Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

10. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 19.06.2015 **Abgabe:** 26.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Bestimmen Sie $\chi(Q_3)$.

(b) Bestimmen Sie $\chi(Q_4)$.

(c) Wie viele verschiedene Färbungen mit k Farben hat ein Baum mit n Knoten?

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Rekursionsformel und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels Induktion über n.

(d) Bestimmen Sie $\chi'(Q_3)$.

(e) Gibt es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $\chi(G) \leq 2$ und $\chi'(G) = n$?

(f) Gilt $\chi'(G) = k$ für jeden k-regulären Graphen G?

(g) Enthält ein Baum höchstens ein perfektes Matching?

(h) Welche Gitter $M_{n,m}$ enthalten perfekte Matchings?

(i) Wie viele perfekte Matchings enthält der Q_3?

(j) Wie viele perfekte Matchings enthält der K_{2n}?

Lösung:

(a) Jeder Q_d ist bipartit. Somit gilt auch $\chi(Q_3) = 2$.

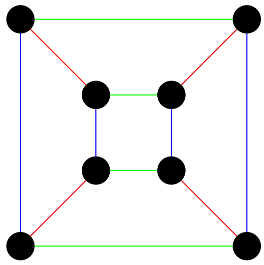
(b) Jeder Q_d ist bipartit. Somit gilt auch $\chi(Q_4) = 2$.

(c) Sei $C_{n,k}$ die Zahl der Färbungen eines Baumes mit n Knoten und k Farben. Es gilt $C_{n,k} = k \cdot (k-1)^{n-1}$. Beweis durch Induktion über die Zahl n der Knoten.

- *Induktionsanfang:* $n = 1$. Der Baum mit 1 Knoten hat für $k \geq 1$ genau k Färbungen.
- *Induktionsvoraussetzung:* Für einen Baum mit $n-1$ Knoten gibt es genau $C_{n-1,k} = k \cdot (k-1)^{n-2}$ Färbungen mit k Farben.
- *Induktionsschritt:* $n-1 \to n$. Sei $G = (V, E)$ mit $\|V\| = n$ ein Baum mit n Knoten. Man erhält einen Baum $G' = (V', E')$ mit $\|V'\| = n-1$ mit $n-1$ Knoten aus G, indem ein beliebiger Blattknoten entfernt wird (entfernen von inneren Knoten würde den Zusammenhang zerstören). Für G' gilt nun die Induktionsvoraussetzung. Der entfernte Knoten hatte genau einen adjazenten Knoten v und somit $k-1$ Mögliche Färbungen (jede Farbe außer der, welche v besitzt). Es gilt also insgesamt:

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} \cdot (k-1) \stackrel{\text{(IV)}}{=} k \cdot (k-1)^{n-2} \cdot (k-1) = k \cdot (k-1)^{n-1}$$

(d) Mit dem Theorem von VIZING folgt $\Delta(Q_3) \leq \chi'(Q_3) \leq \Delta(Q_3) + 1$ mit $\Delta(Q_3) = 3$, also $3 \leq \chi'(Q_3) \leq 4$. Folgende Abbildung zeigt, dass drei Farben für einen Kantenfärbung ausreichen, also gilt $\chi'(Q_3) = 3$.



(e) Ja, für den $K_{1,n}$ gilt $\chi(K_{1,n}) = 2$, da der Graph per Definition bipartit ist. Weiterhin sind alle n Kanten dieses Graphen zum selben Knoten inzident, mithin gilt $\chi'(K_{1,n}) = n$.

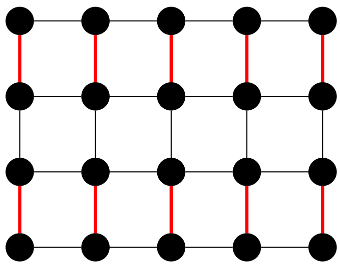
(f) Nein, Gegenbeispiel: Für den 4-regulären Graphen K_5 gibt es keine Kantenfärbung mit 4 Farben (siehe Beispiel aus der Vorlesung).

