Mathematik: Diskrete Strukturen
Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

May 22, 2015

Vertiefung:

(a) Bei einem Turnier spielen n Mannschaften "jeder gegen jeden" (genau einmal). Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt, für eine Niederlage 0 Punkte. Die Platzierungen ergeben sich aus den erzielten Punkten, bei Punktgleichheit wird gelost. Kann eine Mannschaft mit n Punkten Turnierletzter werden?

Es kann eine Situation sein, wenn alle Mannschaften gleiche Anzahl der Punkten haben. Ein Mannschaft spielt insgesamt $n-1$ Spielen. Um n Punkten zu bekommen kann die einmal gewinnen, und einmal verloren (3 Punkten zusammen). Dann hat die noch $n-3$ Spielen, die die Unentschieden spielen kann ($n-3$ Punkten zusammen). Damit in die Summe haben wir genau n Punkten. Es kann sein, dass alle Mannschaften so spielen werden, weil diese Situatuion symmetrisch ist. Dann nach Voraussetzung, wenn alle Mannschaften gleiche Anzahl der Punkten haben, wird es gelost. In diesem Fall kann die Mannschaft Turnierletzer sein.

(b) Muss eine Mannschaft mindestens n Punkte für den Turniersieg erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

Wir beobachten die drei verschiedene Varianten der Entwicklung von der Ereignisse:
1. Alle Mannschaften haben die gleiche Anzahl von der Punkte (n) , dann der Sieger und Verlierer werden gelost.
2. Eine von der Mannschaften hat n Punkte und die andere remisieren.
3. Die andere Varianten, wann manche Mannschaften gewinnen und die andere verlieren. Unsere Team ist immer "in der Mitte". Das ist offensichtlich, dass unsere Mannschaft weder gewinnen noch verloren kann, da es immer Mannschaften gibt, die haben mehr und weniger Punkten. Betrachten wir den zweiten Fall. Man kann sagen, dass es der schlimmste Fall für die andere Teams ist, weil nur eine Mannschaft $(n+1)$ Punkte haben wird und nur Eine - $(n-1)$. Unsere Mannschaft kann die punkte mit solche formula kriegen:

$$n = 1 \cdot WIN + 1 \cdot LOOSE + (n-3) \cdot DRAW = 3 + 0 + (n-3) \cdot 1$$

Soll unsere Mannschaft nur $n-1$ Punkte kriegen, gewinnt dann einmal irgendwelche andere Team. Falls die beste Team gewinnt, wird sie $n+3$ haben, Mittlere - $(n+2)$ und die Schlimmste - $(n+1)$.

(c) Wie viele Punkte kann der Turnierzweite höchstens erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

Turniererster kann maximal $(n-1)\cdot 3$ Punkten bekommen, wenn der in alle Spiele gewinnen wird. Dann Turnierzweite muss einmal verlieren. D.h. dass Turnierzweite kann maximal $(n-2) \cdot 3$ bekommen.

(d) Wie viele Mannschaften können höchstens $n+1$ Punkte erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

Z.B. haben wir 6 Mannschaften. Jeder Mannschaft hat zweimal gewinnen, zweimal verloren und einmal 1 Punkt bekommen. In diesem Fall haben alle 7 Punkten. Wenn wir ein MAnnschaft mehr haben, dann sollen sie wieder alle mit dieser Mannschaft unentschieden schpielen. Also n Mannschaften koennen höchstens $n + 1$ Punkte erreichen.

(e) Nein. Es gibt Fälle, wenn die Mannschaften Verschiedene Punktzahl haben.
z.B. $n = 4, \quad A = \{3, 1, 0\}; B = \{0, 1, 1\}; C = \{1, 1, 1\}; D = \{3, 1, 1\}$

(f) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von Euklid, um $\mathrm{ggT}(2^{n+1} + 1, 2^{n+1})$ zu bestimmen?

