Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

8. Übungsblatt

Ausgabe: 05.06.2015 **Abgabe:** 12.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie weitere Begriffe für einen Graphen $G = (V, E)$:

- Eine Folge $(d_1, \dots, d_n)$ natürlicher Zahlen $d_i \geq 0$ mit $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ heißt *Gradfolge* des Graphen G, falls $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\deg_G(v_i) = d_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.
- Der *Abstand* $d_G(u, v)$ zwischen Knoten $u, v \in V$ in G ist die Länge eines kürzesten Weges von u nach v in G, falls ein Weg existiert; anderenfalls gilt $d_G(u, v) = \infty$.

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Welche Gradfolge besitzt $M_{3,4}$?

(b) Gibt es einen Graphen mit Gradfolge $(5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$? - Und wenn ja, welchen?

(c) Gibt es einen Graphen mit Gradfolge $(5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$? - Und wenn ja, welchen?

(d) Gibt es einen Graphen mit Gradfolge $(5, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$? - Und wenn ja, welchen?

(e) Wie groß ist der maximale Abstand zweier Knoten im Hyperwürfel Q_d?

(f) Wie groß ist der maximale Abstand zweier Knoten im Gittergraphen $M_{n,n}$?

(g) Welche Knoten haben im $M_{n,n}$ den kleinsten maximalen Abstand zu einem anderen Knoten?

(h) Welche Knoten haben im $M_{n,n}$ den größten maximalen Abstand zu einem anderen Knoten?

(i) Wie viele Wege der Länge k enthält ein r-regulärer Graph mit n Knoten?

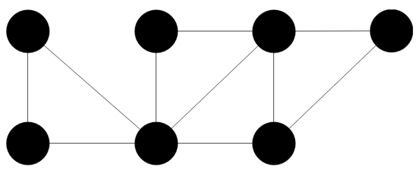
(j) Wie viele Kreise der Länge k enthält der vollständige Graph K_n?

Lösung:

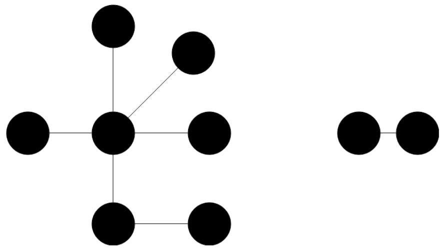
a)

$$(4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$$

b)



c) Nein , da die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist nicht gerade ist.

d) 

e) Die Knoten des Hyperwürfels Q_d lassen sich durch ein d-Tupel bestehend aus Nullen und Einsen darstellen. Nach Definition ändert sich zwischen adjazenten Knoten immer nur eine Komponente. Zwei Punkte haben immer dann einen Maximalen Abstand, wenn sie in keiner Komponente übereinstimmen. Es müssen also noch mindestens d - Kanten durchlaufen werden. Der Maximale Abstand zweier Knoten beträgt demnach d.

f) Der maximale Abstand besteht zwischen Knoten in gegenüberliegenden Ecken. Es müssen mindestens $n-1+n-1=2n-2$ Kanten durchlaufen werden um von einer Ecke in die andere zu gelangen. Der maximale Abstand zweier Knoten beträgt:

$$2n-2$$

g) Ist n ungerade so liegt der Knoten mit dem kleinsten maximalen Abstand im Zentrum, also an der Stelle ((n+1)/2 , (n+1)/2).
Ist n gerade liegen die Knoten mit dem kleinsten maximalen Abstand bei an den Stellen: (n/2 , n/2) , (n/2 + 1 , n/2) , (n/2 , n/2 + 1) und (n/2 + 1 , n/2 + 1)

h) Die Knoten mit dem größten maximalen Abstand liegen in den Ecken. Es haben also (1 , 1) und(1,n) sowie (n,1) und (n,n) den größten maximalen Abstand.

i) Es gibt $n \cdot r^k$ mögliche Wege der Länge k, da die Reihenfolge in der die Knoten besucht werden eine Rolle spielt.

j) Es gibt $(n-1)^k + (-1)^k(n-1)$ Kreise der Länge k im K_n für $k \geq 1$.
Beweis: Sei $C(n,k)$ die Anzahl der Kreise der Länge k im K_n, und $W(n,k)$ die Anzahl der Wege der Länge k.

