Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

3. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 01.05.2015 **Abgabe:** 08.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie folgende Begriffsbildung: Es sei π eine Permutation von n Elementen. Ein Tupel $(z_1, \ldots, z_k)$ mit $z_1 \geq \cdots \geq z_k \geq 1$ und $\sum_{i=1}^{k} z_i = n$ heißt *Zyklentyp* von π, falls π gerade aus Zyklen der Längen $z_1, \ldots, z_k$ besteht.

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Welchen Wert hat $\pi^{23}(5)$ für $\pi = (4\ 2\ 5\ 3\ 1)(8\ 6\ 7)$?

(b) Wie sieht die Permutation $(3, 2, 6, 7, 5, 1, 4)$ in Zyklenschreibweise aus?

(c) Wie sieht die Permutation $(8\ 1\ 5\ 3)(2\ 4)(6\ 7)$ in Tupelschreibweise aus?

(d) Welchen Zyklentyp besitzt die Permutation $(2, 4, 1, 3, 5, 8, 6, 9, 7)$?

(e) Wie viele Permutationen von n Elementen mit dem Zyklentyp $(3, 1, \ldots, 1)$ gibt es für $n \geq 4$?

(f) Zeigen Sie kombinatorisch die Gleichung $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ für alle $n \geq 2$.

(g) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichung $S_{n,3} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$ für $n \geq 3$.

Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung aus Teilaufgabe (f).

(h) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine ganzzahlige Zahl $n \geq 3k$ als Summe von k ganzzahligen Summanden darzustellen, wobei jeder Summand mindestens 3 ist?

(i) Wie viele Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt es, in denen die Blöcke 01 und 10 genau einmal vorkommen?

(j) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100000 gibt es, deren Quersumme gerade 13 ergibt?

Lösung:

(a) 5 ist in π in einem Zyklus der Länge 5 enthalten, also gilt $\pi^5(5) = 5$ und so $\pi^{20}(5) = 5$ und damit $\pi^{23}(5) = \pi^3(5) = \pi^2(3) = \pi(1) = 4$.

(b) Es gilt:

$$\begin{array}{lll} \pi(1) = 3 & \pi(3) = 6 & \pi(6) = 1 \\ \pi(2) = 2 & & \\ \pi(4) = 7 & \pi(7) = 4 & \\ \pi(5) = 5 & & \end{array}$$

Folglich lautet die Zyklenschreibweise der Permutation $(1\ 3\ 6)(2)(4\ 7)(5)$.

(c) Aus der Zyklenschreibweise ergibt sich

$$\begin{array}{llll} \pi(8) = 1 & \pi(1) = 5 & \pi(5) = 3 & \pi(3) = 8 \\ \pi(2) = 4 & \pi(4) = 2 & & \\ \pi(6) = 7 & \pi(7) = 6 & & \end{array}$$

Damit ergibt sich als Tupelschreibweise der Permutation $(5, 4, 8, 2, 3, 7, 6, 1)$.

(d) Zunächst bestimmen wir die Zyklenschreibweise zur gegebenen Permutation:

$$\begin{array}{llll} \pi(1) = 2 & \pi(2) = 4 & \pi(4) = 3 & \pi(3) = 1 \\ \pi(5) = 5 & & & \\ \pi(6) = 8 & \pi(8) = 9 & \pi(9) = 7 & \pi(7) = 6 \end{array}$$

Wir erhalten also die Zyklenschreibweise $(1\ 2\ 4\ 3)(5)(6\ 8\ 9\ 7)$. Nach Sortieren der Längen der Zyklen ergibt sich der Zyklentyp $(4, 4, 1)$.

(e) Wir benötigen 3 Elemente $a, b, c \in [n]$, die den Zyklus der Länge 3 bilden. Dafür gibt es $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten. Aus diesen 3 Elementen können $(3-1)! = 2$ verschiedene Zyklen der Länge 3 gebildet werden. Damit ergibt sich, dass es $\binom{n}{3} \cdot 2 = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot 2 = \frac{n!}{3 \cdot (n-3)!} = \frac{n^3}{3}$ Permutationen mit Zyklentyp $(3, 1, \ldots, 1)$ gibt.

