Дискретные структуры

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Цели курса

- **Научиться грамотно оперировать с классическими «дискретными» объектами, строго доказывать их свойства.**

Зачем нужны эти знания:

- Для инженеров и учёных-прикладников это способ формализовать реальность для построения модели, алгоритма.
- Для теоретиков изучаемые абстрактные объекты естественны и красивы сами по себе.
- Для остальных — хорошая «гимнастика для ума», возможность отточить навыки строгой аргументации.

Цели курса

- **Познакомиться с некоторыми продвинутыми понятиями и методами доказательств.**

Зачем нужны эти знания:

- Программистам — для получения дополнительной интуиции при разработке алгоритмов.
- Теоретикам — для пополнения своего инструментария научной работы.

Обозначения множеств и операций

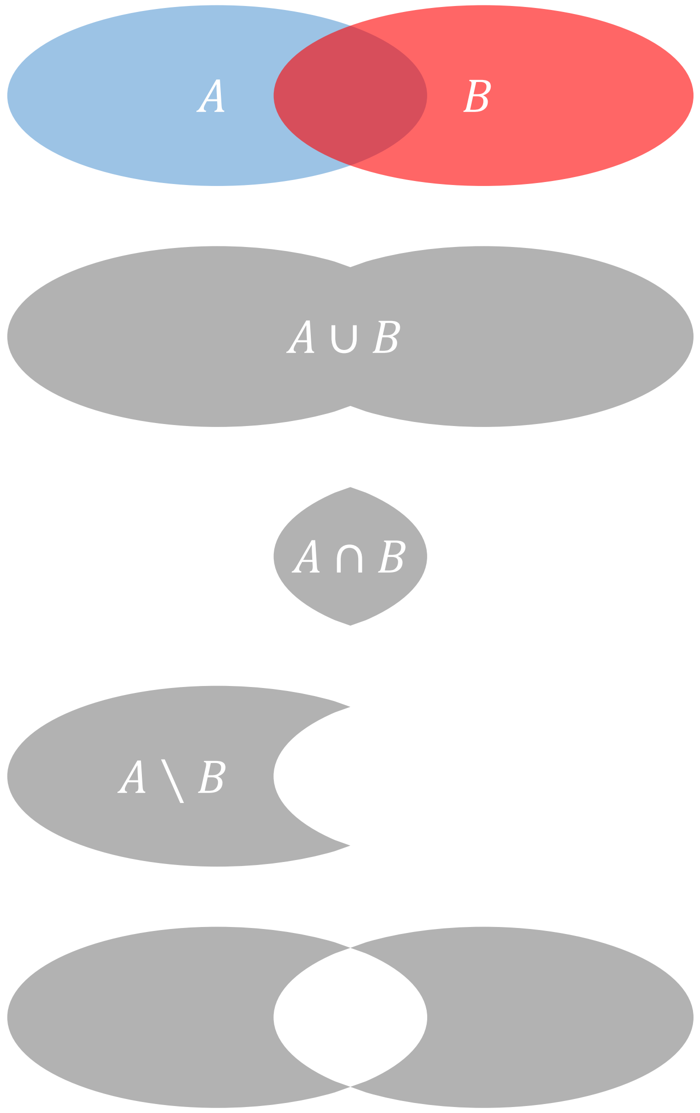
- Задание множеств:

$$\{x \mid x \text{ — чётное}\}$$

- Операции над множествами:
  - $A \cup B$ — объединение
  - $A \cap B$ — пересечение
  - $A \setminus B$ — разность
  - $A \Delta B$ — симметрическая разность
  - $\bar{A}$ — дополнение
  - $|A|$ или $\#A$ — мощность

Круги Эйлера

- $A \cup B$ — объединение
- $A \cap B$ — пересечение
- $A \setminus B$ — разность
- $A \Delta B$ — симметрическая разность



Дизъюнктное объединение

- Пишем $A \sqcup B$ вместо $A \cup B$, если хотим подчеркнуть, что $A \cap B = \emptyset$.
- Запись $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_s$ означает, что множество A разбито на части $A_1, \ldots, A_s$.

Подмножества

- $A' \subseteq A$ — означает, что A' является подмножеством A
- $A' \subset A$ — означает, что A' является подмножеством A и $A' \neq A$
- Если A — множество и $k \in \mathbb{N}$, то обозначаем
$$\binom{A}{k} := \{A' \subseteq A \mid \#A' = k\}$$
- Запись «$B \in \binom{A}{k}$» означает, что B — k-элементое подмножество в A

