Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

11. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 26.06.2015 **Abgabe:** 03.07.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Ist $\langle \mathbb{R}_{>0}, f\rangle$ mit der Verknüpfung $f : (x, y) \mapsto \log_y x$ eine Algebra?

(b) Ist $\langle\{n|n \in \mathbb{N} \text{ ist eine ungerade Zahl}\}, f\rangle$ mit dem dreistelligen Operator $f : (x, y, z) \mapsto \mathrm{mod}(x^2 + 2y, z + 2)$ eine Algebra?

(c) Ist $\langle \mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot_8\rangle$ eine Algebra – und wenn nein, warum nicht?

(d) Bestimmen Sie eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Z}_{10} \setminus \{0\}$ mit maximaler Anzahl von Elementen, sodass $\langle A, \cdot_{10}\rangle$ eine Algebra ist.

(e) Bestimmen Sie das neutrale Element in der Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$.

(f) Wie viele inverse Elemente besitzt 2 in der Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$?

(g) Ist der Operator kgV assoziativ für die Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$ – und wenn nein, warum nicht?

(h) Können Sie die Verknüpfungstabelle für $\circ$ so ergänzen, dass $\circ$ assoziativ auf $\{a, b, c, d\}$ ist:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	
c	c		c	b
d	d	c		d

(i) Gibt es eine Verknüpfung $\circ$ für die Algebra $\langle\{1, \dots, n\}, \circ\rangle$ an, sodass jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ genau $k - 1$ linksinverse Elemente besitzt? - Und wenn ja, welche?

(j) Gibt es eine Verknüpfung $\circ$ für die Algebra $\langle\{1, \dots, n\}, \circ\rangle$ an, sodass jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ genau $k - 1$ rechtsinverse Elemente besitzt? - Und wenn ja, welche?

Lösung:

(a) Nein, $\langle \mathbb{R}_{>0}, f \rangle$ ist keine Algebra. Wir wählen $x = \frac{1}{2}$ und $y = 2$. Somit erhalten wir

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Da -1 $\notin \mathbb{R}_{>0}$ liegt also keine Algebra vor. $\square$

(b) Nein, $\langle \{n | n \in \mathbb{N} \text{ ist eine ungerade Zahl}\}, f \rangle$ ist keine Algebra. Wir wählen $x = 1$ und $y = z = 3$ und erhalten

$$f(x, y, z) = \mathrm{mod}(x^2 + 2y, z + 2) = \mathrm{mod}(1^2 + 6, 3 + 2) = \mathrm{mod}(7, 5) = 2$$

Da $2 \notin \{n | n \in \mathbb{N} \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$ liegt also keine Algebra vor. $\square$

(c) Nein, $\langle \mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot_8 \rangle$ ist keine Algebra. Es gilt

$$2 \cdot_8 4 = \mathrm{mod}(8, 8) = 0$$

Da $0 \notin \mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}$ liegt also keine Algebra vor. $\square$

(d) Da $2 \cdot_{10} 5 = 0$ ist $\langle \mathbb{Z}_{10} \setminus \{0\}, \cdot_{10} \rangle$ keine Algebra. Wir müssen also mindestens ein Element entfernen. Wir wählen $A =_{\text{def}} \mathbb{Z}_{10} \setminus \{0, 5\}$. Da keines der möglichen Produkte durch 5 teilbar ist, sind alle möglichen Produkte von Null verschieden. Somit handelt es sich um eine Algebra. $\square$

(e) Das neutrale Element in der Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV} \rangle$ ist 1. Sei dazu $n \in \mathbb{N}_+$. Wir wollen $\mathrm{kgV}(1, n)$ bestimmen. Es gilt $\mathrm{kgV}(1, n) \geq \max\{1, n\} = n$. Da $1 \mid n$ gilt folglich $\mathrm{kgV}(1, n) = n$. Somit ist 1 neutrales Element. $\square$

(f) 2 besitzt in $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV} \rangle$ kein inverses Element. Dazu überlegen wir uns, dass jedes Vielfache von 2 gerade ist.
Da 1 ungerade ist, kann es kein $m \in \mathbb{N}_+$ geben, sodass $\mathrm{kgV}(m, n) = 1$. $\square$

