§ Компактные множества

] (X, ρ) - Метрич. пр-во

Опр] $A \subset X$, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - система откр. множеств

Если $M \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, то $\{G_\alpha\}$ - наз открытым покрытием

Опр Мн-во $K \subset X$ наз компактным, если из $\forall$ откр. покрытия можно выделить конечное

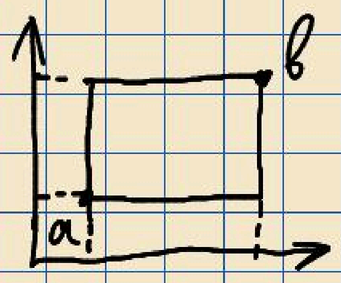
Ex

$[0, 1]$ - компакт в $\mathbb{R}$

Опр Брус в $\mathbb{R}^n$: $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i \ \forall i = 1 \dots n\}$

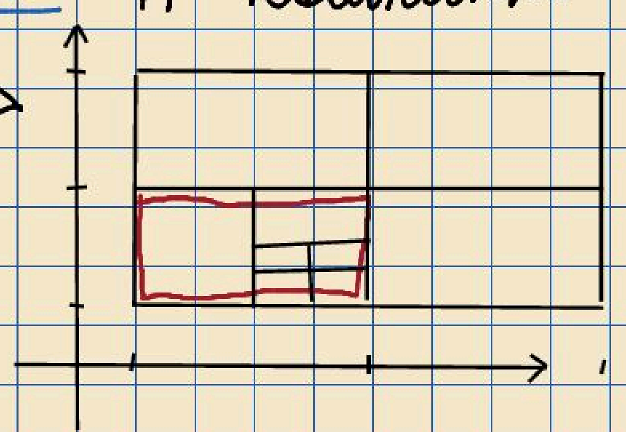
где $a = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$

$b = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^n$



Lm Π - компакт

$\triangleright$



] G_α - откр. покрытие из которого нельзя выделить конечное $\square$

2^n брусов

$\Pi_0 \supset \Pi_1 \supset \dots$

Кантор по каждой координате

для i-ой коорд $[a_i^0, b_i^0] \supset [a_i^1, b_i^1] \supset$

$\exists\, \xi_i \in \bigcap\limits_j [a_i^j, b_i^j]$

$\xi = (\xi_1 \cdots \xi_n) \in \bigcap \Pi_i$

$\in G_{\alpha_0} \supset \Pi_{i_0}$

Th (Критерий компактности в $\mathbb{R}$)

$K\subset\mathbb{R}^n$ - компакт $\Leftrightarrow$ K - огр и замк

Опр Мн-во $M\subset \underset{\mathbb{R}^n}{X}$ наз. огр, если $\exists B_r(x)\supset M$

$B_r(0)\supset M$

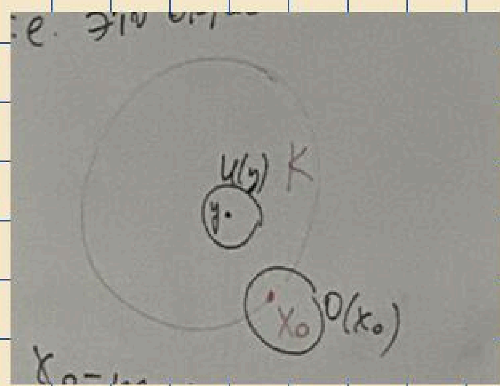
▷ „$\Rightarrow$"] K - компакт

1) Док, что K - замк] x_0 - пред точк и $x_0\notin K$

$\forall y\in K\ \exists U(y),\ O(x_0)\quad U(y)\cap O(x_0)=\emptyset$

$\bigcup U(y)$ - открытое покрытие K $\Rightarrow U(y_1), U(y_2),\dots,U(y_n)\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1(x_0), O_2(x_0)\dots O_m(x_0)$



$\tilde{O}(x_0)=\bigcap\limits_{i=1}^{m} O_i(x_0)$ - открытое мн-во, т.е это окр x_0

но $\tilde{O}(x_0)\cap K=\emptyset$

что противоречит тому, что x_0 - пред точка

2) Док, что K - огр

$\forall y\in K\ \exists B_{r_y}(0)\ni y$

$\bigcup\limits_{y\in K} B_{r_y}(0)$ - откр покрытие K $\Rightarrow B_{r_1}(0),\dots B_{r_m}(0)$

$B_r(0)\supset K,\ r=\max\{r_1\dots r_m\}$

„$\Leftarrow$"] K - огр и замкнуто

Т.к K - огр $\Rightarrow \exists B_r(0)\supset K \Rightarrow \exists\Pi$ - брус : $\Pi\supset K$

] $\{G_\alpha\}$ - открытое покрытие K

$(\bigcup G_\alpha)\cup \underset{\uparrow\ \text{откр}}{K^c}\supset\Pi \Rightarrow \{\underbrace{G_1 \dots G_m}_{\text{конечное покрытие } K}, \cancel{K^c}\}$ - покр Π