

半挂车防侧翻轨迹规划算法 CCST3ARP

戚笑景¹, 钟薇², 高博麟¹

(1.清华大学车辆与运载学院 北京 100084;

2.清华大学智能绿色车辆与交通国家重点实验室 北京 100084)

1 引言

目前尚未有针对半挂式液罐车的轨迹规划算法,尤其是考虑防侧翻的半挂式车辆轨迹规划方法。其主要面临的挑战包括挂车与牵引车的不同轨导致的碰撞风险、规划不直接关注侧翻指标导致的侧翻风险、时空解耦规划导致的非最优风险、对周车意图不确定性考虑不足导致的碰撞风险等。

2 半挂液罐车运动-动力学耦合建模

用于规划器的建模设计为更加精确的非线性模型,因为在大曲率转向等情况下,线性模型无法很好预测车辆轨迹动态及牵引车挂车轨迹的差异情况。对于半挂车低速泊车场景下的规划方法普遍采用运动学模型描述车辆轨迹动态。半挂车的运行学模型如下

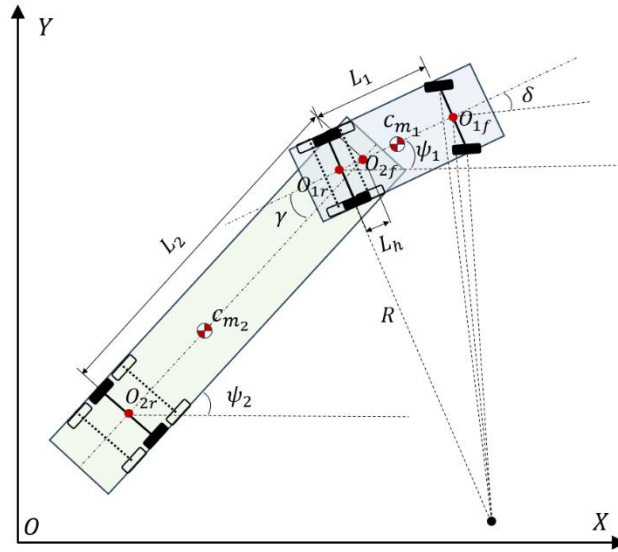


图 1 半挂车运动学示意图

假设侧轴无滑移,则可以认为各个车轴中点的轴向速度为 0:

$$\begin{cases} \dot{X}_{1r} \sin \psi_1 - \dot{Y}_{1r} \cos \psi_1 = 0 \\ \dot{X}_{1f} \sin(\psi_1 + \delta) - \dot{Y}_{1f} \cos(\psi_1 + \delta) = 0 \\ \dot{X}_{2r} \sin \psi_2 - \dot{Y}_{2r} \cos \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

首先是空间位置关系,我们用下标 1, 2 表示牵引车或挂车,用下标 f,r 表示前轴或后轴,对于挂车来说其前轴就是第五轮,则牵引车前轴中心(X_{1f}, Y_{1f})与后轴中心(X_{1r}, Y_{1r})的

关系是：

$$\begin{cases} X_{1f} = X_{1r} + L_1 \cos \psi_1 \\ Y_{1f} = Y_{1r} + L_1 \sin \psi_1 \end{cases} \quad (2)$$

第五轮中心 (X_{2f}, Y_{2f}) 与牵引车后轴中心 (X_{1r}, Y_{1r}) 的关系为

$$\begin{cases} X_{2f} = X_{1r} + L_h \cos \psi_1 \\ Y_{2f} = Y_{1r} + L_h \sin \psi_1 \end{cases} \quad (3)$$

L_h 即牵引车等效后轴到第五轮的距离。

挂车等效轴中心与牵引车等效后轴中心之间的关系为

$$\begin{cases} X_{2r} = X_{1r} + L_h \cos \psi_1 - L_2 \cos \psi_2 \\ Y_{2r} = Y_{1r} + L_h \sin \psi_1 - L_2 \sin \psi_2 \end{cases} \quad (4)$$

挂车等效轴中心与牵引车后轴之间的距离

则牵引车前轴中心的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_{1f} = v_{1x} \cos \psi_1 - L_1 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ \dot{Y}_{1f} = v_{1x} \sin \psi_1 + L_1 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \end{cases} \quad (5)$$

