

# Коллоквиум по дискретной математике №1

10 декабря 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения</b>	<b>2</b>
1.1	Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.	2
1.2	Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции.	2
1.3	Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции.	2
1.4	Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.	3
1.5	Критерий Поста полноты системы булевых функций.	3
1.6	Предполные классы	3
1.7	Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Примеры.	3
1.8	Сравнение мощностей, теорема Кантора.	3
1.9	Теорема Кантора–Бернштейна.	3
1.10	ЛУМ-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.	3
1.11	Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Понятия пути, цикла, простого пути, простого цикла.	4
1.12	Отношение достижимости и компоненты связности графа. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Компоненты сильной связности ориентированного графа.	4
1.13	Деревья. Теорема об эквивалентных определениях дерева.	4
1.14	Полное двоичное дерево. Остовное дерево в графе.	5
1.15	Ациклические орграфы, топологическая сортировка.	5
1.16	Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.	5
1.17	Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.	5
1.18	Теорема Холла.	6
1.19	Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.	6
1.20	Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.	6
<b>2</b>	<b>Доказательства</b>	<b>7</b>
2.1	Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2	7
2.2	Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа	7
2.3	ЛУМ-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.	8
2.4	Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.	9
2.5	Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.	10
2.6	Теорема Холла.	10
2.7	Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига	11
2.8	Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.	11
<b>3</b>	<b>Задачи из листков</b>	<b>13</b>

# 1 Определения

## 1.1 Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.

- Принцип математической индукции:

Пусть есть некоторое утверждение  $A$  зависящее от  $n \in \mathbb{N}$ , которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

1.  $A(1)$  верно (База индукции)
2.  $\forall n : A(n) - \text{верно} \Rightarrow A(n+1) \text{ верно. (Шаг индукции)}$

То  $\forall n : A(n) - \text{верно.}$

- Принцип математической индукции (эквивалентная формулировка):

Пусть  $S \subseteq \mathbb{N}$  и выполняются следующие условия:

1.  $1 \in S$
2.  $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Тогда  $S = \mathbb{N}$ .

- Принцип полной математической индукции:

Пусть есть некоторое утверждение  $A$  зависящее от  $n \in \mathbb{N}$ , которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

1.  $A(1)$  верно
2.  $\forall n : (\forall k < n A(k) - \text{верно}) \Rightarrow A(n+1) \text{ верно.}$

То  $\forall n : A(n) - \text{верно.}$

- Принцип наименьшего числа

Пусть  $S \subseteq \mathbb{N}$ ,  $S \neq \emptyset \Rightarrow$  в  $S$  существует минимальный элемент.

Минимальным элементом множества  $A$  называют такое число  $c$ , что  $\forall a \in A : c \leq a$

## 1.2 Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции.

**Функция  $f$  называется линейной, если  $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n$ , где  $a_i \in \{0, 1\}$**

$L = \{f \in P_2 \mid f - \text{линейная}\}$  – множество всех линейных функций.

Пример:  $x_i \in L, x \oplus y \in L, 0, 1 \in L$

$x \wedge y \notin L, x \vee y \notin L$

**Лемма о нелинейной функции:** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$ . Тогда подставив вместо переменных функции  $x_1, \dots, x_n$  0,  $x$  и  $y$  можно получить  $g(x, y) \notin L$ .

*Иначе говоря, через любую не линейную функцию на  $n$  переменных можно выразить не линейную функцию на двух переменных.*

## 1.3 Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции.

**Принцип двойственности:**

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$ . Тогда:

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k^*(x_1, \dots, x_n))$$

**Функция  $f \in P_2$  называется самодвойственной, если  $f^* = f$ .**

$S = \{f \in P_2 \mid f^* = f\}$  – множество всех самодвойственных функций.

Пример:  $x \in S, \neg x \in S, x \oplus y \oplus z \in S$

**Лемма о несамодвойственной функции:**

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$ . Тогда подставляя вместо переменных функции  $x, \neg x$ , можно получить константу.

## 1.4 Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.

Для того, чтобы ввести класс монотонных функций нам нужно ввести понятие порядка на множестве наборов переменных. Скажем, что изначально  $0 < 1$ . Тогда:

**Набор**  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  **меньше**  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , если  $\forall i, \alpha_i \leq \beta_i$ .

