

无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位

摘要

本文在给定的无人机实际飞行中的实际情况基础上，根据题目所要求的简化条件，给出相应的无源定位模型，并以题目所示的实际情况为例给出对应的调整策略。

针对问题一第（1）问，充分利用已知条件建立以余弦定理为基础的三元二次方程组，借助方程求解程序，通过求出径长与幅度角，以极坐标的方式进行定位，从而构建起整个无人机的定位模型。

针对问题一第（2）问，本着充分利用第（1）问中所建立的模型的目的，利用圆周角定理，从而估测圆心角，解决与第（1）相比缺失的必要条件，从而再次利用已经构建的无源定位模型解决新类型问题。

针对问题一第（3）问，将第（2）问中构建的无源定位模型进行实战，并创造性的定义用于衡量无人机位置偏移程度的偏差因子，从而有效选择用于补充模型缺失条件的最适无人机以最大程度上减少定位误差，给出此条件下的最优调整方案。

针对问题二，以所给情况为例，同样利用问题一中与问题二中差异不大的部分继续构建类似的无源定位模型以给出调整方案。

关键词：无源定位 余弦定理 多元多次方程组 圆周角定理 偏差因子

一、问题重述

1.1 问题背景

随着科技的迅猛发展，无人机进入大众视野并迅速发展崛起，不仅在军事上占据了重要地位，还逐渐向民用领域延伸。无人机在科技领域具有着独特的地位，作为一种新型的高科技行业，在国民经济和社会生产活动中都发挥着重要作用。

当今时代，无人机担任起越来越重要的任务，保证无人机不受外界的干扰而导致偏航甚至撞机成为了重中之重。为解决这一问题，无人机集群在遂行编队飞行时，应该尽可能保持电磁静默，也就是尽量少的向外发射电磁波信号。为了在减少外界干扰的同时保持编队队形，采用纯方位无源定位的方法调整无人机的位置是目前最好的方法^[1]。因此，探究如何从有限的信号中提取出方向信息进行定位，并调整无人机的位置具有重要意义。

1.2 已知条件

现编队中的每架无人机均有编号，编号不变，且在编队中与其他无人机的相对位置关系保持不变并将接收信号的无人机所接收到的方向信息确定为：该无人机与任意两架发射信号无人机连线之间的夹角。

基于上述背景和条件，我们需要建立数学建模解决以下问题：

问题一：架无人机组成个圆形编队，其中编号 FY01~FY09 的九架无人机均匀分布在圆周上，一架编号为 FY00 的无人机位于圆心，整体编队且均保持在同一个高度上飞行。

- (1) 位于圆心的 FY00 号无人机和编队中另架无位置偏差且编号已知的无人机发射信号，其余位置略有偏差的无人机被动接收信号。由此建立被动接收信号无人机的定位模型。
- (2) 某一位置略有偏差的无人机除了接收到编号为 FY00 和 FY01 的位置正确的无人机发射的信号之外，还接收到编队中若干编号未知的但位置正确的无人机发射的信号。在此条件下，计算出能实现无人机的有效定位，所需要的除 FY00 和 FY01 外发射信号的无人机数量。
- (3) 在 (1) 模型的基础上，设定编队所在圆周的半径为 100m。已知初始时刻无人机的位置略有偏差，每次选择编号为 FY00 的无人机和圆周上最多 3 架无人机发射信号，其余无人机根据接收到的方向信息，通过多次调整，使得 9 架无人机最终均匀分布在某个圆周上。根据给出的数据，仅利用接收到的方向信息调整无人机的位置，计算出具体的调整方案。

问题二：仍然在纯方位无源定位的情形下，设计在锥形编队队形下无人机位置的调整方案。

二、问题分析

2.1 问题一分析

针对问题（1），我们知道无人机的编号且无人机在圆周均匀分布从而知道发射信号的三架无人机的几何关系，从而建立抽象的数学模型利用已知条件解出位置偏差的无人机的相对圆心处无人机的位置关系。

针对问题（2），在问题（1）的基础上将两题比较，利用位置正确的无人机所构成的圆心角的数学特征通过处理估计出大概准确无人机位置关系，从而再次套入问题（1）的模型再次求解即可处理。

针对问题（3），通过选择位置偏差较低的无人机，利用 matlab 的解方程程序，在代入数值的基础上计算数值解，迭代三次，从而计算出准确度达标的位置信息，并以此给出调整方案。

2.2 问题二分析

与问题一不同，问题二将整个问题的角度拉至三维层面。在问题一的基础上，察觉两者的异同点，利用问题一所构建的模型进行改造，使其最终适用与三维方向上的定位。

三、模型假设

1. 每架编队中的无人机都有相对应的编号，同时无人机出发时便存储所有整支无人机编队的队形，也就是说，无人机中记录了自身所应处于的位置，且当知晓信号来源的无人机编号时，便也知晓该来源无人机应处于的正确位置。同时，当知晓自身的真实位置时，无人机可将与记录的数据进行比较自行计算调整位移的大小与方向。
2. 每架无人机在飞行途中，当不采取调整策略时，与其他无人机的相对位置关系保持稳定不变。
3. 忽略调整位移所需时间。

