Коллоквиум по дискретной математике №1

10 декабря 2022

Содержание

1 Определения

1.1 Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции. Принцип наименьшего числа.

- Принцип математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно (База индукции)
  2. $\forall n : A(n)$ - верно $\Rightarrow A(n+1)$ верно. (Шаг индукции)

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип математической индукции (эквивалентная формулировка):

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

  1. $1 \in S$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

  Тогда $S = \mathbb{N}$.

- Принцип полной математической индукции:

  Пусть есть некоторое утверждение A зависящее от $n \in \mathbb{N}$, которое может быть либо верным, либо ложным, и выполняются следующие условия:

  1. $A(1)$ верно
  2. $\forall n : (\forall k < n\ A(k)$ - верно$) \Rightarrow A(n+1)$ верно.

  То $\forall n : A(n)$ - верно.

- Принцип наименьшего числа

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing \Rightarrow$ в S существует минимальный элемент.

  Минимальным элементом множества A называют такое число c, что $\forall a \in A : c \leqslant a$

1.2 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Отношение порядка на булевом кубе. Вершины булева куба - двоичные слова, тогда, если слово x является подсловом y (с точки зрения единиц), то $x \leqslant y$ (покоординатное сравнение).

LYM-лемма, или *LYM-inequality.* Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

1.3 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не делает это дважды).

Граф называется эйлеровым, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление изолированных вершин, то есть тех вершин, из которых не выходит и в которые не входит ни одного ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

Теорема 1. В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

Теорема 2. Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

1.4 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Булев куб.

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором вершины можно разделить на две доли — левую и правую, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества L (левую долю) и R (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

Критерий двудольности графа. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда не содержит в себе циклы нечетной длины.

Булев куб размерности n — это неориентированный граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n, а рёбра соединяют слова, отличающиеся в одной позиции.

1.5 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше, чем $|X|$ вершин, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

1.6 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига.

Пусть дан граф G = (V, E), **паросочетание M** в G — это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

Вершинным покрытием называется такое множество вершин S, что для любого ребра хотя бы один из концов лежит в S. Нетрудно проверить, что дополнение к вершинному покрытию — независимое множество и, наоборот, дополнение к независимому множеству — вершинное покрытие. Для двудольных графов вершинные покрытия оказываются связанными с паросочетаниями.

Теорема Кёнига. В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

1.7 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n. Минимальное такое N_0 называют **числом Рамсея**, обозначается $R(k, n)$.

2 Доказательства

2.1 Применения метода математической индукции: существование 2-цветной раскраски областей на плоскости; неравенство Бернулли; сумма обратных квадратов меньше 2

- Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости
  - Утверждение: n прямых делят плоскость на области. $A(n)$ - верно ли, что эти области можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены в один цвет.
  - База:
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    По сути нам дана правильная раскраска плоскости в случае n прямых. Утверждается, что если при добавлении $n+1$ прямой инвертировать цвет всех областей по одну сторону от нее, то мы получим правильную раскраску. Докажем, что любая граница разделяет области разных цветов. Для этого рассмотрим 2 случая:

    1. Граница принадлежит какой-либо из старых n прямых. Тогда области, которые она разделяет, лежат по одну сторону от новой прямой. Поэтому поскольку старая раскраска была правильной, то в новой они также будут разного цвета.
    2. Граница принадлежит новой $n+1$ прямой. Тогда области, что она разделяет, в старой раскраске были одного цвета, мы инвертируем только одну из них, поэтому получаем 2 разных цвета.

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Неравенство Бернулли
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $(1+x)^n \geqslant 1+xn$, $x \in \mathbb{R}, x > -1$
  - База: $A(1)\colon (1+x)^1 \geqslant 1 + x \cdot 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+xn)(1+x) \geqslant$$
    $$\geqslant (1+xn) + x = 1 + x(n+1)$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно.

- Сумма обратных квадратов меньше 2
  - Утверждение: $A(n)$ - верно ли, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
  - База: $A(1)\colon \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1 \leqslant 2 - 1 \Rightarrow$ база верна
  - Шаг: пусть $A(n)$ - верно, докажем верность $A(n+1)$:

    $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

    Таким образом $A(n+1)$ верно $\Rightarrow$ индукция верна $\Rightarrow$ исходное утверждение верно. Так как $\frac{1}{n} > 0$ получаем:

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$$

2.2 Эквивалентность принципа математической индукции, принципа полной индукции и принципа наименьшего числа

1. ПМИ (принцип математической индукции)
2. ППМИ (принцип полной математической индукции)
3. ПНЧ (принцип наименьшего числа)

Докажем следствия по циклу (из утверждения 1 следует утверждение 2, из $2 \Rightarrow 3$, из $3 \Rightarrow 1$), тогда эквивалетнонсть каждой пары будет доказана.

- ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ

  Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$

  $\forall n : (\forall k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S$

  $X = \{n \mid \forall k < n, k \in S\}$

  $1 \in X$

  $n \in X \Rightarrow n \in S$

  $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \Rightarrow n + 1 \in S$

  Тогда по индукции $S = \mathbb{N}$, значит ПМИ $\Rightarrow$ ППМИ, ч.т.д.

- ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ

  Рассмотрим $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$.

  Докажем от противного. Пусть в S нет минимального элемента.

  $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$.

  Тогда $1 \in \overline{S}$ и $\forall n : (\forall k < n, k \in \overline{S}) \Rightarrow n \in \overline{S}$

  По ППМИ получаем $\overline{S} = \mathbb{N} \Rightarrow S = \varnothing \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$, значит ППМИ $\Rightarrow$ ПНЧ, ч.т.д.

- ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ

  Пусть $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) - \text{ложное}\}$ Рассмотрим 2 случая:

  1. $S = \varnothing \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ - верно, ч.т.д.
  2. $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists \min S$. Обозначим $m = \min S$
     Но тогда $m - 1 \notin S \Rightarrow A(m-1)$ – верно
     Но при этом $A(m)$ - верно $\Rightarrow m \notin S \Rightarrow$ противоречие, значит ПНЧ $\Rightarrow$ ПМИ, ч.т.д.

2.3 LYM-лемма, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

LYM-лемма, или *LYM-inequality*. Дан булев куб, пусть A в нем - антицепь, a_k - количество элементов в антицепи, в которых ровно k единиц. Тогда утверждается, что выполнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Доказательство:

Посчитаем количество цепей максимальной длины двумя способами. Для начала разберемся какой длины максимальная цепь. Будем рассматривать элементы цепи в порядке увеличения. Тогда если после x идет y, то x - подслово y, это значит, что в y единицы обязательно в тех же местах что и в x + хотя бы еще одна в других местах. Каждый раз количество единиц в вершины строго увеличивается, а значит, чтобы достичь цепь максимальной длины, нужно увеличивать вес(количество единиц) вершины на 1. Получаем, что максимальная длина цепи $n + 1$.

Посчитаем первым способом количество цепей максимально длины. Чтобы дойти от 00...0 до 11...1. Нам нужно вставить в каком-то порядке n единиц, причем каждый порядок задает свою цепь. Получаем, что у нас $n!$ вариантов последовательно вставить единицы, а значит и $n!$ цепей.

Посчитаем вторым способом. Зафиксируем какую-то вершину куба x, вес которой k. Сколько цепей максимальной длины проходит через нее? По тем же соображениям $k! \cdot (n-k)!$, потому что нам нужно каким-то порядком сначала поставлять k заданных единиц, а потом дойти из x до 11...1, проставив уже $n - k$ единиц.

Тогда сколько цепей максимальной длины проходит через вершины антицепи A? Заметим тот факт, что через каждую вершину проходят свои уникальные цепи. Пусть это не так, тогда x_1 и x_2 находятся в одной цепи, значит их можно сравнить, значит они не могут быть в одной антицепи. Раз через каждую вершину проходят уникальные цепи максимальной длины, можно выписать неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leqslant n!$$

то есть количество уникальных цепей максимальный длины, проходящих через вершины антицепи A не превосходит общего количества цепей максимальной длины. Делим неравенство на правую сторону, получаем то, что и требовалось доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \leqslant 1$$

Теорема Шпернера. Длина максимальной антицепи в булевом кубе равна $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Лемма, что $max_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k = C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Будет использоваться, но не доказываться.

Доказательство:
Возьмем, то, что мы получили в LYM-лемме и воспользуемся нашей локальной леммой, получим:

$$1 \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{C_n^{[\frac{n}{2}]}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

правая часть неравенства не что иное, как количество элементов в антицепи A.

Доказали, что небольше, как найти пример, где ровно. Посмотрим на все вершины весом $[\frac{n}{2}]$. Очевидно, что они все несравнимы, а их количество как раз равно $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Что и требовалось доказать.