Пример:  $(1, 0) \leq (1, 1)$

$(1, 0) \not\leq (0, 1)$  (не сравнимы)

$(0, 1) \not\leq (1, 0)$  (не сравнимы)

$f \in P_2$  **монотонная**, если  $\forall \alpha_i, \beta_i, \alpha_i \leq \beta_i \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$

**Лемма о немонотонной функции:**

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$ . Тогда, подставляя вместо переменных 0, 1, х, можно получить  $\neg x$ .

## 1.5 Критерий Поста полноты системы булевых функций.

**Критерий Поста:**  $[F] = P_2 \Leftrightarrow F \notin L, F \notin T_0, F \notin T_1, F \notin S, F \notin M$

Иначе говоря, система связей полная тогда и только тогда, когда для любого класса  $L, S, T_0, T_1, M$  в системе связей  $F$  есть функция, не лежащая в этом классе.

## 1.6 Предполные классы

Пусть  $F \subseteq P_2$  – замкнутый класс ( $[F] = F$ )

$F$  – предполный в  $P_2$ , если  $F \neq P_2$ , но  $\forall g \notin F [F \cup g] = P_2$ .

## 1.7 Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Примеры.

**Равномощные множества.** Множества  $A$  и  $B$  называются равномощными, если  $\exists f : A \rightarrow B$  - биекция.  $|A| = |B|, A \sim B$

**Счетное множество** - множество равномощное множеству натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

**Континуальное множество** - множество равномощное множеству действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}, f(n) = n - 1$

2.  $(0, 1) \sim (0, 2), f(x) = 2x$

3.  $[a, b] \sim [c, d]$

## 1.8 Сравнение мощностей, теорема Кантора.

**Сравнение мощностей.**

$|A| \leq |B|$ , если  $\exists f : A \rightarrow B$  - инъекция.

$|A| < |B|$ , если  $A \leq B$  и  $A \not\sim B$ .

**Теорема Кантора:**

Пусть  $X$  - множество.

Тогда  $|X| < |2^X|$ .

## 1.9 Теорема Кантора–Бернштейна.

Пусть  $|A| \leq |B|$  и  $|A| \geq |B|$ , тогда  $A \sim B$ .

## 1.10 ЛУМ-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

**Отношение порядка на булевом кубе.** Вершины булева куба - двоичные слова, тогда, если слово  $x$  является подсловом  $y$  (с точки зрения единиц), то  $x \leq y$  (покоординатное сравнение).

**ЛУМ-лемма, или LYM-inequality.** Дан булев куб, пусть  $A$  в нем - антицепь,  $a_k$  - количество элементов в антицепи, в которых ровно  $k$  единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{C_n^k} \leq 1$$

**Теорема Шпернера.** Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

### 1.11 Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Понятия пути, цикла, простого пути, простого цикла.

**Неориентированный граф** - пара множества вершин и множества ребер.

$$G = (V, E), |V| < \infty.$$

$$E \subseteq \{a, b | a, b \in V, a \neq b\}$$

**Оrientированный граф** - пара множества вершин и множества ребер.

$$G = (V, E), |V| < \infty.$$

$$E \subseteq \{(a, b) | a, b \in V, a \neq b\}$$

**Степень вершины** - количество ребер исходящих из вершины.

Для неориентированного графа:

$$\deg(v) = |\{e \in E | v \in e\}|$$

Для ориентированного графа:

$$\deg_+(v) = |\{(v, a) \in E | a \in V\}|$$

$$\deg_-(v) = |\{(b, v) \in E | b \in V\}|$$

**Лемма о рукопожатиях**

Для неориентированного графа:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Для ориентированного графа:

$$\sum_{v \in V} \deg_+(v) = \sum_{v \in V} \deg_-(v) = |E|$$

**Смежные вершины.** Вершины  $v_1, v_2$  называются смежными, если  $\exists e \in E : e = \{v_1, v_2\}$ .

**Путь** - последовательность смежных вершин.  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

**Простой путь** - путь, в котором все вершины различны.

**Цикл** - путь, у которого первая и последняя вершины одинаковы.

**Простой цикл** - путь, у которого совпадают только первая и последняя вершины, длины больше или равной 3.

**Длина пути** - количество вершин в пути - 1.

### 1.12 Отношение достижимости и компоненты связности графа. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

**Отношение достижимости.** Вершина  $u$  достижима из вершины  $v$ , если  $\exists$  путь из  $v$  в  $u$ . Так же говорят, что вершины  $v$  и  $u$  - связны ( $u \sim v$ ). Отношение достижимости называют отношением связности.