四、符号说明

序号	符号	符号表示含义
1	α_1	问题一： $\angle AOX$ /问题二： $\angle BOC$
2	α_2	问题一： $\angle AXB$ /问题二： $\angle AOC$
3	α_3	问题一： $\angle OXB$ /问题二： $\angle AOB$
4	β	问题一： $\angle AOB$ /问题二： $\angle COD$
5	θ_i	棱与 OI 间的夹角， I 为任意字母
6	θ_{A1}	$\angle AOC$
7	θ_{A2}	$\angle AOD$

8	θ_{A3}	$\angle AOB$
9	R	圆的半径
10	L	标点 A、B 的间距
11	x_1	标点 O、X 的间距/标点 O、A 的间距
12	x_2	标点 A、X 的间距/标点 O、B 的间距
13	x_3	标点 B、X 的间距/标点 O、C 的间距
14	x_4	标点 O、D 的间距
15	d	等四面体的棱长
16	θ_A	角度列向量
17	θ_O	角度向量矩阵
18	X	奇异矩阵
19	P	位置矩阵

五、模型建立与求解

5.1 问题一第（1）问模型建立与求解

通过题目一的要求及其示意图，简化出关键模型，模型分为两种。

其中编号 FY 号飞机简化为图中标点 O，标点 A、B 为另外两架已知编号且无偏差的飞机，在 $\triangle AOB$ 中，由于 OA、OB 长度为圆周半径已知，切编号已知，可知其圆心角 β 具体大小，可列等式：

$$l = 2R \sin \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ 分别为 $\angle AXO$ ， $\angle AXB$ ， $\angle OXB$ ，为接受信号的无人机收到的信息， $OA=OB=R$ ， $OX=x_1 \cdot AX=x_2 \cdot BX=x_3$ 。

根据 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ 的大小关系，可分为多种情况。

5.1.1 第一种情况下模型的建立与求解

第一种以下图所示情况为代表，如图 1-1 所示：

利用位置偏差的无人机接受到的三个夹角信息，目标是求得 $\angle AOX$ 的大小和 OX

的长度，也就是 θ 角的大小与 x_1 的长度，知道这两个信息也就知道了接受信号的无人机关于 O，A 处两架无人机的相对位置关系，继而做到成功定位。

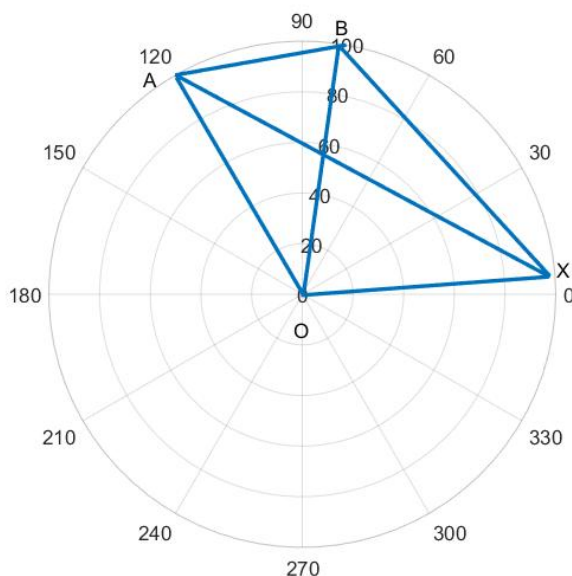


图 1-1 简化模型 1

在 $\triangle AOX$ 、 $\triangle ABX$ 和 $\triangle OBX$ 中分别运用余弦定理，可列出方程如下：

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - R^2}{2x_1x_2} \\ \cos \alpha_2 = \frac{x_2^2 + x_3^2 - l^2}{2x_2x_3} \\ \cos \alpha_3 = \frac{x_1^2 + x_3^2 - R^2}{2x_1x_3} \\ \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中， α_1 、 α_2 、 α_3 、 R 以及 l 为已知条件，此方程组可解。成功解出 x_1 、 x_2 、 x_3 。并再次在 $\triangle AOX$ 中使用余弦定理，但此次目的为求出 θ_x 的大小，具体过程如下：

$$\cos \theta_x = \frac{R^2 + x_1^2 - x_2^2}{2Rx_1} \quad (3)$$

$$\theta_x = \arccos \frac{R^2 + x_1^2 - x_2^2}{2Rx_1} \quad (4)$$

由此，我们解出了用于定位的关键信息 x_1 和 θ ，在以 O，A 两点作为参照的基础上，定位到该接受信号的无人机的位置。

值得一提的是，当 X 点位于 $\triangle AOB$ 左侧时，会有 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ 等量关系上的不同，但求解原理一致，此处不再赘述。