牵引车等效后轴的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_{1r} = v_{1x} \cos \psi_1 \\ \dot{Y}_{1r} = v_{1x} \sin \psi_1 \end{cases} \quad (6)$$

将式（5）带入式（1）中化简，即可得到牵引车的航向角运动学方程为

$$\dot{\psi}_1 = \frac{v_{1x}}{L_1} \tan \delta \quad (7)$$

挂车等效后轴的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_{2r} = v_{1x} \cos \psi_1 - L_h \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + L_2 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ \dot{Y}_{2r} = v_{1x} \sin \psi_1 + L_h \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - L_2 \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \end{cases} \quad (8)$$

将式（8）带入（1）化简，即可得到挂车的航向角运动学方程为

$$\dot{\psi}_2 = \frac{v_{1x}}{L_2} \left(\frac{L_h}{L_1} \tan \delta \cos \gamma + \sin \gamma \right) \quad (9)$$

其中定义铰接角 $\gamma = \psi_1 - \psi_2$ 。

综上所述，得到铰接点位于牵引车等效后轴中点前侧的半挂式车辆运动学模型

详细推导过程如下:

示例图中半挂车进行匀速圆周运动, 第五轮是牵引车与挂车的速度重合点, 以速度 v_h 运动, v_h 与牵引车纵向成 δ' 夹角, 则根据圆周运动的特性, 各点圆周运动速度之比等于各点到圆心 O 的距离之比。

$$\frac{R'}{R} = \frac{v_h}{v_{1x}} = \cos \delta' \quad (12)$$

其中根据牵引车的运动学可知 $\tan \delta = \frac{L}{R}$, 故

$$\delta' = \arctan\left(\frac{L_h}{L_1} \tan \delta\right) = \arctan\left(\frac{L_h \dot{\psi}_1}{v_{1x}}\right) \quad (13)$$

利用三角恒等式 $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 令 $x = \frac{L_h}{L_1} \tan \delta$, 则

$$v_h = \frac{v_{1x}}{\cos \delta'} = v_{1x} \sqrt{1 + \left(\frac{L_h}{L_1} \tan \delta\right)^2} \quad (14)$$

接下来就可以解耦问题, 只关注带有动力学响应的挂车部分, 而第五轮速度已经由上式求得了。挂车的动力学特性主要反映了轮胎的侧偏特性导致的轨迹外偏, 而轮胎选用线性轮胎模型

$$F_3^y = k_3 \alpha_3 \quad (15)$$

其中 k_3 是侧偏刚度, α_3 为挂车等效后轴侧偏角。由于刚体沿着某一直线的速度一定相同, 故将第五轮的已知速度 v_h 沿着挂车纵向与横向分解

$$\begin{cases} v_h^x = v_h \cos(\delta' + \gamma) \\ v_h^y = v_h \sin(\delta' + \gamma) \end{cases} \quad (16)$$

挂车等效后轴的速度沿着挂车纵向的分量也为 v_h^x 。而横向速度可以用该点的牵连速度分量 v_h^y 与相对运动速度分量表示, 则可以表示挂车等效后轴的侧偏角为

$$\alpha_3 \approx \tan \alpha_3 = \frac{v_h \sin(\delta' + \gamma) - \dot{\psi}_2 L_2}{v_h \cos(\delta' + \gamma)} = \tan(\delta' + \gamma) - \frac{\dot{\psi}_2 L_2}{v_h \cos(\delta' + \gamma)} \quad (17)$$

接下来, 对挂车的受力情况进行分析, 可知挂车在第五轮受到牵引车的作用力、质心处由于圆周运动受到达朗贝尔力 F_{m2} 、后轴受到侧向力 F_3^y 与纵向力 F_3^x , 这些力合力为零。

$$F_3^y \cos \theta_1 + F_3^x \sin \theta_1 \approx k_3 \alpha_3 \cos \theta_1 = \frac{e}{L_2} F_{m2} = \frac{em_2 v_2^2}{L_2 x} \approx \frac{em_2 v_1^2}{L_2 L_1} \tan \delta \left(1 - \frac{e}{L_1} \tan \delta \sin \gamma\right) \quad (18)$$

最后一步的近似是基于

$$\frac{v_2}{v_{1x}} = \frac{x}{R} \approx \frac{(R - e \sin \gamma)}{R} = \left(1 - \frac{e}{L_1} \tan \delta \sin \gamma\right) \quad (19)$$