**Отношение сильной связности.**  $u$  и  $v$  - сильно связны, если  $\exists$  ориентированный путь  $u \rightarrow v$  и  $\exists$  ориентированный путь  $v \rightarrow u$ .

**Компонента связности графа.** Так как отношение связности является отношением эквивалентности, то множество вершин можно разбить на компоненты - компоненты связности.

**Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе.**

$$\text{Количество компонент связности} \geq |V| - |E|$$

**Компоненты сильной связности ориентированного графа.** Так как отношение сильно связности является отношением эквивалентности, то множество вершин ориентированного графа можно разбить на компоненты - компоненты сильной связности.

### 1.13 Деревья. Теорема об эквивалентных определениях дерева.

Эквивалентные определения дерева:

1.  $G$  - минимальный связный граф

2.  $G$  - связен и  $|E| = |V| - 1$
3. в  $G$  между любыми 2 вершинами  $\exists!$  простой путь
4.  $G$  - связен и в нем нет простых циклов

Обычно дерево обозначают через  $T$ .

**Предки** - все вершины на пути от корня до вершины, не включая саму вершину.

**Потомок** - вершина, которая не является предком.

**Лист** - вершина степени 1.

### 1.14 Полное двоичное дерево. Остовное дерево в графе.

**Полное двоичное дерево** - дерево, где каждой вершине можно присвоить булевый кортеж и тогда все вершины будут представимы в виде  $\bigcup_{k=0}^n \{0, 1\}^k$ . Тогда ребра будут между вершинами  $a_1, \dots, a_k$  и  $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ .

В полном двоичном дереве  $2^n$  листьев.

**Остовное дерево в графе.** Дан граф  $G = (V, E)$ . Тогда остовное дерево в  $G$  - это  $T = (V, E'), E' \subseteq E, T$  - дерево.

### 1.15 Ациклические орграфы, топологическая сортировка.

**Ациклический орграф** - орграф, в котором нет циклов.

**Топологическая сортировка.** Эквивалентные определения:

1. Орграф  $G$  - ациклический.
2. Все компоненты сильной связности  $G$  состоят из 1 вершины.
3. Все вершины  $G$  можно пронумеровать числами от 1 до  $n$ : если  $i \rightarrow j$ , то  $i < j$ .

### 1.16 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не делает это дважды).

Граф называется эйлеровым, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление изолированных вершин, то есть тех вершин, из которых не выходит и в которые не входит ни одного ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

**Теорема 1.** В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

**Теорема 2.** Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

### 1.17 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.

**Двудольным графом** называется неориентированный граф, в котором вершины можно разделить на две доли — левую и правую, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества  $L$  (левую долю) и  $R$  (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

**Критерий двудольности графа.** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда не содержит в себе циклы нечётной длины.

**Булев куб размерности  $n$**  — это неориентированный граф, вершинами которого являются двоичные слова длины  $n$ , а рёбра соединяют слова, отличающиеся в одной позиции.

### 1.18 Теорема Холла.

**Теорема Холла.** Если для каждого множества  $X$  вершин двудольного графа  $G = (L, R, E)$  множество соседей  $G(X) \subseteq R$  содержит не меньше, чем  $|X|$  вершин, то в графе  $G$  есть паросочетания размера  $|L|$

### 1.19 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ , **паросочетание**  $M$  в  $G$  — это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

**Вершинным покрытием** называется такое множество вершин  $S$ , что для любого ребра хотя бы один из концов лежит в  $S$ . Нетрудно проверить, что дополнение к вершинному покрытию — независимое множество и, наоборот, дополнение к независимому множеству — вершинное покрытие. Для двудольных графов вершинные покрытия оказываются связанными с паросочетаниями.

**Теорема Кёнига.** В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

### 1.20 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

**Теорема Рамсея.** Для любых  $k, n$  найдётся такое число  $N_0$ , что в любом графе на  $N \geq N_0$  вершинах есть или клика размера  $k$ , или независимое множество размера  $n$ . Минимальное такое  $N_0$  называют **числом Рамсея**, обозначается  $R(k, n)$ .

## 2 Доказательства

### 2.1 Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2

- Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости

- Утверждение:  $n$  прямых делят плоскость на области.  $A(n)$  - верно ли, что эти области можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены в один цвет.

