Коллоквиум по дискретной математике №1

10 декабря 2022

Содержание

1 Определения и обозначения

1.1 Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.

- **Принцип математической индукции:**

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно (База индукции)
  2. $\forall n : A(n)$ - верно $\Rightarrow A(n+1)$ верно. (Шаг индукции)

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- **Принцип математической индукции (эквивалентная формулировка):**

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

  1. $1 \in S$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

  Тогда $S = \mathbb{N}$.

- **Принцип полной математической индукции:**

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно
  2. $\forall n : (\forall k < n\ A(k)$ - верно$) \Rightarrow A(n+1)$ верно.

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- **Принцип наименьшего числа**

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing \Rightarrow$ в S существует наименьший элемент.

  Наименьшим элементом множества A называют такое число c, что $\forall a \in A : c \leqslant a$

1.2 Множества, теоретико-множественные операции. Парадокс Рассела.

- **Определение и некоторые обозначения**

  Множеством называют совокупность произвольных объектов

  $X = \{a, b, c\}$

  $a \in X$ – объект a лежит в множестве, $d \notin X$ – объект d не лежит в множестве

  Способы задания множества:

  1. Явно (списком элементов): $X = \{1, 2, 3\}$
  2. Условием: $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid y$ – четно$\}$

  $\varnothing$ – пустое множество

  2^A – множество всех подмножеств A (в том числе пустое и само A)

- **Операции над множествами**

  Пусть A, B – множества. Тогда:

  Объединение множеств: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\ \}$

  Пересечение множеств: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\ \}$

  Разность множеств: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

  Дополнение множества A до B: $\bar{A} = B \setminus A$

  Симметрическая разность: $A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

  $A \subseteq X \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in X)$. A – подмножество, X – надмножество.

  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

- **Парадокс Рассела**

  $U = \{x \mid x \notin x\}$.

  Вопрос: $U \in U$?

  Если да, то по определению U, $U \notin U$. Если нет, то т.к $U \notin U$, U является элементом себя же. Противоречие.

1.3 Бинарные отношения, композиция отношений.

Бинарное отношение R на множестве $A \times B$ – это $R \subseteq A \times B$ такое, что если $x \in A$, $y \in B$ и $(x, y) \in R$, элементы находятся в отношении $(R(x, y) = 1, xRy)$

Пример: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x < y$ – отношение.

Композиция отношений

Пусть $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. Тогда $(S \circ R) \subseteq A \times C$: $(a, c) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S$ (aRb и bSc).

1.4 Функции (как частный случай отношений). Образы и прообразы множеств. Обратная функция.

Функция f из A в B – это такое отношение $f \subseteq A \times B$, что $\forall a \in A$ в f есть не более одной пары (a, b), где $b \in B$.

Обозначение: $(a, b) \in f$ или $afb \Leftrightarrow f(a) = b$.

Мы рассматриваем частичные функции, то есть они не полностью определены на A. Но

f на A и B **тотальна**, если $Domf = A$ (функция определена на всем множестве A). Тогда пишут $f : A \to B$.

Запись $f : A \to B$ с подвохом: мы подразумеваем при подобной записи что f тотальна, однако это может быть не так вне нашего курса, будьте бдительны.

Если $X \subseteq A$, то $f(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X : f(x) = b\}$ – **образ** множества A.

Прообраз множества Y $f^{-1}(Y)(Y \subseteq B) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

Пусть $f : A \to B$ – биекция. Тогда $f^{-1} : B \to A$ или **обратная функция к** f определяется как $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Эквивалентное определение: функция $g : B \to A$ называется обратной к $f : A \to B$, если $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

1.5 Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.

Функция $f : A \to B$ **называется инъекцией, если** $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Функция $f : A \to B$ **называется сюръекцией, если** $\forall y \in B$: $\exists x, f(x) = y$ (область значений функции есть все множество B).

Функция $f : A \to B$ **называется биекцией, если** она одновременно и инъекция, и сюрьекция.

1.6 Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности.

Отношение R на A называют:

Рефлексивным, если $\forall a \in A$: aRa.

Симметричным, если $\forall a, b \in A$: $aRb \Leftrightarrow bRa$).

Транзитивным, если $\forall a, b, c$: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$).

Пример: отношение $a < b$ транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично. Отношение $a + b = a \cdot b$ симметрично, но не рефлексивно и не транзитивно.

Отношение R на A называют **отношением эквивалентности**, если отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример: Отношение $a = b$ – рефлексивно ($\forall a \in A$: $a = a$), симметрично ($\forall a, b \in A$: $a = b \Rightarrow b = a$), транзитивно ($\forall a, b, c \in A$: $a = b.b = c \Rightarrow a = c$).

Если R на A – отношение эквивалентности, то множество A можно разбить на классы эквивалентности A_i

Классы эквивалентности – это разбиение множества A отношением эквивалентности R на непересекающиеся классы ($\forall i \neq j$: $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\cup_{i \in I} A_i = A$) такое, что $\forall x, y \in A_i$: xRy и $\forall x \in A_i, y \in A_j, i \neq j : \neg xRy$. (то есть если два элемента принадлежат одному классу эквивалентности, они находятся в отношении R и наоборот).

1.7 Правила суммы и произведения в комбинаторике. Задачи о подсчете путей. Конечные слова в алфавите. Упорядоченный выбор k элементов из n (с повторениями или без повторений)

A, B, C - какие-то конечные множества.

- **Правило суммы:**

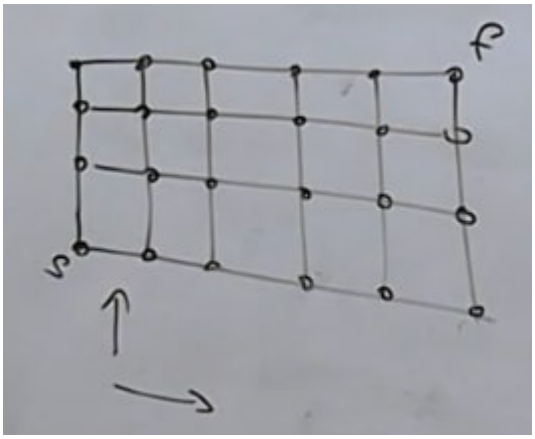
  Пусть $A = B \cup C$ и $B \cap C = \varnothing$, тогда $|A| = |B| + |C|$

- **Правило произведения:**

  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **Задача на подсчет путей № 1**

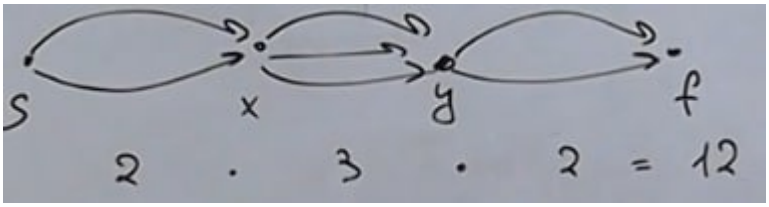
  Пусть дана сеточка и вы можете ходить только в право и в лево по ее узлам. Необходимо посчитать количество путей из левого нижнего угла в правый верхний угол данной сетки.



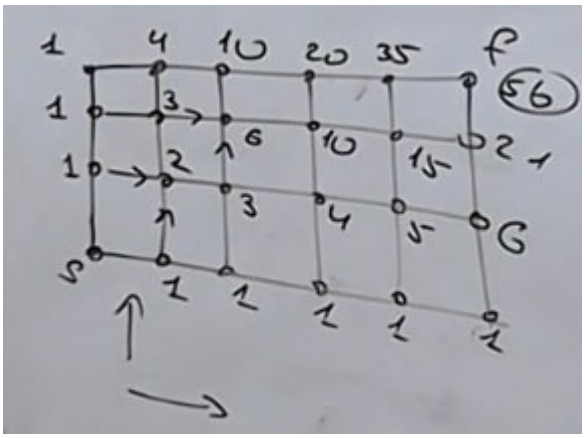
Можно сделать это, используя, правило суммы. Для каждого из узлов вычисляя количество способов дойти из левого нижнего угла в этот. Для того чтобы насчитать количество путей для очередного узла мы можем просто сложить количество путей ведущих в узел ниже и узел левее. Это верно так как два множества этих путей не пересекаются.

- **Задача на подсчет путей № 2**

  Найти количество путей из s в f в подобном графе.



  Множество таких путей можно представить себе как декартово произведение множеств путей между парами вершин.



  Тогда количество путей из s в f это произведение количества путей между парами вершин.

- **Упорядоченный выбор k элементов из n**

  Пусть множество $|A| = n$.

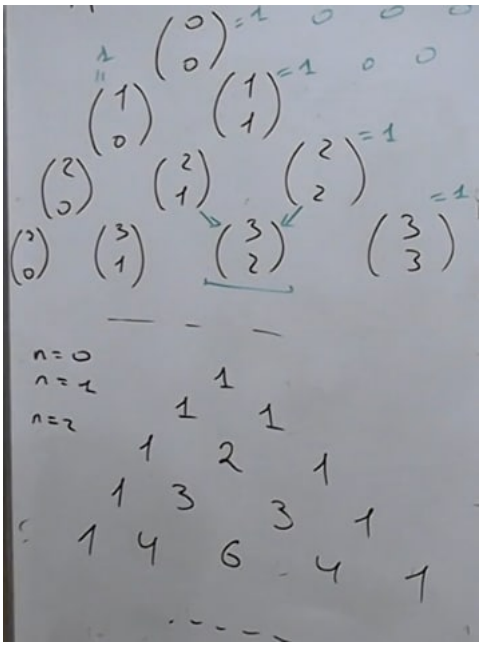
  Тогда количество строк длины k с элементами из алфавита A которые могут повторятся, это: n^k. То же самое, что количество способов упорядоченно выбрать k элементов из множества размера n с повторениями.

  Если же повторения запрещены, то количество таких строк это: $\frac{n!}{(n-k)!}$. То же самое, что количество способов упорядоченно выбрать k элементов из множества размера n без повторений.

1.8 Числа сочетаний. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение для чисел сочетаний

Сочетанием из n по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором не учитывается порядок элементов. Количество сочетаний из n по k записывается так: $\binom{n}{k}$ или так C_n^k. $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ Треугольником Паскаля называется бесконечная треугольная таблица, в которой на вершине

и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предшествующей строке. В таком треугольнике элемент в строке n на позиции k равен $\binom{n}{k}$.



1.9 Бином Ньютона. Сумма и знакочередующаяся сумма биномиальных коэффициентов.

Биномом Ньютона называют формулу для разложения n-й ($n \in \mathbb{N}$) степени суммы двух переменных, а именно:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Собственно из-за этой формулы C_n^k в том числе называют биномиальным коэффициентом. Также верны следующие равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

1.10 Сочетания с повторениями. Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ в неотрицательных целых числах.

- **Сочетание с повторениями**

  Сочетанием с повторениями из n элементов по k называют неупорядоченный k-элеметный набор, в котором количество каждого элемента может быть произвольным. Их количество обозначается $\overline{C}_n^k$ и равно:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

- **Количество решений уравнения** $x_1 + x_2 + ... + x_k = n, x_i \geqslant 0,\ x_i \in \mathbb{Z}$

  Замечу, что здесь и в доказательстве количество переменных обозначено k, а сумма n, в отличие от списка билетов (там наоборот).

  Количество решений равно $\binom{n+k-1}{n}$

1.11 Полиномиальные коэффициенты. Их алгебраический и комбинаторный смысл.

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=n} \binom{n}{\alpha_1, \quad ..., \quad \alpha_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_k^{\alpha_n}$$

Где $\binom{n}{\alpha_1, \quad ..., \quad \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!}$. Это число называют полиномиальным коэффициентом.

Собственно алгебраический смысл - коэффициенты разложения суммы $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$.

Комбинаторный смысл - полиномиальный коэффициент равен числу упорядоченных разбиений n-элементного множества на k подмножеств размеров (мощностей) α_1, α_2,...,α_k

1.12 Задание булевых функций таблицами истинности. Количество булевых функций от n переменных

- **Задание булевых функций таблицами истинности**

  Любую булеву функцию можно задать с помощью таблицы истинности. Выглядит она следующим образом: в каждой строке перечисляются значения набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, после чего перечисляется значение функции от данного набора переменных.

  Пример для базовых булевых операций:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \backslash C$	$x \in B \backslash C$	$x \in A \cup B$	$x \in X$	$x \in Y$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

- **Количество булевых функций**

  Количество булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}. Следует из того, что различных наборов на n переменных всего 2^n, ну и для каждого набора мы можем выбрать значение 0 или 1

1.13 Правила алгебры логики, доказательство теоретико-множественных тождеств с помощью алгебры логики.

- **Правила алгебры логики**

  1. Коммутативность
     $x \vee y = y \vee x$
     $x \wedge y = y \wedge x$
     $x \oplus y = y \oplus x$
  2. Ассоциативность
     $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
     $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
     $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
  3. Дистрибутивность
     $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
     $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
     $(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$
  4. Закон де Моргана
     $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
     $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
  5. Следствие
     $(x \to y) = (\neg y \to \neg x)$

- **Доказательство теоретико-множественных тождества с помощью алгебры логики**

  Доказать утверждение: $(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \setminus (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap ... \cap (A_n \setminus B_n)$

  Доказательство:

  Рассмотрим произвольный элемент x.