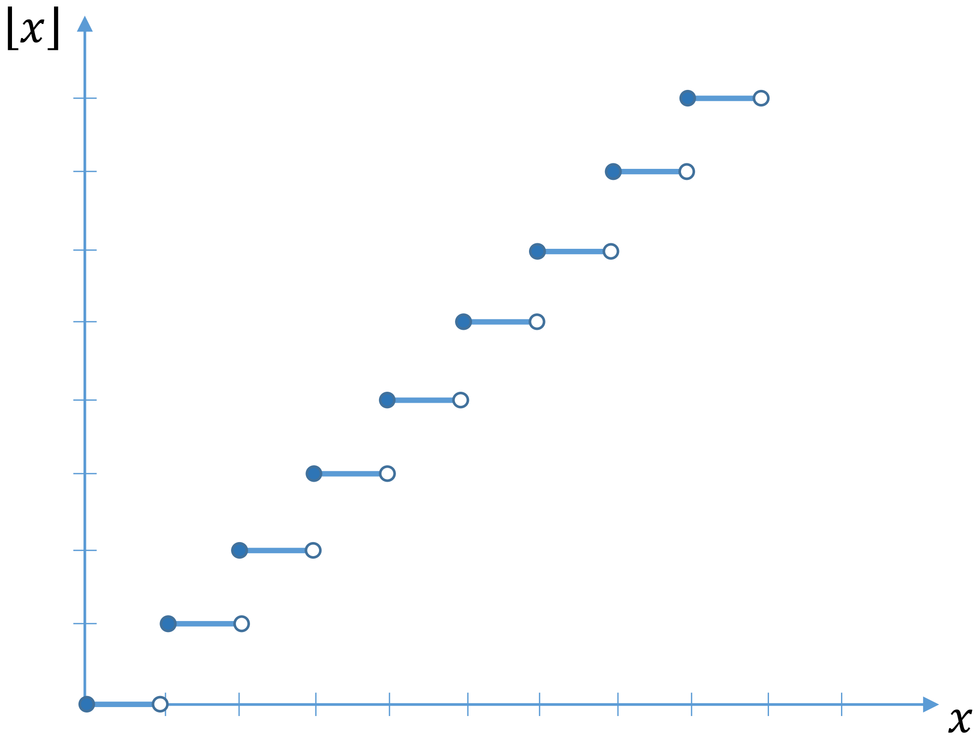
Суммирование и произведение

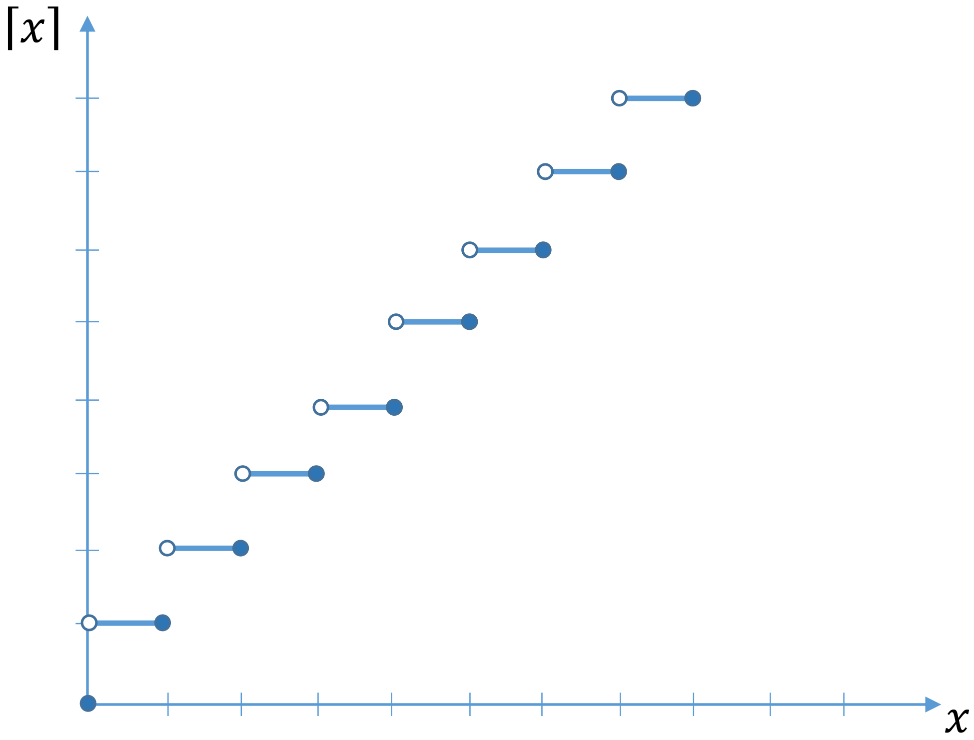
$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

$$\prod\nolimits_{k=0}^{n} x_k = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Целые части

- $\lfloor x \rfloor$ — нижняя целая часть (например, $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$, $\lfloor -6.4 \rfloor = -7$)
- $\lceil x \rceil$ — верхняя целая часть (например, $\lceil 2.7 \rceil = 3$, $\lceil -6.4 \rceil = -6$)





Доказательства по индукции

Пусть требуется доказать, что при любых $N \in \mathbb{N}$ выполнено утверждение $P(N)$.

По индукции это делается так:

- Доказываем при $N = 1$.
- Доказываем, что если $P(N)$ выполнено, то и $P(N+1)$ тоже выполнено.

$$P(1) \to P(2) \to P(3) \to \dots \to P(N) \to \dots$$

Что изучает комбинаторика

- Основной вопрос: *сколько* …?

- *Сколькими способами* можно раздать 50 студентам 100 заданий (каждому по два задания)?
- *Сколько* слов длины n в алфавите A,C,G,T?
- *Сколько* тактов времени будет работать алгоритм…?
- *Какой максимальный размер* результата работы программы?