(g) *Behauptung:* kgV ist assoziativ für die Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV} \rangle$
Beweis. Seien $x, y, z \in \mathbb{N}_+$ beliebig mit den Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} x &= p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n} \\ y &= p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n} \\ z &= p_1^{g_1} \cdots p_n^{g_n} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(x, y), z) &= \mathrm{kgV}(p_1^{\max\{e_1, f_1\}} \cdots p_n^{\max\{e_n, f_n\}}, z) \\ &= p_1^{\max\{\max\{e_1, f_1\}, g_1\}} \cdots p_n^{\max\{\max\{e_n, f_n\}, g_n\}} \\ &= p_1^{\max\{e_1, f_1, g_1\}} \cdots p_n^{\max\{e_n, f_n, g_n\}} \\ &= p_1^{\max\{e_1, \max\{f_1, g_1\}\}} \cdots p_n^{\max\{e_n, \max\{f_n, g_n\}\}} \\ &= \mathrm{kgV}(x, p_1^{\max\{f_1, g_1\}} \cdots p_n^{\max\{f_n, g_n\}}) \\ &= \mathrm{kgV}(x, \mathrm{kgV}(y, z)) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

(h) Nein, die Verknüpfungstabelle kann nicht assoziativ ergänzt werden, denn es gilt

$$(b \circ c) \circ d = d \circ d = d$$

und andererseits

$$b \circ (c \circ d) = b \circ b = b$$

Damit ist $\circ$ nicht assoziativ. $\square$

(i) Ja eine solche Verknüpfung $\circ_{(i)}$ gibt es. Das neutrale Element in einer Algebra ist selbstinvers und hat genau ein links- bzw. rechtsinverses Element. Da das Element k genau $k-1$ linksinverse Elemente haben soll, folgt, dass 2 das neutrale Element sein muss. Damit sind in einer Verknüpfungstabelle die zweite Zeile und die zweite Spalte bereits eindeutig festgelegt. Nun muss nur darauf geachtet werden, dass in der k-ten Spalte genau $k-1$ mal das Element 2 steht. Der Einfachheit halber füllen wir die restlichen Zellen mit 1 auf. Wir erhalten

$\circ_{(i)}$	1	2	3	$\cdots$	n-2	n-1	n
1	1	1	1	$\cdots$	1	1	2
2	1	2	3	$\cdots$	n-2	n-1	n
3	1	3	1	$\cdots$	1	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-2	1	n-2	1	$\cdots$	2	2	2
n-1	1	n-1	2	$\cdots$	2	2	2
n	1	n	2	$\cdots$	2	2	2

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

(j) Ja eine solche Verknüpfung $\circ_{(j)}$ gibt es. Für $x, y \in [n]$ definieren wir

$$x \circ_{(j)} y =_{\text{def}} y \circ_{(i)} x$$

Die rechtsinversen Elemente unter $\circ_{(j)}$ sind gerade die linksinversen Elemente unter $\circ_{(i)}$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Kreativität: **10 Punkte**

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\|V\| \geq 2$. Mit $W(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Wege in G.

Bestimmen Sie eine Verknüpfung $+$ auf $W(G)$, sodass $\langle W(G), +\rangle$ eine Algebra ist und es für alle Alphabete Σ mit $\|\Sigma\| \geq 1$ stets einen *injektiven* Homomorphismus von $\langle W(G), +\rangle$ auf $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$ gibt.

Lösung:

Wir zeigen die Behauptung für den Fall $\|\Sigma\| \geq 2$. Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\|V\| = n$.

