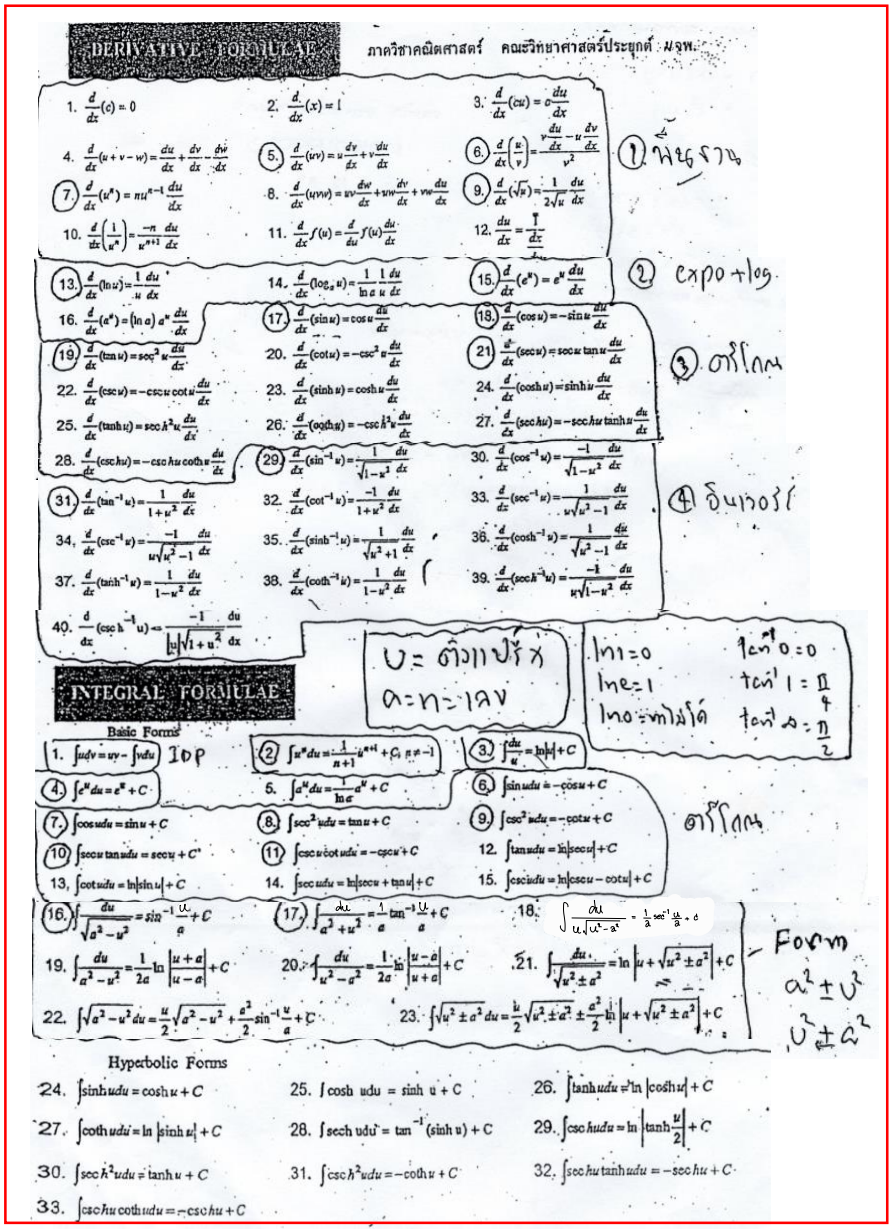
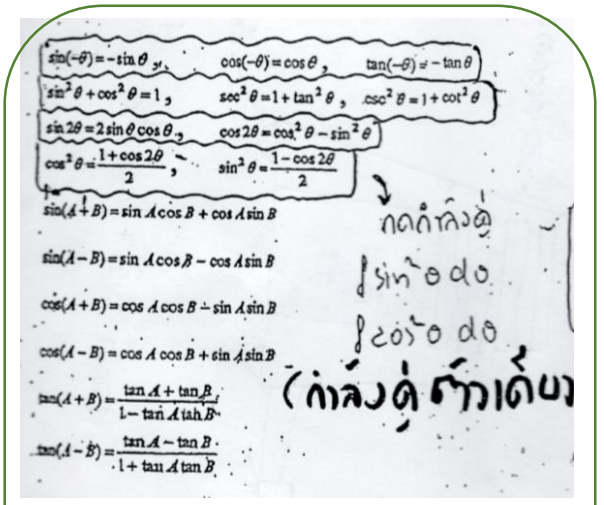
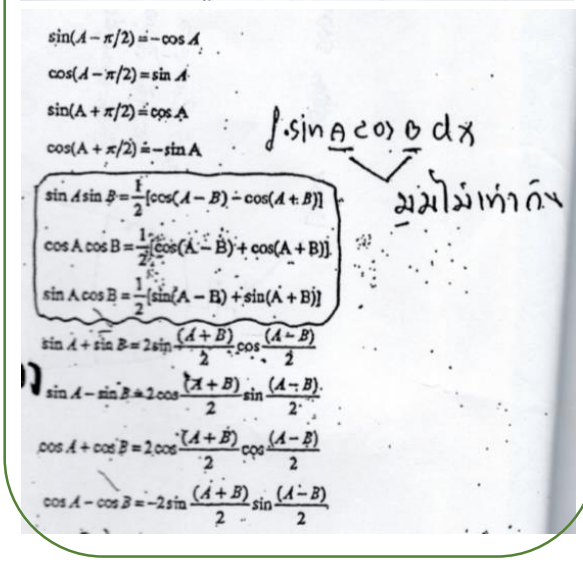
