计算几何基础一

郭炼

哈尔滨工业大学
计算学部

2020 年 8 月 18 号

哈爾濱工業大學

目录

计算几何简介

计算几何是使用计算机来处理几何问题。它处理的并不是大家一般见到的几何证明的 ~~（虽然计算机可以用来证明几何命题）~~，而是解决一些更加复杂的几何相关问题。

在此次集训中，重点是二维计算几何，我们将从计算几何入门到放弃。推荐一下kuangbin 的计算几何模板，但是大家不要太依赖他人的模板（参考 2019 南京二分图带权匹配“惨案”）。

推荐一个电科的视频【算法讲堂】【电子科技大学】【ACM】计算几何基础。

基础概念

我们在竞赛中一般使用的直角坐标系，有兴趣的同学可以自学极坐标相关的部分。

- 点/向量
- 线(直线、射线与线段)
- 多边形(简单多边形，凸包)
- 圆

注意

在计算几何中，我们会进行大量的浮点数运算。由于浮点数的误差，我们在进行比较是需要额外判断。

```
typedef double db; //亦可使用 long double
const db EPS = 1e-9;
int sign(db x) { return fabs(x) < EPS ? 0 : (x < 0 ? -1 : 1); }
int cmp(db x, db y) { return sign(x - y); }
```

点/向量

每一个点都可以用一个从原点到它的向量表示，所以点和向量的表示方式相同。

```
class Vector {
  db x, y;
  Vector(db x = 0, db y = 0) : x(x), y(y) {}
};
typedef Vector Point;
```

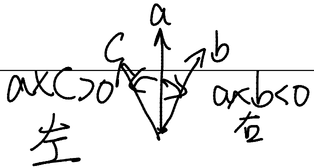
向量的基本操作包含加减、标量乘(除)法、点积和叉积以及一些其他的运算。

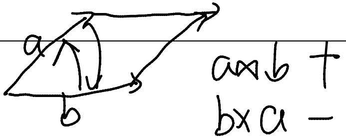
点积

点积：即 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos\theta$，高中知识告诉我们其代数运算为 $a.x \times b.x + a.y \times b.y$。利用点积，我们可以计算两个向量间的夹角。

```
db dot(Vector a, Vector b) { return a.x * b.x + a.y * b.y; }
db angle(Vector a, Vector b) {
  return acos(dot(a, b) / length(a) / length(b));
}
```

叉积





叉积：即 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin\theta$，高中知识告诉我们其代数运算为 $a.x \times b.y - a.y \times b.x$。其几何意义表示这两个向量形成的有向平行四边形的面积（逆时针为正），所以我们可以利用叉积求出多边形（如三角形）的面积。

```
db cross(Vector a, Vector b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; }
db area(Point a, Point b, Point c) {
  return 0.5 * fabs(cross(b - a, c - a));
}
```

旋转

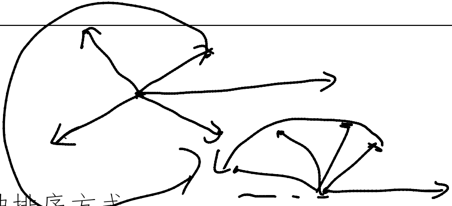
旋转：利用欧拉公式（当然有其他方法），我们可以得到将向量进行旋转（逆时针为正）。

设 $\vec{x} = (x, y) = Ae^{i\alpha}$，旋转角度为 β。

$$
\begin{aligned}
\vec{x}' &= Ae^{i(\alpha+\beta)} \\
&= A(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) \\
&= A(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)) \\
&= (x\cos(\beta) - y\sin(\beta), x\sin(\beta) + y\cos(\beta))
\end{aligned}
$$

```
Vector rotate(Vector x, db a) {
  return Vector(x.x * cos(a) - x.y * sin(a), x.x * sin(a) + x.y *
       cos(a));
}
```