Fall 1: $\|V\| = 2$

Sei also $V = \{v_1, v_2\}$ und da G zusammenhängend ist $E = \{\{v_1, v_2\}\}$. Wir fixieren $a \in \Sigma$ beliebig. Für einen Weg W der Länge k definieren wir $f : W(G) \to \Sigma^*$ durch

$$f(W) =_{\text{def}} \begin{cases} a^{2k}, & \text{falls } W \text{ mit } v_1 \text{ beginnt} \\ a^{2k+1} & \text{falls } W \text{ mit } v_2 \text{ beginnt} \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass f injektiv ist. Für zwei Wege W_1, W_2 definieren wir nun

$$W_1 + W_2 =_{\text{def}} f^{-1}(f(W_1) \circ f(W_2))$$

Durch die Bijektivität von f existiert f^{-1}. Weiter gilt

$$f(W_1 + W_2) = f(f^{-1}(f(W_1) \circ f(W_2))) = f(W_1) \circ f(W_2)$$

Damit ist f ein Homomorphismus von $\langle W(G), +\rangle$ auf $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$.

Fall 2: $\|V\| \geq 3$

Wir beginnen unseren Beweis mit einer Vorüberlegung. Gegeben seien zwei Wege W_1 und W_2. Falls diese sich nicht unmittelbar zusammensetzen lassen, genügt es nicht, eine kürzesten Weg zwischen dem letzten Knoten von W_1 und dem ersten Knoten von W_2 zu wählen, der beide verbindet. Dies liegt daran, dass f später ein fixierter Homomorphismus ist und $f(W_1)$ und $f(W_2)$ konkateniert werden. Diese Konkatenation muss auch für W_1 und ein beliebiges $W_3 \neq W_2$ gelten, obwohl ein kürzester Weg hier vermutlich anders verläuft. Wir brauchen also einen fixierten Knoten, über den eine solche Verbindung zwischen W_1 und W_2 auf jeden Fall läuft. Da dieser Knoten in der späteren Konkatenation allerdings mehrfach auftauchen würde, benötigen wir sogar zwei Knoten, über die eine Verbindung zwischen W_1 und W_2 auf jeden Fall läuft.
Weiterhin wird auf diese Weise nur am Ende von W_1 und am Anfang von W_2 etwas verändert. Da später Verträglichkeit mit f herrschen muss und W_1 auch zweiter Operand von $+$ sein kann, brauchen ferner alle durch f codierten Wege den gleichen Anfangs- und den gleichen Endknoten.

Durch diese Vorüberlegungen motiviert fixieren wir zunächst einen Knoten $v_e \in V$ mit $deg_g(v_e) \geq 2$. Dieser existiert, da G zusammenhängend ist und $\|V\| \geq 3$ gilt. Wir fixieren weiter zwei Nachbarn v_a, v_h von v_e. Im weiteren Verlauf werden v_e als End- und v_a als Anfangsknoten fungieren, v_h brauchen wir später als Hilfsknoten, um die Anfangs- und Endknoten von Wegen zu codieren.

Für alle Paare $(v_i, v_j) \in V \times V$ fixieren wir einen kürzesten Weg von v_i nach v_j (existiert, da G zusammenhängend ist) und bezeichnen diesen mit W_j^i. Weiter fixieren wir diese Wege so, dass W_i^j gerade W_j^i rückwärts durchlaufen ist.

Für zwei Wege $W_1 = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ und $W_2 = (v_{i_r}, v_{i_{r+1}}, \ldots, v_{i_s})$ mit $i_1, \ldots, i_s \in [n]$ definieren wir den Weg

$$W_1W_2 =_{\text{def}} (v_{i_1}, \ldots, v_{i_{r-1}, v_{i_r}}, v_{i_{r+1}}, \ldots, v_{i_s})$$

Somit können wir für $i \in [n]$ definieren:

$$\widetilde{W}_i^a =_{\text{def}} \begin{cases} W_i^a W_a^i W_i^a & \text{falls } i \neq a \\ (v_a, v_e, v_h, v_e, v_h, v_e, v_a) & \text{falls } i = a \end{cases}, \quad \widetilde{W}_e^i =_{\text{def}} \begin{cases} W_e^i W_i^e W_e^i & \text{falls } i \neq e \\ (v_e, v_a, v_e, v_h, v_e) & \text{falls } i = e \end{cases}$$

Indem wir diese Passagen später an Wege anfügen, codieren wir die Anfangs- und Endknoten der Wege. Mit diesen Setzungen sind wir nun in der Lage, unsere Verknüpfung auf $W(G)$ zu definieren. Für zwei beliebige Wege $W_1 = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}), W_2 = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_s})$ definieren wir

$$W_1 + W_2 =_{\text{def}} W_1 \widetilde{W}_e^{i_r}(v_e, v_a)\widetilde{W}_{j_1}^a W_2$$

Da $\|\Sigma\| \geq 2$ können wir zwei Elemente $0, 1 \in \Sigma$ fixieren.