Wir betrachten zunächst kleine k: Es gibt keine Kreise der Länge 1, also gilt $C(n,1)=0$.

Für Kreise der beliebiger Länge k, betrachte folgendes: $(x_0, ..., x_{k-1}, x_k = x_0)$ ist genau dann ein Kreis der Länge k, wenn $(x_0, ..., x_{k-1})$ ein Weg der Länge $k-1$ ist und x_{k-1} verschieden von x_0 ist. Das heißt, die Anzahl der Kreise der Länge k ist gerade die Anzahl der Wege der Länge $k-1$, bei denen Anfangsknoten und Endknoten verschieden sind; in anderen Worten ist das die Anzahl der Wege der Länge $k-1$, die nicht Kreise sind. Mithin gilt:

$$C(n,k) = W(n,k-1) - C(n,k-1)$$

Wir zeigen nun die Behauptung mit vollständiger Induktion über k:

- Induktionsanfang: $k=1$: $(n-1)^1 + (-1)^1(n-1) = 0 = C(n,1)$.

- Induktionsschritt: $k > 1$:

$$\begin{aligned} C(n,k) &= W(n,k-1) - C(n,k-1) \\ &= n(n-1)^{k-1} - ((n-1)^{k-1} + (-1)^{k-1}(n-1)) \\ &= n(n-1)^{k-1} - (n-1)^{k-1} + (-1)^{k}(n-1) \\ &= (n-1)^{k} + (-1)^{k}(n-1) \end{aligned}$$

Kreativität: **10 Punkte**

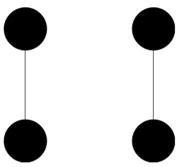
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *Splitgraph*, falls es eine Knotenmenge $U \subseteq V$ gibt, sodass $G[U]$ ein vollständiger Graph und $G[V \setminus U]$ ein leerer Graph ist.

Zeigen Sie folgende Aussage:

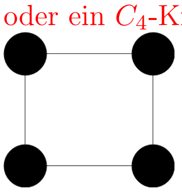
> Es sei $G = (V, E)$ ein Splitgraph mit $\|V\| \geq 4$. Kein induzierter Teilgraph von G mit vier Knoten ist ein Kreis der Länge 4 oder ein Paar nicht inzidenter Kanten.

Lösung: Sei $K = (V_G, E_G)$ ein induzierter Teilgraph von G mit $V_K = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und $\|V_K\| = 4$. Es ist zu zeigen das die Folgenden beiden Fälle nicht auftreten können:

Ein paar nicht inzidenter Kanten



oder ein C_4-Kreis.



Fallunterscheidung:
1. Fall: Liegen mindestens 3 Knoten in U so müssen auch mindestens 3 Knoten untereinander verbunden sein, was in beiden Fällen nicht der Fall ist.
2. Fall: Liegt nur ein Knoten in U, so müssen 3 Knoten existieren, die nicht untereinander verbunden sind. Dies kommt in beiden Fällen nicht vor.
3. Fall: Liegen genau 2 Knoten in U, so kann kein Paar nicht inzidenter Kanten entstehen, da dann die Knoten aus $U \setminus V$ verbunden werden müssten. Mit gleicher Argumentation kann auch kein C_4 entstehen.
4. Fall: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V \setminus U$, d.h. es gibt keine Kanten.

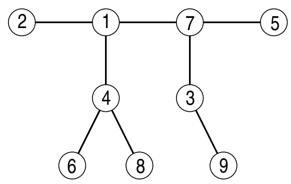
Selbststudium: **10 Punkte**

Erarbeiten Sie sich den Inhalt des Abschnitts „Bäume und Wälder“ (Abschnitt 3.2) aus dem Skriptum *Mathematik: Diskrete Strukturen* (Version v4.10 oder höher) und beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Ist jeder zusammenhängende Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten eine Baum? Begründen Sie Ihre Antwort.