基于式（18）进一步化简

$$\begin{aligned}
& k_3 \tan(\delta' + \gamma) - \frac{\dot{\psi}_2 L_2 k_3}{v_1 \cos(\delta' + \gamma)} \approx \frac{em_2 v_1^2}{L_2 L_1} \tan \delta \\
& \Leftrightarrow -\tan(\delta' + \gamma) + \frac{\dot{\psi}_2 L_2}{v_1 \cos(\delta' + \gamma)} = -\frac{em_2 v_1^2}{L_2 L_1 k_3} \tan \delta \\
& \Leftrightarrow \frac{\dot{\psi}_2 L_2}{v_1} = -\frac{em_2 v_1^2}{L_2 L_1 k_3} \tan \delta \cos(\delta' + \gamma) + \sin(\delta' + \gamma) \\
& \Leftrightarrow \dot{\psi}_2 = \frac{v_1}{L_2} \left(-\frac{em_2 v_1^2}{L_2 L_1 k_3} \tan \delta \cos(\delta' + \gamma) + \sin(\delta' + \gamma) \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

将其与式（10）进行比较， $\dot{\psi}_2 = \frac{v_{1x}}{L_2} \left(\frac{L_h}{L_1} \tan \delta \cos \gamma + \sin \gamma \right)$ ，得到修正后的横摆角速度为

$$\dot{\psi}_2 = K_v \frac{v_1}{L_2} \left(\frac{L_h}{L_1} \tan \delta \cos \gamma + \sin \gamma \right), K_v = \left(1 - \frac{m_2 v_1^2 e}{L_1 L_2 k_3} \right) \quad (20)$$

其中因为侧偏刚度 k_3 为负值，故 $K_v \geq 1$ ，当 $v_1 \rightarrow 0, K_v \rightarrow 1$ ，当 $v_1 \rightarrow \infty, K_v \rightarrow \infty$ ，以此体现随着侧向加速度的增加，滑移率逐渐增加的情况。

规划器在考虑牵引车与挂车避障的同时需要考虑车辆的侧翻动态，但是又需要避免模型过于复杂，故采用线性 LTR 模型来表达车辆的侧倾动态。线性 LTR 模型的输入为牵引车后轴与挂车等效后轴侧向加速度的质量加权求和。

$$\begin{aligned}
a_y &= \frac{v_{1x}^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{L_1} \tan \delta + \frac{m_2}{L_2} \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \\
&= \frac{m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2} \dot{\psi}_1 + \frac{m_2 v_{1x}^2}{L_2 (m_1 + m_2)} \cos^2 \gamma \sin \gamma \quad (21)
\end{aligned}$$

经过处理后的加速度直接经过三阶线性环节即可得到 LTR。三阶线性环节设计如下：

设状态量 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ，输入量 $u = [a_y \ \dot{\gamma} \ \gamma]^T$ ，输出是 $y = \text{LTR}$ 则

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0] \quad (23)$$

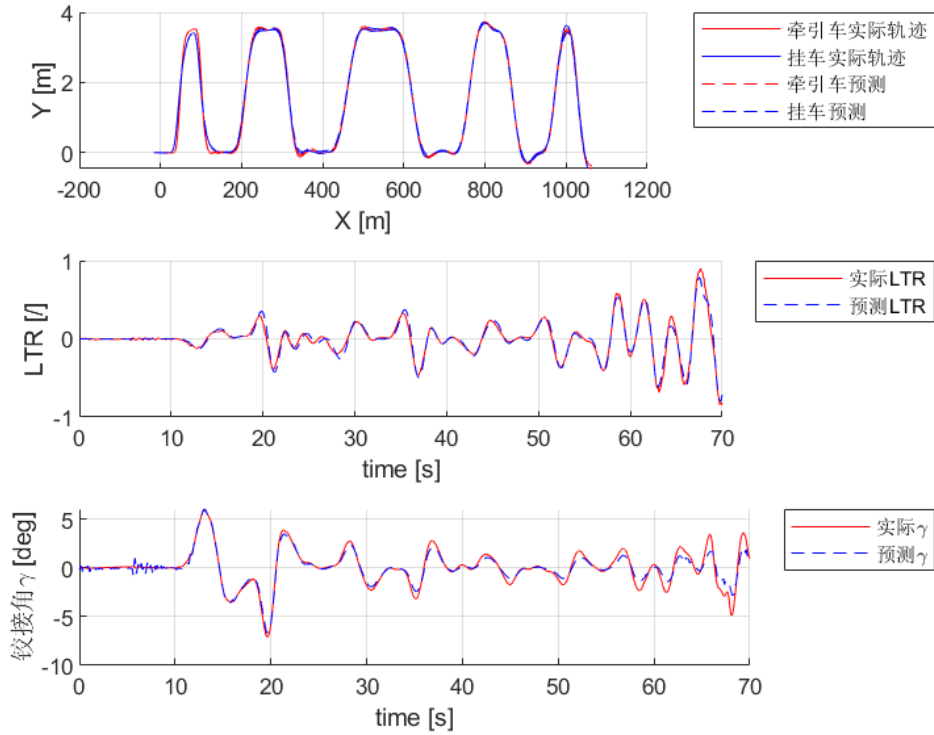
需要通过系统辨识来获得。选择三阶系统的原因是其刚好可以表达描述车辆 LTR 动力学所需的信息，且不会很复杂。一共 9 个参数需要识别，通过包含低速、中速、高速小曲率和低速大曲率行驶的 LTR 估计数据即可得到。

