Mathematik: Diskrete Strukturen
Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

May 14, 2015

Vertiefung:

(a) Drücken Sie die Anzahl der surjektiven Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^2$ mit Hilfe der Stirling-Zahlen zweiter Art aus.

Nach Lemma 4 (Potenzregel) und Kreuzprodukt Definition es gilt entsprechend:

$$||\{0,1\}^n|| = 2^n$$
$$||\{0,1\}^2|| = 2^2 = 4$$

Wir müssen 2^n Funktionsargumente auf 4 Funktionswerte abbilden. Da Stirling-Zahlen auf nicht unterscheidbare Funktionswerte aufzuteilt, sollen wir noch mit 4! multiplizieren. Folglich:

$$4! \cdot \left\{ {2^n \atop 4} \right\}$$

(b) Kein Antwort

(c) Von 18 Studierenden in einer Spezialvorlesung studieren 7 Mathematik, 9 Physik und 10 Informatik. Davon studieren 3 Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Informatik sowie 5 Physik und Informatik. Ein Student studiert sogar all drei Fächer. Wie viele Studierende studieren keines der drei Fächer?

Sei nach Voraussetzung:

$||M|| = 7$, $||I|| = 10$, $||P|| = 9$, $||M \cap P|| = 3$, $||M \cap I|| = 3$, $||P \cap I|| = 5$, $||M \cap P \cap I|| = 1$

Die gesamte Zahl der Studierenden, die in einer Spezialvorlesung studieren ist:

$$||M \cup P \cup I||$$

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$\begin{aligned} ||M \cup P \cup I|| &= ||M|| + ||P|| + ||I|| - ||M \cap P|| - ||M \cap I|| - ||I \cap P|| + ||M \cap P \cap I|| \\ &= 7 + 9 + 10 - 3 - 3 - 5 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Folglich die Anzahl der Studierende, die keines der drei Fächer studieren ist $18 - 16 = 2$.

(d) Für drei Mengen A, B und C gelten folgende Eigenschaften: $||A|| = 63, ||B|| = 91, ||C|| = 44, ||A \cap B|| = 25, ||A \cap C|| = 23, ||C \cap B|| = 21$. Außerdem gelte $||A \cup B \cup C|| = 139$. Wie groß ist $||A \cap B \cap C||$?

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$||A \cup B \cup C|| = ||A|| + ||B|| + ||C|| - ||A \cap B|| - ||A \cap C|| - ||C \cap B|| + ||A \cap B \cap C||$$

$\Rightarrow ||A \cap B \cap C|| = ||A \cup B \cup C|| - ||A|| - ||B|| - ||C|| + ||A \cap B|| + ||A \cap C|| + ||C \cap B||$
$\Rightarrow ||A \cap B \cap C|| = 139 - 63 - 91 - 44 + 25 + 23 + 21 = 10$

(e) Für zwei Mengen A und B gelte: $||A|| = 100, ||B|| = 60$ und die Anzahl der Elemente von A B, die zu genau einer der beiden Mengen gehören, ist genau doppelt so groß, wie die Anzahl der Elemente, die in beiden Mengen liegen. Wie viele Elemente liegen in beiden Mengen?

$$\begin{aligned}
||A\Delta B|| &= 2 \cdot ||A \cap B|| \\
||A \cup B|| &= ||A\Delta B|| + ||A \cap B|| \\
||A \cup B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cap B|| \\
||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cup B|| \\
||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - 3 \cdot ||A \cap B|| \\
4 \cdot ||A \cup B|| &= ||A|| + ||B|| \\
||A \cap B|| &= \frac{||A|| + ||B||}{4} = \frac{100 + 60}{4} = 40
\end{aligned}$$

(f) Wie viele Zahlen im Bereich $1, 2, \ldots, 200$ sind durch keine der Zahlen 3, 7, 11, 27 teilbar?