排序

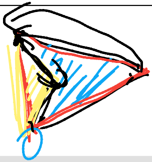


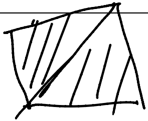
- 对于点，一般有两种排序方式。
- 按水平排序和极角排序。
- 水平排序是将点 x, y 为第一第二关键字排序。
- 极角排序是将点按照以某个点为原点的极坐标极角排序。

多边形

$+ S_{黄+蓝}$

$- S_{黄}$





多边形

给定一个 n 边形，求出多边形的面积。

$S_{蓝}$

多边形

多边形

给定一个 n 边形，求出多边形的面积。

- 考虑向量积的模的几何意义，我们可以利用向量积完成。

多边形

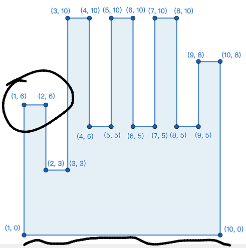
多边形

给定一个 n 边形，求出多边形的面积。

- 考虑向量积的模的几何意义，我们可以利用向量积完成。
- $S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \times p_{(i+1) \bmod n+1} \right|$。

Operation Love

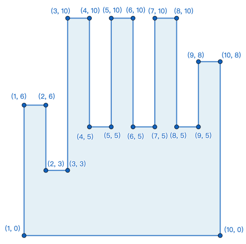
牛客多校 2020 Operation Love



左图为某机器人右手手印的形状，左手为右手的对称图形，现在给你一个机器人手印（可能经过平移及旋转），请判断是左手还右手（保证一定是其中一只手）。

Operation Love

牛客多校 2020 Operation Love

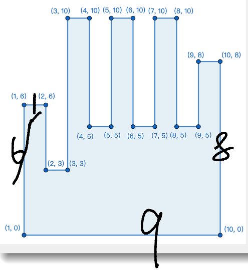


左图为某机器人右手手印的形状，左手为右手的对称图形，现在给你一个机器人手印（可能经过平移及旋转），请判断是左手还右手（保证一定是其中一只手）。

- 若是做多边形匹配也可以，但是很麻烦。

Operation Love

牛客多校 2020 Operation Love

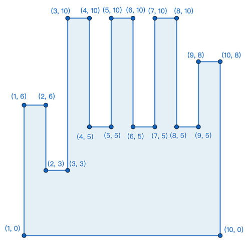


左图为某机器人右手手印的形状，左手为右手的对称图形，现在给你一个机器人手印（可能经过平移及旋转），请判断是左手还右手（保证一定是其中一只手）。 6, 1

- 若是做多边形匹配也可以，但是很麻烦。
- 此题保证输入只可能是题目里的左手印或右手印，于是我们可以先把多边形的点转为逆时针顺序。

Operation Love

牛客多校 2020 Operation Love



左图为某机器人右手手印的形状，左手为右手的对称图形，现在给你一个机器人手印（可能经过平移及旋转），请判断是左手还右手（保证一定是其中一只手）。

- 若是做多边形匹配也可以，但是很麻烦。
- 此题保证输入只可能是题目里的左手印或右手印，于是我们可以先把多边形的点转为逆时针顺序。
- 然后根据两个相邻的线段来判断左右手（如 6 和 1）。

Triangle Counting

USACO 2010 OPEN Triangle Counting

给定上 n 个点，求能构成的包含原点的三角形个数。
$n \leq 10^5$

Triangle Counting

USACO 2010 OPEN Triangle Counting

给定上 n 个点，求能构成的包含原点的三角形个数。
$n \leq 10^5$

- 按原点作极角排序。

Triangle Counting

USACO 2010 OPEN Triangle Counting

给定上 n 个点，求能构成的包含原点的三角形个数。
$n \le 10^5$

- 按原点作极角排序。
- 考虑问题的补集。

Triangle Counting

USACO 2010 OPEN Triangle Counting

给定上 n 个点，求能构成的包含原点的三角形个数。
$n \le 10^5$

- 按原点作极角排序。
- 考虑问题的补集。
- 对于一个点和原点构成的直线，如果选择这个点和直线一侧的两个点就可以构成不含原点的三角形。

Triangle Counting

USACO 2010 OPEN Triangle Counting

给定上 n 个点，求能构成的包含原点的三角形个数。
$n \leq 10^5$

- 按原点作极角排序。
- 考虑问题的补集。
- 对于一个点和原点构成的直线，如果选择这个点和直线一侧的两个点就可以构成不含原点的三角形。
- 使用双指针维护一个半圈。

