

2. Übungsblatt

Ausgabe: 24.04.2015 **Abgabe:** 01.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung:

10 Punkte

- (a) Wie viele Verlosungen von 5 identischen Kaffeemaschinen unter 25 Teilnehmern gibt es?
- (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau 7 Chips auf die drei Felder 1-12, 13-24, 25-36 beim Roulette zu legen?
- (c) Wie viele Binärzahlen der Länge 8 beginnen mit einer 0 oder enden mit 11?
- (d) Sie haben 5 Informatik-Bücher, 4 Mathematik-Bücher und 3 Philosophie-Bücher zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf eine Reise zwei Bücher aus verschiedenen Themenbereichen mitzunehmen?
- (e) In einer Gruppe von 11 Personen sind 5 Vorstandsposten (ohne Personalunion) für jeweils eine Person zu vergeben: *Präsidentin*, *Vizepräsidentin*, *Geschäftsführerin*, *stellvertretende Geschäftsführerin*, *Schatzmeisterin*. Wie viele verschiedene Vorstände sind möglich?
- (f) Wie viele verschiedene Wörter können Sie aus dem Wort PICHICHI bilden?
- (g) Welcher Faktor $B(n, k)$ erfüllt die Gleichung $\binom{n}{k} = B(n, k) \cdot \binom{n-1}{k-1}$?
- (h) Welchen Koeffizienten besitzt $x^6 y^7$ in $(x + y)^{13}$?
- (i) Welchen Koeffizienten besitzt $x^3 y^3 z^7$ in $(x + y + z)^{13}$?
- (j) Wie können Sie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ vereinfachen?

Kreativität:

10 Punkte

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Hinweis: Verwenden Sie im Induktionsschritt das PASCALSche Dreieck.

Transfer:

10 Punkte

Sie arbeiten an einem Projekt zum Aufbau und Management eines *Sensornetzes* zur Überwachung submariner Vulkanaktivitäten mit. Dabei senden auf dem Meeresgrund verteilte Sensoren in regelmäßigen Abständen binär kodierte Messwerte an eine Basisstation. Ihre Aufgabe ist es, für die Basisstationen eine Software zur Aggregation dieser Datenstreams zu entwerfen, mit der es möglich ist, Abweichungen vom Normalverhalten zeitnah erkennen kann. Die Rausch-Charakteristik der Sensoren bringt es jedoch mit sich, dass zufällig beliebig lange und beliebig

aussehende Bitfolgen in den Datenstream eingefügt werden können. In einem Analysemodul wollen Sie Rückschlüsse aus dem empfangenen auf den tatsächlich gesendeten Datenstream ziehen und diesen möglichst rekonstruieren.

Kombinatorische Vorüberlegungen legen nahe, dass es dazu wichtig zu zählen, wie oft ein Wort (also ein endliches Segment des Datenstreams) in einem anderen Wort als Teilwort vorkommen kann. Dazu führen Sie den *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* für Wörter $v = v_1 \dots v_m$ und $w = w_1 \dots w_n$ über einem beliebigen Alphabet ein:

$$\binom{w}{v} =_{\text{def}} \|\{ (i_1, \dots, i_m) \mid i_1 < i_2 < \dots < i_m \text{ und } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = v \}\|$$

Beispielsweise gilt

$$\binom{abracadabra}{ab} = 5,$$

denn das Wort ab kommt im Wort $abracadabra$ genau fünf mal vor:

*ab*racadabra, *a*bracadab*ra*, abra*c*adab*ra*, abra*c*adab*ra*, abra*c*adab*ra*

Im Folgenden werden einige Schreibweisen für Wörter verwendet: v^n für ein Wort v ist das Wort, das aus genau n hintereinandergesetzten Wörtern v besteht, z.B. $(ab)^3 = ababab$. Für ein Wort v der Länge n bezeichnet $|v| = n$ die Länge von v , z.B. $|(ab)^3| = 6$.

Um mehr über den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten zu erfahren, versuchen Sie folgende Fragen zu beantworten:

- (a) Wie groß ist $\binom{a^n}{a^m}$?
- (b) Wie groß ist $\binom{a^{n_1} b^{n_2}}{a^{m_1} b^{m_2}}$?
- (c) Wie groß ist $\binom{(ba)^n}{(ba)^m}$?
- (d) Für welches Wort $v \in \{a, b\}^*$ der Länge 5 wird

$$\sum_{\substack{w \in \{a, b\}^* \\ |w|=m}} \binom{w}{v}$$

maximal?

- (e) Wie könnte ein PASCALSches Dreieck für den oben definierten, verallgemeinerten Binomialkoeffizienten aussehen?