Universität Konstanz
Fachbereich Übungs- & Klausurwissenschaft
Prof. Dr. Karl Friedrich Hauber et al.

Diskrete Strukturen
SS 2014

Probeklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Termin: 24. Juli 2010, 10:00–11:00 Uhr

Name: ______________________ **Vorname:** ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ **Studienfach:** ______________________

PIC:

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Aufgabe 1: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Bestimmen Sie für die Menge $\{50, \ldots, 200\}$ die Anzahl der Zahlen, die durch $(x^2 \bmod 7)$, $x \in \mathbb{N}$, teilbar sind. (4 Punkte)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es aus dem Alphabet $\{A, \ldots, Z\}$,

a) ein Wort mit 8 Buchstaben zu erstellen? (1 Punkt)

b) ein Wort der Länge 6 zu erstellen, bei dem der erste Buchstabe aus der ersten Hälfte und der letzte Buchstabe aus der zweiten Hälfte des Alphabets stammt? (1 Punkt)

(c) Sei π eine wie in der Vorlesung definierte Permutation.

Bestimmen Sie π so, dass gilt:

$$\pi \circ (4\ 1\ 6)\ (3\ 5\ 2) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

Geben Sie das Ergebnis sowohl in Tupelschreibweise wie auch in Zyklenschreibweise an. (2 Punkte)

(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Kniffel mit 5 Würfeln zu werfen, wenn nach den ersten beiden Würfen bereits zwei Würfel heraus gelegt wurden? (Bei einem Kniffel zeigen alle Würfel die selbe Augenzahl an) (2 Punkte)

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

(a) Gegeben sei ein gewöhnliches Kartenspiel mit 36 Karten ($\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7, 6\}$) wobei jede Karte in vier verschiedenen Farben vorkommt. (3 Punkte)

Es werden zwei Karten gezogen. Bestimmen sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1) 2 Asse werden gezogen.
2) AB, AK oder AD werden gezogen.
3) 2 Buben, Damen oder Könige werden gezogen.
4) 2 rote oder schwarze Karten werden gezogen. (Als rot zählt Herz und Karo und als schwarz zählt Pik und Kreuz)
5) 2 unterschiedliche Karten werden gezogen, die nicht die selbe Farbe besitzen und keine Kombination aus 2) beinhalten.

(b) Bei einem Spiel dürfen Sie zwei Karten aus dem Kartenstapel aus Aufgabenteil a) ziehen. Für die Ereignisse aus Aufgabenteil a) erhalten Sie: für 1) 5€, für 2) 4€, für 3) 2€, für 4) 1€ und für 5) müssen sie 3€ zahlen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz. (3 Punkte)

(c) Ein in einem Gebäude installierter Rauchmelder löst bei einem Brand zu 98% Feueralarm aus. Ein Fehlalarm wird dagegen pro Tag mit der Wahrscheinlichkeit $0,05\%$ ausgelöst. Die Wahrscheinlichkeit pro Tag für einen Brand liegt bei $0,01\%$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich brennt, falls der Feueralarm ausgelöst wird? (4 Punkte)

Aufgabe 3: Graphentheorie **10 Punkte**

Hinweis: Für die Teilaufgaben a)-c) sind keine Begründungen erforderlich.

(a) Zeichnen Sie den Baum zum Prüfercode $\varphi(T) = 112341$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den lexografisch größten Prüfercode zum Graphen A mit Gradfolge $(3,3,3,2,2,2,2,1,1,1,1,1)$ (4 Punkte).

Hinweis: Für zwei Wörter $t = t_1 \dots t_n$ und $t' = t'_1 \dots t'_n$ mit $t_i, t'_i \in [n+2]$ sagen wir, dass t lexikographisch kleiner als t' ist (symbolisch: $t <_{\text{lex}} t'$), falls es ein $i \in [n]$ gibt mit $t_i < t'_i$ und $t_j = t'_j$ für alle $j < i$. Zum Beispiel gilt $112 <_{\text{lex}} 121$ und $121 <_{\text{lex}} 211$.

(c) Bestimmen sie $\chi(G)$ sowie $\chi'(G)$ für alle $G \in M = \{A, M_{2,4}, K_5\}$, wobei A der Graph aus Teilaufgabe (b) ist. (2 Punkte)

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planare Graph $G = (V, E)$ enthält einen Knoten mit $deg_G(v) \leq 5$. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Rekursionsgleichungen **10 Punkte**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (5 Punkte).

