Министерство образования и науки Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А. И. Гусева,   А. Н. Тихомирова

Дискретная математика для информатиков и экономистов

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2010

УДК 519.7(075)
ББК 22.19я7
Г96

Гусева А.И., Тихомирова А.Н. **Дискретная математика для информатиков и экономистов**: Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 280 с.

Пособие состоит из семи глав, в которых последовательно излагаются основы теории множеств, отношений, математической логики и исчислений, комбинаторики, теории графов и нечетких моделей, объединенные в рамках дисциплины «Дискретная математика». В конце каждой главы приведены задачи и упражнения.

Книга предназначена для студентов институтов и университетов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Математические методы в экономике», «Экономика и управление на предприятии», а также будет полезна аспирантам и научным сотрудникам, работающим в области информатизации экономики и управления.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент: доцент каф. ПМ ИАТЭ *З.Х. Насыров*

ISBN 978-5-7262-1224-1

Редактор *Е.Н. Кочубей*

Подписано в печать 30.12.2009. Формат 60×84 1/16
Объем 17,5 п.л. Уч. изд. л. 17,5. Тираж 300 экз.
Изд. № 1/1/10. Заказ № 4.
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.
ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42

Оглавление

Предисловие 7
Глава 1. Теория множеств и бинарные отношения 8
1.1. Понятие компьютинга и дискретной математики 8
1.2. Теория множеств 9
1.2.1. Основные понятия теории множеств 9
1.2.2. Способы задания множеств 12
1.2.3. Операции над множествами 12
1.2.4. Свойства операций над множествами 14
1.2.5. Аксиоматика теории множеств 15
1.3. Бинарные отношения и их свойства 17
1.3.1. Декартово произведение и бинарное отношение 17
1.3.2. Функции и операции 18
1.3.3. Способы задания бинарных отношений 19
1.3.4. Свойства бинарных отношений 21
1.3.5. Типы бинарных отношений 25
1.3.6. Экстремальные характеристики отношения упорядочивания 27
1.3.7. Отношение толерантности 29
1.3.8. Операции над отношениями 29
Контрольные вопросы и задания 33

Глава 2. Алгебры и алгебраические системы 40
2.1. Фундаментальные алгебры 40
2.2. Алгебра высказываний 46
2.3. Формализация логических высказываний 49
2.4. Таблицы истинности сложных высказываний 53
2.5. Равносильности алгебры высказываний 56
2.6. Булевы функции 58
2.7. Формы представления логических функций 60
2.7.1. Дизъюнктивные нормальные формы 61
2.7.2. Конъюнктивные нормальные формы 63
2.8. Минимизация булевых функций. Метод Квайна – МакКласки 67
2.8.1. Законы алгебры Буля 67
2.8.2. Упрощение логических функций 69
2.8.3. Метод Квайна – МакКласки 70
2.9. Функционально полные системы логических функций 74
2.9.1. Теорема о полноте системы булевых функций 75
2.9.2. Критерий Поста–Яблонского 76
2.10. Построение логических схем 81
Контрольные вопросы и задания 85

Глава 3. Формальные теории 93
3.1. Основные свойства формальных теорий 93
3.1.1. Выводимость 93
3.1.2. Интерпретация 94
3.1.3. Разрешимость 94
3.1.4. Общезначимость 95
3.1.5. Непротиворечивость 95
3.1.6. Полнота 96
3.1.7. Независимость 96
3.2. Исчисление высказываний 96
3.2.1. Интерпретация 96
3.2.2. Правило подстановки 98
3.2.3. Связь между исчислением высказываний и алгеброй высказываний 98
3.2.4. Основные результаты исследования исчисления высказываний 99
3.2.5. Другие формализации исчисления высказываний 100
3.2.4. Методы проверки тождественной истинности формул 100
3.3. Исчисление предикатов 101
3.3.1. Основные понятия исчисления предикатов 101
3.3.2. Кванторные операции над предикатами 104
3.3.3. Формальное определение исчисления предикатов 105
Контрольные вопросы и задания 110

Глава 4. Теория математических доказательств 114
4.1. Прямые доказательства 114
4.1.1. Правило подстановки 116
4.1.2. Правило вывода 117
4.1.3. Дедукция 117
4.1.4. Математическая индукция 118
4.2. Косвенные доказательства 119
4.2.1. Доказательство «от противного» 120
4.2.2. Доказательство через контрпример 123
Контрольные вопросы и задания 123

Глава 5. Основы комбинаторики 126
5.1. Правила суммы и произведения 127
5.2. Перестановки 128
5.3. Размещения и сочетания 129
5.4. Разбиения 132
5.5. Формула включений и исключений 133
5.6. Рекуррентные соотношения 134
5.7. Производящие функции 136
5.8. Числа Стирлинга второго и первого рода 137
Контрольные вопросы и задания 138

Глава 6. Основы теории графов ... 140
6.1.Основные понятия ... 141
6.1.1. Классификация графов ... 142
6.1.2. Способы задания графов ... 144
6.2. Операции над графами ... 147
6.2.1. Удаление вершин и ребер ... 147
6.2.2. Дополнение ... 148
6.2.3. Объединение графов ... 149
6.2.4. Сложение графов ... 150
6.2.5. Произведение графов ... 151
6.3. Связность в графах ... 152
6.3.1. Компоненты связности ... 152
6.3.2. Вершинная и реберная связность ... 154
6.3.3. Сильная связность в графах ... 155
6.4. Цикломатика графов ... 160
6.4.1. Ациклические графы ... 160
6.4.2. Базисные циклы и цикломатическое число ... 162
6.4.3. Базисные разрезы и ранг ... 164
6.4.4. Эйлеровы графы ... 166
6.4.5. Гамильтоновы графы ... 168
6.5. Диаметр графа ... 170
6.5.1. Основные определения ... 170
6.5.2. Алгоритм нахождения диаметра ... 170
6.5.3. Поиск диаметра при операциях над графами ... 172
6.6. Устойчивость графов ... 173
6.6.1. Внутренняя устойчивость ... 173
6.6.2. Внешняя устойчивость ... 175
6.7. Хроматика графов ... 177
6.7.1. Хроматическое число ... 177
6.7.2. Поиск хроматического числа при операциях над графами ... 182
6.7.3. Двудольное представление графов ... 190
6.7.4. Хроматический класс ... 192
6.8. Преобразование графов ... 194
6.8.1. Реберные графы ... 194
6.8.2. Изоморфизм графов ... 197
6.8.3. Гомеоморфизм графов ... 199
6.8.4. Автоморфизм графов ... 200
6.9. Планарность ... 206
6.9.1. Основные определения ... 206
6.9.2. Критерии непланарности ... 208
6.10. Построение графов ... 211
6.10.1. Преобразование прилагательных в числительные ... 211
6.10.2. Оценка колчества ребер на основе степеней вершин ... 213
6.10.3. Оценка количества ребер сверху и снизу ... 216

6.10.4. Получение недостающих данных на основе формул 218
Контрольные вопросы и задания 220

Глава 7. Нечеткие модели дискретной математики 231
7.1. Введение в теорию нечетких моделей 231
7.1.1. Принятие решений в условиях неопределенности 231
7.1.2. Основы нечетких моделей 233
7.2. Нечеткие множества. Базовые определения 235
7.2.1. Базовые и нечеткие значения переменных 235
7.2.2. Основные определения 237
7.2.3. Типовые функции принадлежности 241
7.3. Операции над нечеткими множествами 242
7.3.1. Операция «дополнение» 243
7.3.2. Операция «пересечение» 243
7.3.3. Операция «объединение» 244
7.3.4. Операция «включение» 245
7.3.5. Операции «равенство» и «разность» 246
7.3.6. Операция «дизъюнктивная сумма» 247
7.3.7. Операции «концентрирование» и «растяжение» 247
7.3.8. Операция «отрицание» 248
7.3.9. Операция «контрастная интенсивность» 249
7.3.10. Операция «увеличение нечеткости» 250
7.4. Обобщенные нечеткие операторы 250
7.4.1. Треугольные нормы 251
7.4.2. Треугольные конормы 251
7.4.3. Декомпозиция нечетких множеств 253
7.5. Индекс нечеткости 254
7.5.1. Оценка нечеткости через энтропию 255
7.5.2. Метрический подход к оценке нечеткости 256
7.5.3. Аксиоматический подход 259
7.6. Нечеткие бинарные отношения 260
7.6.1. Нечеткие бинарные отношения 260
7.6.2. Свойства нечетких бинарных отношений 262
7.6.3. Операции над нечеткими отношениями 263
7.7. Нечеткие числа 265
7.8. Приближенные рассуждения 268
7.8.1. Нечеткая лингвистическая логика 268
7.8.2. Композиционное правило вывода 272
7.8.3. Правило modus ponens 273
Контрольные вопросы и задания 274
Список литературы 278

Предисловие

Данная книга включает в себя многолетний опыт преподавания авторами различных разделов дискретной математики для таких специальностей, как прикладная математика и информатика, прикладная информатика, математические методы в экономике, экономика и управление на предприятии на факультетах «Кибернетика» и «Управление и экономика высоких технологий» НИЯУ МИФИ.

Данный курс знакомит с основами дискретной математики и методами их использования в информатике. Основная задача курса – формирование прочной теоретической основы, необходимой для дальнейшей работы. Разделы, рассмотренные в данной книге, включают в себя теорию множеств и бинарных отношений, математическую логику, основные понятия математических теорий и исчислений, теорию математических доказательств, основы комбинаторики, теорию графов и нечеткие модели. По каждому разделу приводятся задачи и вопросы, часть из них, самые простые, соответствует требованиям Интернет-экзамена, который был проведен в НИЯУ МИФИ весной 2009 г.

Для систематизации материала использованы также рекомендации по преподаванию программной инженерии и информатики в университетах, приведенные в книге Software Engineering 2004: Curriculum Guidelines for Undergraduate Degree Programs in Software Engineering, Computing Curricula 2001: Computer Science. Именно благодаря этим рекомендациям появилась глава, посвященная построению математических доказательств.

Помимо этого, на содержание учебника большое влияние оказало появление в конце 2007 г. профессиональных стандартов в области информационных технологий (ИТ). Часть задач, используемых в данной книге, сформулированы в соответствии с требуемыми в стандартах компетенциями по ряду ИТ профессий.

Разные главы написаны разными авторами. Главы 1–5 написаны профессором А.И. Гусевой, главы 6–7 – доцентом А.Н. Тихомировой.

Глава 1. Теория множеств и бинарные отношения

1.1. Понятие компьютинга и дискретной математики

Компьютинг (computing) – это широкая область знаний, которая не может быть сведена к рамкам какой-либо из составляющих ее дисциплин. Основы компьютинга включают в себя основы информатики и математики, необходимые для проектирования и разработки программных продуктов. Данная область знаний включает в себя также знания о трансформации проекта в реализацию, используемых при этом средствах и о формальных методах создания программного обеспечения. Основываясь на математике и компьютинге, программная инженерия занимается разработкой систематических моделей и надежных методов производства высококачественного программного обеспечения, и данный подход распространяется на все уровни – от теории и принципов до реальной практики создания программного обеспечения, которая лучше всего заметна сторонним наблюдателям.

Программная инженерия посвящена систематическим, управляемым и эффективным методам создания высококачественного программного обеспечения. Поэтому особое внимание уделяется анализу и оценке, спецификации, проектированию и эволюции программного обеспечения. Кроме того, в рамки данной дисциплины попадают вопросы, связанные с управлением и качеством, новизной и творчеством, стандартами, индивидуальными навыками и командной работой, а также профессиональной деятельностью, которые играют жизненно важную роль в программной инженерии. Программная инженерия является такой формой инженерии, которая применяет принципы информатики (computer science) и математики для получения рентабельных решений в области программного обеспечения.

Программная инженерия как наука обладает рядом особенностей:

- основанием программной инженерии является информатика, а не естественные науки;

- основной упор делается на дискретную, а не на непрерывную математику;
- управление производится абстрактными (логическими) объектами вместо конкретных (физических) установок;
- отсутствие «производственной» фазы в традиционном промышленном смысле;
- «сопровождение» программного обеспечения связано с продолжающейся разработкой или эволюцией, а не с традиционным физическим износом.

Дискретная математика является фундаментом для всего компьютинга, включая программную инженерию. Она столь же важна для программной инженерии, как и математический анализ для остальных инженерных специальностей.

1.2. Теория множеств

Многие первичные понятия дискретной математики, как и математики вообще, даются на интуитивном уровне. К ним добавляется система аксиом – утверждения, которые всегда верны, и правила вывода, следуя которым мы получаем возможность строить сколь угодно сложные утверждения, доказывать теоремы, решать задачи и так далее.

В течение своей жизни мы сталкивались с таким подходом неоднократно. Используя понятие числа и операций над ним (сложение, умножение, деление, вычитание), изучали арифметику. Используя понятие точки, прямой, угла и плоскости, мы изучали геометрию. Алгебра и стереометрия, основы математического анализа и аналитической геометрии изучались нами похожим образом.

Такой подход называется аксиоматическим [1]. При изучении теории множеств мы также используем аксиоматический подход.

1.2.1. Основные понятия теории множеств

Множество – совокупность объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью, обладающих неким сходством и объединенных в одно общее.

Элементы множества обозначаются маленькими латинскими буквами, сами множества – заглавными. Например, чтобы показать, что элемент a принадлежит множеству A, мы пишем $a \in A$, в противном случае $a \notin A$.

Во множество можно объединять самые разные объекты. Например, множество натуральных чисел N, множество целых чисел Z, множество действительных чисел R, множество предметов в вашей комнате W и т.д. Элементами множества могут выступать другие множества, например: D = {{синий, красный, зеленый}, {шар, куб, цилиндр, пирамида}}. Такое множество D называется классом или семейством [2] .

Количество элементов во множестве называется ***мощностью,*** или ***кардинальным числом***. Например, мощность множества $M=\{a,b,c\}$ равна трем: $|M| = 3$. В зависимости от мощности множества могут быть конечные и бесконечные. Множество, в состав которого не входит ни одного элемента, называется пустым и обозначается Ø. Мощность пустого множества $\varnothing$ равна 0: $|\varnothing| = 0$. Но мощность множества C, элементом которого является пустое множество, равна единице: $C=\{\varnothing\}$, $|\{\varnothing\}| = 1$.

Множества ***равномощны***, если их мощности равны. Например, множества D = {{синий, красный, зеленый}, {шар, куб, цилиндр, пирамида}} и $K = \{a,b\}$ равномощны.

Определим, что ***конечное множество*** – множество, состоящее из конечного числа элементов, т.е. его мощность представима кардинальным числом, совпадающим с одним из натуральных чисел. В противном случае множество называется ***бесконечным***.

Если каждому элементу бесконечного множества можно поставить в соответствие натуральное число $n_i \in N$, причем только одно n_i, без пропусков и повторений, то это множество называется счетно-бесконечным, и его мощность равна $|N| = \aleph_0$ (алеф-нуль) – первому трансфинитному числу. Второе трансфинитное число $\aleph$ (алеф) вводится как мощность множества R действительных чисел. При этом можно показать, что $\aleph = 2^{\aleph_0}$. Третье трансфинитное число $\aleph_1 = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph}$ (алеф-один), соответствует мощности множества точек в пространстве, заданных координатами (*x, y, z*). Трансфинитные числа обозначают буквами еврейского алфавита. Таким образом, шкалу трансфинитных чисел можно определить, используя только первое трансфинитное число: $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$.

Шкалу можно продолжить и далее (наибольшего трансфинитного числа не существует), однако для больших чисел нельзя придумать множество, мощности которого они соотвутствуют.

Считаем, что множество ***счетно***, если оно состоит из конечного числа элементов, т.е. его кардинальное число совпадает с одним из натуральных чисел, или это множество счетно-бесконечное. Множество ***несчетное***, если оно бесконечно и неравномощно множеству натуральных чисел.

Множество *A* называется ***подмножеством*** *B*, если каждый элемент a_i из *A*, $a_i \in A$, принадлежит одновременно и множеству *B*, $a_i \in B$, $A \subseteq B$.

Если во множестве *B* найдется хотя бы один элемент x_i, который не принадлежит A , $x_i \in B$, $x_i \notin A$, то *A* ***собственное подмножество*** *B*, $A \subset B$. Пустое множество $\varnothing$ всегда является подмножеством любого множества *B*.

Множество *B* в приведенных выше определениях часто называют ***надмножеством*** (***собственным надмножеством***) множества *A*.

Множества *A* и *B* ***равны***, если являются подмножествами (надмножествами) друг друга.

Для каждого множества *M* можно построить новое множество, элементами которого являются все подмножества *M* и только они. Тогда множество *M* называют ***универсумом*** *I*, а множество всех его подмножеств – ***булеаном***.

Например, возьмем в качестве универсума *I* множество натуральных чисел на отрезке [1, 3], I={1, 2, 3}, тогда булеан *B*(*I*)={$\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}. Если мощность универсума равна *m*, то мощность его булеана всегда $|B(I)| = 2^m$.

Теорема 1.1 (основная теорема о конечных множествах). ***Любое конечное множество не может быть эквивалентно никакому своему собственному подмножеству.***

При определении множеств и подмножеств можно столкнуться с ***парадоксом Рассела,*** который заключается в следующем. Рассмотрим множество A всех множеств B, не содержащих себя в качестве элементов, $A = \{B / B \notin B\}$. Если множество B существует, то содержит ли B в качестве элемента самого себя, т. е. $A \in A$? При ответе на этот вопрос мы сталкиваемся с логическим противоречием: если $A \in A$, то по определению элементов множества $A \notin A$. Если $A \notin A$, то $A \in A$.

1.2.2. Способы задания множеств

Для задания множеств необходимо указать элементы, которые ему принадлежат. Это можно сделать следующим образом [3]:

- перечислить элементы множества, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- использовать характеристический предикат $M = \{x/x \in N$ и $x<6\}$;
- с помощью производящей функции $M = \{x$ */ for I:=1 to 5 do x:= i*$\}$.

1.2.3. Операции над множествами

Операции над множествами определяются на некотором универсуме *I*. К ним относятся объединение, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность.

Объединением двух множеств A и B называется новое множество ***C***, элементы которого удовлетворяют условию:

$$C = A \cup B = \{x / x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением двух множеств A и B называется новое множество ***C***, элементы которого удовлетворяют условию:

$$C = A \cap B = \{x / x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Дополнением множества A называется новое множество C, элементы которого удовлетворяют условию:

$$C = \overline{A} = \{x / x \notin A\} = I \setminus A.$$

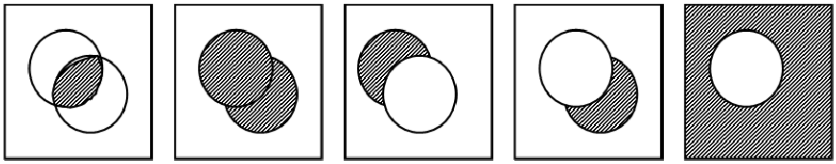
Разностью двух множеств A и B называется новое множество C, элементы которого удовлетворяют условию:

$$C = A \setminus B = \{x \,/\, x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Симметрической разностью двух множеств A и B называется новое множество C, элементы которого удовлетворяют условию:

$$C = A \Delta B = \{x \,/\, (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}.$$

Результаты применения рассмотренных выше операций удобно отображать графически с помощью ***диаграмм Эйлера – Венна*** (рис.1.1).



а) $A \cap B$ **б)** $A \cup B$ **в)** $A \setminus B$ **г)** $B \setminus A$ **д)** $\overline{A}$

Рис. 1.1

При выполнении вычислений множественных выражений самой старшей является операция дополнения, затем пересечения, разности и объединения. Порядок выполнения операций может регулироваться скобками.

Перечисленные операции получили название ***теоретико-множественных операций***.

Задача 1.1. Даны множества $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $C = \{2, 3, 5, 6, 9\}$.

Найти:

1) $A \cap B \cup C$;
2) $\overline{A \cap B} \cup C$;
3) $A \cap \overline{B \cup C}$;
4) $\overline{A \cap B \cup C}$.

Решение. Учитывая старшинство операций, получаем:

$$A \cap B \cup C = \{1,3,9\} \cup \{2,3,5,6,9\} = \{1,2,3,5,6,9\},$$

$$\overline{A \cap B} \cup C = \overline{\{1,3,9\}} \cup C = \{2,4,5,6,7,8\} \cup \{2,3,5,6,9\} =$$
$$= \{2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

$$A \cap \overline{B \cup C} = \{7\}, \qquad \overline{A \cap B \cup C} = \overline{\{1,2,3,5,6,9\}} = \{4,7,8\}.$$

1.2.4. Свойства операций над множествами

В табл. 1.1. Приведены основные свойства операций над множествами.