Rikka with Triangles

ICPC Beijing Regional 2018 J Rikka with Triangles

给定 n 个点，求锐角三角形的面积。
$n \le 2000$，可能存在三点共线。

Rikka with Triangles

ICPC Beijing Regional 2018 J Rikka with Triangles

给定 n 个点，求锐角三角形的面积。
$n \le 2000$，可能存在三点共线。

- 枚举一个点，将其他点按照极角排序。

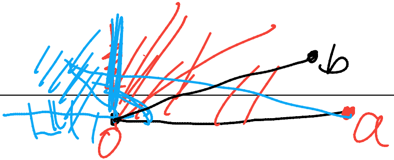
Rikka with Triangles

ICPC Beijing Regional 2018 J Rikka with Triangles

给定 n 个点，求锐角三角形的面积。
$n \leq 2000$，可能存在三点共线。

- 枚举一个点，将其他点按照极角排序。
- 如果剩下两个点的极角差为锐角，贡献为 1，直角和钝角贡献为 -2，最后答案除 3。

Rikka with Triangles



ICPC Beijing Regional 2018 J Rikka with Triangles

给定 n 个点，求锐角三角形的面积。
$n \leq 2000$，可能存在三点共线。

- 枚举一个点，将其他点按照极角排序。
- 如果剩下两个点的极角差为锐角，贡献为 1，直角和钝角贡献为 -2，最后答案除 3。
- 再枚举使用双指针维护区间，我们只维护一个锐角和钝角的坐标和就可以算出面积。

$X_a y - X y_a$

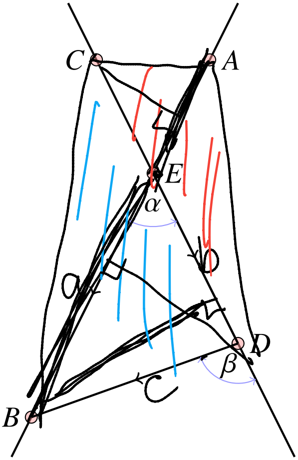
线

- 线包含两种表示方式:解析式和向量式。
- 解析式需要考虑考虑特殊情况,而且一般需要进行较复杂的运算,一般不用。
- 向量式是记录一个起点和一个方向向量,更容易计算(常用于表示直线的射线)。
- 也可以记录线上的两个点(本质相同,此法常用于表示线段)。

判断直线平行

计算方向向量的叉积，判断是否为 0 即可。需要注意共线的情况。

求直线的交点



- 设 AB 的方向向量为 a, CD 的方向向量为 b, BD 的方向向量为 c
  $|a| = |b| = |c| = 1$。
- 由左图可知, $|a \times b| = |a||b| \sin \alpha$, $|c \times b| = |c||b| \sin \beta$。
- 所以有 $T = \frac{|c \times b|}{|a \times b|} = \frac{|c| \sin \beta}{|a| \sin \alpha}$。
- 又有 $|BE| = |\frac{|DB| \sin \beta}{\sin \alpha}|$。
- 根据 sin 符号我们可以得出
  $\vec{BE} = Ta$
- 亦可以从面积比值的角度推导出同样的结论。