第二种情况以下图所示情况为代表，如图 1-2 所示：

此种情况为当接受信号的无人机处于两发射信号的无人机之间的模型。求解的原理与上一模型相同。

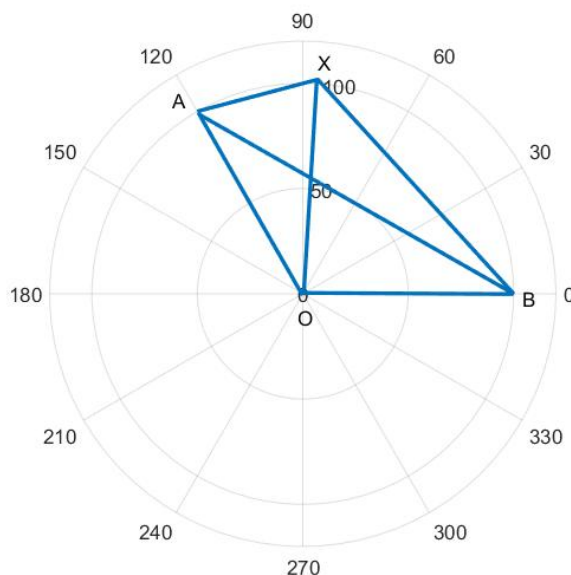


图 1-2 简化模型 2

在 $\triangle AOX$ 、 $\triangle ABX$ 和 $\triangle OBX$ 中分别运用余弦定理，可列出方程如下：

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - R^2}{2x_1x_2} \\ \cos \alpha_2 = \frac{x_2^2 + x_3^2 - l^2}{2x_2x_3} \\ \cos \alpha_3 = \frac{x_1^2 + x_3^2 - R^2}{2x_1x_3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases} \quad (5)$$

该方程组亦可成功解出 x_1 , x_2 , x_3 。并再次在 $\triangle AOX$ 中使用余弦定理，但此次目的为求出 θ_x 的大小，具体过程如下：

$$\cos \theta_x = \frac{R^2 + x_1^2 - x_2^2}{2Rx_1} \quad (6)$$

$$\theta_x = \arccos \frac{R^2 + x_1^2 - x_2^2}{2Rx_1} \quad (7)$$

第三种情况以下图所示情况为代表，如图 1-3 所示：

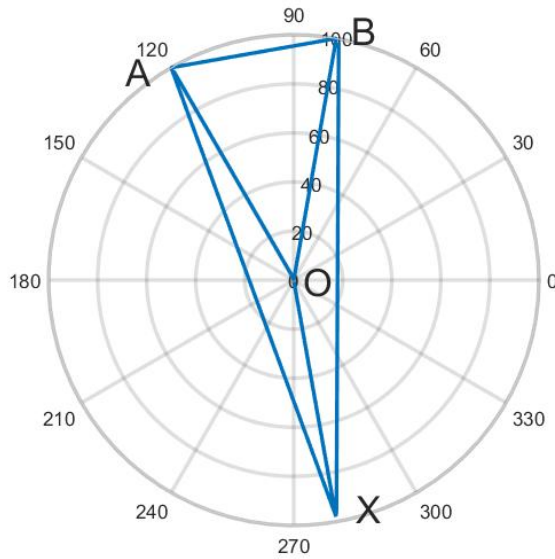


图 1-3 简化模型 3

有趣的是，其建模情况与第二步没有差别^[2]，此处不再多述。

最终可见，几种情况下的模型最后得出的式子一致。

5.1.2 问题一第（2）问模型建立与求解

仔细判别问题（1）与问题（2）的不同之处，会发现，问题（2）的区别在于并不知晓第三架发射信号的无人机编号，从而也就无法知晓 β 的大小，继而无法计算 l 。所以，问题（2）的关键之处在于通过何种方法去估计 β 的大小。

对于情况一：

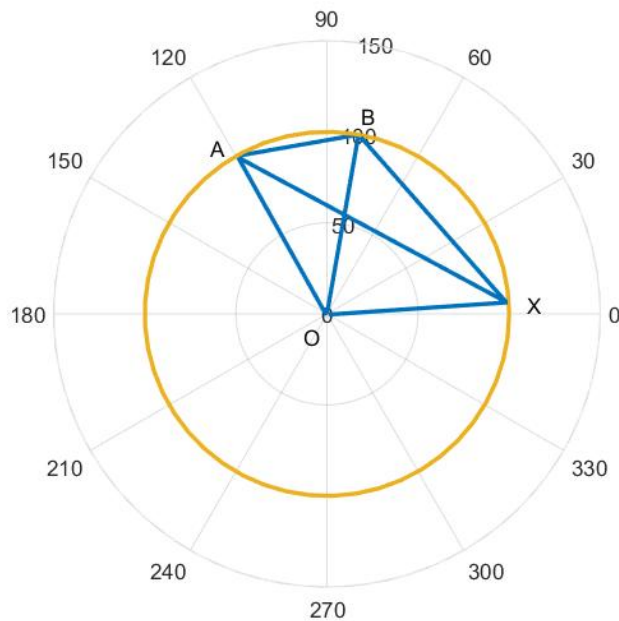


图 2-1 抽象化模型 1

容易知道， β 的大小为 $\frac{2\pi n}{9}$ ， $n \in \{x | x \geq 0, x \leq 8, x \in N\}$ ，由于 β 是圆心角，而处于略微偏差位置上的无人机所接收到的 $\alpha_2 \approx \frac{\beta}{2}$ （圆周角定理），受此影响，利用 $\alpha_2 \cdot 2$ ，寻找与其差距最小的 β ，合理认定差距最小的 β 为代入模型所需的值。在此基础上，带入问题（1）的模型中求解，即可得到其有效定位。