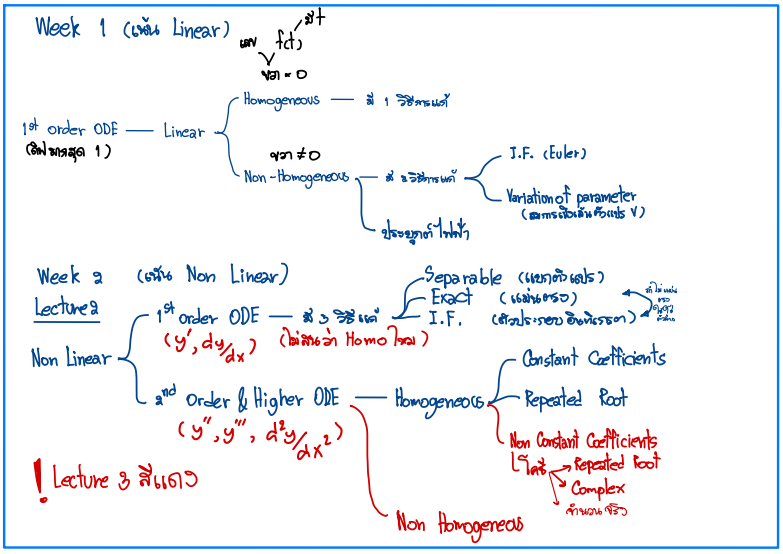
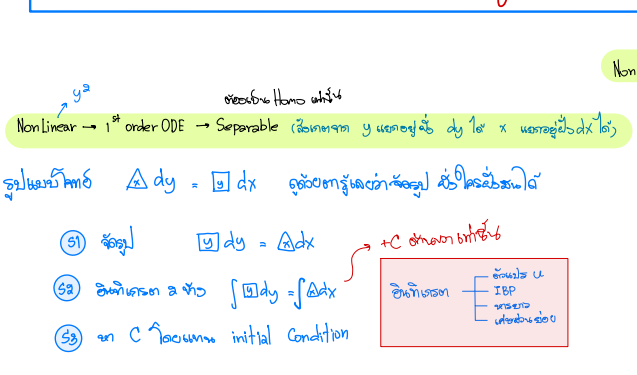
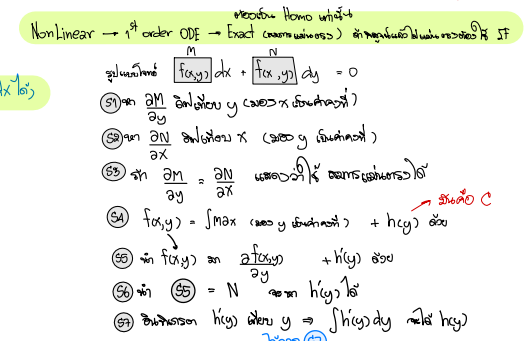