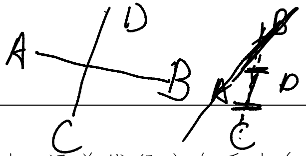
点到直线的垂足

- $(x, y) \cdot (y, -x) = 0$，所以 $(x, y) \perp (y, -x)$。
- 所以现在的问题又是求两条直线的交点。
- 利用此，我们还可以得到一个点关于直线的对称点。

点到直线的距离

- 我们可以计算点到垂足的距离。
- 更简单的方式是利用 $h = S/l$，只用一个叉积。
- 浮点数的运算次数要减少，更要减少除法，减少误差。

判断线段相交



我们以一条线段的一端点为起点，沿着线段方向看去（一条射线）。如果另一线段两端点分别在这一线段的两侧，那么线段可能相交（也可能在线段外），否则不可能相交。对另一线段采用相同方法就可判断出是否相交了。利用叉积，我们就可以判断出一个点是在射线的左侧还是右侧。具体代码如下：

```
bool whether_intersection(Point a1, Point a2, Point b1, Point b2)
    {
  db c1 = cross(a2 - a1, b1 - a1);
  db c2 = cross(a2 - a1, b2 - a1);
  db c3 = cross(b2 - b1, a2 - b1);
  db c4 = cross(b2 - b1, a1 - b1);
  return (sign(c1) * sign(c2) < 0) && (sign(c3) * sign(c4) < 0);
}
```

最短距离

最短距离

求点到线段的最短距离。

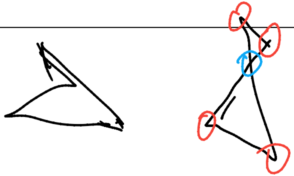
最短距离

最短距离

求点到线段的最短距离。

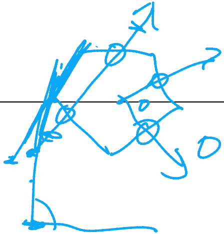
- 求出点到线段延长线上的垂足，判断垂足与线段的关系即可。

多边形



- 多边形是平面的封闭图形、由有限线段（大于 2）组成，且首尾连接起来划出的形状。
- 简单多边形是边不相交的多边形，包含凸多边形和凹多边形。

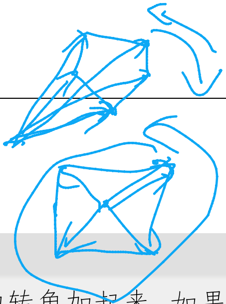
点在多边形内的判定



射线法

从某一个判定点出发，任意引出一条射线。如果和边界相交奇数次，说明点在多边形内。如果相交偶数次，说明点在多边形外。注意射线如果在端点处和多边形相交，或者穿过一条完整的边，则需要重新引出一条射线。可以取这条射线所在直线的斜率为无理数以避免出现射线与多边形某边重合的情况。

点在多边形内的判定



转角法

我们把多边形的每条边的转角加起来，如果是 360 度，说明在多边形内。如果是 0 度，说明在多边形外。如果是 180 度，说明在多边形的边界上。优化的操作如下：假想有一条向右的射线，统计多边形穿过这条射线正反多少次，把这个数基座绕数，逆时针穿过时 $+1$，顺时针穿过时 -1。

Airport Construction

ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \le 200$，时限 $2s$。

Airport Construction

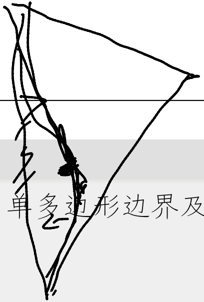
ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \leq 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。

Airport Construction



ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \le 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。
- 之后我们就可以暴力搞了：

Airport Construction

ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \le 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。
- 之后我们就可以暴力搞了：
  - 枚举两个顶点 $O(n^2)$

Airport Construction

ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \leq 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。
- 之后我们就可以暴力搞了：
  - 枚举两个顶点 $O(n^2)$
  - 将线段根据与多边形的交点打散 $O(n)$

