UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH INFORMATIK & INFORMATIONSWISSENSCHAFT
Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

Mathematematik: Diskrete Strukturen
SS 2015

9. Übungsblatt

Ausgabe: 12.06.2015 **Abgabe:** 19.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Ein ebener, k-regulärer Graph besteht aus 12 Knoten und teilt die Ebene in 14 Gebiete. Wie groß ist k?

(b) Gibt es einen ebenen, k-regulären Graphen mit 8 Knoten, der die Ebene in 14 Gebiete teilt?

(c) Erweitern Sie die Eulersche Polyederformel auf nichtzusammenhängende, planare Graphen.

(d) Ist der Q_3 planar?

(e) Ist der Q_4 planar?

(f) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *dreiecksfrei*, falls G keinen K_3 als Teilgraph enthält. Zum Beispiel ist der $K_{3,3}$ dreiecksfrei. Zeigen Sie, dass

$$\|E\| \leq 2\|V\| - 4$$

für jeden planaren, dreiecksfreien Graphen $G = (V, E)$ mit $\|V\| \geq 3$ gilt.

(g) Besitzt jeder planare, dreiecksfreie Graph einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 3$?

(h) Der *Kantengraph* $L(G)$ zu einem Graphen $G = (V, E)$ ist definiert durch die Knotenmenge E und die Kantenmenge $\{ \{e, f\} \mid e, f \in E \wedge e \cap f \neq \emptyset \}$. Ist der Kantengraph eines planaren Graphen wieder planar?

(i) Wie viele Knotenfärbungen mit k Farben hat ein K_n?

(j) Wie ist die chromatische Zahl eines Q_d?

Lösung:

(a) Es gilt $\|F\| = 14$, $\|V\| = 12$, $\|E\| = \frac{\|V\| \cdot k}{2} \Rightarrow \|E\| = \frac{12 \cdot k}{2} = 6k$.
Es folgt mit der Eulerschen Polyederformel:

$$\begin{aligned} \|F\| &= \|E\| - \|V\| + 2 \\ 14 &= 6k - 12 + 2 \\ 24 &= 6k \\ k &= 4 \end{aligned}$$

(b) Wir erhalten mithilfe der Eulerschen Polyederformel, dass folgendes gelten muss:

$$\begin{aligned} \|F\| &= \|E\| - \|V\| + 2 \\ 14 &= 4k - 8 + 2 \\ 20 &= 4k \\ k &= 5 \end{aligned}$$

Da $5 \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es einen k-regulären Graphen mit $k = 5$ und 8 Knoten, der die Ebene in 14 Gebiete unterteilt.
Planarität: Ein Graph ist planar, falls die Gleichung in Theorem 3.24 erfüllt ist. Wir testen somit:

$$20 = \|E\| \leq 3 \cdot \|V\| - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Somit gibt es keinen k-regulären ebenen Graphen mit 8 Knoten, der die Ebene in 14 Gebiete unterteilt.

(c) Die Eulersche Polyederformel legt die Vermutung nahe, dass gilt:

$$\|F\| = \|E\| - \|V\| + k + 1$$

mit k ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.
<u>Beweis:</u> (mittels vollständiger Induktion über $\|E\| = m$)

IA: ($m = 0$) Alle Knoten sind isoliert, d.h. wir haben $\|V\| = n$ Zusammenhangskomponenten und 1 Gebiet:

$$1 = \|F\| = 0 - n + n + 1 = 1$$

IV: Für alle $m' \leq m$ gilt $\|F\| = m - n + k + 1$.

IS: ($m \to m + 1$) Beweis durch Fallunterscheidung beim Einfügen von Kanten:

Fall 1: Einfügen einer Kante innerhalb eine Zusammenhangskomponenten:

- $n_{m+1} = n_m$
- $k_{m+1} = k_m$
- $f_{m+1} = f_m{+}1$ (Da jede Einfügung einer Kante innerhalb einer Komponente genau ein Gebiet teilt.)

