Коллоквиум по дискретной математике №1

10 декабря 2022

Содержание

1 Определения

1.1 Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.

- Принцип математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно (База индукции)
  2. $\forall n : A(n)$ - верно $\Rightarrow A(n+1)$ верно. (Шаг индукции)

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип математической индукции (эквивалентная формулировка):

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

  1. $1 \in S$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

  Тогда $S = \mathbb{N}$.

- Принцип полной математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно
  2. $\forall n : (\forall k < n \; A(k)$ - верно$) \Rightarrow A(n+1)$ верно.

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип наименьшего числа

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing \Rightarrow$ в S существует минимальный элемент.

  Минимальным элементом множества A называют такое число c, что $\forall a \in A : c \leqslant a$

1.2 Формулы, полные системы связок, примеры. Дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ.

Связка – это любая булева функция. Вроде как точно связку не определяют, тем не менее, под связками понимают именно булевы функции

Пример множества связок: $F = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Пусть F это множество связок. Тогда, функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ **выразима в системе связок** F, если $\exists$ формула φ под данной системой F (или f можно выразить через функции системы связок F):

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Формула φ строится последовательно:

1. Переменная x_i сама по себе является формулой
2. Переменная $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $g \in F$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ формулы – тоже формула.
3. Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формула, то $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ тоже формула (где x_{n+1} фиктивная переменная, так мы умеем расширять количество аргументов у формулы).

Константы по умолчанию не являются формулами, их надо выражать из связок.

$[F]$ – множество всех булевых функций, выразимых в F (или **замыкание** F)

F – **полная система связок**, если $[F]$ – все булевы функции (P_2).

Пусть $x^a = x$ если $a = 1$ и $\neg x$ если $a = 0$. Тогда:

Коньюнкт – $x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k}$

Дизьюнктивная Нормальная Форма (ДНФ) – представление функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как дизьюнкции коньюнктов.

Пример: для функции $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$, ДНФ – $A^1 \wedge C^1 \vee A^1 \wedge D^0 \vee B^1 \wedge C^1 \vee B^1 \wedge D^0$

1.3 Полином Жегалкина. Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина.

Моном – это выражение вида $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$.
(0 и 1 – тоже мономы)
Полином Жегалкина – многочлен вида $\bigoplus\limits_{(i_1,\ldots,i_k),k=0\ldots n} a_{i_1\ldots i_k} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$
Пример: $1 \oplus (x \wedge y) \oplus (x \wedge y \wedge z)$
Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина: каждую булеву функцию можно однозначно представить в виде полинома Жегалкина.

1.4 Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции.

Функция f называется линейной, если $f(x_1,\ldots,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$, где $a_i \in \{0,1\}$
$L = \{f \in P_2 |\ f$ – линейная$\}$ – множество всех линейных функций.
Пример: $x_i \in L$, $x \oplus y \in L$, $0, 1 \in L$
$x \wedge y \notin L, x \vee y \notin L$
Лемма о нелинейной функции: Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \notin L$. Тогда подставив вместо переменных функции $x_1,\ldots,x_n$ 0, x и y можно получить $g(x,y) \notin L$.
Иначе говоря, через любую не линейную функцию на n переменных можно выразить не линейную функцию на двух переменных.

1.5 Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции.

Принцип двойственности:
Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_n))$. Тогда:

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_k^*(x_1,\ldots,x_n))$$

Функция $f \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^* = f$.
$S = \{f \in P_2 | f* = f\}$ – множество всех самодвойственных функций.
Пример: $x \in S, \neg x \in S, x \oplus y \oplus z \in S$
Лемма о несамодвойственной функции:
Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \notin S$. Тогда подставляя вместо переменных функции $x, \neg x$, можно получить константу.

1.6 Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.

Для того, чтобы ввести класс монотонных функций нам нужно ввести понятие порядка на множестве наборов переменных. Скажем, что изначально $0 < 1$. Тогда:
Набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ **меньше** $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, если $\forall i, \alpha_i \leq \beta_i$.
Пример: $(1,0) \leq (1,1)$
$(1,0) \nleq (0,1)$ (не сравнимы)
$(0,1) \nleq (1,0)$ (не сравнимы)
$f \in P_2$ **монотонная**, если $\forall \alpha_i, \beta_i,\ \alpha_i \leq \beta_i \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$
Лемма о немонотонной функции:
Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \notin M$. Тогда, подставляя вместо переменных 0, 1, x, можно получить $\neg x$.