  $a_i = x \in A_i$ $(false/true)$

  $b_i = x \in B_i$ $(false/true)$

  Выпишем в этих терминах левую часть:

  $$(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \wedge \neg(b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n)$$

Правую часть:

$$(a_1 \wedge \neg b_1) \wedge (a_2 \wedge \neg b_2) \wedge ... \wedge (a_n \wedge \neg b_n)$$

Используя закон де Моргана преобразуем левую часть:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \wedge \neg(b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n) = (a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \wedge (\neg b_1 \wedge \neg b_2 \wedge ... \wedge \neg b_n) = (a_1 \wedge \neg b_1) \wedge (a_2 \wedge \neg b_2) \wedge ... \wedge (a_n \wedge \neg b_n)$$

Получили идентичную правой части формулу, следовательно тождество верно, ч.т.д.

Несколько полезных соображений:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow a \vee b$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow a \wedge b$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow a \wedge \neg b$

$x \in A \triangle B \Leftrightarrow a \oplus b$

1.14 Формулы, полные системы связок, примеры. Дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ.

Связка – это любая булева функция. Вроде как точно связку не определяют, тем не менее, под связками понимают именно булевы функции

Пример множества связок: $F = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Пусть F это множество связок. Тогда, функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ **выразима в системе связок** F, если $\exists$ формула φ под данной системой F (или f можно выразить через функции системы связок F):

$$\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Формула φ строится последовательно:

1. Переменная x_i сама по себе является формулой
2. Переменная $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $g \in F$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ формулы – тоже формула.
3. Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формула, то $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ тоже формула (где x_{n+1} фиктивная переменная, так мы умеем расширять количество аргументов у формулы).

Константы по умолчанию не являются формулами, их надо выражать из связок.

$[F]$ – множество всех булевых функций, выразимых в F (или **замыкание** F)

F – **полная система связок**, если $[F]$ – все булевы функции (P_2).

Пусть $x^a = x$ если $a = 1$ и $\neg x$ если $a = 0$. Тогда:

Коньюнкт – $x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k}$

Дизьюнктивная Нормальная Форма (ДНФ) – представление функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как дизьюнкции коньюнктов.

Пример: для функции $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$, ДНФ – $A^1 \wedge C^1 \vee A^1 \wedge D^0 \vee B^1 \wedge C^1 \vee B^1 \wedge D^0$

1.15 Полином Жегалкина. Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина.

Моном – это выражение вида $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$.

(0 и 1 – тоже мономы)

Полином Жегалкина – многочлен вида $\bigoplus\limits_{(i_1,\ldots,i_k),k=0\ldots n} a_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$

Пример: $1 \oplus (x \wedge y) \oplus (x \wedge y \wedge z)$

Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина: каждую булеву функцию можно однозначно представить в виде полинома Жегалкина.

1.16 Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции.

Функция f называется линейной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$, где $a_i \in \{0,1\}$

$L = \{f \in P_2 |\ f$ – линейная$\}$ – множество всех линейных функций.

Пример: $x_i \in L$, $x \oplus y \in L$, $0, 1 \in L$

$x \wedge y \notin L, x \vee y \notin L$

Лемма о нелинейной функции: Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$. Тогда подставив вместо переменных функции $x_1, \ldots, x_n$ 0, x и y можно получить $g(x, y) \notin L$.

Иначе говоря, через любую не линейную функцию на n переменных можно выразить не линейную функцию на двух переменных.

1.17 Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции.

Принцип двойственности:
Пусть $f(x_1,\dots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$. Тогда:

$$f^*(x_1,\dots,x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k^*(x_1,\dots,x_n))$$

Функция $f \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^* = f$.
$S = \{f \in P_2 | f* = f\}$ – множество всех самодвойственных функций.
Пример: $x \in S, \neg x \in S, x \oplus y \oplus z \in S$
Лемма о несамодвойственной функции:
Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \notin S$. Тогда подставляя вместо переменных функции $x, \neg x$, можно получить константу.

1.18 Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.

Для того, чтобы ввести класс монотонных функций нам нужно ввести понятие порядка на множестве наборов переменных. Скажем, что изначально $0 < 1$. Тогда:
Набор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ меньше $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, если $\forall i, \alpha_i \le \beta_i$.
Пример: $(1,0) \le (1,1)$
$(1,0) \not\le (0,1)$ (не сравнимы)
$(0,1) \not\le (1,0)$ (не сравнимы)
$f \in P_2$ **монотонная**, если $\forall \alpha_i, \beta_i$, $\alpha_i \le \beta_i \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)$
Лемма о немонотонной функции:
Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \notin M$. Тогда, подставляя вместо переменных 0, 1, x, можно получить $\neg x$.

1.19 Критерий Поста полноты системы булевых функций.

Критерий Поста: $[F] = P_2 \Leftrightarrow F \not\subseteq L, F \not\subseteq T_0, F \not\subseteq T_1, F \not\subseteq S, F \not\subseteq M$
Иначе говоря, система связок полная тогда и только тогда, когда для любого класса L, S, T_0, T_1, M в системе связок F есть функция, не лежащая в этом классе.

1.20 Предполные классы булевых функций. Описание предполных классов булевых функций

Пусть $F \subseteq P_2$. И F - замкнутый класс, то есть $[F] = F$.
Тогда F - предполный в P_2, если $F \neq P_2$ и $\forall g \notin F$ верно, что $[F \cup \{g\}] = P_2$
В P_2 есть ровно пять предполных классов: T_0, T_1, L, S, M

1.21 Формула включений–исключений

Пусть $A_1, A_2 ... A_n$ - конечные множества. Тогда:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

1.22 Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Примеры.

Равномощные множества. Множества A и B называются равномощными, если $\exists f : A \to B$ - биекция. $|A| = |B|, A \sim B$

Счетное множество - множество равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Континуальное множество - множество равномощное множеству действительных чисел $\mathbb{R}$.

Примеры.

1. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(n) = n - 1$
2. $(0,1) \sim (0,2)$, $f(x) = 2x$
3. $[a,b] \sim [c,d]$

1.23 Сравнение мощностей, теорема Кантора.

Сравнение мощностей.
$|A| \leqslant |B|$, если $\exists f : A \to B$ - инъекция.
$|A| < |B|$, если $A \leqslant B$ и $A \not\sim B$.

Теорема Кантора:
Пусть X - множество.
Тогда $|X| < |2^X|$.

1.24 Теорема Кантора–Бернштейна.

Пусть $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \geqslant |B|$, тогда $A \sim B$.

1.25 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, их связь, линейный порядок

Говорят, что бинарное отношение R, определенное на множестве P, является **строгим частичным порядком**, если для него выполнены такие свойства:
1. $\forall a \in P, \neg aRa$ (антирефлексивность)
2. $\forall a, b, c \in P, aRb, bRc \Rightarrow aRc$ (транзитивность)

Из транзитивности и антирефлексивности следует то, что отношения строгого порядка не обладают свойством симметричности (aRb и bRa не может выполняться, т.к тогда по транзитивности $aRb, bRa \Rightarrow aRa$, что противоречит антирефлексивности)

Обычно отношения строгого порядка обозначают как $<$.

Говорят, что бинарное отношение R, определенное на множестве P, является **нестрогим частичным порядком**, если для него выполнены такие свойства:
1. $\forall a \in P, aRa$ (рефлексивность)
2. $\forall a, b \in P$, aRb и $bRa \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
3. $\forall a, b, c \in P$, aRb, $bRc \Rightarrow aRc$ (транзитивность)

Обычно отношения нестрогого порядка обозначают как $\leq$

Связь строгого и нестрогого частичных порядков: Из отношения не строгого порядка на P можно получить отношение строгого порядка на P и наоборот следующим образом

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ или } a = b$$
$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \text{ и } a \neq b$$

Множество P называется **частично упорядоченным**, если на нем определен порядок R.

Обозначается как $(P, <_P)$ или $(P, \leq_P)$ для строгого и нестрогого порядков соответственно.

Линейный порядок – это такой порядок $(P, \leq_P)$, что для любых элементов $x, y \in P$, $x \leq y$ или $y \leq x$. Иначе говоря, в линейном порядке любые два элемента сравнимы.

1.26 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покоординатный порядок, лексикографический порядок.

Пусть $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ – частично упорядоченные множества. Тогда:

Покоординатный порядок – это такой порядок $\leq_{P\times Q}$, определенный на множетсве $(P\times Q, \leq_{P\times Q})$, что $(p_1, q_1) \leq_{P\times Q} (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 \leq_P p_2$ и $q_1 \leq_Q q_2$.

Лексикографический порядок – это такой порядок $<_{lex}$, определенный на множестве $(P\times Q, <_{lex})$, что $(p_1, q_1) <_{lex} (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 <_P p_2$ или $p_1 = p_2$ и $q_1 <_Q q_2$

Сумма порядков. Можно определить только для множеств P, Q таких, что $P \cap Q = \emptyset$. Пусть $P + Q = P \cup Q$. Тогда на $(P + Q, \leq)$ **сумма порядков** – это такой порядок, что:

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in P, x \leq_P y \\ x, y \in Q, x \leq_Q y \\ x \in P, y \in Q \end{cases}$$

1.27 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть $(P, \leq_P)$ и $(Q, \leq_Q)$ – частично упорядоченные множества.

Порядки $\leq_P$ и $\leq_Q$ изоморфны, если существует биекция $\varphi : P \to Q$ такая, что $x \leq_P y \Rightarrow \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.

Обозначается как $P \cong Q$

Пример: порядки $((0, 1), <)((-\infty, -1), <)$ изоморфны, т.к есть биекция $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$.

Пример кажется может быть любой, его в целом можно привести из головы

1.28 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы

Пусть $(P, \leq_P)$ – частично упорядоченное множество. Тогда:
Элемент $x \in P$ называется **наименьшим**, если $\forall y \in P$, если y сравнимо с x, то $x \leq y$.
Элемент $x \in P$ называется **наибольшим**, если $\forall y \in P$, если y сравнимо с x, то $y \leq x$.
Элемент $x \in P$ называется **минимальным**, если $\nexists y \in P : y < x$.
Элемент $y \in P$ называется **максимальным**, если $\nexists y \in P : x < y$.
Минимальных, максимальных, наименьших и наибольших элементов в множестве может быть несколько.

1.29 Бесконечно убывающие цепи. Фундированные множества. Принцип математической индукции для фундированных множеств

Пусть $(P, <_P)$ – частично упорядоченное множество. Тогда:
Цепь – это подмножество $P' \subseteq P$, что для любого $x, y \in P'$, элементы x и y сравнимы.
Бесконечно убывающей цепью обозначим бесконечную последовательность элементов порядка $x_1 > x_2 > \ldots$, в котором каждый элемент меньше предыдущего ($x_i < x_{i-1}$). (это тоже цепь, просто задаем её как последовательность). В бесконечно убывающей цепи нет минимума, т.к иначе последовательность x_i содержала бы конечное число элементов.
Порядок P называется **фундированным**, если для него выполнено одно из следующих свойств:
1. каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент
2. любая убывающая цепь конечна
3. Для порядка P спраедлив принцип индукции: если для утверждения $A(p)$, зависящего от элемента порядка, для любого p верно утверждение «если $A(q)$ верно при всех $q < p$, то и $A(p)$ верно». Тогда утверждение $A(p)$ верно при любом $p \in P$.

Для фундированных множеств выполняется принцип математической индукции: если для утверждения $A(p)$, зависящего от элемента порядка, для любого p верно утверждение «если $A(q)$ верно при всех $q < p$, то и $A(p)$ верно». Тогда утверждение $A(p)$ верно при любом $p \in P$.

1.30 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Дилуорса.

Пусть $(P, \leq_P)$ – частично упорядоченное множество. Тогда:
Цепь – это подмножество $P' \subseteq P$, что для любого $x, y \in P'$, элементы x и y сравнимы.
Антицепь – это подмножество $P' \subseteq P$, что для любого $x, y \in P'$, элементы x и y несравнимы.
Размером цепи P' назовем мощность множества $\mid P' \mid$. Аналогично определим размер для антицепи. Тогда:
Теорема Дилуорса: Наибольший размер антицепи в порядке равен наименьшему количеству цепей в разбиениях порядка на непересекающиеся цепи.
(работает только для конечных порядков, т.е порядков, которые определены на конечных множествах)

1.31 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Отношение порядка на булевом кубе. Вершины булева куба - двоичные слова, тогда, если слово x является подсловом y (с точки зрения единиц), то $x \leqslant y$ (покоординатное сравнение).
LYM-лемма, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

1.32 Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Понятия пути, цикла, простого пути, простого цикла.

Неориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$
$E \subseteq \{a, b \mid a, b \in V,\ a \neq b\}$

Ориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$.
$E \subseteq \{(a, b) \mid a, b \in V,\ a \neq b\}$

Степень вершины - количество ребер исходящих из вершины.
Для неориентированного графа:
$\deg(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$

Для ориентированного графа:
$\deg_+(v) = |\{(v, a) \in E \mid a \in V\}|$
$\deg_-(v) = |\{(b, v) \in E \mid b \in V\}|$

Лемма о рукопожатиях
Для неориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Для ориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg_+(v) = \sum\limits_{v \in V} \deg_-(v) = |E|$

Смежные вершины. Вершины v_1, v_2 называются смежными, если $\exists e \in E : e = \{v_1, v_2\}$.

Путь - последовательность смежных вершин. $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$

Простой путь - путь, в котором все вершины различны.

Цикл - путь, у которого первая и последняя вершины одинаковы.

Простой цикл - путь, у которого совпадают только первая и последняя вершины, длины больше или равной 3.

Длина пути - количество вершин в пути - 1.

1.33 Отношение достижимости и компоненты связности графа. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

Отношение достижимости. Вершина u достижима из вершины v, если $\exists$ путь из v в u. Так же говорят, что вершины v и u - связны ($u \sim v$). Отношение достижимости называют отношением связности.