Es folgt:

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= m + 1 - n_{m+1} + k_{k+1} + 1 \\ f_m + 1 &= m + 1 - n_m + k_m + 1 \\ f_m &= m - n_m + k_m + 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist aufgrund der **IV** korrekt.

Fall 2: Einfügen einer Kante zu einem neuen Knoten: (ist der Knoten ein isolierter, so ist dies eine eigene Zusammenhangskomponente $\to$ Fall 3)

- $f_{m+1} = f_m$
- $n_{m+1} = n_m + 1$
- $k_{m+1} = k_m$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= m+1-n_{m+1}+k_{k+1}+1 \\ f_m &= m+1-n_m-1+k_m+1 \\ f_m &= m-n_m+k_m+1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist aufgrund der **IV** korrekt.

Fall 3: Einfügen einer Kante zu einer schon bestehenden Zusammenhangskomponente:

- $f_{m+1} = f_m$
- $n_{m+1} = n_m$
- $k_{m+1} = k_m - 1$

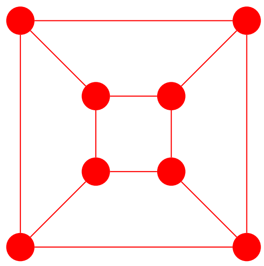
Es folgt:

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= m+1-n_{m+1}+k_{k+1}+1 \\ f_m &= m+1-n_m+k_m-1+1 \\ f_m &= m-n_m+k_m+1 \end{aligned}$$

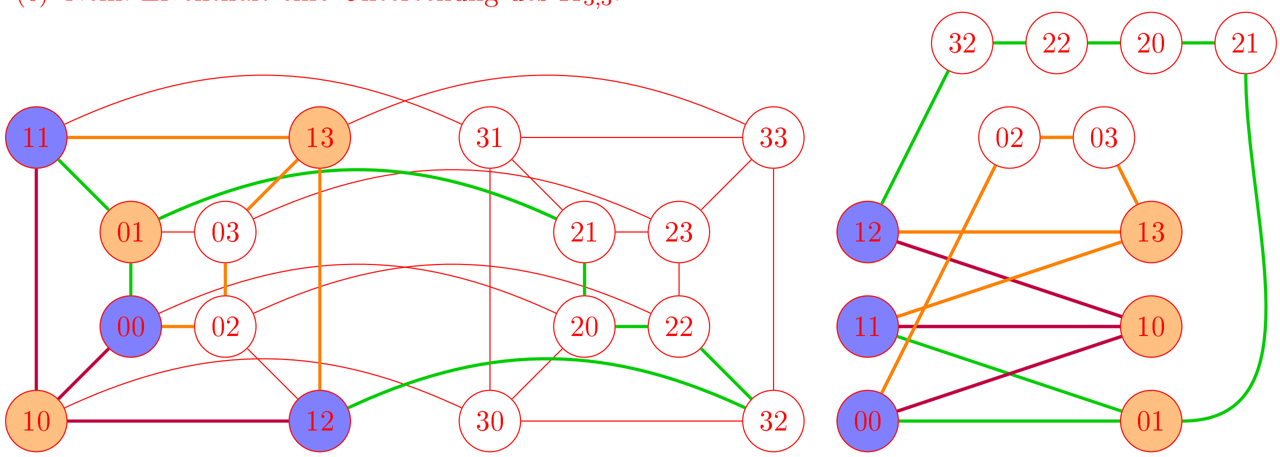
Die letzte Gleichung ist aufgrund der **IV** korrekt.

Somit ist die Aussage bewiesen. □

(d) Ja.



(e) Nein. Er enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.