值得注意的是，情况三下 β 的寻找方法与情况一一致，下文不再讲述。

而对于情况二：

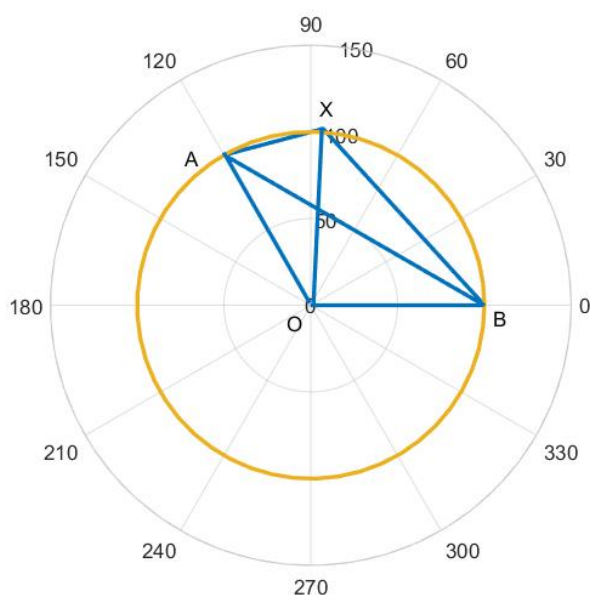


图 2-2 抽象化模型 2

同样是利用 β 是圆心角，可以得到 $\alpha_2 \cdot 2 + \beta \approx 2\pi$ ，从而选定 β 代入（1）问中的模型求解出有效定位。

5.1.3 问题一第（3）问模型建立与求解

根据题目文件所给数据：

表 1 题目数据

无人机编号	极坐标 (m,°)
0	(0, 0)
1	(100, 0)
2	(98, 40.10)
3	(112, 80.21)
4	(105, 119.75)
5	(98, 159.86)
6	(112, 199.96)
7	(105, 240.07)
8	(98, 280.17)
9	(112, 320.28)

构建无人机初始位置的极坐标散点图：

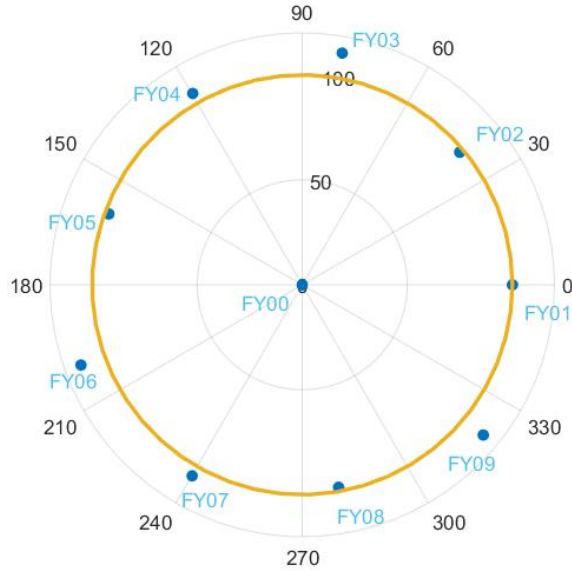


图 3-1 初始位置的散点图

十架无人机中，0 号与 1 号无人机位置是没有偏差的，而根据前面建立的定位模型，至少需要三架无人机以帮助其他无人机定位。据此，需要某一标准函数以选择对其他无人机定位影响最小的第三架无人机。

基于这个目的，构建评价无人机位置偏差程度的偏差因子 $\mu^{[3]}$ ，其定义式如下：

$$\mu = \sqrt{(R_x - R)^2 + [R(\theta_x - \theta)]^2} \quad (8)$$

其中， R_x 为无人机自身距圆心的径长， θ 为其正确位置的角度（用弧度制进行计算）。计算每架无人机偏差因子如下：

表 2 无人机偏差因子

无人机编号	偏差因子
FY00	0
FY01	0
FY02	2.0076
FY03	12.0056
FY04	5.0190
FY05	2.0149
FY06	12.0002
FY07	5.0015
FY08	2.0219
FY09	12.0099

选择偏差因子 μ 最小的 2 号无人机与 0 号，1 号无人机一齐作为发射信号的三架无人机。通过代入模型中计算，使接受信号的每一架无人机进行定位，并根据定位得到自身的位置调整策略。

表 3 x_1 与 θ 调整前后对比

无人机编号	调整前的 x_1	调整前的 θ	调整位移 Vx	调整角度 $V\theta$	调整后的 x_1	调整后的 θ
FY03	114.8891105	78.1438	14.88911045	-1.8562	97.1108895	82.0662
					5	
FY04	108.7443485	118.5173	8.744348498	-1.4827	96.2556515	121.2327
FY05	100.4594523	159.6072	0.459452326	-0.3928	97.5405476	160.2528
					7	
FY06	112.61717	200.0187	12.61717	0.0187	99.38283	199.9413
FY07	102.2410623	240.2455	2.241062314	0.2455	102.758937	239.8245
					7	

