计算几何基础二

郭炼

哈尔滨工业大学
计算学部

2020 年 8 月 19 号

哈爾濱工業大學

目录

凸包

- 对于给定集合 Q，包含 Q 的所有点的最小凸多边形称为凸包。
- 凸包是所有包含 Q 的多边形中周长最短的。
- 求凸包的算法很多，在竞赛中一般使用 Graham 扫描法和 Andrew 算法。
- 这两种算法的思想相近。

Graham 算法

Graham 算法

以最左下方的点为原点将所有的点进行极角排序，之后逆时针处理这些点。我们使用一个栈来维护当前凸壳，每次尝试添加一个新点，如果导致凸壳“不凸”了，那么就删除栈顶，直到栈中只有一个点（原点一定在凸包中）或添加点后栈仍为凸壳。

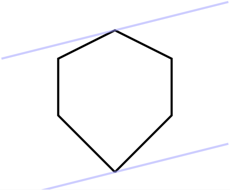
Andrew 算法

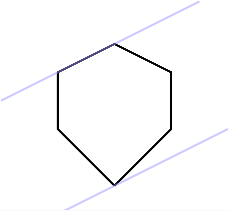
Andrew 算法

Andrew 算法将所有点以横坐标为第一关键字，纵坐标为第二关键字排序。排序后最小和最大的点（即左右端点）一定在凸包中。类似 Graham 算法，我们首先升序枚举求出下凸壳，然后降序求出上凸壳。

旋转卡壳

- 旋转卡壳是一个解决凸包相关问题的算法，计算时就像一对平行卡壳卡住凸包旋转而得名。
- 在凸包上，被一对平行卡壳正好卡住的对应点对称为对踵点；可以证明对踵点的个数不超过 $\frac{3n}{2}$ 个。
- 凸包上的点到直线的距离是一个单峰函数，我们可以根据凸包上点的顺序，枚举对踵点，直到下一个点的距离小于当前点就可以停止了。
- 随着对应边的旋转，最远点也只会顺着这个方向旋转，这样就可以做到总体均摊 $O(n)$ 了。





闵可夫斯基和

- 两个图形 A, B 的闵可夫斯基和 $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$
- 其实就是将 A 沿着 b 向量进行移动。
- 怎么求?两凸包的边向量极角排序后直接顺次连起来就是闵可夫斯基和。

Rikka with Illuminations

ICPC Xuzhou 2018 M Rikka with Illuminations

给你一个凸 n 边形，和 m 个灯(点)。问至少打开哪些灯才能照亮整个凸包？保证灯在凸包外且不会和凸多边形的某边三点共线。

$n, m \le 1000$

Rikka with Illuminations

ICPC Xuzhou 2018 M Rikka with Illuminations

给你一个凸 n 边形，和 m 个灯 (点)。问至少打开哪些灯才能照亮整个凸包？保证灯在凸包外且不会和凸多边形的某边三点共线。

$n, m \leq 1000$

- 每个灯照亮的区域是对应的两条“切线”夹住的区间。

Rikka with Illuminations

ICPC Xuzhou 2018 M Rikka with Illuminations

给你一个凸 n 边形，和 m 个灯 (点)。问至少打开哪些灯才能照亮整个凸包？保证灯在凸包外且不会和凸多边形的某边三点共线。

$n, m \le 1000$

- 每个灯照亮的区域是对应的两条“切线”夹住的区间。
- 现在的问题就是如何使用最少的弧覆盖一个环，化环为直 (双倍) 即可。

最远点对的距离

最远点对的距离

给出 n 个点的坐标，求最远两点间的距离。

$n \leq 50000$

最远点对的距离

最远点对的距离

给出 n 个点的坐标，求最远两点间的距离。
$n \leq 50000$

- 旋转卡壳的模板题，答案一定在对踵点间。

```
double ans = 0;
stk[top + 1] = stk[1];
for (int i = 1, j = 2; i <= top; i++) {
  while (area(stk[i], stk[i + 1], stk[j]) <
         area(stk[i], stk[i + 1], stk[j + 1]))
    ++j > top > j = 1 : 0;
  ans = max(ans, dis(stk[i], stk[j]));
}
```

战争

JSOI 2018 战争

两个凸包 A, B，将 B 移动 d，问是否还有交点。
$n, q \leq 10^5$

- 令 $a \in A, b \in B, b + d = a$，故 $d = a - b$。
- 构造闵可夫斯基和 $C = A + (-B)$，判断 d 是否在 C 中。

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \leq n \leq 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \le n \le 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

- 这其实不算一道计算几何题，而是一道凸包题。

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \leq n \leq 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

- 这其实不算一道计算几何题，而是一道凸包题。
- 我们可以得到 strength = (a + b) / a * atk + (a + b) / b * dnf。