(g) Für ein perfektes Matching M muss gelten $\|M\| = \frac{1}{2}\|V\|$, also muss $\|V\|$ gerade sein. Damit ist aber $\|E\| = \|V\| - 1$ ungerade. Es kann also kein zweites perfektes Matching im Baum geben, da der einzige Kandidat, das Komplement $\overline{M} =_{\text{def}} E \setminus M$ von M höchstens Kardinalitat $\|\overline{M}\| = \frac{1}{2}\|V\| - 1$ besitzt.

(h) Ein Gitter $M_{n,m}$ enthält genau dann ein perfektes Matching, wenn n oder m gerade sind. Das Gitter enthält kein perfektes Matching, wenn n und m ungerade sind: Sei $n = 2k+1$ und $m = 2\ell + 1$. Dann gilt für die Gesamtzahl der Knoten

$$\|V\| = n \cdot m = (2k+1)(2\ell+1) = \underbrace{4k\ell + 2k + 2\ell}_{\text{gerade}} + 1 \text{ ist ungerade}$$

also kann es kein perfektes Matching geben. Ist n oder m gerade (o.B.d.A sei n gerade), so genügt es, für ein perfektes Matching die Kanten $1, 3, \ldots, n-1$ in jeder Spalte zu wählen. Man erhält nun $\|M\| = m \cdot \frac{n}{2} = \frac{m \cdot n}{2} = \frac{\|V\|}{2}$. Folgende Abbildung veranschaulicht ein solches perfektes Matching im $M_{4,5}$.



(i) Der Q_3 enthält 9 perfekte Matchings. Für ein perfektes Matching im Q_3 gibt es genau zwei Möglichkeiten:

i. Es gibt genau eine Dimension d_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ durch die alle Kanten des Matchings verlaufen. Für jedes d_i gibt es hier genau ein perfektes Matching.

ii. Es gibt genau eine Dimension d_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ durch die keine Kante des Matchings verläuft. Die Kanten der Matchings in den beiden Q_2, die durch einen Schnitt entlang d_i entstehen, stehen senkrecht zueinander, da sonst Fall i. eintreten würde.

Es gibt also für jedes d_i zwei perfekte Matchings, die sich darin unterscheiden, welcher Q_2 die vertikalen und welcher die horizontalen Kanten besitzt.

Insgesamt ergeben sich also $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$ perfekte Matchings im Q_3. Es tritt immer einer der obigen Fälle ein, da bei der Zuordnung der 4 Kanten des Matchings auf die 3 Dimensionen, welche die Kanten kreuzen können mindestens eine Dimension von zwei Kanten gekreuzt wird und somit keine Kanten in einer „benachbarten" Dimension zugelassen werden können.

(j) Der K_{2n} enthält genau $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ perfekte Matchings. Beweis durch Induktion.

- *Induktionsanfang:* $n = 1$. Der K_2 enthält genau $1 = \frac{2!}{2^1 \cdot 1!}$ perfektes Matching.
- *Induktionsvoraussetzung:* Der $K_{2(n-1)}$ enthält genau $\frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!}$ perfekte Matchings.
- *Induktionsschritt:* $n-1 \to n$. Für ein perfektes Matching im K_{2n} kann zunächst jede beliebige Kante ausgewählt werden ($\binom{2n}{2}$ Möglichkeiten). Der anschließend verbleibende Graph für die Wahl weiterer Kanten des Matchings entspricht einem $K_{2(n-1)}$, also kann die Induktionsvoraussetzung für die Anzahl der perfekten Matchings in diesem Graphen angewendet werden. Man muss nun noch durch n teilen, da die jedes Matching n Kanten besitzt und die Reihenfolge nicht relevant ist (Reihenfolge der anderen $n-1$ Kanten ist in der IV bereits berücksichtigt). Es gilt nun

$$\binom{2n}{2} \cdot \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Kreativität: **10 Punkte**

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\deg_G(v) > 0$ für alle Knoten $v \in V$. Eine *Kantenüberdeckung* $F \subseteq E$ von G ist eine Menge von Kanten in G, sodass jeder Knoten von V mit einer Kante aus F inzident ist, d.h., für alle $v \in V$ gibt es ein $e \in F$ mit $v \in e$.