Weiterhin definieren wir für einen Knoten v_i

$$\operatorname{code}(v_i) =_{\text{def}} 0 \cdots 0 \underbrace{1}_{\text{Stelle } i} 0 \cdots 0, \quad |\operatorname{code}(v_i)| = n$$

und schließlich für einen Weg $W_1 = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$

$$\operatorname{code}(W_1) =_{\text{def}} \operatorname{code}(v_{i_1}) \cdots \operatorname{code}(v_{i_r})$$

Unseren Homomorphismus können wir für einen Weg $W_1 = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ definieren als

$$f(W_1) =_{\text{def}} \operatorname{code}\left(\widetilde{W}_{i_1}^a W_1 \widetilde{W}_e^{i_r}\right)$$

Es gilt nun für beliebige Wege $W_1 = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}), W_2 = (v_{j_1}, \dots, v_{j_s})$

$$\begin{aligned}
f(W_1 + W_2) &= f\left(W_1 \widetilde{W}_e^{i_r}(v_e, v_a)\widetilde{W}_{j_1}^a W_2\right) \\
&= \operatorname{code}\left(\widetilde{W}_{i_1}^a W_1 \widetilde{W}_e^{i_r}(v_e, v_a)\widetilde{W}_{j_1}^a W_2 \widetilde{W}_e^{j_s}\right) \\
&= \operatorname{code}\left(\widetilde{W}_{i_1}^a W_1 \widetilde{W}_e^{i_r}\right) \operatorname{code}\left(\widetilde{W}_{j_1}^a W_2 \widetilde{W}_e^{j_s}\right) \\
&= f(W_1) \circ f(W_2)
\end{aligned}$$

Somit ist f ein Homomorphismus von $\langle W(G), +\rangle$ auf $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$.
Wir müssen nun noch zeigen, dass f injektiv ist. Dafür benötigen wir das folgende

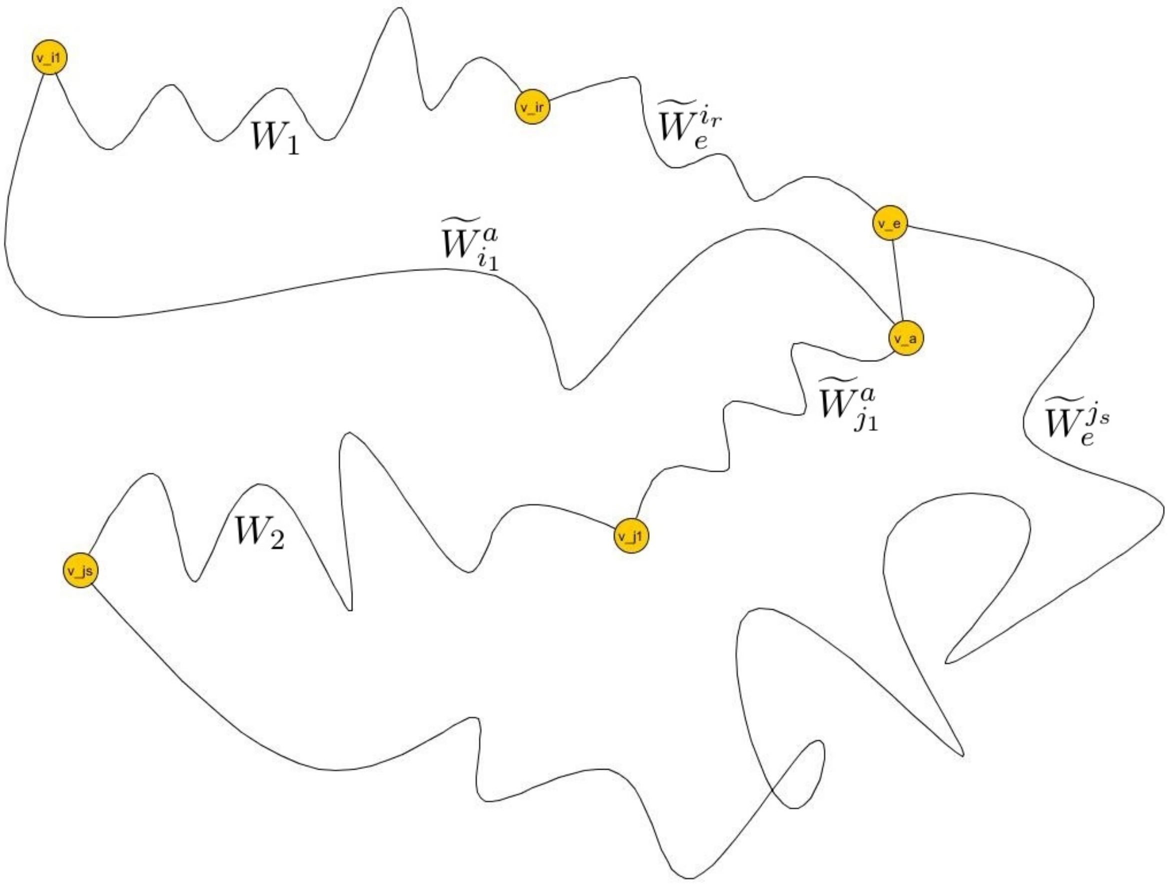
Lemma 1. Sei $W_1 = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in W(G)$ ein beliebiger Weg. Dann kann man an $f(W_1)$ bereits den Anfangs- und Endknoten von W_1 ablesen.