FY08	95.78917133	278.6847	-4.21082866	-1.3153	102.210828	281.4853
					7	
FY09	111.0180334	317.9325	11.01803342	-2.0675	100.981966	322.3475
					6	

其中， V_x 和 V_θ 分别为调整策略中的调整位移和调整角度，调整位移以指向圆心方向为正值，调整角度以逆时针方向为正值。

调整之后，所有无人机位置分布的前后对比如图所示：

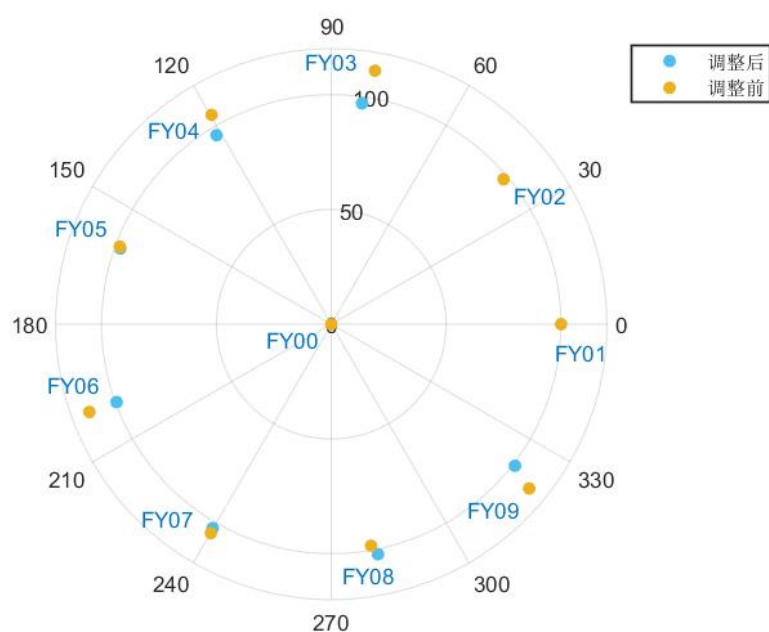


图 3-2 位置分布的前后对比图

5.1.3 问题二模型建立与求解

在问题二中，将三角锥形队列表示如下：

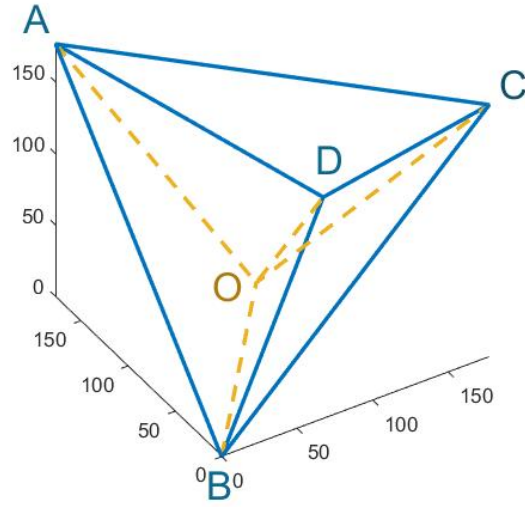


图 4-1 三角锥形队列

假设 A, B, C, D 处四架位于锥形顶点出的无人机位置正确且编号已知, O 为锥形编队内任意接受信号无人机。通过接受四架无人机所发信号, 可知晓 $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$, $\angle COD$ 的大小, 记为 α_1 , α_2 , α_3 , α_4 。记 OA, OB, OC, OD 长为 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 。容易得知其为棱长相等的等四面体, 设棱长为 d , 由余弦定理易得:

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2 - d^2}{2x_2x_3} \\ \cos \alpha_2 = \frac{x_1^2 + x_3^2 - d^2}{2x_1x_3} \\ \cos \alpha_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - d^2}{2x_1x_2} \\ \cos \alpha_4 = \frac{x_3^2 + x_4^2 - d^2}{2x_3x_4} \end{cases} \quad (9)$$

该方程组含四个未知数, 同时有四个方程, 可解。利用求解程序后可解得 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 的具体数值解。在此基础上, 可推得:

$$\begin{cases} \theta_{A1} = \arccos\left(\frac{d^2 + x_1^2 - x_3^2}{2dx_1}\right) \\ \theta_{A2} = \arccos\left(\frac{d^2 + x_1^2 - x_4^2}{2dx_1}\right) \\ \theta_{A3} = \arccos\left(\frac{d^2 + x_1^2 - x_2^2}{2dx_1}\right) \end{cases} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_A = \begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{A3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中， θ_{A1} ， θ_{A2} ， θ_{A3} 为 OA 分别与 OC，OD，OB 的夹角，由此构成角度列向量 $\boldsymbol{\theta}_A$ ，对 B，C，D 复现以上操作，最终得角度向量矩阵 $\boldsymbol{\theta}_O$ ：

$$\boldsymbol{\theta}_O = [\theta_A \quad \theta_B \quad \theta_C \quad \theta_D] \quad (12)$$