DERIVATIVE FORMULAE
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มจพ.
INTEGRAL FORMULAE
Basic Forms
Hyperbolic Forms

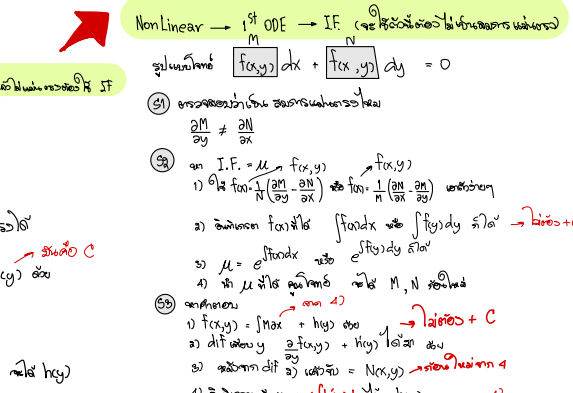


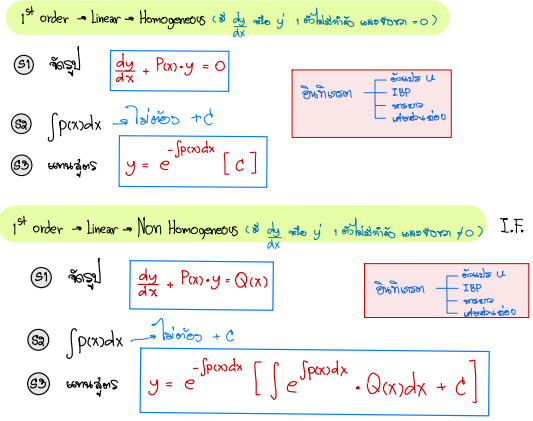



Week 1 (เส้น Linear)
1st order ODE — Linear
Homogeneous — มี 1 วิธีหาแท้
Non-Homogeneous — มี 2 วิธีหาแท้
I.F. (Euler)
Variation of parameter
Week 2 (เน้น Non Linear)
Lecture 2
Non Linear
1st order ODE — มี 3 วิธีแท้
Separable (แยกตัวแปร)
Exact (แม่นตรง)
I.F.
2nd Order & Higher ODE — Homogeneous
Constant Coefficients
Repeated Root
Non Constant Coefficients
Complex
Non Homogeneous
Lecture 3 สีแดง


NonLinear → 1st order ODE → Separable
รูปแบบทั่วไป
ขั้นตอน


NonLinear → 1st order ODE → Exact
รูปแบบทั่วไป
ขั้นตอน


NonLinear → 1st ODE → I.F.
รูปแบบทั่วไป
ขั้นตอน


1st order → Linear → Homogeneous
1st order → Linear → Non Homogeneous
1st order → Linear → Nonhomogeneous
Variation of parameter

Non Linear → 2^{nd} order ODE & Higher ODE → Homogeneous → Constant Coefficients / Repeated Root

รูปแบบโจทย์ $y'' - y' - 6y = 0$

(S1) จัดรูป (ตัวหน้าสุดห้ามมี สปส) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0$

(S2) ใช้สมการช่วยให้ λ ถ้า $y'' \to \lambda^2$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$