Таблица 1.1

Свойства операций над множествами

Название	Свойство операции	
Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Ассоциативность	$A \cap B \cap C =$ $= (A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C)$	$A \cup B \cup C =$ $= (A \cup B) \cup C =$ $= A \cup (B \cup C)$
Дистрибутивность	$A \cup B \cap C =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $= A \cap B \cup A \cap C$
Поглощение	$(A \cap B) \cup A = A$	$(A \cup B) \cap A = A$
Действия с универсумом	$A \cap I = A$	$A \cup I = I$
Действия с пустым множеством $\varnothing$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
Свойства дополнения	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \cup \overline{A} = I$
Двойное дополнение	$\overline{\overline{A}} = A$	
Законы де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Выражение для разности	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	
Выражение для симметрической разности	$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$	

Результаты всех этих операций над подмножествами универсума I дают также подмножества I. По этой причине мы вправе с помощью рассмотренных операций определить алгебры A на I.

Под алгеброй $A = <M, S>$ понимается совокупность множества M с заданными на нем операциями $S = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$.

Алгебра $A =< B(I);\cup,\cap,\overline{\ } >$ называется ***алгеброй Кантора***, на ней выполняются законы: идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, поглощение, действия с универсумом, действия с пустым множеством, свойства дополнения, двойное дополнение, законы де Моргана.

Задача 1.2. С помощью законов алгебры Кантора упростить выражения:

1) $A \cap B \cup A \cap \overline{B}$;
2) $\overline{A \cap B} \cup A$;
3) $A \cap \overline{B \cup A}$.

Решение.

1) $A \cap B \cup A \cap \overline{B} = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap I = A$;
2) $\overline{A \cap B} \cup A = \overline{A} \cup \overline{B} \cup A = I \cup \overline{B} = I$;
3) $A \cap \overline{B \cup A} = A \cap \overline{B} \cap \overline{A} = \overline{B} \cap \varnothing = \varnothing$.

1.2.5. Аксиоматика теории множеств

Современная теория множеств использует систему аксиом (утверждений), принимаемых без доказательства, из которых выводятся все теоремы и утверждения теории множеств.

Система аксиом Цермело–Френкеля (*ZF*) является стандартной системой аксиом для теории множеств. К этой системе аксиом часто добавляют аксиому выбора, и называют системой Цермело–Френкеля с аксиомой выбора (*ZFC*).

1. ***Аксиома объёмности.*** Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.

2. ***Аксиома существования пустого множества.*** Существует множество без единого элемента. Это множество обычно обозначается $\{\}$ или $\varnothing$.

3. Аксиома объединения. Для произвольного множества A и произвольного множества B существует и причем единственное множество C, называемое объединением множества A и B, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в множестве A или в множестве B.

4. Аксиома основания. Каждое непустое множество S содержит элемент a, такой, что

$$S \cap a = \varnothing.$$

5. Аксиома множества подмножеств. Для любого множества A существует множество B, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами множества A. Множество подмножеств множества A называется булеаном множества A и обозначается $P(A)$.

6. Схема выделения. Любому множеству A и свойству φ отвечает множество B, элементами которого являются те и только те элементы a, которые обладают свойством ψ. Схема выделения содержит счётное количество аксиом, так как каждая формула $\varphi(x)$ логики первого порядка порождает аксиому.

7. Аксиома подстановки. Для любого множества A и однозначной функции F, определенной на множестве A, существует множество, которое состоит в точности из элементов $F(x)$ для $x \in A$.

8. Аксиома выбора. Для любого семейства попарно непересекающихся непустых множеств существует множество c такое, что, каково бы ни было множество x данного семейства, множество $x \cap c$ состоит из одного элемента.

9. Аксиома бесконечности. Существует хотя бы одно бесконечное множество – множество натуральных чисел N.

Далее введём определение: множество называется индуктивным, если оно:

а) содержит пустое множество;

б) содержит последователь (то есть элемент $a \cup \{a\}$) каждого своего элемента.

Аксиома бесконечности утверждает, что индуктивные множества существуют:

$$\exists\omega\,(\varnothing \in \omega \cap \forall x(x \in \omega \to x \cup \{x\} \in \omega)).$$

Непротиворечивость приведённой аксиоматики на настоящий момент не установлена.

1.3. Бинарные отношения и их свойства

1.3.1. Декартово произведение и бинарное отношение

Декартовым произведением двух множеств *A* и *B* является новое множество *C*, элементами которого являются все упорядоченные пары (*a,b*):

$$C = A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}.$$

Порядок в паре очень важен, в общем виде $A \times B \neq B \times A$.

Выбирая различные подмножества декартова произведения, мы приходим к понятиям бинарного отношения, операции и функции.

Бинарным отношением *T*(*M*) на множестве *M* называется подмножество $M^2 = M \times M$, $T(M) \subseteq M^2$. Довольно часто используется другая, инфиксная форма записи бинарного отношения

$$aTb = \{(a,b) / (a,b) \in T \subseteq M \times M\}.$$

Мы уже стакивались с понятием отношения при рассмотрении $\subset$ (включение) и = (равенство) между множествами. Также неоднократно использовались отношения $=, \neq, \leq, \geq, >, <$, заданные на множестве чисел как натуральных, так и целых, рациональных, вещественных и т.д.

Определим несколько понятий относительно отношения $R(M) \subseteq M \times M$ [1]:

обратное отношение $R^{-1} = \{(x,y) / (y,x) \in R\}$;

дополнительное отношение $\overline{R} = \{(x,y) / (x,y) \notin R\}$;

тождественное отношение $U = \{(x,x) / x \in M\}$;

универсальное отношение $I = \{(x,y) / x \in M$ и $y \in M\}$.

Обобщая понятие бинарного отношения, введем *n*-арное отношение как множество упорядоченных кортежей (наборов), являющееся подмножеством *n*-арного декартового произведения:

$$R \subset M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(m_1, m_2, ..., m_n) / m_1 \in M_1$$

$$\text{и} \quad m_2 \in M_2 ... \text{ и } m_n \in M_n\}$$

Задача 1.3. На множестве $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить тождественное бинарное отношение *U*.

Решение. По определению, на множестве $M_1=\{a, b, c, d, e, f\}$ тождественное бинарное отношение

$$U = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,d)\}.$$

Задача 1.4. На множестве M натуральных чисел от 1 до 5 построить бинарное отношение $R=\{(a,b)/\mathrm{mod}(a,b)=0\}$.

Решение. В соответствии с заданием, на множестве натуральных чисел M строим такие пары (a, b), что a делится на b без остатка ($\mathrm{mod}(a,b) = 0$). Получаем

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (4,2)\}.$$

1.3.2. Функции и операции

Бинарное отношение F декартова произведения $X \times Y$ называется ***функцией***, если для каждого элемента $x \in X$ найдется не более одного элемента $y \in Y$ такого, что $(x, y) \in F(x, y)$, т.е. выполняется свойство однозначности полученного результата.

Множество X называется областью определения функции Dom, и множество Y, область значений функции. Если элемент $z \notin DomF$, то говорят, что функция F не определена на z. Таким образом, функции могут быть как полностью определенными на множестве X, так и частично определенными. Точно так же область значений функции может не совпадать с множеством Y, а быть его подмножеством.

Если область определения функции F из X в Y совпадает с X, то пишут $F\colon X \to Y$.

Например: тождественная функция U переводит множество X само в себя, причем $U\colon X \to X$ для любого $x \in X$. А функция константы C, полностью определенная на X, переводит все элементы множества X в один единственный элемент $y_0 \in Y$, $C\colon X \to y_0$.

Для функций обычно вместо записи $(x, y) \in F$ или xFy, используют $y = F(x)$.

Функция $F\colon X \to Y$ называется ***инъективной*** (или инъекцией, или вложением), если она переводит разные элементы в разные, то есть

$$\forall x \in X \text{ и } \forall z \in X,\;\; x \neq z \to F(x) \neq F(z).$$

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется ***сюръективной*** (или сюръекцией, или наложением), если множество ее значений есть все Y, т.е.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : y = F(x) .$$

Иногда такие функции называют отображениями на Y.

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется ***биекцией*** (или ***взаимно однозначным соответствием***), если она одновременно является инъекцией и сюръекцией (вложением и наложением),

Если F – биекция, то существует обратная функция F^{-1}, для которой $F^{-1}(y) = x$ тогда и только тогда, когда $F^{-1}(x) = y$.

Частным случаем функции является ***операция*** **0**. В этом случае область значения X и область определения Y совпадают, т.е. $0 \subseteq M^2$, $\forall x \in M \ \exists ! y, (x, y) \in 0$.

Задача 1.5. Построить на множестве $M=\{a, b, c, d\}$ отношение, сюръекцию, инъекцию и биекцию максимальной мощности.

Решение. Отношение максимальной мощности совпадает с декартовым произведением $M \times M$ и его мощность равна 16.

При построении инъекции необходимо учитывать, что разным x соответствуют разные y, например $F_1 = \{(a, b), (b, c), (c,d), (d,a)\}$. Для построения сюръекции нужно использовать все элементы y, $F_2 = \{(a,a), (b,d), (c,c), (d,b)\}$. Обе эти функции являются как сюръекциями, так и инъекциями, следовательно, они – биекции. Мощность во всех случаях равна четырем.

Сами решения могут быть и другими, но максимальная мощность вычисляется однозначно.

Декартово произведение, отношение, функция или операция могут быть и n-арные.

1.3.3. Способы задания бинарных отношений

Бинарные отношения R можно задать:

- перечислением, как любое множество пар;
- графически, когда каждый элемент x множества M представляется вершиной, а пара $(x, y) \in R(M)$ представляется дугой из x в y;
- матричным способом, с помощью матрицы смежности или матрицы инцинденций (инциндентности);
- фактор-множеством.

Перечисление элементов бинарного отношения мы использовали при решении задач. Построим графическое решение задачи 1.4 (рис.1.2).

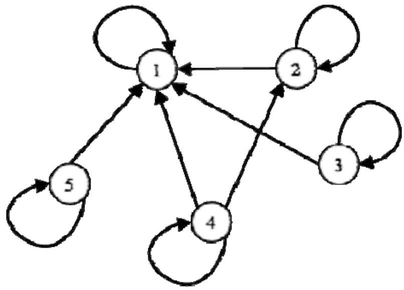


Рис. 1.2

Матрица смежности S (рис. 1.3) представляет собой квадратную матрицу $m \times m$, где $m = |M|$, и каждый ее элемент

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (m_i, m_j) \in R, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1

Рис. 1.3

Фактор-множеством R/M множества M по отношению к R называется множество окрестностей единичного радиуса для всех элементов M при заданном R. Для определения фактор-множества необходимо определить окрестность единичного радиуса $m_i \in M$, состоящую из таких $m_j \in M$, что $(m_i, m_j) \in R(M)$.

Решение задачи 1.4 в виде фактор-множества выглядит следующим образом:

$$R/M = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \{1\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 2, 4\} & \{1, 5\} \end{array} \right.$$

1.3.4. *Свойства бинарных отношений*

Бинарное отношение $T(M)$ называется ***рефлексивным*** тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in M$ пара (x, x) принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \ \exists (x, x) \in T(M) .$$

Классическим определением этого свойства является утверждение

$$\forall x \in M \ \exists (x, x) \in T(M) .$$

Прямо противоположное свойство бинарных отношений называется иррефлексивностью. Бинарное отношение $T(M)$ называется ***иррефлексивным*** тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in M$ пара (x, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \quad (x, x) \notin T(M) .$$

Классическим определением свойства иррефлексивности является утверждение

$$\forall x \in M \ \exists (x, x) \notin T(M) .$$

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством иррефлексивности, то оно является ***нерефлексивным.***

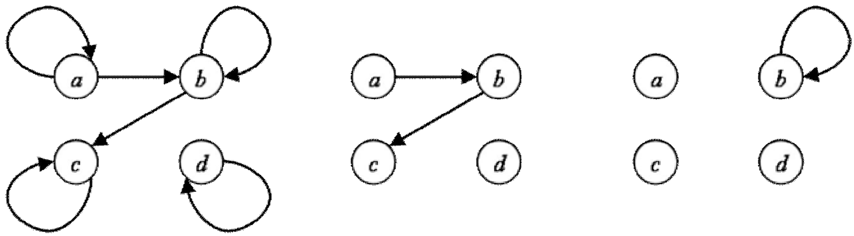
Если во множестве M содержится хотя бы один элемент x, то правильная классификация не представляет сложности.

Но как быть в граничном случае, если множество M или T– пусты? В этом случае, с точки зрения классических воззрений, бинарные отношения $T(\varnothing)$ и $\varnothing$ являются одновременно как рефлексивными, так и иррефлексивными множествами.

Обратите внимание, что для однозначности решения задачи классификации свойство рефлексивности следует определять только для непустых множеств! В соответствии с этим, бинарное отношение на пустом множестве $\varnothing$ будет являться нерефлексивным так же, как нерефлексивным будет пустое бинарное отношение.

Таким образом, оба способа классификации дают один и тот же результат на всем универсуме за исключением $T(\varnothing)$ и $\varnothing$.

Рассмотрим множество $M=\{a,b,c,d\}$. На рис.1.4 приведены примеры рефлексивных (*а*), иррефлексивных (*б*) и нерефлексивных (*в*) бинарных отношений.



а *б* *в*

Рис. 1.4

Бинарное отношение $T(M)$ называется ***симметричным*** тогда и только тогда, когда для каждой пары (x,y) $(x,y)\in T(M)$, обратная пара (y,x) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x,y)\in T(M)\ \ \exists (y,x)\in T(M).$$

Классическим определением свойства симметричности является утверждение

$$\forall (x,y)\in T(M)\Rightarrow (y,x)\in T(M).$$

Прямо противоположное свойство бинарных отношений называется антисимметричностью. Бинарное отношение $T(M)$ называется ***антисимметричным*** тогда и только тогда, когда для каждой пары $(x,y)\in T(M)$ различных элементов x и y пара (y, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

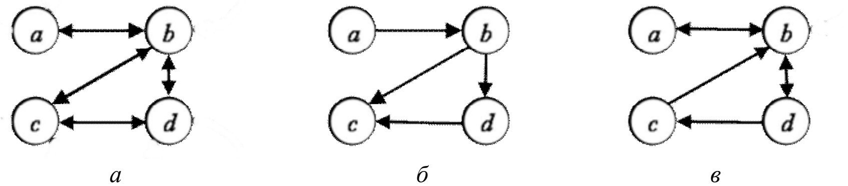
$$\forall (x,y)\in T(M)\ \ (y,x)\notin T(M).$$

Классическим определением антисимметричности можно считать следующее [2]. Из того, что в антисимметричном бинарном отношении $T(M)$ для любой пары $(x,y)\in T(M)$ пара (y, x) также принадлежит $T(M)$, $(y,x)\in T(M)$, следует, что $x = y$, $((x,y)\in T(M)$ и $(y,x)\in T(M))\Rightarrow x=y$.

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, то оно является ***несимметричным***.

В случае, когда M или $T(M)$ – пусты, или M содержит единственный элемент x, наше бинарное отношение одновременно является как симметричным, так и антисимметричным. Для однозначности решения задачи классификации, множество M должно содержать хотя бы два различных элемента x и y. Тогда, бинарные отношения на пустом множестве $\varnothing$, так же как на множествах с одним элементом, является несимметричными.

Рассмотрим множество $M = \{a,b,c,d\}$. На рис. 1.5 приведены примеры симметричных (*а*), антисимметричных (*б*) и несимметричных (*в*) бинарных отношений.



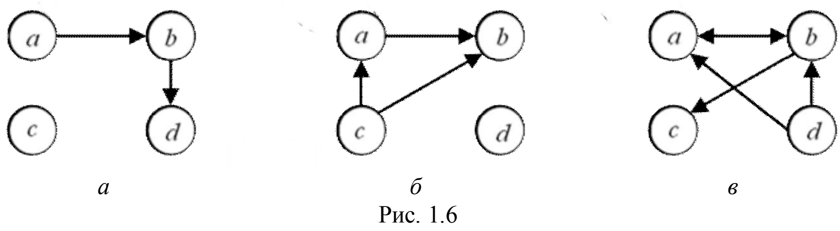
а *б* *в*

Рис. 1.5

Свойство транзитивности определяется на трех элементах множества M. Бинарное отношение $T(M)$ называется ***транзитивным*** тогда и только тогда, когда для каждых двух пар элементов (x,y) и (y,z), принадлежащих бинарному отношению $\forall(x,y),(y,z) \in T(M)$, пара (x,z) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x,y),(y,z) \in T(M) \ \exists(x,z) \in T(M).$$

На рис. 1.6 приведены примеры интранзитивных (*а*), транзитивных (*б*) и нетранзитивных (*в*) бинарных отношений.



а *б* *в*

Рис. 1.6

При графическом представлении транзитивного бинарного отношения (рис. 1.6, *б*) можно увидеть «спрямление» пути (x, y) (y, z), длины два, между двумя элементами, т.е. транзитивное замыкание («транзит») между x и z.

Классическое определение свойства транзитивности формулируется следующим образом:

$$(x,y)\in T(M) \text{ и } (y,z)\in T(M)\Rightarrow (x,z)\in T(M).$$

Бинарное отношение $T(M)$ называется ***интранзитивным*** тогда и только тогда, когда для каждых двух пар элементов (x,y) и (y,z), принадлежащих бинарному отношению $\forall(x,y),(y,z)\in T(M)$, пара (x,z) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x,y),(y,z)\in T(M)\ \exists(x,z)\notin T(M).$$

При графическом представлении интранзитивного бинарного отношения (рис. 1.6, *а*) можно увидеть, что ни один имеющийся путей не обладает транзитивным замыканием! Классическое определение свойства интранзитивности формулируется следующим образом:

$$(x,y)\in T(M) \text{ и } (y,z)\in T(M)\Rightarrow (x,z)\notin T(M).$$

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством интранзитивности, то оно является ***нетранзитивным***.

Задача 1.6. На множестве $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение R, с заданными свойствами нерефлексивности, антисимметричности и нетранзитивности при условии, что $(a,b)\notin R;\ (a,c)\in R$.

Решение. Правильных решений этой задачи целое множество! Некоторые из них приведены на рис. 1.7.

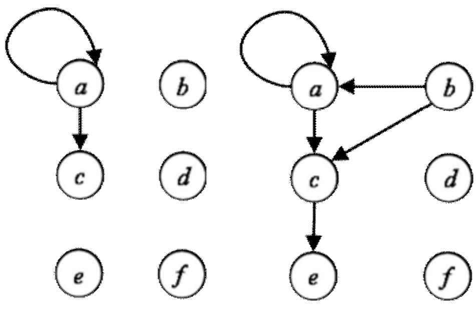


Рис. 1.7

Задача 1.7. Определить свойства бинарного отношения *T*, заданного на множестве $M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ (рис. 1.8).

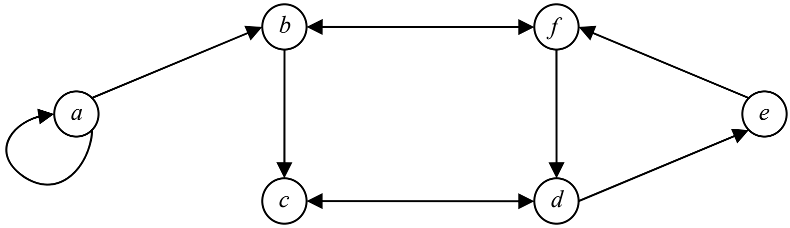


Рис. 1.8

Решение. Данное бинарное отношение обладает свойствами:

- нерефлексивности (часть вершин имеет петли, часть – нет);
- несимметричности (есть симметричные и антисимметричные дуги);
- интранзитивности (бинарное отношение обладает несколькими путями длины два, но, ни на один из них нет транзитивного замыкания).

1.3.5. Типы бинарных отношений

Определяя совокупности различных свойств на бинарных отношениях, мы задаем типы бинарных отношений. К ним относятся отношения тождества, эквивалентности, упорядоченности и толерантности.

Отношение тождества. Бинарное отношение *U*(*M*), заданное на множестве *M*, называется *отношением тождества* тогда и только тогда, когда оно состоит только из пар вида (*a*,*a*), $a \in M$, т.е. $\forall a \in M\,(a,a) \in U(M)$. Обозначается отношение тождества как *U*.

Отношение эквивалентности. Бинарное отношение *T*(*M*), заданное на множестве *M*, называется *отношением эквивалентности* тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается отношение эквивалентности как <=>.

Классом эквивалентности K(x) элемента $x, x \in M$ называется множество всех элементов $y, y \in M$, с которыми *x* находится в отношении эквивалентности: $K(x) = \{y/x <=> y\}$. Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся классы эквивалентных межу собой элементов, объединение которых совпадает с M.

Задача 1.8. На множестве $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение эквивалентности R при условии, что пара $(a,b) \notin R$.

Решение. По определению бинарного отношения оно рефлексивно, симметрично и транзитивно**.** По условию задачи пара (a, b) не принадлежит R. На рис. 1.9 представлены различные бинарные отношения, удовлетворяющие этим условиям.

Задача 1.9. Найти разбиение множество $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ на классы эквивалентности, при условии, что пара $(a,b) \notin R$.

Решение. По определению класса эквивалентности, это все элементы, между которыми выполняется рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение. На рис.1.9 представлено разбиение M на классы эквивалентности.