2.4 Эйлеровы циклы в ориентированных и неориентированных графах. Критерий существования эйлерова цикла.

Определение:
Цикл называется эйлеровым, если он проходит по всем рёбрам графа по одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

Критерий существования:
Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

Ориентированный граф без вершин нулевой степени (в которые не входит и из которых не выходит рёбер) содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Доказательство:
Будем доказывать параллельно оба варианта теоремы. Пусть сначала эйлеров цикл есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, граф связен (сильно связен в ориентированном случае).

Теперь про степени. Возьмём какую-то вершину v, пусть она встречается в цикле k раз. Идя по циклу, мы приходим в неё k раз и уходим k раз, значит, использовали k входящих и k исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны k, а в неориентированном графе её степень равна $2k$. Таким образом, в одну сторону критерий доказан.

Рассуждение в обратную сторону чуть сложнее. Будем рассматривать пути, которые не проходят дважды по одному ребру. (Таков, например, путь из одного ребра.) Выберем среди них самый длинный путь

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$$

и покажем, что он является искомым циклом, то есть что $a_1 = a_n$ и что он содержит все рёбра.

В самом деле, если он самый длинный, то добавить к нему ребро $a_n \to a_{n+1}$ уже нельзя, то есть все выходящие из an рёбра уже использованы. Это возможно, лишь если $a_1 = a_n$. В самом деле, если вершина an встречалась только внутри пути (пусть она входит k раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k+1$ входящих рёбер и k выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени (в ориентированном случае) или чётности степени (в неориентированном случае).

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (мы предполагаем, что граф связен или сильно связен) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины a_i выходит ребро $a_i \to v$, то путь можно удлинить до

$$a_i \to a_{i+1} \to \cdots \to a_n = a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_i \to v$$

вопреки нашему выбору (самого длинного пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра v → ai , добавив его в начало. (А можно заметить, что если есть неиспользованное входящее ребро, то есть и неиспользованное выходящее.) Это рассуждение было для ориентированного случая, но в неориентированном всё аналогично. Теорема доказана.

Помимо эйлеровых циклов, можно рассматривать *эйлеровы пути* — пути в графе, которые проходят один раз по каждому ребру. (Для неориентированных графов: рисуем картинку, не отрывая карандаша от бумаги, но не обязаны вернуться в исходную точку.) Для них тоже есть критерий: в неориентированном случае нужно, чтобы граф был связен и было не более двух вершин нечётной степени.

2.5 Двудольные графы, критерий двудольности графа. Пример: булев куб.

Определение:

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором можно разбить вершины на две доли — левые и правые, что все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли).

Критерий двудольности:

Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый, то есть не содержит циклов нечетной длины.

Очевидно доказать экививалентность утверждений граф двудольный и граф двураскрашиваемый, так что приведем доказательство того, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечетной длины.

Доказательство:

Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине c, которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии (все расстояния и пути подразумеваются минимальными по количеству ребер) 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1.

Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра $\{u, v\}$ концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра c некоторой компоненты до вершин u и v имеют одинаковую чётность. Заметим, что если расстояния от центра до u и v не равны, то путь до одной из вершин можно было сократить, проходя через другую вершину (так как расстояния отличаются как минимум на 2). Получаем, что расстояния от центра до v и u равны.

Но тогда путь от центра до v + ребро $\{v, u\}$ + путь от u до центра имеют нечетную длину (пути могут пересекаться, но простоту цикла в теореме ничего не сказано). Получили противоречие.

Булев куб двураскрашиваемый

Будем называть четностью вершины $v = (x_1, \ldots, x_n)$ число $parity(v) = x_1 + \cdots + x_n \bmod 2$. Тогда заметим, что если v, u связаны ребром, то $parity(v) \neq parity(u)$. Значит если у нас существует цикл нечетной длины k

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$$

то, так как четность на каждом шаге меняется, получаем $parity(v_1) = parity(v_3) = \cdots = parity(v_k)$, но соседние вершины не могут иметь одну четность. Получаем противоречие.

2.6 Теорема Холла.

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше вершин, чем X, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле L.

База индукции. Если в L всего одна вершина x, то у неё есть хотя бы один сосед y в правой доле R по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром $\{x, y\}$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше n вершин. Рассмотрим граф $G = (L, R, E)$, для которого выполняются условия теоремы и в L ровно n вершин. Разберём два случая.

