

Mathematik: Diskrete Strukturen

Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

May 13, 2015

Vertiefung:

- (a) Drücken Sie die Anzahl der surjektiven Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^2$ mit Hilfe der Stirling-Zahlen zweiter Art aus.

Nach Lemma 4 (Potenzregel) und Kreuzprodukt Definition es gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} ||\{0, 1\}^n|| &= 2^n \\ ||\{0, 1\}^2|| &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

Wir muessen 2^n Funktionsargumente auf 4 Funktionswerte abbilden. Da Stirling-Zahlen auf nicht unterscheidbare Funktionswerte aufzuteilt, sollen wir noch mit $4!$ multiplizieren. Folglich:

$$4! \cdot \left\{ \begin{matrix} 2^n \\ 4 \end{matrix} \right\}$$

- (b) Kein Antwort
- (c) Von 18 Studierenden in einer Spezialvorlesung studieren 7 Mathematik, 9 Physik und 10 Informatik. Davon studieren 3 Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Informatik sowie 5 Physik und Informatik. Ein Student studiert sogar all drei Fächer. Wie viele Studierende studieren keines der drei Fächer?
Sei nach Voraussetzung:

$$||M|| = 7, ||I|| = 10, ||P|| = 9, ||M \cap P|| = 3, ||M \cap I|| = 3, ||P \cap I|| = 5, ||M \cap P \cap I|| = 1$$

Die gesamte Zahl der Studierenden, die in einer Spezialvorlesung studieren ist:

$$||M \cup P \cup I||$$

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$\begin{aligned} ||M \cup P \cup I|| &= ||M|| + ||P|| + ||I|| - ||M \cap P|| - ||M \cap I|| - ||I \cap P|| + ||M \cap P \cap I|| \\ &= 7 + 9 + 10 - 3 - 3 - 5 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Folglich die Anzahl der Studierende, die keines der drei Fächer studieren ist $18 - 16 = 2$.

- (d) Für drei Mengen A, B und C gelten folgende Eigenschaften: $||A|| = 63, ||B|| = 91, ||C|| = 44, ||A \cap B|| = 25, ||A \cap C|| = 23, ||C \cap B|| = 21$. Außerdem gelte $||A \cup B \cup C|| = 139$. Wie groß ist $||A \cap B \cap C||$?

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$||A \cup B \cup C|| = ||A|| + ||B|| + ||C|| - ||A \cap B|| - ||A \cap C|| - ||C \cap B|| + ||A \cap B \cap C||$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|A \cap B \cap C\| &= \|A \cup B \cup C\| - \|A\| - \|B\| - \|C\| + \|A \cap B\| + \|A \cap C\| + \|C \cap B\| \\ \Rightarrow \|A \cap B \cap C\| &= 139 - 63 - 91 - 44 + 25 + 23 + 21 = 10 \end{aligned}$$

(e) Kein Atnwort

(f) Wie viele Zahlen im Bereich $1, 2, \dots, 200$ sind durch keine der Zahlen 3, 7, 11, 27 teilbar?

$$\begin{aligned} &200 - \left(\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{27} \right\rfloor \right) \\ &+ \left\lfloor \frac{200}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{77} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{189} \right\rfloor = 200 - (66 + 28 + 18 + 7) + 9 + 6 + 2 + 2 + 1 = 101 \end{aligned}$$

(g) Menschen haben bis zu 150.000 Kopfhaare. Mindestens wie viele Chinesen haben die exakt gleiche Anzahl von Kopfhaaren (zu einem bestimmten Zeitpunkt), wenn Sie von einer chinesischen Bevölkerung von 1,33 Milliarden ausgehen?

Bemerkung: Wir vermuten, dass alle Chinesen mindestens 1 Haar haben.
Verwenden wir ein Schubfachprinzip. Dann gilt:

$$\left\lceil \frac{1330000000}{150000} \right\rceil = 8867$$

Kreativität:

(a) Zeigen Sie, dass es eine Stadt geben muss, von der man direkt in mindestens die Hälfte aller anderen Städte kommen kann.

Sei k Anzahl der Knoten und n maximale Anzahl der Kanten, die ein Knoten haben kann. Es ist so, dass erster (beliebiger) Knoten hat $n_k = k - 1$, dann nechster ein weniger, also $k - 2$ usw. bis $n_1 = 1$. Die gesamte Anzahl der Kanten können wir so schreiben (Arithmetische Folge):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + n}{2} \cdot n$$

Verwenden wir für Beweis ein Schubfachprinzip. Wir sollen S_n orientierte Kanten auf k Knoten stellen. Nach Schubfachprinzip und Voraussetzung es gilt:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{S_n}{k} \right\rceil &\geq \frac{k}{2} \\ \Rightarrow \left\lceil \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n+1} \right\rceil &\geq \frac{n+1}{2} \\ \Rightarrow \left\lceil \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \right\rceil &\geq \frac{n+1}{2} \\ \Rightarrow \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &\geq \frac{n+1}{2} \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 &\geq \frac{n+1}{2} \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &\geq \frac{n+1}{2} - 1 \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &\geq \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

Da die letzte Aussage gilt, die Voraussetzung ist bewiesen.