Коллоквиум по дискретной математике №1

10 декабря 2022

Содержание

1 Определения

1.1 Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.

- Принцип математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно (База индукции)
  2. $\forall n : A(n)$ - верно $\Rightarrow A(n+1)$ верно. (Шаг индукции)

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип математической индукции (эквивалентная формулировка):

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

  1. $1 \in S$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$

  Тогда $S = \mathbb{N}$.

- Принцип полной математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно
  2. $\forall n : (\forall k < n \; A(k)$ - верно$) \Rightarrow A(n+1)$ верно.

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип наименьшего числа

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing \Rightarrow$ в S существует минимальный элемент.

  Минимальным элементом множества A называют такое число c, что $\forall a \in A : c \leqslant a$

1.2 Формулы, полные системы связок, примеры. Дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ.

Связка – это любая булева функция. Вроде как точно связку не определяют, тем не менее, под связками понимают именно булевы функции

Пример множества связок: $F = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Пусть F это множество связок. Тогда, функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ **выразима в системе связок** F, если $\exists$ формула φ под данной системой F (или f можно выразить через функции системы связок F):

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Формула φ строится последовательно:

1. Переменная x_i сама по себе является формулой
2. Переменная $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $g \in F$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ формулы – тоже формула.
3. Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формула, то $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ тоже формула (где x_{n+1} фиктивная переменная, так мы умеем расширять количество аргументов у формулы).

Константы по умолчанию не являются формулами, их надо выражать из связок.

$[F]$ – множество всех булевых функций, выразимых в F (или **замыкание** F)

F – **полная система связок**, если $[F]$ – все булевы функции (P_2).

Пусть $x^a = x$ если $a = 1$ и $\neg x$ если $a = 0$. Тогда:

Коньюнкт – $x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k}$

Дизьюнктивная Нормальная Форма (ДНФ) – представление функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как дизьюнкции коньюнктов.

Пример: для функции $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$, ДНФ – $A^1 \wedge C^1 \vee A^1 \wedge D^0 \vee B^1 \wedge C^1 \vee B^1 \wedge D^0$

1.3 Полином Жегалкина. Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина.

Моном – это выражение вида $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$.
(0 и 1 – тоже мономы)
Полином Жегалкина – многочлен вида $\bigoplus\limits_{(i_1,\ldots,i_k),k=0\ldots n} a_{i_1\ldots i_k} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_k}$
Пример: $1 \oplus (x \wedge y) \oplus (x \wedge y \wedge z)$
Теорема о представлении булевой функции полиномом Жегалкина: каждую булеву функцию можно однозначно представить в виде полинома Жегалкина.

1.4 Класс линейных функций, лемма о нелинейной функции.

Функция f называется линейной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$, где $a_i \in \{0, 1\}$
$L = \{f \in P_2 |\ f$ – линейная$\}$ – множество всех линейных функций.
Пример: $x_i \in L$, $x \oplus y \in L$, $0, 1 \in L$
$x \wedge y \notin L, x \vee y \notin L$
Лемма о нелинейной функции: Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$. Тогда подставив вместо переменных функции $x_1, \ldots, x_n$ 0, x и y можно получить $g(x, y) \notin L$.
Иначе говоря, через любую не линейную функцию на n переменных можно выразить не линейную функцию на двух переменных.

1.5 Принцип двойственности, класс самодвойственных функций, лемма о несамодвойственной функции.

Принцип двойственности:
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$. Тогда:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k^*(x_1, \ldots, x_n))$$

Функция $f \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^* = f$.
$S = \{f \in P_2 | f* = f\}$ – множество всех самодвойственных функций.
Пример: $x \in S, \neg x \in S, x \oplus y \oplus z \in S$
Лемма о несамодвойственной функции:
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$. Тогда подставляя вместо переменных функции $x, \neg x$, можно получить константу.

1.6 Класс монотонных функций, лемма о немонотонной функции.