Правило сложения

- Пусть нужно посчитать кол-во объектов, каждый из которых обладает **ровно** одним из s свойств. Тогда
  $$\#\text{всех объектов} = \#\text{со свойством } 1 + \cdots + \#\text{со свойством } s$$
- $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_s| = |A_1| + \cdots + |A_s|$.

Правило умножения

- Пусть объекты можно разбить на s групп, так, что в каждой группе ровно t объектов. Тогда

$$\#\text{объектов} = s \cdot t$$

Базовые комбинаторные объекты

- Размещения
  - С повторениями
  - Без повторений
- Сочетания
  - С повторениями
  - Без повторений

Базовые комбинаторные объекты

- Рассмотрим множество из n объектов:
$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$
- **Размещение** (без повторений) k объектов из n — это упорядоченный набор, например, (a_4, a_7, a_3, a_{18}) при $k = 4$
- **Размещение с** (допускающимися) **повторениями** — например,
$$(a_4, a_7, a_4, a_{18})$$

Базовые комбинаторные объекты

- **Сочетание** (без повторений) k объектов из n — это **не**упорядоченный набор, например, $\{a_4, a_7, a_3, a_{18}\}$ при $k = 4$
- Таким образом,
  $\{a_4, a_7, a_3, a_{18}\}$ и $\{a_3, a_7, a_4, a_{18}\}$ — это одинаковые сочетания,
  хотя
  (a_4, a_7, a_3, a_{18}) и (a_3, a_7, a_4, a_{18}) — разные размещения

Базовые комбинаторные объекты

- **Сочетание с повторениями** — например,

$$\{a_4, a_7, a_4, a_{18}\}$$
$$\{a_4, a_4, a_7, a_{18}\}$$

- Как и в случае размещений, повторения допускаются, но **не обязаны быть**!