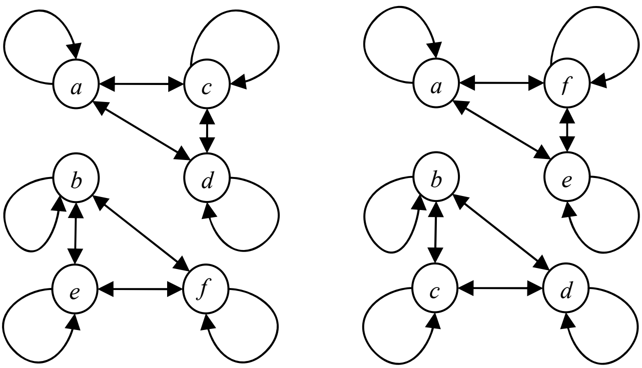


Рис. 1.9

Отношение упорядочивания. Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M, называется *отношением упорядоченности* тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначается отношение упорядоченности (порядка) как $\leq, \leq(M)$.

Если бинарное отношение $T(M)$ иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется ***отношением строгой упорядоченности*** $<, <(M)$.

Если любые два элемента $x, y \in T(M)$ находятся друг с другом в отношении упорядоченности $x \le y$ или $y \le x$, то это ***линейный порядок***, в противном случае – ***частичный порядок***.

Рассматривая наиболее часто используемые отношения упорядоченности, можно отметить, что множество чисел упорядочено линейно, а булеан – частично.

Упорядоченные множества принято обозначать с помощью диаграмм Хассе $H =< M, \le >$. Диаграмма Хассе представляет собой графическое представление упорядоченного множества, в котором отсутствуют (но подразумеваются) рефлексивные петли и транзитивные дуги.

Задача 1.9. Упорядочить множество $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ линейно (т.е. построить $\le(M)$), при условии, что пара $(a,b) \notin \le$.

Решение. По определению линейного порядка, между всеми элементы должны быть в отношении $\le$, но пара $(a,b) \notin \le$**.** Для решения этой задачи, в бинарное отношение нужно включить пару $(b,a) \in \le$**.** На рис. 1.10 решение задачи представлено **диаграммой** Хассе.

Рис. 1.10

Теорема 1.2 (Цермело). ***Всякое непустое множество может быть строго упорядочено*** [4].

1.3.6. Экстремальные характеристики отношения упорядочивания

Говоря об экстремальных характеристиках частично упорядоченных множеств, следует отметить, что среди исследователей этого вопроса нет полного согласия [1-5]. Рассмотрим подмножество X частично упорядоченного множества Y (рис. 1.11).

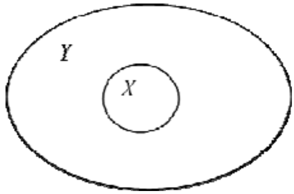


Рис. 1.11

Элемент $x_{\max} \in X$ называется ***максимальным элементом*** X, тогда и только тогда, когда среди элементов X не существует элементов, больших $x_{\max}$, т.е. $\neg(\exists y \in X)$, $x_{\max} \le y$ и $x \ne y$.

Другими словами, из сравнимости элементов $x_{\max} \in X$ и $x \in X$ вытекает, что $x \le x_{\max}$.

Элемент $x_{\min} \in X$ называется ***минимальным элементом*** X, тогда и только тогда, когда среди элементов X не существует меньших $x_{\min}$, т.е. $\neg(\exists y \in X)$, $y \le x_{\min}$ и $x \ne y$. Другими словами, из сравнимости элементов $x_{\min} \in X$ и $x \in X$ вытекает, что $x_{\min} \le x$.

Теорема 1.3 (принцип максимума). ***Каждое непустое подмножество X упорядоченного множества Y содержит, по меньшей мере, один максимальный (минимальный) элемент.***

Элемент $x_{\text{largest}} \in X$ называется ***наибольшим элементом***, тогда и только тогда, когда для любого $\forall x \in X \quad x \le x_{\text{largest}}$. Из определения следует, что наибольший элемент находится в отношении сравнения со всеми элементами их X.

Элемент $x_{\text{smallest}} \in X$ называется ***наименьшим*** элементом, тогда и только тогда, когда для любого $\forall x \in X \quad x_{\text{smallest}} \le x$.

Теорема 1.4. ***Если в частично упорядоченном множестве существует наибольший элемент, то он единственный***.

Обратите внимание: наибольший элемент всегда максимален, обратное верно не всегда!

Рассмотрим частично упорядоченное множество $Y=\{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n\}$ и его подмножество $X=\{c, d, e, g, h\}$ (рис. 1.12).

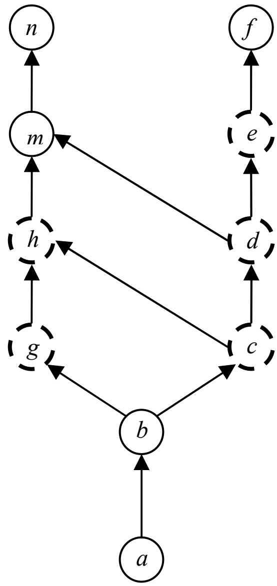


Рис. 1.12

Максимальными элементами множества X являются $\{h,e\}$, но наибольшего не существует, так как h и e не сравнимы между собой.

Элемент $x_{\text{maj}} \in Y$ называется ***мажорантой (верхней границей или верхним конусом)*** X тогда и только тогда, когда для любого $\forall x \in X \quad x \le x_{\text{maj}}$.

Обратите внимание: мажоранта находится в отношении сравнения со всеми элементами

X и не обязательно принадлежит этому подмножеству. Более того, мажоранта может и не существовать. В нашем примере на рис. 1.12 для подмножества X мажоранта не существует.

Элемент $x_{\text{mij}} \in Y$ называется ***минорантой (нижней границей или нижним конусом)*** X тогда и только тогда, когда для любого $\forall x \in X \quad x_{\text{mij}} \le x$. Для примера на рис. 1.12 миноранты $\{a, b\}$.

Элемент $x_{\sup} \in Y$ называется ***верхней гранью (точной верхней гранью)*** X тогда и только тогда, когда он является наименьшим среди мажорант. В нашем примере на рис. 1.12 для подмножества X верхняя грань не существует.

Элемент $x_{\inf} \in Y$ называется ***нижней гранью (точной верхней гранью)*** X тогда и только тогда, когда он является наибольшим среди минорант. В нашем примере на рис. 1.12 для подмножества X нижняя грань $\{b\}$.

Теорема 1.5 (принцип двойственности). ***Отношение, обратное отношению упорядоченности, также является отношением упорядоченности.***

Ранее мы использовали отношение $\le$. Обратное к нему отношение $\ge$ также упорядочено. Для него так же определяются экстремальные характеристики.

1.3.7. Отношение толерантности

Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M, называется ***отношением толерантности (схожести)*** тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и симметрично.

Например, задавая сходство между словами как различие в одну букву, можно строить различные переходы:

$$рука - рута - рота - рога - нога.$$

1.3.8. Операции над отношениями

Рассмотрим два отношения R_1 и R_2, заданных на множестве M [1].

Объединением двух отношений R_1 и R_2 называется новое бинарное отношение $R(M)$, элементы которого удовлетворяют условию:

$$R = R_1 \cup R_2 = \{(x, y)/(x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2\}.$$

Операция объединения обладает свойствами:

- коммутативности;
- ассоциативности;
- идемпотентности;
- для универсума и пустого бинарного отношения выполняются $R \cup I = I$, $R \cup \varnothing = R$.

На рис. 1.13 представлен результат объединения двух отношений.

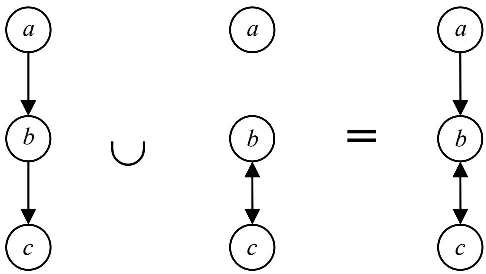


Рис. 1.13

Пересечением двух отношений R_1 и R_2 называется новое бинарное отношение $R(M)$, элементы которого удовлетворяют условию: $R = R_1 \cap R_2 = \{(x, y)/(x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2\}$.

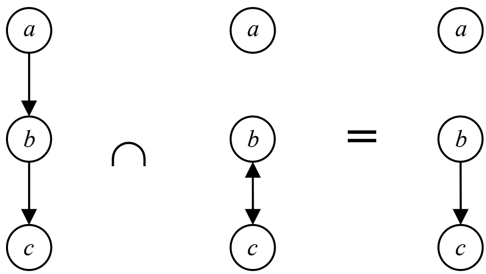


Рис. 1.14

Операция пересечения обладает свойствами:

- коммутативности;
- ассоциативности;
- идемпотентности;

• для универсума и пустого бинарного отношения выполняются $R \cap I = R$ и $R \cap \varnothing = \varnothing$.

На рис. 1.14 представлен результат пересечения двух отношений.

Композицией двух отношений R_1 и R_2 называется новое бинарное отношение $R(M)$, элементы которого удовлетворяют условию:

$$R = R_1[R_2] = \{(x, y) / \exists z : (x, z) \in R_1 \text{ и } (z, y) \in R_2\}.$$

Операция композиции обладает свойствами:

• ассоциативности;

• для пустого бинарного отношения выполняются $R[\varnothing] = \varnothing$ и $\varnothing[R] = \varnothing$.

На рис. 1.15 представлен результат композиции двух отношений.

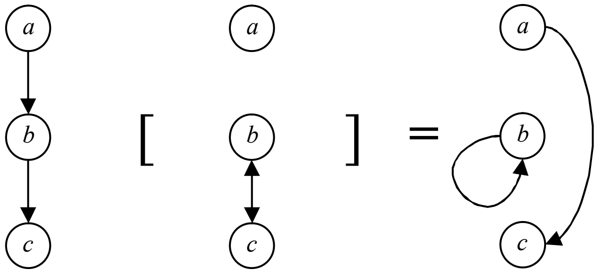


Рис. 1.15

Обращением R^{-1} бинарного отношения $R(M)$ называется новое бинарное отношение $R^{-1}(M)$, удовлетворяющее условию

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}.$$

Операция обращения – унарная, поэтому такие свойства, как коммутативность, ассоциативность и т.д. для нее не определяются. На рис. 1.16 представлен результат обращения отношения.

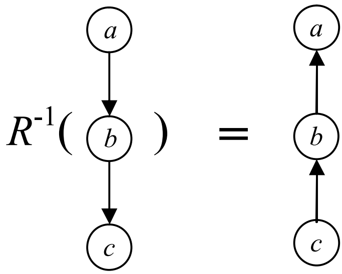


Рис. 1.16

Дополнением бинарного отношения $R(M)$ ***до универсума*** называется новое бинарное отношение $\overline{R}(M)$:

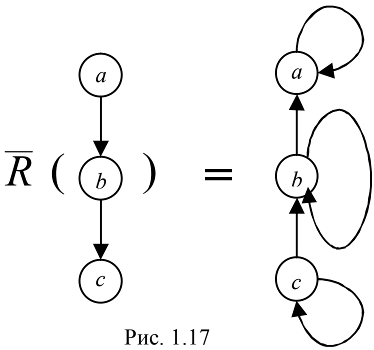


Рис. 1.17

$$\overline{R}(M) = \{(x, y)/(x, y) \notin R\}\ .$$

Операция дополнения – тоже унарная, поэтому для нее так же, как и для обращения, такие свойства, как коммутативность, ассоциативность и т.д., не определяются. На рис. 1.17 представлен результат дополнения отношения до универсума.

Декартовым произведением двух бинарных отношений называется новое бинарное отношение, элементы которого удовлетворяют условию (рис. 1.18)

$$R = R_1 \times R_2 = \{((x,a),(y,b))/(x,y) \in R_1 \text{ и } (a,b) \in R_2\}\ .$$

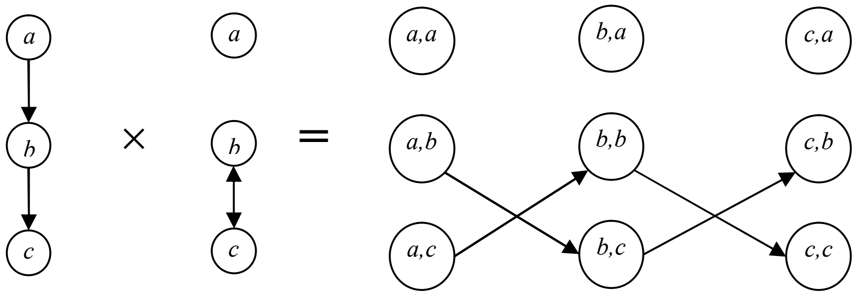


Рис. 1.18

Замыкание отношения относительно свойства. Рассмотрим два отношения R_1 и R_2 на множестве M, R_2 обладает свойством S, $S(R_2)$. Отношение R_1 называется замыканием R_2 относительно свойства S тогда и только тогда, когда:

- R_1 обладает свойством S, $S(R_1)$;
- R_1 является надмножеством R_2;
- R_1 – наименьшее.

Ядром отношения R на множестве M называется новое отношение $R\ [R^{-1}]$.

Отношение тождества U является ядром самого себя.

Рефлексивным замыканием R_1 отношения R_2 называется $R_2 \cup U$, где U – отношение тождества.

Симметричным замыканием R_1 отношения R_2 называется $R \cup I = I$.

Транзитивным замыканием R_1 отношения R_2 называется $R_2 \cup R_2[R_2] \cup R_2[R_2[R_2]]$.

Используя свойства бинарных отношений, можно доказать следующую теорему [2].

Теорема 1.6. ***Пусть R бинарное отношение на M, $R \subset M \times M$. Тогда:***

1) R рефлексивно тогда и только тогда, когда $U \subset R$;

2) R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$;

3) R транзитивно тогда и только тогда, когда $R[R] \subset R$;

4) R антисимметрично тогда и только тогда, когда $R \cap R^{-1} \subset U$;

5) R антирефлексивно тогда и только тогда, когда $R \cap U \subset \varnothing$;

6) R линейно тогда и только тогда, когда $R \cup U \cup R^{-1} = I$, где U – отношение тождества, а I – универсум.

Контрольные вопросы и задания

1.1. Даны множества *A*, *B* и *C*. Определить по кругам Эйлера – Венна результат применения операций над ними в указанных трех случаях (рис. 1.19).

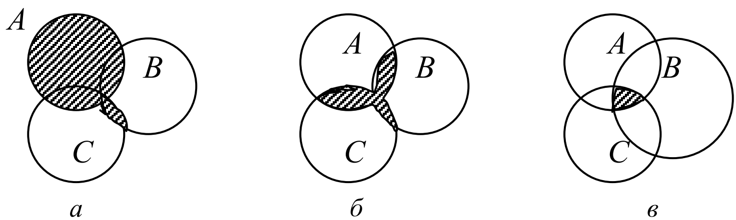


Рис. 1.19

1.2. Даны множества $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, c, e\}$, $B=\{b, d, f\}$, $C=\{a, b, e, f\}$. Вычислить результат операций:

- $A \cap \overline{B \cap C}$;
- $A \cup \overline{B \cap C}$;
- $A \cap \overline{B \cup C}$;
- $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$.

1.3. Даны множества A (треугольник), B (квадрат) и C (овал). Определите через операции объединения, пересечения, дополнения, разности и симметрической разности, чему равна заштрихованная область в указанных четырех случаях (рис. 1.20).

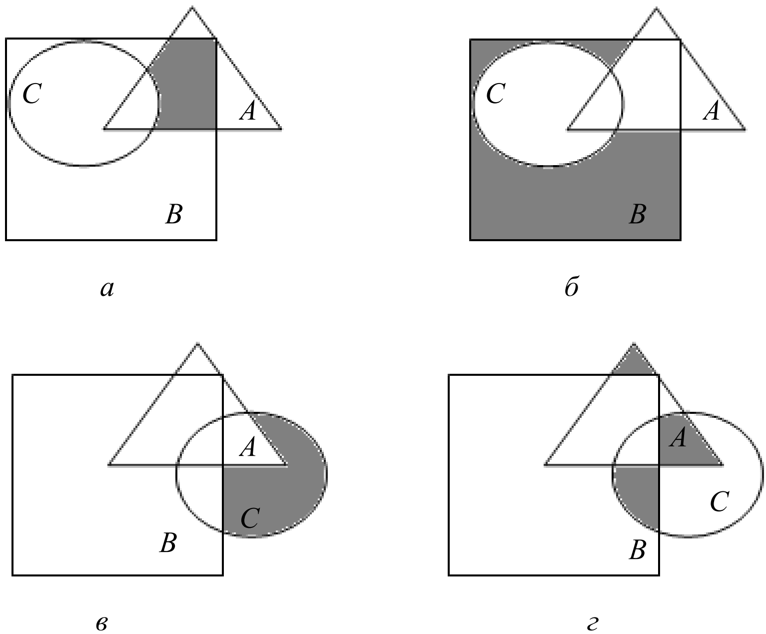


Рис. 1.20

1.4. Дано множество $M=\{a, b, c, d, e\}$. Найти все его подмножества.

1.5. Дано множество $M=\{a, b, c, d, e\}$. Найти все его собственные подмножества.

1.6. Определить мощность булеана для $M = \{a, b, c, d, e\}$.

1.7. Определить мощность декартова произведения для M и N, если $|M| = 10$, а $|N| = 25$.

1.8. Построить декартово произведение M и N, если $M = \{a, b, c\}$ и $N = \{a, d, e\}$.

1.9. Нарисовать круги Эйлера – Венна для $A \cup (B / C)$, $A /(B / A)$.

1.10. Для заданных множеств I={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={1,3,5,7,9}, B={1,2,3,8,9} и C={2,3,5,6,9} вычислить множества:

- $\overline{A \cap B} \cup C$;
- $A \cap \overline{B \cup C}$;
- $\overline{A \cap B \cup C}$;
- $A \cap B \cup C$.

1.11. Дополните следующие определения.

а) Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M, называется *отношением эквивалентности* тогда и только тогда, когда оно...

б) Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M, называется *классом эквивалентности* тогда и только тогда, когда оно...

в) Бинарное отношение $T(M)$, заданное на множестве M, называется *отношением упорядоченности* тогда и только тогда, когда оно...

г) Бинарное отношение $T(M)$ заданное на множестве M, называется *отношением строгой упорядоченности* тогда и только тогда, когда оно...

д) Бинарное отношение $T(M)$ заданное на множестве M, называется *линейно упорядоченным* тогда и только тогда, когда оно…

е) Бинарное отношение $T(M)$ заданное на множестве M, называется *отношением* толерантности тогда и только тогда, когда оно…

1.12. Построить бинарное отношение $R(M)$ и определить его свойства. $M = \{1,2,..,10\}$, $R = \{(a, b)/ \mathrm{res}(b, a) = 0\}$

1.13. Построить бинарное отношение R и определить его свойства. $M = \{1,2,..,10\}$, $R = \{(a, b)/ \mathrm{res}(b, a) = 1\}$

1.14. Построить бинарное отношение R(M) и определить его свойства. $M = \{1,2,..,10\}$, $R= \{(a, b)/ \mathrm{res}(a+1, b) = 0\}$.

1.15. На множестве $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение толерантности R, при условии, что $(a,b) \notin R; (a,c) \in R$.

1.16. На множестве $M_1=\{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение эквивалентности R, при условии, что $(a,b) \notin R; (a,c) \in R$.

1.17. На множестве $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение частичного порядка R, при условии, что $(a, b) \notin R$, $(a, c) \in R$.

1.18. На множестве $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ построить бинарное отношение линейного порядка R, при условии, что $(a, b) \notin R$, $(a, c) \in R$.

1.19. Дана диаграмма Хассе частично упорядоченного множества $\leq M$ (рис. 1.21).

Установите соответствие между экстремальными характеристиками и элементами для выделенного подмножества $\{c, f, m\}$ и заполните таблицу.

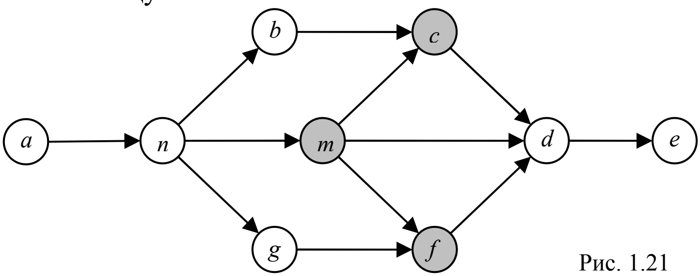


Рис. 1.21

Минимальные элементы		Миноранты	
Максимальные элементы		Мажоранты	
Наибольший элемент		Точная нижняя грань	
Наименьший элемент		Точная верхняя грань	

1.20. Дано множество натуральных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?

1.21. Дано множество четных натуральных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?

1.22. На множестве натуральных чисел задано отношение равенства ($a=b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?

1.23. На множестве натуральных чисел задано отношение больше или равно ($a \geq b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?

1.24. На множестве нечетных натуральных чисел задано отношение меньше ($a<b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?

1.25. Задано множество $X=\{a,\{b,c\}\}$. Выделите все элементы и все подмножества для этого множества.