Для того, чтобы ввести класс монотонных функций нам нужно ввести понятие порядка на множестве наборов переменных. Скажем, что изначально $0 < 1$. Тогда:
Набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ **меньше** $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, если $\forall i, \alpha_i \leq \beta_i$.
Пример: $(1, 0) \leq (1, 1)$
$(1, 0) \nleq (0, 1)$ (не сравнимы)
$(0, 1) \nleq (1, 0)$ (не сравнимы)
$f \in P_2$ **монотонная**, если $\forall \alpha_i, \beta_i$, $\alpha_i \leq \beta_i \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$
Лемма о немонотонной функции:
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$. Тогда, подставляя вместо переменных 0, 1, x, можно получить $\neg x$.

1.7 Критерий Поста полноты системы булевых функций.

Критерий Поста: $[F] = P_2 \Leftrightarrow F \nsubseteq L, F \nsubseteq T_0, F \nsubseteq T_1, F \nsubseteq S, F \nsubseteq M$
Иначе говоря, система связок полная тогда и только тогда, когда для любого класса L, S, T_0, T_1, M в системе связок F есть функция, не лежащая в этом классе.

1.8 Предполные классы

Пусть $F \subseteq P_2$ – замкнутый класс ($[F] = F$)
F – предполный в P_2, если $F \neq P_2$, но $\forall g \notin F\ [F \cup g] = P_2$.

1.9 Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Примеры.

Равномощные множества. Множества A и B называются равномощными, если $\exists f : A \to B$ - биекция. $|A| = |B|, A \sim B$

Счетное множество - множество равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Континуальное множество - множество равномощное множеству действительных чисел $\mathbb{R}$.

Примеры.

1. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(n) = n - 1$
2. $(0, 1) \sim (0, 2)$, $f(x) = 2x$
3. $[a, b] \sim [c, d]$

1.10 Сравнение мощностей, теорема Кантора.

Сравнение мощностей.
$|A| \leqslant |B|$, если $\exists f : A \to B$ - инъекция.
$|A| < |B|$, если $A \leqslant B$ и $A \not\sim B$.

Теорема Кантора:
Пусть X - множество.
Тогда $|X| < |2^X|$.

1.11 Теорема Кантора–Бернштейна.

Пусть $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \geqslant |B|$, тогда $A \sim B$.

1.12 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Отношение порядка на булевом кубе. Вершины булева куба - двоичные слова, тогда, если слово x является подсловом y (с точки зрения единиц), то $x \leqslant y$ (покоординатное сравнение).

LYM-лемма, или *LYM-inequality.* Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

1.13 Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Понятия пути, цикла, простого пути, простого цикла.

Неориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$.
$E \subseteq \{a, b | a, b \in V,\ a \neq b\}$

Ориентированный граф - пара множества вершин и множества ребер.
$G = (V, E)$, $|V| < \infty$.
$E \subseteq \{(a, b) | a, b \in V,\ a \neq b\}$

Степень вершины - количество ребер исходящих из вершины.
Для неориентированного графа:
$\deg(v) = |\{e \in E | v \in e\}|$

Для ориентированного графа:
$\deg_+(v) = |\{(v, a) \in E | a \in V\}|$
$\deg_-(v) = |\{(b, v) \in E | b \in V\}|$

Лемма о рукопожатиях
Для неориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Для ориентированного графа:
$\sum\limits_{v \in V} \deg_+(v) = \sum\limits_{v \in V} \deg_-(v) = |E|$

Смежные вершины. Вершины v_1, v_2 называются смежными, если $\exists e \in E : e = \{v_1, v_2\}$.

Путь - последовательность смежных вершин. $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$

Простой путь - путь, в котором все вершины различны.

Цикл - путь, у которого первая и последняя вершины одинаковы.

Простой цикл - путь, у которого совпадают только первая и последняя вершины, длины больше или равной 3.

Длина пути - количество вершин в пути - 1.

1.14 Отношение достижимости и компоненты связности графа. Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

Отношение достижимости. Вершина u достижима из вершины v, если $\exists$ путь из v в u. Так же говорят, что вершины v и u - связны ($u \sim v$). Отношение достижимости называют отношением связности.