1.7 Критерий Поста полноты системы булевых функций.

Критерий Поста: $[F] = P_2 \Leftrightarrow F \nsubseteq L, F \nsubseteq T_0, F \nsubseteq T_1, F \nsubseteq S, F \nsubseteq M$
Иначе говоря, система связок полная тогда и только тогда, когда для любого класса L, S, T_0, T_1, M в системе связок F есть функция, не лежащая в этом классе.

1.8 Предполные классы

Пусть $F \subseteq P_2$ – замкнутый класс ($[F] = F$)
F – предполный в P_2, если $F \neq P_2$, но $\forall g \notin F\ [F \cup g] = P_2$.

1.9 Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Примеры.

Равномощные множества. Множества A и B называются равномощными, если $\exists f : A \to B$ - биекция. $|A| = |B|, A \sim B$

Счетное множество - множество равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Континуальное множество - множество равномощное множеству действительных чисел $\mathbb{R}$.

Примеры.

1. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(n) = n - 1$
2. $(0, 1) \sim (0, 2)$, $f(x) = 2x$
3. $[a, b] \sim [c, d]$

1.10 Сравнение мощностей, теорема Кантора.

Сравнение мощностей.
$|A| \leqslant |B|$, если $\exists f : A \to B$ - инъекция.
$|A| < |B|$, если $A \leqslant B$ и $A \not\sim B$.

Теорема Кантора:
Пусть X - множество.
Тогда $|X| < |2^X|$.

1.11 Теорема Кантора–Бернштейна.

Пусть $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \geqslant |B|$, тогда $A \sim B$.

1.12 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Отношение порядка на булевом кубе. Вершины булева куба - двоичные слова, тогда, если слово x является подсловом y (с точки зрения единиц), то $x \leqslant y$ (покоординатное сравнение).

LYM-лемма, или *LYM-inequality.* Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

1.13 Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Понятия пути, цикла, простого пути, простого цикла.

Неориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$.
$E \subseteq \{a, b | a, b \in V,\ a \neq b\}$

Ориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$.
$E \subseteq \{(a, b) | a, b \in V,\ a \neq b\}$

Степень вершины - количество ребер исходящих из вершины.
Для неориентированного графа:
$\deg(v) = |\{e \in E | v \in e\}|$

Для ориентированного графа:
$\deg_+(v) = |\{(v, a) \in E | a \in V\}|$
$\deg_-(v) = |\{(b, v) \in E | b \in V\}|$

Лемма о рукопожатиях
Для неориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Для ориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg_+(v) = \sum\limits_{v \in V} \deg_-(v) = |E|$

Смежные вершины. Вершины v_1, v_2 называются смежными, если $\exists e \in E : e = \{v_1, v_2\}$.

Путь - последовательность смежных вершин. $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$

Простой путь - путь, в котором все вершины различны.

Цикл - путь, у которого первая и последняя вершины одинаковы.

Простой цикл - путь, у которого совпадают только первая и последняя вершины, длины больше или равной 3.

Длина пути - количество вершин в пути - 1.

1.14 Отношение достижимости и компоненты связности графа. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

Отношение достижимости. Вершина u достижима из вершины v, если $\exists$ путь из v в u. Так же говорят, что вершины v и u - связны $(u \sim v)$. Отношение достижимости называют отношением связности.

Отношение сильной связности. u и v - сильно связны, если $\exists$ ориентированный путь $u - v$ и $\exists$ ориентированный путь $v - u$.

Компонента связности графа. Так как отношение связности является отношением эквивалентности, то множество вершин можно разбить на компоненты - компоненты связности.

Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе.
Количество компонент связности $\geqslant |V| - |E|$

Компоненты сильной связности ориентированного графа. Так как отношение сильно связности является отношением эквивалентности, то множество вершин ориентированного графа можно разбить на компоненты - компоненты сильной связности.

