Diskrete Strukturen, Klausur, 2013, 2. Termin

Aufgabe 1: Graphen

Gegeben: ein Graph (ein Bid)

a) zu finden: maximal Abstand zwischen zwei Knoten

b) minimaler maximaler Abstand zwischen zwei Knoten

c) zu bestimmen: X'

d) zu finden: Prüfer-Code (vom Bild zum Prufer-Code

e) gegeben ein Graph(Bild) mit 10 Knoten. Man sollte die Knoten so bezeichnen, dass der Prüfer-Code monoton aufsteigend ist.

Aufgabe 2: Algebraische Strukturen

a) gegeben eine Verknüpfungstabelle. Man sollte sie bezüglich assoziativität ergänzen.

b) gegeben eine Verknüpfungstabelle. Man sollte sie so ergänzen, dass jedes Element i-1 linkinverse Elmente hat.

$\circ$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

c) gegeben eine Vernüpfungstabelle von einer Algebra. Bestimmen, ob es eine Gruppe ist.

d) gegeben $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ \rangle$, $\circ : (x, y) \mapsto max(x, y)$. Bestimmen, was für ein Algebratyp das ist.

e) gegeben $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$, $\circ : (x, y) \mapsto |x - y|$. Bestimmen, was für ein Algebratyp das ist.

Aufgabe 3: Kombinatorik

a) Bestimmen sie die Anzahl von Funktionen, $\{0,1,2\}^n \to \{0,1\}$die keine Nullstellen besitzen.

b) Bestimmen sie die Anzahl von Funktionen, $\{0,1,\}^n \to \{0,1,2\}$die genau so viel Nullstellen wie 1 und 2 zusammen besitzen.

c) Bestimmen sie die Anzahl von Funktionen, $\{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$, wo $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1$.

d) Bestimmen sie die Anzahl von Funktionen, $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, wo 0 und 1 nicht gleich oft vorkommen.

e) Bestimmen sie die Anzahl von Funktionen, $\{0,1\}^n \to \{0,1,2\}$die keine Nullstellen besitzen.

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeit

Aufgabe über Kniffel. Sieh Klausur zur Vorlesung 'Mathematische Grundlagen 2', 2. Termin, Aufgabe 5

Aufgabe 5: Kombinatorik

Wie viele Zahlen aus {2,...,360} mindestens einen der Primfaktoren von 360 haben.

Aufgabe 6: Rekursionen

a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion zur Folge $F_n = 2F_{n-1} + 3F_{n-2}$mit $F_0 = 3, F_1 = 2$

b) Bestimmen Sie F_n(ein explizieter Ausdruck für F_n)

Aufgabe 7: Wahrscheinlichkeit

Bayes

Eine Aufgabe über Boxen. Ein Treffer, wenn er mindestens von einem der beiden Richter anerkannt wird. Dann werden die Treffer in den Computer eingetragen. Dann sind Wahrscheinlichkeiten gegeben, ob der Treffer richtig als TReffer eingeschätzt wurde und nicht. (Die Aufgabe habe ich mir nicht so gut gemerkt. Wichtig war aber zu erkennen, dass es die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer 1/4 lag, da 2 Richter den Treffer einschätzen.

Klausur zur Vorlesung „Mathematik: Diskrete Strukturen“

2. Termin: 16. Oktober 2013, 10:15–12:00 Uhr

Matr.-Nr.: ____________________ **Studienfach:** ____________________

PIC:

Hinweise: Außer einem beidseitig, von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

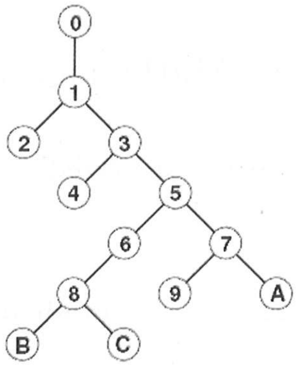
Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$:



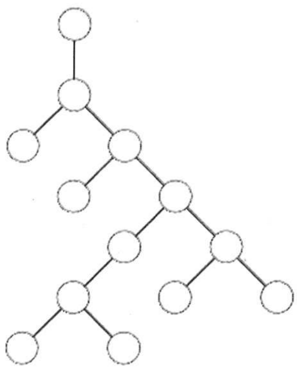
Die Knotenmenge V ist geordnet: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \mathsf{A} < \mathsf{B} < \mathsf{C}$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

(c) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

(d) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_1 \ldots t_{11}$ monoton aufsteigend ist, d.h., damit $t_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in [10]$ gilt?