Отношение сильной связности. u и v - сильно связны, если $\exists$ ориентированный путь $u - v$ и $\exists$ ориентированный путь $v - u$.

Компонента связности графа. Так как отношение связности является отношением эквивалентности, то множество вершин можно разбить на компоненты - компоненты связности.

Неравенство, связывающее число вершин, ребер и компонент связности в графе.
Количество компонент связности $\geqslant |V| - |E|$

Компоненты сильной связности ориентированного графа. Так как отношение сильно связности является отношением эквивалентности, то множество вершин ориентированного графа можно разбить на компоненты - компоненты сильной связности.

1.15 Деревья. Теорема об эквивалентных определениях дерева.

Эквивалентные определения дерева:

1. G - минимальный связный граф
2. G - связен и $|E| = |V| - 1$
3. в G между любыми 2 вершинами $\exists!$ простой путь
4. G - связен и в нем нет простых циклов

Обычно дерево обозначают через T.

Предки - все вершины на пути от корня до вершины, не включая саму вершину.

Потомок - вершина, которая не является предком.

Лист - вершина степени 1.

1.16 Полное двоичное дерево. Остовное дерево в графе.

Полное двоичное дерево - дерево, где каждой вершине можно присвоить булевый кортеж и тогда все вершины будут представимы в виде $\bigcup\limits_{k=0}^{n} \{0,1\}^k$. Тогда ребра будут между вершинами $a_1, ..., a_k$ и $a_1, ..., a_k, a_{k+1}$.

В полном двоичном дереве 2^n листьев.

Остовное дерево в графе. Дан граф $G = (V, E)$. Тогда остовное дерево в G - это $T = (V, E'), E' \subseteq E, T$ - дерево.

1.17 Ациклические орграфы, топологическая сортировка.

Ациклический орграф - орграф, в котором нет циклов.

Топологическая сортировка. Эквивалентные определения:

1. Орграф G - ацикличен.
2. Все компоненты сильной связности G состоят из 1 вершины.
3. Все вершины G можно пронумеровать числами от 1 до n: если $i \to j$, то $i < j$.

1.18 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не делает это дважды).

Граф называется эйлеровым, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление изолированных вершин, то есть тех вершин, из которых не выходит и в которые не входит ни одного ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

Теорема 1. В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

Теорема 2. Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

1.19 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором вершины можно разделить на две доли — левую и правую, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества L (левую долю) и R (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

Критерий двудольности графа. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда не содержит в себе циклы нечетной длины.

Булев куб размерности n — это неориентированный граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n, а рёбра соединяют слова, отличающиеся в одной позиции.

1.20 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше, чем $|X|$ вершин, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

1.21 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.

Пусть дан граф G = (V, E), **паросочетание M** в G — это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

Вершинным покрытием называется такое множество вершин S, что для любого ребра хотя бы один из концов лежит в S. Нетрудно проверить, что дополнение к вершинному покрытию — независимое множество и, наоборот, дополнение к независимому множеству — вершинное покрытие. Для двудольных графов вершинные покрытия оказываются связанными с паросочетаниями.

Теорема Кёнига. В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

1.22 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n. Минимальное такое N_0 называют **числом Рамсея**, обозначается $R(k, n)$.

2 Доказательства

2.1 Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2

- Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости
  - Утверждение: n прямых делят плоскость на области. $A(n)$ - верно ли, что эти области можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены в один цвет.
  - База:
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    По сути нам дана правильная раскраска плоскости в случае n прямых. Утверждается, что если при добавлении $n+1$ прямой инвертировать цвет всех областей по одну сторону от нее, то мы получим правильную раскраску. Докажем, что любая граница разделяет области разных цветов. Для этого рассмотрим 2 случая:

    1. Граница принадлежит какой-либо из старых n прямых. Тогда области, которые она разделяет, лежат по одну сторону от новой прямой. Поэтому поскольку старая раскраска была правильной, то в новой они также будут разного цвета.
    2. Граница принадлежит новой $n+1$ прямой. Тогда области, что она разделяет, в старой раскраске были одного цвета, мы инвертируем только одну из них, поэтому получаем 2 разных цвета.