1.26. Задано множество $X = \{a,\{a,b\}\}$. Выделите все элементы и все собственные подмножества для этого множества.

1.27. Задано множество $X = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Выделите все элементы и все подмножества для этого множества.

1.28. Определить свойства бинарного отношения T, заданного на множестве $M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ (рис. 1.22).

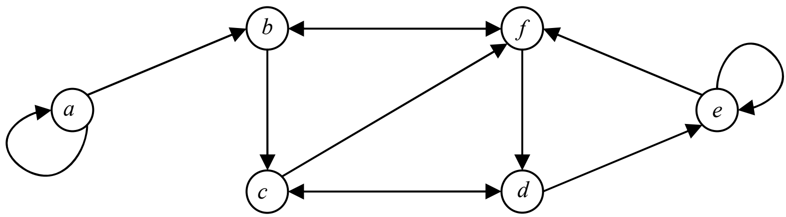


Рис. 1.22

1.29. Определить свойства бинарного отношения T, заданного на множестве $M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ (рис. 1.23).

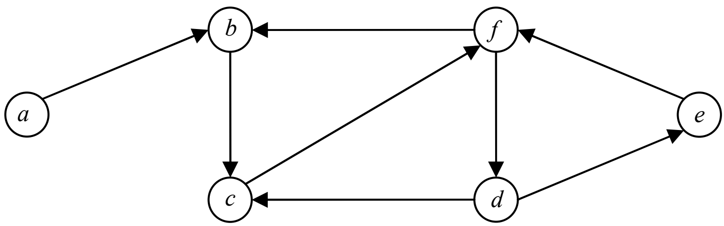


Рис. 1.23

1.30. Определить свойства бинарного отношения T, заданного на множестве $M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ (рис. 1.24).

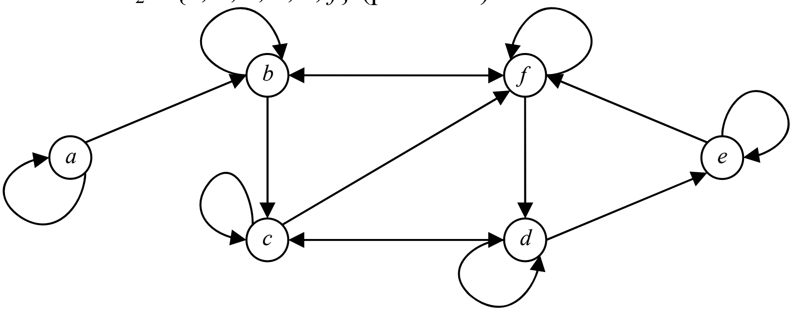


Рис. 1.24

1.31. Даны бинарные отношения A и B, заданные на множестве $M=\{a,b,c\}$. Найти: $A \cap B$; $A \cup B$; $A[B]$; $B[A]$; A^{-1} ; $\overline{B}$; $A \times B$ (рис. 1.25).

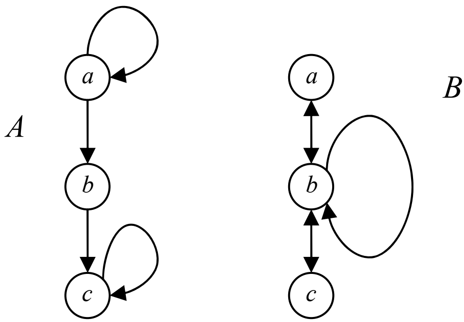


Рис. 1.25

1.32. На множестве натуральных чисел задана операция $\odot$. Какой может быть эта операция?

а) $a \odot b = a^b$;

б) $a \odot b = a + b$;

в) $a \odot b = a - b$;

г) $a \odot b = a \cdot b$;

д) $a \odot b = a / b$;

е) $a \odot b = a^2 + b^2$;

ж) $a \odot b = \mathrm{NOD}(a,b)$;

з) $a \odot b = a^2 - b^2$;

и) $a \odot b = –2·(a^2 + 2b)$.

1.33. На множестве рациональных чисел задана операция $\odot$. Какой может быть эта операция?

а) $a \odot b = a^b$;

б) $a \odot b = a + b$;

в) $a \odot b = a – b$;

г) $a \odot b = a·b$;

д) $a \odot b = a / b$;

е) $a \odot b = a^2 + b^2$;

ж) $a \odot b$ = NOD(a,b);

з) $a \odot b$ = MOD(a,b);

и) $a \odot b = -2·(a^2 + 2b)$.

1.34. Дано множество, равное пересечению $A \cap B$ следующих множеств (рис. 1.26):

$A = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$;

$B = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$.

Укажите, какой графический вид оно имеет?

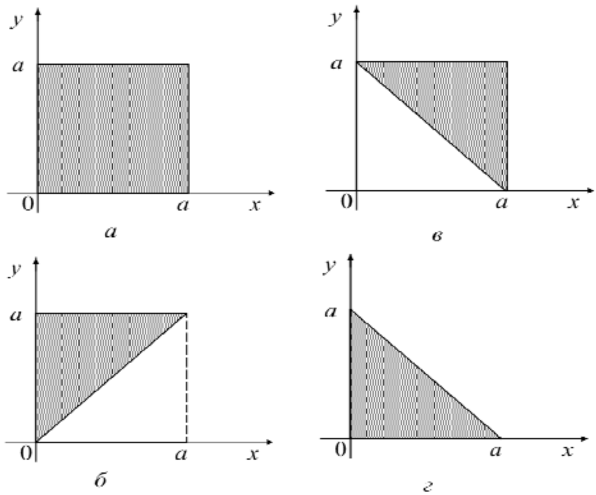


Рис. 1.26

Глава 2. Алгебры и алгебраические системы

2.1. Фундаментальные алгебры

Под ***алгеброй*** $A = \langle M, S \rangle$ мы понимаем совокупность множества M и заданных на нем операций $S = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$. Множество M называется ***носителем*** алгебры, S – сигнатурой.

Операции O_i не обязательно бинарны, но конечноместны, сигнатура их свойств конечна. Само множество M может быть как конечно, так и бесконечно, но не является пустым.

Классическое определение фундаментальной (универсальной) алгебры требует, чтобы операции $S = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ были всюду определены на множестве M [1,3].

Рассмотрим классификацию фундаментальных алгебр [1- 4].

Алгебра вида $A=\langle M, \circ \rangle$, где $\circ$ – двухместная операция, называется ***группоидом.*** Если операция $\circ$ типа сложения, то группоид называется аддитивным, если операция $\circ$ типа умножения, то группоид мультипликативный.

В зависимости от свойств двухместной операции $\circ$ группоид может быть ***коммутативным (абелевым)***, ***идемпотентным*** или ***ассоциативным***. Ассоциативный группоид называется ***полугруппой***.

Введем понятие нейтрального элемента для фундаментальных алгебр. Элемент $e \in M$ называется ***правым нейтральным элементом***, если $\forall x \in M$, $x \circ e = x$. Элемент $e \in M$ называется ***левым нейтральным элементом***, если $\forall x \in M$, $e \circ x = x$.

Если элемент $e \in M$ одновременно и левый и правый, то он называется ***нейтральным элементом (двухсторонним).***

Если группоид $\langle M, \circ \rangle$ мультипликативный, то нейтральный элемент называется ***единицей*** и обозначается 1. Если группоид $\langle M, \circ \rangle$ аддитивный, то нейтральный элемент называется ***нулем*** и обозначается 0.

На рис. 2.1 приведена классификация фундаментальных алгебр. Свойства группоидов отражены на рис. 2.2.

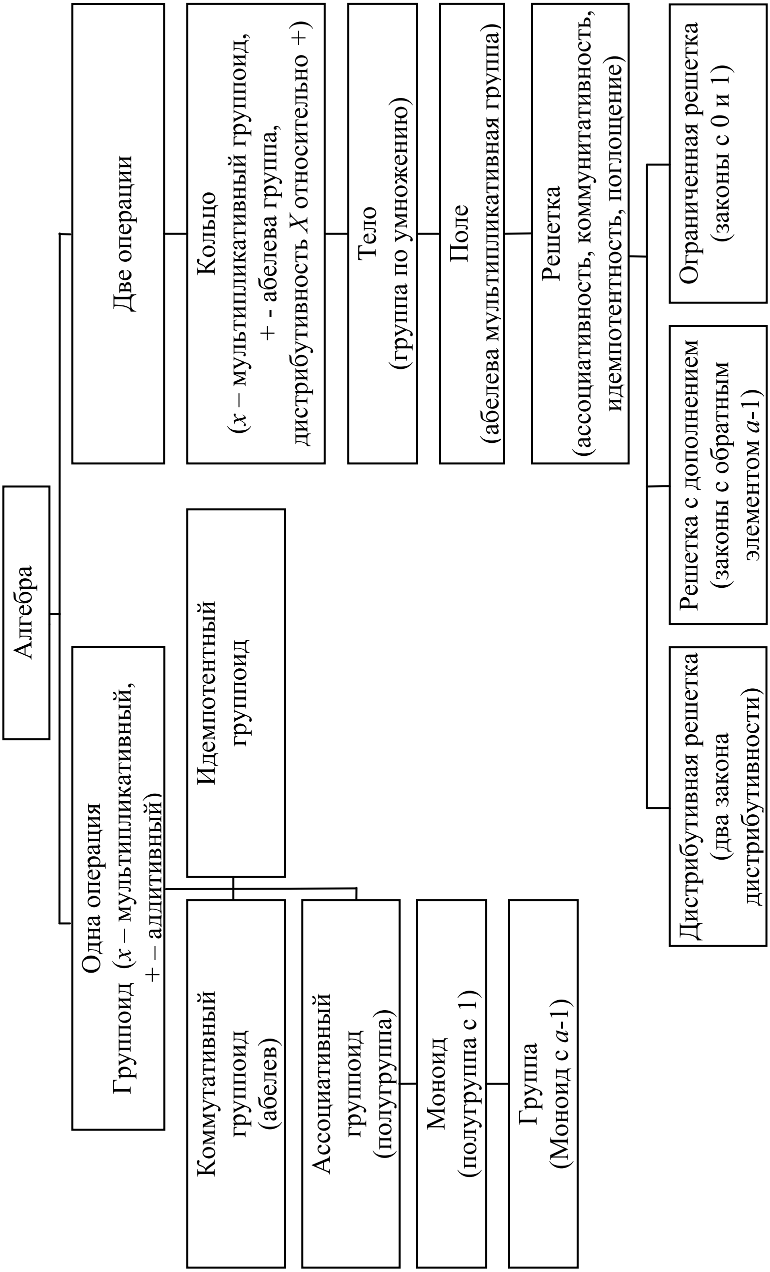
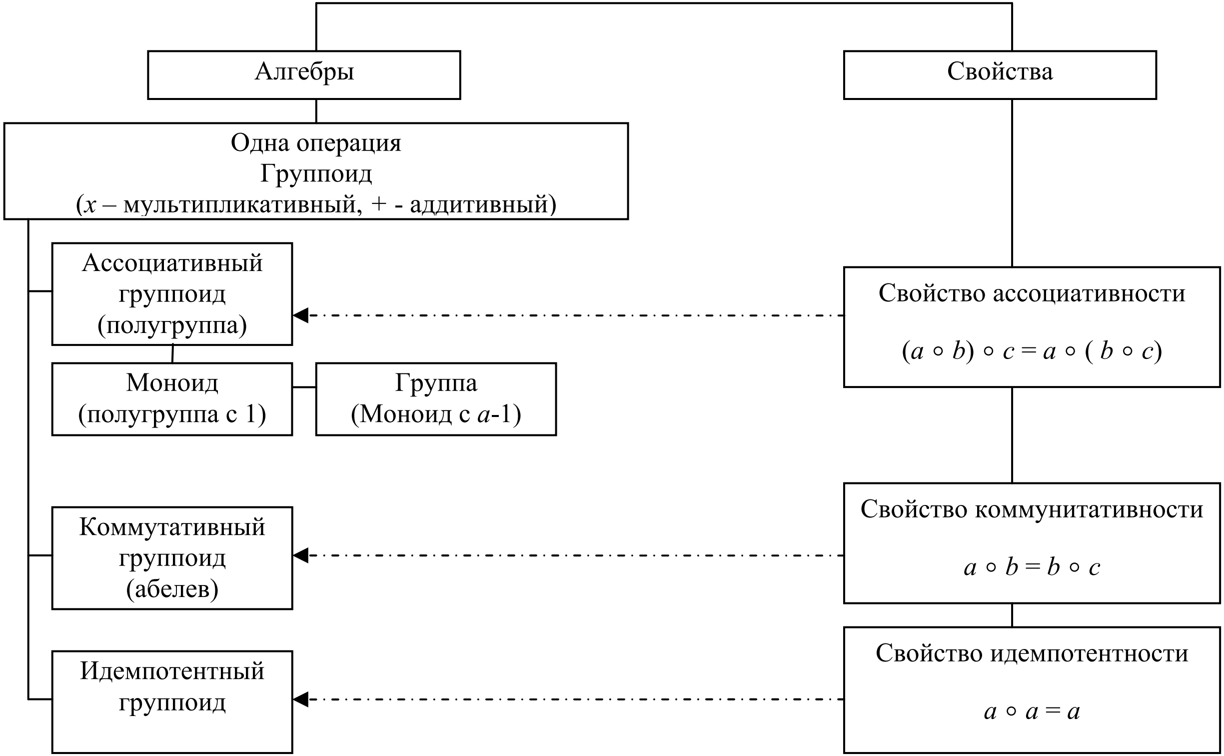

Алгебра
Одна операция
Группоид (x – мультипликативный, + – аддитивный)
Идемпотентный группоид
Коммутативный группоид (абелев)
Ассоциативный группоид (полугруппа)
Моноид (полугруппа с 1)
Группа (Моноид с a-1)
Две операции
Кольцо (x – мультипликативный группоид, + - абелева группа, дистрибутивность X относительно +)
Тело (группа по умножению)
Поле (абелева мультипликативная группа)
Решетка (ассоциативность, коммунитативность, идемпотентность, поглощение)
Ограниченная решетка (законы с 0 и 1)
Решетка с дополнением (законы с обратным элементом a-1)
Дистрибутивная решетка (два закона дистрибутивности)

Рис. 2.1



Алгебры
Свойства
Одна операция
Группоид
(x – мультипликативный, + - аддитивный)
Ассоциативный группоид (полугруппа)
Моноид (полугруппа с 1)
Группа (Моноид с a-1)
Коммутативный группоид (абелев)
Идемпотентный группоид
Свойство ассоциативности
(a ∘ b) ∘ c = a ∘ (b ∘ c)
Свойство коммунитативности
a ∘ b = b ∘ c
Свойство идемпотентности
a ∘ a = a

Рис. 2.2

Теорема 2.1. ***Никакой группоид не может иметь более одного нейтрального элемента.***

Полугруппа с нейтральным элементом называется ***моноид,*** т.е.

$$\exists e : \forall a \Rightarrow a \circ e = e \circ a = a .$$

Моноид, в котором для каждого элемента a существует обратный элемент a^{-1}, называется ***группой***, т.е.

$$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e .$$

Теорема 2.2. ***Обратный элемент единственен.***

Например, множество невырожденных матриц – группа относительно операции умножения.

Рассмотрим алгебру с двумя операциями $A =< M, \oplus, \otimes >$, где $\oplus$ – операция типа сложения, а $\otimes$ – типа умножения.

Алгебра $A =< M, \oplus, \otimes >$ называется ***кольцом*** тогда и только тогда, когда она по умножению – мультипликативный группоид, по сложению – абелева группа, и выполняются законы дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c ,$$

$$(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a .$$

Таким образом, для кольца (ассоциативного) справедливы свойства, приведенные в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Свойства колец (ассоциативных)

Свойство	Пояснение	Вывод
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	Сложение ассоциативно	Абелева группа по сложению
$\exists 0 \in M, \forall a \Rightarrow a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$	Существует 0	
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \oplus a^{-1} = 0$	Существует обратный элемент	
$a \oplus b = b \oplus a$	Сложение коммутативно	
$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$	Умножение ассоциативно	Полугруппа по умножению
$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$, $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$	Умножение дистрибутивно	Выполняются законы дистрибутивности

Кольцо, у которого все отличные от нуля элементы составляют группу по умножению, называется ***телом***. Свойства тел приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Свойства тел

Свойство	Пояснение	Вывод
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	Сложение ассоциативно	Абелева группа по сложению
$\exists 0 \in M$, $\forall a \Rightarrow a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$	Существует 0	
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \oplus a^{-1} = 0$	Существует обратный элемент	
$a \oplus b = b \oplus a$	Сложение коммутативно	
$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$	Умножение ассоциативно	Группа по умножению
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \otimes a^{-1} = 1$	Существует обратный элемент	
$\exists 1 \in M$, $\forall a \neq 0 \Rightarrow a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$	Существует 1	
$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$	Умножение дистрибутивно	Выполняются законы дистрибутивности

Тело, у которого мультипликативная группа – абелева, называется ***полем.*** Свойства полей приведены в табл. 2.3.

Например, <*R*, +, *> – поле вещественных чисел,<*Q*, +, *> – поле рациональных чисел, где «+» – операция сложения, а «*» – операция умножения.

Решетка – алгебра с двумя бинарными операциями $\cup$ и $\cap$, такими, что выполняются условия, отраженные в табл. 2.4.

Например, алгебра множеств (алгебра Кантора) – дистрибутивная ограниченная решетка с дополнениями.

Таблица 2.3

Свойства полей

Свойство	Пояснение	Вывод
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	Сложение ассоциативно	Абелева группа по сложению
$\exists 0 \in M, \forall a \Rightarrow a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$	Существует 0	
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \oplus a^{-1} = 0$	Существует обратный элемент	
$a \oplus b = b \oplus a$	Сложение коммутативно	
$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$	Умножение ассоциативно	Абелева группа по умножению
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \otimes a^{-1} = 1$	Существует обратный элемент	
$a \otimes b = b \otimes a$	Умножение коммутативно	
$\exists 1 \in M, \forall a \neq 0 \Rightarrow a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$	Существует 1	
$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$	Умножение дистрибутивно	Выполняются законы дистрибутивности

Таблица 2.4

Свойства решеток

Свойства	Вывод
$a \cap a = a$, $a \cup a = a$	Идемпотентность
$a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$	Коммутативность
$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$	Ассоциативность
$(a \cap b) \cup a = a$, $(a \cup b) \cap a = a$	Поглощение
$a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c$ $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$	Дистрибутивная решетка
$\exists 0 \in M, \forall a \Rightarrow 0 \cap a = 0$ $\exists 1 \in M, \forall a \Rightarrow 1 \cup a = 1$	Решетка ограниченная
$\forall a \Rightarrow \exists a^{-1} : a \cup a^{-1} = 1, \quad a \cap a^{-1} = 0$	Решетка с дополнениями

2.2. Алгебра высказываний

Математическая логика – это наука о методах рассуждений, при которых мы отвлекаемся от содержания рассуждений, а используем только их форму и значение.

Основным понятием математической логики является «простое высказывание».

Простое высказывание – это некоторое повествовательное предложение, которое может быть либо истинно, либо ложно, но не то и не другое одновременно. Простое высказывание обозначается маленькими латинскими буквами.

Высказывания, которые получаются из простых с помощью грамматических связок «и», «или», «не», «тогда и только тогда», «либо…, либо…», «если…, то…» называются ***составными***, или ***формулами алгебры высказываний***. Формулы алгебры высказываний обозначаются большими латинскими буквами.

Формула *A,* всегда истинная, называется ***тождественно истинной формулой***, или ***тавтологией,*** $A=1$.

Формула B, всегда ложная, называется ***тождественно ложной формулой***, или противоречием, $B=0$.

Рассматривая высказывания, мы абстрагируемся от их смысла, нас интересует их истинность или ложность. Мы пишем $a=1$, если a – истинно, и $a=0$, если a – ложно.

Значение истинности для каждой логической операции в зависимости от истинности её операндов описывается таблицей истинности.

Таблица истинности представляет собой таблицу, устанавливающую соответствие между возможными значениями наборов переменных и значениями операции [2].

Таблицы истинности логических операций позволяют определить значение, которые они принимают при различных значениях переменных, сравнивать операции между собой, определять, удовлетворяют ли операции заданным свойствам.

Рассмотрим основные операции над высказываниями:

- дизъюнкция V;
- конъюнкция &;

- отрицание $\overline{a}$;
- импликация $\rightarrow$;
- эквивалентность $\sim$;
- сложение Жегалкина $\oplus$.

Дизъюнкция a ∨ b. Читается эта запись «*a* дизъюнкция *b*».

Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда ложны оба операнда. Соответствует союзу «ИЛИ». Таблица истинности у дизъюнкции следующая:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Эта операция соответствует высказывательной функции логического сложения, которая обозначается как $a + b$.

Конъюнкция a&b. Запись читается «*a* конъюнкция *b*». Конъюнкция двух сомножителей истинна тогда и только тогда, когда истинны оба сомножителя. Соответствует союзу «И». Таблица истинности у конъюнкции:

a	b	$a\&b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эта операция соответствует высказывательной функции логического умножения, которое обозначается как $a \& b$.