- База:

- Шаг: пусть  $A(n)$  - верно, докажем верность  $A(n+1)$ :

По сути нам дана правильная раскраска плоскости в случае  $n$  прямых. Утверждается, что если при добавлении  $n+1$  прямой инвертировать цвет всех областей по одну сторону от нее, то мы получим правильную раскраску. Докажем, что любая граница разделяет области разных цветов. Для этого рассмотрим 2 случая:

1. Граница принадлежит какой-либо из старых  $n$  прямых. Тогда области, которые она разделяет, лежат по одну сторону от новой прямой. Поэтому поскольку старая раскраска была правильной, то в новой они также будут разного цвета.
2. Граница принадлежит новой  $n+1$  прямой. Тогда области, что она разделяет, в старой раскраске были одного цвета, мы инвертируем только одну из них, поэтому получаем 2 разных цвета.

Таким образом  $A(n+1)$  верно  $\Rightarrow$  индукция верна  $\Rightarrow$  исходное утверждение верно.

- Неравенство Бернулли

- Утверждение:  $A(n)$  - верно ли, что  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ,  $x \in \mathbb{R}, x > -1$

- База:  $A(1)$ :  $(1+x)^1 \geq 1+x \cdot 1 \Leftrightarrow 0 \geq 0 \Rightarrow$  база верна

- Шаг: пусть  $A(n)$  - верно, докажем верность  $A(n+1)$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq \\ &\geq (1+nx) + x = 1+x(n+1)\end{aligned}$$

Таким образом  $A(n+1)$  верно  $\Rightarrow$  индукция верна  $\Rightarrow$  исходное утверждение верно.

- Сумма обратных квадратов меньше 2

- Утверждение:  $A(n)$  - верно ли, что  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

- База:  $A(1)$ :  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1 \leq 2 - 1 \Rightarrow$  база верна

- Шаг: пусть  $A(n)$  - верно, докажем верность  $A(n+1)$ :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

Таким образом  $A(n+1)$  верно  $\Rightarrow$  индукция верна  $\Rightarrow$  исходное утверждение верно. Так как  $\frac{1}{n} > 0$  получаем:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

### 2.2 Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа

1. ПМИ (принцип математической индукции)

2. ППМИ (принцип полной математической индукции)

3. ПНЧ (принцип наименьшего числа)

Докажем следствия по циклу (из утверждения 1 следует утверждение 2, из  $2 \Rightarrow 3$ , из  $3 \Rightarrow 1$ ), тогда эквивалентность каждой пары будет доказана.

- ПМИ  $\Rightarrow$  ППМИ

Пусть  $S \subseteq \mathbb{N}$

$\forall n : (\forall k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S$

$X = \{n \mid \forall k < n, k \in S\}$

$1 \in X$

$n \in X \Rightarrow n \in S$

$n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \Rightarrow n + 1 \in S$

Тогда по индукции  $S = \mathbb{N}$ , значит ПМИ  $\Rightarrow$  ППМИ, ч.т.д.

- ППМИ  $\Rightarrow$  ПНЧ

Рассмотрим  $S \subseteq \mathbb{N}$ ,  $S \neq \emptyset$ .

Докажем от противного. Пусть в  $S$  нет минимального элемента.

$\bar{S} = \mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$ .

Тогда  $1 \in \bar{S}$  и  $\forall n : (\forall k < n, k \in \bar{S}) \Rightarrow n \in \bar{S}$

По ППМИ получаем  $\bar{S} = \mathbb{N} \Rightarrow S = \emptyset \Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow$ , значит ППМИ  $\Rightarrow$  ПНЧ, ч.т.д.

- ПНЧ  $\Rightarrow$  ПМИ

Пусть  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) - \text{ложное}\}$  Рассмотрим 2 случая:

1.  $S = \emptyset \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  - верно, ч.т.д.

2.  $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min S$ . Обозначим  $m = \min S$

Но тогда  $m - 1 \notin S \Rightarrow A(m - 1)$  - верно

Но при этом  $A(m)$  - верно  $\Rightarrow m \notin S \Rightarrow$  противоречие, значит ПНЧ  $\Rightarrow$  ПМИ, ч.т.д.