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Неравенство Бернулли
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $(1+x)^n \geqslant 1+xn$, $x \in \mathbb{R}, x > -1$
  - База: $A(1)\colon (1+x)^1 \geqslant 1+x\cdot 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+xn)(1+x) \geqslant$$

    $$\geqslant (1+xn)+x = 1+x(n+1)$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Сумма обратных квадратов меньше 2
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
  - База: $A(1)\colon \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1 \leqslant 2-1 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно. Так как $\frac{1}{n} > 0$ получаем:

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$$

2.2 Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа

1. ПМИ (принцип математической индукции)
2. ППМИ (принцип полной математической индукции)
3. ПНЧ (принцип наименьшего числа)

Докажем следствия по циклу (из утверждения 1 следует утверждение 2, из $2 \Rightarrow 3$, из $3 \Rightarrow 1$), тогда эквивалетнонсть каждой пары будет доказана.

- ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$

  $\forall n : (\forall k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S$

  $X = \{n \mid \forall k < n, k \in S\}$

  $1 \in X$

  $n \in X \Rightarrow n \in S$

  $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \Rightarrow n + 1 \in S$

  Тогда по индукции $S = \mathbb{N}$, значит ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ, ч.т.д.

- ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ

  Рассмотрим $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$.

  Докажем от противного. Пусть в S нет минимального элемента.

  $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$.

  Тогда $1 \in \overline{S}$ и $\forall n : (\forall k < n, k \in \overline{S}) \Rightarrow n \in \overline{S}$

  По ППМИ получаем $\overline{S} = \mathbb{N} \Rightarrow S = \varnothing \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$, значит ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ, ч.т.д.

- ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ

  Пусть $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) - \text{ложное}\}$ Рассмотрим 2 случая:

  1. $S = \varnothing \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ - верно, ч.т.д.
  2. $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists \min S$. Обозначим $m = \min S$
     Но тогда $m - 1 \notin S \Rightarrow A(m - 1)$ – верно
     Но при этом $A(m)$ - верно $\Rightarrow m \notin S \Rightarrow$ противоречие, значит ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ, ч.т.д.

2.3 Подмножество счетного множества конечно или счетно. Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно. Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.

Подмножество счетного множества конечно или счетно.

Пусть B - счетно. $A \subseteq B$, тогда A - счетно или конечно.

Доказательство:

Так как B - счетно, то занумеруем все элементы из B и выпишем их в ряд. Теперь вычеркнем все элементы из $B \backslash A$.

$$B : \cancel{b}_1, b_2, b_3, \cancel{b}_4, ..., b_5, \cancel{b}_6, ...$$

Остались только элементы из A и это все элементы A, значит мы занумеровали все элементы из A. Чтд

Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество.

Если A - бесконечное множество, то $\exists B \in\subseteq A$, что B - счетно.

Доказательство:

$\exists a_1 \in A \Rightarrow B_1 = \{a_1\}$

$\exists a_2 \in A \backslash B_1 \Rightarrow B_2 = \{a_1, a_2\}$

$\exists a_3 \in A \backslash B_2 \Rightarrow B_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$

...

$\exists a_k \in A \backslash B_{k-1} \Rightarrow B_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

$B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, очевидно, что B - счетно. Чтд

Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

Пусть нам дано не более чем счетное количество множеств $A_1, A_2, ..., A_n, ...$. Тогда докажем, что их объединение - не более, чем счетно.

Доказательство:

Выпишем в столбец все множества $A_1, A_2, ...$, так можно, так как их не более чем, счетно. В строку выпишем элементы этих множеств.

$$\begin{array}{c|cccc} A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... \\ A_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... \\ \vdots & ... & ... & ... & \ddots \end{array}$$

Теперь будем набирать элементы по диагоналям, сначала берем с первой, потом со второй и тд. Так мы получим все элементы из A. И они будут занумерованы. Если какие-то элементы совпали, то их можно просто пропустить.

$$A = a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...$$

Ну или можно представить это в виде

$$A = \bigcup_{i=2}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i-1} a_{j(j-i)}$$

Значит A - счетно. Чтд

Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно.