Отрицание $\overline{a}$. Запись читается «не *a*». Отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь. Соответствует частице «НЕ». Таблица истинности у отрицания:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Импликация a→ b. Запись $a \rightarrow b$ читается как «a импликация b» или «из a следует b». Для функции импликации из лжи следует все, что угодно, а из истины только истина. Таблица истинности импликации:

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Запись $a \rightarrow b$ соответствует «если a, то b», «а является достаточным условием для b». Запись $a \leftarrow b$ соответствует «если b, то a», «a является необходимым условием для b».

Сложение Жегалкина a ⊕ b. Запись читается как «a сложение по модулю два b». Операция истинна тогда и только тогда, когда значения переменных различны. Таблица истинности у сложения по Жегалкину:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Запись $a \oplus b$ соответствует выражению «a либо b», «либо a, либо b», «или a, или b».

Эквивалентность a ⇔ b. Запись читается, как «a эквивалентно b». Операция истинна тогда и только тогда, когда значения переменных совпадают. Таблица истинности для операции эквивалентности:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Запись $a \Leftrightarrow b$ соответствует выражению «a тогда и только тогда, когда b».

2.3. Формализация логических высказываний

При работе с высказываниями мы отвлекаемся от их смысла, нас интересует только их истинность или ложность. Каждое высказывание – это повествовательное утверждение естественного языка. Несмотря на то, что естественный язык гораздо богаче высказываний алгебры логики, в табл. 2.5 приведем один из способов формализации сложных высказываний, т.е. построения формул алгебры логики.

Рассмотрим примеры построения формул, при условии что a – «погода ясная», b – «погода дождливая».

Таблица 2.5

Формализация сложных высказываний

Союзы и частицы естественного языка	Операции алгебры высказываний	Примеры
«a» и «b»	$a \,\&\, b$	Погода ясная и дождливая
«a» или «b»	$a \vee b$	Ясная или дождливая погода
не «a»	$\overline{a}$	Неверно, что погода ясная (погода пасмурная)
«a» достаточное условие для «b»	$a \to b$	Ясная погода является достаточным условием дождливой погоды
если «a», то «b»	$a \to b$	Если погода ясная, то будет дождь
«a» необходимое условие для «b»	$b \to a$	Ясная погода является необходимым условием дождливой погоды
«a» тогда и только тогда, когда «b»	$a \Leftrightarrow b$	Ясная погода бывает тогда и только тогда, когда идет дождь
«a» либо «b»	$a \oplus b$	Погода будет ясной либо дождливой
или «a», или «b», но не оба	$a \oplus b$	Или сегодня погода будет ясной, или дождливой, но не ясной с дождем

При формализации высказываний естественного языка можно использовать следующий подход. Пусть дано логическое высказывание (составное). Алгоритм формализации:

1) выделить из составного высказывания простые высказывания и обозначить их латинскими буквами;

2) построить дерево синтаксического разбора, в котором каждой вершине соответствует логическая связка (операция), а концевым вершинам – простые высказывания;

3) записать логическую формулу путем обхода дерева с учетом структуры дерева и старшинства логических операций.

Задача 2.1. Формализовать логическое высказывание: «Неверно, что идет дождь либо ветрено и холодно».

Решение. На первом шаге выделяем простые высказывания и заменяем их буквами: идет дождь – A, ветрено – B, холодно – C.

На первом этапе строим дерево, выбрав корневую вершину. В нашем случае корневой вершиной будет являться грамматическая связка «неверно» (рис. 2.3).

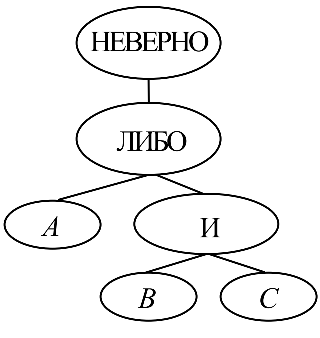


Рис. 2.3

На втором этапе построения дерева требуется понять, сколько и какие буквы и/или грамматические связки будут находиться на следующем уровне. В нашем случае будет только одна грамматическая связка – «либо».

Важно заметить, что если вершиной (любой, не обязательно корневой) является отрицание («неверно»), то из неё может выходить только она ветвь.

Далее, на третьем этапе требуется выбрать вершину, по которой будем продолжать построение дерева. В нашем случае она одна, поэтому мы повторяем второй этап и переходим к следующему уровню дерева.

На четвертом этапе выбираем простое высказывание (букву) – A и одну грамматическую связку – «и».

Возвращаемся к третьему этапу и выбираем вершину – «и».

Возвращаемся ко второму этапу, выбираем простые высказывания (буквы) B и C. Дерево построено. На рис. 2.3 представлено дерево для высказывания: «Неверно, A либо B и C».

Важно запомнить два правила:

1) всегда требуется двигаться по дереву сверху вниз и слева направо;

2) дерево никогда не может заканчиваться вершинами с грамматическими связками (операциями).

Заменим грамматические связки операциями над высказываниями (рис. 2.4).

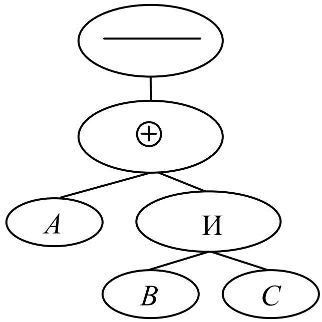


Рис. 2.4

На основании построенного дерева мы можем записать наше логическое высказывание: *«Неверно, что идет дождь либо ветрено и холодно»* на языке формальной логики:

$$\overline{A \oplus B \,\&\, C}.$$

Рассмотрим на следующем примере, как с помощью деревьев можно перейти от логического высказывания к формальному: *«Сегодня ветрено и идет дождь».*

Пусть: A – сегодня ветрено, B – идет дождь. После чего получаем: $A\&B$. На рис. 2.5 представлен переход от логического высказывания к формальному.

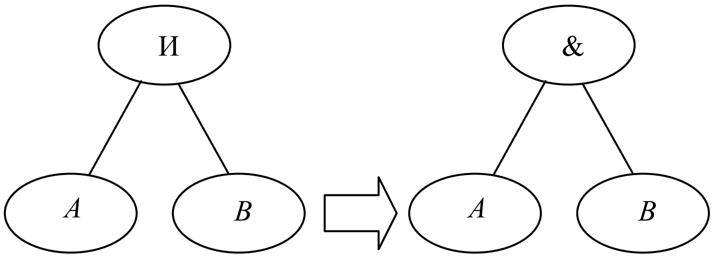


Рис.2.5

На рис. 2.6 представлена схема для формализации логических высказываний.


Выбор элементов логического высказывания, которым будут назначены операнды
Выбор части логического высказывания, которое будет являться корневой вершиной
(дерево не построено)
Выбор очередной вершины, которая будет ветвиться
Выбор операндов очередного уровня
Принять решение о завершении построения дерева
(дерево построено)
Переход от элементов логических высказываний к операциям формальной логики
Выбор формального высказывания, соответствующего построенному дереву

Рис. 2.6

2.4. Таблицы истинности сложных высказываний

Рассмотрим более сложные высказывания, или формулы алгебры логики, которые получаются из простейших высказываний.

Построение таблиц истинности для таких формул производится следующим образом. Вначале выписываются значения, которые могут принимать наборы переменных в этой формулы. В общем случае, если переменных n, то различных n-мерных наборов переменных существует 2^n.

Затем вычисляется значение формулы на каждом наборе. Любая рассматриваемая логическая формула представляет собой суперпозицию (подстановку) элементарных высказываний и может быть вычислена последовательно, при помощи подстановок определенных ранее значений.

Задача 2.2. Построить таблицу истинности для формулы

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \to \overline{x_3}\ .$$

Решение. Определим значение наборов переменных. Их восемь – 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Каждому из них можно поставить в соответствие десятичный эквивалент (0, 1, …, 7).

Построим таблицу истинности рассматриваемой функции. На первом шаге выписываем значение наборов переменных:

$x_1\ x_2\ x_3$			
0 0 0			
0 0 1			
0 1 0			
0 1 1			
1 0 0			
1 0 1			
1 1 0			
1 1 1			

На втором шаге, определяем порядок выполнения элементарных высказываний и заполняем ими заголовки столбцов.

На третьем шаге вычисляем значение $x_1 \to x_2$.

На четвертом шаге вычисляем значение $\overline{x}_3$.

На пятом шаге вычисляем значение $(x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3$, зная значения $x_1 \to x_2$ и $\overline{x}_3$ на каждом возможном наборе:

$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1 \to x_2$	$\overline{x}_3$	$(x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

Таблица истинности построена.

Задача 2.3. Построить таблицу истинности для формулы: $(a \oplus \overline{b}) \& c$.

Решение. Таблица истинности будет выглядеть следующим образом:

$a\ b\ c$	$\overline{b}$	$a \oplus \overline{b}$	$(a \oplus \overline{b}) \& c$
0 0 0	1	1	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	0	0	0
0 1 1	0	0	0
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	0	1	0
1 1 1	0	1	1

Задача 2.4. Построить таблицу истинности для формулы: $\overline{(\overline{a} \to b)} \to c$.

Решение. Таблица истинности будет выглядеть следующим образом:

$a\ b\ c$	$\overline{a}$	$\overline{a} \to b$	$\overline{(\overline{a} \to b)}$	$\overline{(\overline{a} \to b)} \to c$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	1	0	1

Две формулы A и B называются ***равносильными***, если на одинаковых наборах переменных обе формулы принимают одинаковые значения (A=B).

Задача 2.5. Сравните следующие логические формулы и определите, являются ли они равносильными $f_1 = (x_1 \oplus x_2) \cdot x3$ и $f_2 = (x_1 \to x_2) \to \overline{x_3}$.

Решение. Определим значение наборов переменных. Последовательно вычислим значение первой операции (сложения по Жегалкину x_1 и x_2). Затем вычислим значение операции $(x_1 \oplus x_2) \cdot x_3$. Построим таблицу истинности для f_1:

$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \oplus x_2) \cdot x_3$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	1
1 0 0	1	0
1 0 1	1	1
1 1 0	0	0
1 1 1	0	0

Теперь надо сравнить полученные значения со значениями функции f_2 на этих же наборах переменных. Построим таблицу истинности для f_2:

$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1 \to x_2$	$\overline{x_3}$	$(x_1 \to x_2) \to \overline{x_3}$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

Функции f_1 и f_2 не являются равносильными, так как их значения различны на наборах 0, 2, 3, 4 и 6.

2.5. Равносильности алгебры высказываний

Важнейшие равносильности алгебры высказываний можно разбить на три группы:

- основные равносильности;
- равносильности, выражающие одни операции через другие;
- равносильности, выражающие основные законы алгебры высказываний.

Основные равносильности:

$x \& x = x \qquad x \vee x = x$ – законы идемпотентности;

$x \& 1 = x \qquad x \vee 1 = 1$

$x \& 0 = 0 \qquad x \vee 0 = x$ – законы работы с 0 и 1;

$x \& \overline{x} = 0$ – закон противоречия;

$x \vee \overline{x} = 1$ – закон исключения третьего;

$\overline{\overline{x}} = x$ – закон снятия двойного отрицания;

$x \& (x \vee y) = x,$

$x \vee (x \& y) = x$ – законы поглощения.

Равносильности, выражающие одни операции через другие:

$x \Leftrightarrow y = (x \to y) \& (y \to x);$

$x \to y = \bar{x} \vee y;$

$x \oplus y = \overline{(x \to y)} \vee \overline{(y \to x)}\,;$

$\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}\,;$

$\overline{(x \,\&\, y)} = \bar{x} \vee \bar{y}\,;$

$x \,\&\, y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}\,;$

$x \vee y = \overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}}\,.$

Равносильности, выражающие основные законы алгебры высказываний:

$x \,\&\, y = y \,\&\, x$	– коммутативность конъюнкции;
$x \vee y = y \vee x$	– коммутативность дизъюнкции;
$(x \,\&\, y) \,\&\, z = x \,\&\, (y \,\&\, z)$	– ассоциативность конъюнкции;
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	– ассоциативность дизъюнкции;
$x \,\&(y \vee z) = x \,\&\, y \vee x \,\&\, z$	– дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$	– дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Используя равносильности всех трех групп, можно часть формулы заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования называются ***равносильными.***

Операции дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, импликация и эквивалентность составляют ***сигнатуру алгебры высказываний*** [1]:

$$A = < \{0,1\}, \&, \vee, \bar{\ }, \to, \Leftrightarrow >.$$

Рассмотрим непустое множество M элементов любой природы $\{x, y, z, \ldots\}$, которые могут быть в том числе и высказываниями. На множестве M определено отношение = «равно» и три операции: + («логическое сложение»), · («логическое умножение»), $\bar{\ }$ («отрицание»), подчиняющиеся законам коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, двойного отрицания, де Моргана, поглощения.

Тогда мы получаем булеву алгебру $A_б = <M, +, \cdot, \bar{}\ >$. Обратите внимание, что булева алгебра является дистрибутивной решеткой с дополнениями.

Если под элементами $\{x, y, z,\ldots\}$ понимать высказывания, знак равенства понимать как равносильность, а под логическим сложением, логическим умножением, отрицанием – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, получаем ***интерпретацию*** алгебры Буля.

Среди интерпретации алгебры Буля можно отметить алгебру множеств, т.е. алгебру Кантора.

Теорема 2.3 (Стоуна). ***Булева алгебра изоморфна алгебре Кантора***.

Под изоморфизмом η между алгебрами $A_1 = <M_1, S_1>$ и $A_2 =$ $= <M_2, S_2>$ в данном случае понимаем такое взаимно однозначное соответствие между элементами носителя и сигнатуры, что [3]:

$$f_i(m^i{}_1, m^i{}_2, \ldots, mi^1{}_{n-1}) = m^i{}_n \Leftrightarrow \eta(f_i(m_1^i, m_2^i, \ldots, m_{n-1}^i) = \eta(m_n^i),$$

$$m_i^j \in M_1,\ \eta(m_i^j) \in M_2,\ j = 1, \ldots, k,\ f_i \in S_1,\ \eta(f_i) \in S_2 .$$

2.6. Булевы функции

Значение формулы алгебры высказываний полностью зависит от значения входящих в нее высказываний. Ее значение вычисляется однозначно, поэтому формула алгебры высказываний является функцией входящих в нее элементарных высказываний.

В математической логике мы будем использовать только логические переменные, которые принимают значения либо 0 (ложь), либо 1 (истина).

Функции, которые определены на этих переменных и принимают значения 0 или 1, также называются ***логическими***, или ***булевыми***.

Очевидно, что тождественно истинные или тождественно ложные формулы алгебры логики представляют собой функции-константы 1 или 0 соответственно, две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Наборы, на которых задана функция, могут быть представлены в виде конституэнтов (двоичных эквивалентов).

Конституэнтой называется логическое произведение переменных или их отрицаний в виде

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}, \quad \text{где} \quad x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \overline{x_i}, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Двоичные эквиваленты формируются из значений σ_i. Например, конституэнте $\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3$ соответствует двоичный набор 001, а конституэнте $x_1\ \overline{x_2}\ x_3$ – 101.

Если количество переменных равно n, то количество двоичных эквивалентов равно 2^n, а количество различных функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Для функций с двумя переменными известны шестнадцать логических функций:

- функция константа нуля;
- логическое умножение $\cdot$ или конъюнкция &;
- логическое сложение + или дизъюнкция $\vee$;
- отрицание (по первой переменной) $\overline{a}$;
- отрицание (по второй переменной) $\overline{b}$;
- импликация или функция следования (левая) $\rightarrow$;
- импликация или функция следования (правая) $\leftarrow$;
- сложение по модулю два или сложение Жегалкина $\oplus$;
- функция Шеффера $|$;
- стрелка Пирса $\downarrow$ или функция Вебба $\circ$;
- обратная импликация или ко-импликация (левая) $\overline{\rightarrow}$;
- обратная импликация или ко-импликация (правая) $\overline{\leftarrow}$;
- функция тождества ~ или эквивалентность $\Leftrightarrow$;
- функция константы единицы;
- функция сохранения первой переменной a;
- функция сохранения второй переменной b.

Значение каждой логической функции описывается таблицей истинности (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Таблица истинности булевых функций

Название функции	Значение функции на соответствующем наборе переменных x_1, x_2			
	0,0	0,1	1,0	1,1
Константа 0	0	0	0	0
Логическое умножение $x_1 \cdot x_2$	0	0	0	1
Левая ко-импликация $x_1 \overline{\rightarrow} x_2$	0	0	1	0
Сохранения первой переменной x_1	0	0	1	1
Правая ко-импликация $x_1 \overline{\leftarrow} x_2$	0	1	0	0
Сохранения второй переменной x_2	0	1	0	1
Сложение по модулю два $x_1 \oplus x_2$	0	1	1	0
Логическое сложение $x_1 + x_2$	0	1	1	1
Функция Вебба $x_1 \circ x_2$	1	0	0	0
Эквивалентность $x_1 \sim x_2$	1	0	0	1
Отрицание второй переменной $\overline{x_2}$	1	0	1	0
Импликация (левая) $x_1 \rightarrow x_2$	1	1	0	1
Отрицание первой переменной $\overline{x_1}$	1	1	0	0
Импликация (правая) $x_1 \leftarrow x_2$	1	0	1	1
Функция Шеффера $x_1 \mid x_2$	1	1	1	0
Константа 1	1	1	1	1

2.7. Формы представления логических функций

Для задания логических функций, кроме табличного способа, используют и задание их в виде формул алгебры логики (аналитическое представление). Нужно отметить, что одну и ту же функцию можно задать различными формулами алгебры логики. Среди различных формул для удобства представления выделяют различные формы:

- дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ);
- конъюнктивную нормальную форму (КНФ).

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это сумма произведений, образованных из переменных и их отрицаний. ДНФ не содержит скобок. Например, формы $\overline{a} + bc$, $abc + \overline{b}\overline{c}$, a, $\overline{b}$ – дизъюнктивные нормальные формы, а $d(b + \overline{c})$ – нет.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – это произведение сумм, состоящих из переменных и их отрицаний. Например, формы $(\overline{a} + b)c$, $ab(c + \overline{b})$, $\overline{c}$, a, $c + \overline{b}$ – конъюнктивные нормальные формы, а $a(bd + \overline{c})$ – нет.

2.7.1. Дизъюнктивные нормальные формы

Для однозначного представления булевых функций используются ДНФ и КНФ.

Теорема 2.4 (о ДНФ). ***Всякая логическая функция, отличная от константы 0, может быть сведена к ДНФ.***

Для получения ДНФ необходимо:

1) записать булеву функцию в виде {+, ·, ¯};
2) с помощью законов де Моргана освободиться от общих отрицаний и по закону двойного отрицания снять двойные черточки;
3) с помощью первого закона дистрибутивности раскрываются все скобки, и проводится поглощение.

Полученная форма удовлетворяет определению ДНФ.

Если ДНФ функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных в каждой своей конъюнкции содержит все n переменных или их отрицания, то это ***совершенная дизъюнктивная нормальная форма*** (***СДНФ)***.

Каждая функция имеет одну единственную СДНФ, и она может быть получена из таблицы истинности этой функции путем записи через знак логического сложения всех наборов переменных, на которых эта функция определена как истинная. Каждый такой набор переменных соответствует конъюнкции, причем если переменная $x_i = 1$, то x_i входит в нее без отрицания, если $x_i = 0$, то x_i входит в нее с отрицанием $\overline{x_i}$:

$$\sum x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} ,$$

где $x_i^{\sigma_i} = x_i$ при $\sigma_i = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = \overline{x_i}$ при $\sigma_i = 0$.

Например, для функции $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \overline{x_3}$ СДНФ может быть построена по таблице истинности. Построим таблицу истинности для функции $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \overline{x_3}$:

$x_1\, x_2\, x_3$	$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \overline{x_3}$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

$$\text{СДНФ}(F) = 000 + 010 + 100 + 101 + 110 =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_2}\,x_3 + x_1\,x_2\,\overline{x_3}.$$

Аналитический вывод для СДНФ состоит из четырех шагов:

1) привести функцию к виду ДНФ;
2) каждую конъюнкцию, где меньше, чем n переменных, умножить на $1 = (x_i + \overline{x_i})$;
3) раскрыть скобки с помощью закона дистрибутивности;
4) по закону идемпотентности убрать лишнее.

Для функции $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \overline{x_3}$ аналитический вывод выглядит следующим образом:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \overline{x_3} = \overline{(x_1 \rightarrow x_2)} + \overline{x_3} = \overline{\overline{x_1} + x_2} + \overline{x_3} = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3} =$$
$$= x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \overline{x_3} = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot (\overline{x_3} + x_3) + (\overline{x_1} + x_1) \cdot (\overline{x_2} + x_2) \cdot \overline{x_3} =$$
$$= x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} +$$
$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} =$$
$$= x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}.$$

Обратите внимание: для константы 0 *не существует* СДНФ, так как нет ни одного набора переменных, на котором она была бы определена, как истинная!