(e) Betrachten Sie den aus T erzeugten Graphen $T^2 = (V, E')$ mit

$$E' =_{\text{def}} E \cup \{\ \{u, v\} \mid u, v \in V \text{ und es gibt ein } z \in V \text{ mit } \{u, z\} \in E \text{ und } \{z, v\} \in E\ \}$$

Wie groß ist der chromatische Index $\chi'(T^2)$?

Aufgabe 2: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

(a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für $\circ$ an, sodass jedes Element $i \in \{1,2,3,4\}$ der Algebra $\langle\{1,2,3,4\},\circ\rangle$ genau $i-1$ linksinverse Elemente besitzt:

$\circ$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

(b) Können Sie die Verknüpfungstabelle für $\circ$ ergänzen, dass $\circ$ assoziativ auf $\{a,b,c,d\}$ ist:

$\circ$	a	b	c	d
a	a		b	a
b	c	b		b
c		a	c	c
d	a	b	c	d

(c) Ist die Algebra $\{a,b,c\}$ mit der Verknüpfung

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

eine Gruppe?

(d) Ist die Algebra $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},\circ\rangle$ mit $\circ : (x,y) \mapsto \max\{x,y\}$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

(e) Ist die Algebra $\langle\mathbb{N},\circ\rangle$ mit $\circ : (x,y) \mapsto |x-y|$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

Aufgabe 3: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele Funktionen $f: \{0,1,2\}^n \to \{0,1\}$ gibt es, die keine Nullstelle besitzen?

(b) Wie viele Funktionen $f: \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, die keine Nullstelle besitzen?

(c) Wie viele Funktionen $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte 0 und 1 genau gleich oft vorkommen?

(d) Wie viele Funktionen $f: \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte 0, 1 und 2 genau gleich oft vorkommen?

(e) Wie viele Funktionen $f: \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, für die stets $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1$ gilt?

Aufgabe 4: Kombinatorik **10 Punkte**

Wie viele Zahlen in der Menge $\{2, 3, \dots, 360\}$ haben mindestens einen gemeinsamen Primfaktor mit 360?

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Beim Würfelspiel *Kniffel* (*Yahtzee, Knobeln, Pasch*) wird mit fünf Würfeln gespielt. Jeder Spieler darf in einer Runde bis zu drei Mal hintereinander würfeln. Dabei darf man „passende" Würfel zur Seite legen und mit den verbleibenden Würfeln weiterwürfeln. Die nach dem dritten Wurf liegenden Würfeln werden als Spielergebnis gewertet.

Eine *Straße* besteht aus mindestens vier aufeinander folgende Augenzahlen. Es gibt *kleine* Straßen mit den vier Augenzahlen 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 sowie *große* Straßen mit den fünf Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 2, 3, 4, 5, 6. Große Straßen bringen mehr Punkte als kleine Straßen.

In einer gegebenen Spielsituation sind die beiden Straßen die einzigen Spielfiguren, für die Ihnen auf dem Spielzettel noch Spielergebnisse fehlen. Daher versuchen Sie Straßen zu würfeln.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf eine kleine Straße zu bekommen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf eine beliebige Straße zu bekommen?

(c) Wie oft müssen Sie Würfe mit allen Würfeln im Erwartungswert wiederholen, um eine beliebige Straße in einem Wurf zu bekommen?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die nach zwei Würfen zur Seite gelegte kleine Straße 2, 3, 4, 5 im dritten Wurf in eine große Straße umwandeln?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im dritten Wurf eine Straße zu bekommen, wenn Sie nach zwei Würfen 3 und 4 zur Seite gelegt haben und Sie im dritten Wurf mit drei Würfeln weiterwürfeln?