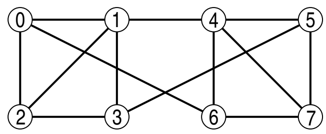
(b) Wie viele Spannbäume enthält der Hyperwürfel Q_3?

(c) Welchen PRÜFER-Code besitzt der folgende, markierte Baum?



(d) Welcher markierte Baum hat den PRÜFER-Code 212323212?

(e) Welcher Spannbaum des folgenden, markierten Graphen



besitzt den lexikographisch kleinsten PRÜFER-Code?

Hinweis: Für zwei Wörter $t = t_1 \dots t_n$ und $t' = t'_1 \dots t'_n$ mit $t_i, t'_i \in [n+2]$ sagen wir, dass t lexikographisch kleiner als t' ist (symbolisch: $t <_{\text{lex}} t'$), falls es ein $i \in [n]$ gibt mit $t_i < t'_i$ und $t_j = t'_j$ für alle $j < i$. Zum Beispiel gilt $112 <_{\text{lex}} 121$ und $121 <_{\text{lex}} 211$.

Lösung:

a) Ja. Beweis durch Widerspruch: Sei $G = (V_G, E_G)$ ein zusammenhängender Graph mit $\| V_G \| = n$ und $\| E_G \| = n-1$. Angenommen G enthält einen Kreis K mit $K = (V_K, E_K)$ und $\| E_K \| = k$, wobei $k \leqslant n$. Da K ein Kreis sein soll muss dann auch $\| E_K \| = k$ gelten. Da G zusammenhängend ist, muss für jedes $v \in V_G \setminus V_K$ noch mindestens eine Kante hinzu gezählt werden. Dann erhält man jedoch $\| E_G \| > n$ und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Es gibt 384 verschiedene Spannbäume im Q_3
Beweis: Für den 3- dimensionalen Hyperwürfel sei

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3\}, \quad E = \{(v_i, v_j) : d_H(v_i, v_j) = 1\}$$

d_H bezeichne den Hammingabtand zwichen v_i und v_j. Sei (S_d, T_d) eine Bipartition von V, die einen Schnitt des Würfels entlang der Dimension d, $d = 1,2,3$ beschreibt, es gilt dabei für alle Knoten $v = (x_1, x_2, x_3) \in V$, dass $x_d = 0$, falls $v \in S$ und $x_d = 1$, falls $v \in T$.
Sei $E_G(S_d, T_d) = E \cap \{(v_i, v_j) : v_i \in S_d, v_j \in T_d\}$, die Menge der Kanten, die einen Schnitt kreuzen.

***Lemma*:**
Es gibt entweder exakt einen Schnitt entlang einer Dimension (S_d, T_d), der von exakt einer Kante des Spannbaums gekreuzt wird d.h.$\| E_B(S_d, T_d) \| = 1$. Und wenn es keinen

solchen Schnitt gibt, dann gibt es exakt einen Schnitt entlang einer Dimension (S_d, T_d), der von exakt drei Kanten des Spannbaums gekreuzt wird $(||E_B(S,T)|| = 3)$

Beweis

Fall i: Es gibt einen Schnitt (S_{d_1}, T_{d_1}) entlang einer Dimension mit $\| E_B(S_{d_1}, T_{d_1}) \| = 1$. Angenommen es gäbe einen zweiten Schnitt (S_{d_2}, T_{d_2}) entlang einer zweiten Dimension mit $\| E_B(S_{d_2}, T_{d_2}) \| = 1$ Für den Schnitt (S_{d_3}, T_{d_3}) entlang der dritten Dimension gilt dann: $\| E_B(S_{d_3}, T_{d_3}) \| \leq 4$ Damit ergibt sich nun ein Widerspruch, denn
$7 = \| E_B \| = \| E_B(S_{d_3}, T_{d_3}) \| + \| E_B(S_{d_2}, T_{d_2}) \| + \| E_B(S_{d_1}, T_{d_1}) \| \leq 1 + 1 + 4 = 6$. Das heißt also es gibt genau einen solchen Schnitt