(b) Bestimmen Sie den expliziten Ausdruck für a_n (5 Punkte).

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Dr. Sven Kosub / Lena Meyer, Steffen Sievering, Leonard Wörteler

Mathematische Grundlagen 2
SS 2010

Klausur zur Vorlesung „Mathematische Grundlagen 2“

Termin: 13. Oktober 2010, 10:00–12:00 Uhr

Name: ______________ **Vorname:** ______________

Matr.-Nr.: ______________ **Studienfach:** ______________

PIC:

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie **mindestens 35 Punkte**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 2: Analysis **10 Punkte**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n^7 + 25n^3}{n^4 + 30n^3 - 2n^7}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - (1+n)^3}{n^3 - (1-n)^3}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{80^{\frac{n+1}{4}}}{37^{\frac{2n+3}{4}}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitstheorie 10 Punkte

Über einen Datenkanal von A nach B sollen Bitfolgen übertragen werden. Leider ist der Kanal nicht störungsfrei. Eine statistische Charakteristik des Kanals besagt:

- In 2 von 10 Fällen wird eine gesendete 0 als 1 empfangen.
- In 1 von 10 Fällen wird eine gesendete 1 als 0 empfangen.

Die Charakteristik gilt sowohl für Übertragungen von A nach B als auch von B nach A. 0 und 1 treten in den zu übertragenden Nachrichten gleich häufig auf.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gesendete Bitfolge 10 auch als 10 empfangen wurde?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die empfangene Bitfolge 10 auch als 10 gesendet wurde?

Hinweis: Benutzen Sie an geeigneter Stelle den Satz von Bayes.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Dr. Sven Kosub / Lena Meyer, Steffen Sievering, Leonard Wörteler

Klausur zur Vorlesung „Mathematische Grundlagen 2“

Termin: 21. Juli 2010, 10:00–12:00 Uhr

Name: ____________________ **Vorname:** ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ **Studienfach:** ____________________

PIC:

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie **mindestens 35 Punkte**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 2: Analysis **10 Punkte**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 16n^3 + 256n^2}{n^5 - 3n^3 - 2n^2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-2n)^3}{1 + 3n^2 + 4n^3}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{31^{\frac{n}{5}}}{17^{\frac{n}{2}}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Sie besuchen eine beliebte Vorlesung für Hörer aller Semester und Fachbereiche, bei der zu einem Scheinerwerb auch die regelmäßige Bearbeitung von Übungsblättern gehört. Außer Ihnen nehmen noch 100 weitere Studenten teil. Von diesen Kommilitionen sind

- 10 im 1. Studienjahr, von denen 4 regelmäßig ihre Blätter in der Bibliothek bearbeiten,
- 20 im 2. Studienjahr, von denen 6 regelmäßig ihre Blätter in der Bibliothek bearbeiten,
- 30 im 3. Studienjahr, von denen 6 regelmäßig ihre Blätter in der Bibliothek bearbeiten, sowie
- 40 im 4. Studienjahr, von denen 4 regelmäßig ihre Blätter in der Bibliothek bearbeiten.

Sie treffen in der Bibliothek eine Kommilitonin, die mit Ihnen an der Vorlesung teilnimmt und gerade das zugehörige aktuelle Übungsblatt bearbeitet.

In welchem Studienjahr wird Ihre Kommilitonin im Erwartungswert studieren?

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Bayes.

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Beim Würfelspiel *Kniffel* (*Yahtzee*, *Knobeln*, *Pasch*) wird mit fünf Würfeln gespielt. Jeder Spieler darf in einer Runde bis zu drei Mal hintereinander würfeln. Dabei darf man „passende“ Würfel zur Seite legen und mit den verbleibenden Würfeln weiterwürfeln. Die nach dem dritten Wurf liegenden Würfeln werden als Spielergebnis gewertet.

