Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

9. Übungsblatt

Ausgabe: 12.06.2015 **Abgabe:** 19.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: 10 Punkte

(a) Ein ebener, k-regulärer Graph besteht aus 12 Knoten und teilt die Ebene in 14 Gebiete. Wie groß ist k?

(b) Gibt es einen ebenen, k-regulären Graphen mit 8 Knoten, der die Ebene in 14 Gebiete teilt?

(c) Erweitern Sie die Eulersche Polyederformel auf nichtzusammenhängende, planare Graphen.

(d) Ist der Q_3 planar?

(e) Ist der Q_4 planar?

(f) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *dreiecksfrei*, falls G keinen K_3 als Teilgraph enthält. Zum Beispiel ist der $K_{3,3}$ dreiecksfrei. Zeigen Sie, dass

$$\|E\| \leq 2\|V\| - 4$$

für jeden planaren, dreiecksfreien Graphen $G = (V, E)$ mit $\|V\| \geq 3$ gilt.

(g) Besitzt jeder planare, dreiecksfreie Graph einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 3$?

(h) Der *Kantengraph* $L(G)$ zu einem Graphen $G = (V, E)$ ist definiert durch die Knotenmenge E und die Kantenmenge $\{\ \{e, f\} \mid e, f \in E \wedge e \cap f \neq \emptyset\ \}$. Ist der Kantengraph eines planaren Graphen wieder planar?

(i) Wie viele Knotenfärbungen mit k Farben hat ein K_n?

(j) Wie ist die chromatische Zahl eines Q_d?

Kreativität: 10 Punkte

Wie viele Knotenfärbungen mit 3 Farben hat der Kreis C_n?

Hinweis: Stellen Sie eine geeignete Rekursionsgleichung auf und lösen Sie diese.

Transfer: 10 Punkte

Ein *Multiprozessorsystem* besteht aus einer Menge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ von n identischen Prozessoren sowie einem Kommunikationsmechanismus. Die Prozessoren sind untereinander gemäß eines ungerichteten Graphen $G = (P, E)$ zu einem Prozessorennetzwerk zusammengeschaltet. Die Kommunikation wird wie folgt durchgeführt: Jeder Prozessor besitzt ein Lesefenster fester

Größe, auf das er Schreibzugriff hat. Falls $\{p_i, p_j\} \in E$ gilt, so darf der Prozessor p_j im Lesefenster von p_i lesen. Es darf immer nur entweder geschrieben oder gelesen werden – niemals beides gleichzeitig. Alle Prozessoren arbeiten synchron, d.h., alle Prozessoren beginnen den nächsten Arbeitsschritt zeitgleich.

Sie wollen das Summationsproblem in einem Prozessornetzwerk lösen. Dabei steht im Lesefenster jedes Prozessors p_i eine Integer-Zahl z_i. Das Problem ist gelöst, wenn alle Prozessoren anhalten und der Prozessor p_1 das Summe $z_1 + \cdots + z_n$ in seinem Lesefenster stehen hat.

Sie organisieren d^n Prozessoren in einem Prozessorennetzwerk der Form eines (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen. Ein (n, d)-dimensionaler De Bruijn-Graph ist ein Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V =_{\text{def}} [d]^n$ sowie der Kantenmenge

$$E =_{\text{def}} \{\ \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\} \mid x_2 = y_1, x_3 = y_2, \ldots, x_n = y_{n-1}\ \}.$$

Dabei werden keine Schleifen zugelassen.

(a) Wie viele Kanten benötigen Sie für einen (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen?

(b) Wie groß ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten in einem (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen?

(c) Wie (schnell) können Sie das Summationsproblem in einem (n, d)-dimensionalen De Bruijn-Graphen lösen?

Beachte: Die Laufzeit des Prozessorennetzwerkes ergibt sich Anzahl der Rechenschritte, bis kein Prozessor mehr aktiv ist. Dabei nehmen wir an, dass das Lesen des Inhalts eines Lesefenster sowie das Schreiben in das eigene Lesefenster als 1 Schritt zählt. Außerdem zählen Vergleiche zweier Integer-Zahlen sowie Ausführung von arithmetischen Operationen als 1 Schritt unabhängig von der Größe der Integer-Zahlen.