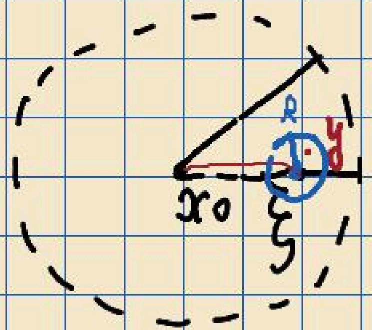
3) $\operatorname{Int} S_r(x_0) = \varnothing$

Опр Мн-во $G \subset X$ наз открытым в X, если все его точки внутренние для G

$$G = \operatorname{Int} G \qquad \varnothing \text{ - открытое по опр.}$$

Lm $B_r(x_0)$ - открытое мн-во в X

▷



$\exists \forall \xi \in B_r(x_0)$

$\exists R = \frac{1}{2}(r - \rho(x_0, \xi)) > 0$

Докажем, что $B_R(\xi) \subset B_r(x_0)$.

$$\exists y \in B_R(\xi) \quad \triangle \quad \rho(y, x_0) \le \rho(y, \xi) + \rho(\xi, x_0) < \frac{r - \rho(x_0, \xi)}{2} + \rho(x_0, \xi) = \frac{r + \underbrace{\rho(x_0, \xi)}_{<r}}{2} < \frac{2r}{2} = r$$

◁

Опр Окрестностью $U(x_0)$ наз открытое мн-во, содержащее x_0

$\mathring{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$

$U_\varepsilon(x_0) = B_\varepsilon(x_0)$

Опр Мн-во $F \subset X$ наз. замкнутым, если $F^c = X - F$ открыто

Lm (свойства откр. и закр множеств)

1) $\exists \{G_\alpha, \alpha \in A\}$ - открытые мн-ва $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ - откр.

2) $\exists G_1, G_2, \dots, G_n$ - открытые мн-ва $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ - откр.

3) $\exists \{F_\alpha, \alpha \in A\}$ - замкнутые $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ - замк

4) $\exists F_1, F_2, \dots, F_n$ - замкнутые $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ - замк

5) $\rceil$ F - замк, G открытое, тогда
$F \setminus G$ - замк
$G \setminus F$ - открытое

▷ 1) $\rceil\, x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha: x \in G_{\alpha_0}$ - открытое $\Rightarrow \exists B_r(x) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup G_\alpha$

2) $\rceil\, x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow x \in G_i \ \forall i$

$\Rightarrow \exists \ B_{r_i}(x) \subset G_i$

$\Rightarrow \bigcap B_{r_i}(x) = B_r(x)$ $\qquad \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$

$r = \min\{r_1 . r_n\}$

3)
Законы де Моргана
4)

5) Докажем, что $F \setminus G$ замкнуто

$\measuredangle \ (F \setminus G)^c = (F \cap G^c)^c = F^c \cup G$ - откр

откр.

◺

Примеры

$\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ - не откр

$\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$ - не замк

Опр Точка $x_0 \in X$ наз предельной точкой мн-ва $M \subset X$, если в $\forall \overset{\circ}{U}(x_0)$ есть точка из M
т.е. в $U(x_0)$ есть бесконечно много точек из M

Мн-во предельных точек: M'

Замыкание мн-ва M: $cl\, M = \overline{M} = M \cup M'$

Th (Критерий замкнутости мн-ва)

M - замкнуто $\Leftrightarrow$ $cl\,M = M$

$\triangleright$ ($\Rightarrow$) Пусть M - замкнуто, т.е. M^c - открыто

от прот: Пусть $x \in M' \setminus M$

$x \in M^c \Rightarrow \exists B_r(x) \subset M^c \Rightarrow$ в $B_r(x)$ нет точек из M, что противоречит $x \in M'$

($\Leftarrow$) Пусть $cl M = M$, Докажем, что M^c - открыто

Пусть $x \in M^c$, $x \notin M = cl M$, $x \in M'$ $\Rightarrow$

$\exists U(x) \cap M = \varnothing$

$\Rightarrow \exists B_r(x) \subset U(x)$ и $B_r(x) \cap M = \varnothing$

$\Rightarrow B_r(x) \subset M^c \Rightarrow M^c$ - откр $\Rightarrow M$ - замк $\blacktriangleleft$

Lm Замкнутый шар $\overline{B_r}(x_0)$ - замк мн-во

$\triangleright$ как про откр шар

или как (5) св-во

Опр Точка $x_0 \in M$ наз изолир точкой M, если x_0 не явл предельной

Lm $\mathrm{cl}\, M$ - замкнуто

$\mathrm{Int}\, M$ - открыто

∂M - замкнуто

$\triangleright$ сами

NB

$x_n \in X$, $x_n \to A \iff \forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x_n \in U_\varepsilon(A)$

$\iff \rho(x_n, A) \to 0$