半挂车液罐车的运动-动力学耦合模型整体可以表示为：

$$\begin{cases}
\dot{X}_{1r} = v_{1x} \cos \psi_1 \\
\dot{Y}_{1r} = v_{1x} \sin \psi_1 \\
\dot{\psi}_1 = \frac{v_{1x}}{L_1} \tan \delta \\
\dot{\gamma} = \dot{\psi}_1 - \frac{K_v}{L_2} (L_h \dot{\psi}_1 \cos \gamma + v_{1x} \sin \gamma), K_v = \left(1 - \frac{m_2 v_{1x}^2 e}{L_1 L_2 k_3} \right) \\
\dot{L} = L_a + c_{11} v_{1x} \dot{\psi}_1 + c_{21} v_{1x}^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma + b_{31} \gamma, \quad c_{1i} = \frac{b_{1i} m_1}{m_1 + m_2}, c_{2i} = \frac{b_{1i} m_2}{L_2 (m_1 + m_2)} \\
\dot{L}_a = L_b + \left(c_{12} v_{1x} + b_{22} - \frac{b_{22} L_h}{L_2} \cos \gamma \right) \dot{\psi}_1 + \left(c_{22} v_{1x}^2 \cos^2 \gamma - \frac{b_{22} v_{1x}}{L_2} \right) \sin \gamma + b_{32} \gamma \\
\dot{L}_b = a_1 L + a_2 L_a + a_3 L_b + c_{13} v_{1x} \dot{\psi}_1 + c_{23} v_{1x}^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma
\end{cases} \quad (24)$$

对于我使用的半挂式液罐车构型, $L_h = 0$, 第五轮设计在牵引车两个后轴正中间, 则上述方程可以进一步简化为下式用于规划器。而在进行观测时可以采用完整模型以提高精度。

$$\begin{cases}
\dot{X}_{1r} = v_{1x} \cos \psi_1 \\
\dot{Y}_{1r} = v_{1x} \sin \psi_1 \\
\dot{\psi}_1 = \frac{v_{1x}}{L_1} \tan \delta \\
\dot{\gamma} = \dot{\psi}_1 - \frac{K_v}{L_2} v_{1x} \sin \gamma, K_v = \left(1 - \frac{m_2 v_{1x}^2 e}{L_1 L_2 k_3} \right) \\
\dot{L} = L_a + c_{11} v_{1x} \dot{\psi}_1 + b_{31} \gamma, \quad c_{1i} = \frac{b_{1i} m_1}{m_1 + m_2}, c_{2i} = \frac{b_{1i} m_2}{L_2 (m_1 + m_2)} \\
\dot{L}_a = L_b + (c_{12} v_{1x} + b_{22}) \dot{\psi}_1 + b_{32} \gamma \\
\dot{L}_b = a_1 L + a_2 L_a + a_3 L_b + c_{13} v_{1x} \dot{\psi}_1
\end{cases} \quad (25)$$