Отношение сильной связности. u и v - сильно связны, если $\exists$ ориентированный путь $u - v$ и $\exists$ ориентированный путь $v - u$.

Компонента связности графа. Так как отношение связности является отношением эквивалентности, то множество вершин можно разбить на компоненты - компоненты связности.

Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе.
Количество компонент связности $\geqslant |V| - |E|$

Компоненты сильной связности ориентированного графа. Так как отношение сильно связности является отношением эквивалентности, то множество вершин ориентированного графа можно разбить на компоненты - компоненты сильной связности.

1.34 Деревья. Теорема об эквивалентных определениях дерева.

Эквивалентные определения дерева:

1. G - минимальный связный граф
2. G - связен и $|E| = |V| - 1$
3. в G между любыми 2 вершинами $\exists!$ простой путь
4. G - связен и в нем нет простых циклов

Обычно дерево обозначают через T.

Предки - все вершины на пути от корня до вершины, не включая саму вершину.

Потомок - вершина, которая не является предком.

Лист - вершина степени 1.

1.35 Полное двоичное дерево. Остовное дерево в графе.

Полное двоичное дерево - дерево, где каждой вершине можно присвоить булевый кортеж и тогда все вершины будут представимы в виде $\bigcup_{k=0}^{n} \{0,1\}^k$. Тогда ребра будут между вершинами $a_1, ..., a_k$ и $a_1, ..., a_k, a_{k+1}$.

В полном двоичном дереве 2^n листьев.

Остовное дерево в графе. Дан граф $G = (V, E)$. Тогда остовное дерево в G - это $T = (V, E'), E' \subseteq E, T$ - дерево.

1.36 Ациклические орграфы, топологическая сортировка.

Ациклический орграф - орграф, в котором нет циклов.

Топологическая сортировка. Эквивалентные определения:

1. Орграф G - ацикличен.
2. Все компоненты сильной связности G состоят из 1 вершины.
3. Все вершины G можно пронумеровать числами от 1 до n: если $i \to j$, то $i < j$.

1.37 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не делает это дважды).

Граф называется эйлеровым, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление изолированных вершин, то есть тех вершин, из которых не выходит и в которые не входит ни одного ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

Теорема 1. В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

Теорема 2. Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

1.38 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором вершины можно разделить на две доли — левую и правую, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества L (левую долю) и R (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

Критерий двудольности графа. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда не содержит в себе циклы нечетной длины.

Булев куб размерности n — это неориентированный граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n, а рёбра соединяют слова, отличающиеся в одной позиции.

1.39 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше, чем $|X|$ вершин, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

1.40 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.

Пусть дан граф G = (V, E), **паросочетание M** в G — это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

Вершинным покрытием называется такое множество вершин S, что для любого ребра хотя бы один из концов лежит в S. Нетрудно проверить, что дополнение к вершинному покрытию — независимое множество и, наоборот, дополнение к независимому множеству — вершинное покрытие. Для двудольных графов вершинные покрытия оказываются связанными с паросочетаниями.

Теорема Кёнига. В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

1.41 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n. Минимальное такое N_0 называют **числом Рамсея**, обозначается $R(k, n)$.

2 Доказательства

2.1 Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2

- Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости
  - Утверждение: n прямых делят плоскость на области. $A(n)$ - верно ли, что эти области можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены в один цвет.
  - База:
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    По сути нам дана правильная раскраска плоскости в случае n прямых. Утверждается, что если при добавлении $n+1$ прямой инвертировать цвет всех областей по одну сторону от нее, то мы получим правильную раскраску. Докажем, что любая граница разделяет области разных цветов. Для этого рассмотрим 2 случая:

    1. Граница принадлежит какой-либо из старых n прямых. Тогда области, которые она разделяет, лежат по одну сторону от новой прямой. Поэтому поскольку старая раскраска была правильной, то в новой они также будут разного цвета.
    2. Граница принадлежит новой $n+1$ прямой. Тогда области, что она разделяет, в старой раскраске были одного цвета, мы инвертируем только одну из них, поэтому получаем 2 разных цвета.

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Неравенство Бернулли
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $(1+x)^n \geqslant 1+xn,\ x \in \mathbb{R}, x > -1$
  - База: $A(1)\colon (1+x)^1 \geqslant 1 + x \cdot 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+xn)(1+x) \geqslant$$

$$\geqslant (1+xn) + x = 1 + x(n+1)$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Сумма обратных квадратов меньше 2
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
  - База: $A(1)\colon \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1 \leqslant 2 - 1 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно. Так как $\frac{1}{n} > 0$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$$

2.2 Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа

1. ПМИ (принцип математической индукции)
2. ППМИ (принцип полной математической индукции)
3. ПНЧ (принцип наименьшего числа)

Докажем следствия по циклу (из утверждения 1 следует утверждение 2, из 2 $\Rightarrow$ 3, из 3 $\Rightarrow$ 1), тогда эквивалетнонсть каждой пары будет доказана.

- ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$

  $\forall n : (\forall k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S$

  $X = \{n \mid \forall k < n, k \in S\}$

  $1 \in X$

  $n \in X \Rightarrow n \in S$

  $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \Rightarrow n + 1 \in S$

  Тогда по индукции $S = \mathbb{N}$, значит ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ, ч.т.д.

- ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ

  Рассмотрим $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$.

  Докажем от противного. Пусть в S нет минимального элемента.

  $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$.

  Тогда $1 \in \overline{S}$ и $\forall n : (\forall k < n, k \in \overline{S}) \Rightarrow n \in \overline{S}$

  По ППМИ получаем $\overline{S} = \mathbb{N} \Rightarrow S = \varnothing \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$, значит ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ, ч.т.д.

- ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ

  Пусть $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) - \text{ложное}\}$ Рассмотрим 2 случая:

  1. $S = \varnothing \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ - верно, ч.т.д.
  2. $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists \min S$. Обозначим $m = \min S$
     Но тогда $m - 1 \notin S \Rightarrow A(m - 1) -$ верно
     Но при этом $A(m)$ - верно $\Rightarrow m \notin S \Rightarrow$ противоречие, значит ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ, ч.т.д.

2.3 Бинарные отношения, теорема об ассоциативности композиции отношений. Функции. Критерий существования функции, обратной к данной. Композиция биекций является биекцией.

- **Ассоциативность композиции бинарных отношений**

  Пусть $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$. Тогда $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. Иначе говоря, композиция отношений обладает свойством ассоциативности.

  Доказательство:

  $a \in A, d \in D$

  $(a, d) \in T \circ (S \circ R) \Leftrightarrow \exists z \in C : a(S \circ R)z$ и $zTd \Leftrightarrow \exists y \in B, z \in C : aRy$, ySz и zTd.

  Правая часть расписывается аналогично:

  $(a, d) \in (T \circ S) \circ R \Leftrightarrow \exists y \in B : aRy$ и $y(T \circ S)d \Leftrightarrow \exists z \in C, y \in B : aRy$, ySz и zTd.

- **Критерий существования функции, обратной к данной**

  Теорема. У функции $f : A \to B$ существует обратная $\Leftrightarrow$ f - биекция.

  Доказательство.

  1) $\Leftarrow$ Знаем, что f - биекция, то есть $\forall y \; \exists! x : f(x) = y$. Зададим $g : B \to A$ - всюду определенная функция $g(y) = x$. Проверяем: $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id_B$ и $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x = id_A$

  2) $\Rightarrow$ Знаем, что существует $g : B \to A$, что $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$. Докажем, что f - биекция. Возьмем $x_1, x_2 \in A$, пусть $f(x_1) = f(x_2)$, тогда $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ по id_A, то есть f - инъекция.

  Пусть $x = f(y)$, тогда $f(x) = f(g(y)) = y$, значит f - сюръекция. А значит и биекция, доказано.

- **Композиция биекций является биекцией**

  Пусть заданы $f : A \to B$ и $g : B \to C$ - биекции, докажем, что $g \circ f$ - биекция.

  1) $g \circ f$ - инъекция, рассмотрим $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$, так как f - инъекция $f(a_1) \neq f(a_2)$, так как g - инъекция, то $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, а значит $g \circ f$ - инъекция.

  2) $g \circ f$ - сюръекция, возьмем $c \in C$, тогда так как g - сюръекция $\exists b \in B : g(b) = c$, так как f - сюръекция, то $\exists a \in A : f(a) = b$. По определению композиции, (a, c) в композиции, если $\exists b : afb, bgc$, что мы и сделали.

  $g \circ f$ сюръекция + инъекция, значит биекция.

2.4 Теорема о классах эквивалентности для отношения эквивалентности.

Отношения эквивалентности

Отношение R на A называют:

Рефлексивным, если $\forall a \in A$, aRa.

Симметричным, если $\forall a, b \in A$, $(aRb \Leftrightarrow bRa)$.

Транзитивным, если $\forall a, b, c$, $(aRb$ и $bRc \Rightarrow aRc)$.

Пример: отношение $a < b$ транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично. Отношение $a+b = a*b$ симметрично, но не рефлексивно и не транзитивно.

Отношение R на A называют **отношением эквивалентности**, если отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример: Отношение $a = b$: рефлексивно $(a = a \forall a \in A)$, симметрично $(a = b \Rightarrow b = a \forall a, b \in A)$, транзитивно $(a = b.b = c \Rightarrow a = c \forall a, b, c \in A)$.

Теорема. Если R – отношение эквивалентности на A, то $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset (\forall i \neq j)$, таких что $\forall a, b \in A_i : aRb$, $\forall a \in A_i, b \in A_j, i \neq j : \neg(aRb)$.

Доказательство:

$a \in A$

$[a] = \{b \in A | aRb\}$ – класс эквивалентности для a.

1.) $a \in [a]$, т.к aRa.

2.) Пусть $\neg(aRb) \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

Действительно, если $x \in [a] \cap [b] = \emptyset$, то aRb и $bRc \Rightarrow aRb$ – противоречие.

3.) Пусть aRb. Тогда $[a] = [b]$.

Действительно, пусть $x \in [b]$, то есть bRx.

Тогда aRb и $bRx \Rightarrow aRx \Rightarrow x \in [a]$.

Значит $[b] \subseteq [a]$

Аналогично можно заключить, что $[a] \subseteq [b]$. Из этого следует, что классы совпадают.

4.) A есть объединение набора непересекающихся множеств (классов эквивалентности). Классы внутри пересекаться не могут, т.к если пересекаются, то по транзитивности это один и тот же класс.

5.) Пусть $x, y \in [a]$. Тогда aRx и $aRy \Rightarrow xRa$ и $aRy \Rightarrow xRy$.

6.) Если $x, y \in$ разным классам, то $\neg(xRy)$.

От противного: пусть $x \in [a], y \in [b], [a] \neq [b], xRy$.

Тогда aRx, xRy, $yRb \Rightarrow aRb$, то есть $[a] = [b]$.

2.5 Числа сочетаний: явная и рекуррентная формула. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение для чисел сочетаний. Бином Ньютона. Сумма биномиальных коэффициентов. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.

- Число размещений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Количество способов извлечь первый элемент равно n. Удалим его из множества. Количество затем извлечь из оставшихся $n-1$ объекта второй элемент равно $n-1$. Продолжим эту процедуру пока не извлечем k элементов. (на последнем шаге количество способов будет равно $n-k+1$). Применим правило умножения и получим, что количество способов извлечь k произвольных элементов (что и есть неупорядоченный k-элеметный набор элементов) из n-элементого множества равно $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

- Число сочетаний явная формула

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Выпишем все сочетания. Далее заменим каждое на всевозможные его перестановки (то есть $\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k\} \rightarrow \{\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k\}, \{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k-1}\}, ..., \{a_k, a_{k-1}, ..., a_1\}\}$). Получим всевозможные размещения. Количество способов переставить сочетание размера k равно $k!$ (так как все элементы различные). Таким образом получим $A_n^k = C_n^k \cdot k! \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

- Число сочетаний рекуррентная формула

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Обозначим первый элемент n-элементого множества за a. Любое сочетание размера k из этого множества либо содержит его, либо не содержит. Число сочетаний размера k не содержащих a равно числу сочетаний размера k из $(n-1)$-элементного множества, то есть C_{n-1}^k. Число сочетаний размера k содержащих a равно числу сочетаний размера $(k-1)$ из $(n-1)$-элементого множества, то есть C_{n-1}^{k-1}. В итоге получим:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_n^{k-1}$$

- Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Очевидно, что $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{n}$. Пусть мы взяли a из k скобок и b из остальных $n-k$ скобок. Получим слагаемое вида $a^k b^{n-k}$. Количество способов взять такое слагаемое равно количеству способов выбрать k скобок из которых мы возьмем a (так как если нам известно из каких скобок мы возьмем a, нам известно из каких скобок мы возьмем b). Это количество равно числу сочетаний размера k из n-элементного множества, то есть слагаемое $a^k b^{n-k}$ войдет в итоговое разложение C_n^k раз. Получим:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot b^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + ... + C_n^n \cdot a^n \cdot b^0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

- Сумма биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1^0 \cdot 1^n \cdot C_n^0 + 1^1 \cdot 1^{n-1} \cdot C_n^1 + ... + 1^n \cdot 1^0 \cdot C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

- Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C^k = (-1)^0 \cdot 1^n \cdot C_n^0 + (-1)^1 \cdot 1^{n-1} \cdot C_n^1 + ... + (-1)^n \cdot 1^0 \cdot C_n^n = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

2.6 Сочетания с повторениями. Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ в неотрицательных целых числах.