Ein *Kniffel* besteht aus fünf gleichen Augenzahlen und ist das Spielergebnis, das die meisten Punkte bringt. Wenn Sie einen Kniffel erreicht haben, hören Sie auf weiterzuwürfeln.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf einen Kniffel zu bekommen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach bis zu drei Würfen einen Kniffel zu bekommen, wenn Sie keine Würfel zur Seite legen?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im dritten Wurf einen Kniffel zu bekommen, wenn Sie nach zwei Würfen zwei Einsen zur Seite gelegt haben und Sie im dritten Wurf mit drei Würfeln weiterwürfeln?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach bis zu drei Würfen einen Kniffel bestehend aus Einsen zu bekommen, wenn Sie nach dem ersten Wurf genau drei Einsen zur Seite gelegt haben und in allen weiteren Würfen jede weitere Eins auch zur Seite legen?

(e) Wie groß ist die erwartete Summe aller Augenzahlen, wenn Sie mit fünf Würfeln gleichzeitig einmal würfeln?

Hinweis: Außer in Teilaufabe (e) müssen Sie die konkreten numerischen Zahlwerte **nicht** ausrechnen.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

3. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Universität Konstanz
Fachbereich Übungs- & Klausurwissenschaft
Prof. Dr. Karl Friedrich Hauber et al.

Mathematische Grundlagen der Informatik
SoSe 2011

Probeklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Termin: 13. Juli 2011, 08:00–09:00 Uhr

Name: __________________ **Vorname:** __________________

Matr.-Nr.: __________________ **Studienfach:** __________________

PIC: __________________

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ____ bis ____ Uhr, ____ bis ____ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ____ Uhr

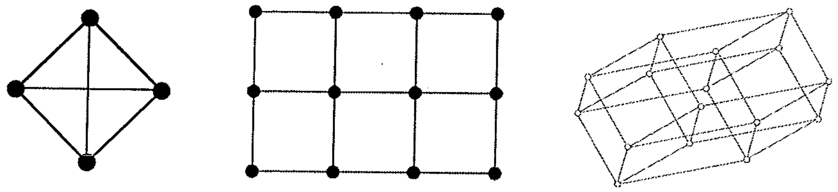
Aufgabe	1	2	3	4	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

Gegeben sei die Graphenmenge $M = \{K_4,\ M_{3,4},\ Q_4\}$.

Hinweis: Bei den Teilaufgaben (a)–(d) ist keine Begründung notwendig.

(a) Zeichnen Sie die Graphen aus M (ohne Schleifen und Mehrfachkanten). (2 Punkte)



(b) Bestimmen Sie für jeden Graphen $G \in M$ den maximalen Knotengrad $\Delta(G)$. (2 Punkte)

$$\Delta(K_4) = 3, \qquad \Delta(M_{3,4}) = 4, \qquad \Delta(Q_4) = 4.$$

(c) In welchen Graphen aus M existiert ein perfektes Matching? (2 Punkte)

In allen Graphen aus M.

(d) Bestimmen Sie $\chi(M_{3,4})$ und $\chi'(M_{3,4})$. (2 Punkte)

$$\chi(M_{3,4}) = 5, \qquad \chi'(M_{3,4}) = 4.$$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planare Graph $G = (V, E)$ enthält einen Knoten v mit $\deg_G(v) \leq 5$. (2 Punkte)

Die Aussage ist wahr. Wir beweisen durch Widerspruch:

Angenommen, in einen planaren Graphen $G = (V, E)$ habe jeder Knoten einen Grad von mindestens 6, d. h. $\deg_G(v) \geq 6$ für alle $v \in V$.

Dann würde nach Proposition 3.3 gelten:

$$\|E\| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \|V\|.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Theorem 3.24. $\square$

Aufgabe 4: Rekursionsgleichungen **10 Punkte**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge (a_n) sowie einen expliziten Ausdruck für a_n.

Wir verwenden den üblichen Algorithmus über die Darstellung als formale Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1} + 2F_{n-2})x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x \cdot F_0 x^0 + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + x \cdot F(x) - x + 2x^2 F(x)
\end{aligned}$$

Auflösen nach $F(x)$ führt auf die erzeugende Funktion

$$F(x) = \frac{1}{-2x^2 - x + 1} = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}.$$

(Die Faktorzerlegung des Nenners ermittelt man durch Bestimmung der Lösungen der Gleichung $-2x^2 - x + 1 = 0$ und Darstellung des Nenners mit den entsprechenden Linearfaktoren.)

