**Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого**

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчет по лабораторной работе №1
“Интервальный анализ”

Выполнил студент группы 5030102/10201: Лутченко Михаил Николаевич

Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$Ax = b, \ x = (x_1, x_2)$$

с матрицей

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

.

Пусть матрица радиусов для A имеет вид

$$\text{rad}A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Необходимо:

- Найти диапазон значений α, при которых $0 \in \det A$;
- Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \alpha$ найти точечную матрицу A':
$$\det A' = 0.$$

2 Необходимая теория

Интервалом вещественной оси $[a, b]$, называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b включая их самих, т.е.

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{1}$$

При этом a и b называются концами интервала.

2.1 Интервальная арифметика

Развернутые формулы основных арифметических операций для интервалов:

1. **Сложение**
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left[\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \ \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}\right], \tag{2}$$
2. **Вычитание**
$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \left[\underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, \ \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\right], \tag{3}$$
3. **Умножение**
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \left[\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}, \ \max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\right], \tag{4}$$
4. **Деление**
$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left[1/\overline{\mathbf{y}}, \ 1/\underline{\mathbf{y}}\right], \ 0 \notin \mathbf{y}. \tag{5}$$

Формулы для характеристик интервала:

1. **Средняя точка**
$$\mathrm{mid}\ \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}}). \tag{6}$$

2. **Ширина**
$$\mathrm{wid}\ \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}. \tag{7}$$

3. **Радиус**
$$\mathrm{rad}\ \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}). \tag{8}$$

3 Реализаця

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: https://github.com/Kolyrew/interval-analysis

3.1 Алгоритм поиска минимального α

В ходе выполнения работы было найдено минимальное значение параметра α, при котором определитель интервальной матрицы A включает ноль ($0 \in \det A$).

Для нахождения минимального значения α использовался итеративный метод с переменным шагом:

1. **Начальный этап**:
   - Стартовое значение: $k = 0$, $\alpha_0 = e^0 = 1$.
   - На каждой итерации значение α_k увеличивается по формуле:
   $$k \to k + 1, \ \alpha_0 = e^k.$$
   - Процесс продолжается, пока $0 \notin \det A$.

2. **Уточнение значения**:
   - Задаем точность $\varepsilon > 0$.
   - Принимаем $a_0 = 0$ и $b_0 = \alpha_0$.
   - Находим $\alpha_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$.
   - Если $0 \in \det A$, то $b_{k+1} = \alpha_{k+1}$, иначе $a_{k+1} = \alpha_{k+1}$.
   - Процесс продолжается, пока $b - a > \varepsilon$.
   - Если $b - a \leqslant \varepsilon$, возвращаем $\frac{a_k + b_k}{2}$.

3.2 Результаты вычислений

k	α_k	$\det A_k$
0	0.50000	$[-1.90000, 2.10000]$
1	0.25000	$[-0.90000, 1.10000]$
2	0.12500	$[-0.40000, 0.60000]$
3	0.06250	$[-0.15000, 0.35000]$
4	0.03125	$[-0.02500, 0.22500]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	0.02499	$[0.00002, 0.19998]$
15	0.02500	$[-0.00004, 0.20004]$
16	0.02500	$[-0.00000, 0.20000]$

Таблица 1: Итерационный процесс при $\varepsilon = 10^{-5}$

Итерационный процесс представлен в таблице 1. Из таблицы видно, что на 16-й итерации было найдено значение α при заданной точности:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

3.3 Итоговые результаты

Минимальное значение параметра регуляризации:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

При этом интервальная матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} [1.025,\ 1.075] & [0.925,\ 0.975] \\ [0.975,\ 1.025] & [0.975,\ 1.025] \end{bmatrix}$$

Определитель данной матрицы составляет:

$$det(A) = [0.0,\ 0.2]$$

Диапазон значений α, при котором определитель интервальной матрицы A включает ноль, составляет:

$$\alpha \in [0.025,\ +\infty)$$

3.4 Нахождение точечной матрицы A'

Для найденного минимального значения α_{min} была определена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, такая, что $\det A' = 0$.

Точечная матрица A' имеет вид:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, так как её строки линейно зависимы, и определитель равен нулю.

3.5 Скорость сходимости

Рис. 1: Зависимость значения α от номера итерации k

Рис. 2: Относительная погрешность δ от номера итерации k

Из графика 2 следует, что относительная погрешность уменьшается с темпом, близким к $\exp(-k)$.

4 Обсуждение

1. **Физический смысл результата**
   Матрица A' соответствует минимальному значению радиуса α, при котором она перестаёт быть обратимой ($\det A' = 0$). Это говорит о том, что система уравнений становится вырожденной и допускает бесконечное количество решений. В физическом плане это означает, что данных из двух ракурсов недостаточно для однозначного восстановления объекта, так как отсутствует необходимая информация для получения уникального решения.

2. **Чувствительность системы**
   При минимальном значении радиуса α система становится крайне чувствительной к малейшим изменениям исходных данных. Любое небольшое возмущение может значительно повлиять на результаты расчётов. Это подчёркивает сложность работы с такими системами в условиях реальных данных, где присутствует шум.

3. **Практические аспекты**
   В реальных задачах томографии для повышения точности часто используется большее число ракурсов. Это позволяет избежать ситуации вырожденности, возникающей при недостатке данных. Когда число ракурсов ограничено, приходится применять специальные методы для обработки интервалов неопределённости, чтобы компенсировать недостаток информации.

5 Выводы

В рамках данной лабораторной работы была изучена интервальная матрица A, размеры которой составляют 2×2. Для этой матрицы был вычислен диапазон значений параметра α, при котором определитель $\det A$ включает ноль. Минимальное значение параметра составило $\alpha = 0.025$, что было установлено с использованием итерационного метода с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Для найденного значения α определитель интервальной матрицы находится в пределах интервала $[0.0, 0.2]$, что подтверждает вырожденность системы. Также была определена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, для которой выполнено условие $\det A' = 0$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной из-за линейной зависимости её строк. Таким образом, минимальное значение параметра α указывает на границу, при которой интервальная матрица A перестаёт быть обратимой.

В задачах с большими интервалами неопределённости подобный анализ позволяет определить, какие значения параметров делают систему устойчивой или, напротив, приводят её к вырождению. Это имеет важное значение для практического применения в области вычислений, особенно в задачах, связанных с ограниченным количеством данных.