(f) Wir konstruieren eine Bijektion zwischen der Menge aller Bipartitionen von $[n]$ und der Menge aller surjektiven Funktionen $f : [n] \to \{0, 1\}$ mit $f(1) = 0$. Sei dazu $\mathcal{F} = \{A, B\}$ eine Bipartition von $[n]$, sodass $1 \in A$. Wir definieren dann dazu die Funktion

$$c : [n] \to \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Offensichtlich existiert zu jeder Bipartition genau eine solche Funktion, und wir können umgekehrt zu jeder solchen Funktion eindeutig die Bipartition $\{c^{-1}(0), c^{-1}(1)\}$ rekonstruieren. Damit haben wir eine Bijektion zwischen der Menge der Bipartitionen und der Menge der surjektiven Funktionen $f : [n] \to \{0, 1\}$ mit $f(1) = 0$ gefunden. Es gibt insgesamt 2^{n-1} Funktionen $f : [n] \to \{0, 1\}$ mit $f(1) = 0$, und nur die Funktion $f' : x \mapsto 0$ ist nicht surjektiv. Es folgt:

$$\begin{aligned} S_{n,2} &= \|\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ ist Bipartition von } [n]\}\| \\ &= \|\{f : [n] \to \{0, 1\} \mid f(1) = 0, f \text{ ist surjektiv}\}\| \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

(g) Wir zeigen die Aussage $S_{n,3} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$ mittels vollständiger Induktion über n für $n \geq 3$.

- *Induktionsanfang:* $n = 3$: Es gibt genau eine Möglichkeit, eine 3-elementige Menge in 3 Teilmengen zu partitionieren: Jede Teilmenge besteht aus exakt einem Element. Es gilt $S_{n,3} = 1 = 4.5 - 4 + 0.5 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2^2 + \frac{1}{2}$.
- *Induktionsvoraussetzung:* $S_{n-1,3} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-2} - 2^{n-2} + \frac{1}{2}$.

- *Induktionsschritt:* $n > 3$: Nach Theorem 1.15 (Stirling-Dreieck zweiter Art) gilt

$$\begin{aligned}
S_{n,3} &= S_{n-1,2} + 3 \cdot S_{n-1,3} \\
&\overset{(IV)}{=} S_{n-1,2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^{n-2} - 2^{n-2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= S_{n-1,2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} + \frac{3}{2} \\
&\overset{\text{(f)}}{=} 2^{n-2} - 1 + \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - (3-1) \cdot 2^{n-2} + \frac{3-2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(h) Sei $P^{(3)}_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, eine Zahl n ungeordnet in k Summanden zu zerlegen, wobei jeder Summand mindestens 3 ist. Wir führen das Problem auf das bereits bekannte Problem aus Theorem 1.16 zurück, indem wir zu jeder Summe aus k Summanden, von denen jeder mindestens 3 ist, eine allgemeine Summe von k Summanden bilden. Dies erreichen wir, in dem wir von jedem Summanden 2 abziehen. So haben wir zu jeder gesuchten Zahlpartition von n mit Summanden, die mindestens 3 sind, eine Zahlpartition $P_{m,k}$ von $m =_{\text{def}} n - 2k$ gefunden. Umgekehrt lässt sich so auch aus jeder Zahlpartition von m eine Zahlpartition von n, wobei jeder Summand mindestens 3 ist, erzeugen. Mit Theorem 1.16 folgt nun

$$P^{(3)}_{n,k} = P_{m,k} = P_{n-2k,k} = P_{(n-3k)+k,k} = \sum_{j=1}^{k} P_{n-3k,j}$$