Сначала докажем, что если A, B - счетны. То $A \times B$ - тоже счетно.

Доказательство:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{A \times \{b_i\}}_{\text{счетное множество}}$$

Но очевидно, что $A \times \{b_i\}$ - счетное множество, так как это просто множество A, к каждому элементу в котором приписали b_i. Значит $A \times B$ - счетное объединение счетных множеств, значит оно счетно.

Но раз $A \times B$ - счетно, то перейдя к равномощным $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ - тоже счетно, значит можно по индукции доказать, что $\forall k \;\; \mathbb{N}^k$ - счетно. Чтд

Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.

Пусть n - длина максимальной последовательности, значит такое множество можно представить в виде $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathbb{N}^k$. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathbb{N}^k$ - счетно, так как это счетное объединение счетных множеств. Кстати, тут $\mathbb{N}^k$ - можно считать за все слова длины k в алфавите $\mathbb{N}$.

2.4 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

LYM-лемма, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Доказательство:

Посчитаем количество цепей максимальной длины двумя способами. Для начала разберемся какой длины максимальная цепь. Будем рассматривать элементы цепи в порядке увеличения. Тогда если после x идет y, то x - подслово y, это значит, что в y единицы обязательно в тех же местах что и в x + хотя бы еще одна в других местах. Каждый раз количество единиц в вершины строго увеличивается, а значит, чтобы достичь цепь максимальной длины, нужно увеличивать вес(количество единиц) вершины на 1. Получаем, что максимальная длина цепи $n+1$.

Посчитаем первым способом количество цепей максимально длины. Чтобы дойти от 00...0 до 11...1. Нам нужно вставить в каком-то порядке n единиц, причем каждый порядок задает свою цепь. Получаем, что у нас $n!$ вариантов последовательно вставить единицы, а значит и $n!$ цепей.

Посчитаем вторым способом. Зафиксируем какую-то вершину куба x, вес которой k. Сколько цепей максимальной длины проходит через нее? По тем же соображениям $k! \cdot (n-k)!$, потому что нам нужно каким-то порядком сначала поставлять k заданных единиц, а потом дойти из x до 11...1, проставив уже $n-k$ единиц.

Тогда сколько цепей максимальной длины проходит через вершины антицепи A? Заметим тот факт, что через каждую вершину проходят свои уникальные цепи. Пусть это не так, тогда x_1 и x_2 находятся в одной цепи, значит их можно сравнить, значит они не могут быть в одной антицепи. Раз через каждую вершину проходят уникальные цепи максимальной длины, можно выписать неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leqslant n!$$

то есть количество уникальных цепей максимальный длины, проходящих через вершины антицепи A не превосходит общего количества цепей максимальной длины. Делим неравенство на правую сторону, получаем то, что и требовалось доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Лемма, что $max_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k = C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Будет использоваться, но не доказываться.

Доказательство:

Возьмем, то, что мы получили в LYM-лемме и воспользуемся нашей локальной леммой, получим:

$$1 \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^{[\frac{n}{2}]}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

правая часть неравенства не что иное, как количество элементов в антицепи A.

Доказали, что небольше, как найти пример, где ровно. Посмотрим на все вершины весом $[\frac{n}{2}]$. Очевидно, что они все несравнимы, а их количество как раз равно $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Что и требовалось доказать.

2.5 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Определение:

Цикл называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа по одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

Критерий существования:

Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

Ориентированный граф без вершин нулевой степени (в которые не входит и из которых не выходит рёбер) содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Доказательство:

Будем доказывать параллельно оба варианта теоремы. Пусть сначала эйлеров цикл есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, граф связен (сильно связен в ориентированном случае).

