# Mathematatik: Diskrete Strukturen

## Lösungsblatt

Anton Bubnov, Eugen Kuzmenko

April 19, 2015

## Vertiefung:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 10)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(5^{31}, 10) &= \mathrm{mod}(5^{30} \cdot 5, 10)\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(2^{789}, 10) &= \mathrm{mod}(2^{516} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^{1}, 10)\\ &= \mathrm{mod}(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2, 10)\\ &= \mathrm{mod}(432, 10)\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(-23^{23}, 10) &= \mathrm{mod}(23^{16} \cdot 23^{4} \cdot 23^{2} \cdot (-23)^{1}, 11)\\ &= \mathrm{mod}(9 \cdot 7, 10)\\ &= \mathrm{mod}(63, 10)\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 10) &= \mathrm{mod}(5 \cdot 2 + 3, 10)\\ &= \mathrm{mod}(13, 10)\\ &= 3 && \text{(nach Theorem 1.2 (BM))}\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 11)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(5^{31}, 11) &= \mathrm{mod}(5^{30} \cdot 5, 11)\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(2^{789}, 11) &= \mathrm{mod}(2^{516} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^{1}, 11)\\ &= \mathrm{mod}(9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2, 11)\\ &= \mathrm{mod}(432, 11)\\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(-23^{23}, 11) &= \mathrm{mod}(23^{16} \cdot 23^{4} \cdot 23^{2} \cdot (-23)^{1}, 11)\\ &= \mathrm{mod}(4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, 11)\\ &= \mathrm{mod}(420, 11)\\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 11) &= \mathrm{mod}(5 \cdot 6 + 9, 11)\\ &= \mathrm{mod}(39, 11)\\ &= 6 && \text{(nach Theorem 1.2 (BM))}\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(7^{31} \cdot 2^{789}, 10)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(7^{31}, 10) &= \mathrm{mod}(7^{16} \cdot 7^{8} \cdot 7^{4} \cdot 7^{2} \cdot 7^{1}, 10)\\ &= \mathrm{mod}(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 7, 10)\\ &= \mathrm{mod}(63, 10)\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(2^{789}, 10) &= \mathrm{mod}(2^{516} \cdot 2^{256} \cdot 2^{16} \cdot 2^{1}, 10)\\ &= \mathrm{mod}(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2, 10)\\ &= \mathrm{mod}(432, 10)\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}(7^{31} \cdot 2^{789}, 10) &= \mathrm{mod}(3 \cdot 2, 10)\\ &= \mathrm{mod}(6, 10)\\ &= 6 \qquad \text{(nach Theorem 1.2 (BM))}\end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie kgV(178, 144).

$$\begin{aligned}178 &= 2 \cdot 89\\ 144 &= 2^4 \cdot 3^2\\ \mathrm{kgV}(178, 144) &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 89 = 12816 \qquad \text{(nach Lemma 1.5 (BM))}\end{aligned}$$

(e) Bestimmen Sie ggT(12877480, 24145275).

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(12877480, 24145275) &= \mathrm{ggT}(24145275 - 12877480, 12877480)\\ &= \mathrm{ggT}(12877480 - 11267795, 11267795)\\ &= \mathrm{ggT}(11267795 - 1609685, 1609685)\\ &= 1609685 \qquad \text{(nach Lemma 1.8 (BM))}\end{aligned}$$

(f) Wie sieht der $\frac{12877480}{24145275}$ zu äquivalente teilerfremde Bruch aus?

(g) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau einmal den Funktionswert 0 annehmen?

Für erste Stelle nehmen wir 0. Dann für die Reste (3 Stellen) sind nur zwei Kugeln {1,2} möglich. Dann haben wir:

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Also wenn 0 an die erste Stelle ist, haben wir 8 Varianten. Da es ist auch Möglich 0 an zweite, dritte und vierte Stelle stellen, haben wir:

$$8 \cdot 4 = 32$$

(h) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau zweimal den Funktionswert 0 annehmen?

Es gibt 6 Moeglichkeiten zwei 0 an 4 Stellen zu stellen. Da fuer jede diese Moeglichkeit gibt es auch 4 Moeglichkeiten {1,2} zu stellen. Dan haben wir:

$$6 \cdot 4 = 24$$