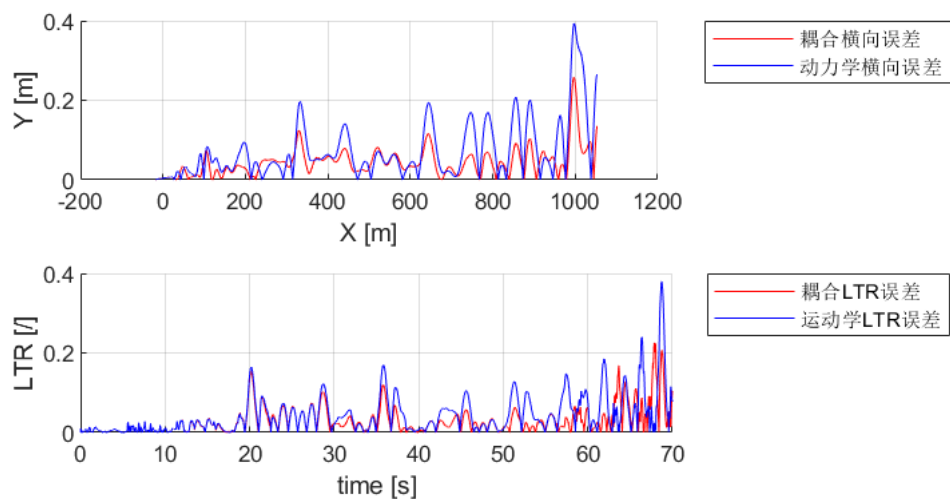
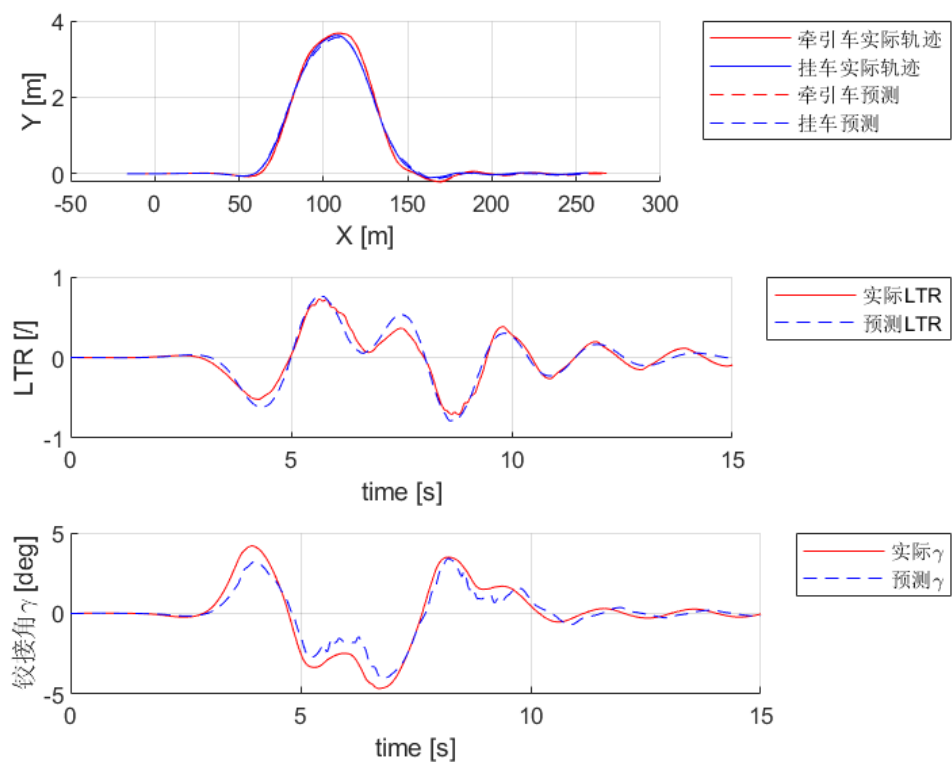