Beweis. Sei zunächst $i_1 \neq a$. dann beginnt $f(W_1)$ mit $\operatorname{code}\left(\widetilde{W}_{i_1}^a\right) = \operatorname{code}\left(W_{i_1}^a W_a^{i_1} W_{i_1}^a\right)$. Da wir für die W_i^a kürzeste Wege gewählt haben, sind diese knotendisjunkt. In $W_{i_1}^a W_a^{i_1}$ kommen also genau zwei a vor. Da $W_a^{i_1}$ gerade $W_{i_1}^a$ rückwärts ist, steht i_1 genau in der Mitte zwischen beiden a's. Somit können wir i_1 eindeutig ablesen.
Für $i_r \neq e$ können wir den Endknoten analog ablesen.
Sei nun $i_1 = a$. Dann beginnt $f(W_1)$ mit $\operatorname{code}((v_a, v_e, v_h, v_e, v_h, v_e, v_a))$. Man sieht, dass hier zwischen den beiden ersten Vorkommen von a kein Element genau einmal vorkommt, was für $i_1 \neq a$ stets der Fall war. Somit haben wir ein eindeutiges Merkmal und können $i_1 = a$ ablesen.
Sei nun $i_r = e$. Dann endet $f(W_1)$ mit $\operatorname{code}((v_e, v_a, v_e, v_h, v_e))$. Der Schluss $\operatorname{code}((v_e, v_h, v_e))$ würde implizieren, dass W_1 mit v_h endet. Dann müsste $f(W_1)$ nach Definition von $\widetilde{W}_e^h$ aber auf $\operatorname{code}((v_h, v_e, v_h, v_e))$ enden, was aber nicht der Fall ist. Somit haben wir ein eindeutiges Merkmal und können $i_r = e$ ablesen.
Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Seien nun $W_1 = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}), W_2 = (v_{j_1}, \dots, v_{j_s})$ beliebig mit $f(W_1) = f(W_2)$.
Nach **Lemma 1** folgt $i_1 = j_1$ und $i_r = j_s$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(W_1) = f(W_2) \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{i_1} W_1 \widetilde{W}^{i_r}_e\right) = \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{j_1} W_2 \widetilde{W}^{j_s}_e\right) \\
&\Longrightarrow \quad \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{i_1}\right) \mathrm{code}\left(W_1\right) \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^{i_r}_e\right) = \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{j_1}\right) \mathrm{code}\left(W_2\right) \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^{j_s}_e\right) \\
&\Longrightarrow \quad \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{i_1}\right) \mathrm{code}\left(W_1\right) \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^{i_r}_e\right) = \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^a_{i_1}\right) \mathrm{code}\left(W_2\right) \mathrm{code}\left(\widetilde{W}^{i_r}_e\right) \\
&\Longrightarrow \quad \mathrm{code}\left(W_1\right) = \mathrm{code}\left(W_2\right) \\
&\Longrightarrow \quad W_1 = W_2
\end{aligned}$$