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Beim Amateurboxen entscheidet die Anzahl der Treffer über den Sieg. Dazu werden Treffer gezählt. In unserem Fall wird ein Treffer anerkannt, wenn mindestens 2 von 3 Kampfrichtern einen Schlag innerhalb einer Sekunde als Treffer werten. Die Kampfrichter geben dazu unabhängig voneinander die Treffer in einen Computer ein. Einen korrekten Treffer erkennt jeder Kampfrichter in 9 von 10 Fällen. Außerdem ist einer von 10 Schlägen ein Treffer.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Treffer vorliegt, wenn der Computer einen Treffer anzeigt?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von BAYES.

Aufgabe 7: Rekursionen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} 2F_{n-1} + 3F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2 \\ F_1 &=_{\text{def}} 2 \\ F_0 &=_{\text{def}} 3 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$.

(b) Bestimmen Sie F_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

2. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

3. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH INFORMATIK & INFORMATIONSWISSENSCHAFT
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Volker Mühlberg, Julian Müller, Kevin Sieg, Steffen Sievering

Diskrete Strukturen
SS 2012

Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

1. Termin: 25. Juli 2012, 10:15–12:00 Uhr

Name: ____________________ **Vorname:** ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ **Studienfach:** ____________________

PIC:

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

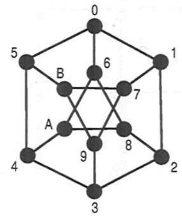
Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{0, \ldots, 9, A, B\}$:



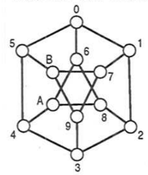
(a) Ist der Graph G planar? - Wenn ja, geben Sie eine überschneidungsfreie Einbettung in der Ebene an. Anderenfalls geben Sie eine Begründung an, warum der Graph nicht planar sein kann.

ja

(b) Ist der Graph G hamiltonsch? - Wenn ja, geben Sie einen Hamiltonkreis an.

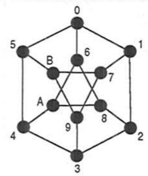
nein

(c) Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$? - Geben Sie eine passende Knotenfärbung an.



3

(d) Was ist der chromatische Index $\chi'(G)$? - Geben Sie eine passende Kantenfärbung an.



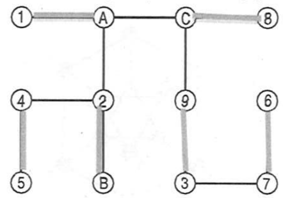
3

(e) Ist der Graph G bipartit? - Wenn ja, geben Sie eine Partition der Knotenmenge an.

Nein! =(

Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = [9] \cup \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$:



Die Knotenmenge V ist wie folgt geordnet: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \mathsf{A} < \mathsf{B} < \mathsf{C}$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

8

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

C

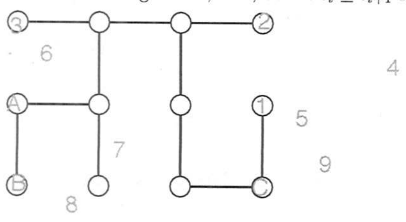
(c) Wie viele perfekte Matchings besitzt der Baum?

1

(d) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

A 4 2 7 3 9 C C 2 A

(e) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_1 \ldots t_{10}$ monoton absteigend ist, d.h., damit $t_i \geq t_{i+1}$ für alle $i \in [9]$ gilt?



Diskrete Strukturen SS 2012 1. Termin

Aufgabe 3: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass in jeder zyklischen additiven Gruppe $G = \langle G, + \rangle$ ungerader Ordnung die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine zyklische additive Gruppe $G = \langle G, + \rangle$ gerader Ordnung gibt, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.

Aufgabe 4: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen die Gruppe $\mathcal{S}_4$. Das neutrale Element der Gruppe ist $\mathrm{id} : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\} : x \mapsto x$. Wir betrachten die folgenden in Zyklenschreibweise gegebenen Permutationen:

$$p = (1\ 2)(3\ 4), \qquad q = (1\ 2)(3)(4)$$

(a) Gilt $p \circ p = \mathrm{id}$?