(S3) แก้หา λ → หารสังเคราะห์ / แยก factor

(S4) λ →
- แตกต่างกัน $(\lambda - a)$ → $y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + \dots + C_n e^{a_n x}$
- ซ้ำกัน $(\lambda - a)^2$ → $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots C_n x^{n-1}) e^{ax}$
- ติด i $\lambda = a \pm bi$ → $a_1 + b_1 i$, $a_1 - b_2 i$ → $y = C_1 e^{a_1 x}(\cos b_1 x + i \sin b_1 x) + C_2 e^{a_1 x}(\cos b_2 x + i \sin b_2 x)$
- ติด i + ซ้ำกัน $\lambda_1 = a \pm bi$, $\lambda_2 = a \pm bi$ → $a_1 + b_1 i$, $a_1 - b_2 i$; $a_1 + b_1 i$, $a_1 - b_2 i$

$$y = C_1 e^{a_1 x}(\cos b_1 x + i \sin b_1 x) + C_2 x e^{a_1 x}(\cos b_1 x + i \sin b_1 x) + C_3 e^{a_1 x}(\cos b_2 x + i \sin b_2 x) + C_4 x e^{a_1 x}(\cos b_2 x + i \sin b_2 x)$$

Non Linear → 2^{nd} Order & Higher ODE → Homogeneous → Non Constant Coefficients → โจทย์
- Real Root
- Repeat
- Complex

รูปแบบโจทย์ $x^2 y'' - 2xy' - 10y = 0$ กรณีนี้ $n = 2$

(สปส. ของ $f(x)$ เสมอ; $-2 \to C_1$, $-10 \to C_2$)

$x^{n} \frac{d^n y}{dx^n} + \dots$ ต้องเท่ากัน

(S1) หา λ โดยใช้สูตร $\lambda^2 - (1 - C_1)\lambda + C_2 = 0$

(S2) แก้หา λ แยก factor หรือ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(S3) λ ที่ได้ พบได้ 3 case (เอาแค่ λ ไปใส่คบ)

1) เลขไม่ซ้ำ

$$y(x) = Ax^{\lambda_1} + Bx^{\lambda_2}$$

2) เลขซ้ำ

$$y(x) = (A + B\ln x)x^{\lambda_1}$$

3) ติด i เป็น $a \pm bi$

$$y(x) = x^{a}[C\cos(b\ln x) + D\sin(b\ln x)]$$

ถ้า $n > 2$ เช่น $x^3 y''' - C_1 x^2 y'' - C_2 xy' - C_3 y = 0$

ต้องกำหนด $y = x^{\lambda}$

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$; $y'' = (\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}$; $y''' = (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda x^{\lambda-3}$

$y' = \lambda \frac{x^{\lambda}}{x}$; $y'' = (\lambda-1)\lambda \frac{x^{\lambda}}{x^2}$; $y''' = (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda \frac{x^{\lambda}}{x^3}$

$xy' = \lambda x^{\lambda}$; $x^2 y'' = (\lambda-1)\lambda x^{\lambda}$; $x^3 y''' = (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda x^{\lambda}$

แทนโจทย์ ! หา λ ต้องหารพหุนาม !

Non Linear → 2^{nd} order & Higher ODE → Non Homogeneous

(S1) หา y_h แบบ Homogeneous (Non Linear → 2^{nd} order ODE & Higher ODE → Homogeneous → Constant Coefficients / Repeated Root)

แปลง y' ต่างๆ เป็น λ จับ = 0 แบบ ... ยังจะติดค่า $C_1, C_2, \dots$

(S2) หา y_p (ถ้าหลัง = มีหลายพจน์ต้องคิดแยกกันนะ)

ถ้าข้างหลังเป็นเลขไม่ต้องสนใจนะ

f(x)	การสมมุติ y_p
e^{4x} (expo)	Ae^{4x} (1 ตัว)
sin 3x, cos 3x (ตรีโกณ)	A sin 3x + B cos 3x (2 ตัว)
x^3 (poly)	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (ลดลงเรื่อยเรื่อยถึง 1)
x^2 (poly)	$Ax^2 + Bx + C$ (ลดลงเรื่อยเรื่อยถึง 1)
x (poly)	Ax + B (ลดลงเรื่อยเรื่อยถึง 1)
เลข	A