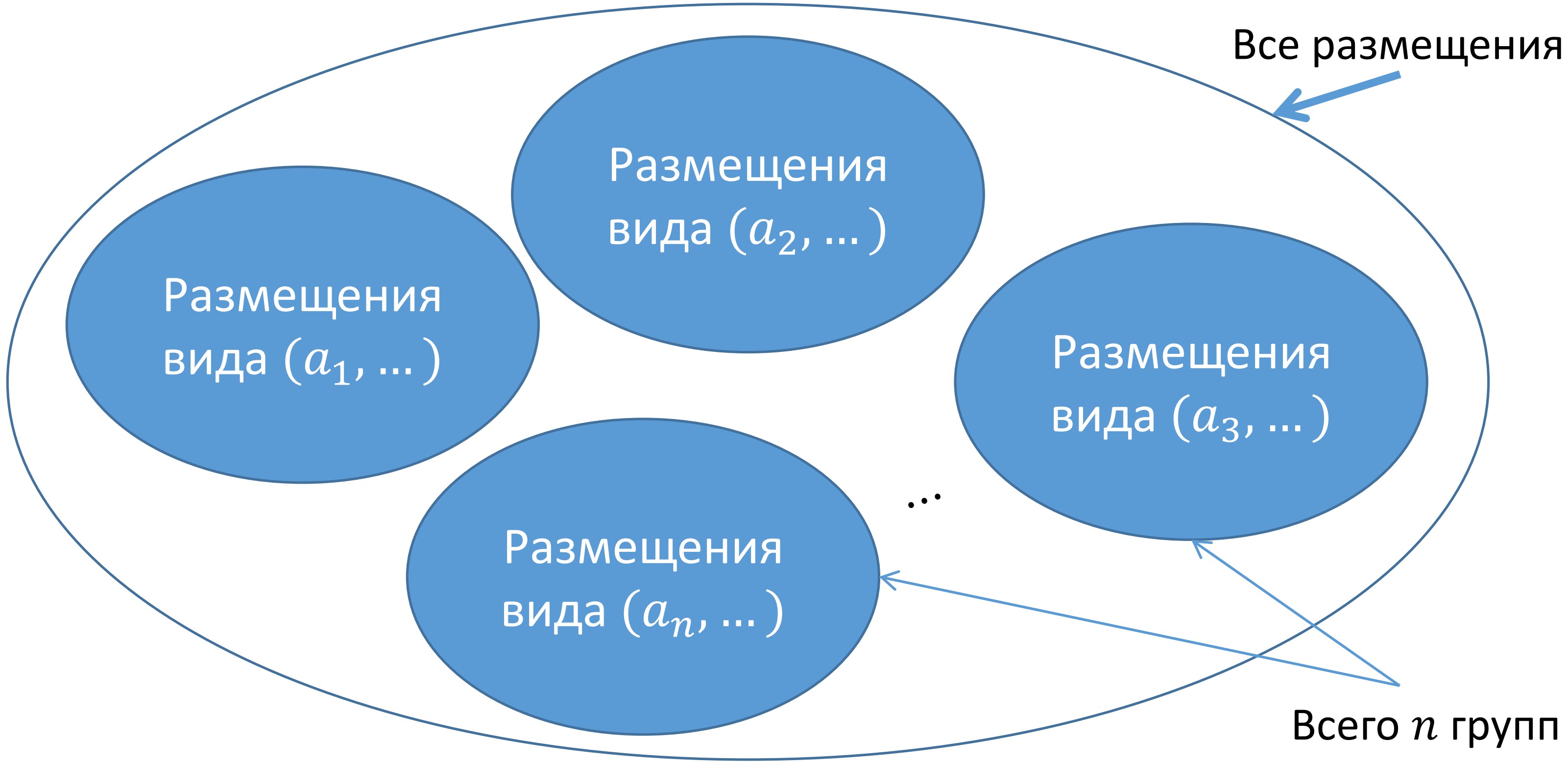
Базовые комбинаторные объекты

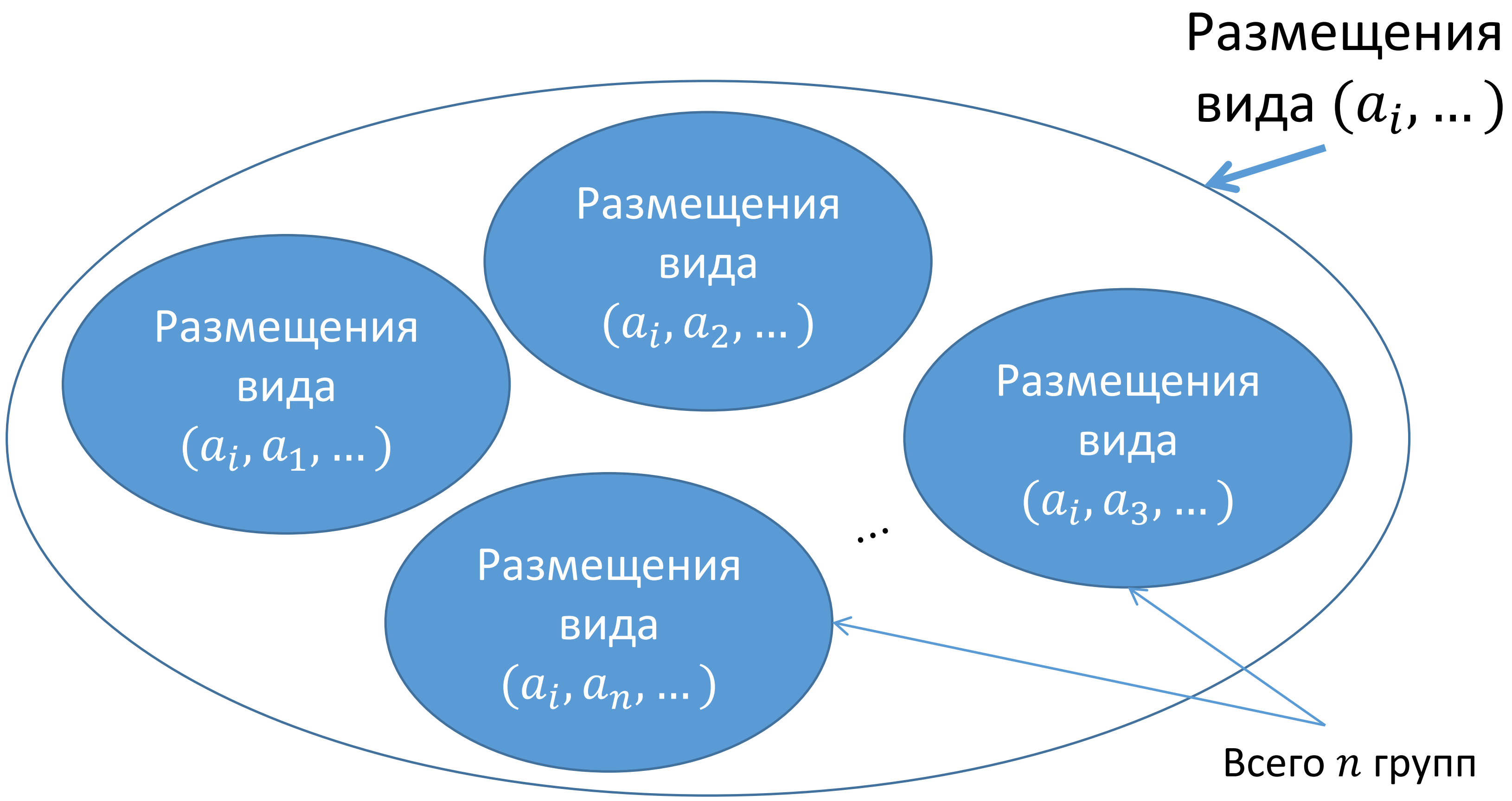
- **Пример.** График дежурств.
  - Всего 50 сотрудников
  - В каждый из 30 дней месяца кто-то дежурит
- Составляем график дежурств: выбираем из всех студентов дежурных на каждый день.
  - Если важен порядок и никто не хочет дежурить дважды, то размещение без повторений
  - Если порядок не важен, и есть те, кто готов дежурить больше одного раза, то сочетание с повторениями

Сколько ...?