## 2.3 ЛУМ-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

**ЛУМ-лемма**, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть  $A$  в нем - антицепь,  $a_k$  - количество элементов в антицепи, в которых ровно  $k$  единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{C_n^k} \leq 1$$

### Доказательство:

Посчитаем количество цепей максимальной длины двумя способами. Для начала разберемся какой длины максимальная цепь. Будем рассматривать элементы цепи в порядке увеличения. Тогда если после  $x$  идет  $y$ , то  $x$  - подслово  $y$ , это значит, что в  $y$  единицы обязательно в тех же местах что и в  $x$  + хотя бы еще одна в других местах. Каждый раз количество единиц в вершины строго увеличивается, а значит, чтобы достичь цепь максимальной длины, нужно увеличивать вес(количество единиц) вершины на 1. Получаем, что максимальная длина цепи  $n + 1$ .

Посчитаем первым способом количество цепей максимальной длины. Чтобы дойти от 00...0 до 11...1. Нам нужно вставить в каком-то порядке  $n$  единиц, причем каждый порядок задает свою цепь. Получаем, что у нас  $n!$  вариантов последовательно вставить единицы, а значит и  $n!$  цепей.

Посчитаем вторым способом. Зафиксируем какую-то вершину куба  $x$ , вес которой  $k$ . Сколько цепей максимальной длины проходит через нее? По тем же соображениям  $k! \cdot (n - k)!$ , потому что нам нужно каким-то порядком сначала поставить  $k$  заданных единиц, а потом дойти из  $x$  до 11...1, поставив уже  $n - k$  единиц.

Тогда сколько цепей максимальной длины проходит через вершины антицепи  $A$ ? Заметим тот факт, что через каждую вершину проходят свои уникальные цепи. Пусть это не так, тогда  $x_1$  и  $x_2$  находятся в одной цепи, значит их можно сравнить, значит они не могут быть в одной антицепи. Раз через каждую вершину проходят уникальные цепи максимальной длины, можно выписать неравенство:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot k! \cdot (n - k)! \leq n!$$

то есть количество уникальных цепей максимальной длины, проходящих через вершины антицепи  $A$  не превосходит общего количества цепей максимальной длины. Делим неравенство на правую сторону, получаем то, что и требовалось доказать:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{C_n^k} \leq 1$$



**Теорема Шпернера.** Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

**Лемма,** что  $\max_{0 \leq k \leq n} C_n^k = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . Будет использоваться, но не доказываться.

**Доказательство:**

Возьмем, то, что мы получили в ЛУМ-лемме и воспользуемся нашей локальной леммой, получим:

$$1 \geq \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{C_n^k} \geq \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

правая часть неравенства не что иное, как количество элементов в антицепи  $A$ .

Доказали, что не больше, как найти пример, где равно. Посмотрим на все вершины весом  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Очевидно, что они все несравнимы, а их количество как раз равно  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . Что и требовалось доказать.

## 2.4 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

**Определение:**

Цикл называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа по одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

**Критерий существования:**

*Неориентированный граф* без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связан и степени всех вершин чётны.

*Ориентированный граф* без вершин нулевой степени (в которые не входит и из которых не выходит рёбер) содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он сильно связан и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

**Доказательство:**

Будем доказывать параллельно оба варианта теоремы. Пусть сначала эйлеров цикл есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, граф связан (сильно связан в ориентированном случае).

Теперь про степени. Возьмём какую-то вершину  $v$ , пусть она встречается в цикле  $k$  раз. Идя по циклу, мы приходим в неё  $k$  раз и уходим  $k$  раз, значит, использовали  $k$  входящих и  $k$  исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны  $k$ , а в неориентированном графе её степень равна  $2k$ . Таким образом, в одну сторону критерий доказан.

Рассуждение в обратную сторону чуть сложнее. Будем рассматривать пути, которые не проходят дважды по одному ребру. (Таков, например, путь из одного ребра.) Выберем среди них самый длинный путь

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_n$$

и покажем, что он является искомым циклом, то есть что  $a_1 = a_n$  и что он содержит все рёбра.

В самом деле, если он самый длинный, то добавить к нему ребро  $a_n \rightarrow a_{n+1}$  уже нельзя, то есть все выходящие из  $a_n$  рёбра уже использованы. Это возможно, лишь если  $a_1 = a_n$ . В самом деле, если вершина  $a_n$  встречалась только внутри пути (пусть она входит  $k$  раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали  $k+1$  входящих рёбер и  $k$  выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени (в ориентированном случае) или чётности степени (в неориентированном случае).