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \le n \le 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

- 这其实不算一道计算几何题，而是一道凸包题。
- 我们可以得到 strength = (a + b) / a * atk + (a + b) / b * dnf。
- 将 atk 看为 x，dnf 看为 y，则 strength 就是一条斜率为 b/a 的直线。

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \le n \le 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

- 这其实不算一道计算几何题，而是一道凸包题。
- 我们可以得到 strength = (a + b) / a * atk + (a + b) / b * dnf。
- 将 atk 看为 x，dnf 看为 y，则 strength 就是一条斜率为 b/a 的直线。
- 最大值肯定出现在凸包右上部分，故只用求出一个上凸包。

妖怪

SCOI 2016 妖怪

有 n 只妖怪，每只妖怪有攻击力 atk 和防御力 dnf 两种属性。妖怪在环境 (a, b) 中的战斗力为 atk + a / b * dnf + dnf + b / a * atk，问一组正实数 (a, b) 使得 n 只妖怪在该环境下最强战斗力最低，求战斗力。

$1 \le n \le 10^6, 0 < atk, dnf < 10^8$

- 这其实不算一道计算几何题，而是一道凸包题。
- 我们可以得到 strength = (a + b) / a * atk + (a + b) / b * dnf。
- 将 atk 看为 x，dnf 看为 y，则 strength 就是一条斜率为 b/a 的直线。
- 最大值肯定出现在凸包右上部分，故只用求出一个上凸包。
- 每个点作为最大战力对应的一个斜率区间，然后就变成了一个双钩函数。

半平面

- 一条直线将平面分为两个部分，一条直线和直线的一侧构成的点集就称为半平面，解析式为 $Ax + By + C \geq 0$。
- 当包含直线时，称为闭半平面；当不包含直线时，称为开半平面。
- 在计算几何中用向量表示，整个题统一以向量的左侧或右侧为半平面。

半平面交

- 半平面交是指多个半平面的交集，在平面直角坐标系围成一个区域。
- 利用半平面交，我们可以得到一个二元线性规划的可行域。
- 将半平面按极角排序，如果遇到共线向量(且方向相同)，则取靠近可行域的一个。
- 类似求凸包，我们维护一个双端单调队列。
- 加入的只可能会影响最开始加入的或最后加入的边(此时凸壳连通)，只需要删除队首和队尾的元素。

小凸想跑步

SCOI 2015 小凸想跑步

给定 n 个点的凸包，在其内部随机取一个点 p，和凸包连边，形成 n 个三角形询问 P 点，0 号点，1 号点形成的三角形面积最小的概率

$3 \leq n \leq 10^5, -10^9 \leq x, y \leq 10^9$

小凸想跑步

SCOI 2015 小凸想跑步

给定 n 个点的凸包，在其内部随机取一个点 p，和凸包连边，形成 n 个三角形询问 P 点，0 号点，1 号点形成的三角形面积最小的概率

$3 \le n \le 10^5, -10^9 \le x, y \le 10^9$

- 设凸包上的四个点依次为 a, b, c, d。

$$(b-a)\times(p-a)\le(d-c)\times(p-c)$$

$$(x_b-x_a, y_b-y_a)\times(x_p-x_a, y_p-y_a)$$

$$\le(x_d-x_c, y_d-y_c)\times(x_p-x_c, y_p-y_c)$$

$$(x_b-x_a-x_d+x_c)y_p-(y_b-y_a-y_d+y_c)x_p$$

$$-x_by_a+y_bx_a+x_dy_c-y_dx_c\le 0$$

自适应辛普森法

辛普森积分本质是用二次函数去拟合原函数。对 $f(x)$，我们用 $(r-l)\times\frac{f(l)+4f(\frac{l+r}{2})+f(r)}{6}$ 近似 $\int_l^r f(x)dx$，其思想是使用二次函数模拟 $f(x)$。

现在重点就是如何划分 (l,r)，如果粗暴地模拟全段，那么大概率会得到一个误差极大的解。自适应辛普森法就是判断误差是否足够小，不够就继续二分。判断方法是 $|simpson(l,r)-simpson(l,mid)-simpson(mid,r)|\le EPS$。

圆的面积并

圆的面积并

出 n 个圆，求面积并。$n \leq 10^3$

圆的面积并

圆的面积并

出 n 个圆，求面积并。$n \leq 10^3$

- BZOJ 挂了以后，我好像没找到一个 OJ 有此题了。

圆的面积并

圆的面积并

出 n 个圆，求面积并。$n \leq 10^3$

- BZOJ 挂了以后，我好像没找到一个 OJ 有此题了。
- 有多种优化 (反正是近似)。
- 可以将连通的圆一并处理。
- 可以每次处理一个小区间，删除与区间无关的圆。