- Сочетания с повторениями

Обозначим исходное множество за $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Пусть у нас есть сочетание с повторениями размера k из этого множества. Сопоставим ему следующую последовательность 0 и 1:

$$\underbrace{1...1}_{cnt_{a_1}} 0 \underbrace{1...1}_{cnt_{a_2}} 0... \underbrace{1...1}_{cnt_{a_n}} 0$$

где cnt_{a_i} - количество элементов a_i в сочетании.

Теперь заметим несколько фактов:

1. Длина такой последовательности равна $n+k-1$, так как сумма всех cnt_{a_i} равна размеру сочетания, то есть k, а количество нулей равно $n-1$.
2. Такое отображение будет биективным, так как два разных сочетания переходят в разные последовательности (если два сочетания не равны, то они различаются хотя бы в одной позиции. Возьмем первую такую позицию, пусть в первом сочетании там стоит a, а во втором b. Тогда при построении двоичной последовательности после $\min(a,b)$ единиц в одной последовательности последует 0, а в другой 1, следовательно не равны) и для любой подходящей последовательности найдется соответствующее ей сочетание.

Поскольку между множествами существует биекция, их мощности равны. Значит количество сочетаний с повторениями равно количеству двоичных последовательностей вышеуказанного вида. А оно равно C_{n+k-1}^k, так как выбрав позиции единиц, мы однозначно можем восстановить позиции нулей. То есть $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$, ч.т.д.

- Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_k = n, x_i \geqslant 0, x_i \in \mathbb{Z}$

Для начала решим аналогичную задачу, но с ограничем $x_i \geqslant 1$. Применим метод шаров и перегородок. Пусть у нас есть n шаров, расположенных в линию и мы поставили между ними $k-1$ перегородку, причем никакие две перегородки не идут подряд (то есть не разделяют одинаковые пары шаров). Тогда пусть x_i это будет количество шаров до i-й перегородки. Понятно, что тогда выполняется условие $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$. То есть количество решений уравнений сводится к количеству способов расставить перегородки в такой модели. У нас есть $(n-1)$ позиция куда мы можем поставить перегородку и их количество равно $(k-1)$, значит число способов равно C_{n-1}^{k-1}, ч.т.д.

2.7 Полиномиальные коэффициенты. Их алгебраический и комбинаторный смысл.

$$\binom{n}{\alpha_1, \quad ..., \quad \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!}$$

Очевидно, что $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + ... + x_k)(x_1 + ... + x_k)...(x_1 + ..x_k)}_{n}$. Пусть из α_i скобок мы выбрали x_i. Получим слагаемое $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_k^{\alpha_k}$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$. Тогда количество способов его выбрать равно произведению количеств способов выбрать каждый x_i. Получим:

$$\binom{n}{\alpha_1, \quad ..., \quad \alpha_k} = C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2}^{\alpha_3} \cdot ... \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_k}^{\alpha_k} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-\alpha_1-...-\alpha_{k-1})!}{\alpha_k!(n-\alpha_1-...-\alpha_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!} \cdot \frac{1}{\alpha_2!} \cdot ... \cdot \frac{1}{\alpha_k!} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}$$

2.8 Формулы, полные системы связок. Полнота системы связок «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание». Дизъюкктивная нормальная форма, СДНФ.

Теорема 4.6: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ – полная система связок

Доказательство:

Выразим функции f, равные единице только на одном конкретном наборе. Пусть такая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна единице на наборе $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда $f = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$, где $y_i = \neg x_i$, если $a_i = 0$ и $y_i = x_i$ иначе.

Обозначим за $x^a = x$ если $a = 1$ и $\neg x$ если $a = 0$.

То есть $f_{a_1,a_2,...,a_n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{a_n}$ – функция, которая принимает 1 только на наборе $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Пусть f принимает 1 на некоторых наборах.

Тогда $f = \bigvee\limits_{(a_1,...,a_n)\in\{0,1\}^n : f(a_1,a_2,...,a_n)=1} f_{a_1,a_2,...,a_n} = \bigvee\limits_{(a_1,...,a_n): f(a)=1} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$

Частный случай: тождественный ноль, мы можем его выразить как $x_1 \wedge \neg x_1$.

Вообще, такое представление функции имеет название СДНФ или совершенная дизьюнктивная нормальная форма.

2.9 Полнота системы связок «XOR, конъюнкция, 1». Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина (существование и единственность).

Полнота системы связок многочлена Жегалкина.: Система связок $\{1, \oplus, \wedge\}$ – полная система связок

Доказательство:

Индукция по n:

База: $n = 0$
$0 = 1 \oplus 1$, $1 = 1$

Переход: $n \to n + 1$

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = (f(x_1,\ldots,x_n,0) \wedge (x_{n+1} \oplus 1)) \oplus (f(x_1,\ldots,x_n,1) \wedge x_{n+1})$

Подставляем вместо x_{n+1} 0 и 1, получаем функци уже от n переменных. По индукции, для них уже построены многочлены Жегалкина. Потому, подставим их вместо функций и приведем подобные, получим многочлен Жегалкина от $n + 1$ переменной.

Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина (существование и единственность).

Всякая булева функция от n переменных единственным образом представима в виде полинома Жегалкина(с точностью до перестановки мономов и переменных).

Доказательство:

Существование было доказано только что.

Теперь докажем единственность. Всего булевых функций от n переменных - 2^{2^n}. Количество мономов(a_i) в полиноме Жегалкина - 2^n, каждый может быть равен 0 или 1. Значит всего полиномов Жегалкина - 2^{2^n}.

Теперь построим биекцию $f : \{\Pi_1, ..., \Pi_{2^{2^n}}\} \to \{f_1, ..., f_{2^{2^n}}\}$, где f_i - булева функция, а Π_i - полином Жегалкина.

Пусть $f(\Pi_i)$ - функция, которой соответствует полином Жегалкина. Тогда f - сюръекция и тотальная функция, но в силу равенства количества функций и полиномов Жегалкина, f - инъекция, поэтому f - биекция. Значит представление функции в виде полинома Жегалкина единственно. Чтд

2.10 Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции. Классы функций, сохраняющих константу. Лемма о функции, не лежащей в классе, сохраняющем константу.

Замкнутость класса линейных функций $[L] = L$

Доказательство: Индукция по построению формулы:

Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_k)f_1, f_2, \ldots, f_k \in L$. Докажем, что $f_0(f_1(x_1, \ldots,x_n), \ldots,f_k(x_1, \ldots,x_n)) = g \in L$. Вспомним, что $g = a_0 \oplus a_1f_1 \oplus a_2f_2 \oplus \ldots \oplus a_kf_k$. Подставим f_i, раскроем скобки, приведем подобные и получим линейную функцию. Получается, что $g \in L$.

Утверждение $L = [\oplus, 1]$

Доказательство: по определению линейной функции.

Лемма о нелинейной функции: Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$. Тогда подставив вместо переменных функции $x_1, \ldots, x_n$ 0, x и y можно получить $g(x, y) \notin L$.

Доказательство: $f(x_1, \ldots,x_n) = \ldots \oplus (x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}) \ldots$.

Рассмотрим в многочлене Жегалкина мономы с количеством переменных $r \geq 2 : x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$. Подставим в x_{i_1} x, а во все остальное y.

$g(x, y) = x \wedge y \oplus ax \oplus by \oplus c \notin L$.

Следствие: Пусть $f \notin L$. Тогда $x \wedge y \in [\{0, \neg x, f\}]$

Доказательство: $g(x, y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c \in [\{0, f\}]$

Рассмотрим $g(x \oplus b, y \oplus a) = (x \oplus b) \wedge (y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c = xy \oplus xa \oplus by \oplus ab \oplus ax \oplus ab \oplus by \oplus ab = xy \oplus ab \oplus c$. Если $ab \oplus c = 0$, то все хорошо и мы получили xy. Иначе $\neg g(x \oplus b, y \oplus a) = xy$.

Класс $T_0 = \{f \in P_2 | f(0, \ldots, 0) = 0\}$

Класс $T_1 = \{f \in P_2 | f(1, \ldots, 1) = 1\}$

($f \in T_0$ – функция, сохраняющая ноль; $f \in T_1$ – функция, сохраняющая единицу).

Замкнутость классов функций, сохраняющих константу. $[T_0] = T_0$, $[T_1] = T_1$

Доказательство:

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_k \in T_0$. Тогда $f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)) \in T_0$ так, как $f_0(f_1(0, \ldots, 0), f_2(0, \ldots, 0), . f_0(0, \ldots, 0) = 0$. Аналогично доказывается и для T_1.

Лемма о функции, не лежащей в классе, сохраняющем константу.

1. Если $f \notin T_0$, тогда $f(x, \ldots, x) = \{1, \neg x\}$. *(т.к для $f(0, \ldots, 0)$ мы точно знаем что значение равно 1, а для $f(1, \ldots, 1)$ множество будет содержать в себе все возможные значения f).*

2. Если $f \notin T_1$, тогда $f(x, \ldots, x) = \{0, \neg x\}$ *(аналогично).*

2.11 Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.

Класс S

Лемма о принципе двойственности:

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$. Тогда: $f^*(x_1,\dots,x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k^*(x_1,\dots,x_n))$

Доказательство:

$$f^*(x_1,\dots,x_n) = \neg f(f_1^*(\neg x_1,\dots,\neg x_n),\dots,f_k^*(\neg x_1,\dots,\neg x_n)) =$$

$$= \neg f_0(\neg f_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,\neg f_k^*(x_1,\dots,x_n)) = f_0^*(f_1^*(x_1\dots x_n),\dots,f_k^*(x_1\dots x_n))$$

Следствие $[S] = S$

Доказательство: $x_i \in S$

$f_0,\dots,f_k \in S \Rightarrow f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n)) = g(x_1,\dots,x_n) \in S$

$g^* = g$ по принципу двойственности.

Лемма о несамодвойственной функции:

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \notin S$. Тогда подставляя вместо переменных функции $x, \neg x$, можно получить константу.

Доказательство:

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \neq \neg f(\neg x_1,\dots,\neg x_n)$. Тогда есть какой-то набор $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \{0,1\}^n$ такой, что: $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f(\neg\alpha_1,\dots,\neg\alpha_n)$. Подставим вместо единиц в этом наборе x и вместо нулей $\neg x$. Таким образом, получили новую функцию g от одной переменной. Для неё будет справедливо следующее: $g(1) = f(\alpha_i) = f(\neg\alpha_i) = g(0)$.

Класс M

Для того, чтобы ввести класс монотонных функций нам нужно ввести понятие порядка. Скажем, что изначально $0 < 1$. Тогда: **набор** $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ **меньше** $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, если $\forall i, \alpha_i \le \beta_i$.

Пример: $(1,0) \le (1,1)$
$(1,0) \not\le (0,1)$ (не сравнимы)
$(0,1) \not\le (1,0)$ (не сравнимы)

$f \in P_2$ **- монотонная**, если $\forall \alpha_i, \beta_i : \alpha_i \le \beta_i \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)$

Лемма о замкнутости класса монотонных функций. $[M] = M$

Доказательство: $x_i \in M_i$

$f_0,\dots,f_k \in M$, $g(x_1,\dots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$. Пусть $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \le (\beta_1,\dots,\beta_n) = \beta$. Тогда $\forall 1 \le i \le k, f_i(\alpha) \le f_i(\beta) \Rightarrow f_0(f_i(\alpha)) \le f_0(f_i(\beta))$.

Лемма о немонотонной функции:

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \notin M$. Тогда, подставляя вместо переменных 0, 1, x, можно получить $\neg x$.

Доказательство: $\exists \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\exists \beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ такие, что $\alpha \le \beta$, но при этом $f(\alpha) = 1, f(\beta) = 0$ (т.к функция $\notin M$).

Построим новую функцию $g(x)$, полученная в результате подставления в x_i значения $0, 1$ и x. Рассмотрим две группы индексов i:

1. $\alpha_i = \beta_i$. Тогда поставим в x_i значение α_i.
2. $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$. Тогда поставим в x_i переменную x.

При подстановке в x значения 1 получим значение $g(1) = f(\beta) = 0$. При подстановке в x значения 0 получим значение $g(0) = f(\alpha) = 1$. Получим то, что нам было нужно.

2.12 Критерий Поста полноты системы булевых функций.

Критерий Поста. $[F] = P_2 \Leftrightarrow F \not\subseteq L, F \not\subseteq T_0, F \not\subseteq T_1, F \not\subseteq S, F \not\subseteq M$

Доказательство:

1. $\Leftarrow$

От противного: пусть $F \subseteq C$, где C это какой-то класс. Тогда $[F] \subseteq [C] = C$.

2. $\Rightarrow$

Из леммы о функции, не лежащей в классе, сохраняющем константу, заметим, что мы можем выразить из функций не из T_0 и не из T_1 либо константы, либо отрицание $\neg x$. Пусть мы смогли выразить отрицание. Тогда по лемме о несамодвойственной функции мы также можем выразить 0 и 1. Пусть мы не смогли выразить отрицание. Тогда мы точно смогли выразить 0 и 1, потому по лемме о немонотонной функции, используя 0, 1 и x, мы можем выразить $\neg x$. По лемме о нелинейной функции, коньюнкция $x \wedge y \in [0, \neg x, f]$. Потому мы также можем выразить коньюнкцию, а из коньюнкции и отрицания можем выразить дизьюнкцию, потому мы получили полную систему связок.

2.13 Предполные классы булевых функций. Описание предполных классов булевых функций

В P_2 есть ровно пять предполных классов: T_0, T_1, L, S, M

Доказательство:

Сперва докажем, что эти пять классов являются различными. Для этого, например, можно написать таблицу в которой на пересечении строки и столбца будет выписана функция, принадлежащая классу соответствующему строке и не принадлежащая классу соответствующему столбцу.