ii): Es gibt keinen Schnitt (S_d, T_d) entlang einer Dimension mit $\| E_B(S_d, T_d) \| = 1$. Dann muss es nun einen Schnitt (S_d, T_d) entlang einer Dimension geben, der von 3 Kanten des Spannbaums gekreuzt wird, denn es muss $\| E_B(S_{d_3}, T_{d_3}) \| + \| E_B(S_{d_2}, T_{d_2}) \| + \| E_B(S_{d_1}, T_{d_1}) \| = 7$ gelten und sonst wäre $\| E_B(S_{d_i}, T_{d_i}) \| = 2$ für $i = 1, 2, 3$ und man erhält einen Widerspruch. Angenommen es gebe einen zweiten solchen Schnitt (S_{d_2}, T_{d_2}) entlang einer zweiten Dimension d_2. Sei nun (S_{d_3}, T_{d_3}) der Schnitt entlang der dritten Dimension, dann gilt $\| E_B(S_{d_3}, T_{d_3}) \| \geq 2$ und damit dann $7 = \| E_B \| = \| E_B(S_{d_3}, T_{d_3}) \| + \| E_B(S_{d_2}, T_{d_2}) \| + \| E_B(S_{d_1}, T_{d_1}) \| \geq 3 + 3 + 2 = 8$ Was einen Widerspruch darstellt, d.h. also nun, dass es genau einen Schnitt entlang einer Dimension d gibt, der von 3 Kanten des Spannbaums gekreuzt wird.

Nun zählen wir die Spannbäume der beiden oben genannten Fälle einzeln:

Fall i): Wir zählen die Anzahl der Spannbäume, bei denen es einen Schnitt (S_d, T_d) entlang einer Dimension d gibt, der von exakt einer Kante des Spannbaums gekreuzt wird. Es sind $B[S_d]$ und $B[T_d]$ Spannbäume des Q_2. Die den Schnitt kreuzende Kante sei beliebig, wir wissen aber, dass dies der einzige Schnitt ist. Wir können daher nun die Spannbäume des Q_2 zählen. Die Spannbäume des Q_2 unterscheiden sich darin, welche Kante aus dem Q_2 nicht Teil des Spannbaums ist. Daher gibt es 4 solche Spannbäume. Insgesamt gibt es daher (Anzahl der Möglichkeiten für die Dimension, entlang welcher geschnitten wird) $\cdot$ (Anzahl der Möglichkeiten für die den Schnitt kreuzende Kante) $\cdot$ (Anzahl der Spannbäume im $Q_2)^2 = 3 \cdot 4 \cdot 4^2 = 3 \cdot 2^6$ Spannbäume. für die es einen Schnitt (S_d, T_d) entalng einer Dimension gibt, der von exakt einer Kante gekreuzt wird.

Fall ii): Wir zählen die Anzahl der Spannbäume, für die es exakt einen Schnitt (S_d, T_d) gibt, der von exakt 3 Kanten des Spannbaums gekreuzt wird.
Es gibt in jedem der von S und T induzierten Teilgraphen Q_2 einen Knoten, der zu keiner Kante inzident ist, die von dem Schnitt gekreuzt werden, da 3<4. Es gibt hier nun 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem wie man diese Knoten v_S* und v_T* an den Spannbaum anbindet.

ii)a: Es gibt 2 Kanten im Spannbaum, die zu v_S* oder v_T* inzident sind. Seien diese ohne Einschränkung zu v_S* inzident. Für v_T* gibt es nun keine 2 Kanten mehr aus dem Spannbaum, die zu ihm inzident sind, denn sonst würde ein Kreis entstehen. Es gibt hier also 2 Möglichkeiten v_T* an den Spannbaum anzubinden. Wir betrachten nun den Fall, dass die vertikale Kante im Spannbaum ist. (horizontaler Fall ist symmetrisch) Jetzt müssen wir noch die Knoten links oben mit den anderen verbinden, denn wir haben nur noch eine unbekannte Kante. Diese muss nun horizontal verlaufen, denn ansonsten