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}.$$

Wir lesen direkt ab $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dies führt durch Multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner auf

$$1 = A(1-2x) + B(1+x).$$

Umordnen der Terme nach Potenzen von x liefert

$$1 = (A+B) + (B-2A)x;$$

dem entsprechen durch Koeffizientenvergleich die linearen Gleichungen $A+B = 1$ und $B-2A = 0$ mit den Lösungen $A = \frac{1}{3}$ und $B = \frac{2}{3}$. Der explizite Ausdruck für die Glieder der Folge (a_n) lautet somit

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Übungs- & Klausurwissenschaft
Prof. Dr. Karl Friedrich Hauber et al.

Mathematische Grundlagen der Informatik
SoSe 2011

Probeklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Termin: 13. Juli 2011, 08:00–09:00 Uhr

Name: ____________________ **Vorname:** ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ **Studienfach:** ____________________

PIC: ____________________

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: _____ bis _____ Uhr, _____ bis _____ Uhr

Vorzeitige Abgabe: _____ Uhr

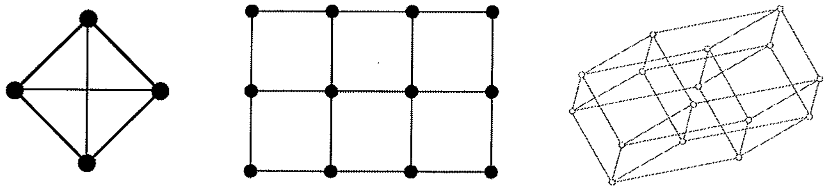
Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

Gegeben sei die Graphenmenge $M = \{K_4,\ M_{3,4},\ Q_4\}$.

Hinweis: Bei den Teilaufgaben (a)–(d) ist keine Begründung notwendig.

(a) Zeichnen Sie die Graphen aus M (ohne Schleifen und Mehrfachkanten). (2 Punkte)



(b) Bestimmen Sie für jeden Graphen $G \in M$ den maximalen Knotengrad $\Delta(G)$. (2 Punkte)

$$\Delta(K_4) = 3, \qquad \Delta(M_{3,4}) = 4, \qquad \Delta(Q_4) = 4.$$

(c) In welchen Graphen aus M existiert ein perfektes Matching? (2 Punkte)

In allen Graphen aus M.

(d) Bestimmen Sie $\chi(M_{3,4})$ und $\chi'(M_{3,4})$. (2 Punkte)

$$\chi(M_{3,4}) = 5, \qquad \chi'(M_{3,4}) = 4.$$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planare Graph $G = (V, E)$ enthält einen Knoten v mit $\deg_G(v) \leq 5$. (2 Punkte)

Die Aussage ist wahr. Wir beweisen durch Widerspruch:

Angenommen, in einen planaren Graphen $G = (V, E)$ habe jeder Knoten einen Grad von mindestens 6, d. h. $\deg_G(v) \geq 6$ für alle $v \in V$.

Dann würde nach Proposition 3.3 gelten:

$$\|E\| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \|V\|.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Theorem 3.24. $\square$

Aufgabe 4: Rekursionsgleichungen **10 Punkte**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge (a_n) sowie einen expliziten Ausdruck für a_n.

Wir verwenden den üblichen Algorithmus über die Darstellung als formale Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1} + 2F_{n-2})x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x \cdot F_0 x^0 + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + x \cdot F(x) - x + 2x^2 F(x)
\end{aligned}$$

Auflösen nach $F(x)$ führt auf die erzeugende Funktion

$$F(x) = \frac{1}{-2x^2 - x + 1} = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}.$$

(Die Faktorzerlegung des Nenners ermittelt man durch Bestimmung der Lösungen der Gleichung $-2x^2 - x + 1 = 0$ und Darstellung des Nenners mit den entsprechenden Linearfaktoren.)