(f) Beweis durch Direktbeweis.
Zuerst definieren wir uns den Grad einer Fläche $f \in F$: $deg(f) =_{\text{def}}$ die Anzahl der

Kanten, die diese Fläche berühren.
Wir wissen, dass jede Kante genau zwei Flächen berührt.
Wir wissen, dass in einem dreiecksfreien Graph jede Fläche von mindestens 4 Kanten umgeben ist. Somit gilt für alle Flächen $deg(f) \geq 4$.
Ebenso können wir über die Summe aller Flächengrade sagen:

$$2\|E\| = \sum_{f \in F} deg(f) \geq 4\|F\| \Rightarrow \|F\| \leq \frac{2\|E\|}{4}$$

Setzen wir nun alles in die Eulersche Formel ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|E\| &= \|V\| + \|F\| - 2 \\ &\leq \|V\| + \frac{2\|E\|}{4} - 2 \\ &= \|V\| + \frac{\|E\|}{2} - 2 \end{aligned}$$

Es folgt durch umformen:

$$\begin{aligned} \|E\| - \frac{\|E\|}{2} &\leq \|V\| - 2 \\ \|E\| &\leq 2\|V\| - 4 \end{aligned}$$

Und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

(g) Ja. Beweis durch Widerspruch.
Sei G ein dreiecksfreier planarer Graph mit $deg(v) \geq 4, \forall v \in V$. Es gilt

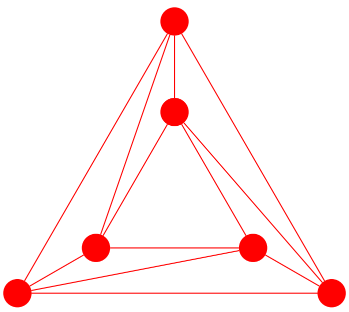
$$\|E\| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 4 = \frac{4}{2}\|V\| = 2\|V\|$$

Es folgt mit Teilaufgabe f):

$$2\|V\| \leq \|E\| \leq 2\|V\| - 4$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Somit muss es einen Knoten $v \in V$ mit $deg(v) \leq 3$ geben. $\square$

(h) Nein. Wir betrachten wir den folgenden Graphen.



Wir wissen hierüber:

- $\|V_{L(G)}\| = \|E_G\|$
- Jeder Knoten in $L(G)$ hat genau $2 \cdot (r - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ Nachbarn. Es folgt mit dem Handschlaglemma: $\|E_{L(G)}\| = \frac{6}{2} \cdot \|E_G\|$

Es folgt

$$3\|E_G\| = \|E_{L(G)} \leq 3\|V_{L(G)}\| - 6 = 3 \cdot \|E_G\| - 6$$

und dies ist ein Widerspruch.
Somit ist nicht jeder Kantengraph eines planaren Graphen wieder planar. $\square$

(i) Für den Fall, dass $k < n$ gibt es keine mögliche Färbung den K_n. Ansonsten gilt für die Anzahl der Färbungen

$$\prod_{i=0}^{n-1}(k-i) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

(j) Jeder Q_d ist bipartit. Somit gilt $\chi(Q_d) = 2$.

Kreativität: **10 Punkte**

Wie viele Knotenfärbungen mit 3 Farben hat der Kreis C_n?

Hinweis: Stellen Sie eine geeignete Rekursionsgleichung auf und lösen Sie diese.

Lösung:

Wir definieren uns zunächst $p(C_n)$ als die Anzahl der Knotenfärbungen für den Graph C_n. Wir überlegen uns zunächst, wie man die Färbungen finden kann, indem man den Kreis aufteilt. Hierfür gibt es verschieden Möglichkeiten:

(a) Entweder man verkürzt den Kreis um eins (betrachten von C_{n-1})

(b) oder man löscht eine Kante und einen Knoten (da für den C_n auch gleichfarbige Knoten nebeneinanderliegen können)

Hier entsteht jedoch das Problem, dass man entweder einige Färbungen doppelt oder gar nicht zählt.
Betrachtet man nun statt (ii) den Graphen, indem man nur eine Kante löscht, so haben wir beispielsweise für den C_4 die beiden folgenden Graphen:

- P_3
- C_3

Würden wir jedoch beide Möglichkeiten addieren, so würden wir zu viele Färbungen zählen.
Betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$p(C_n) = p(P_{n-1}) - p(C_{n-1})$$

Beweis: (argumentativ)

(a) Sei $\mathcal{F}$ eine Färbung von P_{n-1}.