Теперь про степени. Возьмём какую-то вершину v, пусть она встречается в цикле k раз. Идя по циклу, мы приходим в неё k раз и уходим k раз, значит, использовали k входящих и k исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны k, а в неориентированном графе её степень равна $2k$. Таким образом, в одну сторону критерий доказан.

Рассуждение в обратную сторону чуть сложнее. Будем рассматривать пути, которые не проходят дважды по одному ребру. (Таков, например, путь из одного ребра.) Выберем среди них самый длинный путь

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$$

и покажем, что он является искомым циклом, то есть что $a_1 = a_n$ и что он содержит все рёбра.

В самом деле, если он самый длинный, то добавить к нему ребро $a_n \to a_{n+1}$ уже нельзя, то есть все выходящие из an рёбра уже использованы. Это возможно, лишь если $a_1 = a_n$. В самом деле, если вершина an встречалась только внутри пути (пусть она входит k раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k+1$ входящих рёбер и k выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени (в ориентированном случае) или чётности степени (в неориентированном случае).

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (мы предполагаем, что граф связен или сильно связен) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины a_i выходит ребро $a_i \to v$, то путь можно удлинить до

$$a_i \to a_{i+1} \to \cdots \to a_n = a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_i \to v$$

вопреки нашему выбору (самого длинного пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра v → ai , добавив его в начало. (А можно заметить, что если есть неиспользованное входящее ребро, то есть и неиспользованное выходящее.) Это рассуждение было для ориентированного случая, но в неориентированном всё аналогично. Теорема доказана.

Помимо эйлеровых циклов, можно рассматривать *эйлеровы пути* — пути в графе, которые проходят один раз по каждому ребру. (Для неориентированных графов: рисуем картинку, не отрывая карандаша от бумаги, но не обязаны вернуться в исходную точку.) Для них тоже есть критерий: в неориентированном случае нужно, чтобы граф был связен и было не более двух вершин нечётной степени.

2.6 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.

Определение:

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором можно разбить вершины на две доли — левые и правые, что все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли).

Критерий двудольности:

Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый, то есть не содержит циклов нечетной длины.

Очевидно доказать экививалентность утверждений граф двудольный и граф двураскрашиваемый, так что приведем доказательство того, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечетной длины.

Доказательство:

Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине с, которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии (все расстояния и пути подразумеваются минимальными по количеству ребер) 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра $\{u, v\}$ концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра с некоторой компоненты до вершин u и v имеют одинаковую чётность. Заметим, что если расстояния от центра до u и v не равны, то путь до одной из вершин можно было сократить, проходя через другую вершину (так как расстояния отличаются как минимум на 2). Получаем, что расстояния от центра до v и u равны.

Но тогда путь от центра до v + ребро $\{v, u\}$ + путь от u до центра имеют нечетную длину (пути могут пересекаться, но простоту цикла в теореме ничего не сказано). Получили противоречие.

Булев куб двураскрашиваемый

Будем называть четностью вершины $v = (x_1, \dots, x_n)$ число $parity(v) = x_1 + \dots + x_n \mod 2$. Тогда заметим, что если v, u связаны ребром, то $parity(v) \neq parity(u)$. Значит если у нас существует цикл нечетной длины k

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k \to v_1$$

то, так как четность на каждом шаге меняется, получаем $parity(v_1) = parity(v_3) = \dots = parity(v_k)$, но соседние вершины не могут иметь одну четность. Получаем противоречие.

2.7 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше вершин, чем X, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле L.

База индукции. Если в L всего одна вершина x, то у неё есть хотя бы один сосед y в правой доле R по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром $\{x, y\}$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше n вершин. Рассмотрим граф $G = (L, R, E)$, для которого выполняются условия теоремы и в L ровно n вершин. Разберём два случая.