最终，我们得到关于 O 点处无人机所处位置角度的矩阵。再构建长度奇异矩阵 \mathbf{X} ：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将两者相乘可乘可得：

$$\mathbf{X} \sin \boldsymbol{\theta}_O = [x_1 \sin \theta_A \quad x_2 \sin \theta_B \quad x_3 \sin \theta_C \quad x_4 \sin \theta_D] = \mathbf{P} \quad (14)$$

其中的每一列向量，其实际意义为 O 点在信号源点视角内距离其三条棱的长度。在此基础上，该无人机可通过比较正确位置与其现在位置的位置矩阵 \mathbf{P} ，从而知晓其定位，并可有效调整其位置。

六、模型检验

6.1 问题一第（3）问模型的准确度分析

将调整后的无人机位置代入偏差因子 μ 的计算，对比前后偏差因子，得到结果如下表 4 和图 5-1 所示：

表 4 偏差因子调整前后对比

无人机编号	调整前的 μ	调整后的 μ
FY03	0	0
FY04	0	0

FY05	2.0076	2.0076
FY06	12.0056	3.977
FY07	5.019	2.89
FY08	2.0149	1.628
FY09	12.0002	0.794
FY03	5.0015	2.767
FY04	2.0219	3.399
FY05	12.0099	4.2
总和	52.0806	21.6626

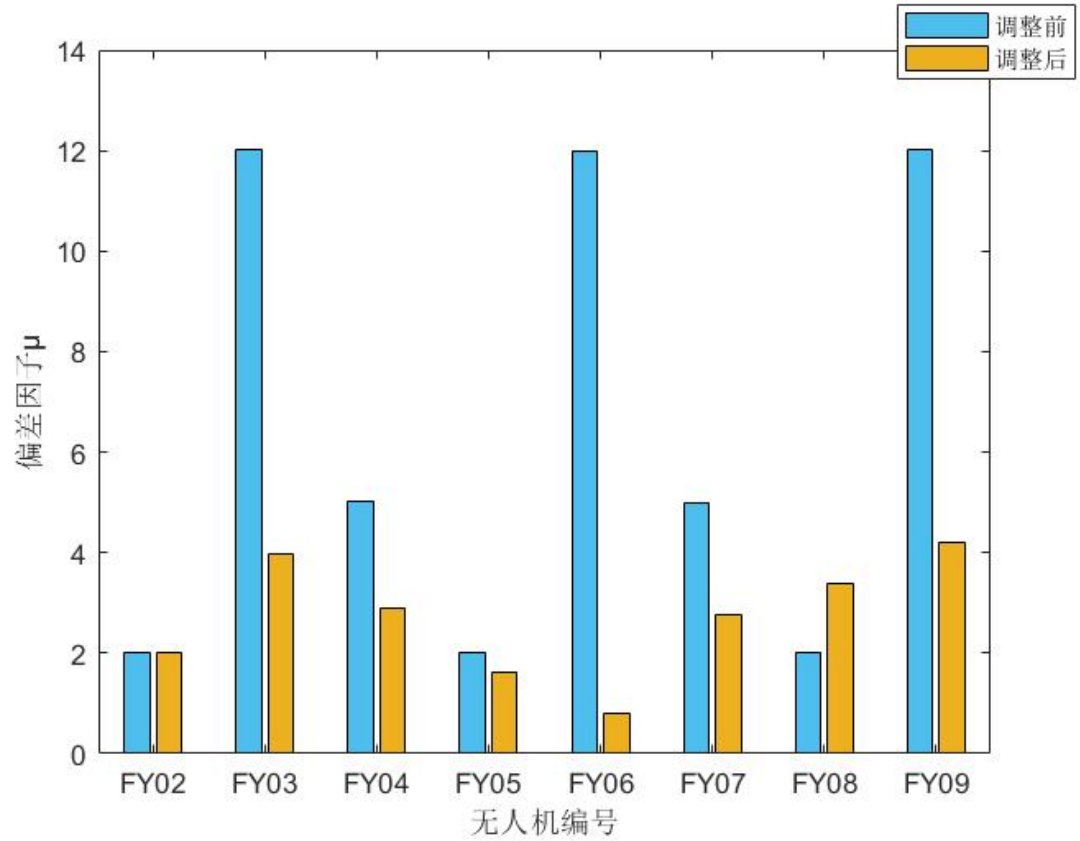


图 5-1 偏差因子前后对比图

可以发现，绝大部分无人机的偏差因子都相比调整前有了不同程度的减少，可以一定程度上体现模型的准确性。

七、模型评价

7.1 优点与创新

- (1) 模型基础部分使用几何学中的简单知识进行证明求解，使得理解方面简单易懂。
- (2) 引入偏差因子的概念，衡量无人机位置上的偏移，并融入模型的准确度检验中。