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}.$$

Wir lesen direkt ab $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dies führt durch Multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner auf

$$1 = A(1-2x) + B(1+x).$$

Umordnen der Terme nach Potenzen von x liefert

$$1 = (A+B) + (B-2A)x;$$

dem entsprechen durch Koeffizientenvergleich die linearen Gleichungen $A+B = 1$ und $B-2A = 0$ mit den Lösungen $A = \frac{1}{3}$ und $B = \frac{2}{3}$. Der explizite Ausdruck für die Glieder der Folge (a_n) lautet somit

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub, Melanie Badent / Volker Mühlberg, Julian Müller, Steffen Sievering

Diskrete Strukturen
SS 2011

Quiz zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Termin: 8. Juni 2011, 10:15–10:45 Uhr

Name: ______________________ **Vorname:** ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ **Studienfach:** ______________________

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Die Bearbeitungszeit beträgt **30 Minuten**. Viel Erfolg!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	30
erreichte Punkte				

Aufgabe 1: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgenden Algebren $\langle A, \circ \rangle$ und beantworten Sie die nebenstehenden Fragen, in dem Sie für „Ja“ ein Kreuz in die Box eintragen und für „Nein“ die Box frei lassen.

Beachtung: Pro Teilaufgabe erhalten Sie für eine richtige Antwort $+0,5$ Punkte und für eine falsche Antwort $-0,5$ Punkte!

(a) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

Ist $\circ$ assoziativ? [X]
Gibt es ein neutrales Element? [X]
Gibt es stets inverse Elemente? [ ]
Ist $\circ$ kommutativ ? [X]

(b) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

Ist $\circ$ assoziativ? [ ]
Gibt es ein neutrales Element? [X]
Gibt es stets inverse Elemente? [X]
Ist $\circ$ kommutativ ? [ ]

Aufgabe 3: Permutationen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation} \}$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Verknüpfung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \ : \ [n] \to [n] \ : \ x \mapsto \pi_2(\pi_1(x))$$

Damit ist $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ eine Gruppe.

Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie Ihre Antworten in die jeweiligen Boxen ein.

(a) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist $(1\ 3\ 4)(2)(5\ 6) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$?

$(1\ 4\ 2)(3)(5)(6)$

(b) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist das Inverse von $(1\ 3\ 4)(2)(5\ 6)$ in $\mathcal{S}_6$?

$(1\ 4\ 3)(2)(5\ 6)$

(c) Welche Ordnung hat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{S}_4$?

4

(d) Wie viele Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ erfüllen $\pi(1) < \pi(2)$ und $\pi(1) < \pi(3)$?

$\frac{1}{3} \cdot n!$

(e) Wie groß ist $s_{4,2}$?

11

UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH INFORMATIK & INFORMATIONSWISSENSCHAFT
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Volker Mühlberg, Julian Müller, Kevin Sieg, Steffen Sievering

Quiz zur Vorlesung „Diskrete Strukturen"

Termin: 6. Juni 2012, 8:15–8:45 Uhr

Name: ______________________ **Vorname:** ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ **Gruppe:** ______________________

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Die Bearbeitungszeit beträgt **30 Minuten**. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	30
erreichte Punkte				

Aufgabe 1: Algebraische Strukturen — 10 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Algebren $\langle A, \circ \rangle$ und beantworten Sie die nebenstehenden Fragen, in dem Sie für „Ja" ein Kreuz in die Box eintragen und für „Nein" die Box frei lassen.

Beachtung: Pro Teilaufgabe erhalten Sie für eine richtige Antwort $+0,5$ Punkte und für eine falsche Antwort $-0,5$ Punkte!

(a) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? ☐

(b) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? ☐

Aufgabe 3: Permutationen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation} \}$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Verknüpfung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \ : \ [n] \to [n] \ : \ x \mapsto \pi_2(\pi_1(x))$$

Damit ist $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ eine Gruppe.

Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie Ihre Antworten in die jeweiligen Boxen ein.

(a) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist $(1\ 3)(2\ 4\ 5)(6) \circ (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$?

(b) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist das Inverse von $(1\ 3)(2\ 4\ 5)(6)$ in $\mathcal{S}_6$?

(c) Welche Ordnung hat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{S}_4$?

(d) Wie viele Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ erfüllen $\pi(1) < \pi(2)$ oder $\pi(1) < \pi(3)$?

(e) Wie groß ist $s_{5,4}$?

UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH INFORMATIK & INFORMATIONSWISSENSCHAFT
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Volker Mühlberg, Julian Müller, Kevin Sieg, Steffen Sievering

Diskrete Strukturen
SS 2012

Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen"

1. Termin: 25. Juli 2012, 10:15–12:00 Uhr

Name: ____________ **Vorname:** ____________

Matr.-Nr.: ____________ **Studienfach:** ____________

PIC:

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ______ bis ______ Uhr, ______ bis ______ Uhr

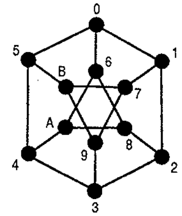
Vorzeitige Abgabe: ______ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{0, \ldots, 9, A, B\}$:



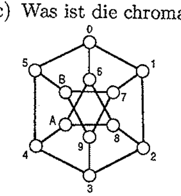
(a) Ist der Graph G planar? - Wenn ja, geben Sie eine überschneidungsfreie Einbettung in der Ebene an. Anderenfalls geben Sie eine Begründung an, warum der Graph nicht planar sein kann.

ja

(b) Ist der Graph G hamiltonsch? - Wenn ja, geben Sie einen Hamiltonkreis an.

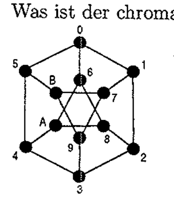
nein

(c) Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$? - Geben Sie eine passende Knotenfärbung an.



3

(d) Was ist der chromatische Index $\chi'(G)$? - Geben Sie eine passende Kantenfärbung an.



3

(e) Ist der Graph G bipartit? - Wenn ja, geben Sie eine Partition der Knotenmenge an.

Nein! =(

Aufgabe 4: Kombinatorik **10 Punkte**

Eine Permutation $\pi : [n] \to [n]$ heißt *fixpunktfrei*, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von 5 Elementen.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen?

n^2 über n

(b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n^2

(c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n!

(d) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in mindestens einer senkrechten Reihe keine Figur steht?

a-b: (n^2 über n) - n^2

(e) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Figuren schwarzer Farbe und $n - k$ ununterscheidbare Figuren weißer Farbe auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe genau eine Figur (beliebiger Farbe) steht?

n^n * (n über k)?

n^n als Grundlage und dann mit (n über k) die Zeilen auswählen, wo schwarze Figur

(unklar)

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Volker Mühlberg, Julian Müller, Kevin Sieg, Steffen Sievering

Diskrete Strukturen
SS 2012

Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen"

2. Termin: 17. Oktober 2012, 10:15–12:00 Uhr

Name: ____________ **Vorname:** ____________

Matr.-Nr.: ____________ **Studienfach:** ____________

PIC:

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ______ bis ______ Uhr, ______ bis ______ Uhr

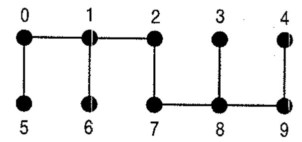
Vorzeitige Abgabe: ______ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:



Die Knotenmenge V ist wie folgt geordnet: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

7

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

2,7

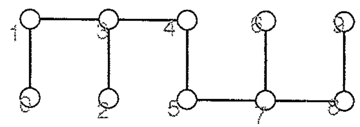
(c) Wie viele perfekte Matchings besitzt der Baum?

1

(d) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

8 9 0 1 1 2 7 8

(e) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_0 \ldots t_7$ monoton aufsteigend ist, d.h., damit $t_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gilt?



Aufgabe 6: Kombinatorik — **10 Punkte**

Die Menge der Spielkarten beim *französischem Skatblatt* ist wie folgt gegeben:

$$\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{7, 8, 9, 10, \mathsf{Bube}, \mathsf{Dame}, \mathsf{König}, \mathsf{As}\}$$

Die Elemente aus der Menge $\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ heißen *Farben*. Die Elemente aus der Menge $\{7, 8, 9, 10, \mathsf{Bube}, \mathsf{Dame}, \mathsf{König}, \mathsf{As}\}$ heißen *Werte*.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten der Wert Bube in allen Farben vorkommt?

28 über 6 alle karten außer den buben zu ziehen
einfach 6 aus 28

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten der Wert Bube in mindestens einer Farbe vorkommt?