2.7.2. Конъюнктивные нормальные формы

Теорема 2.5 (о КНФ). ***Всякая логическая функция, отличная от константы единицы, может быть сведена к КНФ.***

Для получения КНФ необходимо:

1) записать булеву функцию в виде $\{+, \cdot, \bar{\ }\}$;

2) с помощью законов де Моргана спустить черту отрицания до отдельных букв и по закону двойного отрицания уничтожить двойные черточки;

3) с помощью второго закона дистрибутивности уничтожить все суммы произведений и провести поглощение.

Полученная форма удовлетворяет определению КНФ.

Если КНФ функции $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных в каждой своей дизъюнкции содержит все n переменных либо их отрицания, то это ***совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)***. Каждая функция имеет одну единственную СКНФ, и она может быть получена из таблицы истинности этой функции путем записи через знак логического умножения всех наборов переменных, на которых эта функция определена, как ложная. Каждый такой набор переменных соответствует дизъюнкции, причем если переменная $x_i = 1$, то x_i входит в нее с отрицанием $\overline{x_i}$, , если $x_i = 0$, то x_i входит в нее без отрицания x_i:

$$\underset{f=0}{\&} \left(x_1^{\sigma_1} + x_2^{\sigma_2} + ... + x_n^{\sigma_n}\right),$$

где $x_i^{\sigma_i} = x_i$ при $\sigma_i = 0$ и $x_i^{\sigma_i} = \overline{x_i}$ при $\sigma_i = 1$.

Например, для функции $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3$ СКНФ по таблице истинности.

Построим таблицу истинности для функции

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3:$$

$x_1\ x_2\ x_3$	$(x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

$$\text{СДНФ(F)} = \overline{001} \cdot \overline{011} \cdot \overline{111} =$$
$$(x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) .$$

Аналитический вывод для СКНФ состоит из пяти шагов:

1) привести функцию к виду ДНФ;

2) все конъюнкции через второй закон дистрибутивности преобразовать к виду КНФ;

3) к каждой дизъюнкции, где меньше, чем *n* переменных, прибавить $0 = x_i \cdot \overline{x_i}$;

4) убрать скобки с помощью второго закона дистрибутивности;

5) по закону идемпотентности убрать лишнее.

Для функции $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \to \overline{x}_3$ аналитический вывод СКНФ выглядит следующим образом:

$$(x_1 \ \to \ x_2) \ \to \ \overline{x_3} = \overline{(x_1 \to x_2)} + \overline{x_3} = \overline{\overline{x_1} + x_2} + \overline{x_3} = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3} =$$
$$= (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}) = (x_1 + 0 + \overline{x_3}) \cdot (0 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= (x_1 + x_2 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 \cdot \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}).$$

Обратите внимание: для константы 1 *не существует* СКНФ, так как нет ни одного набора переменных, на котором она была бы определена, как ложная!

Задача 2.6. Построить СДНФ и СКНФ для функции $(a \mid b) \mid c$.

Решение. Построим таблицу истинности для функции $(a \mid b) \mid c$.

$a\ b\ c$	$(a \mid b) \mid c$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$$\text{СДНФ} = a\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c\ ;$$

$$\text{СКНФ} = (a + b + \bar{c})\cdot(a + \bar{b} + \bar{c})\cdot(\bar{a} + b + \bar{c})\ .$$

Задача 2.7. Построить СДНФ и СКНФ для функции $(a\downarrow b)\downarrow c$.

Решение. Построим таблицу истинности для функции $(a\downarrow b)\downarrow c$.

$a\ b\ c$	$(a\downarrow b)\downarrow c$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

$$\text{СДНФ} = \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c}\ ;$$

$$\text{СКНФ} = (a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+b+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\ .$$

Задача 2.8. Построить СДНФ и СКНФ для функции $(a \oplus \bar{b})\cdot c$.

*Решение.*Построим таблицу истинности для функции $(a \oplus \bar{b})\cdot c$.

$a\ b\ c$	$(a \oplus \bar{b})\cdot c$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,b\,c\ ;$$

$$\text{СКНФ} = = (a+b+c)(a+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+b+c)\times$$

$$\times(\overline{a}+b+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+c)\,.$$

Задача 2.9. Построить СДНФ и СКНФ для функции $\overline{(\overline{a} \to b)} \to c$.

Решение. Построим таблицу истинности для функции $\overline{(\overline{a} \to b)} \to c$.

$a\ b\ c$	$\overline{(\overline{a} \to b)} \to c$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c\ ;$$

$$\text{СКНФ} = (a + b + c)\cdot(a + \overline{b} + c)\ .$$

Задача 2.10. Построить СДНФ и СКНФ для функции $a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$.

Решение. Построим таблицу истинности для функции $a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$.

$a\ b\ c$	$a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$$\text{СДНФ} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c\ ;$$

$$\text{СКНФ} = (a + \bar{b} + c)\cdot(a + \bar{b} + \bar{c})\cdot(\bar{a} + b + c)\cdot(\bar{a} + b + \bar{c})\ .$$

2.8. Минимизация булевых функций. Метод Квайна – МакКласки

2.8.1. Законы алгебры Буля

В математической логике определяется специальная алгебра, алгебра Буля, содержащая операции логического умножения, логического сложения и отрицания { · ,+, - }, которые позволяет производить тождественные преобразования логических выражений. К этим законам относятся

Закон идемпотентности (одинаковости):

$$a + a = a, \qquad a \cdot a = a.$$

Закон коммутативности:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

Закон ассоциативности:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Законы дистрибутивности:

- дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c).$$

Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{a}} = a\ .$$

Законы де Моргана:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a \cdot b}\,, \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a + b}\,.$$

Законы поглощения:

$$a + a \cdot b = a, \qquad a \cdot (a + b) = a.$$

Законы, определяющие действия с логическими константами 0 *и* 1*:*

$$a + 0 = a \qquad a + 1 = 1$$
$$a \cdot 0 = 0 \qquad a \cdot 1 = a$$
$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{a} + a = 1$$
$$\overline{1} = 0 \qquad \overline{a} \cdot a = 0$$

Правомерность всех рассмотренных выше законов может быть легко доказана, например, с использованием таблиц истинности.

Дополнительные законы алгебры Буля являются следствиями из основных законов и очень полезны при упрощении записи логических функций.

Закон склеивания:

1) $a \cdot b + \overline{a} \cdot b = b$.

Доказательство этого тождества проводится с использованием первого закона дистрибутивности:

$$a \cdot b + \overline{a} \cdot b = b \cdot (a + \overline{a}) = b \cdot 1 = b .$$

2) $(a + b) \cdot (\overline{a} + b) = b$.

Доказательство этого тождества проводится с использованием второго закона дистрибутивности:

$$(a + b) \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot \overline{a} + b = b .$$

Закон Блейка–Порецкого:

$$a + \overline{a} \cdot b = a + b , \qquad \overline{a} + a \cdot b = \overline{a} + b .$$

Применяя законы действия с логическими константами, идемпотентности и склеивания, данное тождество можно доказать следующим образом:

$$a + \overline{a} \cdot b = a \cdot 1 + \overline{a} \cdot b = a \cdot (b + \overline{b}) + \overline{a} \cdot b =$$
$$= a \cdot b + a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = a \cdot b + a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + a \cdot b = a + b.$$

Закон свертки логического выражения:

$$a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c .$$

Данное тождество можно доказать, последовательно используя законы работы с логическими константами, дистрибутивности, идемпотентности и склеивания:

$$a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c =$$
$$= a \cdot b \cdot (c + \overline{c}) + \overline{a} \cdot c \cdot (b + \overline{b}) + b \cdot c \cdot (a + \overline{a}) =$$

$$= a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot \overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot c + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + a\cdot b\cdot c + \overline{a}\cdot b\cdot c =$$
$$= (a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot \overline{c}) + (\overline{a}\cdot b\cdot c + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c) + (\overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + \overline{a}\cdot b\cdot c) =$$
$$= a\cdot b + \overline{a}\cdot c + \overline{a}\cdot c = a\cdot b + \overline{a}\cdot c.$$

2.8.2. Упрощение логических функций

Для нормальных форм представления функций определено понятие сложности функции, как число первичных термов в таком представлении. Преобразования нормальной формы с целью снижения сложности функции называется ***упрощением***. Для упрощения логических функций используются все законы алгебры логики.

Задача 2.11. Упростить СДНФ функции $(a\,|\,b)\,|\,c$.

Решение. Представим функцию в совершенной дизъюнктивной форме и упростим ее с помощью законов алгебры логики:

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c = \overline{b}\,\overline{c} + b\,\overline{c} + a\,b\,c =$$
$$= \overline{c} + a\,b\,c = \overline{c} + a\,b.$$

Задача 2.12. Упростить СДНФ функции $(a\downarrow b)\downarrow c$.

Решение. Представим функцию в совершенной дизъюнктивной форме и упростим ее с помощью законов алгебры логики:

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,b\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,b\,\overline{c} = b\,\overline{c} + a\,\overline{c}.$$

Задача 2.13. Упростить СДНФ функции $(a \oplus \overline{b})\cdot c$**.**

Решение. Представим функцию в совершенной дизъюнктивной форме и упростим ее с помощью законов алгебры логики:

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,b\,c\ .$$

Дальнейшее упрощение невозможно.

Задача 2.14. Упростить СДНФ функции $\overline{(\overline{a}\to b)}\to c$.

Решение. Представим функцию в совершенной дизъюнктивной форме и упростим ее с помощью законов алгебры логики:

$$\text{СДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c =$$
$$= \overline{a}\,c + a = a + c.$$

Задача 2.15. Упростить СДНФ функции $a\cdot b + \overline{a}\cdot \overline{b}$.

Решение. Представим функцию в совершенной дизъюнктивной форме и упростим ее с помощью законов алгебры логики:

$$\text{СДНФ} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c = \bar{a}\,\bar{b} + a\,b\ .$$

2.8.3. Метод Квайна – МакКласки

Минимизация логических функций можно проводить с помощью метода Квайна – МакКласски, который состоит из четырех шагов.

1. Представить наборы (конституенты), на которых функция истинна, в виде двоичных эквивалентов;
2. Упорядочить двоичные эквиваленты по ярусам (по числу единиц двоечных эквивалентов) и провести склейку (применить правило склеивания к соответствующим конституентам) наборов в соседних ярусах, получая максимальные интервалы до тех пор, пока это возможно; пометить каждый набор, участвовавший в склейке. Склеиваются только те наборы или интервалы, различие в которых заключается только в значении одного разряда: 001 и 000, 001- и 101-, и т.д.
3. Построить таблицу Квайна, столбцы которой соответствуют двоичным наборам истинности функции, а строки – максимальным интервалам. Если i-й набор покрывается j-м интервалом, то ставим 1 на пересечении соответствующих строки и столбца, в противном случае ставим 0 или ничего;
4. Найти минимальное покрытие таблицы Квайна, состоящее из минимального количества максимальных интервалов, включающих в себя все наборы, на которых функция истинна.

Рассмотрим функцию F_1, которая истинна на наборах {1, 3, 5, 7, 11, 13, 15}. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма данной функции равна:

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 +$$
$$+\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4.$$

Двоичные эквиваленты истинных наборов:

1	0001
3	0011
5	0101
7	0111
11	1011
13	1101
15	1111

Упорядочим двоичные наборы по ярусам и проведем склейки, до тех пор, пока это возможно (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Склеивание элементов

0001 √ √	00-1 √	0--1
0011 √ √	0-01 √	--11
0101 √ √	-011 √	-1-1
0111 √ √ √	0-11 √ √	
1101 √ √	-101 √	
1011 √ √	01-1 √ √	
1111 √ √ √	11-1 √	
	-111 √ √	
	1-11 √	

Затем строим таблицу Квайна (табл. 2.8), в которой наборы 0001, 1101 и 1011 покрываются единственно возможным образом, следовательно, покрывающие их минимальные интервалы называются <u>обязательными</u> и образуют <u>ядро покрытия</u>, так как должны входить в любое покрытие.

В табл. 2.8 соответствующие единицы подчеркнуты, интервалы {0- -1,- -11, -1-1} образуют не только ядро покрытие, но и покрывают всю таблицу Квайна.

Таким образом, мы получили минимальную форму исследуемой функции в виде:

$$\text{МДНФ} = \{0\text{ - - }1,\text{ - - }1\ 1,\ \text{-}1\text{-}1\} = \overline{x_1}\, x_4 + x_3\, x_4 + x_2 x_4.$$

Таблица 2.8

Таблица Квайна

	0001	0011	0101	0111	1011	1101	1111
0--1	$\underline{1}$	1	1	1			
--11		1		1	$\underline{1}$		1
-1-1			1	1		$\underline{1}$	1

Задача 2.16. Найти МДНФ функции

$f_1 = (\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}) \cdot (x_1 \oplus \overline{x_3}) \oplus x_4$.

Решение. Построим таблицу истинности для f_1.

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	$(\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}) \cdot (x_1 \oplus \overline{x_3}) \oplus x_4$
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	1
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

Совершенная ДНФ исследуемой функции имеет вид:

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} +$$
$$+ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 +$$
$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Упорядочим двоичные наборы по ярусам и проведем склейку (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Склейка для задачи 2.16

0001 √√	00-1 √	-0-1
0010 √√	-001 √	-01-
0100	001- √	--11
0011 √√√√	-010 √	1--1
1010 √√	0-11 √	
1001 √√√	-011 √√√	
0111 √√	101- √	
1011 √√√√	10-1 √√	
1101 √√	1-01 √	
1111 √√√	-111 √	
	1-11 √√	
	11-1 √	

В первом столбике присутствует набор, который не участвовал ни в одной склейке – он сам является максимальным интервалом 0100. В третьем столбике к нему добавляется еще четыре максимальных интервала: {-0-1, -01-, --11, 1--1}.

Строим таблицу Квайна (табл. 2.10).

Таблица 2.10

Таблица Квайна для задачи 2.16

	0001	0010	0100	0011	1010	1001	0111	1011	1101	1111
0100			1							
-0-1	1					1		1	1	
-01-		1		1	1			1		
--11				1			1	1		1
1--1						1		1	1	1

Определим ядро покрытия, в которое войдут обязательные интервалы: {0100, -0-1, -01-, --11}. В данном случае, ядро покрытия покрывает и всю таблицу в целом.

Минимальная дизъюнктивная нормальная форма f_1 имеет вид:

$$\text{МДНФ} = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\, \overline{x_4} + \overline{x_2}\, x_4 + \overline{x_2}\, x_3 + x_3\, x_4.$$

Задача 2.17. Найти МДНФ функции $f_2(x_1\ x_2\ x_3)$, которая принимает единичные значения на наборах 0,2,3,6 и 7.

Решение. Построим таблицу истинности для f_2.

$x_1\,x_2\,x_3$	f_2
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} + \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3} + \overline{x_1}\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2\ \overline{x_3} + x_1\ x_2\ x_3\ .$$

Упорядочим двоичные наборы по ярусам и проведем склейку (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Склейка для задачи 2.17

000 √√	0-0 √	**--0**
010 √√	-00 √	
100 √√	-10 √	
110 √√√	1-0 √	
111 √	**11-**	

В результате склейки у нас получилось всего два максимальных интервала: {11-, --0}. Без построения таблицы Квайна очевидно, что они образуют минимальное покрытие, так как удаление любого из этих интервалов приведет к потери наборов, на которых функция $f_2(x_1\ x_2\ x_3)$ истинна. МДНФ = $x_1\ x_2 + \overline{x_3}$.

2.9. Функционально полные системы логических функций

Рассмотрим понятия полноты, или функциональной полноты, для системы логических функций.

Возьмем системы булевых функций $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Система функций F называется ***полной***, если любая логическая функция может быть представлена как суперпозиция системы функций F.

Рассмотрим примеры полных систем.

Очевидно, что система $P = \{f_1, f_2, \ldots, f_m \,/\, m = 2^{2^N}\}$, содержащая все N-мерные булевы функции, полна.

Система функций $<\vee, \wedge, \overline{\ \ }>$ также полна, так как любая логическая функция представима в дизъюнктивной или конъюнктивной форме.

Для определения, является ли исследуемая система полной, может быть использовано два подхода. Один из них основывается на теореме о полноте, а второй – на критерии Поста–Яблонского [1-3].

2.9.1. Теорема о полноте системы булевых функций

Теорема 2.6 (о полноте). ***Если даны две системы логических функций F_1 и F_2, и F_1 полна, то система F_2 полна тогда, и только тогда, когда каждая функция системы F_1 представима через функции F_2.***

Данная теорема дает возможность доказать полноту следующих систем булевых функций.

1. Штрих Шеффера $\{\,|\,\}$.

Выведем представление полной системы функций алгебры Буля ($<\vee, \wedge, \overline{\ \ }>$) через штрих Шеффера. Для этого воспользуемся дизъюнктивной формой $a \,|\, b = \overline{a} + \overline{b}$:

$$\overline{a} = \overline{a} + \overline{a} = a \,|\, a,$$

$$a + b = \overline{a} \,|\, \overline{b} = (a \,|\, a) \,|\, (b \,|\, b),$$

$$a \cdot b = \overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{(a|b)} = (a|b)|(a|b).$$

2. Элемент Вебба $\{\circ\}$.

Представим функции алгебры Буля через элемент Вебба с учетом его ДНФ $a \circ b = \overline{a} \cdot \overline{b}$:

$$\overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{a} = a \circ a,$$

$$a \cdot b = \overline{a} \circ \overline{b} = (a \circ a) \circ (b \circ b),$$

$$a+b=\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}=\overline{(a\circ b)}=(a\circ b)\circ(a\circ b).$$

3. Импликативная система {→, 0}.

Представим функции алгебры Буля через импликативную систему с учетом ДНФ импликации $a\to b=\overline{a}+b$:

$$\overline{a}=\overline{a}+0=a\to 0,$$

$$a+b=\overline{a}\to b=(a\to 0)\to b,$$

$$a\cdot b=\overline{\overline{a}+\overline{b}}=\overline{(a\to\overline{b})}=(a\to(b\to 0))\to 0.$$

4. Коимпликативная система $\{\overline{\to}, 1\}$.

Представим функции алгебры Буля через коимпликативную систему с учетом ДНФ коимпликации $a\,\overline{\to}\,b=a\cdot\overline{b}$:

$$\overline{a}=1\cdot\overline{a}=1\,\overline{\to}\,a,$$

$$a\cdot b=a\,\overline{\to}\,\overline{b}=a\,\overline{\to}\,(1\,\overline{\to}\,b),$$

$$a+b=\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}=\overline{(\overline{a}\,\overline{\to}\,b)}=1\,\overline{\to}\,((1\,\overline{\to}\,a)\,\overline{\to}\,b).$$

5. Алгебра Жегалкина {⊕, 1, ·}.

Выведем представление полной системы функций алгебры Буля через алгебру Жегалкина. Для этого воспользуемся дизъюнктивной формой $a\oplus b=a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b$:

$$\overline{a}=0+\overline{a}=0\cdot a+1\cdot\overline{a}=a\oplus 1,$$

$$a+b=\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}=((a\oplus 1)\cdot(b\oplus 1))\oplus 1.$$

2.9.2. Критерий Поста–Яблонского

Неудобство использования теоремы о полноте заключается в том, что мы никак не можем интерпретировать отрицательный результат. Если мы не смогли найти выражение функций F_1 через F_2, то неизвестно в чем причина, в нашем неумении или принципиальной невозможности таких действий?

Более конструктивным является критерий Поста – Яблонского. Применение этого подхода к исследованию системы функций на полноту требует введения пяти замкнутых классов функций $\boldsymbol{K_0}$, $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{L}$.

Замкнутым каждый класс называется потому, что любая суперпозиция функций данного класса дает новую функцию, которая также принадлежит этому классу.

Классом K_0 (сохраняющих константу 0) булевых функций f_i (x_1, x_2, . . ., x_n) называется множество функций, для которых выполняется условие, что при нулевых значениях переменных функции принимают значение 0:

$$f_i\,(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

К классу K_0 принадлежат такие функции, как константа нуля, логическое сложение $a+b$, логическое умножение ab, сложение Жегалкина $a \oplus b$, функции сохранения первой a и второй b переменных.

Классом K_1 (сохраняющих константу 1) булевых функций f_i (x_1, x_2, . . ., x_n) называется множество функций, для которых выполняется условие, что при единичных значениях переменных функции принимают значение 1:

$$f_i\,(1, 1, \dots, 1) = 1.$$

К классу $\boldsymbol{K_1}$ принадлежат такие функции, как константа единицы, логическое сложение $a+b$, логическое умножение ab, эквивалентность $a \sim b$, функции сохранения первой a и второй b переменных.

Классом S (самодвойственных) булевых функций f_i (x_1, x_2, ..., x_n) называется множество функций, для которых выполняется условие: $f_i{}^* = f_i$, т.е. на всех противоположных наборах значение функции противоположны:

$$f_i\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f}_i(\,\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}).$$

К классу S принадлежат такие функции, как отрицание $\overline{a}$, функции сохранения первой a и второй b переменных.