Пусть у нас n объектов: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

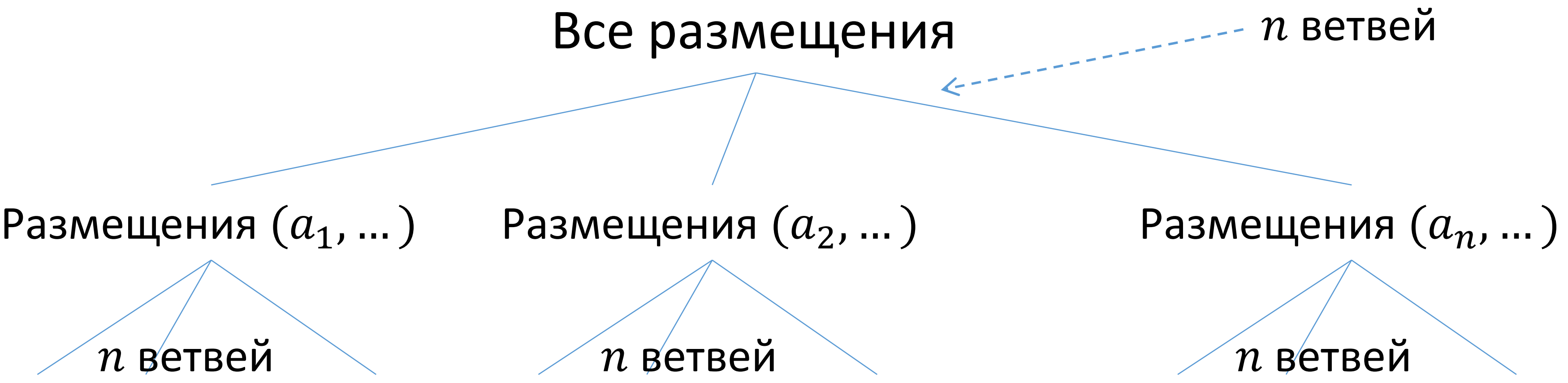
Количество k-размещений с повторениями:




Размещения вида $(a_i, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_1, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_2, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_3, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_n, \dots)$
…
Всего n групп

И так далее…

В виде «дерева подсчёта»:

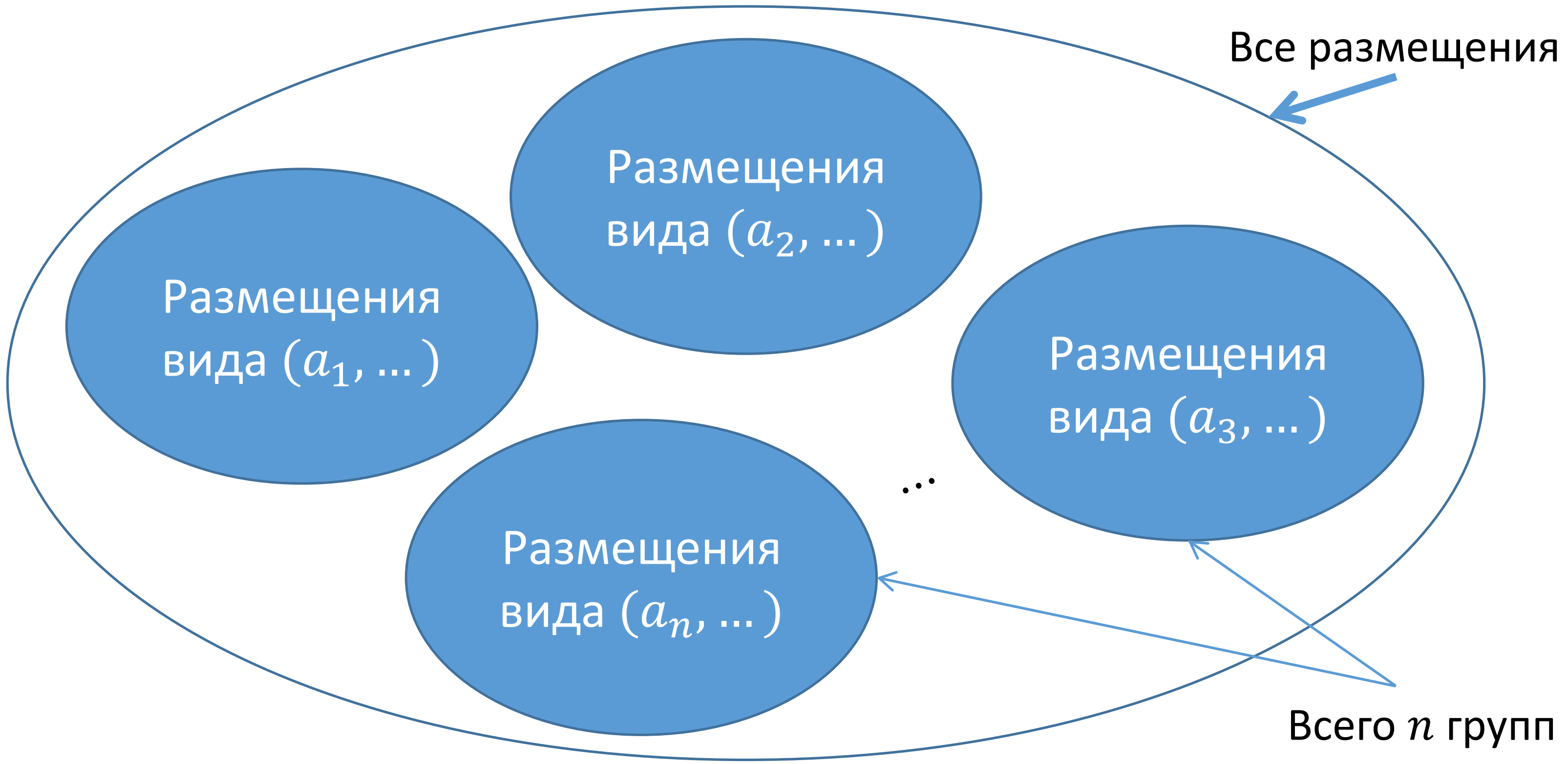


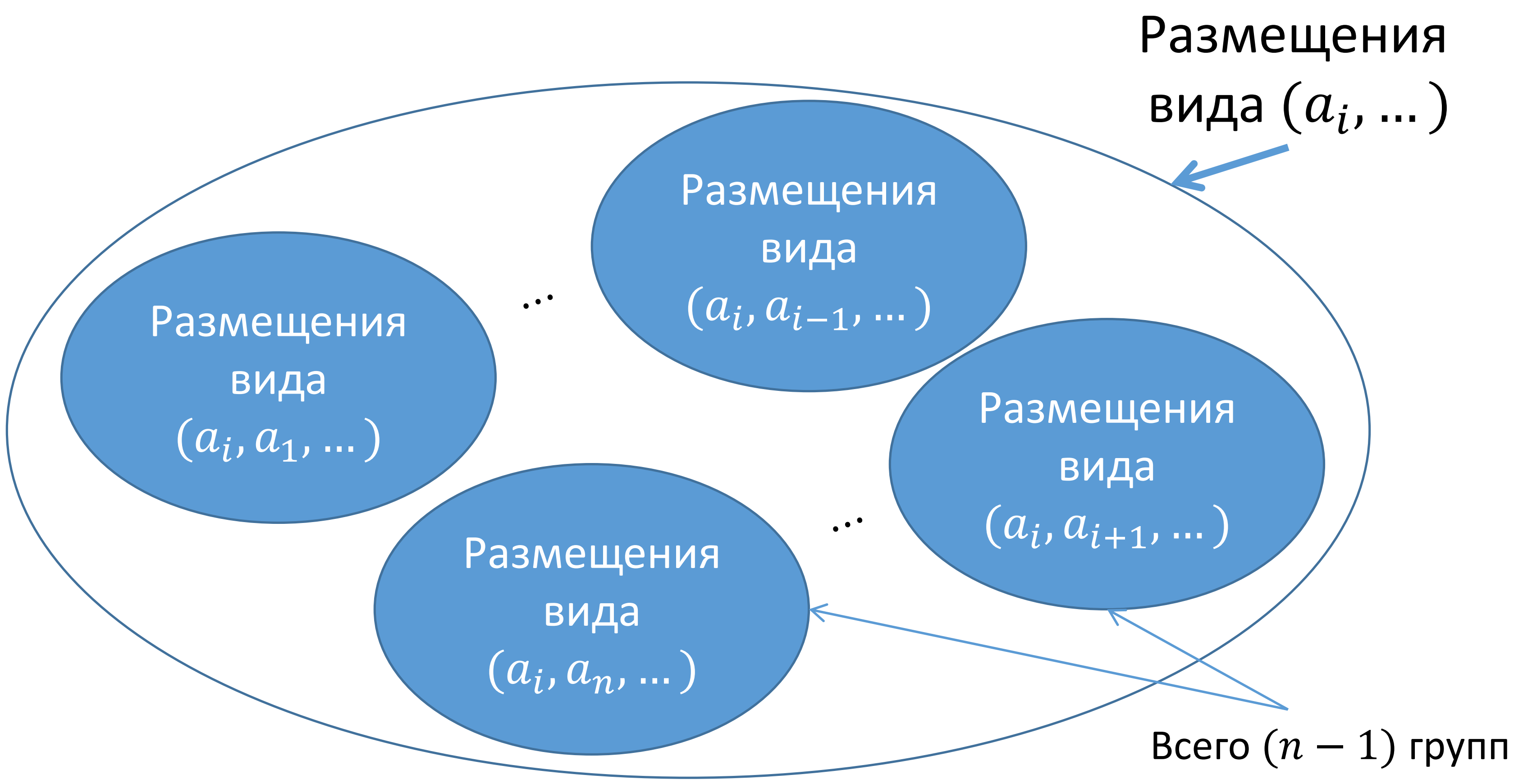
…

на самом нижнем ярусе дерева конкретные размещения

Итого: $\bar{A}_n^k = n^k$

Размещения без повторений




Размещения вида $(a_i, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_1, \dots)$
…
Размещения вида $(a_i, a_{i-1}, \dots)$
Размещения вида $(a_i, a_{i+1}, \dots)$
…
Размещения вида $(a_i, a_n, \dots)$
Всего $(n-1)$ групп

В виде «дерева подсчёта»

