Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

# 11. Übungsblatt

**Ausgabe:** 26.06.2015 **Abgabe:** 03.07.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

## Vertiefung: 10 Punkte

(a) Ist $\langle \mathbb{R}_{>0}, f\rangle$ mit der Verknüpfung $f : (x, y) \mapsto \log_y x$ eine Algebra?

(b) Ist $\langle \{n|n \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl$\}, f\rangle$ mit dem dreistelligen Operator $f : (x, y, z) \mapsto \mathrm{mod}(x^2 + 2y, z + 2)$ eine Algebra?

(c) Ist $\langle \mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot_8\rangle$ eine Algebra – und wenn nein, warum nicht?

(d) Bestimmen Sie eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Z}_{10} \setminus \{0\}$ mit maximaler Anzahl von Elementen, sodass $\langle A, \cdot_{10}\rangle$ eine Algebra ist.

(e) Bestimmen Sie das neutrale Element in der Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$.

(f) Wie viele inverse Elemente besitzt 2 in der Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$?

(g) Ist der Operator kgV assoziativ für die Algebra $\langle \mathbb{N}_+, \mathrm{kgV}\rangle$ – und wenn nein, warum nicht?

(h) Können Sie die Verknüpfungstabelle für $\circ$ so ergänzen, dass $\circ$ assoziativ auf $\{a, b, c, d\}$ ist:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $d$ | |
| $c$ | $c$ | | $c$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | | $d$ |

(i) Gibt es eine Verknüpfung $\circ$ für die Algebra $\langle \{1, \dots, n\}, \circ\rangle$ an, sodass jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ genau $k - 1$ linksinverse Elemente besitzt? - Und wenn ja, welche?

(j) Gibt es eine Verknüpfung $\circ$ für die Algebra $\langle \{1, \dots, n\}, \circ\rangle$ an, sodass jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ genau $k - 1$ rechtsinverse Elemente besitzt? - Und wenn ja, welche?

## Kreativität: 10 Punkte

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\|V\| \geq 2$. Mit $W(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Wege in $G$.

Bestimmen Sie eine Verknüpfung $+$ auf $W(G)$, sodass $\langle W(G), +\rangle$ eine Algebra ist und es für alle Alphabete $\Sigma$ mit $\|\Sigma\| \geq 1$ stets einen *injektiven* Homomorphismus von $\langle W(G), +\rangle$ auf $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$ gibt.

**Transfer:** **10 Punkte**

Sie planen, mit anderen Kommilitonen unter dem Projektnamen `www.kopfhoch.de` ein soziales Netzwerk zur Vermittlung von Nachhilfe für in Aus- oder Weiterbildung (in Schule, Beruf, Universität etc.) befindliche Freunde aufzubauen. Neben jeder Menge Kommunikationsmöglichkeiten soll Ihr Netzwerk für jede registrierte Person eine Seite mit zwei Basisinformationen beinhalten: eine Liste von Wissensgebieten, in den die jeweilige Person Nachhilfe geben kann; und eine zweite Liste, in der die Person eine andere Person für Nachhilfe (in irgendeinem Wissensgebiet) empfiehlt.

Als Informatiker sind Sie für die Anbindung der Website an eine relationale Datenbank verantwortlich. Diese enthält unter anderem zwei Relationen:

- $W \subseteq \texttt{PersonID} \times \texttt{DomainID}$ (als Sammlung der Listen von Wissensgebieten)
- $E \subseteq \texttt{PersonID} \times \texttt{PersonID}$ (als Sammlung der Listen von Empfehlungen)

Hierbei steht `DomainID` für eine Menge eindeutiger Namen für Wissensgebiete und `PersonID` für eine Menge eindeutiger Namen für die registrierten Nutzer. Zur Optimierung der Zugriffszeiten auf die Website müssen in regelmäßigen Abständen Tabellen für vordefinierte Anfragen aus der Datenbank berechnet werden. Insbesondere gehört dazu die Anfrage: *Für welche Fächer kann Nutzer X über drei Ecken Nachhilfe bekommen?*

Um dies konzeptionell und mathematisch umzusetzen, erweitern Sie die übliche Relationenalgebra um eine spezielle Operation TRANSITIVE JOIN: Für Relationen $R \subseteq \texttt{A} \times \texttt{B}$ und $S \subseteq \texttt{B} \times \texttt{C}$ definieren Sie

$$R \bowtie S =_{\text{def}} \{ (a, c) \mid \text{es gibt ein } b \in \texttt{B} \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S \}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bowtie$ assoziativ ist, d.h., dass $(R \bowtie S) \bowtie T = R \bowtie (S \bowtie T)$ für $R \subseteq \texttt{A} \times \texttt{B}, S \subseteq \texttt{B} \times \texttt{C}$ und $T \subseteq \texttt{C} \times \texttt{D}$ gilt.

(b) In welcher Reihenfolge würden Sie $E \bowtie E \bowtie E \bowtie E \bowtie W$ (was wir als Vorberechnung zu obiger Anfrage interpretieren) berechnen, um die Platzkosten möglichst klein zu halten, wenn die Tabelleninhalte den Relationen

| **E** | PersonID | PersonID |
|---|---|---|
| 1 | Abner | Betty |
| 2 | Ashkan | Abner |
| 3 | Betty | Linda |
| 4 | Elshad | Ashkan |
| 5 | Evette | Evette |
| 6 | Evette | Sasha |
| 7 | Linda | Kenzo |
| 8 | Sasha | Elshad |

| **W** | PersonID | DomainID |
|---|---|---|
| 1 | Abner | Ruby |
| 2 | Ashkan | PHP |
| 3 | Betty | SQL |
| 4 | Elshad | Java |
| 5 | Evette | Python |
| 6 | Kenzo | Typo3 |
| 7 | Linda | LaTeX |
| 8 | Sasha | C/C++ |

entsprechen?

Die Platzkosten für eine Ausführung von TRANSITIVE JOIN auf $R$ und $S$ seien dabei $\|R \bowtie S\|$. Die Gesamtplatzkosten für die Ausführung einer Folge von TRANSITIVE JOINS sei als die Summe der Platzkosten der einzelnen Ausführungen definiert.