#	T_0	T_1	M	S	L
T_0	#	0	$x \oplus y$	0	$x \wedge y$
T_1	1	#	$x \oplus y \oplus 1$	1	$x \wedge y$
M	1	0	#	1	$x \wedge y$
S	$\neg x$	$\neg x$	$\neg x$	#	$MAJ(x, y, z)$
L	1	0	$x \oplus y$	1	#

Теперь докажем, что эти классы являются предполными: допустим мы взяли клас T_0 и добавили в него какую-то функцию не из T_0. Из таблицы выписанной выше видно, что в T_0 для оставшихся четырех классов найдется функция не входящая в эти классы, а мы добавили функцию не из T_0. Получается, по критерию Поста, мы получили полную систему. А значит T_0 - предполный класс. Аналогично это можно доказать и для T_1, M, S, L.

Теперь докажем, что никакой другой класс не является предполным. Пусть существует еще какой-то предполный класс F. F должен полностью содержатся в одном из классов T_0, T_1, M, S, L, иначе, по критерию Поста, F - полная система. Пускай F содержится в T_0(для других классов все аналогично), но при этом $F \neq T_0$, ведь мы предположили, что это какой-то другой класс. Но тогда найдется функций g такая, что $g \in T_0 \setminus F$. Значит $g \cup F \in T_0$ но из этого следует, что $[g \cup F \neq P_2$. Значит F - не предполный класс.

2.14 Формула включений-исключений

Для начала введем определение характеристической функции. Пусть есть множество X и вы нем выбрали подмножество $A \subseteq X$. Тогда следующуюу функцию называют характеристической:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Отметим следующие её свойства:
$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$
$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$
$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x))$

Используя равенство $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}}$ получим (далее в записи будет опускаться x, то есть $\chi_A(x) \Leftrightarrow \chi_A(x)$):

$$\chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n} = \chi_{\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}}} = 1 - \chi_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}} =$$

$$= 1 - \chi_{\overline{A_1}}\chi_{\overline{A_2}}...\chi_{\overline{A_n}} = 1 - (1-\chi_{A_1})(1-\chi_{A_2})...(1-\chi_{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_k} (-1)^{k+1} \chi_{A_{i_1}} \chi_{A_{i_2}} ... \chi_{A_{i_k}}$$

Понятно, что $|A| = \sum_{x \in A} \chi_A(x)$. Получим:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}(x) =$$

$$= \sum_{x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_k} (-1)^{k+1} \chi_{A_{i_1}}(x) \chi_{A_{i_2}}(x) ... \chi_{A_{i_k}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

2.15 Подмножество счетного множества конечно или счетно. Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно. Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.

Подмножество счетного множества конечно или счетно.

Пусть B - счетно. $A \subseteq B$, тогда A - счетно или конечно.

Доказательство:

Так как B - счетно, то занумеруем все элементы из B и выпишем их в ряд. Теперь вычеркнем все элементы из $B \backslash A$.

$$B : \not{b}_1, b_2, b_3, \not{b}_4, ..., b_5, \not{b}_6, ...$$

Остались только элементы из A и это все элементы A, значит мы занумеровали все элементы из A. Чтд

Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество.

Если A - бесконечное множество, то $\exists B \subseteq A$, что B - счетно.

Доказательство:

$\exists a_1 \in A \Rightarrow B_1 = \{a_1\}$

$\exists a_2 \in A \backslash B_1 \Rightarrow B_2 = \{a_1, a_2\}$

$\exists a_3 \in A \backslash B_2 \Rightarrow B_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$

...

$\exists a_k \in A \backslash B_{k-1} \Rightarrow B_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, очевидно, что B - счетно. Чтд

Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

Пусть нам дано не более чем счетное количество множеств $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ Тогда докажем, что их объединение - не более, чем счетно.

Доказательство:

Выпишем в столбец все множества $A_1, A_2, ...$, так можно, так как их не более чем, счетно. В строку выпишем элементы этих множеств.

$$\begin{array}{c|cccc} A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... \\ A_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... \\ \vdots & ... & ... & ... & \ddots \end{array}$$

Теперь будем набирать элементы по диагоналям, сначала берем с первой, потом со второй и тд. Так мы получим все элементы из A. И они будут занумерованы. Если какие-то элементы совпали, то их можно просто пропустить.

$$A = a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...$$

Ну или можно представить это в виде

$$A = \bigcup_{i=2}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i-1} a_{j(j-i)}$$

Значит A - счетно. Чтд

Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно.

Сначала докажем, что если A, B - счетны. То $A \times B$ - тоже счетно.

Доказательство:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{A \times \{b_i\}}_{\text{счетное множество}}$$

Но очевидно, что $A \times \{b_i\}$ - счетное множество, так как это просто множество A, к каждому элементу в котором приписали b_i. Значит $A \times B$ - счетное объединение счетных множеств, значит оно счетно.

Но раз $A \times B$ - счетно, то перейдя к равномощным $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ - тоже счетно, значит можно по индукции доказать, что $\forall k \ \ \mathbb{N}^k$ - счетно. Чтд

Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.

Пусть n - длина максимальной последовательности, значит такое множество можно представить в виде $\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{N}^k$.

$\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{N}^k$ - счетно, так как это счетное объединение счетных множеств. Кстати, тут $\mathbb{N}^k$ - можно считать за все слова длины k в алфавите $\mathbb{N}$.

2.16 Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то множество $A \cup B$ равномощно A. Равномощность множеств: бесконечных последовательностей из 0 и 1; вещественных чисел; $[0,1]; [0,1)$; множества всех подмножеств натуральных чисел. Равномощность отрезка и квадрата.

Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то множество $A \cup B$ равномощно A.

Пусть A - бесконечно, B - не более, чем счетное. Тогда $A \cup B \sim A$.

Доказательство:

$B' = B \backslash A$, B' - не более, чем счетное. Очевидно, что $A \cup B = A \cup B'$, но A и B' - не пересекаются. Так как A - бесконечно, то $\exists C \subseteq A, C$ - счетно. Так как $C \cup B'$ - счетно, то $C \sim C \cup B'$. Значит $\exists f : C \to C \cup B'$ - биекция.

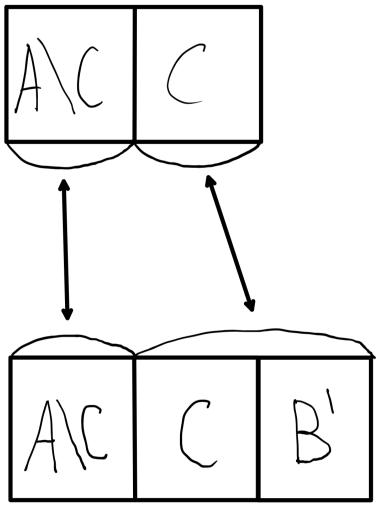


Рис. 1: иллюстрация биекции

Теперь просто построим биекцию $g : A \to A \cup B'$.

$$g(a) = \begin{cases} f(a), \text{если } a \in C \\ a, \text{иначе} \end{cases}$$

Равномощность множеств: $\mathbb{B}^\infty \sim [0,1) \sim [0,1] \sim \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$**.**

Доказательство $\mathbb{B}^\infty \sim [0,1)$**:**

Построим биекцию $f : \mathbb{B}^\infty \to [0,1)$. Инициализируем f(b) так:

Пусть $b = b_0 b_1 b_2 ...$, тогда разделим полуинтервал напополам, если $b_0 = 0$, то перейдем в левую половину и запустимся рекурсивно, если $b_0 = 1$, то вправо. Так мы сможем получить любые числа на полуинтервале $[0,1)$, но это не будет биекцией, так как некоторые числа можно получить двумя способами. К примеру, $\frac{1}{2}$ будет соответствовать последовательность 01111... и 10000.... Поэтому давайте просто запретим последовательности, которые заканчиваются на бесконечную последовательность 1. Тогда $\mathbb{B}^\infty = \mathbb{B}' \cup Y$, где $Y = \{(* * * * * * *0), 1111...\}$ - все последовательности, которые заканчиваются на все 1. Но $Y = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Y_k$, где $Y_k = \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, 0, 1, 1, 1, ...\}$, но Y_k - конечно($|Y_k| = 2^{k-1}$). Значит Y - счетно, а $\mathbb{B}' \sim [0,1)$, так как мы исключили плохие случаи, то верно, что

$$\mathbb{B}^\infty = \mathbb{B}' \cup Y \sim \mathbb{B}' \sim [0,1)$$

Доказательство $[0,1) \sim [0,1] \sim \mathbb{R}$**:**

Добавление конечного не меняет мощность, поэтому $[0,1) \sim [0,1] \sim (0,1)$. Заметим, что $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тут легко строится биекция $f : (0,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = x \cdot \pi - \frac{\pi}{2}$. Пусть $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ и $g(x) = \operatorname{tg} x$ - это очевидно биекция, тогда $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$. Значит $[0,1) \sim [0,1] \sim (0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$.

Доказательство $\mathbb{B}^\infty \sim 2^{\mathbb{N}}$**:**

Тут довольно легко построить биекцию. Пусть дана двоичная последовательность $b = b_1 b_2 b_3 ....$ Тогда если $b_i = 1$, то мы берем число i в наше подмножество, а если 0, то не берем. При таком кодировании очевидно все подмножества будут различны. Аналогично можно восстановить бинарную последовательность из данного подмножества.

Равномощность отрезка и квадрата.

Было доказано, что $\mathbb{B}^\infty \to [0,1]$. Докажем, что $\mathbb{B}^\infty \to \mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty$. Построим биекцию $f : (\mathbb{B}^\infty)^2 \to \mathbb{B}^\infty$, наглядно продемонстрируем работу $f((a,b))$

$$\left.\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 ... \\ b_1 b_2 b_3 b_4 ... \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{f}} a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 ...$$

Значит $[0,1] \sim \mathbb{B}^\infty \sim (\mathbb{B}^\infty)^2 \sim [0,1]^2$.

2.17 Несчетность множества бесконечных последовательностей из 0 и 1. Сравнение мощностей, теорема Кантора о сравнении мощности множества и множества всех его подмножеств.

Несчетность множества бесконечных последовательностей из 0 и 1.
Доказательство от противного:

Пусть $\mathbb{B}^\infty$ - счетно. Тогда можно каждому натуральному поставить во взаимно-однозначное соответствие бесконечную последовательность из 0 и 1. Тогда выпишем в столбик все натуральные числа, а в строчку к ним припишем соответствующие им последовательности. Тогда у нас не будет последовательностей, которых нет в этой таблице. Воспользуемся диагональным методом Кантора.

1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	...	...
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	...	...
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	...	...
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	...	...
$\vdots$	...	...	...	...	$\ddots$	...
n	...	...	...	...	...	a_{nn}
$\vdots$	...	...	...	...	...	...

Теперь возьмем все элементы с диагонали и инвертируем их, то есть возьмем обратные к ним, заметим теперь, что мы из каждой последовательности взяли по элементу, и изменили его на обратный, то есть полученная последовательность не равна никакой из таблицы, то есть этой последовательности нет в таблице. Противоречие.

Сравнение мощностей, теорема Кантора о сравнении мощности множества и множества всех его подмножеств.

Пусть X - множество. Тогда $|X| < |2^X|$.

Доказательство:

1) $|X| \leqslant |2^X|$, так как существует инъекция $f : X \to 2^X$, $f(x) = \{x\} \in 2^X$.

2) $X \not\sim 2^X$
Докажем от обратного, пусть существует биекция $f : X \to 2^X$. Пусть $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Очевидно, что $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in 2^X$. Значит $\exists x \in X : f(x) = Y$.

1. $x \in Y \Rightarrow x \notin f(x) = Y$ - противоречие
2. $x \notin Y \Rightarrow x \in f(x) = Y$ - противоречие

Во все случаях получили противоречие, значит такой биекции нет. Чтд

2.18 Теорема Кантора – Бернштейна.

Пусть $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \geqslant |B|$. Тогда $A \sim B$. Для простоты будем считать, что $A \cap B = \varnothing$.

Доказательство.
По условию $\exists f : A \to B, g : B \to A$ - инъекции. Тогда построим множества:

$$C_0 = A \backslash g(B) \subseteq A$$

$$C_1 = g(f(C_0)) \subseteq A$$

$$\dots$$

$$C_{n+1} = g(f(C_n)) \subseteq A$$

$$\dots$$

Значит $C = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$. Теперь построим функцию $h : A \to B$.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in C \\ g^{-1}(x), x \notin C \end{cases}$$

Теперь докажем, что полученная функция h - биекция:

1) h - инъекция. Пусть $h(x_1) = h(x_2)$.

1. Если $x_1, x_2 \in C$, то $h(x_2) = h(x_1) = f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
2. Если $x_1, x_2 \notin C$, то $h(x_2) = h(x_1) = g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \Rightarrow g(h(x_2)) = g(h(x_1)) \Rightarrow x_2 = x_1$.
3. Если $x_1 \in C, x_2 \notin C$, то $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = x_2$, но так как $x_1 \in C_n, n \geqslant 0$, то $x_2 = g(f(x_1)) \in C_{n+1} \subseteq C \Rightarrow x_2 \in C$ - противоречие.

2) h - сюръекция. Пусть $y \in B$.

1. Если $y \in f(C) \Rightarrow \exists x \in C : y = f(x) \Rightarrow y = h(x)$.
2. Если $y \notin f(C) \Rightarrow$ рассмотрим $g(y)$.
   (a) Если $g(y) \notin C \Rightarrow h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$.
   (b) Если $g(y) \in C \Rightarrow g(y) \in C_n \Rightarrow g(y) = g(f(x)), x \in C_{n-1} \Rightarrow y = f(x) = h(x)$, так как $x \in C$.