Es seien M ein Matching in G mit maximaler Größe und F eine Kantenüberdeckung von G mit minimaler Größe. Zeigen Sie, dass dann stets

$$\|V\| = \|M\| + \|F\|$$

gilt.

Lösung:

Es sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten, die nicht zu Kanten in M inzident sind.

Falls ein perfektes Matching in G existiert, ist M dieses Matching und es gilt $k = 0$ (ein perfektes Matching hat immer die maximale Größe). In diesem Fall stellt das perfekte Matching auch eine Kantenüberdeckung minimaler Größe dar und es gilt $\|V\| = 2 \cdot \|M\| = 2 \cdot \frac{1}{2}\|V\|$.

Sei nun $k > 0$, d.h. es gibt eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $\|U\| = k$, welche nicht zu Kanten in M inzident sind. Dann gilt, dass M ein perfektes Matching auf $G[V \setminus U]$ ist und es gilt $\|M\| = \frac{1}{2}(\|V\| - k)$. M enthält in diesem Fall also weniger Kanten als eine Kantenüberdeckung minimaler Größe. Eine Kantenüberdeckung kann aus M dadurch konstruiert werden, dass für jeden Knoten $v \in U$ eine zu ihm inzidente Kante $e \in E$ mit $v \in e$ hinzugefügt wird (da das Matching maximale Größe hatte, sind alle Knoten $v \in U$ untereinander nicht adjazent, also wird hierbei keine Kante doppelt gewählt). Mit dieser Konstruktion gilt nun $\|F\| = \frac{1}{2}(\|V\| - k) + k = \frac{1}{2}(\|V\| + k)$.

Die so konstruierte Kantenüberdeckung hat minimale Größe, da die in ihr enthaltenen Kanten eine minimale Anzahl von Knoten k doppelt enthalten. Gäbe es eine Kantenüberdeckung F', welche weniger Knoten doppelt enthält, könnte man durch entfernen der entsprechenden Kanten auch ein Matching M' finden, im Widerspruch zur Voraussetzung größer als M wäre.

Insgesamt gilt nun die Behauptung:

$$\|M\| + \|F\| = \frac{1}{2}(\|V\| - k) + \frac{1}{2}(\|V\| + k) = \frac{1}{2}(2 \cdot \|V\| + k - k) = \|V\|$$

Hinweis: Die Unterscheidung für $k = 0$ und $k > 0$ wird für die Argumentation nicht unbedingt benötigt, hilft jedoch dabei, die Intuition hinter dieser Lösung zu verstehen.

Transfer: 10 Punkte

Sie planen mit Kommilitonen unter dem Namen `www.dogbook.de` ein dediziertes soziales Netzwerk für professionelle Hundezüchter aufzubauen. Dabei können registrierte Züchter Profile Ihrer Hunde halten und anderen Nutzern zugänglich machen. Ein zentrales Feature innerhalb Ihres Netzwerkes ist die Wurfplanung. Zu bestimmten Zeitpunkten werden dabei Deckrüden und Hündinnen bekanntgegeben, die innerhalb einer Periode decken bzw. gedeckt werden sollen. Dabei geben die Besitzer des Deckrüden ein Ranking unter den Hündinnen an, mit der besten Hündin zuerst und der schlechtesten Alternative zuletzt. Gleiches tun die Besitzer der Hündinnen, mit dem besten Deckrüden zuerst und der schlechtesten Alternative zuletzt. Ihre Aufgabe als Informatiker ist es passende Matchings zu finden (da natürlich ein Hund nicht gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten sein kann).