图 3 识别好参数的模型在 5Pins 工况的测试效果



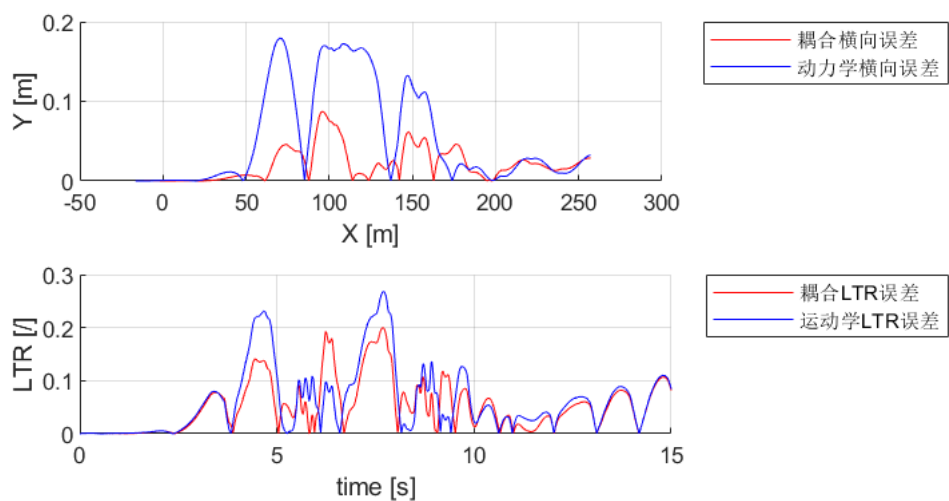
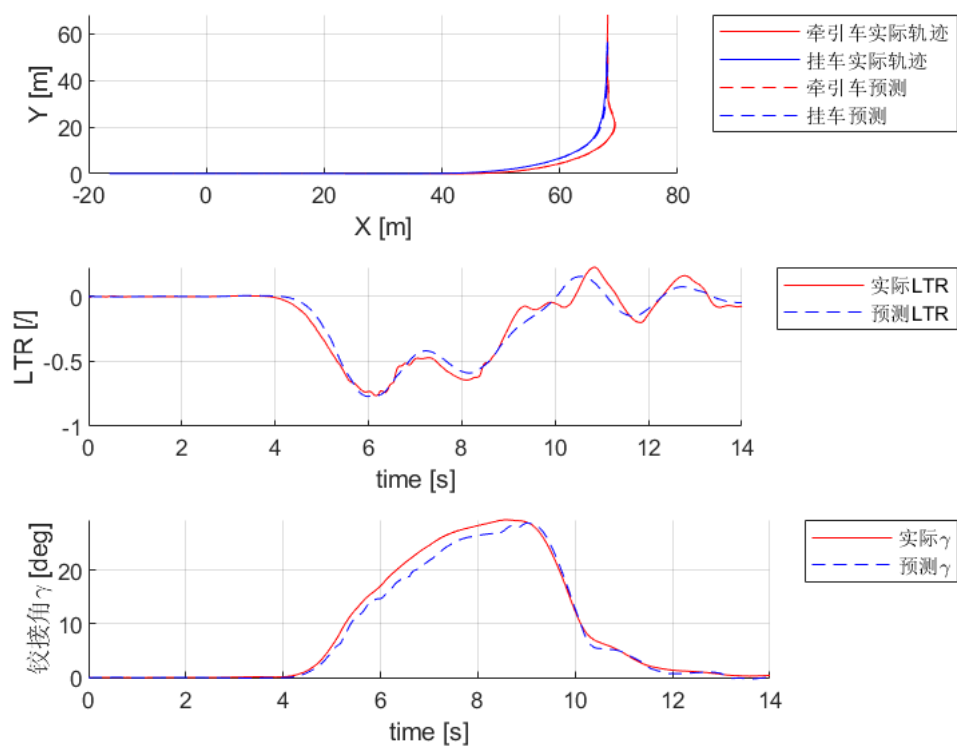