(4 über 1) * (31 über 9)
eine feste position 9 andere aus 31

(c) ~~Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den augewählten Karten genau zwei Farben genau gleich oft vorkommen?~~

(d) ~~Wie viele Möglichkeiten gibt es $k \geq 4$ Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten genau drei Farben vorkommen?~~

(e) Wie viele Karten müssen Sie höchstens auswählen, so dass unter den ausgewählten Karten mindestens $1 \leq k \leq 8$ Werte vorkommen?
naja, wenn du einen unterschiedlichen Wert (k = 1) haben willst, musst du maximal einmal ziehen
also 0*4 + 1

(k-1) * 4 + 1

bei zwei unterschiedlichen Werte 5 Mal (erst alle vier Karten eines Wertes und dann der zweite Wert) und so weiter

Aufgabe 7: Rekursionen — **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende homogene, lineare Rekursionsgleichung dritter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-3} \qquad \text{für } n \geq 3 \\ F_2 &=_{\text{def}} c \\ F_1 &=_{\text{def}} b \\ F_0 &=_{\text{def}} a \end{aligned}$$

Hierbei stehen a, b, c für beliebige ganze Zahlen.

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (in Abhängigkeit von a, b, c).

(b) Bestimmen Sie F_n für die Anfangsbedingungen $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$.

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Tino Klingebiel, Volker Mühlberg, Julian Müller

Klausur zur Vorlesung „Mathematik: Diskrete Strukturen“

2. Termin: 16. Oktober 2013, 10:15–12:00 Uhr

Matr.-Nr.: ______________________ **Studienfach:** ______________________

PIC:

Hinweise: Außer einem beidseitig, von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 2: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

(a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für $\circ$ an, sodass jedes Element $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der Algebra $\langle\{1, 2, 3, 4\}, \circ\rangle$ genau $i - 1$ linksinverse Elemente besitzt:

$\circ$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

(b) Können Sie die Verknüpfungstabelle für $\circ$ ergänzen, dass $\circ$ assoziativ auf $\{a, b, c, d\}$ ist:

$\circ$	a	b	c	d
a	a		b	a
b	c	b		b
c		a	c	c
d	a	b	c	d

(c) Ist die Algebra $\{a, b, c\}$ mit der Verknüpfung

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

eine Gruppe?

(d) Ist die Algebra $\langle\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ\rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

(e) Ist die Algebra $\langle\mathbb{N}, \circ\rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto |x - y|$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

Aufgabe 4: Kombinatorik **10 Punkte**

Wie viele Zahlen in der Menge $\{2, 3, \ldots, 360\}$ haben mindestens einen gemeinsamen Primfaktor mit 360?

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Beim Amateurboxen entscheidet die Anzahl der Treffer über den Sieg. Dazu werden Treffer gezählt. In unserem Fall wird ein Treffer anerkannt, wenn mindestens 2 von 3 Kampfrichtern einen Schlag innerhalb einer Sekunde als Treffer werten. Die Kampfrichter geben dazu unabhängig voneinander die Treffer in einen Computer ein. Einen korrekten Treffer erkennt jeder Kampfrichter in 9 von 10 Fällen. Außerdem ist einer von 10 Schlägen ein Treffer.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Treffer vorliegt, wenn der Computer einen Treffer anzeigt?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von BAYES.

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Dr. S. Kosub / Steffen Sievering, Stefan Wolf

Mathematische Grundlagen 2
SS 2009

Klausur zur Vorlesung „Mathematische Grundlagen 2"

Termin: 29. Juli 2009, 10:00–12:00 Uhr

Name: ____________ **Vorname:** ____________

Matr.-Nr.: ____________ **Studienfach:** ____________

PIC:

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie **mindestens 40 Punkte**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	10	
erreichte Punkte									

(S. Kosub)

Aufgabe 2: Kombinatorik **10 Punkte**

Zur Bildung von Passwörtern sei die Zeichenmenge $\Sigma =_{\text{def}} \{\mathsf{A}, \mathsf{E}, \mathsf{I}, \mathsf{O}, \mathsf{U}, 0, 2, 4, 6, 8\}$ aus Buchstaben und Ziffern gegeben.

Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Passwörter.

(a) Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ:

(b) Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ, die nicht mit einer Ziffer aus $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ beginnen:

(c) Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ, in denen jedes Zeichen nur einmal vorkommt:

(d) Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ, in denen genau 3 A's vorkommen:

(e) Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ, in denen genau 3 A's und 2 E's vorkommen:

Aufgabe 6: Analysis **10 Punkte**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n+11}{n^3-5n^2+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3}{5n^3+2n-1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot 5^{-n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n\sqrt{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n/2]{n}$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.