1) แปลงจาก $f(x)$ เป็น y_p ตามตาราง
ถ้า y_p ที่แปลงซ้ำ y_h ต้องคูณ x (ห้ามซ้ำแม้แต่ตัวเดียว) ** *
1.1) y_p จะติด $Ax^2 + Bx \dots$
2) ดิฟจนเท่ากับดิฟสูงสุดของโจทย์
3) นำไปแทนโจทย์ (ถ้ามีหลายก้อนให้คิดเฉพาะก้อนที่ติด y_p)
4) ได้ค่า A, B, ... นำมาแทนใน y_p ใน 1.1)
5) ถ้ามีอีกก้อนให้คิด (S2) อีกรอบทำซ้ำๆจนได้ C, D, E

(S3) สรุปคำตอบ $y(x) = y_h + y_p$

2. Hyperbolic Functions (ใช้เหมือนตรีโกณปกติได้)

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$; $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$; $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$; $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

$\cosh x + \sinh x = e^x$; $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

$\sinh 0 = 0$
$\cosh 0 = 1$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \quad \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

ถ้า integrate เจอรูปแบบพิเศษ

1) $\int \frac{y}{y+2}$ ให้ +2, −2 ด้านบน

$\int \frac{y+2-2}{y+2} = \int \frac{y+2}{y+2}dy - \int \frac{2}{y+2}\frac{d(y+2)}{1}$

2) $\int \frac{y}{y+1}$ ให้ +1, −1 ด้านบน

$\int \frac{y+1-1}{y+1} = \int \frac{y+1}{y+1}dy - \int \frac{1}{y+1}\frac{(y+1)}{1}$

2) $\int \frac{1}{1-e^x}$ ให้คูณ e^{-x} บน, ล่าง

$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}\frac{d(1+e^{-x})}{-e^{-x}} = \int \frac{1}{1+e^{-x}}d(1+e^{-x}) \to \int \frac{1}{u}du$

3) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ ให้คูณ e^x บน, ล่าง

$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1^2}\frac{d(e^x)}{e^x}$ สูตร 20

4) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ไม่ต้องคูณ

$\int \frac{e^x}{1^2 + (e^x)^2}\frac{de^x}{e^x}$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1^2 - (x-1)^2}}\frac{d(x-1)}{1}$ สูตร 16

6) $\int \frac{1}{e^{-y} + 1}$ คูณ e^y บน, ล่าง $\Rightarrow \int \frac{e^y}{1 + e^y}\frac{d(1+e^y)}{e^y}$ → ดูสูตร $\int \frac{1}{u}du$

หารสังเคราะห์ (สามารถไปใช้กับ อินทิเกรต เศษส่วนย่อย)

กำลังเท่า / กำลังเท่า ; กำลังมาก / กำลังน้อย

$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$

	λ^2	$-\lambda$	-2	
$\lambda + 1$	λ^3	0	-3λ	-2
	λ^3	λ^2		
		$-\lambda^2$	-3λ	-2
		$-\lambda^2$	$-\lambda$	0
			-2λ	-2
			-2λ	-2
			0	0

$\therefore (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$e^{2\ln x} = x^2$

ประยุกต์ไฟฟ้า

มีแค่ 2 สูตร เท่านั้น $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$; $R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$

(S1) แทนค่าต่างๆที่เรารู้

(S2) จัดรูป นำ L หารตลอดจากได้สูตร L, I หรือ นำ R หารตลอดจากได้สูตร R, Q, C

$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}E(t)$ (สปส = 1, $P(t) = \frac{R}{L}$, $Q(t) = \frac{1}{L}E(t)$) หรือ $\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E(t)}{R}$ (สปส = 1, $P(t) = \frac{1}{RC}$, $Q(t) = \frac{E(t)}{R}$)

(S3) หา $\int P(t)dt$

(S4) $I(t) = e^{-\int P(t)dt}\left[\int e^{\int P(t)dt} \cdot Q(t)dt + C\right]$ หรือ $Q(t) = e^{-\int P(t)dt}\left[\int e^{\int P(t)dt} \cdot Q(t)dt + C\right]$

(S5) หาค่าตามโจทย์

Integrated By Part

L A P E T

เลือก u คือ $\ln \to \sin^{-1} \to \tan^{-1} \to x^n \to e^x \to \sin x, \cos x$ และ dv คือที่เหลือ