(i) Da die Blöcke 01 und 10 je genau einmal vorkommen sollen, beginnen diese Wörter mit einer Folge von $m \leq n-2$ Zeichen 0 oder 1, gefolgt von $k \leq n-m-1$ Zeichen des jeweils anderen Typs und anschließend $n-m-k$ des ersten Typs. Für jedes m gibt es also $2 \cdot (n-m-1)$ verschiedene Wörter, welche die Bedingung erfüllen, da die Wörter mit 0 oder 1 beginnen können und es für jedes $k \in \{1, \dots, n-m-1\}$ genau ein solches Wort gibt. Somit ergibt sich für die Anzahl insgesamt:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n-2} 2 \cdot (n-m-1) &= 2 \cdot \left(\sum_{m=1}^{n-2} n - \sum_{m=1}^{n-2} m - \sum_{m=1}^{n-2} 1\right) \\
&= 2 \cdot \left((n-2) \cdot n - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-2)\right) \\
&= 2 \cdot \left((n-2)(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} = (n-2)(n-1)
\end{aligned}$$

(j) Wir suchen alle geordneten Zahlpartitionen von $n = 13$ mit $k \in \{2, \dots, 5\}$ Summanden, da einstellige Zahlen nie die Quersumme 13 erreichen können und die einzige sechsstellige Zahl in diesem Bereich 100000 ebenfalls nicht die Quersumme 13 hat. Weiterhin müssen aus den 5 möglichen Positionen diejenigen ausgewählt werden, welche belegt werden um z.B. $00049, 00409, 04009$ etc. zu unterscheiden. Weiterhin müssen wir für $k \in \{2, \dots, 5\}$ Summanden über 10 verbieten. Dies erreichen wir, indem wir für für $k = 5$ $a_5 = 0$ (bei 5 Summanden kann keiner über 10 sein), für $k = 4$ $a_4 = 4$ (es kann jeder Summand einmal 10 sein), für $k = 3$ $a_3 = 9$ (ein Summand kann 11 und die restlichen 1 sein, 3 Möglichkeiten oder 1 Summand 11 und die anderen 2 und 1, $3! = 6$ Möglichkeiten) und für $k = 2$ $a_2 = 6$ (ein Summand kann 10, 11 oder 12 sein, Reihenfolge soll berücksichtigt werden, $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten) abziehen. Mit Theorem 1.17 folgt für die Anzahl:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} \left(\binom{n-1}{k-1} - a_k \right) &= \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k+1} \left(\binom{12}{k} - a_{k+1} \right) \\ &= 10 \cdot (12 - 6) + 10 \cdot (66 - 9) + 5 \cdot (220 - 4) + 1 \cdot 495 \\ &= 2\,205\end{aligned}$$

Kreativität: **10 Punkte**

Beweisen Sie durch kombinatorische Argumente folgende Aussagen für fallende Faktorielle:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}_+$ gilt $n^{\underline{k}} = k \cdot (n-1)^{\underline{k-1}} + (n-1)^{\underline{k}}$.

(b) Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt $(n+m)^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot n^{\underline{k-i}} \cdot m^{\underline{i}}$.

Bemerkung: Wir setzen $n^{\underline{k}} =_{\text{def}} 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$ gilt.

Lösung:

(a) Wir überlegen uns, wie wir das Ziehen von k Elementen aus n ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge auf das Ziehen aus $n - 1$ Elementen zurückführen können. Sei hierzu A eine Menge mit $\|A\| = n$. Für ein $x \in A$ definieren wir weiterhin $B =_{\text{def}} A \setminus \{x\}$ mit $\|B\| = n - 1$ (genau ein Element $x \in A$ ist nicht in B enthalten). Weiterhin definieren wir die Menge aller k-Tupel mit Elementen aus A, die alle paarweise verschieden sind:

$$T = \{(t_1, \dots, t_k) \mid (t_1, \dots, t_k) \in A^k, t_i \neq t_j \text{ für } i \neq j\}$$

mit $\|T\| = n^{\underline{k}}$ und eine Partition dieser Menge

$$T_x = \{(t_1, \dots, t_k) \mid (t_1, \dots, t_k) \in T, t_i = x \text{ für ein } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