Классом M (монотонных) булевых функций f_i (x_1, x_2, . . ., x_n) называется множество функций, для которых выполняется условие, что на всех наборах σ_1 и σ_2 при $\sigma_1 > \sigma_2$ значение функции

$$f_i\,(\sigma_1) \geq f_i\,(\sigma_2)\,.$$

Основная сложность при исследовании данного свойства состоит в сравнении наборов. Не все наборы $\sigma^1 = (\sigma_1^1,\ \sigma_2^1,\ ...,\ \sigma_n^1)$ и $\sigma^2 = (\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ ...,\ \sigma_n^2)$ сравнимы, а только те, у которых $\sigma_i^1 \geq \sigma_i^2$,

$i = 1, ..., n$. Например, наборы 100 и 000 сравнимы 100 > 000, а 010 и 001 – нет.

К классу M принадлежат такие функции, как константы 0 и 1, логическое сложение $a+b$, логическое умножение ab, функции сохранения первой a и второй b переменных.

Классом L (линейных) булевых функций f_i $(x_1, x_2, . . ., x_n)$ называется множество функций, которые представимы полиномом Жегалкина первой степени:

$$f_i(x_1, x_2, . . ., x_n) = c_0 \oplus c_1 \,\&\, x_1 \oplus c_2 \,\&\, x_2 \oplus ... \oplus c_n \,\&\, x_n.$$

К классу L принадлежат такие функции, как константы 0 и 1, эквивалентность $a\sim b$, сложение Жегалкина $a \oplus b$, отрицание, функции сохранения первой a и второй b переменных.

Критерий Поста – Яблонского. ***Для того чтобы система логических функций F была функционально полна, необходимо и достаточно, чтобы она по совокупности не содержалась ни в одном из замкнутых классов K_0, K_1, S, M и L.***

Базисом или ***базисным набором логических функций*** называется такая полная система функций B, что удаление из B хотя бы одной логической функции нарушает свойство полноты B.

Как очевидно из данного определения, любой базис является полной системой, но не каждая полная система образует базис. Например, привычный набор функций алгебры Буля {+, ·, ¯}, обладающий функциональной полнотой, не является базисом в строгом смысле этого слова, так как из него может быть получено два новых базиса: конъюнктивный { ·, ¯} и дизъюнктивный {+, ¯}.

Для доказательства построим таблицу принадлежности классов (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Таблица Яблонского для алгебря Буля

Классы	K_0	K_1	***S***	***M***	***L***
{ · }	+	+	-	+	-
{ + }	+	+	-	+	-
{ ¯ }	-	-	+	-	+
{·, +, ¯}	-	-	-	-	-

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2.18. С помощью критерия Поста – Яблонского исследовать систему $\{\sim, \cdot\,, 0\}$ на полноту.

Решение. Построим таблицу истинности предложенных функций и по ней проведем исследование.

a	b	$a \sim b$	$a \cdot b$	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	0

Из таблицы истинности очевидно, что $\{\,\cdot\,, 0\} \subset K_0$ и $\{\sim\} \not\subset K_0$, при этом $\{\,\cdot\,, \sim\} \subset K_1$ и $\{0\} \not\subset K_1$.

Все три функции из системы $\{\sim, \cdot\,, 0\}$ не являются самодвойственными, так как для них можно указать нарушение этого свойства. Например, $0\sim0=1$, а на противоположном наборе $1\sim1=1$ функция имеет то же самое значение. Для функции $\{\,\cdot\,\}$ противоположные наборы 01 и 10 дают одинаковые значения. Для константы 0 обе пары противоположных наборов дают одинаковые значения.

Свойство монотонности соблюдается для функций $\{\cdot\,, 0\}$, но не для $\{\sim\}$, так как наборы 00 и 01 связаны соотношением $00 < 01$, но $\sim(0, 0) > \sim(0, 1)$.

Проверим линейность исследуемых функций.

Предположим, что $0(a, b)$ линейна, тогда она должна быть представима в виде

$0(a, b) = c_0 \oplus c_1 \cdot a \oplus c_2 \cdot b.$

Найдем неизвестные коэффициенты разложения, зная таблицу истинности функции:

$0(0, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 0 = c_0 = 0,$

$0(0, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 1 = c_0 \oplus c_2 = 0 \oplus c_2 = c_2 = 0,$

$0(1, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 0 = c_0 \oplus c_1 = 0 \oplus c_1 = c_1 = 0.$

Проверим правильность найденных коэффициентов:

$0(1, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$, что совпадает со значением в таблице истинности. Наше предположение о линейности функции $\{0\}$ подтвердилось.

Следовательно, функция $\{0\} \subset L$.

Продолжим исследование. Предположим:

$\sim(a, b) = c_0 \oplus c_1 \cdot a \oplus c_2 \cdot b,$

$\sim(0, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 0 = c_0 \oplus 0 \oplus 0 = c_0 = 1,$

$\sim(0, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 1 = 1 \oplus 0 \oplus c_2 = 1 \oplus c_2 = 0,$
следовательно, $c_2 = 1,$

$\sim(1, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 0 = 1 \oplus 0 \oplus c_1 = 1 \oplus c_1 = 0,$
следовательно, $c_1 = 1$.

Проверим правильность найденных коэффициентов:

$\sim(1, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$, что совпадает со значением в таблице истинности. Наше предположение о линейности $\{ \sim \}$ подтвердилось.

Следовательно, функция $\{ \sim \} \subset L$.

Рассмотрим функцию $\{ \cdot \}$. Предположим, что

$\cdot (a, b) = c_0 \oplus c_1 \cdot a \oplus c_2 \cdot b,$

$\cdot (0, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 0 = c_0 \oplus 0 \oplus 0 = c_0 = 0,$

$\cdot (0, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 1 = 0 \oplus 0 \oplus c_2 = 0 \oplus c_2 = 0,$
следовательно, $c_2 = 0,$

$\cdot (1, 0) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 0 = 0 \oplus 0 \oplus c_1 = 0 \oplus c_1 = 0,$
следовательно, $c_1 = 0$.

Проверим правильность найденных коэффициентов:

$\sim(1, 1) = c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$, что не совпадает со значением в таблице истинности. Наше предположение о линейности $\{ \cdot \}$ не подтвердилось. Следовательно, функция $\{ \cdot \} \not\subset L$.

Построим таблицу принадлежности классам K_0, K_1, S, M и L (табл. 2.13).

Таблица 2.13

Таблица Яблонского для задачи 2.18

Классы	K_0	K_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
~	-	+	-	-	+
·	+	+	-	+	-
{~, · , 0}	-	-	-	-	-

В соответствии с критерием Поста–Яблонского система $\{\sim, \cdot, 0\}$ не содержится целиком ни в одном из пяти классов K_0, K_1, S, M и L, следовательно, она полна.

Задача 2.19. С помощью критерия Поста–Яблонского исследовать систему $\{\rightarrow, \oplus\}$ на полноту.

Решение. Построим таблицу принадлежности рассматриваемых функций $\{\rightarrow, \oplus\}$ классам K_0, K_1, S, M и L (табл. 2.14).

Таблица 2.14

Таблица Яблонского для задачи 2.19

Классы	K_0	K_1	S	M	L
$\rightarrow$	-	+	-	-	-
$\oplus$	+	-	-	-	+
$\{\rightarrow, \oplus\}$	-	-	-	-	-

В соответствии с критерием Поста–Яблонского система $\{\rightarrow, \oplus\}$ не содержится целиком ни в одном из пяти классов K_0, K_1, S, M и L, следовательно, она полна.

Задача 2.20. С помощью критерия Поста–Яблонского исследовать систему $\{\rightarrow, 1\}$ на полноту.

Решение. Построим таблицу принадлежности рассматриваемых функций $\{\rightarrow, 1\}$классам K_0, K_1, S, M и L (табл. 2.15).

Таблица 2.15

Таблица Яблонского для задачи 2.20

Классы	K_0	K_1	S	M	L
$\rightarrow$	-	+	-	-	-
1	-	+	-	+	+
$\{\rightarrow, 1\}$	-	+	-	-	-

В соответствии с критерием Поста – Яблонского система $\{\rightarrow, 1\}$ содержится целиком в классе K_1, следовательно, она не полна.

2.10. Построение логических схем

Значение математической логики для практики связано, прежде всего, с применением их для моделирования электронных схем, предназначенных для «вычисления» логических функций. Такие модели называются ***логическими схемами***. Логическая схема состоит из структурных (функциональных, логических) элементов и схемы (структуры) их соединения. Каждый структурный элемент представляет собой прямоугольник с входами и одним выходом, инверсные входы и выходы соответствуют незакрашенным кружочкам. Сам элемент обозначается следующим образом:

- единицей, если он реализует логическое сложение;
- знаком конъюнкции «&», если реализует логическое умножение;
- М2, если соответствует сложению по модулю два;
- “≡”, если реализует функцию эквивалентности.

На рис. 2.7 представлен набор структурных логических элементов, каждый из которых реализует одну из логических функций, обеспечивающих функциональную полноту.

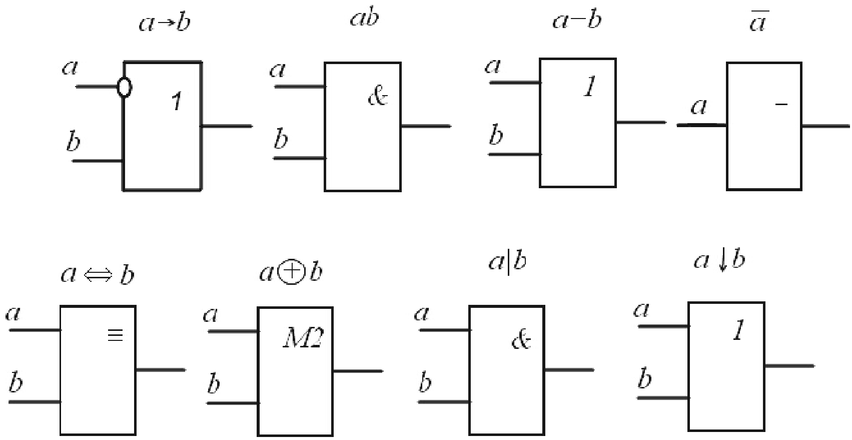


Рис. 2.7

Структура (схема) соединения элементов должна удовлетворять следующим требованиям:

- каждый вход должен быть соединен не более чем с одним выходом;
- существует ровно один выход, который не соединен ни с одним входом (выход схемы). Этому выходу сопоставляется «вычисляемая» функция $f(x_1, \ldots x_n)$;

- существует ровно n входов, не соединенных ни с одним выходом (входы логической схемы). Каждому входу сопоставляется одна из переменных $x_1, x_2, \dots x_n$;
- в схеме должны отсутствовать обратные связи.

Логические схемы позволяют решать две основные для приложений задачи:

1) задача ***анализа***: для заданной логической схемы определить логическую функцию, которая «вычисляется» этой схемой;

2) задача ***синтеза***: для заданной логической функции и заданного набора структурных логических элементов построить логическую схему, которая «вычисляет» заданную логическую функцию.

Ниже рассмотрены два простых метода синтеза логических схем.

Метод 1.

1. Построим таблицу истинности для рассматриваемой функции.
2. Построим совершенную ДНФ.
3. Упростим СДНФ и получим минимальную ДНФ.
4. Приведем функцию к виду, удобному для реализации в заданном базисе.
5. Проведем анализ функции и построим схему из функциональных элементов.

Например, рассмотрим построение схем для функции $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, истинной на наборах 1, 3, 5, 10 и 14 в базисе Шеффера или на функциональных элементах И-НЕ.

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4} + x_1x_2x_3\overline{x_4}\,,$$

$$\text{МДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 + x_1\,x_3\,\overline{x_4} = \overline{x_1}\,x_4(\,\overline{x_2} + \overline{x_3}\,) + x_1\,x_3\,\overline{x_4} =$$

$$= \overline{(x_1 + \overline{x_4} + \overline{(\overline{x_2} + \overline{x_3})})} + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_3} + x_4)} = \overline{A} + \overline{B}\,,$$

$$A = x_1 + \overline{x_4} + \overline{(\overline{x_2} + \overline{x_3})} = \overline{\overline{x_1 + \overline{x_4}}} + \overline{(\overline{x_2} + \overline{x_3})} = \overline{(x_1 + \overline{x_4})}\,|\,(\overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$

$$= ((x_1 + \overline{x_4})\,|\,(x_1 + \overline{x_4}))\,|\,(x_2\,|\,x_3) = (((x_1\,|\,x_1)\,|\,x_4)\,|\,((x_1\,|\,x_1)\,|\,x_4))\,|\,(\overline{x_2} + \overline{x_3}),$$

$$B = \overline{\overline{x_1\,|\,x_3}} + \overline{\overline{x_4}} = \overline{(x_1\,|\,x_3)}\,|\,\overline{x_4} = (x_1\,|\,x_3)\,|\,(x_1\,|\,x_3)\,|\,(x_4\,|\,x_4)\,.$$

Сама логическая схема представлена на рис. 2.8.

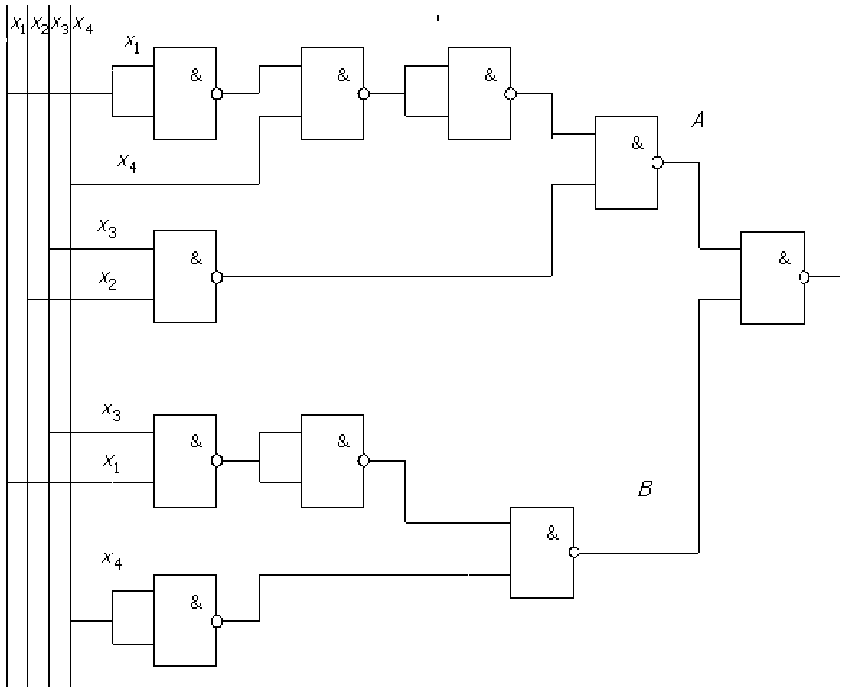


Рис. 2.8

Метод 2.

1. Представляем связки алгебры Буля в данном базисе.
2. Строим таблицу истинности исследуемой функции и СДНФ.
3. Упрощаем функцию и вводим скобки.
4. Каждую связку И, ИЛИ, НЕ сразу представляем схематично.
5. При возникновении двойного отрицания вычеркиваем пару элементов, которые выполняют роль инверторов.

Связки для функций Булева базиса, выраженные через функциональный элемент Шеффера, приведены на рис. 2.9. Аналитически их можно представить так:

$$\overline{a}=\overline{a}+\overline{a}=a|a,$$

$$a\cdot b=\overline{\overline{a\cdot b}}=\overline{\overline{a}+\overline{b}}=\overline{a|b}=(a|b)|(a|b),$$

$$a+b=\overline{\overline{a}}+\overline{\overline{b}}=\overline{a}|\overline{b}=(a|a)|(b|b).$$

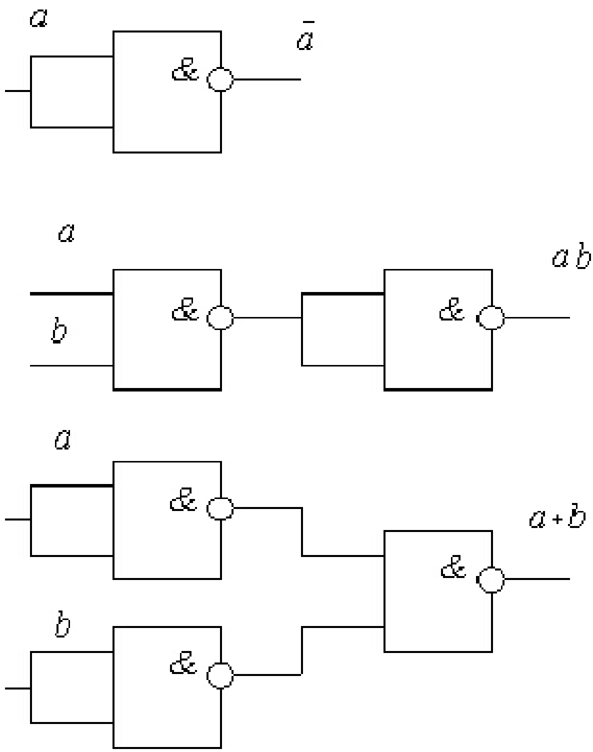


Рис. 2.9

С помощью рассмотренных связок можно построить схему для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, истинной на наборах 1, 3, 5, 10 и 14 методом непосредственного моделирования. Построим минимальную дизъюнктивную форму и вынесем за скобки общие множители:

$$\text{МДНФ} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) + x_1 x_3 \bar{x}_4 .$$

Схема, полученная непосредственным моделированием, полностью совпадает с предыдущей схемой и приведена на рисунке 2.8.

Контрольные вопросы и задания

2.1. Даны три высказывания: *A* – «Идет дождь», *B* – «Ветрено», *C* – «Ясно». Формализовать следующее сложное высказывание:

«Неверно, что ясно бывает тогда и только тогда, когда дует ветер или идет дождь».

2.2. Даны три высказывания: A – «Идет дождь», B – «Ветрено», C – «Ясно». Формализовать следующее сложное высказывание: «Ясная погода является необходимым условием для отсутствия дождя или отсутствия ветра».

2.3. Даны три высказывания: A – «Идет дождь», B – «Ветрено», C – «Ясно». Формализовать следующее сложное высказывание: «Ясная погода является необходимым и достаточным условием для отсутствия дождя или отсутствия ветра».

2.4. Даны три высказывания: A – «Идет дождь», B – «Ветрено», C – «Ясно». Формализовать следующее сложное высказывание: «Ясная погода является достаточным условием для отсутствия дождя или отсутствия ветра».

2.5. Определить, какие высказывания являются ложными:

- «Ромб – частный случай параллелограмма»;
- «Квадрат – частный случай ромба»;
- «$\sqrt{1200} < 34$»;
- «$\sqrt{700} < 26$»;
- «Если натуральное число делится на 3 и 4, то оно делится и на 6».

2.6. Построить таблицу истинности функции:

$$f(a,b,c) = \overline{a \oplus b \circ \bar{c}} \to a .$$

2.7. Даны две функции, f_1 и f_2. Определить, являются ли они двойственными друг другу:

$$f_1(a,b,c) = \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + a \cdot c ,$$

$$f_2(a,b,c) = (c \to (a+b)) \to a \cdot (c \to b) .$$

2.8. Даны две функции, F_1 и F_2. Определить, являются ли они равносильными друг другу:

$F_1(a, b, c) = 1\{000, 001,011,101,100.111\}$,

$F_2(a, b, c) = b \to c.$

2.9. Дана логическая функция $(\bar{x}_1 \to x_2) \to \overline{x_3 \to x_1}$. Построить для нее:

1) таблицу истинности;

2) совершенную ДНФ;

3) совершенную КНФ.

2.10. Дана логическая функция $x_3 \to ((x_1 \to x_2) \to x_3 \to x_1$. Построить для нее:

1) таблицу истинности;
2) совершенную ДНФ;
3) совершенную КНФ.

2.11. Дана логическая функция $((\overline{\overline{x_1} \to x_2}) \to x_3) \to \overline{x_3 \to x_1}$. Построить для нее:

1) таблицу истинности;
2) совершенную ДНФ;
3) совершенную КНФ;

2.12. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) \circ x_1$, используя аналитический вывод, построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ).

2.13. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1 \to x_2}} \to x_3 \to \overline{x_1}$, используя аналитический вывод, построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ).

2.14. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \to x_2) \to (\overline{x_2} \to x_3)$, используя аналитический вывод, построить совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ).

2.15. Построить минимальную ДНФ с помощью метода Квайна – МакКласки для функции $f(a, b, c)$=1{000, 001, 011, 101, 100, 111}, заданной своей областью истинности.

2.16. Построить минимальную ДНФ с помощью метода Квайна – МакКласки для функции f = 1{0000, 0001, 0010, 0011,1100, 1101}.

2.17. Построить минимальную ДНФ с помощью метода Квайна – МакКласки для функции f = 1{0100, 0101, 0110, 0111,1000, 1001}.

2.18. Построить монотонную функцию от трех переменных, принадлежащую классу K_0.

2.19. Построить линейную функцию от трех переменных, определить, принадлежит ли она классу K_1.

2.20. Дана функция F_1=1{001, 010, 100, 111}, заданная своей областью истинности. Определить, является ли она линейной.

