Mathematik: Diskrete Strukturen
Lösungsblatt

Anton Bubnov, Eugen Kuzmenko

April 20, 2015

Vertiefung:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 10)$.
Bemerkung: die höhere Potenzen werden in Potenzen von 2 augeteilt. Für Modulus Rechnenregeln wird Theorem 1.2 (BM) benutzt.

$$\mathrm{mod}(5^{31}, 10) = 5 \qquad (\text{da mod } (5^n, 10) = 5, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(2^{789}, 10) &= \mathrm{mod}(2^{512} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^1, 10) \\
&= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(2^{512}, 10) \cdot \mathrm{mod}(2^{256}, 10) \cdot \mathrm{mod}(2^{16}, 10) \cdot \mathrm{mod}(2^4, 10) \cdot \mathrm{mod}(2^1, 10), 10) \\
&= \mathrm{mod}(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2, 10) \qquad (\text{da mod } (2^4, 10) = 6) \\
&= \mathrm{mod}(6 \cdot 2, 10) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(-23^{23}, 10) &= \mathrm{mod}(23^{16} \cdot 23^4 \cdot 23^2 \cdot (-23)^1, 10) \\
&= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(23^{16}, 10) \cdot \mathrm{mod}(23^4, 10) \cdot \mathrm{mod}(23^2, 10) \cdot \mathrm{mod}((-23)^1, 10), 10) \\
&= \mathrm{mod}(9 \cdot 7, 10) \qquad (\text{da mod } (23^2, 10) = 9 \text{ und } \text{mod } (23^4, 10) = 1) \\
&= \mathrm{mod}(63, 10) \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 10) &= \mathrm{mod}(5 \cdot 2 + 3, 10) \\
&= \mathrm{mod}(13, 10) \\
&= 3
\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 11)$.
Bemerkung: Rechnenweg ist gleich wie in Punkt a.

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(5^{31}, 11) &= \mathrm{mod}(5^{30} \cdot 5, 11) \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(2^{789}, 11) &= \mathrm{mod}(2^{512} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^1, 11) \\
&= \mathrm{mod}(9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2, 11) \\
&= \mathrm{mod}(432, 11) \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(-23^{23}, 11) &= \mathrm{mod}(23^{16} \cdot 23^4 \cdot 23^2 \cdot (-23)^1, 11) \\
&= \mathrm{mod}(4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, 11) \\
&= \mathrm{mod}(420, 11)
\end{aligned}$$

$$= 9$$

$$\begin{aligned}\text{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 11) &= \text{mod}(5 \cdot 6 + 9, 11) \\ &= \text{mod}(39, 11) \\ &= 6\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie $\text{mod}(7^{31} \cdot 2^{789}, 10)$.
Bemerkung: Rechnenweg ist gleich wie in Punkt a.

$$\begin{aligned}\text{mod}(7^{31}, 10) &= \text{mod}(7^{16} \cdot 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^2 \cdot 7^1, 10) \\ &= \text{mod}(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 7, 10) \\ &= \text{mod}(63, 10) \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mod}(2^{789}, 10) &= \text{mod}(2^{512} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^1, 10) \\ &= \text{mod}(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2, 10) \\ &= \text{mod}(12, 10) \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mod}(7^{31} \cdot 2^{789}, 10) &= \text{mod}(3 \cdot 2, 10) \\ &= \text{mod}(6, 10) \\ &= 6\end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie kgV(178, 144).

$$\begin{aligned}&178 = 2 \cdot 89 \\ &144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ &\text{kgV}(178, 144) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 89 = 12816 \qquad \text{(nach Lemma 1.5 (BM))}\end{aligned}$$

(e) Bestimmen Sie ggT(12877480, 24145275).

$$\begin{aligned}\text{ggT}(12877480, 24145275) &= \text{ggT}(24145275 - 12877480, 12877480) \\ &= \text{ggT}(12877480 - 11267795, 11267795) \\ &= \text{ggT}(11267795 - 1609685, 1609685) \\ &= 1609685 \qquad \text{(nach Lemma 1.8 (BM))}\end{aligned}$$

(f) Wie sieht der $\frac{12877480}{24145275}$ zu äquivalente teilerfremde Bruch aus?

$$\frac{12877480}{24145275} = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 113}{3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 113} = \frac{2^3}{3 \cdot 5}$$

(g) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau einmal den Funktionswert 0 annehmen?

(h) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau zweimal den Funktionswert 0 annehmen?

Transfer:

(a) 8 Symbole

Schritt 1: Wir wählen beliebig zwei Sätze. Um Länge 8 zu bekommen mußen wir insgesamt 4 Wörtern haben, weil andere 4 Symbolen zusätzliche Zeichen sind.

Schritt 2: Da es in Alphabet 26 Buchstaben gibt, können wir von 4 kleine Buchstaben so viel Kombinationen machen:

$$26^4 = 456976$$

Schritt 3: Wenn eine halbe gröss sein kann, dann verdoppelt unsere Zahl der Kombinationen:

$$(26)^4 \cdot 2 = 456976 \cdot 2 = 913952$$

Schritt 4: In Reihe von 4 Buchstaben können wir Ziffern in 7 Varianten stellen:

$$\begin{aligned}
&X \in 0, 1, ..., 9 \\
&\{a|bcd\} \rightarrow \{Xa|Xbcd\}, \{aX|bcdX\} \\
&\{ab|cd\} \rightarrow \{Xab|Xcd\}, \{aXb|cXd\}, \{abX|cdX\} \\
&\{abc|d\} \rightarrow \{Xabc|Xd\}, \{abcX|dX\}
\end{aligned}$$

Erste und zweite Zahlen kann 10 Ziffer sein. Also haben wir so viele Varianten für 2 Verschiedene Ziffern und 7 Satz Kombinazionen:

$$\begin{aligned}
&10 \cdot 10 \cdot 7 = 700 \\
&913952 \cdot 700 = 639766400
\end{aligned}$$

Schritt 5: Nächstens haben wir 3 Möglichkeiten 6 Symbolen zu stellen:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 6 = 18 \\
&639766400 \cdot 18 = 11515795200
\end{aligned}$$

Schritt 6: Dann haben wir 22 Symbole am Anfang oder am Ende:

$$\begin{aligned}
&22 \cdot 2 = 44 \\
&11515795200 \cdot 44 = 506694988800
\end{aligned}$$

Da in diese Aufgabe ändert sich nur der Zahl der Symbole, kann man dazu ein Formel verwenden. Anzahl der Kombinationen in Schritt 4 kann man so berechnen:

$$k = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n - 1, \text{ wo n ist Anzahl der Symbole in Passwort minus 4.}$$

Dann gemäs der Informaton aus Schritten in (a) 1-6 bauen wir solche Funktion:

$$f(n) = 26^n \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n - 1\right) \cdot 18 \cdot 44$$

(b) 10 Symbole: f(6) = 685051624857600

(c) 12 Symbole: f(8) = 760798761663283200

(d) 14 Symbole: f(10) = 760269510350821785600

(e) 16 Symbole: f(12) = 710449496554891463884800