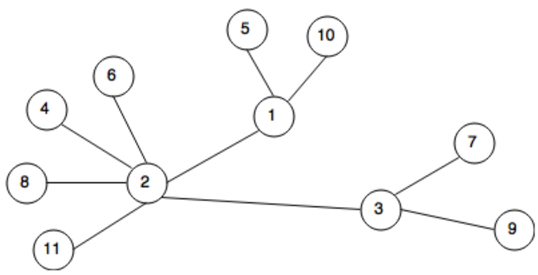
gebe es einen Schnitt entlang einer Dimension, der nur von einer Kante geschnitten wird (man kann vertikal schneiden). Man hat also nur noch zwei Kanten zur Auswahl: Die zum Knoten links oben inzidente horizontale Kante in S oder die in T.
Wenn man das dann zählt mit allen Fällen, erhält man insgesamt (Anzahl Dimensionen) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten für die 3 Kanten aus dem Spannbaum, die den Schnitt kreuzen) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten, ob der zweifach angebundene *-Knoten in S oder T ist) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten, den einfach angebundenen *-Knoten anzubinden) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten, die anderen Knoten links oben mit dem Rest zu verbinden) $= 3 \cdot \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^5$

ii)b: Weder v_S* noch v_T* ist zu zwei Kanten im Spannbaum inzident. Dann müssen die anderen Knoten direkt untereinander, ohne die *- Knoten, verbunden werden. Dafür gibt es $2 \cdot 2$ Möglichkeiten (die horizontale Kante in S oder T)$\cdot$ (die vertikale Kante in S oder T).
Daher gibt es nur noch eine Frage: welcher *-Knoten wird von der horizontalen Kante angebunden, welcher von der vertikalen (es können nicht beide mit vertikalen Kanten angebunden werden, da es dann einen Schnitt entlang einer Dimension geben würde, der nur von einer Kante des Spannbaums gekreuzt wird. Also gibt es hier auch wieder nur 2 Möglichkeiten.)
Insgesamt gibt es in diesem Fall daher (Anzahl Dimensionen) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten für die 3 Kanten aus dem Spannbaum, die den Schnitt kreuzen) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten, die anderen Knoten links oben mit denen rechts oben durch eine Kante zu verbinden) $\cdot$(Anzahl Möglichkeiten, die anderen Knoten links oben mit denen links unten durch eine Kante zu verbinden) $\cdot$ (Anzahl Möglichkeiten, den *-Knoten mit einem anderen Knoten in S zu verbinden) $= 3 \cdot \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^5$

Insgesamt gibt es daher (Fall 1) $3 \cdot 2^6$+(Fall 2a)$3 \cdot 2^5$+(Fall 2b)$3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 2^7$Spannbäume.

c) 1744173

d)



e) Der Lexigrafisch kleinste Prüfercode sollte mit möglichst vielen Nullen beginnen. Da der Graf nach Voraussetzung zusammenhängend sein muss sind maximal 2 Nullen möglich.Um den Prüfercode mit 2 Nullen beginnen zu lassen, müssen 2 Nachbarn Blätter sein. Man wähle die 2 und die 6 als Blatt, so kann die 1 noch an dritter Stelle im Prüfercode vorkommen. (dazu verbinde man die 0 mit der 1, denn die 0 ist nachdem 2 und 6 verschwinden ein Blatt) Da die 3 kein Blatt sein kann und mit der 2 nicht verbunden ist, denn 2 ist ein Blatt, muss sie mit der 1 und mit der 5 verbunden sein. An 4. Stelle kann die 1 nicht mehr vorkommen, denn dazu müsste 3 oder 4 ein Blatt sein, was nicht möglich ist. Die 3 an 4. Stelle ist jedoch möglich, indem man die 1 nur mit der 0 und der 3 verbindet. Da die 3 nun ein Blatt ist, muss nun die 5 folgen. Da die 4 kein Blatt ist, muss sie mit der 5 und der 7 verbunden sein. 5 und 7 dürfen nicht verbunden sein, da sonst ein Kreis enthalten wäre.

001354