图 4 识别好参数的模型在短距双移线工况的测试效果



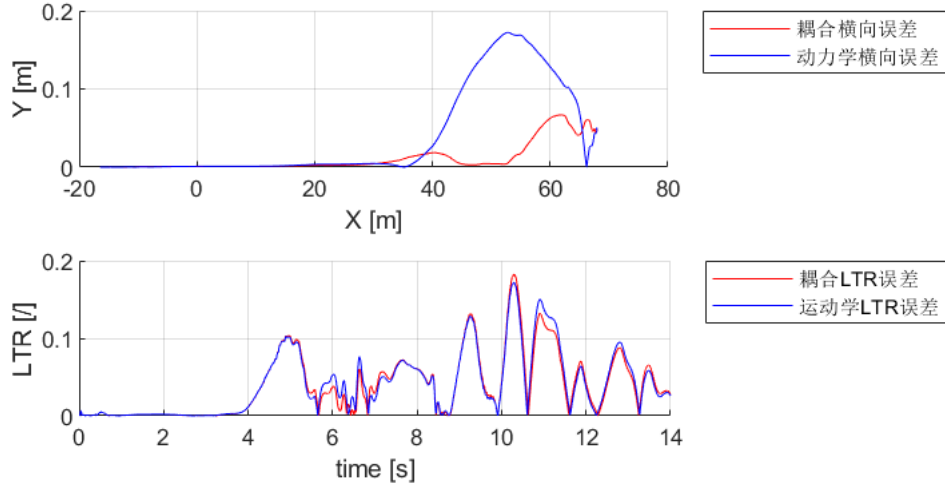


图 5 识别好参数的模型在左转弯工况的测试效果

3 规划器所用公式推导

下面针对 iLQR 所需要的模型进行推导

$$\begin{cases} \dot{X}_{1r} = v_{1x} \cos \psi_1 \\ \dot{Y}_{1r} = v_{1x} \sin \psi_1 \\ \dot{v}_{1x} = a \\ \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_1 \\ \dot{\gamma} = \dot{\psi}_1 - \left(\frac{v_{1x}}{L_2} + k_v v_{1x}^3 \right) \sin \gamma, \quad k_v = -\frac{m_2 e}{L_1 L_2^2 k_3} \\ \dot{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_a + c_{11} v_{1x} \dot{\psi}_1 + b_{31} \gamma, \quad c_{1i} = \frac{b_{1i} m_1}{m_1 + m_2}, c_{2i} = \frac{b_{1i} m_2}{L_2 (m_1 + m_2)} \\ \dot{\mathcal{L}}_a = \mathcal{L}_b + (c_{12} v_{1x} + b_{22}) \dot{\psi}_1 + b_{32} \gamma \\ \dot{\mathcal{L}}_b = a_1 \mathcal{L} + a_2 \mathcal{L}_a + a_3 \mathcal{L}_b + c_{13} v_{1x} \dot{\psi}_1 \end{cases} \quad (25)$$

对 $\dot{x} = f(x, u)$ 求 Jacobian 矩阵

$$\begin{aligned} x &= [X_{1r} \quad Y_{1r} \quad v_{1x} \quad \psi_1 \quad \gamma \quad \mathcal{L} \quad \mathcal{L}_a \quad \mathcal{L}_b]^T \\ A_k &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x_k, u_k} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \psi_1 & -\left(v_{1x} + \frac{1}{2} a T_s\right) \sin \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \psi_1 & \left(v_{1x} + \frac{1}{2} a T_s\right) \cos \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L_2} + 3k_v v_{1x}^2\right) \sin \gamma & 0 & -\left(\frac{v_{1x}}{L_2} + k_v v_{1x}^3\right) \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} \dot{\psi}_1 & 0 & b_{31} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} \dot{\psi}_1 & 0 & b_{32} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_{13} \dot{\psi}_1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (26) \end{aligned}$$

$$B_k = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_k, u_k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s \cos \psi_1 & 0 \\ \frac{1}{2} T_s \sin \psi_1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & c_{11} v_{1x} \\ 0 & c_{12} v_{1x} + b_{22} \\ 0 & c_{13} v_{1x} \end{bmatrix} \quad (27)$$

我采用了 contingency 规划的思想，由于半挂液罐车行驶速度较慢，所以之考虑 2 种预测：最大概率的场景预测，以及满足一定概率约束的场景中最危险的场景预测。我这里需要设计一个算法，即最危险场景的评估，并基于周车概率做出决策，哪个场景最为危险。

我的核心思想在于，在满足最危险场景规划安全需求的情况下尽可能提升理想场景中的效率。通过调整这两组轨迹之间的分叉点位置可以设置不同的保守程度，分叉点在预测时域内越靠后表明决策越保守，而在第 0 个时域分叉表明理想情况的规划完全不受最坏情况影响，则做出的决策是最激进的。

先规划非理想情况作为应急预案，当其收敛达到一定要求时开始优化理想情况，并同时继续优化非理想情况。增加不对等梯度，大小循环：当内层策略不包含场景一致性的惩罚项的梯度较大时，增加理想情况对靠近非理想情况的惩罚；否则增加危险情况靠近理想情况的惩罚，减小另一方的惩罚。当达到平衡态时，结束优化。