1.15 Деревья. Теорема об эквивалентных определениях дерева.

Эквивалентные определения дерева:

1. G - минимальный связный граф
2. G - связен и $|E| = |V| - 1$
3. в G между любыми 2 вершинами $\exists!$ простой путь
4. G - связен и в нем нет простых циклов

Обычно дерево обозначают через T.

Предки - все вершины на пути от корня до вершины, не включая саму вершину.

Потомок - вершина, которая не является предком.

Лист - вершина степени 1.

1.16 Полное двоичное дерево. Остовное дерево в графе.

Полное двоичное дерево - дерево, где каждой вершине можно присвоить булевый кортеж и тогда все вершины будут представимы в виде $\bigcup\limits_{k=0}^{n} \{0,1\}^k$. Тогда ребра будут между вершинами $a_1, ..., a_k$ и $a_1, ..., a_k, a_{k+1}$.

В полном двоичном дереве 2^n листьев.

Остовное дерево в графе. Дан граф $G = (V, E)$. Тогда остовное дерево в G - это $T = (V, E'), E' \subseteq E, T$ - дерево.

1.17 Ациклические орграфы, топологическая сортировка.

Ациклический орграф - орграф, в котором нет циклов.

Топологическая сортировка. Эквивалентные определения:

1. Орграф G - ацикличен.
2. Все компоненты сильной связности G состоят из 1 вершины.
3. Все вершины G можно пронумеровать числами от 1 до n: если $i \to j$, то $i < j$.

1.18 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не делает это дважды).

Граф называется эйлеровым, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление изолированных вершин, то есть тех вершин, из которых не выходит и в которые не входит ни одного ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

Теорема 1. В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

Теорема 2. Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

1.19 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором вершины можно разделить на две доли — левую и правую, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества L (левую долю) и R (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

Критерий двудольности графа. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда не содержит в себе циклы нечетной длины.

Булев куб размерности n — это неориентированный граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n, а рёбра соединяют слова, отличающиеся в одной позиции.

1.20 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше, чем $|X|$ вершин, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

1.21 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.

Пусть дан граф G = (V, E), **паросочетание M** в G — это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

Вершинным покрытием называется такое множество вершин S, что для любого ребра хотя бы один из концов лежит в S. Нетрудно проверить, что дополнение к вершинному покрытию — независимое множество и, наоборот, дополнение к независимому множеству — вершинное покрытие. Для двудольных графов вершинные покрытия оказываются связанными с паросочетаниями.

Теорема Кёнига. В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

1.22 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n. Минимальное такое N_0 называют **числом Рамсея**, обозначается $R(k, n)$.

2 Доказательства

2.1 Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2

- Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости
  - Утверждение: n прямых делят плоскость на области. $A(n)$ - верно ли, что эти области можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены в один цвет.
  - База:
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    По сути нам дана правильная раскраска плоскости в случае n прямых. Утверждается, что если при добавлении $n+1$ прямой инвертировать цвет всех областей по одну сторону от нее, то мы получим правильную раскраску. Докажем, что любая граница разделяет области разных цветов. Для этого рассмотрим 2 случая:

    1. Граница принадлежит какой-либо из старых n прямых. Тогда области, которые она разделяет, лежат по одну сторону от новой прямой. Поэтому поскольку старая раскраска была правильной, то в новой они также будут разного цвета.
    2. Граница принадлежит новой $n+1$ прямой. Тогда области, что она разделяет, в старой раскраске были одного цвета, мы инвертируем только одну из них, поэтому получаем 2 разных цвета.

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Неравенство Бернулли
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $(1+x)^n \geqslant 1+xn$, $x \in \mathbb{R}, x > -1$
  - База: $A(1)\colon (1+x)^1 \geqslant 1 + x \cdot 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+xn)(1+x) \geqslant$$

    $$\geqslant (1+xn) + x = 1 + x(n+1)$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Сумма обратных квадратов меньше 2
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
  - База: $A(1)\colon \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1 \leqslant 2 - 1 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно. Так как $\frac{1}{n} > 0$ получаем:

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$$

2.2 Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа

1. ПМИ (принцип математической индукции)
2. ППМИ (принцип полной математической индукции)
3. ПНЧ (принцип наименьшего числа)

Докажем следствия по циклу (из утверждения 1 следует утверждение 2, из $2 \Rightarrow 3$, из $3 \Rightarrow 1$), тогда эквивалетнонсть каждой пары будет доказана.

- ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$

  $\forall n : (\forall k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S$

  $X = \{n \mid \forall k < n, k \in S\}$

  $1 \in X$

  $n \in X \Rightarrow n \in S$

  $n \in X \Rightarrow n+1 \in X \Rightarrow n+1 \in S$

  Тогда по индукции $S = \mathbb{N}$, значит ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ, ч.т.д.

- ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ

  Рассмотрим $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$.

  Докажем от противного. Пусть в S нет минимального элемента.

  $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$.

  Тогда $1 \in \overline{S}$ и $\forall n : (\forall k < n, k \in \overline{S}) \Rightarrow n \in \overline{S}$

  По ППМИ получаем $\overline{S} = \mathbb{N} \Rightarrow S = \varnothing \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$, значит ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ, ч.т.д.

- ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ

  Пусть $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) - \text{ложное}\}$ Рассмотрим 2 случая:

  1. $S = \varnothing \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ - верно, ч.т.д.
  2. $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists \min S$. Обозначим $m = \min S$
     Но тогда $m - 1 \notin S \Rightarrow A(m-1)$ – верно
     Но при этом $A(m)$ - верно $\Rightarrow m \notin S \Rightarrow$ противоречие, значит ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ, ч.т.д.

2.3 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

LYM-лемма, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Доказательство:

Посчитаем количество цепей максимальной длины двумя способами. Для начала разберемся какой длины максимальная цепь. Будем рассматривать элементы цепи в порядке увеличения. Тогда если после x идет y, то x - подслово y, это значит, что в y единицы обязательно в тех же местах что и в x + хотя бы еще одна в других местах. Каждый раз количество единиц в вершины строго увеличивается, а значит, чтобы достичь цепь максимальной длины, нужно увеличивать вес(количество единиц) вершины на 1. Получаем, что максимальная длина цепи $n+1$.

Посчитаем первым способом количество цепей максимально длины. Чтобы дойти от 00...0 до 11...1. Нам нужно вставить в каком-то порядке n единиц, причем каждый порядок задает свою цепь. Получаем, что у нас $n!$ вариантов последовательно вставить единицы, а значит и $n!$ цепей.

Посчитаем вторым способом. Зафиксируем какую-то вершину куба x, вес которой k. Сколько цепей максимальной длины проходит через нее? По тем же соображениям $k! \cdot (n-k)!$, потому что нам нужно каким-то порядком сначала поставлять k заданных единиц, а потом дойти из x до 11...1, проставив уже $n-k$ единиц.

Тогда сколько цепей максимальной длины проходит через вершины антицепи A? Заметим тот факт, что через каждую вершину проходят свои уникальные цепи. Пусть это не так, тогда x_1 и x_2 находятся в одной цепи, значит их можно сравнить, значит они не могут быть в одной антицепи. Раз через каждую вершину проходят уникальные цепи максимальной длины, можно выписать неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leqslant n!$$

то есть количество уникальных цепей максимальный длины, проходящих через вершины антицепи A не превосходит общего количества цепей максимальной длины. Делим неравенство на правую сторону, получаем то, что и требовалось доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Лемма, что $max_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k = C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Будет использоваться, но не доказываться.

Доказательство:
Возьмем, то, что мы получили в LYM-лемме и воспользуемся нашей локальной леммой, получим:

$$1 \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^{[\frac{n}{2}]}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

правая часть неравенства не что иное, как количество элементов в антицепи A.

Доказали, что небольше, как найти пример, где ровно. Посмотрим на все вершины весом $[\frac{n}{2}]$. Очевидно, что они все несравнимы, а их количество как раз равно $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Что и требовалось доказать.