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(2^n + 1, 2^{n+1} + 1) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{mod}(2 \cdot 2^n + 1, 2^n + 1), 2^n + 1) \\ &= \mathrm{ggT}(2^n, 2^n + 1) \\ &= \mathrm{ggT}(1, 2^n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also brauchen wir 3 Aufrufe.

(g) Keine Antwort

(h) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von Euklid, um $\mathrm{ggT}(F_{k+2}, F_{k+4})$ zu bestimmen. Hierbei steht F_k für die k-te Fibonacci-Zahl. Es gilt:

$$\mathrm{mod}(F_{k+4}, F_{k+2}) = \mathrm{mod}(F_{k+2} + F_{k+3}, F_{k+2}) = \mathrm{mod}(F_{k+3}, F_{k+2}) = F_{k+1}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(F_{k+2}, F_{k+4}) &= EUKLID(F_{k+2}, F_{k+4}) \\ &= EUKLID(\mathrm{mod}(F_{k+4}, F_{k+2}), F_{k+2}) && (1) \\ &= EUKLID(F_{k+1}, F_{k+2}) && (2) \end{aligned}$$

Da die Schritt (1) ein Aufruf braucht und Schritt (2) braucht $k - 1$ Aufrufe, haben wir insgesamt k rekursive Aufrufe.

(i) Keine Antwort

Kreativität:

(a) Keine Antwort

Selbststudium:

(a) $x_n = 3x_{n-1} + \sqrt{2}$, fuer $n \geq 1$; $x_0 = 1$.

Ihomogen, erster Ordnung
$x_o = b_0 = 1; \quad a = 3; \quad b_1 = \sqrt{2}$

$$x_n = 1 \cdot 3^n + \sqrt{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

(b) $x_n = 2x_{n-2}$, fuer $n \geq 2$; $\quad x_1 = 2, \quad x_0 = 1$.

Homogen, zweiter Ordnung.
$x_1 = b_1 = 2, \quad x_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2$

$$t^2 - 0 \cdot t - 2 = 0$$
$$t = \pm\sqrt{2}; \quad \alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = -\sqrt{2}$$
$$A = \frac{2 - 1 \cdot (-\sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad B = \frac{2 - 1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$x_n = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^n$$

(c) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$, fuer $n \geq 2$; $\quad x_1 = 2, \quad x_0 = 1.$

Homogen, zweiter Ordnung.
$x_1 = b_1 = 2, \quad x_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1$

$$t^2 - 2 \cdot t - 1 = 0$$
$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$
$$A = \frac{2 - 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2 - 1 + \sqrt{2}}} \quad B = \frac{2 - 1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot (1 + \sqrt{2})^n - \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^n$$

(d) $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$, fuer $n \geq 2$; mit $\quad x_1 = 1, \quad x_0 = 0.$

Homogen, 2.Ordnung. $x_1 = b_1 = 1, \quad x_0 = b_0 = 0, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 4$

$$t^2 + 3 \cdot t - 4 = 0$$
$$d = b^2 - 4ac = 9 \cdot -4 \cdot (-4) = 25$$
$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}; \quad \alpha = -4, \quad \beta = 1$$
$$A = \frac{1 - 0}{-4 - 1} = -\frac{1}{5}; \quad B = -\frac{1}{5}$$
$$x_n = -\frac{1}{5}(-4)^n - (-\frac{1}{5})1 = (-\frac{1}{5})((-4)^n - 1) = \frac{1}{5}(1 - (-4)^n)$$

(e) $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$, fuer $n \geq 2$; mit $\quad x_1 = 0, \quad x_0 = 1.$

Homogen, 2.Ordnung. $x_1 = b_1 = 0, \quad x_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 4$

$$t^2 + 3 \cdot t - 4 = 0$$
$$\alpha = -4, \quad \beta = 1$$
$$A = \frac{0 - 1}{-5} = -\frac{1}{5}; \quad B = -\frac{4}{5}$$
$$x_n = \frac{1}{5}(-4)^n - (-\frac{4}{5})1^n = \frac{1}{5}(-4)^n + \frac{4}{5}$$