$$\begin{aligned}
&200 - \left(\left\lfloor\frac{200}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{11}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{27}\right\rfloor\right) \\
&+ \left(\left\lfloor\frac{200}{21}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{33}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{81}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{77}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{189}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{297}\right\rfloor\right) \\
&- \left(\left\lfloor\frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 11}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 27}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{7 \cdot 11 \cdot 27}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{200}{3 \cdot 11 \cdot 27}\right\rfloor\right) \\
&+ \left\lfloor\frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 27}\right\rfloor \\
&= 200 - (66 + 28 + 18 + 7) + (9 + 6 + 2 + 2 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0) + 0 = 101
\end{aligned}$$

(g) Wie viele Zahlen im Bereich $1, ..., 10^9$ sind weder von der Form x^3 noch x^7 noch x^{13} für ein geeignetes $x \in N$?
Es gibt:

$$\begin{aligned}
\lfloor 10^{9/3} \rfloor &= 1000 \text{ Zahlen der Form } x^3 \\
\lfloor 10^{9/7} \rfloor &= 19 \text{ Zahlen der Form } x^7 \\
\lfloor 10^{9/13} \rfloor &= 4 \text{ Zahlen der Form } x^{13} \\
\lfloor 10^{9/21} \rfloor &= 2 \text{ Zahlen der Form } (x^3)^7 = x^{21} \\
\lfloor 10^{9/39} \rfloor &= 1 \text{ Zahlen der Form } (x^3)^{13} = x^{39} \\
\lfloor 10^{9/91} \rfloor &= 1 \text{ Zahlen der Form } (x^7)^{13} = x^{91} \\
\lfloor 10^{9/273} \rfloor &= 1 \text{ Zahlen der Form } ((x^3)^7)^{13} = x^{273}
\end{aligned}$$

$$10^9 - (1000 + 19 + 4) + (2 + 1 + 1) - 1 = 999\,998\,980$$

(h) Kein Antwort

(i) Menschen haben bis zu 150.000 Kopfhaare. Mindestens wie viele Chinesen haben die exakt gleiche Anzahl von Kopfhaaren (zu einem bestimmten Zeitpunkt), wenn Sie von einer chinesischen Bevölkerung von 1,33 Millarden ausgehen?

Bemerkung: Wir vermuten, dass alle Chinesen mindestens 1 Haar haben.
Verwenden wir ein Schubfachprinzip. Dann gilt:

$$\left\lceil \frac{1330000000}{150000} \right\rceil = 8867$$

(j) Kein Antwort

Kreativität:

Auf *Oneway Island* gibt es zwischen den Städten nur Einbahnstraßen. Jede Stadt ist mit jeder Stadt durch eine Einbahnstraße verbunden: Für zwei beliebige, unterschiedliche Städte A und B gilt, dass man entweder direkt von A nach B oder direkt von B nach A kommen kann, nicht aber beides direkt.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Stadt geben muss, von der man direkt in mindestens die Hälfte aller anderen Städte kommen kann.

Sei k Anzahl der Knoten und n maximale Anzahl der Kanten, die ein Knoten haben kann. Es ist so, dass erster (beliebiger) Knoten $n_k = k-1$ hat. Dann nächster ein weniger, also $k-2$ usw. bis $n_1 = 1$. Die gesamte Anzahl der Kanten können wir so schreiben (Arithmetische Folge):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

Verwenden wir für Beweis ein Schubfachprinzip. Wir sollen S_n orientirete Kanten auf k Knoten stellen. Nach Schubfachprinzip und Voraussetzung es gilt:

$$\left\lceil \frac{S_n}{k} \right\rceil \geq \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n+1} \right\rceil \geq \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \right\rceil \geq \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \geq \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n+1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n-1}{2}$$

Da die letze Aussage gilt, die Voraussetzung ist bewiesen.

Transfer:

(a)

$$K : \{0,1\}^n \to \bigcup_{k=0}^{n-1} \{0,1\}^k$$

$$||\{0,1\}^n U|| > || \bigcup_{k=0}^{n-1} \{0,1\}^k ||$$

$$||\{0,1\}^n|| = 2^n \qquad \text{(Korollar 1.8)}$$

$$||\bigcup_{k=0}^{n-1}\{0,1\}^k|| = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 \qquad \text{(Theorem 1.20)}$$

Also für die K(x) = K(y) mindestens zwei Bitstrings x und y der Länge n gibt, gilt.