(b) Gilt $p \circ q = q \circ p$?

(c) Es seien $r =_{\text{def}} p \circ q$ und $U =_{\text{def}} \{\mathrm{id}, p, q, r\}$. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Elemente von U an.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge U für jedes Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält.

(e) Aus den beiden obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist. Ist die Gruppe $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ isomorph zur Gruppe U?

Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ heißt *biquadratfrei*, wenn es keine Biquadratzahl k^4 mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ gibt, die n teilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der biquadratfreien Zahlen zwischen 2 und 1000.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 6: Kombinatorik **10 Punkte**

Die Menge der Spielkarten beim *französischem Skatblatt* ist wie folgt gegeben:

$$\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{7, 8, 9, 10, \mathsf{Bube}, \mathsf{Dame}, \mathsf{König}, \mathsf{As}\}$$

Die Elemente aus der Menge $\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ heißen *Farben*. Die Elemente aus der Menge $\{7, 8, 9, 10, \mathsf{Bube}, \mathsf{Dame}, \mathsf{König}, \mathsf{As}\}$ heißen *Werte*.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten der Wert Bube in allen Farben vorkommt?

28 über 6 alle karten außer den buben zu ziehen
.... einfach 6 aus 28..

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten der Wert Bube in mindestens einer Farbe vorkommt?

(4 über 1) * (31 über 9)
eine feste position 9 andere aus 31

~~(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Karten auszuwählen, so dass unter den augewählten Karten genau zwei Farben genau gleich oft vorkommen?~~

~~(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es $k \geq 4$ Karten auszuwählen, so dass unter den ausgewählten Karten genau drei Farben vorkommen?~~

(e) Wie viele Karten müssen Sie höchstens auswählen, so dass unter den ausgewählten Karten mindestens $1 \leq k \leq 8$ Werte vorkommen?
naja, wenn du einen unterschiedlichen Wert (k = 1) haben willst, musst du maximal einmal ziehen
also 0*4 + 1

(k-1) * 4 + 1

bei zwei unterschiedlichen Werte 5 Mal (erst alle vier Karten eines Wertes und dann der zweite Wert) und so weiter

Aufgabe 7: Rekursionen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende homogene, lineare Rekursionsgleichung dritter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-3} \qquad \text{für } n \geq 3 \\ F_2 &=_{\text{def}} c \\ F_1 &=_{\text{def}} b \\ F_0 &=_{\text{def}} a \end{aligned}$$

Hierbei stehen a, b, c für beliebige ganze Zahlen.

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (in Abhängigkeit von a, b, c).

(b) Bestimmen Sie F_n für die Anfangsbedingungen $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

2. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

3. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub / Mennatallah El-Assady, Volker Mühlberg, Julian Müller, Kevin Sieg, Steffen Sievering

Diskrete Strukturen
SS 2012

Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

2. Termin: 17. Oktober 2012, 10:15–12:00 Uhr

Name: ______________ **Vorname:** ______________

Matr.-Nr.: ______________ **Studienfach:** ______________

PIC:

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen und machen Sie deutlich, wenn Sie Sätze, Hilfssätze, Algorithmen, oder Datenstrukturen aus der Vorlesung verwenden. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Die Bearbeitungszeit beträgt **105 Minuten**. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: ________ bis ________ Uhr, ________ bis ________ Uhr

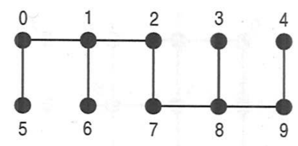
Vorzeitige Abgabe: ________ Uhr

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	10	10	10	70
erreichte Punkte								

(S. Kosub)

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:



Die Knotenmenge V ist wie folgt geordnet: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

7

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

2,7

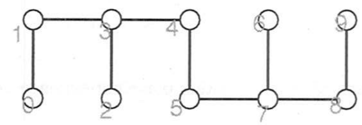
(c) Wie viele perfekte Matchings besitzt der Baum?