Первый случай: в левой доле есть такое множество X, для которого $|X| = |G(X)|$. Выделим из графа два подграфа. Первый, G_1, имеет доли X, $G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Второй, G_2, имеет доли $L \setminus X$, $R \setminus G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для G_1 это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа G_2 от противного. Пусть для подмножества $Z \subseteq L \setminus X$ соседей в $R \setminus G(X)$ меньше, чем вершин в Z. Тогда в графе G соседей у множества $X \cup Z$ меньше $|Z \cup X|$ (ведь множества X и Z не пересекаются, а соседей у X ровно $|X|$).

Итак, для G_1, G_2 выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше n. Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в G размера $|L|$.

Второй случай: для каждого $X \subseteq L$ выполняется неравенство $|X| < |G(X)|$.

Выберем вершину $a \in L$ и её соседа $b \in R$ (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).

Если в графе $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$, полученном из G выбрасыванием вершин a, b и инцидентных им рёбер, есть паросочетание P размера $n - 1$, то в графе G есть паросочетание размера n: к рёбрам из P добавим ребро $\{a, b\}$.

Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для G' нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество $X \subseteq L \setminus \{a\}$ имеет мало соседей в $(R \setminus \{b\} : |X| > |G'(X)|$. Но в графе G у множества X есть разве что ещё один сосед b. Поэтому для этого множества выполняется равенство $|X| = |G(X)|$. Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

2.7 Паросочетания. Вершинные покрытия. Теорема Кёнига

Теорема Кёнига В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

Доказательство:

В одну сторону легко. Если P - паросочетание в двудольном графе $G = (L, R, E)$, то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие $X \sqcup Y, X \subseteq L, Y \subseteq R$, в графе G. Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения $G_{X,G(X)\setminus Y}$ графа на множество вершин X в левой доле и множество вершины $G(X) \setminus Y$ в правой доле (оставляем в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ только рёбра между указанными вершинами). Пусть $S \subseteq X$.

Множество $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X,G(X)\setminus Y}(S)$ является вершинным покрытием в G: все рёбра, покрытые вершинами из S, покрыты также либо вершинами из Y, либо соседями вершин из S в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие, $|G_{X,G(X)\setminus Y} G_{X,G(X)\setminus Y}(S)| \geqslant |S|$, что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа $G_{L\setminus X,Y}$, полученного ограничением G на вершины $L \setminus X$ в левой доле и Y в правой доле (так как $X \sqcup Y$ - вершинное покрытие исходного графа, $L \setminus X$ входит в множество соседей Y в левой доле).

По теореме Холла в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ есть паросочетание размера $|X|$, а в $G_{L\setminus X,Y}$ есть паросочетание размера $|Y|$. Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера $|X| + |Y|$ в графе G. Таким образом, размер максимального паросочетания в G не меньше размера минимального вершинного покрытия.

2.8 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на N вершинах, то оно справедливо и для графов с $N' > N$ вершинами. Обозначим через $R(k,n)$ число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство:

Будем доказывать индукцией по s, что для любой пары чисел k, n такой, что k + n = s справедливо утверждение теоремы.

База индукции $s = 2$ очевидна: $2 = 1 + 1$ — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение выполнено для всех пар (k, n) таких, что $k + n = s$.

Докажем его для пары (k, n) такой, что $k + n = s + 1$. По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар $(k - 1, n)$ и $(k, n - 1)$.

Рассмотрим граф на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине и возьмём какую-то вершину v этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины v ровно $N_0 - 1$ штук. Среди них x соседей и y несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geqslant R(k - 1, n)$$

$$y \geqslant R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k - 1, n)$$

$$y < R(k, n - 1)$$

из которых следует $x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1) - 2$.

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leqslant R(k - 1, n) - 1 + R(k, n - 1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины v есть $R(k - 1, n)$ соседей или есть $R(k, n - 1)$ несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

Первый случай. В индуцированном соседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера $k - 1$ или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины v даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Второй случай. В индуцированном несоседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера k или независимое множество размера $n - 1$. В первом варианте в исходной графе есть клика размера k, а во втором добавление вершины v даёт независимое множество размера n в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары (k, n), для которой $k + n = s + 1$. Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

3 Задачи из листков