2.4 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Определение:
Цикл называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа по одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

Критерий существования:
Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

Ориентированный граф без вершин нулевой степени (в которые не входит и из которых не выходит рёбер) содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Доказательство:
Будем доказывать параллельно оба варианта теоремы. Пусть сначала эйлеров цикл есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, граф связен (сильно связен в ориентированном случае).

Теперь про степени. Возьмём какую-то вершину v, пусть она встречается в цикле k раз. Идя по циклу, мы приходим в неё k раз и уходим k раз, значит, использовали k входящих и k исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны k, а в неориентированном графе её степень равна $2k$. Таким образом, в одну сторону критерий доказан.

Рассуждение в обратную сторону чуть сложнее. Будем рассматривать пути, которые не проходят дважды по одному ребру. (Таков, например, путь из одного ребра.) Выберем среди них самый длинный путь

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots \to a_{n-1} \to a_n$$

и покажем, что он является искомым циклом, то есть что $a_1 = a_n$ и что он содержит все рёбра.

В самом деле, если он самый длинный, то добавить к нему ребро $a_n \to a_{n+1}$ уже нельзя, то есть все выходящие из an рёбра уже использованы. Это возможно, лишь если $a_1 = a_n$. В самом деле, если вершина an встречалась только внутри пути (пусть она входит k раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k+1$ входящих рёбер и k выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени (в ориентированном случае) или чётности степени (в неориентированном случае).

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (мы предполагаем, что граф связен или сильно связен) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины a_i выходит ребро $a_i \to v$, то путь можно удлинить до

$$a_i \to a_{i+1} \to \dots \to a_n = a_1 \to a_2 \to \dots \to a_i \to v$$

вопреки нашему выбору (самого длинного пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра v → ai , добавив его в начало. (А можно заметить, что если есть неиспользованное входящее ребро, то есть и неиспользованное выходящее.) Это рассуждение было для ориентированного случая, но в неориентированном всё аналогично. Теорема доказана.

Помимо эйлеровых циклов, можно рассматривать *эйлеровы пути* — пути в графе, которые проходят один раз по каждому ребру. (Для неориентированных графов: рисуем картинку, не отрывая карандаша от бумаги, но не обязаны вернуться в исходную точку.) Для них тоже есть критерий: в неориентированном случае нужно, чтобы граф был связен и было не более двух вершин нечётной степени.

2.5 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.

Определение:

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором можно разбить вершины на две доли — левые и правые, что все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли).

Критерий двудольности:

Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый, то есть не содержит циклов нечетной длины.

Очевидно доказать экививалентность утверждений граф двудольный и граф двураскрашиваемый, так что приведем доказательство того, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечетной длины.

Доказательство:

Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине c, которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии (все расстояния и пути подразумеваются минимальными по количеству ребер) 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра $\{u, v\}$ концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра c некоторой компоненты до вершин u и v имеют одинаковую чётность. Заметим, что если расстояния от центра до u и v не равны, то путь до одной из вершин можно было сократить, проходя через другую вершину (так как расстояния отличаются как минимум на 2). Получаем, что расстояния от центра до v и u равны.

Но тогда путь от центра до v + ребро $\{v, u\}$ + путь от u до центра имеют нечетную длину (пути могут пересекаться, но простоту цикла в теореме ничего не сказано). Получили противоречие.

Булев куб двураскрашиваемый

Будем называть четностью вершины $v = (x_1, \ldots, x_n)$ число $parity(v) = x_1 + \cdots + x_n \mod 2$. Тогда заметим, что если v, u связаны ребром, то $parity(v) \neq parity(u)$. Значит если у нас существует цикл нечетной длины k

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$$

то, так как четность на каждом шаге меняется, получаем $parity(v_1) = parity(v_3) = \cdots = parity(v_k)$, но соседние вершины не могут иметь одну четность. Получаем противоречие.

2.6 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше вершин, чем X, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле L.

База индукции. Если в L всего одна вершина x, то у неё есть хотя бы один сосед y в правой доле R по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром $\{x, y\}$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше n вершин. Рассмотрим граф $G = (L, R, E)$, для которого выполняются условия теоремы и в L ровно n вершин. Разберём два случая.