1

(d) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

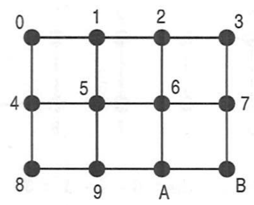
8 9 0 1 1 2 7 8

(e) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_0 \ldots t_7$ monoton aufsteigend ist, d.h., damit $t_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gilt?



Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{0, \dots, 9, \mathsf{A}, \mathsf{B}\}$:



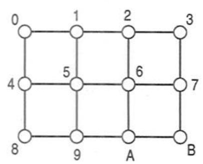
(a) Ist der Graph G hamiltonsch? - Wenn ja, geben Sie einen Hamiltonkreis an.

ja - 8 4 0 1 5 6 2 3 7 B A 9 8

(b) Ist der Graph G eulersch? - Wenn ja, geben Sie einen Eulerkreis an.

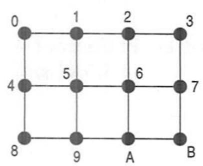
Nein

(c) Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$? - Geben Sie eine passende Knotenfärbung an.



2

(d) Was ist der chromatische Index $\chi'(G)$? - Geben Sie eine passende Kantenfärbung an.



4

(e) Ist der Graph G bipartit? - Wenn ja, geben Sie eine Partition der Knotenmenge an.

ja

Diskrete Strukturen SS 2012 2. Termin

Aufgabe 3: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Die Menge der bijektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, wobei wir die Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Abbildungen f und g als $f \circ g : x \mapsto g(f(x))$ definieren. Das neutrale Element der Gruppe ist $\mathrm{id} : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\} : x \mapsto x$.

Wir betrachten die beiden bijektiven Funktionen $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad g : x \mapsto 1 - x$$

(a) (*2 Punkte*) Gilt $f \circ g = g \circ f$?

(b) (*4 Punkte*) Es seien $r =_{\text{def}} f \circ g$, $s =_{\text{def}} g \circ f$ und $U =_{\text{def}} \{\mathrm{id}, f, g, r, s\}$. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Elemente von U an.

(c) (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Menge U für jedes Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält.

(d) (*2 Punkte*) Aus den beiden obigen Aussagen folgt, dass U eine Gruppe ist. Ist U eine zyklische Gruppe?

Aufgabe 4: Kombinatorik **10 Punkte**

Eine Permutation $\pi : [n] \to [n]$ heißt *fixpunktfrei*, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von 5 Elementen.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen?

n^2 über n

(b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n^2

(c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n!

(d) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in mindestens einer senkrechten Reihe keine Figur steht?

a-b: (n^2 über n) - n^2

(e) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Figuren schwarzer Farbe und $n-k$ ununterscheidbare Figuren weißer Farbe auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe genau eine Figur (beliebiger Farbe) steht?

n^n * (n über k)?

n^n als Grundlage und dann mit (n über k) die Zeilen auswählen, wo schwarze Figur

(unklar)

Aufgabe 6: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ bezeichnen wir die Gruppe der Permutationen von n Elementen mit der Hintereinanderausführung $\circ$, wobei diesmal $\pi \circ \sigma : [n] \to [n] : x \mapsto \sigma(\pi(x))$ für Permutationen $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt.

Das *Zentrum* Z_n von $\mathcal{S}_n$ ist wie folgt definiert:

$$Z_n =_{\text{def}} \{\ \pi \in \mathcal{S}_n \mid \pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi \text{ für alle } \sigma \in \mathcal{S}_n \ \}$$

(a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie Z_2.

(b) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie Z_3.

(c) (*4 Punkte*) Wie viele Elemente enthält Z_n für $n > 3$? - Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7: Rekursionen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende inhomogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} F_{n-2} + a \qquad \text{für } n \geq 2 \\ F_1 &=_{\text{def}} 1 \\ F_0 &=_{\text{def}} 0 \end{aligned}$$

Hierbei steht a für eine beliebige reelle Zahl.

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (in Abhängigkeit von a).

(b) Bestimmen Sie F_n für $c = 2$.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Diskrete Strukturen SS 2012 *2. Termin*

2. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

3. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Universität Konstanz
Fachbereich Übungs- & Klausurwissenschaft
Prof. Dr. Karl Friedrich Hauber et al.