$$T_{\not x} = \{(t_1, \dots, t_k) \mid (t_1, \dots, t_k) \in T, t_i \neq x \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Es gilt offensichtlich $T_x \cap T_{\not x} = \emptyset$ und $T_x \cup T_{\not x} = T$. Wir betrachten nun die Kardinalitäten von T_x und $T_{\not x}$. In T_x ist ein Element des Tupels x und steht an einer von k Positionen. Die restlichen $k - 1$ Elemente des Tupels werden aus B gezogen: $\|T_x\| = k \cdot (n-1)^{\underline{k-1}}$. In $T_{\not x}$ werden alle k Elemente aus B gezogen: $\|T_{\not x}\| = (n-1)^{\underline{k}}$. Insgesamt ergibt sich also

$$n^{\underline{k}} = \|T\| = \|T_x\| + \|T_{\not x}\| = k \cdot (n-1)^{\underline{k-1}} + (n-1)^{\underline{k}}$$

(b) Es seien A und B disjunkte Mengen mit $\|A\| = m$ und $\|B\| = n$. Für jedes $i \in \{0, \dots, k\}$ definieren wir die Menge

$$X_i =_{\text{def}} \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_p \neq x_q \text{ für } p \neq q, (x_{j_1}, \dots, x_{j_i}) \in A^i, \\ (x_{j_{i+1}}, \dots, x_{j_k}) \in B^{k-i}, (j_1, \dots, j_k) \text{ Permutation von } [k]\}$$

Für ein Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ wählt man nun zunächst i Indizes $j_1, \dots, j_i$ für die Elemente aus A ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge: $\binom{k}{i}$. Anschließend werden i Elemente aus A und $k - i$ Elemente aus B jeweils ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge gezogen, um das Tupel mit Werten zu versehen. Damit gilt

$$\|X_i\| = \binom{k}{i} \cdot m^{\underline{i}} \cdot n^{\underline{k-i}} = \binom{k}{i} \cdot n^{\underline{k-i}} \cdot m^{\underline{i}}$$

Wegen $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt nun

$$(n+m)^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^{k} \|X_i\| = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot n^{\underline{k-i}} \cdot m^{\underline{i}}.$$

Transfer: **10 Punkte**

Sie arbeiten in einem *Games Engineering*-Projekt mit, in dem eine Software für historische Sportsimulationen entwickelt und implementiert werden soll. Dabei sollen fiktive Computerspielelemente mit realen Sportspielabläufen (wie zum Beispiel Fernsehmitschnitten) vermischt werden. Um einen möglichst realitätsnahen Eindruck beim Nutzer zu gewährleisten, müssen im Rahmen des *Interactive Narrative Design* für Abweichungen von der Realität (weil der Nutzer beispielsweise zu gut spielt) Fortsetzungen gefunden werden, die wieder auf reale Ereignisse und Ergebnisse zurück führen.

Als Sportart wurde Ihnen Basketball zugeteilt. Sie beginnen Ihre Analyse der Projektaufgabe mit Überlegungen dazu, wie viele unterschiedliche Spielverläufe überhaupt möglich sind. Dazu wählen Sie folgendes Ereignis: Im zweiten Spiel der *1956 Western Division Semifinals* der *NBA* (National Basketball Association) besiegten die *Minneapolis Lakers* die *Saint Louis Hawks* mit 133:75 und damit mit dem höchsten jemals einem Playoff-Spiel der NBA erzielten Punkteabstand.

(a) Wie viele verschiedene Folgen von Punktezwischenständen führen zu dem gleichen Ergebnis, wenn Sie dabei davon ausgehen, dass es 1956 in der NBA für erfolgreiche Korbwürfe 1 oder 2 Punkte geben konnte?

(b) Wie viele verschiedene Folgen von Punktezwischenständen führen ebenfalls zu dem gleichen Ergebnis, wenn Sie davon ausgehen, dass es damals bereits die Dreipunktelinie gegeben hätte und es somit für erfolgreiche Korbwürfe 1, 2 oder 3 Punkte geben konnte?