Somit ist f injektiv. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$
Hier noch eine Grafik zur Veranschaulichung der Konstruktionen:



Transfer: **10 Punkte**

Sie planen, mit anderen Kommilitonen unter dem Projektnamen `www.kopfhoch.de` ein soziales Netzwerk zur Vermittlung von Nachhilfe für in Aus- oder Weiterbildung (in Schule, Beruf, Universität etc.) befindliche Freunde aufzubauen. Neben jeder Menge Kommunikationsmöglichkeiten soll Ihr Netzwerk für jede registrierte Person eine Seite mit zwei Basisinformationen beinhalten: eine Liste von Wissensgebieten, in den die jeweilige Person Nachhilfe geben kann; und eine zweite Liste, in der die Person eine andere Person für Nachhilfe (in irgendeinem Wissensgebiet) empfiehlt.

Als Informatiker sind Sie für die Anbindung der Website an eine relationale Datenbank verantwortlich. Diese enthält unter anderem zwei Relationen:

- $W \subseteq \texttt{PersonID} \times \texttt{DomainID}$ (als Sammlung der Listen von Wissensgebieten)
- $E \subseteq \texttt{PersonID} \times \texttt{PersonID}$ (als Sammlung der Listen von Empfehlungen)

Hierbei steht `DomainID` für eine Menge eindeutiger Namen für Wissensgebiete und `PersonID` für eine Menge eindeutiger Namen für die registrierten Nutzer. Zur Optimierung der Zugriffszeiten auf die Website müssen in regelmäßigen Abständen Tabellen für vordefinierte Anfragen aus der Datenbank berechnet werden. Insbesondere gehört dazu die Anfrage: *Für welche Fächer kann Nutzer X über drei Ecken Nachhilfe bekommen?*

Um dies konzeptionell und mathematisch umzusetzen, erweitern Sie die übliche Relationenalgebra um eine spezielle Operation TRANSITIVE JOIN: Für Relationen $R \subseteq \texttt{A} \times \texttt{B}$ und $S \subseteq \texttt{B} \times \texttt{C}$ definieren Sie

$$R \bowtie S =_{\text{def}} \{\ (a, c) \mid \text{es gibt ein } b \in \texttt{B} \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\ \}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bowtie$ assoziativ ist, d.h., dass $(R \bowtie S) \bowtie T = R \bowtie (S \bowtie T)$ für $R \subseteq \texttt{A} \times \texttt{B}, S \subseteq \texttt{B} \times \texttt{C}$ und $T \subseteq \texttt{C} \times \texttt{D}$ gilt.

(b) In welcher Reihenfolge würden Sie $E \bowtie E \bowtie E \bowtie E \bowtie W$ (was wir als Vorberechnung zu obiger Anfrage interpretieren) berechnen, um die Platzkosten möglichst klein zu halten, wenn die Tabelleninhalte den Relationen

E	PersonID	PersonID
1	Abner	Betty
2	Ashkan	Abner
3	Betty	Linda
4	Elshad	Ashkan
5	Evette	Evette
6	Evette	Sasha
7	Linda	Kenzo
8	Sasha	Elshad

W	PersonID	DomainID
1	Abner	Ruby
2	Ashkan	PHP
3	Betty	SQL
4	Elshad	Java
5	Evette	Python
6	Kenzo	Typo3
7	Linda	LaTeX
8	Sasha	C/C++

entsprechen?

Die Platzkosten für eine Ausführung von TRANSITIVE JOIN auf R und S seien dabei $\|R \bowtie S\|$. Die Gesamtplatzkosten für die Ausführung einer Folge von TRANSITIVE JOINS sei als die Summe der Platzkosten der einzelnen Ausführungen definiert.