7.2 不足之处

- (1) 模型的建立过程仅当无人机处于同一水平面时较为适用，当考虑到整个三维空间中的定位时，情况会变得更为复杂。
- (2) 受限于团队整体的编程水平，用于处理三元二次方程组的代码只能够单独个别的输入输出，无法大批量的处理数据。此种状况虽说对每个个体无人机而言影响不大，但对于处理大型数据的基站或数据服务器而言，急需改进。

八、参考文献

- [1] 孙万库, 孙晓光, 吴新明. 分析多无人机协同编队飞行控制研究现状及发展[J]. 数码设计(下), 2019, 000(008):115-116.
- [2] 成成, 张跃, 储海荣, 等. 分布式多无人机协同编队队形控制仿真[J]. 计算机仿真, 2019, 36(5):7
- [3] Zotov V, Gao X. Passive air defense threat detection and location for UAV swarms based on dynamic Bayesian networks[C]//International Conference on System Science, Engineering Design & Manufacturing Informatization. 2011.

九、附录

9.1 支撑材料目录

问题 1 (1)	图 1-1 简化模型 1
	图 1-2 简化模型 2
	图 1-3 简化模型 3
问题 1 (2)	图 2-1 抽象化模型 1
	图 2-2 抽象化模型 2
问题 1 (3)	图 3-1 初始位置的散点图
	图 3-2 位置分布的前后对比图
	图 5-1 偏差因子前后对比图
	问题一 (3) x_1 数据. xlsx
	问题一 (3) θ 数据. xlsx
问题 2	问题一 (3) 偏差因子 μ 数据. xlsx
	问题一 (3) 调整数据. xlsx
问题 2	图 4-1 三角锥形队列

9.2 代码、操作及结果

%%问题一 1 （1）简化模型图 1

```
clear
clc
>> x=[0 80 120 4 0 120 80 4];
y=[0 100 100 98 0 100 100 98];
x=deg2rad(x);
polarplot(x,y);
%%
```

%%问题一 1 （1）简化模型图 2

```
clear
clc
>> x=[0 0 86 120 0 86 0 120 ];
y=[0 100 102 100 0 102 100 100];
x=deg2rad(x);
polarplot(x,y);
%%
```

%%问题一 1 （1）简化模型图 3

```
clear
clc
>> x=[120 0 80 120 280.17 80 0 280.17];
y=[100 0 100 100 98 100 0 98];
x=deg2rad(x);
polarplot(x,y);
%%
```

%%问题一 1 （2）抽象化模型图 1

```
clear
clc
>> x=[0 80 120 4 0 120 80 4];
y=[0 100 100 98 0 100 100 98];
x=deg2rad(x);
polarplot(x,y);hold on
t = linspace(0,2*pi,50);
a = size(t);
r = 100 * ones(a);
polarplot(t,r);
%%
```

%%问题一 1 （2）抽象化模型图 2

```
clear
clc
>> x=[0 0 86 120 0 86 0 120 ];
```



```

y=[0 100 102 100 0 102 100 100];
x=deg2rad(x);
polarplot(x,y);
hold on
t = linspace(0,2*pi,50);
a = size(t);
r = 100 * ones(a);
polarplot(t,r);
%%

```

%%问题 1 (3) 初始位置的散点图

```

clear
clc
>> x=[0 0 40.10 80.21 119.75 159.86 199.96 240.07 280.17 320.28];
x=deg2rad(x);
y=[0 100 98 112 105 98 112 105 98 112];
polarscatter(x,y)
polarscatter(x,y,'filled'); hold on; t = linspace(0,2*pi,50);
a = size(t);
r = 100 * ones(a);
polarplot(t,r);
%%

```

%%问题 (3) 计算 FY03 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=112;
a4=deg2rad(80.01)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%

```

%%问题 1 (3) 计算 FY04 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=105;
a4=deg2rad(119.75)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%

```

%%问题 1 （3）计算 FY05 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=98;
a4=deg2rad(159.86)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%

```

%%问题 1 （3）计算 FY06 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=112;

```

```

a4=deg2rad(199.96)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%

```

%%问题 1 （3）计算 FY07 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=105;
a4=deg2rad(240.07)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%

```

%%问题 1 （3）计算 FY08 的 α_1 , α_2 ;

```

clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=98;
a4=deg2rad(280.17)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);

```

```
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%%
```

%%问题 1 （3）计算 FY09 的 α_1 , α_2 ;

```
clear
clc
>> a3=deg2rad(40.1);
lb=98;
R=100;
x1=112;
a4=deg2rad(320.28)-a3;
syms a1 a2 x2 x3 l;
eq1=2*x1*x2*cos(deg2rad(a1))-(x1*x1+x2*x2-R*R);
eq2=2*x2*x3*cos(deg2rad(a2))-(x2*x2+x3*x3-l*l);
eq3=2*x1*lb*cos(a4)-(x1*x1+lb*lb-x3*x3);
eq4=2*R*x1*cos(a4+a3)-(R*R+x1*x1-x2*x2);
eq5=2*lb*R*cos(a3)-(R*R+lb*lb-l*l);
[a1,a2,x2,x3,l]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,a1,a2,x2,x3,l);
a1=vpa(a1)
a2=vpa(a2)
%%%
```

%%问题 1 （3）计算 FY03 的 x_1 和 β