Mathematische Grundlagen der Informatik
SoSe 2011

Probeklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Termin: 13. Juli 2011, 08:00–09:00 Uhr

Name: ______________________ **Vorname:** ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ **Studienfach:** ______________________

PIC: ______________________

Hinweise: Es sind außer einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine Hilfsmittel erlaubt. Schreiben Sie nicht in grüner oder roter Farbe und nicht mit Bleistift. Begründen Sie Ihre Aussagen. Sie schreiben diese Klausur unter dem Vorbehalt, dass Sie zugelassen sind. Wenn Sie das Ergebnis dieser Klausur per Aushang erfahren wollen, merken Sie sich bitte Ihren persönlichen Identifizierungs-Code (PIC). Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hörsaal verlassen: _____ bis _____ Uhr, _____ bis _____ Uhr

Vorzeitige Abgabe: _____ Uhr

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Aufgabe 1: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation } \}.$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Verknüpfung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 : [n] \to [n] : x \mapsto \pi_2(\pi_1(x)).$$

Damit ist $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ eine Gruppe.

Ferner sei die Permutation π in Zyklenschreibweise gegeben durch $\pi = (1\,2)(3)(4\,6\,5)$.

(a) Geben Sie π in Matrix- und in Tupelschreibweise an. (3 Punkte)

In Matrixschreibweise lautet die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

in Tupelschreibweise also

$$\pi = (2, 1, 3, 6, 4, 5).$$

(b) Bestimmen Sie das Inverse von π in $\mathcal{S}_6$ (in Zyklenschreibweise). (2 Punkte)

Das Inverse von π ist

$$\pi^{-1} = (1\,2)(3)(6\,5\,4).$$

Dies sieht man wie folgt: Die Zyklen $(1\,2)$ und (3) sind jeweils ihre eigenen Inversen; für den Zyklus $(6\,5\,4)$ überlegt man sich schnell (z. B. anhand der Matrixdarstellung aus (a)), wie man die Elemente permutieren muss, um die Permutation π „rückgängig" zu machen.

(c) Bestimmen Sie $\pi^{-1} \circ \pi^3$ in $\mathcal{S}_6$. (2 Punkte)

Assoziativität ist gegeben, berechnet also

$$\pi^2 = (1, 2, 3, 5, 6, 4).$$

(d) Welche Ordnung besitzt π in $\mathcal{S}_6$? (3 Punkte)

Da π einen Zyklus $(1\,2)$ der Ordnung 2 sowie einen Zyklus $(4\,6\,5)$ der Ordnung 3 enthält, besitzt π die Ordnung

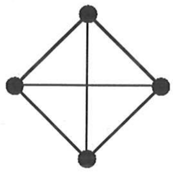
$$\text{kgV}(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

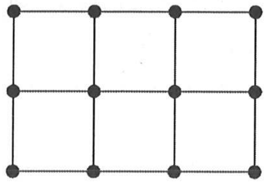
Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

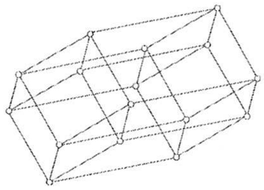
Gegeben sei die Graphenmenge $M = \{K_4,\ M_{3,4},\ Q_4\}$.

Hinweis: Bei den Teilaufgaben (a)–(d) ist keine Begründung notwendig.

(a) Zeichnen Sie die Graphen aus M (ohne Schleifen und Mehrfachkanten). (2 Punkte)







(b) Bestimmen Sie für jeden Graphen $G \in M$ den maximalen Knotengrad $\Delta(G)$. (2 Punkte)

$$\Delta(K_4) = 3, \qquad \Delta(M_{3,4}) = 4, \qquad \Delta(Q_4) = 4.$$

(c) In welchen Graphen aus M existiert ein perfektes Matching? (2 Punkte)

In allen Graphen aus M.