Airport Construction

ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \le 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。
- 之后我们就可以暴力搞了：
  - 枚举两个顶点 $O(n^2)$
  - 将线段根据与多边形的交点打散 $O(n)$
  - 判断线段是否在多边形内，合并连续部分 $O(n)$

Airport Construction

ICPC WF 2017 A Airport Construction

给定一个简单多边形，求完全位于该简单多边形边界及内部的最长线段的长度。

$n \leq 200$，时限 $2s$。

- 利用平移，我们可以证明存在一条最优的的线段经过多边形的两个顶点。
- 之后我们就可以暴力搞了：
  - 枚举两个顶点 $O(n^2)$
  - 将线段根据与多边形的交点打散 $O(n)$
  - 判断线段是否在多边形内，合并连续部分 $O(n)$
- 总的复杂度为 $O(n^4)$，写起来爽
  ~~可以更优到 $O(n^3)$，但是我不会 (TдT)~~

圆

- 我们记录圆的圆心和半径即可。
- ~~相信大家在初中时有着对于圆的性质有生平最高理解。~~

圆与直线的交点

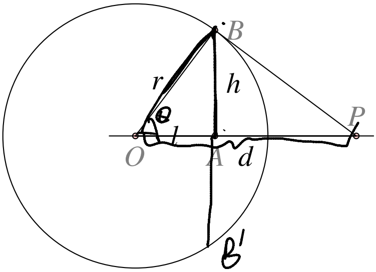
- 计算圆心到直线的距离，相离和相切容易处理。
- 相割就则从垂足沿着直线的方向向量走 $\sqrt{r^2-d^2}$。

圆和圆的交点

- 计算圆心间距离。
- 相切则根据距离来将圆心间线段分配得到点 p。
- 相交就则从 p 沿着垂线的方向同样走 $\sqrt{r^2 - d^2}$。

过点做圆的切线

- 如果点在圆上，做该半径的垂线。
- 如果点在圆外，则让 a 点走 h 就可以得到切点。
- $\frac{r}{d}=\frac{l}{r}$，所以 $l=\frac{r^2}{d}, h=\sqrt{r^2-l^2}$。



Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \leq 200, R, x, y \leq 10^6, T \leq 10$，时限 $10s$。

Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \leq 200, R, x, y \leq 10^6, T \leq 10$，时限 $10s$。

- 一个简单的想法是将多边形内缩 R，然后求点到线的距离。

Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \leq 200, R, x, y \leq 10^6, T \leq 10$，时限 $10s$。

- 一个简单的想法是将多边形内缩 R，然后求点到线的距离。
- 但是这样可能会将多边形分割，还可能产生弧线。

Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \leq 200, R, x, y \leq 10^6, T \leq 10$，时限 $10s$。

- 一个简单的想法是将多边形内缩 R，然后求点到线的距离。
- 但是这样可能会将多边形分割，还可能产生弧线。
- 我们求出所有的直线与直线的交点、直线与圆的交点，点到直线的投影，正解一定在这些情况中。

Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \leq 200, R, x, y \leq 10^6, T \leq 10$，时限 $10s$。

- 一个简单的想法是将多边形内缩 R，然后求点到线的距离。
- 但是这样可能会将多边形分割，还可能产生弧线。
- 我们求出所有的直线与直线的交点、直线与圆的交点，点到直线的投影，正解一定在这些情况中。
- 暴力检查这些点，然后求出答案。

Rikka with Rain

2018 Multi-University Training Contest 9 Rikka with Rain

有一个简单 n 边形，m 个半径为 r 的圆，求圆被多边形完全包含需要移动的最少距离。

$n, m \le 200, R, x, y \le 10^6, T \le 10$，时限 $10s$。

- 一个简单的想法是将多边形内缩 R，然后求点到线的距离。
- 但是这样可能会将多边形分割，还可能产生弧线。
- 我们求出所有的直线与直线的交点、直线与圆的交点，点到直线的投影，正解一定在这些情况中。
- 暴力检查这些点，然后求出答案。
- 代码写起来更爽。。。