(b) sind v_0 und v_{n-1} gleichgefärbt, so ist $\mathcal{F}$ auch eine Färbung von C_{n-1} (abgesehen vom $n-1$-ten/0-ten Knoten, der in C_{n-1} nicht existiert).

(c) Punkt (ii) gilt auch andersherum: Jede Färbung von C_{n-1} ist auch eine Färbung von P_{n-1}, in der v_0 und v_{n-1} gleichgefärbt sind.

(d) Jede Färbung, bei der v_0 und v_{n-1} in P_{n-1} nicht gleichgefärbt sind, ist definitiv eine korrekte Einfärbung von C_n.

Es folgt, dass $p(P_{n-1}) = p(C_n) + p(C_{n-1})$ gilt. □

Wir betrachten nun $p(P_{n-1})$. Es ist schnell zu sehen, dass hier $k \cdot (k-1)^{n-1}$ gelten muss, da der erste Knoten mit k Farben gefärbt werden kann und alle weiteren dann mit jeder, nur nicht mit der Farbe, die der schon gefärbte Nachbarknoten hat.

In unserem Fall gilt somit

$$p(P_{n-1}) = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Es bleibt die Rekursionsgleichung zu lösen.

Behauptung: $p(C_n) = (-1)^n \cdot 2 + 2^n$

Begründung: Der erste Term beinhaltet ein alternierendes Vorzeichen. Dies lässt sich durch den Aufbau der Rekursionsgleichung erklären.

Beweis: (mittels vollständiger Induktion über n)

IA: ($n = 3$) Es gilt $p(C_3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ da jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist. Somit gilt $p(C_3) = 6 = -2 + 8 = (-1) \cdot 2 + 2^3 = (-1)^3 \cdot 2 + 2^3$

IV: Für alle $k \leq n$ gelte die Behauptung.

IS: ($n \to n+1$)

$$\begin{aligned} p(C_n) &= p(P_{n-1}) - p(C_{n-1}) \\ &\overset{(IV)}{=} 3 \cdot 2^{n-1} - ((-1)^{n-1} \cdot 2 + 2^{n-1}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1} - 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. ■

Transfer: **10 Punkte**

Ein *Multiprozessorsystem* besteht aus einer Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ von n identischen Prozessoren sowie einem Kommunikationsmechanismus. Die Prozessoren sind untereinander gemäß eines ungerichteten Graphen $G = (P, E)$ zu einem Prozessorennetzwerk zusammengeschaltet. Die Kommunikation wird wie folgt durchgeführt: Jeder Prozessor besitzt ein Lesefenster fester Größe, auf das er Schreibzugriff hat. Falls $\{p_i, p_j\} \in E$ gilt, so darf der Prozessor p_j im Lesefenster von p_i lesen. Es darf immer nur entweder geschrieben oder gelesen werden – niemals beides gleichzeitig. Alle Prozessoren arbeiten synchron, d.h., alle Prozessoren beginnen den nächsten Arbeitsschritt zeitgleich.

Sie wollen das Summationsproblem in einem Prozessornetzwerk lösen. Dabei steht im Lesefenster jedes Prozessors p_i eine Integer-Zahl z_i. Das Problem ist gelöst, wenn alle Prozessoren anhalten und der Prozessor p_1 das Summe $z_1 + \cdots + z_n$ in seinem Lesefenster stehen hat.

Sie organisieren d^n Prozessoren in einem Prozessorennetzwerk der Form eines (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen. Ein (n, d)-dimensionaler De Bruijn-Graph ist ein Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V =_{\text{def}} [d]^n$ sowie der Kantenmenge

$$E =_{\text{def}} \{\ \{(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\} \mid x_2 = y_1, x_3 = y_2, \dots, x_n = y_{n-1}\ \}.$$

Dabei werden keine Schleifen zugelassen.

(a) Wie viele Kanten benötigen Sie für einen (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen?

(b) Wie groß ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten in einem (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen?