Ein Auszug aus Ihrer Datenbank in der Kategorie *Whippets* könnte zum Beispiel wie folgt aussehen, wobei nur die Namen der Rüden und die Namen der Hündinnen sowie für den Hund in der Zeile der Rang des Hundes in der Spalte angegeben sind:

Rüde	Hasue Foreign Affair at Whipcat	Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn	Adobra von Würmborium	Dottie von Mullewapp	Bodhifee di Mahana	Culture Pearls Big Ice
Biscuit of Gentle Mind	1	2	6	4	5	3
Adagio du Domaine de Chojnacki	1	3	4	2	5	6
Sobresalto Raggae Reign	3	4	2	5	6	1
Apercu Allus Jandl	4	2	6	3	1	5
Cyrano de Janeiro	2	1	4	5	3	6
Happy Hero Diamond Dream	1	3	5	2	4	6

Hündin	Biscuit of Gentle Mind	Adagio du Domaine de Chojnacki	Sobresalto Raggae Reign	Apercu Allus Jandl	Cyrano de Janeiro	Happy Hero Diamond Dream
Hasue Foreign Affair at Whipcat	1	2	3	4	5	6
Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn	1	4	2	3	5	6
Adobra von Würmborium	1	3	6	4	5	2
Dottie von Mullewapp	1	5	3	4	6	2
Bodhifee di Mahana	1	2	4	5	6	3
Culture Pearls Big Ice	1	6	2	3	4	5

Der Besitzer von *Biscuit of Gentle Mind* präferiert *Hasue Foreign Affair at Whipcat* gegenüber allen anderen Hündinnen, *Culture Pearls Big Ice* wäre dagegen nur dritte Wahl.

Um ein Matching zu finden verfolgen Sie zwei Lösungsansätze.

(a) Betrachten Sie die bipartiten Graphen $G_r =_{\text{def}} (A \uplus B, E_r)$, wobei A die Menge der Deckrüden, B die Menge der Hündinnnen und E_r die Menge der Kanten ist:

$$E_r \quad =_{\text{def}} \quad \{\ \{u, v\} \mid \text{Rüde } u \text{ „gibt“ Hündin } v \text{ einen Rang} \leq r \text{ und}$$
$$\text{Hündin } v \text{ „gibt“ Rüde } u \text{ einen Rang} \leq r\}$$

Bestimmen Sie das kleinste r, sodass G_r ein perfektes Matching enthält.

(b) Ein Paar (u, v) von Hunden heißt *unzufrieden* bezüglich eines perfekten Matchings M, falls $\{u, v\} \notin M$ aber u und v geben sich jeweils einen Rang, der kleiner ist als der Rang der Partner im Matching. Sollten z.B. *Biscuit of Gentle Mind* und *Hasue Foreign Affair at Whipcat* keine Partner in M sein, so würden sie ein unzufriedenens Paar bilden. Bestimmen Sie ein perfektes Matching, sodass es keine unzufriedenen Paare gibt.

Lösung:

(a) Aus den gegebenen Abbildungen $b_H : A \times B \to [6]$, der Bewertung der Hündinnen und $b_R : B \times A \to [6]$, der Bewertung der Rüden, konstruieren wir eine neue Abbildung, welche die jeweils schlechtere Bewertung enthält:

$$b_{RH} : A \times B \to [6]$$
$$(u, v) \mapsto \max\{b_H(u, v), b_R(v, u)\}$$

Diese Funktion lässt sich durch folgende Tabelle beschreiben:

Rüde	Hasue Foreign Affair at Whipcat	Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn	Adobra von Würmborium	Dottie von Mullewapp	Bodhifee di Mahana	Culture Pearls Big Ice
Biscuit of Gentle Mind	1	2	6	4	5	3
Adagio du Domaine de Chojnacki	2	4	4	5	5	6
Sobresalto Raggae Reign	3	4	6	5	6	2
Apercu Allus Jandl	4	3	6	4	5	5
Cyrano de Janeiro	5	5	5	6	6	6
Happy Hero Diamond Dream	6	6	5	2	4	6

Damit G_r ein perfektes Matching enthält muss nach dem Heiratssatz für alle Teilmengen $X \subseteq A$ gelten $\|N(X)\| \geq \|X\|$. Es gilt nun $r \geq 5$, da sonst *Cyrano de Janeiro* keine Kanten im Graphen besäße und somit der Heiratssatz verletzt wäre. Da jede Zeile der Tabelle mindestens 3 Werte ≤ 5 enthält, ist die Ungleichung auch für alle bis zu dreielementigen Teilmengen $X \subseteq A$ erfüllt. Da es weiterhin drei Zeilen gibt, welche nur einmal den Wert 6 enthalten und die Hündin, welche Wert 6 erhält jeweils verschieden ist, ist mit $r = 5$ die Ungleichung für alle Teilmengen $X \subseteq A$ erfüllt.