Чтд

2.19 Изоморфизм конечных линейных порядков одинаковой мощности. Теорема о том, что счетный линейный порядок изоморфен подмножеству рациональных чисел.

- **Изоморфизм конечных линейных порядков одинаковой мощности**

  Пусть $(P, \leqslant_P), (Q, \leqslant_Q)$ - конечные линейно упорядоченные множества и $|P| = |Q|$. Тогда $(P, \leqslant_P) \cong (Q, \leqslant_Q)$

  Доказательство:

  Докажем по индукции. База - один элемент в порядке, тривиально. Предположим, что все линейные порядки мощности n изоморфны. Рассмотрим произвольные линейные порядки P и Q с $(n+1)$ элементов. Выделим в них наименьшие элементы p и q (они существуют, так как линейные порядки конечны). Порядки на оставшихся n элементах изоморфны по предположению индукции. Поставив в соответствие p элемент q получим изоморфизм порядков P и Q.

- **Теорема о том, что счетный линейный порядок изоморфен подмножеству рациональных чисел**

  Пусть $(P, \leqslant_P)$ - счетное линейное упорядоченное множество. Тогда $(P, \leqslant_P) \cong (A, \leqslant)$, где $A \subseteq \mathbb{Q}$

  Доказательство:

  Пусть $P = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$

  Построим инъекцию $\varphi\colon P \to \mathbb{Q} : p_i \leqslant_P p_j \Leftrightarrow \varphi(p_i) \leqslant \varphi(p_j)$

  $\varphi(p_1) = 1$

  Пусть определены значения функции в точках $p_1, p_2, ..., p_n$. Определим $\varphi(p_{n+1})$:

  1. Если p_{n+1} - наибольший элемент в множестве $\{p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}\}$, тогда $\varphi(p_{n+1}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(p_i) + 1$
  2. Если p_{n+1} - наибольший элемент в множестве $\{p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}\}$, тогда $\varphi(p_{n+1}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(p_i) - 1$
  3. Если $p_i < p_{n+1} < p_j$, где $|[p_i, p_j]| = 3$, тогда $\varphi(p_{n+1}) = \frac{\varphi p_i + \varphi p_j}{2}$

  Получили инъекцию, значит $P \cong \varphi P = A$, ч.т.д.

2.20 Доказательство эквивалентности трех определений фундированных множеств

Следующие три определения фундированных множеств эквивалентны:
1. каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент
2. любая убывающая цепь конечна
3. Для порядка P спраедлив принцип индукции: если для утверждения $A(p)$, зависящего от элемента порядка, для любого p верно утверждение «если $A(q)$ верно при всех $q < p$, то и $A(p)$ верно». Тогда утверждение $A(p)$ верно при любом $p \in P$.

Доказательство:

Докажем, что из 1 следует 2 и из 2 следует 1.
$1 \Rightarrow 2$. От противного: пусть существует бесконечная убывающая цепь. Тогда она не имеет минимальный элемент, т.к если бы имела, то цепь не была бы бесконечной.
$2 \Rightarrow 1$. Пусть какое-то непустое подмножество не имеет минимального элемента. Попробуем построить в нем бесконечную убывающую цепь. Возьмем какой-нибудь элемент x_0, он не минимальный, т.к существует $x_1 < x_0$, для x_1 же в свою очередь существует $x_2 < x_1$ и так далее. Получаем бесконечную убывающую цепь.
Таким образом, $1 \Leftrightarrow 2$. Докажем, что из 1 следует 3 и из 3 следует 1.
$1 \Rightarrow 3$. Рассмотрим множество всех x таких, что $A(x)$ ложно. Из 1 следует, что в данном множестве есть минимальный элемент m. Если это не минимум множества в целом. то для всех $y < m$ из множества, $A(y) = 1$, потому $A(m) = 1$ – противоречие. К тому же m не может быть минимальным элементом в множестве в целом, т.к тогда для него не выполняется принцип индукции, а мы предположили что он выполняется. Потому множество всех x таких, что $A(x) = 0$ пусто.
$3 \Rightarrow 1$. Выделим из P непустое подмножество X, в котором нет минимального элемента. Рассмотрим следующее индуктивное утверждение $A(p) : p \notin X$.
Индуктивное утверждение выполняется: если $q < p$ и $A(q) = 1$, то $A(p) = 1$ (иначе p – минимальный элемент в X). Потому $\forall p, p \notin X \Rightarrow X = \emptyset$.

2.21 Связь длины цепей и размеров разбиений частично упорядоченного множества на антицепи.

Пусть нам дано конечное частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$. Напомню, что $c_{\max}$ - максимальная цепь, $\hat{a}$ - максимальная антицепь. Теперь мы готовы доказывать теорему.

Доказательство.

Сначала докажем, что $c_{\max} \leqslant \hat{a}$. Разложим наше множество на минимальное количество антицепей, из каждой мы можем выбрать максимум по 1 элементу, чтобы получить цепь, значит по принципу Дирихле наше неравенство верно.

Теперь докажем обратное, что $c_{\max} \geqslant \hat{a}$.

$$\text{Возьмем } P_1 = \min(P) \text{ - множество всех минимальных элементов } P, \min(P) \neq \varnothing.$$
$$P_2 = \min(P \backslash P_1)$$
$$P_3 = \min(P \backslash (P_1 \cup P_2))$$
$$\dots$$
$$P_n = \min(P \backslash (P_1 \cup \dots \cup P_{n-1}))$$
$$P_{n+1} = \varnothing \text{ - такое } n+1 \text{ найдется, так как множество конечно.}$$

Все такие слои - антицепи. Возьмем $p_n \in P_n$. Заметим, что p_n - не минимальный в $P_{n-1} \cup P_n \Rightarrow \exists p_{n-1} \in P_{n-1} : p_n > p_{n-1}$. p_{n-1} - не минимальный в $P_n \cup P_{n-1} \cup P_{n-2} \Rightarrow \exists p_{n-2} \in P_{n-2} : p_n > p_{n-1} > p_{n-2}$.
Продолжаем этот процесс, пока не получим цепь c, $p_n > p_{n-1} > \dots > p_{n-2} > \dots > p_1$.

Значит $c_{\max} \geqslant |c| = n \geqslant \hat{a}$. Значит $c_{\max} = \hat{a}$. Чтд

2.22 Теорема Дилуорса

Теорема: Наибольший размер антицепи в порядке равен наименьшему количеству цепей в разбиениях порядка на непересекающиеся цепи.
Доказательство:

Напомню, что теорема Дилуорса работает только для конечных порядков, т.е их мощность это некоторое число n.
Для начала, любая цепь в разбиении содержит в себе не более одного элемента антицепи, иначе два элемента антицепи были бы сравнимы и антицепь не была бы антицепью, противоречие.
Давайте докажем теоремму дилуорса по индукции для мощности множества, на котором определен порядок, а именно: пусть для порядков, мощности $< n$, утверждение теоремы выполняется. Докажем, что утверждение выполняется для порядков мощности n.
Для пустого множества удтверждение теоремы очевидно выполняется. Потому, база индукции $n = 0$ корректна.
Пусть утверждение теоремы Дилуорса справедливо для конечных порядков, определенных на множествах мощностью $< n$. Докажем утверждение для конечных порядков мощности n.
Возьмем порядок, определенный на множестве мощности n и назовем его P. У всякого конечного порядка есть минимум, пусть это элемент m.
Также, пусть Q – это всё множество P без минимума m, а s это размер максимальной антицепи в множестве Q. Для множества Q теорема справедлива, т.к мощность Q меньше n.
Максимальный размер антицепи в P может быть равен s+1 или s. Если он равен s+1, то мы можем разбить P на $s + 1$ непересекающуюся цепь: возьмем разбиение Q на s цепей и добавим к данному разбиению элемент m как цепь из одного элемента. Иначе, сделаем следующее.
Рассмотрим каждую цепь из разбиения Q на s цепей по отдельности. Пусть a_i – минимальный элемент i-ой цепи в разбиении, для которого существует антицепь размера s, содержащая его. **Утверждение:** элементы A_i образуют антицепь.
Действительно, пусть $i \neq j, A_i \leq A_j$. Тогда возьмем цепь, содержащую A_i в качестве элемента, посмотрим какой элемент антицепи содержится в цепи, содержащей A_j. Если это сам A_j, то получается, что в антицепи есть два сравнимых элемента, что противоречит условию. Если этот элемент $\leq A_j$, то A_j это не минимальный элемент, для которого существует антицепь размера s, содержащая его. Осталось рассмотреть случай, когда данный элемент больше либо равен A_j.
Назовем этот элемент x. По транзитивности, т.к $A_i \leq A_j$, $A_j \leq x \Rightarrow A_i \leq x$. Получается, что в антицепи два элемента сравнимы. Противоречие.
Итак, если элементы A_i вместе с m образуют антицепь, то размер максимальной антицепи в P равен $s + 1$, но ведь мы предположили что этот размер равен s. Потому $\exists k : m \leq A_k$. Возьмем все элементы, содержащиеся в той же цепи, что и A_k, больше либо равные A_k. Объединим их вместе с m в цепь и исключим данную цепь из множества. Получившееся множество P' имеет размер антицепи равный $s - 1$, т.к иначе A_j, который мы исключили, был бы не минимален. Также, т.к мощность множества $P' < n$, данное множество можно разбить минимум на $s - 1$ непересекающихся цепей. Получается, что добавив удаленную цепь обратно мы сможем разбить множество P не менее, чем на s цепей и получить в нем антицепь размера не более, чем s. Переход доказан.

2.23 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

LYM-лемма, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Доказательство:

Посчитаем количество цепей максимальной длины двумя способами. Для начала разберемся какой длины максимальная цепь. Будем рассматривать элементы цепи в порядке увеличения. Тогда если после x идет y, то x - подслово y, это значит, что в y единицы обязательно в тех же местах что и в x + хотя бы еще одна в других местах. Каждый раз количество единиц в вершины строго увеличивается, а значит, чтобы достичь цепь максимальной длины, нужно увеличивать вес(количество единиц) вершины на 1. Получаем, что максимальная длина цепи $n + 1$.

Посчитаем первым способом количество цепей максимально длины. Чтобы дойти от 00...0 до 11...1. Нам нужно вставить в каком-то порядке n единиц, причем каждый порядок задает свою цепь. Получаем, что у нас $n!$ вариантов последовательно вставить единицы, а значит и $n!$ цепей.

Посчитаем вторым способом. Зафиксируем какую-то вершину куба x, вес которой k. Сколько цепей максимальной длины проходит через нее? По тем же соображениям $k! \cdot (n - k)!$, потому что нам нужно каким-то порядком сначала поставлять k заданных единиц, а потом дойти из x до 11...1, проставив уже $n - k$ единиц.

Тогда сколько цепей максимальной длины проходит через вершины антицепи A? Заметим тот факт, что через каждую вершину проходят свои уникальные цепи. Пусть это не так, тогда x_1 и x_2 находятся в одной цепи, значит их можно сравнить, значит они не могут быть в одной антицепи. Раз через каждую вершину проходят уникальные цепи

максимальной длины, можно выписать неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leqslant n!$$

то есть количество уникальных цепей максимальный длины, проходящих через вершины антицепи A не превосходит общего количества цепей максимальной длины. Делим неравенство на правую сторону, получаем то, что и требовалось доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Лемма, что $max_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k = C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Будет использоваться, но не доказываться.

Доказательство:
Возьмем, то, что мы получили в LYM-лемме и воспользуемся нашей локальной леммой, получим:

$$1 \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^{[\frac{n}{2}]}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

правая часть неравенства не что иное, как количество элементов в антицепи A.

Доказали, что небольше, как найти пример, где ровно. Посмотрим на все вершины весом $[\frac{n}{2}]$. Очевидно, что они все несравнимы, а их количество как раз равно $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Что и требовалось доказать.

2.24 Доказательство того, что достижимость в неориентированном графе является отношением эквивалентности и всякий граф можно разбить на компоненты связности. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Разбиение ориентированного графа на компоненты сильной связности.

- **Доказательство того, что достижимость в неориентированном графе является отношением эквивалентности и всякий граф можно разбить на компоненты связности**
  - Отношение связности считается отношением эквивалентности, если выполнены три условия:
    1. Рефлексивность: $xRx \; \forall x \in V$
    2. Симметричность: $xRy \Rightarrow yRx \; \forall x, y \in V$
    3. Транзитивность: $xRy, yRz \; \Rightarrow xRz \; \forall x, y, z \in V$
  - Докажем все эти 3 свойства.
    1. Рефлексивность: между вершинами x и x всегда существует путь нулевой длины, поэтому они лежат в одной компоненте связности
    2. Симметричность: если можно попасть из вершины x в вершину y, то можно попасть из вершины y в вершину x просто пройдя по всем ребрам в обратном порядке.
    3. Транзитивность: если есть путь из вершины x в вершину y, а из вершины y - в вершину z, то "склеив" эти два пути, можно получить путь из вершины x в вершину y
  - Таким образом, наше множество вершин V делится на классы эквивалентности, называемые компонентами связности

- **Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе**
  - Кол-во компонент связности в графе G всегда больше, либо равно $(|V| - |E|)$, где V - множество вершин в графе G, E - множество ребер в графе G.
  - Докажем это. Для начала, удалим все ребра из нашего графе, после чего будем их последовательно добавлять и следить за значением двух величин: разностью $(|V| - |E|)$ и количеством компонент связности. Каждый раз, когда мы добавляем ребро, $|E|$ увеличивается на один, соответственно, разница $(|V| - |E|)$ уменьшается на один. Посмотрим на концы добавленного ребра. Если эти вершины были в одной компоненте связности, то количество компонент связности не изменится. Иначе, две компоненты связности соединятся, и общее количество компонент связности уменьшится на 1. Выходит, после каждого шага $(|V| - |E|)$

уменьшается на 1, а кол-во компонент связности уменьшается либо на 0, либо на 1. Стоит отметить, что до добавления первого ребра эти две величины будут равны. Отсюда следует инвариант: после добавления любого ребра ($|V| - |E|$) будет больше, либо равно кол-ва компонент связности.