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (мы предполагаем, что граф связан или сильно связан) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины  $a_i$  выходит ребро  $a_i \rightarrow v$ , то путь можно удлинить до

$$a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_n = a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_i \rightarrow v$$

вопреки нашему выбору (самого длинного пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра  $v \rightarrow a_i$ , добавив его в начало. (А можно заметить, что если есть неиспользованное входящее ребро, то есть и неиспользованное выходящее.) Это рассуждение было для ориентированного случая, но в неориентированном всё аналогично. Теорема доказана.

Помимо эйлеровых циклов, можно рассматривать *эйлеровы пути* — пути в графе, которые проходят один раз по каждому ребру. (Для неориентированных графов: рисуем картинку, не отрывая карандаша от бумаги, но не обязаны вернуться в исходную точку.) Для них тоже есть критерий: в неориентированном случае нужно, чтобы граф был связан и было не более двух вершин нечётной степени.

## 2.5 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.

### Определение:

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором можно разбить вершины на две доли — левые и правые, что все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли).

### Критерий двудольности:

Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый, то есть не содержит циклов нечётной длины.

Очевидно доказать эквивалентность утверждений граф двудольный и граф двураскрашиваемый, так что приведем доказательство того, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины.

### Доказательство:

Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине  $s$ , которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии (все расстояния и пути подразумеваются минимальными по количеству ребер) 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра  $\{u, v\}$  концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра  $s$  некоторой компоненты до вершин  $u$  и  $v$  имеют одинаковую чётность. Заметим, что если расстояния от центра до  $u$  и  $v$  не равны, то путь до одной из вершин можно было сократить, проходя через другую вершину (так как расстояния отличаются как минимум на 2). Получаем, что расстояния от центра до  $v$  и  $u$  равны.

Но тогда путь от центра до  $v$  + ребро  $\{v, u\}$  + путь от  $u$  до центра имеют нечётную длину (пути могут пересекаться, но простоту цикла в теореме ничего не сказано). Получили противоречие.

### Булев куб двураскрашиваемый

Будем называть чётностью вершины  $v = (x_1, \dots, x_n)$  число  $\text{parity}(v) = x_1 + \dots + x_n \bmod 2$ . Тогда заметим, что если  $v, u$  связаны ребром, то  $\text{parity}(v) \neq \text{parity}(u)$ . Значит если у нас существует цикл нечётной длины  $k$

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$$

то, так как чётность на каждом шаге меняется, получаем  $\text{parity}(v_1) = \text{parity}(v_3) = \dots = \text{parity}(v_k)$ , но соседние вершины не могут иметь одну чётность. Получаем противоречие.

## 2.6 Теорема Холла.

**Теорема Холла.** Если для каждого множества  $X$  вершин двудольного графа  $G = (L, R, E)$  множество соседей  $G(X) \subseteq R$  содержит не меньше вершин, чем  $X$ , то в графе  $G$  есть паросочетания размера  $|L|$

### Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле  $L$ .

*База индукции.* Если в  $L$  всего одна вершина  $x$ , то у неё есть хотя бы один сосед  $y$  в правой доле  $R$  по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром  $\{x, y\}$ .

*Шаг индукции.* Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше  $n$  вершин. Рассмотрим граф  $G = (L, R, E)$ , для которого выполняются условия теоремы и в  $L$  ровно  $n$  вершин. Разберём два случая.

**Первый случай:** в левой доле есть такое множество  $X$ , для которого  $|X| = |G(X)|$ . Выделим из графа два подграфа. Первый,  $G_1$ , имеет доли  $X$ ,  $G(X)$  и все рёбра между этими вершинами. Второй,  $G_2$ , имеет доли  $L \setminus X$ ,  $R \setminus G(X)$  и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для  $G_1$  это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа  $G_2$  от противного. Пусть для подмножества  $Z \subseteq L \setminus X$  соседей в  $R \setminus G(X)$  меньше, чем вершин в  $Z$ . Тогда в графе  $G$  соседей у множества  $X \cup Z$  меньше  $|Z \cup X|$  (ведь множества  $X$  и  $Z$  не пересекаются, а соседей у  $X$  ровно  $|X|$ ).

Итак, для  $G_1$ ,  $G_2$  выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше  $n$ . Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в  $G$  размера  $|L|$ .

**Второй случай:** для каждого  $X \subseteq L$  выполняется неравенство  $|X| < |G(X)|$ .

Выберем вершину  $a \in L$  и её соседа  $b \in R$  (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).

