

10. Übungsblatt

Ausgabe: 19.06.2015 **Abgabe:** 26.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung:

10 Punkte

- (a) Bestimmen Sie $\chi(Q_3)$.
- (b) Bestimmen Sie $\chi(Q_4)$.
- (c) Wie viele verschiedene Färbungen mit k Farben hat ein Baum mit n Knoten?
Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Rekursionsformel und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels Induktion über n .
- (d) Bestimmen Sie $\chi'(Q_3)$.
- (e) Gibt es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $\chi(G) \leq 2$ und $\chi'(G) = n$?
- (f) Gilt $\chi'(G) = k$ für jeden k -regulären Graphen G ?
- (g) Enthält ein Baum höchstens ein perfektes Matching?
- (h) Welche Gitter $M_{n,m}$ enthalten perfekte Matchings?
- (i) Wie viele perfekte Matchings enthält der Q_3 ?
- (j) Wie viele perfekte Matchings enthält der K_{2n} ?

Kreativität:

10 Punkte

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\deg_G(v) > 0$ für alle Knoten $v \in V$. Eine *Kantenüberdeckung* $F \subseteq E$ von G ist eine Menge von Kanten in G , sodass jeder Knoten von V mit einer Kante aus F inzident ist, d.h., für alle $v \in V$ gibt es ein $e \in F$ mit $v \in e$.

Es seien M ein Matching in G mit maximaler Größe und F eine Kantenüberdeckung von G mit minimaler Größe. Zeigen Sie, dass dann stets

$$\|V\| = \|M\| + \|F\|$$

gilt.

Transfer:

10 Punkte

Sie planen mit Kommilitonen unter dem Namen `www.dogbook.de` ein dediziertes soziales Netzwerk für professionelle Hundezüchter aufzubauen. Dabei können registrierte Züchter Profile Ihrer Hunde halten und anderen Nutzern zugänglich machen. Ein zentrales Feature innerhalb Ihres Netzwerkes ist die Wurfplanung. Zu bestimmten Zeitpunkten werden dabei Deckrüden und Hündinnen bekanntgegeben, die innerhalb einer Periode decken bzw. gedeckt

werden sollen. Dabei geben die Besitzer des Deckrüden ein Ranking unter den Hündinnen an, mit der besten Hündin zuerst und der schlechtesten Alternative zuletzt. Gleiches tun die Besitzer der Hündinnen, mit dem besten Deckrüden zuerst und der schlechtesten Alternative zuletzt. Ihre Aufgabe als Informatiker ist es passende Matchings zu finden (da natürlich ein Hund nicht gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten sein kann).

Ein Auszug aus Ihrer Datenbank in der Kategorie *Whippets* könnte zum Beispiel wie folgt aussehen, wobei nur die Namen der Rüden und die Namen der Hündinnen sowie für den Hund in der Zeile der Rang des Hundes in der Spalte angegeben sind:

Rüde	Hasue Foreign Affair at Whipcat	Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn	Adobra von Würmborium	Dottie von Mullewapp	Bodhifee di Mahana	Culture Pearls Big Ice
Biscuit of Gentle Mind	1	2	6	4	5	3
Adagio du Domaine de Chojnacki	1	3	4	2	5	6
Sobresalto Raggae Reign	3	4	2	5	6	1
Apercu Allus Jandl	4	2	6	3	1	5
Cyrano de Janeiro	2	1	4	5	3	6
Happy Hero Diamond Dream	1	3	5	2	4	6

Hündin	Biscuit of Gentle Mind	Adagio du Domaine de Chojnacki	Sobresalto Raggae Reign	Apercu Allus Jandl	Cyrano de Janeiro	Happy Hero Diamond Dream
Hasue Foreign Affair at Whipcat	1	2	3	4	5	6
Whipcat Kayleigh Fly Till Dawn	1	4	2	3	5	6
Adobra von Würmborium	1	3	6	4	5	2
Dottie von Mullewapp	1	5	3	4	6	2
Bodhifee di Mahana	1	2	4	5	6	3
Culture Pearls Big Ice	1	6	2	3	4	5

Der Besitzer von *Biscuit of Gentle Mind* präferiert *Hasue Foreign Affair at Whipcat* gegenüber allen anderen Hündinnen, *Culture Pearls Big Ice* wäre dagegen nur dritte Wahl.

Um ein Matching zu finden verfolgen Sie zwei Lösungsansätze.

- (a) Betrachten Sie die bipartiten Graphen $G_r =_{\text{def}} (A \uplus B, E_r)$, wobei A die Menge der Deckrüden, B die Menge der Hündinnen und E_r die Menge der Kanten ist:

$$E_r =_{\text{def}} \{ \{u, v\} \mid \text{Rüde } u \text{ „gibt“ Hündin } v \text{ einen Rang } \leq r \text{ und} \\ \text{Hündin } v \text{ „gibt“ Rüde } u \text{ einen Rang } \leq r \}$$

Bestimmen Sie das kleinste r , sodass G_r ein perfektes Matching enthält.

- (b) Ein Paar (u, v) von Hunden heißt *unzufrieden* bezüglich eines perfekten Matchings M , falls $\{u, v\} \notin M$ aber u und v geben sich jeweils einen Rang, der kleiner ist als der Rang der Partner im Matching. Sollten z.B. *Biscuit of Gentle Mind* und *Hasue Foreign Affair at Whipcat* keine Partner in M sein, so würden sie ein unzufriedenens Paar bilden. Bestimmen Sie ein perfektes Matching, sodass es keine unzufriedenen Paare gibt.