```
clear
clc
a1=deg2rad(46.0501);
a2=deg2rad(13.5456);
a3=deg2rad(a1+a2);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40)))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
%%%
%%%筛选过后的 x1 x2
clear
clc
x1=114.88911045008811969994366174642;
```

```

x2=135.93588558460901092059583164409;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%
%%问题 1 （3）计算 FY04 的 x1 和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(29.3142);
a2=deg2rad(18.4930);
a3=deg2rad(a1+a2);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40)))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%
%%筛选过后的 x1 x2
clear
clc
x1=108.74434849763747691282499279835;
x2=179.46802575230619526614731148483;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%

%%问题 1 （3）计算 FY05 的 x1 和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(10.1728);
a2=deg2rad(19.9472);
a3=deg2rad(a1+a2);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40)))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)

```

```

x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%
%%筛选过后的 x1 x2
clear
clc
x1=100.4594523259089073255055028762;
x2=197.29354694712145435357297855834;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%

%%问题 1 （3）计算 FY06 的 x1 和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(9.4093);
a2=deg2rad(18.8010);
a3=deg2rad(a2-a1);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40)))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%
%%筛选过后的 x1 x2
clear
clc
x1=112.61716999522034092189268115782;
x2=209.39247843414047065194522136821;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%

%%问题 1 （3）计算 FY7 的 x1 和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(29.5318);
a2=deg2rad(19.5909);
a3=deg2rad(a1-a2);

```

```

R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40))))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%%
%%筛选过后的 x1 x2
clear
clc
x1=103.61972110369809995697659308936;
x2=176.13070507324795566144122350771;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%%

%%问题 1 （3）计算 FY08 的 x1 和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(50.7768);
a2=deg2rad(20.7418);
a3=deg2rad(a1-a2);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40))))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%%
%%筛选过后的 x1 x2
x1=95.789171333817000675645525289506;
x2=127.60410986677665174641609487287;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%%

```

```

%%问题 1 （3）计算 FY09 的  $x_1$  和  $\beta$ 
clear
clc
a1=deg2rad(61.2337);
a2=deg2rad(15.7008);
a3=deg2rad(a1-a2);
R=100;
l=abs((100*100*2-2*100*100*cos(deg2rad(40)))^0.5);
syms x1 x2 x3
eq1=x1*x1+x2*x2-R*R-2*x1*x2*cos(a1);
eq2=x3*x3+x2*x2-l*l-2*x3*x2*cos(a2);
eq3=x1*x1+x3*x3-R*R-2*x1*x3*cos(a3);
[x1,x2,x3]=solve(eq1,eq2,eq3,x1,x2,x3)
x1=vpa(x1)
x2=vpa(x2)
x3=vpa(x3)
%%
%%筛选过后的  $x_1$   $x_2$ 
x1=111.0180334216865767120540854129;
x2=76.43307182503898858589797241036;
b=acos((x1*x1+R*R-x2*x2)/(2*x1*R));
b=rad2deg(b)
%%

```

```

%%问题 1 （3）位置分布的前后对比图
clear
clc
x=[0 0 40.10 80.21 119.75 159.86 199.96 240.07 280.17 320.28];
x=deg2rad(x);
y=[0 100 98 112 105 98 112 105 98 112];
polarscatter(x,y,'filled'); hold on;
a=[0 0 40.10 82.0662 121.2327 160.2528 199.9413 239.8245 281.4853 322.3475];
a=deg2rad(a);
b=[0 100 98 97.11089 96.255652 97.540548 99.38283 102.75894 102.21083 100.98197];
polarscatter(a,b,'filled')
%%

```

```

%%问题 1 （3）偏差因子前后对比图（柱状图）
clear
clc
y=[2.0076 2.0076;12.0056 3.977;5.019 2.89;2.0149 1.628;12.0002 0.794;5.0015 2.767;2.0219 3.399;12.0099 4.2];
bar(y)
hold on

```



```

set(gca, 'XTickLabel', {'FY02','FY03','FY04','FY05','FY06','FY07','FY08','FY09',})
xlabel('无人机编号')
ylabel('偏差因子');
set(gca, 'Ygrid','on');
hold on;
%%

```

```

%%问题二模型图绘制
clear
clc
a=[0 125*(2^0.5) 0 125*(2^0.5) 0 125*(2^0.5) 125*(2^0.5) 0 0];
b=[0 0 125*(2^0.5) 125*(2^0.5) 0 125*(2^0.5) 0 125*(2^0.5) 0];
c=[0 125*(2^0.5) 125*(2^0.5) 0 0 0 125*(2^0.5) 125*(2^0.5) 0];
scatter3(a,b,c,'filled');
plot3(a,b,c);
axis equal
hold on
e=125*(2^0.5);
x1=[0 60 e];
x2=[0 60 0];
x3=[0 60 e];
plot3(x1,x2,x3);
hold on
x4=[0 60 e];
x5=[e 60 e];
x6=[e 60 0];
plot3(x4,x5,x6);
%%

```