(c) Wie (schnell) können Sie das Summationsproblem in einem (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen lösen?

Beachte: Die Laufzeit des Prozessorennetzwerkes ergibt sich Anzahl der Rechenschritte, bis kein Prozessor mehr aktiv ist. Dabei nehmen wir an, dass das Lesen des Inhalts eines Lesefenster sowie das Schreiben in das eigene Lesefenster als 1 Schritt zählt. Außerdem zählen Vergleiche zweier Integer-Zahlen sowie Ausführung von arithmetischen Operationen als 1 Schritt unabhängig von der Größe der Integer-Zahlen.

Lösung:

(a) Es gibt für jeden Knoten genau d Möglichkeiten zu einem anderen zu gelangen. Hierbei haben wir jedoch noch die Schleifen mitgezählt. Hiervon gibt es für alle Knoten der Form $(a, a, \ldots, a)$ genau d.
Hierbei werden aber Kanten der Form $\{(a, b, a, b, \ldots, a, b), (b, a, b, a, \ldots, b, a)\}$ doppelt gezählt. Somit müssen wir hier noch die Anzahl dieser Kanten einmal abziehen. Diese ist gerade $\binom{d}{2}$. Es folgt für die Anzahl der Kanten:

$$d^n \cdot d - d - \binom{d}{2} = d(d^n - 1) - \frac{d!}{2! \cdot (d-2)!} = d(d^n - 1) - \frac{d(d-1)}{2}$$

(b) Der größte Abstand zwischen zwei Knoten ist dann gegeben, wenn keine Verschiebung der Werte möglich ist, sodass durch anhängen von weiteren der Wert des zweiten Knotens gegeben ist.
Wir betrachten die Knoten $k_i =_{\text{def}} (i, i, \ldots, i)$ und $k_j =_{\text{def}} (j, j, \ldots, j)$. Hierbei haben wir keine Überschneidung von Werten. Somit muss jeder einzelne Wert des Knotens k_i verändern. Hierfür muss über n Knoten gegangen werden, um k_j zu erreichen.
Somit ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten gerade n.

(c) Man kann durch geeignete Konstruktion einen $d-$ären, balancierten Baum konstruieren. Dies funktioniert mithilfe einer modifizierten Breitensuche wie folgt:

- Vom ersten Knoten $(0, 0, \ldots, 0)$ hat man $d-1$ Möglichkeiten weiter zu gehen; somit hat der erste Knoten genau $d-1$ Kinder.
- Der restliche Baum kann auf die gleiche Art mittels der modifizierten Breitensuche konstruiert werden.

Hat man sich so einen Baum konstruiert, kann man die Lesevorschrift wie folgt formulieren:
Im Knoten/Prozessor x_n wird die Summe aller Kinder und des eigenen Wertes gespeichert.
Diesen Baum durchläuft man von unten nach oben. Alle Knoten, die gerade nicht rechnen, lesen ihren eigenen Wert, während im Rest gearbeitet wird.
Ab der ersten Ebene, in der keine Blätter sind, muss jeder Knoten rechnen. Jeder dieser Knoten muss

- in d Knoten lesen
- d Werte zum eigenen hinzu addieren
- d-mal einen neuen Wert schreiben

Somit gilt für alle inneren Knoten ein Aufwand von $3d$.
Für den Wurzelknoten, unseren Prozessor p_1, gilt

- in $d-1$ Knoten lesen
- $d-1$ Werte zum eigenen hinzu addieren
- $d-1$-mal einen neuen Wert schreiben

Somit gilt für den Wurzelknoten ein Aufwand von $3(d-1)$.
Insgesamt haben wir genau $d^n - 1 - d^{n-1} = (d-1)d^{n-1} - 1$ innere Knoten. Es folgt für die Anzahl von Schritten

$$((d-1)d^{n-1} - 1) \cdot 3d + 3 \cdot (d-1) = 3((d-1)d^n - 1)$$

Es werden somit $3((d-1)d^n - 1)$ Rechenschritte benötigt.