Lösung:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}(R \bowtie S) \bowtie T &= \{(a,d) \mid \text{es gibt ein } c \in C \text{ mit } (a,c) \in R \bowtie S \text{ und } (c,d) \in T\}\\ &= \{(a,d) \mid \text{es gibt ein } c \in C \text{ und ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R,\ (b,c) \in S \text{ und } (c,d) \in T\}\\ &= \{(a,d) \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ und ein } c \in C \text{ mit } (a,b) \in R,\ (b,c) \in S \text{ und } (c,d) \in T\}\\ &= \{(a,d) \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,d) \in S \bowtie T\}\\ &= R \bowtie (S \bowtie T)\end{aligned}$$

   Somit ist $\bowtie$ assoziativ. □

2. Wir identifizieren Personen mit Zahlen und Wissensgebiete mit Buchstaben wie folgt:

1 ↔ Abner	A ↔ Ruby
2 ↔ Ashkan	B ↔ PHP
3 ↔ Betty	C ↔ SQL
4 ↔ Elshad	D ↔ Java
5 ↔ Evette	E ↔ Python
6 ↔ Linda	F ↔ Typo3
7 ↔ Sasha	G ↔ LaTeX
8 ↔ Kenzo	H ↔ C/C++

   Wir bestimmen zunächst die Größe der Tabellen in allen möglichen Zwischenergebnissen.

   - $E \bowtie E = \{(1,6),(2,3),(3,8),(4,1),(5,5),(5,7),(5,4),(7,2)\}$
     $\implies ||E \bowtie E|| = 8$
   - $E \bowtie E \bowtie E = \{(1,8),(2,6),(4,3),(5,5),(5,7),(5,4),(5,2),(7,1)\}$
     $\implies ||E \bowtie E \bowtie E|| = 8$
   - $E \bowtie E \bowtie E \bowtie E = \{(2,8),(4,6),(5,5),(5,7),(5,4),(5,2),(5,1),(7,3)\}$
     $\implies ||E \bowtie E \bowtie E \bowtie E|| = 8$
   - $E \bowtie W = \{(1,C),(2,A),(3,G),(4,B),(5,E),(5,H),(6,F),(7,D)\}$
     $\implies ||E \bowtie W|| = 8$
   - $E \bowtie E \bowtie W = \{(1,G),(2,C),(3,F),(4,A),(5,E),(5,H),(5,D),(7,B)\}$
     $\implies ||E \bowtie E \bowtie W|| = 8$
   - $E \bowtie E \bowtie E \bowtie W = \{(1,F),(2,G),(4,C),(5,E),(5,H),(5,D),(5,B),(7,A)\}$
     $\implies ||E \bowtie E \bowtie E \bowtie W|| = 8$
   - $E \bowtie E \bowtie E \bowtie E \bowtie W = \{(2,F),(4,G),(5,E),(5,H),(5,D),(5,B),(5,A),(7,C)\}$
     $\implies ||E \bowtie E \bowtie E \bowtie E \bowtie W|| = 8$

   Egal in welcher Reihenfolge wir die Joins ausführen, erhalten wir stets Tabellen der Länge 8. Effizienz erreichen wir in diesem Fall nicht, indem wir kleinere Tabellen erhalten, sondern indem wir uns bereits bestimmte Zwischenergebnisse merken und später wieder verwenden. Der einzige Join, der in unserem Fall mehrfach auftreten kann, ist $E \bowtie E$. Dieser kann höchstens zwei mal auftreten, zum Beispiel wenn wir die folgende Reihenfolge wählen:

$$((E \bowtie_1 E) \bowtie_2 (E \bowtie_3 E)) \bowtie_4 W$$

   Wenn wir $\bowtie_1$ ausgeführt haben, müssen wir $\bowtie_3$ nicht ausführen. Es genügt also die Joins

$\bowtie_1$, $\bowtie_2$ und $\bowtie_4$ auszuführen, was nach obigen Überlegungen genau den Platz $8+8+8 = 24$ benötigt. $\square$