(d) Bestimmen Sie $\chi(M_{3,4})$ und $\chi'(M_{3,4})$. (2 Punkte)

$$\chi(M_{3,4}) = 5, \qquad \chi'(M_{3,4}) = 4.$$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planare Graph $G = (V, E)$ enthält einen Knoten v mit $\deg_G(v) \leq 5$. (2 Punkte)

Die Aussage ist wahr. Wir beweisen durch Widerspruch:

Angenommen, in einen planaren Graphen $G = (V, E)$ habe jeder Knoten einen Grad von mindestens 6, d. h. $\deg_G(v) \geq 6$ für alle $v \in V$.

Dann würde nach Proposition 3.3 gelten:

$$\|E\| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \|V\|.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Theorem 3.24. $\square$

Aufgabe 3: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Eine *ID-Nummer* bestehe aus einer Folge von drei Buchstaben über dem Alphabet $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots, \mathsf{z}\}$ und einer anschließenden Folge von fünf Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Wie viele verschiedene ID-Nummern gibt es, wenn für die Ziffern Wiederholungen zulässig sind, für die Buchstaben aber nicht? (3 Punkte)

Das angegebene Alphabet besteht aus 26 Buchstaben; damit gibt es

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10^5$$

verschiedene ID-Nummern.

(b) Wie viele Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, die genau 3 Nullstellen besitzen? (3 Punkte)

Es gibt für $n = 1$ keine (da $\|\{0,1\}^1\| = 2$ und $\|f(\{0,1\}^1)\| \leq 2$ ist) und für $n \geq 2$

$$\binom{2^n}{3} \cdot 2^{2^n - 3}$$

viele solche Funktionen.

(c) Wie viele Zahlen aus $M = \{100, 101, \ldots, 200\}$ sind durch keine der Zahlen 3, 4, 5, 6 teilbar (ohne Rest)?

(4 Punkte)

Wir benutzen das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Zunächst stellen wir fest: Ist eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar. Damit reduziert sich das Problem auf die Frage, wie viele Zahlen aus der angegebenen Menge weder durch 3 noch durch 4 noch durch 5 teilbar sind.

Wir definieren für $X \subseteq \{3,4,5\}$:

$$M_X = \|\{\ z \mid z \in M\ \wedge \text{ jede Zahl aus } X \text{ teilt } z\}\|$$

Damit ist die gesuchte Anzahl gegeben durch

$$\begin{aligned} N &=_{\text{def}} 101 - \left(M_{\{3\}} + M_{\{4\}} + M_{\{5\}} - M_{\{4,5\}} - M_{\{3,5\}} - M_{\{3,4\}} + M_{\{3,4,5\}}\right) \\ &= 101 - 33 - 26 - 20 + 5 + 6 + 8 - 1 = 40. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Rekursionsgleichungen **10 Punkte**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge (a_n) sowie einen expliziten Ausdruck für a_n.

Wir verwenden den üblichen Algorithmus über die Darstellung als formale Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1} + 2F_{n-2})x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x \cdot F_0 x^0 + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + x \cdot F(x) - x + 2x^2 F(x)
\end{aligned}$$

Auflösen nach $F(x)$ führt auf die erzeugende Funktion

$$F(x) = \frac{1}{-2x^2 - x + 1} = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}.$$

(Die Faktorzerlegung des Nenners ermittelt man durch Bestimmung der Lösungen der Gleichung $-2x^2 - x + 1 = 0$ und Darstellung des Nenners mit den entsprechenden Linearfaktoren.)

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}.$$

Wir lesen direkt ab $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dies führt durch Multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner auf

$$1 = A(1-2x) + B(1+x).$$

Umordnen der Terme nach Potenzen von x liefert

$$1 = (A+B) + (B-2A)x;$$

dem entsprechen durch Koeffizientenvergleich die linearen Gleichungen $A+B = 1$ und $B-2A = 0$ mit den Lösungen $A = \frac{1}{3}$ und $B = \frac{2}{3}$. Der explizite Ausdruck für die Glieder der Folge (a_n) lautet somit

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

Leerseite für Lösungen. Bitte machen Sie jeweils deutlich, auf welche Aufgabe Sie sich beziehen.