Первый случай: в левой доле есть такое множество X, для которого $|X| = |G(X)|$. Выделим из графа два подграфа. Первый, G_1, имеет доли X, $G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Второй, G_2, имеет доли $L \setminus X$, $R \setminus G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для G_1 это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа G_2 от противного. Пусть для подмножества $Z \subseteq L \setminus X$ соседей в $R \setminus G(X)$ меньше, чем вершин в Z. Тогда в графе G соседей у множества $X \cup Z$ меньше $|Z \cup X|$ (ведь множества X и Z не пересекаются, а соседей у X ровно $|X|$).

Итак, для G_1, G_2 выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше n. Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в G размера $|L|$.

Второй случай: для каждого $X \subseteq L$ выполняется неравенство $|X| < |G(X)|$.

Выберем вершину $a \in L$ и её соседа $b \in R$ (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).

Если в графе $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$, полученном из G выбрасыванием вершин a, b и инцидентных им рёбер, есть паросочетание P размера $n - 1$, то в графе G есть паросочетание размера n: к рёбрам из P добавим ребро $\{a, b\}$.

Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для G' нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество $X \subseteq L \setminus \{a\}$ имеет мало соседей в $(R \setminus \{b\} : |X| > |G'(X)|$. Но в графе G у множества X есть разве что ещё один сосед b. Поэтому для этого множества выполняется равенство $|X| = |G(X)|$. Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

2.8 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига

Теорема Кёнига В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

Доказательство:

В одну сторону легко. Если P - паросочетание в двудольном графе $G = (L, R, E)$, то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие $X \sqcup Y, X \subseteq L, Y \subseteq R$, в графе G. Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения $G_{X, G(X) \setminus Y}$ графа на множество вершин X в левой доле и множество вершины $G(X) \setminus Y$ в правой доле (оставляем в $G_{X, G(X) \setminus Y}$

только рёбра между указанными вершинами). Пусть $S \subseteq X$.

Множество $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X,G(X)\setminus Y}(S)$ является вершинным покрытием в G: все рёбра, покрытые вершинами из S, покрыты также либо вершинами из Y, либо соседями вершин из S в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие, $|G_{X,G(X)\setminus Y}G_{X,G(X)\setminus Y}(S)| \geqslant |S|$, что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа $G_{L\setminus X,Y}$, полученного ограничением G на вершины $L \setminus X$ в левой доле и Y в правой доле (так как $X \sqcup Y$ - вершинное покрытие исходного графа, $L \setminus X$ входит в множество соседей Y в левой доле).

По теореме Холла в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ есть паросочетание размера $|X|$, а в $G_{L\setminus X,Y}$ есть паросочетание размера $|Y|$. Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера $|X| + |Y|$ в графе G. Таким образом, размер максимального паросочетания в G не меньше размера минимального вершинного покрытия.

2.9 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на N вершинах, то оно справедливо и для графов с $N' > N$ вершинами. Обозначим через $R(k,n)$ число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство:
Будем доказывать индукцией по s, что для любой пары чисел k, n такой, что k + n = s справедливо утверждение теоремы.

База индукции $s = 2$ очевидна: $2 = 1 + 1$ — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение выполнено для всех пар (k, n) таких, что $k + n = s$.

Докажем его для пары (k, n) такой, что $k + n = s + 1$. По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар $(k - 1, n)$ и $(k, n - 1)$.

Рассмотрим граф на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине и возьмём какую-то вершину v этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины v ровно $N_0 - 1$ штук. Среди них x соседей и y несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geqslant R(k - 1, n)$$
$$y \geqslant R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k - 1, n)$$
$$y < R(k, n - 1)$$

из которых следует $x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1) - 2$.

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины v есть $R(k - 1, n)$ соседей или есть $R(k, n - 1)$ несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

Первый случай. В индуцированном соседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера $k-1$ или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины v даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Второй случай. В индуцированном несоседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера k или независимое множество размера $n - 1$. В первом варианте в исходной графе есть клика размера k, а во втором добавление вершины v даёт независимое множество размера n в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары (k, n), для которой $k+n = s+1$. Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

3 Задачи из листков