(b) Wir gehen nach folgender Methode vor (Algorithmus von Gale und Shapley):

i. Wähle für einen Rüden seine beste Präferenz.

ii. Falls diese noch keinen Partner hat, füge dieses Paar in das Matching ein.

iii. Falls diese bereits einen Partner hat:

i. Falls die Präferenz der Hündin für den neuen Partner besser ist als für den aktuellen, entferne das aktuelle Paar, das die Hündin enthält aus dem Matching und füge ein neues Paar mit dieser Hündin und obigem Rüden in das Matching ein.

ii. Sonst prüfe die nächste Präferenz des Rüden.

iv. Wiederhole für alle Rüden, bis jeder einen Partner hat.

Biscuit of Gentle Mind besitzt als erste Präferenz *Hasue Foreign Affair at Whipcat*, welche noch keinen Partner hat, also gilt

$$\{\textit{Biscuit of Gentle Mind}, \textit{Hasue Foreign Affair at Whipcat}\} \in M.$$

Die beste Präferenz von *Adagio du Domaine de Chojnacki* nun bereits vergeben ist und ihren aktuellen Partner präferiert, fügen wir

$$\{\textit{Adagio du Domaine de Chojnacki}, \textit{Dottie von Mullewapp}\}$$

in das Matching ein.

In den nächsten Schritten erhält *Sobresalto Raggae Reign*, *Apercu Allus Jandl* und *Cyrano de Janeiro* ihre erste Präferenz:

$$\{\textit{Sobresalto Raggae Reign}, \textit{Culture Pearls Big Ice}\} \in M$$

$$\{\textit{Apercu Allus Jandl}, \textit{Bodhifee di Mahana}\} \in M$$

$$\{\textit{Cyrano de Janeiro}, \textit{Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn}\} \in M$$

Die Präferenzen 1 und 2 von *Happy Hero Diamond Dream* sind bereits vergeben. Präferenz 1 bevorzugt ihren aktuellen Partner, aber Präferenz 2, *Dottie von Mullewapp* präferiert ihn vor ihrem aktuellen Partner, also wird

$$\{\textit{Adagio du Domaine de Chojnacki}, \textit{Dottie von Mullewapp}\}$$

aus M entfernt und $\{\textit{Happy Hero Diamond Dream}, \textit{Dottie von Mullewapp}\}$ eingefügt.

Nun muss für *Adagio du Domaine de Chojnacki* ein neuer Partner gefunden werden. Präferenz 3, *Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn* präferiert ihn vor ihrem aktuellen Partner. Anschließend fehlt also der Partner für *Cyrano de Janeiro*. Präferenzen 2 und 3 sind hier bereits vergeben und präferieren jeweils ihren aktuellen Partner. Präferenz 4, *Adobra von Würmborium* hat noch keinen Partner, also sind mit diesem neuen Paar alle Hunde als zufriedene Paare gematcht. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} M = \{&\{\textit{Biscuit of Gentle Mind}, \textit{Hasue Foreign Affair at Whipcat}\},\\ &\{\textit{Sobresalto Raggae Reign}, \textit{Culture Pearls Big Ice}\},\\ &\{\textit{Apercu Allus Jandl}, \textit{Bodhifee di Mahana}\},\\ &\{\textit{Happy Hero Diamond Dream}, \textit{Dottie von Mullewapp}\},\\ &\{\textit{Adagio du Domaine de Chojnacki}, \textit{Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn}\},\\ &\{\textit{Cyrano de Janeiro}, \textit{Adobra von Würmborium}\}\} \end{aligned}$$