- **Разбиение ориентированного графа на компоненты сильной связности**
  - Отношение сильной связности - отношение эквивалентности.
  - Докажем это.
    1. Рефлексивность: между вершинами x и x всегда существует путь нулевой длины, поэтому они лежат в одной компоненте связности
    2. Симметричность: если вершины x и y сильно связаны, то по определению существует ориентированный путь из x в y и из y в x.
    3. Транзитивность: если вершины x и y, y и z сильно связаны, то по определению есть ориентированный путь $x \to y$ и $y \to z$, следовательно, есть ориентированный путь $x \to z$. Аналогично показывается, что есть путь $z \to x$.
  - Наше множество вершин в графе G разбивается на непересекающиеся подмножества вершин: $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Они называются компонентами сильной связности. Сожмем каждую компоненту в одну вершину. Затем, посмотрим на наши исходные ребра в нашем графе. Если концы i-ого ребра находятся в разных компонентах связности, соединим две вершины, которые будут соответствовать сжатым компонентам связности. Получим новый граф, который называется **конденсацией графа G**.

2.25 Эквивалентность различных определений деревьев: число вершин и число ребер, минимально связные графы, графы без простых циклов, графы с единственностью простых путей. Существование остовного дерева в связном графе.

- **Эквивалентность различных определений деревьев: число вершин и число ребер, минимально связные графы, графы без простых циклов, графы с единственностью простых путей**
  - Существует 4 эквивалентных определения графа G, который является деревом:
    1. G связен и $|E| = |V| - 1$, то есть количество ребер на один меньше, чем количество вершин
    2. G - минимально связный граф
    3. G связен и в нем нет циклов
    4. в G между любыми вершинами v, u существует единственный простой путь
  - Покажем, что все 4 определения эквивалентны.
    * Докажем, что из **1** следует **2**. Воспользуемся неравенством, что кол-во компонент связности больше, либо равно ($|V| - |E|$). В нашем случае, $|V| - |E| = 1$, поэтому при удалении любого ребра, $|V| - |E|$ станет равно 2, то есть кол-во компонент связности станет строго больше 1. Отсюда следует, что наш граф - минимальный связный граф.
    * Докажем, что из **2** следует **3**. Предположим противное - в нашем графе есть цикл. Тогда можно удалить любое ребро из этого цикла, и граф все ещё останется связным в силу того, что удаленное ребро можно "компенсировать оставшейся частью цикла". Выходит, наш граф не минимально связный - противоречие.
    * Докажем, что из **3** следует **4**. Предположим противное - между двумя вершинами v и u существует два простых пути. Найдем первую вершину, после которой эти пути отличаются, пусть это будет вершина a. Таким образом, первый и второй путь начинаются с одинаковой части $v \to a$. Найдем первую вершину после вершины a, где они совпадают, пусть это будет вершина b. Такие вершины обязательно найдутся, к примеру, в качестве вершины a подойдет вершина v, в качестве вершины b - вершина u. Заметим, что участки путей между вершинами a и b не пересекаются, выходит мы нашли цикл на вершинах a и b - противоречие.
    * Докажем, что из **4** следует **1**. Для начала заметим такой факт. Если мы добавляем ребро $(v; u)$ в граф, при этом они уже находятся в одной компоненте связности, то между вершинами v и u будет хотя бы два простых различных пути. Первый - по ребру $(v; u)$. Второй - вершины v и u были в одной компоненте связности, поэтому между ними существовал какой-либо простой путь. Вернемся к нашему доказательству, выкинем все ребра из нашего и будем их по очереди туда добавлять. Заметим, что между любыми двумя вершинами v и u существует единственный простой путь. Поэтому каждый раз, когда мы добавляем новое ребро, оно должно иметь концы в разных компонентах связности. В начале процесса граф состоял из $|V|$ компонент связности. При добавлении любого ребра, кол-во компонент уменьшается на 1. Отсюда следует, что мы сможем добавить не более $|V| - 1$ ребра. Но ведь наш граф связный, поэтому в нём одна компонента связности, выходит мы обязаны добавить хотя бы $|V| - 1$ ребер. Отсюда - в нашем графе должно быть ровно $|V| - 1$ ребер.

- **Существование остовного дерева в связном графе**
  - Докажем, что в любом связном графе существует остовное дерево. Будем удалять из нашего графа ребра, при удалении которых не увеличивается количество компонент связности. Заметим, что если таких ребер не осталось, то мы имеем минимальный связный граф. Отсюда следует, что получившийся граф - **остовное дерево**.

2.26 Ациклические орграфы, топологическая сортировка

- Рассмотрим следующие утверждения:
  1. Ориентированный граф G ацикличен.
  2. Все компонентны сильной связности G состоят из одной вершины.
  3. Вершины G можно пронумеровать числами от 1 до n таким образом, что если из вершины v можно достичь вершину u, то номер, сопоставленный вершине v будет меньше номера, сопоставленного вершине u.
- Докажем, что эти утверждения эквивалентны.
  - Докажем, что из **1** следует **2**. Предположим, что существуют две вершины v, u, которые находятся в одной компоненте сильной связности. Значит есть путь $v \to u$ и $u \to v$, то есть есть существует цикл на вершинах v и u - противоречие.
  - Докажем, что из **2** следует **1**. Предположим, что в графе G бы существовал цикл. Рассмотрим две вершины v, u из этого цикла. Посколько из v можно попасть в u, а из u в v, то они должны лежать в одной компоненте связности, следовательно размер этой компоненты будет хотя бы 2 - противоречие.
  - Докажем, что из **3** следует **1**. Предположим, что в графе G бы существовал цикл. Рассмотрим любое ребро из этого цикла, пусть оно имеет вид: $v \to u$. Тогда число, присвоенное вершине v должно быть меньше числа, присвоенного вершине u. С другой стороны, существует путь из вершины u в вершину v. Каждый раз, когда мы переходим к следующей вершине, номер, присвоенный ей, будет увеличиваться, поэтому когда мы придем из u в v, номер вершины v должен оказаться больше номера вершины u - противоречие.
  - Докажем, что из **1** следует **3**. Воспользуемся мат. индукцией по количеству вершин в графе.
    База: $n = 1$ - очевидно.
    Переход: Пусть верно для $n = (k-1)$, докажем для $n = k$. Найдем в нашем графе вершину, в которую не входит ни одно ребро. Такая всегда найдется, ведь иначе в нашем графе есть цикл.
    Покажем это: будем идти по обратным ребрам от произвольной вершины v. По предположению не существует вершины, в которую не входят ребра, поэтому мы можем идти по обратным ребрам бесконечно долго - неизбежно получится цикл.
    Итак, удалим вершину, в которую не входит ни одно ребро, присвоим ей номер 1. Останется часть графа на $(k-1)$ вершине, которую можно занумеровать числами от 1 до $(k-1)$. Прибавим к каждому номеру единицу. Получим граф, в котором каждой вершине сопоставлено число от 1 до k, причем если вершина v достижима из вершины u, то номер, сопоставленной вершине v будет меньше номера, сопоставленного вершине u.

2.27 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Определение:
Цикл называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа по одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

Критерий существования:
Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

Ориентированный граф без вершин нулевой степени (в которые не входит и из которых не выходит рёбер) содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Доказательство:
Будем доказывать параллельно оба варианта теоремы. Пусть сначала эйлеров цикл есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, граф связен (сильно связен в ориентированном случае).

Теперь про степени. Возьмём какую-то вершину v, пусть она встречается в цикле k раз. Идя по циклу, мы приходим в неё k раз и уходим k раз, значит, использовали k входящих и k исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны k, а в неориентированном графе её степень равна $2k$. Таким образом, в одну сторону критерий доказан.

Рассуждение в обратную сторону чуть сложнее. Будем рассматривать пути, которые не проходят дважды по одному ребру. (Таков, например, путь из одного ребра.) Выберем среди них самый длинный путь

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$$

и покажем, что он является искомым циклом, то есть что $a_1 = a_n$ и что он содержит все рёбра.

В самом деле, если он самый длинный, то добавить к нему ребро $a_n \to a_{n+1}$ уже нельзя, то есть все выходящие из an рёбра уже использованы. Это возможно, лишь если $a_1 = a_n$. В самом деле, если вершина an встречалась только внутри пути (пусть она входит k раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k+1$ входящих рёбер и k выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени (в ориентированном случае) или чётности степени (в неориентированном случае).

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (мы предполагаем, что граф связен или сильно связен) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины a_i выходит ребро $a_i \to v$, то путь можно удлинить до

$$a_i \to a_{i+1} \to \cdots \to a_n = a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_i \to v$$

вопреки нашему выбору (самого длинного пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра v $\to$ ai , добавив его в начало. (А можно заметить, что если есть неиспользованное входящее ребро, то есть и неиспользованное выходящее.) Это рассуждение было для ориентированного случая, но в неориентированном всё аналогично. Теорема доказана.

Помимо эйлеровых циклов, можно рассматривать *эйлеровы пути* — пути в графе, которые проходят один раз по каждому ребру. (Для неориентированных графов: рисуем картинку, не отрывая карандаша от бумаги, но не обязаны вернуться в исходную точку.) Для них тоже есть критерий: в неориентированном случае нужно, чтобы граф был связен и было не более двух вершин нечётной степени.

2.28 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.

Определение:
Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором можно разбить вершины на две доли — левые и правые, что все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли).

Критерий двудольности:
Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый, то есть не содержит циклов нечетной длины.
Очевидно доказать экививалентность утверждений граф двудольный и граф двураскрашиваемый, так что приведем доказательство того, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечетной длины.

Доказательство:
Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине c, которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии (все расстояния и пути подразумеваются минимальными по количеству ребер) 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра $\{u, v\}$ концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра с некоторой компоненты до вершин u и v имеют одинаковую чётность. Заметим, что если расстояния от центра до u и v не равны,

то путь до одной из вершин можно было сократить, проходя через другую вершину (так как расстояния отличаются как минимум на 2). Получаем, что расстояния от центра до v и u равны.

Но тогда путь от центра до v + ребро $\{v, u\}$ + путь от u до центра имеют нечетную длину (пути могут пересекаться, но простоту цикла в теореме ничего не сказано). Получили противоречие.

Булев куб двураскрашиваемый

Будем называть четностью вершины $v = (x_1, \ldots, x_n)$ число $parity(v) = x_1 + \cdots + x_n \bmod 2$. Тогда заметим, что если v, u связаны ребром, то $parity(v) \neq parity(u)$. Значит если у нас существует цикл нечетной длины k

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$$

то, так как четность на каждом шаге меняется, получаем $parity(v_1) = parity(v_3) = \cdots = parity(v_k)$, но соседние вершины не могут иметь одну четность. Получаем противоречие.

2.29 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше вершин, чем X, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле L.

База индукции. Если в L всего одна вершина x, то у неё есть хотя бы один сосед y в правой доле R по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром $\{x, y\}$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше n вершин. Рассмотрим граф $G = (L, R, E)$, для которого выполняются условия теоремы и в L ровно n вершин. Разберём два случая.

Первый случай: в левой доле есть такое множество X, для которого $|X| = |G(X)|$. Выделим из графа два подграфа. Первый, G_1, имеет доли X, $G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Второй, G_2, имеет доли $L \setminus X$, $R \setminus G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для G_1 это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа G_2 от противного. Пусть для подмножества $Z \subseteq L \setminus X$ соседей в $R \setminus G(X)$ меньше, чем вершин в Z. Тогда в графе G соседей у множества $X \cup Z$ меньше $|Z \cup X|$ (ведь множества X и Z не пересекаются, а соседей у X ровно $|X|$).

Итак, для G_1, G_2 выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше n. Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в G размера $|L|$.

Второй случай: для каждого $X \subseteq L$ выполняется неравенство $|X| < |G(X)|$.

Выберем вершину $a \in L$ и её соседа $b \in R$ (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).

Если в графе $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$, полученном из G выбрасыванием вершин a, b и инцидентных им рёбер, есть паросочетание P размера $n - 1$, то в графе G есть паросочетание размера n: к рёбрам из P добавим ребро $\{a, b\}$.

Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для G' нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество $X \subseteq L \setminus \{a\}$ имеет мало соседей в $(R \setminus \{b\} : |X| > |G'(X)|$. Но в графе G у множества X есть разве что ещё один сосед b. Поэтому для этого множества выполняется равенство $|X| = |G(X)|$. Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

2.30 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига

Теорема Кёнига В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

Доказательство:

В одну сторону легко. Если P - паросочетание в двудольном графе $G = (L, R, E)$, то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие $X \sqcup Y, X \subseteq L, Y \subseteq R$, в графе G. Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения $G_{X, G(X) \setminus Y}$ графа на множество вершин X в левой доле и множество вершины $G(X) \setminus Y$ в правой доле (оставляем в $G_{X, G(X) \setminus Y}$

только рёбра между указанными вершинами). Пусть $S \subseteq X$.