Если в графе  $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$ , полученном из  $G$  выбрасыванием вершин  $a$ ,  $b$  и инцидентных им рёбер, есть паросочетание  $P$  размера  $n - 1$ , то в графе  $G$  есть паросочетание размера  $n$ : к рёбрам из  $P$  добавим ребро  $\{a, b\}$ .

Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для  $G'$  нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество  $X \subseteq L \setminus \{a\}$  имеет мало соседей в  $(R \setminus \{b\})$ :  $|X| > |G'(X)|$ . Но в графе  $G$  у множества  $X$  есть разве что ещё один сосед  $b$ . Поэтому для этого множества выполняется равенство  $|X| = |G(X)|$ . Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

## 2.7 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига

**Теорема Кёнига** В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

**Доказательство:**

В одну сторону легко. Если  $P$  - паросочетание в двудольном графе  $G = (L, R, E)$ , то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие  $X \sqcup Y$ ,  $X \subseteq L$ ,  $Y \subseteq R$ , в графе  $G$ . Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения  $G_{X, G(X) \setminus Y}$  графа на множество вершин  $X$  в левой доле и множество вершины  $G(X) \setminus Y$  в правой доле (оставляем в  $G_{X, G(X) \setminus Y}$  только рёбра между указанными вершинами). Пусть  $S \subseteq X$ .

Множество  $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X, G(X) \setminus Y}(S)$  является вершинным покрытием в  $G$ : все рёбра, покрытые вершинами из  $S$ , покрыты также либо вершинами из  $Y$ , либо соседями вершин из  $S$  в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие,  $|G_{X, G(X) \setminus Y}(S)| \geq |S|$ , что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа  $G_{L \setminus X, Y}$ , полученного ограничением  $G$  на вершины  $L \setminus X$  в левой доле и  $Y$  в правой доле (так как  $X \sqcup Y$  - вершинное покрытие исходного графа,  $L \setminus X$  входит в множество соседей  $Y$  в левой доле).

По теореме Холла в  $G_{X, G(X) \setminus Y}$  есть паросочетание размера  $|X|$ , а в  $G_{L \setminus X, Y}$  есть паросочетание размера  $|Y|$ . Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера  $|X| + |Y|$  в графе  $G$ . Таким образом, размер максимального паросочетания в  $G$  не меньше размера минимального вершинного покрытия.

## 2.8 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

**Теорема Рамсея.** Для любых  $k, n$  найдётся такое число  $N_0$ , что в любом графе на  $N \geq N_0$  вершинах есть или клика размера  $k$ , или независимое множество размера  $n$ .

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на  $N$  вершинах, то оно справедливо и для графов с  $N' > N$  вершинами. Обозначим через  $R(k, n)$  число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

### Доказательство:

Будем доказывать индукцией по  $s$ , что для любой пары чисел  $k, n$  такой, что  $k + n = s$  справедливо утверждение теоремы.

**База индукции**  $s = 2$  очевидна:  $2 = 1 + 1$  — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

**Шаг индукции.** Предположим, что утверждение выполнено для всех пар  $(k, n)$  таких, что  $k + n = s$ .

Докажем его для пары  $(k, n)$  такой, что  $k + n = s + 1$ . По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар  $(k - 1, n)$  и  $(k, n - 1)$ .

Рассмотрим граф на  $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$  вершине и возьмём какую-то вершину  $v$  этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины  $v$  ровно  $N_0 - 1$  штук. Среди них  $x$  соседей и  $y$  несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geq R(k - 1, n)$$

$$y \geq R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k - 1, n)$$

$$y < R(k, n - 1)$$

из которых следует  $x + y \leq R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1) - 2$ .

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leq R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины  $v$  есть  $R(k - 1, n)$  соседей или есть  $R(k, n - 1)$  несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

**Первый случай.** В индуцированном соседями вершины  $v$  подграфе по предположению индукции найдётся клика размера  $k - 1$  или независимое множество размера  $n$ . В первом варианте добавление вершины  $v$  даёт клику в исходном графе размера  $k$ , во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера  $n$ .

**Второй случай.** В индуцированном несоседами вершины  $v$  подграфе по предположению индукции найдётся клика размера  $k$  или независимое множество размера  $n - 1$ . В первом варианте в исходной графе есть клика размера  $k$ , а во втором добавление вершины  $v$  даёт независимое множество размера  $n$  в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары  $(k, n)$ , для которой  $k + n = s + 1$ . Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

### 3 Задачи из листков