Все размещения $\quad$ n ветвей

Размещения $(a_1, \dots)$ $\quad$ Размещения $(a_2, \dots)$ $\quad$ Размещения $(a_n, \dots)$

$(n-1)$ ветвей $\quad$ $(n-1)$ ветвей $\quad$ $(n-1)$ ветвей

…

на самом нижнем ярусе дерева конкретные размещения

Итого: $A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$

Факториал

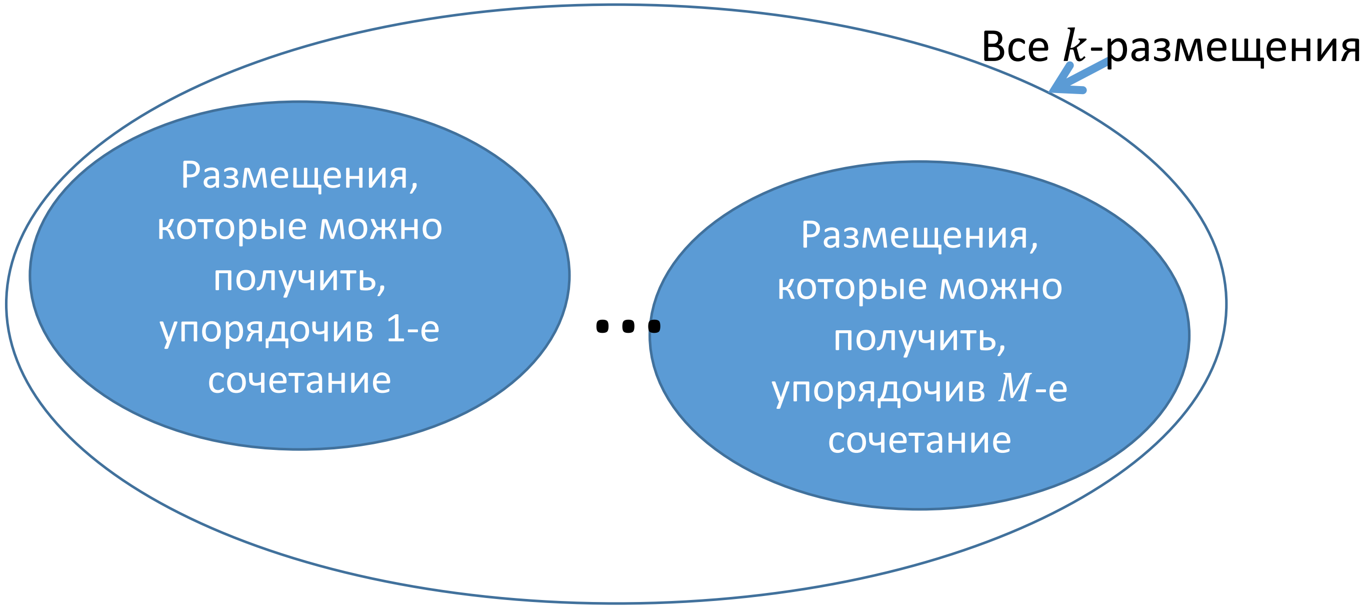
- $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
- $1! = 1$
- $0! = 1$

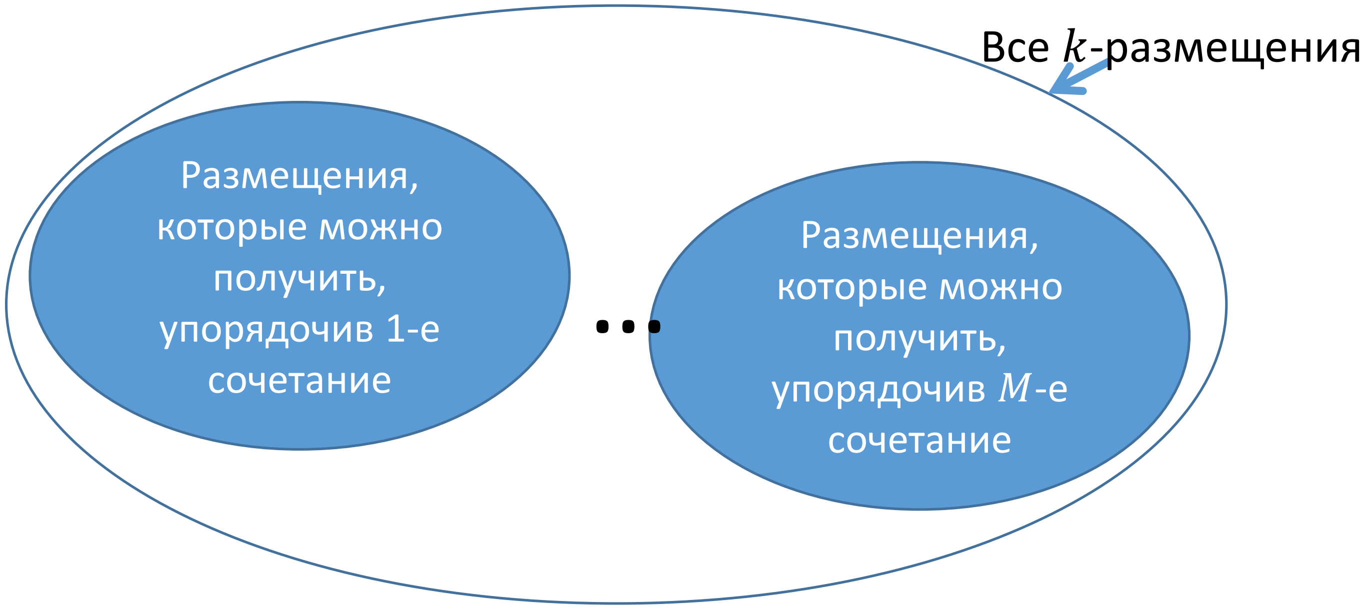
- $A_n^k = \overbrace{n(n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big)}^{\text{«убывающая факториальная степень»}} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$