Первый случай: в левой доле есть такое множество X, для которого $|X| = |G(X)|$. Выделим из графа два подграфа. Первый, G_1, имеет доли X, $G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Второй, G_2, имеет доли $L \setminus X$, $R \setminus G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для G_1 это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа G_2 от противного. Пусть для подмножества $Z \subseteq L \setminus X$ соседей в $R \setminus G(X)$ меньше, чем вершин в Z. Тогда в графе G соседей у множества $X \cup Z$ меньше $|Z \cup X|$ (ведь множества X и Z не пересекаются, а соседей у X ровно $|X|$).

Итак, для G_1, G_2 выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше n. Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в G размера $|L|$.

Второй случай: для каждого $X \subseteq L$ выполняется неравенство $|X| < |G(X)|$.
Выберем вершину $a \in L$ и её соседа $b \in R$ (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).
Если в графе $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$, полученном из G выбрасыванием вершин a, b и инцидентных им рёбер, есть паросочетание P размера $n - 1$, то в графе G есть паросочетание размера n: к рёбрам из P добавим ребро $\{a, b\}$.
Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для G' нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество $X \subseteq L \setminus \{a\}$ имеет мало соседей в $(R \setminus \{b\} : |X| > |G'(X)|$. Но в графе G у множества X есть разве что ещё один сосед b. Поэтому для этого множества выполняется равенство $|X| = |G(X)|$. Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

2.7 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига

Теорема Кёнига В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

Доказательство:
В одну сторону легко. Если P - паросочетание в двудольном графе $G = (L, R, E)$, то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие $X \sqcup Y, X \subseteq L, Y \subseteq R$, в графе G. Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения $G_{X,G(X)\setminus Y}$ графа на множество вершин X в левой доле и множество вершины $G(X) \setminus Y$ в правой доле (оставляем в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ только рёбра между указанными вершинами). Пусть $S \subseteq X$.

Множество $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X,G(X)\setminus Y}(S)$ является вершинным покрытием в G: все рёбра, покрытые вершинами из S, покрыты также либо вершинами из Y, либо соседями вершин из S в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие, $|G_{X,G(X)\setminus Y} G_{X,G(X)\setminus Y}(S)| \geqslant |S|$, что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа $G_{L\setminus X,Y}$, полученного ограничением G на вершины $L \setminus X$ в левой доле и Y в правой доле (так как $X \sqcup Y$ - вершинное покрытие исходного графа, $L \setminus X$ входит в множество соседей Y в левой доле).

По теореме Холла в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ есть паросочетание размера $|X|$, а в $G_{L\setminus X,Y}$ есть паросочетание размера $|Y|$. Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера $|X| + |Y|$ в графе G. Таким образом, размер максимального паросочетания в G не меньше размера минимального вершинного покрытия.

2.8 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на N вершинах, то оно справедливо и для графов с $N' > N$ вершинами. Обозначим через $R(k,n)$ число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство:

Будем доказывать индукцией по s, что для любой пары чисел k, n такой, что k + n = s справедливо утверждение теоремы.

База индукции $s = 2$ очевидна: $2 = 1 + 1$ — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение выполнено для всех пар (k, n) таких, что $k + n = s$.

Докажем его для пары (k, n) такой, что $k + n = s + 1$. По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар $(k - 1, n)$ и $(k, n - 1)$.

Рассмотрим граф на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине и возьмём какую-то вершину v этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины v ровно $N_0 - 1$ штук. Среди них x соседей и y несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geqslant R(k - 1, n)$$

$$y \geqslant R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k - 1, n)$$

$$y < R(k, n - 1)$$

из которых следует $x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1) - 2$.

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины v есть $R(k - 1, n)$ соседей или есть $R(k, n - 1)$ несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

Первый случай. В индуцированном соседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера $k - 1$ или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины v даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Второй случай. В индуцированном несоседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера k или независимое множество размера $n - 1$. В первом варианте в исходной графе есть клика размера k, а во втором добавление вершины v даёт независимое множество размера n в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары (k, n), для которой $k + n = s + 1$. Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

3 Задачи из листков