Geben Sie möglichst auch allgemeine Formeln für Ihre konkreten Ergebnisse an.

Lösung:

(a) Wir überlegen uns, wie die Punktzahlen zustande kommen können. Erzielt eine Mannschaft n Punkte, so können maximal $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ der Punktwürfe 2-Punkte-Würfe gewesen kein. Jede kleinere Anzahl von 2-Punkte-Würfen ist ebenfalls möglich. Mit der Anzahl der 2-Punkte-Würfe ändert sich auch die Anzahl der Summanden. Bei 0 2-Punkte-Würfen sind alle Summanden 1, also gibt es genau n Stück. Mit jeder größeren Anzahl von 2-Punkte-Würfen reduziert sich die Anzahl der Summanden um 1. Weiterhin ist die Reihenfolge von 1- und 2-Punkte-Würfen für die Folge der Punktezwischenstände, weshalb wir die Positionen der Summanden 2 ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge ziehen. Es ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k}$$

Auf diese Weise lassen sich die Folgen von Punktezwischenständen für jede Mannschaft an sich berechnen. Diese Anzahlen werden anschließend multipliziert, um alle Kombinationen der Punktezwischenstände der beiden Mannschaften zu erhalten.

Weiterhin ist relevant, welche Mannschaft wann ihre Punktwürfe erzielt. Wählen uns hier Positionen der Punktwürfe der einen Mannschaft zwischen den Punktwürfen der anderen Mannschaft ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen. Es ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{66} \sum_{i=0}^{37} \binom{133-k}{k} \binom{75-i}{i} \binom{(133-k+1)+(75-i)-1}{75-i} \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{66} \sum_{i=0}^{37} \binom{133-k}{k} \binom{75-i}{i} \binom{208-k-i}{75-i} \\ &= 729\,851\,485\,726\,772\,374\,120\,415\,677\,757\,567\,518\,003\,382 \ddots \\ &\quad 173\,048\,592\,291\,870\,685\,613\,195\,571\,759\,326\,931\,726\,656\,930 \\ &\approx 7.23 \cdot 10^{86} \end{aligned}$$

(b) Die Lösung ergibt sich analog zu Teilaufgabe (a), nur dass wir nun für jeden 3-Punkte-Wurf die Gesamtzahl der Würfe um 2 reduzieren müssen und anschließend lediglich für die verbleibenden Summanden 1 Ersetzungen durch Summanden 2 berechnen müssen. Es ergibt sich nun für jede Mannschaft

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n-2k-k}{2} \right\rfloor} \binom{n-2k-\ell}{k} \binom{(n-2k-k)-\ell}{\ell} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n-3k}{2} \right\rfloor} \binom{n-2k-\ell}{k} \binom{n-3k-\ell}{\ell}$$

die Gesamtzahl der Summanden ist nun $n-2k-\ell$. Nach Einfügen der Reihenfolge, in der die beiden Mannschaften Punkte erzielen, ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{44} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{133-3k}{2} \right\rfloor} \sum_{i=0}^{25} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{75-3i}{2} \right\rfloor} \binom{133-2k-\ell}{k} \binom{133-3k-\ell}{\ell}$$

$$\cdot \binom{75-2i-j}{i} \binom{75-3i-j}{j} \binom{(133-2k-\ell+1)+(75-2i-j)-1}{75-2i-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{44} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{133-3k}{2} \right\rfloor} \sum_{i=0}^{25} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{75-3i}{2} \right\rfloor} \binom{133-2k-\ell}{k} \binom{133-3k-\ell}{\ell}$$

$$\cdot \binom{75-2i-j}{i} \binom{75-3i-j}{j} \binom{208-2(k+i)-\ell-j}{75-2i-j}$$

$$= 1\,472\,499\,597\,652\,684\,264\,824\,378\,577\,012\,616\,693\,193\,279\,509 \ddots$$

$$824\,122\,155\,098\,612\,677\,818\,769\,738\,297\,596\,459\,201\,194\,661\,546$$

$$\approx 1.47 \cdot 10^{93}$$