- $A_n^n = n!$ — это количество **перестановок** n объектов

Сочетания без повторений

- Сочетанию $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ соответствуют $k!$ размещений.
- Занумеруем все k-сочетания числами от 1 до M.
  Тогда все k-размещения можно разбить на M групп…





$$k! \cdot M = A_n^k \quad \Rightarrow \quad M = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Сочетания без повторений

- Только что мы получили формулу

$$C_n^k = \left|\binom{\{a_1, \dots, a_n\}}{k}\right| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Числа C_n^k обозначаются ещё $\binom{n}{k}$

Сочетания с повторениями

- Метод **кодирования**
- Есть n объектов $\{a_1, \dots, a_n\}$. Выбрать k-сочетание — значит, указать, сколько раз каждый из объектов войдёт в сочетание.
- Пусть
  - a_1 в ходит в сочетание k_1 раз,
  - …
  - a_n входит в сочетание k_n раз.
- Закодируем это таким двоичным вектором:

$$\underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{k_1\ \text{единиц}} \quad 0 \quad \underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{k_2\ \text{единиц}} \quad 0 \qquad \dots \qquad 0 \quad \underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{k_n\ \text{единиц}}$$

Сочетания с повторениями

- Пример восстановления сочетания с повторениями по его коду:

$$1\ 0\ 1\,1\,1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$$

$\rightarrow\ \{a_1, a_2, a_2, a_2, a_4\}$

(здесь $n = 7, k = 5$; элементы a_3, a_5, a_6 и a_7 в сочетание не вошли)

- Сочетаниям однозначно отвечают их коды. Значит, сочетаний ровно столько же, сколько кодов:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Теперь мы знаем

- Количество размещений без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Количество размещений с повторениями

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

- Количество сочетаний без повторений

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Количество сочетаний с повторениями

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

- A — от *arrangement*
- C — от *combination*

Ещё комбинаторные числа

- Числа Стирлинга
- Числа Белла

Числа Стирлинга второго рода

- Количество всех способов разбить n объектов на k непустых групп
- Обозначение: $S(n, k)$ или $\left\{ n \atop k \right\}$
- Пример при $n = 3,\ k = 2$:
  - $\{a\}, \{b, c\}$
  - $\{b\}, \{a, c\}$
  - $\{c\}, \{a, b\}$
- $S(3,2) = 3$
- $S(10,5) = 42525$

Числа Белла

- Количество всевозможных способов разбить n объектов на непустые группы:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

- Пример при $n = 3$:
  - $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
  - $\{a\}, \{b, c\}$
  - $\{b\}, \{a, c\}$
  - $\{c\}, \{a, b\}$
  - $\{a, b, c\}$
- $B_3 = 5$
- B_{10}=115975

На заметку

- Отвечая на вопрос «сколько …?», можно лучше понять исследуемые объекты.
- Числа сочетаний и размещений — в основе всей комбинаторики
- Правила сложения и умножения: просто формулировать, не всегда просто применять
- Иногда удобно представлять подсчёт в виде дерева
- Числами сочетаний и размещений всё не исчерпывается
- Идея кодирования

Формула бинома Ньютона

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdot \ldots \cdot (x+y)$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}\cdot x^n + \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}y + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}\cdot y^n$$

Числа $\binom{n}{k}$ называются *биномиальными коэффициентами*.

Полиномиальная формула

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_l)^n = (x_1 + \cdots + x_l) \cdot (x_1 + \cdots + x_l) \cdot \ldots \cdot (x_1 + \cdots + x_l)$$

Как получить $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_l^{k_l}$, где $k_1 + \cdots + k_l = n$:

Полиномиальная формула

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_l)^n = (x_1 + \cdots + x_l) \cdot (x_1 + \cdots + x_l) \cdot \ldots \cdot (x_1 + \cdots + x_l)$$

Полиномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{l-1}}{k_l}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdot\ \ldots$$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdot k_{2!}\cdot\ldots\cdot k_l!}$$

- *Полиномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k_1\ \ k_2\ \ \ldots\ \ k_l}\coloneqq\frac{n!}{k_1!\cdot k_{2!}\cdot\ldots\cdot k_l!}$

Полиномиальная формула

- Формула бинома:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x^k y^{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1!k_2!} \cdot x^{k_1} y^{k_2}$$

- Полиномиальная формула:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_l)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_l=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!} \cdot x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_l^{k_l}$$