Множество $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X,G(X)\setminus Y}(S)$ является вершинным покрытием в G: все рёбра, покрытые вершинами из S, покрыты также либо вершинами из Y, либо соседями вершин из S в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие, $|G_{X,G(X)\setminus Y}G_{X,G(X)\setminus Y}(S)| \geqslant |S|$, что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа $G_{L\setminus X,Y}$, полученного ограничением G на вершины $L \setminus X$ в левой доле и Y в правой доле (так как $X \sqcup Y$ - вершинное покрытие исходного графа, $L \setminus X$ входит в множество соседей Y в левой доле).

По теореме Холла в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ есть паросочетание размера $|X|$, а в $G_{L\setminus X,Y}$ есть паросочетание размера $|Y|$. Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера $|X| + |Y|$ в графе G. Таким образом, размер максимального паросочетания в G не меньше размера минимального вершинного покрытия.

2.31 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на N вершинах, то оно справедливо и для графов с $N' > N$ вершинами. Обозначим через $R(k,n)$ число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство:

Будем доказывать индукцией по s, что для любой пары чисел k, n такой, что k + n = s справедливо утверждение теоремы.

База индукции $s = 2$ очевидна: $2 = 1 + 1$ — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение выполнено для всех пар (k, n) таких, что $k + n = s$.

Докажем его для пары (k, n) такой, что $k + n = s + 1$. По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар $(k - 1, n)$ и $(k, n - 1)$.

Рассмотрим граф на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине и возьмём какую-то вершину v этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины v ровно $N_0 - 1$ штук. Среди них x соседей и y несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geqslant R(k - 1, n)$$
$$y \geqslant R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k - 1, n)$$
$$y < R(k, n - 1)$$

из которых следует $x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1) - 2$.

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины v есть $R(k - 1, n)$ соседей или есть $R(k, n - 1)$ несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

Первый случай. В индуцированном соседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера $k-1$ или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины v даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Второй случай. В индуцированном несоседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера k или независимое множество размера $n - 1$. В первом варианте в исходной графе есть клика размера k, а во втором добавление вершины v даёт независимое множество размера n в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары (k, n), для которой $k+n = s+1$. Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

3 Домашние задания

4 Семинары

4.1 Семинар 1

Задача 1

а)

База индукции: $n = 1$: $1 + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} + 1$

Переход: $n \to n+1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant \frac{n}{2} + 1 + \left(\frac{1}{2^n+1} + ... + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant \frac{n}{2} + 1 + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n\right) = \frac{n+1}{2} + 1$

б) Докажем, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2n}$

База: $n = 1$: $\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Переход $n \to n+1$: $\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leqslant$

$\leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2}$

Задача 2

Докажем, что 1 можно представить в виде суммы любого числа различных обыкновенных дробей:

База: $n = 1$: $1 = \frac{1}{1}$

Переход: $n \to n+1$: Пусть мы представили 1 в виде суммы n дробей и дробь с минимальным значением равна $\frac{1}{n}$. Тогда возьмём от этой суммы все дроби кроме наименьшей, а её заменим на $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$. Проверка: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n}$

Задача 3

Докажем что мы можем получить любую комбинацию из любой по индукции, не применяя операцию 2 типа если последовательность равна 00...01:

База: $n = 1$. Тогда мы первой операцией можем изменить значение.

Переход: $n \to n+1$. Если последний символ начальной последовательности равен тому, каким он должен быть в итоговой комбинации, то просто сделаем префикс длины n такой, каким он нам нужен (мы можем это сделать, так как по индукции мы умеем решать задачу для n и мы запретили операцию, которая изменила бы последний символ).

Если же последний символ нужно изменить, то сделаем префикс длины n равным 0...001, после применим 2 операцию, а после сделаем префикс длины n таким, как надо.

Мы получили требуемую комбинацию и не сделали запрещённую операцию, поэтому переход доказан.

Задача 4

Будем доказывать, что мы не только можем проехать n километров, но и можем сделать сколь угодно большой запас бензина в точке на расстоянии n километров от края пустыни, оказавшись в этой точке после окончания перевозок.

База: $n = 1$: рейс на расстояние 1 и обратно требует 2 единиц бензина (будем называть единицей количество бензина на километр пути), поэтому мы можем оставить 1 единицу бензина в хранилище. За несколько рейсов в хранилище можно сделать запас произвольного размера, какого нам потребуется.

Переход: $n \to n+1$: Пусть мы хотим запасти в следующей точке b единиц бензина. Тогда запасём в предыдущей точке $3x$ единиц бензина. Тогда после этого сделаем x рейсов: залить в бак 3 единицы, за 1 проехать в $n+1$, вылить там 1 и за 1 вернуться назад (в последнем рейсе это не надо делать). Мы доказали переход.

Задача 5

Представим число $x = 2^s \cdot t$, где t - нечётное. Тогда если представить так все числа от 1 до $2n$, то значения t будут равны множеству $\{1, 3, ..., 2n-1\}$ - n элементов. Тогда если выбрать $n+1$ число, то у хотя бы двух будут равны t, значит они отличаются в $2^{s_2 - s_1}$ раз, значит одно делится на другое.

Задача 6

Введём систему координат. Заметим, что пусть сейчас максимальная сумма координат клетки среди всех клеток равна n, тогда на следующем шагу она не может быть больше чем $n-1$ (все с суммой n пропадут, так как для существования им нужны были клетки с суммой $n+1$, а клетки с суммой больше n также появиться не могут).

А так как не может появиться клетки ниже чем самая низкая клетка изначально (так как ей для появления нужна либо она сама, либо клетка справа, но таких нет). Также не могло появиться клетки левее самой левой. Значит сумма координат ограничена снизу, значит все клетки пропадут за конечное число шагов.

Задача 7

а) Частный случай пункта в)

б) Пусть мы всегда применяли операцию к самой левой паре 01. Мы получили какое-то число операций. Теперь докажем, что любая последовательность операций равносильна этой.

Пусть мы в какой-то момент применили операцию не к самой левой паре 01. Тогда пока мы не применим операцию к ней значения на этих позициях не изменятся, как как эти символы не входят ни в одну другую подстроку 01. Значит, в какой-то момент мы применим операцию к этой самой левой паре. Теперь если бы мы сделали операцию как только эта пара стала бы самой левой, то все будущие операции не изменились (только сдвинулись налево на 1), поэтому количество операций в любой последовательности будет равно последовательности из начала.

в) Заметим, что данная операция лексикографически увеличивает слово.

Нужно доказать, что слово нельзя увеличивать бесконечно. Отбросим префикс, который мы ни разу не поменяли (он не влияет на операции), количество единиц в строке могло уменьшиться. Рассмотрим операцию, которая изменила первый элемент строки: 0 заменился на 1, после этого эта 1 уже не может участвовать ни в одной операции. Значит после повторного отбрасывания префикса, который не будет изменяться, единиц гарантированно станет меньше.

Мы не можем увеличить количество единиц и гарантированно его уменьшаем, а значит в какой-то момент мы придём к строке из нулей, к которой нельзя применить операцию. Значит количество операций обязательно конечно.

4.2 Семинар 2

Задача 1

а) $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ - элементы, которые либо только в A, либо только в B.
$(A \backslash B) \subseteq ((A \cup B) \backslash (A \cap B)) \Longrightarrow (A \backslash B) \cap ((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = (A \backslash B)$.
б) Если элемент в $A \backslash C$ или в $B \backslash$, то он есть в $(A \cap B) \backslash C$.
Если элемент в $(A \cap B) \backslash C$, то он либо в A, либо в B, а так как его нет в C, то он либо в $A \backslash C$, либо в $B \backslash C$.
в) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \Leftrightarrow$ только те пары, в которых первый элемент в $A_1 \cap A_2$, а второй в $(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Задача 2

Нужно доказать, что любой элемент из левого множества принадлежит правому.
Если $x \in (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$ и $x \not\in (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)$, то есть B_i, которому он не принадлежит, тогда $x \in A_i \triangle B_i$, значит элемент входит в объединение справа.
Аналогично если выполняется зеркальное условие $\triangle$.

Задача 3

а) $y = x + 2$
б) $y = (1 - (1 - x)) = x$
(нужна проверка)

Задача 4

Не верно: пусть множество элементов равно {1,2,3}, $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$, $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3), (3,2)\}$. Тогда композиция A и B не включает в себя (3,1), но включает (1,3), поэтому не выполняется симметричность.

Задача 5

$f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$: пусть $x \in f\left(f^{-1}(B)\right) \Longrightarrow \exists y : \ f(y) = x \wedge y \in f^{-1}(B) \Longrightarrow \exists x_1 : f^{-1}(x_1) = y_1, x_1 \in B \Longrightarrow x = x_1 \Longrightarrow x \in B$.
Нельзя поставить знак =, так как пусть $X = \{1\}$, $Y = \{2,3\}$, $f(1) = 2$. Тогда $f\left(f^{-1}(\{2, 3\})\right) = \{2\}$.

Задача 6

а, б) $A = \{0\}$, $B = \{1, 2\}$, $f(0) = 1$, $g(1) = g(2) = 0$. Тогда $(g \circ f)(x) = x$, но $(f \circ g)(2) = 1$, значит g является левой обратной к f, но не является правой.
в) Пусть $l \circ f = id$, $f \circ r = id \Longrightarrow r = id \circ r = (l \circ f) \circ r = l \circ (f \circ r) = l$ по теореме по об ассоциативности композиции.
г) todo
д) todo

Задача 7

todo

Задача 9

Нет на колке

4.3 Семинар 3

Задача 1

9^4

Задача 2

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

Задача 3

$\frac{C_8^4}{2^8}$

Задача 4

$900'000 - 5^6$ - всего чисел минус числа только из нечётных цифр

Задача 5

$\frac{6 \cdot 6 \cdot 5!}{8!}$ - позиция этих 3 людей * количество перестановок этих людей * количество перестановок остальных / всего перестановок

Задача 6

Пусть есть 2 операции: распечатать число и прибавить к нему 1, изначально число равно 1. Тогда нам нужно расставить 4 распечатывания и 8 увеличений (после каждой печати обязательно должно следовать +1, +1 может быть до 1 числа или после последнего). Итого нам нужно расставить 4 операции *print and* + и 5 операций + (так как после вывода последнего числа прибавлять не надо), это делается C_9^4 способами.

Задача 7

Расставим 12 человек в ряд и сделаем пары $1-2$, $3-4$... Тогда каждое паросочетание посчитается $6! \cdot 2^6$ раз. Итого ответ $\frac{12!}{6! \cdot 2^6}$

Задача 8

Равносильно количеству решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 8$ (по одной монете раздали изначально). А количество таких способов: C_{7+8-1}^8.

Задача 9

Нужно посчитать количество бинарных строк длины 15, где 0 означает что мы не взяли число, а 1 - что взяли. При этом единиц должно быть 6 и после всех единиц кроме последней обязательно должен стоять 0. То есть нам нужно расставить 4 нуля и 6 комбинаций 01 (последняя просто 1). Это можно сделать $C_{10}^6 = 210$ способами. А всего комбинаций $\binom{6}{15}$, поэтому вероятность $\frac{210}{\binom{6}{15}}$.

Задача 10

а) Справа - количество способов выбрать капитана и добрать ему команду. Слева - устанавливаем размер команды, выбираем её и среди них выбираем капитана. Значит равнозначно.

б) todo

Задача 11

В последовательности либо последний символ 0, либо последний 1, тогда обязательно перед ним 0. Получается количество последовательностей длины n равно количеству длины $n-1$ (последняя 1) плюс количество длины $n-2$ (последний 0). База очевидна.

Задача 12

todo

Задача 13

Посмотрим на последний столбец. Если в нём вертикальная доминошка, то += количество способов заполнить $n-1$ столбец. Если там горизонтальная, то под ним тоже обязательно горизонтальная, значит количество способов += количество способов заполнить $n-2$. База очевидна.

Задача 16*

Одинаково, https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=34899

4.4 Семинар 4

Задача 1

Идея: выбрать позиции для О, потом расставить остальные буквы (некоторые другие буквы тоже повторяются, нужно разделить на факториал количества их вхождений)

Задача 2

Выражение равносильно $a \vee b \vee c$ (выводится перебором количества единичных переменных).

Задача 3

а) $(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3)$ (ясно что нужны такие переменные, после проверка показывает что такое выражение подходит)

б) $(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_4) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_4) \oplus (x_3 \wedge x_4) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$ - если две единицы, то работает, если 3 то 3 выражения 1, значит работает. Если все 4, то получается что нужно было добавить И всех аргументов.

Задача 4

а) Верно когда нет выражений $1 \to 0$, значит либо все $x = 0$, тогда в y что угодно, либо в x есть 1 и тогда все игреки 1. Получается количество способов $2^5 + 2^5 - 1 = 63$.

б) todo

в) Если все переменные 1, то в многочлене Жегалкина все мономы равны 1, поэтому чтобы выражение было равно 1 нужно чтобы мономов было нечётно.

Задача 5

Если выражение - тождественная единица, то $a \vee \neg a$ (нужно узнать можно ли так). Иначе построим СДНФ для выражения $\neg f$, а после по закону Де-Моргана мы получим КНФ для f.

Задача 6

Мы знаем, что связка $\{\neg,\wedge\}$ полная. Отрицание - $X \mid X$, И - $(X \mid Y) \mid (X \mid Y)$.

Задача 7

а) Нет, так как на наборе из всех 0 нельзя получить 1

б) Нет, так как на наборе из 0 и на наборе из 1 обязательно будут одинаковые результаты.

Задача 8

Нет, так как обе функции в ней самодвойственны, то есть на наборе из всех 0 и на наборе из всех 1 они не могут дать одинаковые значения. Доказательство по рекурсии, в выражении всё до текущего момента изменилось, значит изменится и результат текущей операции. (критерий Поста явно не используется)