IBP $\int x^3 \ln x\,dx$

เลือก $u = \ln x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, $du = \frac{1}{x}dx$ | $dv = x^3$, $\int dv = \int x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^3 \ln x = \ln x\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \frac{x^4}{4}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$ #

IBP $\int e^{3x} x\,dx$

เลือก $u = x$, $\frac{du}{dx} = 1$, $du = dx$ | $dv = e^{3x}$, $\int dv = \int e^{3x}dx$, $\int dv = \int e^{3x}\frac{d(3x)}{3}$, $v = \frac{e^{3x}}{3}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int e^{3x} x\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\frac{d(3x)}{3} = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$ #

อินทิเกรตตัวแปร u
- ภายใต้ root
- ภายใต้กำลัง
- หลังตรีโกณ
- บน e

$\int e^{8x}dx = \int e^{8x}\frac{d(8x)}{8} = \frac{e^{8x}}{8} + C$ ($\int e^u du$ ✓)

$\int \frac{3x}{2\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{3x}{2\sqrt{x^2-4}}\frac{d(x^2-4)}{2x} = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2^2}}d(x^2-2^2)$ ($\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$)

$= \frac{3}{4}\int (x^2-2^2)^{-1/2}d(x^2-2^2) = \frac{3}{4}\frac{(x^2-2^2)^{1/2}}{(1/2)}$

$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\frac{d(1+\cos x)}{-\sin x}$ ($\int \frac{1}{u}du$) $= -\ln|1+\cos x|$ #

ดิฟตัวแปร u (ดิฟเหมือนเดิม เพิ่มดิฟฐาน)

$\frac{de^{3x}}{dx} = e^{3x}\frac{d(3x)}{dx} = 3e^{3x}$

$\frac{d\sin 2x}{dx} = \cos 2x\frac{d(2x)}{dx} = 2\cos 2x$

$\frac{d}{dx}\sin(2x-1) = \cos(2x-1)\frac{d}{dx}(2x-1) = 2\cos(2x-1)$

$\frac{d}{dx}(3x^2+3)^2 = 2(3x^2+3)^1\frac{d}{dx}(3x^2+3) = 2(3x^2+3)(6x)$

อินทิเกรต เศษส่วนย่อย

$\int \frac{2x+1}{(1-x)(2x^2+1)}dx$

$\frac{2x+1}{(1-x)(2x^2+1)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx+C}{(2x^2+1)}$

$2x + 1 = \frac{A(1-x)(2x^2+1)}{(1-x)} + \frac{[Bx+C](1-x)(2x^2+1)}{(2x^2+1)}$

$2x+1 = A(2x^2+1) + Bx + C - Bx^2 - Cx$

$2x+1 = 2x^2A + A + Bx - Cx - Bx^2 + C$

$2x+1 = (2A-B)x^2 + (B-C)x + A + C$

$A + C = 1$; $C = 1 - A$; $C = 1 - \frac{B}{2}$; $C = 1 - \frac{\frac{2}{3}}{2}$; $C = \frac{1}{3}$ (as written)

$B - C = 2$; $B - (1 - \frac{B}{2}) = 2$; $B - 1 + \frac{B}{2} = 2$; $2B - 2 + B = 4$; $3B - 2 = 4$; $3B = 2$; $B = \frac{2}{3}$

$2A - B = 0$; $2A = B$; $A = \frac{B}{2}$; $A = \frac{2/3}{2}$; $A = \frac{1}{3}$

1) ถ้า Q(x) แยกเป็นตัวประกอบเชิงเส้นไม่ซ้ำกัน
สมมติ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$

2) ถ้า Q(x) แยกเป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำกัน
สมมติ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)x^3(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{(x+1)} + \frac{F}{(x+1)^2} + \frac{G}{(x+1)^3}$

3) ถ้า Q(x) แยกเป็นตัวประกอบกำลังสองเชิงเส้นไม่ซ้ำกัน
สมมติ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

4) ถ้า Q(x) แยกเป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำกัน
สมมติ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}$