2.21. Построить самодвойственную функцию от трех переменных, принадлежащую классу K_1.

2.22. Определить, является ли монотонной функция $f(x_1, x_2, ..., x_{127}) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 ... x_{126} \cdot \overline{x_{127}}$.

2.23. Доопределить функцию $f(a, b, c)$, $q_1 = \{100\}$, $q_0 = \{010, 110\}$, таким образом, чтобы она стала полной.

2.24. Определить, является ли она самодвойственной функция F_1=1{001, 010, 100, 111}, заданная своей областью истинности.

2.25. Дана функция f (a, b, c). Определить, к каким замкнутым классам она принадлежит.

a b c	*f (a, b, c)*
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

2.26. Дана функция f (a, b, c). Определить, каким замкнутым классам она принадлежит.

a b c	*f (a, b, c)*
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

2.27. Дана функция f (a, b, c). Определить, каким замкнутым классам она принадлежит?

a b c	*f (a, b, c)*
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

2.28. Дана функция f (a, b, c). Определить, каким замкнутым классам она принадлежит?

a b c	*f (a, b, c)*
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

2.29. Дана функция $F_1(a, b, c)$. Построить двойственную ей функцию $F_2(a, b, c)$.

a b c	$F_1(a, b, c)$	$F_2(a, b, c)$
0 0 0	1	?
0 0 1	0	?
0 1 0	1	?
0 1 1	0	?
1 0 0	1	?
1 0 1	0	?
1 1 0	1	?
1 1 1	1	?

2.30. Дана функция $F_1(a, b, c)$. Построить двойственную ей функцию $F_2(a, b, c)$.

$a\ b\ c$	$F_1(a, b, c)$	$F_2(a, b, c)$
0 0 0	1	?
0 0 1	0	?
0 1 0	1	?
0 1 1	0	?
1 0 0	1	?
1 0 1	0	?
1 1 0	1	?
1 1 1	0	?

2.31. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она сохраняла 0 и 1 и была самодвойственной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	0
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	?
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

2.32. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она была монотонной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	0
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	1
1 0 0	?
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

2.33. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она была полной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	?
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	0
1 0 0	?
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

2.34. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она была полной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	?
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	0
1 0 0	?
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

2.35. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она была линейной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	?
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	0
1 0 0	?
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

2.36. Дана частично определенная функция $f(a, b, c)$. Доопределить ее так, чтобы она была полной.

$a\ b\ c$	$f(a, b, c)$
0 0 0	?
0 0 1	?
0 1 0	?
0 1 1	0
1 0 0	?
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

2.37. Определить, является ли линейной функция
$f(x_1, x_2, ..., x_{127}) = \overline{x_1} \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus ... \oplus x_{126} \oplus \overline{x_{127}}$.

2.38. Определить, является ли линейной функция
$f(x_1, x_2, ..., x_{127}) = \overline{x_1} \Leftrightarrow x_2 \Leftrightarrow \overline{x_3} \Leftrightarrow x_4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x_{126} \Leftrightarrow \overline{x_{127}}$.

2.39. Определить, является ли монотонной функция
$f(x_1, x_2, ..., x_{127}) = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 ... x_{126} \cdot x_{127}}$.

2.40. Какими свойствами обладает группоид $< M, \rightarrow >$?

2.41. Какими свойствами обладает группоид $< M, \oplus >$?

2.42. Какими свойствами обладает группоид $< M, \& >$?

2.43. Какими свойствами обладает группоид $< M, \Leftrightarrow >$?

2.44. Какими свойствами обладает алгебра $< M, \rightarrow, 0 >$?

2.45. Какими свойствами обладает алгебра $< M, \Leftrightarrow, 0 >$?

2.46. Доопределить f таким образом, чтобы группоид $A = < M, f >$ стал абелевой полугруппой.

2.47. Является ли группоид $A = < M, \rightarrow >$ полугруппой?

2.48. Является ли группоид $A = < M, \oplus >$ абелевым?

2.49. Является ли группоид $A = < M, | >$ идемпотентным.

2.50. Определить, является ли алгебра $A = < M, \rightarrow, \bar{\ } >$ кольцом?

2.51. Определить, является ли алгебра $A = < M, \rightarrow, 0 >$ телом?

2.52. Задать свойства f_1 и f_2 таким образом, чтобы алгебра $A = < M, f_1, f_2 >$ стала кольцом.

2.53. Задать свойства f_1 и f_2 таким образом, чтобы алгебра $A = < M, f_1, f_2 >$ стала телом.

Глава 3. Формальные теории

3.1. Основные свойства формальных теорий

Для определения формальной теории необходимо задать [1]:

- множество A символов, образующих ***алфавит***;
- множество слов F в алфавите A, которые называются ***формулами***;
- подмножество B формул $B \in F$, которые называются ***аксиомами***;
- множество R отношений на множестве формул $R \in F^{n+1}$, которые называются ***правилами вывода***.

Алфавит может быть конечным или бесконечным.

Множество формул обычно задается индуктивно, как правило, оно бесконечно.

Множества A и F по совокупности определяют ***язык формальной теории***, или сигнатуру.

Множество аксиом может быть, конечно, или бесконечно. Бесконечное множество аксиом, как правило, задают в виде конечного множества ***схем*** и правил порождения из этих схем конкретных аксиом.

Множество правил вывода обычно конечно.

Для каждой формальной теории важнейшими понятиями являются следующие ***свойства***:

- выводимость;
- интерпретация;
- общезначимость;
- разрешимость;
- непротиворечивость;
- полнота;
- независимость.

3.1.1. Выводимость

Пусть F_1, F_2, F_n, G – формулы теории T, т.е. $F_1, F_2, F_n, G \in F$. Если существует такое правило вывода R, что $(F_1, F_2, F_n, G) \in R$, то говорят, что формула ***G непосредственно выводима*** из формул F_1, F_2, F_n по правилу вывода *R:*

$$\frac{F_1, F_2, F_n}{G} R \, ,$$

где формулы F_1, F_2, F_n называются ***посылками***, а формула G – ***заключением.***

Вывод формулы G из формул F_1, F_2, F_n – это такая последовательность формул F_1, F_2, F_n, что $F_n=G$, а любая формула F_i – либо аксиома, либо исходная формула, либо непосредственный вывод из ранее полученных формул.

Если в теории T существует вывод формулы G из формул F_1, F_2, ..., F_n, то записывают $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$, где $F_1, F_2, ..., F_n$ – гипотезы.

Теорема – формула, выводимая только из аксиом, без гипотез.

3.1.2. Интерпретация

Интерпретацией формальной теории ***T*** в ***область интерпретации M*** называется функция $h{:}F \to M$, которая каждой формуле F теории T однозначно сопоставляет некое содержательное высказывание относительно объектов множества M. Это высказывание может быть истинно или ложно или не иметь истинностного значения. Но если оно истинно, то говорят, что формула ***выполняется в данной интерпретации***.

Например, рассматривая далее исчисление высказываний, мы будем приписывать значение 0 или 1 атомарным формулам (простым высказываниям), которые входят в сложные. Это и будет называться интерпретацией h.

Мы говорим, что формула A исчисления истинна при некоторой интерпретации h тогда и только тогда, когда $h(A)=1$, в противном случае говорят, что A ложна при интерпретации h.

3.1.3. Разрешимость

Формальная теория T называется ***разрешимой***, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является она теоремой или нет.

Под ***алгоритмом*** в интуитивном смысле мы понимаем последовательность действий, выполнение которых позволяет получить решение задачи регулярным путем за конечное число шагов.

Свойствами алгоритма являются:

1) дискретность шагов;
2) детерминированность;
3) регулярность;
4) конечность;
5) массовость.

Дискретность шагов означает, что весь процесс решения задачи делится на элементарные действия – шаги, последовательное выполнение которых приводит к результату.

Под свойством «*детерминированность*» понимают, что последовательность действий алгоритма определена однозначно.

Регулярность подразумевает, что многократное выполнение одного и того же алгоритма на одних и тех же исходных данных дает один и тот же результат.

Конечность означает, что число шагов алгоритма, проделанных для получения результата, конечно.

Массовость означает, что алгоритм решает целый класс задач.

3.1.4. Общезначимость

Формула ***общезначима*** (тавтология), если она истинна в любой интерпретации.

Формула называется ***противоречием***, если она ложна в любой интерпретации.

3.1.5. Непротиворечивость

Формальная теория ***семантически непротиворечива***, если ни одна из ее теорем не является противоречием.

Формальная теория ***формально непротиворечива***, если в ней не являются выводимыми одновременно формулы F и $\overline{F}$.

3.1.6. Полнота

Формальная теория называется полной, если каждому истинному высказыванию соответствует теорема теории.

3.1.7. Независимость

Система аксиом формальной теории называется независимой, если ни одна из аксиом не выводится из оставшихся аксиом.

3.2. Исчисление высказываний

Алфавит состоит из набора переменных, связок и служебных символов:

$a, b, \ldots, a_1, b_1, \ldots$ – пропозициональные переменные;

$\overline{}, \rightarrow$ – связки;

(,) – служебные символы.

Формулы определяются согласно следующим правилам:

1) любая пропозициональная переменная есть формула;

2) если A, B – формулы, то $(\overline{A})$, $(A \rightarrow B)$ – тоже формулы.

Аксиомы:

$A_1 : (A \rightarrow (B \rightarrow A)),$

$A_2 : ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))),$

$A_3 : ((\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((\overline{B} \rightarrow A) \rightarrow B)).$

Правило:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$ Modus ponens,
Правило заключения (MP)

Помимо правила заключения, в исчислении высказываний действует также правило подстановки и теорема о дедукции.

3.2.1. Интерпретация

Приписывание значений 0 или 1 атомарным формулам, которые входят в состав сложных, называется интерпретацией.

Формализуя определение, мы говорим, что функция ***h*** называется интерпретацией, если для любых формул A и B исчисления высказываний h удовлетворяет условиям:

$h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$,

$h(A \to B) = h(A) \to h(B)$.

Задача 3.1. Найти значение формулы $R = \overline{(\overline{A} \to B) \to A} \to B$ при интерпретации $h(A) = h(B) = 1$.

Решение. Правильное решение можно получить двумя способами – либо непосредственной подстановкой, либо через таблицу истинности.

Непосредственная подстановка дает следующий результат:

$$R = \overline{(\overline{A} \to B) \to A} \to B = \overline{(\overline{1} \to 1) \to 1} \to 1 = \overline{(0 \to 1) \to 1} \to 1 =$$

$$= \overline{1} \to 1 = 0 \to 1 = 1.$$

Формула A исчисления высказываний ***истинна при некоторой интерпретации*** h тогда и только тогда, когда $h(A) = 1$. В противном случае, говорят, что A ***ложна при интерпретации*** h.

В нашем примере формула R истинна при интерпретации $h(A) = h(B) = 1$.

Формула A исчисления высказываний называется ***тавтологией*** тогда и только тогда, когда она истинна независимо от интерпретации. Формула A называется ***противоречием*** тогда и только тогда, когда она ложна при любой интерпретации.

Таблицы истинности дают нам инструмент для определения того, является ли формула A тавтологией (противоречием) или нет.

A	B	$\overline{A} \to B$	$(\overline{A} \to B) \to A$	$\overline{(\overline{A} \to B) \to A}$	$\overline{(\overline{A} \to B) \to A} \to B$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1

В нашем примере, таблица истинности показывает, что заданная формула R – тавтология.

Различные интерпретации дают возможность сформулировать правило подстановки (суперпозиции), которое расширяет набор правил вывода.

3.2.2. *Правило подстановки*

Пусть A – некая формула, выводимая (доказуемая) в исчислении высказываний, x – переменная, B – любая формула исчисления высказываний. Тогда формула, которая получается из формулы A путем подстановки в нее вместо переменной x формулы B, выводима (доказуема).

Попробуем применить правило подстановки для доказательства теоремы 3.1.

Теорема 3.1. ***Формула $A \to A$ выводима в исчислении высказываний.***

Доказательство:

1. Подставим в аксиому A_2 вместо B $A \to A$, вместо C – A:

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)).$$

2. Но $(A \to ((A \to A) \to A))$ – это аксиома A_1, и по правилу заключения получаем $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$.

3. Но $A \to (A \to A)$ – это аксиома A_1 и по правилу заключения получаем $(A \to A)$.

3.2.3. *Связь между исчислением высказываний и алгеброй высказываний*

Теорема 3.2. ***Каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, тождественно истинна в алгебре высказываний.***

Отсюда следуют утверждения:

- каждая аксиома – тождественно истинная;
- правило подстановки, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам;
- правило заключения, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам.

Другие функциональные связки, не входящие в классическое определение исчисления высказываний, могут быть заданы следующим образом:

$$A \,\&\, B = \overline{A \to B}\ ,$$

$$A \vee B = \overline{A} \to B\,,$$
$$(A = B) = (A \to B)\,\&\,(B \to A)\,,$$
$$A \oplus B = (\overline{A} \to \overline{B}) \to \overline{A \to B}\,.$$

Следующая теорема очень полезна при доказательстве других теорем, так как дает новое правило вывода.

Теорема 3.3 (о дедукции). ***Если Г – множество формул, А и В – формулы из Г высказываний, А ├В, то, Г├А→В.***

Используем теорему о дедукции при доказательстве теоремы 3.4.

Теорема 3.4. ***Из А→В, В→С ├ А→С выводима в исчислении высказываний.***

Доказательство:

1) $A \to B$ – гипотеза;
2) $B \to C$ – гипотеза;
3) A – тоже гипотеза;
4) B выводимо по правилу заключения из 1 и 3;
5) C выводимо по правилу заключения из 2 и 4;
6) следовательно, $A \to B,\ B \to C\ A \vdash C$, и, по теореме о дедукции**,** $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

Мы показали свойство транзитивности импликации.

3.2.4. Основные результаты исследования исчисления высказываний

Разрешимость. Проблема разрешимости для исчисления высказываний разрешима.

Непротиворечивость. Исчисление высказываний непротиворечиво.

Полнота. Исчисление высказываний *полно в узком смысле*, т.е. к системе аксиом нельзя добавить в качестве новой аксиомы недоказуемой в этом исчислении формулы. Исчисление высказываний *полно в широком смысле*, т.е. всякая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний.

Независимость. Система аксиом исчисления высказываний независима.

3.2.5. Другие формализации исчисления высказываний

Аксиоматическая система ***Гильберта – Аккермана***:

связки: *дизъюнкция* и *отрицание* $(A \to B = \overline{A} \vee B)$;

аксиомы:

$$A \vee A \to A,$$

$$A \to A \vee B,$$

$$A \vee B \to B \vee A,$$

$$(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C);$$

правило: *MP*.

Аксиоматическая система ***Россера***:

связки: *конъюнкция* и *отрицание* $(A \to B = \overline{(A \,\&\, \overline{B})})$;

аксиомы:

$$A \to A \,\&\, A,$$

$$A \,\&\, B \to A,$$

$$(A \to B) \to (\overline{(B \,\&\, C)} \to \overline{(C \,\&\, A)});$$

правило: *MP*.

3.2.6. Методы проверки тождественной истинности формул

1. С помощью таблиц истинности, когда приходится вычислять значений формулы во всех интерпретациях.
2. Алгебраический метод, который базируется на применении законов булевой алгебры. В этом случае мы упрощаем формулу до тех пор, пока она либо не станет равна 1, либо 0, либо мы не сведем к простой формуле (например, МинДНФ), по которой видно, что это не тавтология.
3. Метод Квайна. В этом случае, разлагаем формулу R по первой переменной, придавая значение 0 и 1, получая более простые

формулы R_0 и R_1. Затем разлагаем их по второй переменной и т.д. Возможно, на каком-то шаге, мы увидим тавтологию или противоречие. В общем случае, метод Квайна отличается меньшей трудоемкостью, чем использование таблиц истинности с их полным перебором возможных значений переменных.

Рассмотрим пример для R. Алгебраический метод дает следующий результат:

$$R = \overline{(\bar{A} \to B) \to A} \to B = \overline{(A \vee B) \to A} \to B =$$
$$= \bar{A} \,\&\, \bar{B} \vee A \vee B = \bar{B} \vee A \vee B \equiv 1.$$

Метод Квайна дает следующее решение:

при A=0

$$R = \overline{(\bar{A} \to B) \to A} \to B = \overline{(\bar{0} \to B) \to 0} \to B =$$
$$= \overline{B \to 0} \to B = \bar{B} \vee B \equiv 1;$$

при A=1

$$R = \overline{(\bar{A} \to B) \to A} \to B = \overline{(\bar{1} \to B) \to 1} \to B =$$
$$= \overline{1 \to 1} \to B = 1 \vee B \equiv 1.$$

3.3. Исчисление предикатов

3.3.1. Основные понятия исчисления предикатов

Одноместным предикатом P(x) называется всякая функция одной переменной, аргумент которой x определен на некотором множестве M, а значение функции определены на множестве $\{0,1\}$ [1].

Множество M, на котором задан предикат, называется ***областью определения*** предиката.

Множество I_p, на котором предикат принимает только истинные значения, называется ***областью истинности*** предиката $P(x)$.

Предикат $P(x)$ называется ***тождественно истинным (тождественно ложным)*** на множестве M, если $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$).

N-местным предикатом Q(x₁, x₂,…,xₙ) называется всякая функция n переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая значение на множестве $\{0,1\}$.

Предикат $P(x)$ является ***следствием*** $Q(x)$ ($Q(x) \to P(x)$), если $I_P \subseteq I_Q$.

Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ ***равносильны*** ($Q(x) = P(x)$), если $I_P = I_Q$, т.е. они являются следствием друг друга.

Логические операции над предикатами. Так как предикаты принимают значения 0 и 1, к ним можно применять все операции алгебры высказываний. Пусть на некотором множестве M заданы два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $Q(x)\&P(x)$, который равен 1 при тех и только при тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Очевидно, что областью истинности предиката $Q(x)\&P(x)$ является $I_P \bigcap I_Q$.

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $Q(x) \vee P(x)$, который равен 0 при тех и только при тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Очевидно, что областью истинности предиката $Q(x) \vee P(x)$ является $I_P \bigcup I_Q$.

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P(x)}$, который равен 0 при всех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ равен значению «истина», и равен 1 при всех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ равен значению «ложь».

Очевидно, что областью истинности предиката $\overline{P(x)}$ является $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = \overline{I_P}$.

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $Q(x) \to P(x)$, который равен 0 при тех и только при тех значениях $x \in M$, при которых $Q(x)$ принимает значение «истина», а $P(x)$ – значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Очевидно, что областью истинности предиката $Q(x) \to P(x)$ является

$$I_{Q \to P} = I_{\bar{Q}} \bigcup I_P = \overline{I_Q} \bigcup I_P .$$

Задача 3.1. Заданы предикаты $P(x)$, $Q(x)$ на множестве натуральных чисел N: $P(x)$: «число X делится на 5», $Q(x)$: «число X четное». Найти область истинности предикатов $Q(x)\&P(x)$, $Q(x) \vee P(x)$, $Q(x) \to P(x)$.

Решение. Так как I_p = {5, 10, 15, 20, …. $5n$, …} и I_Q = {2, 4, 6, 8, 10, … $2n$, …}, то:

$I_{Q\&P} = I_Q \bigcap I_P = \{10, 20, ..., 20n, ...\}$,

$I_{Q \vee P} = I_Q \bigcup I_P = \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ ..., 2n,\ 5n, ...\}$,

$I_{Q \Rightarrow P} = I_Q \bigcup I_P$={5, 10, 15, …, $5n$, ..} $\bigcup$ {1, 3, 5, … $2n$-1, ...} = {1, 3, 5, 7, 9, 10, …, $2n$–1, $5n$, ..}.

Задача 3.2. Задан предикат $P(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} > 0$ на множестве рациональных чисел R. Найти область истинности предиката.

Решение. Найдем область, на которой данный предикат может быть определен. Поскольку знаменатель дроби не может быть равен 0, то $x \neq -1$, $x \neq -2$.

Для того чтобы наша дробь была положительной, необходимо, чтобы знаки числителя и знаменателя совпадали (рис. 3.1).

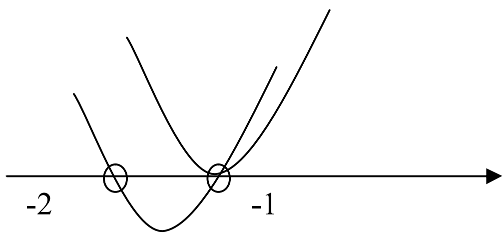


Рис. 3.1

Отсюда $I_P = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

3.3.2. Кванторные операции над предикатами

Задан предикат $P(x)$, определенный на множестве M. Если a – некий элемент из множества M, то его подстановка вместо x в предикат $P(x)$, превращает этот предикат в высказывание $P(a)$.

В логике предикатов существуют две кванторные операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание и связывают переменные.

Пусть задан предикат $P(x)$, определенный на множестве M.

Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимаем высказывание, истинное тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинен для каждого элемента x из M, и ложное в противном случае. Это высказывание не зависит от x, его словесное выражение выглядит так: «Для любого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности.*

Переменная x в предикате $P(x)$ *свободна*, в высказывании $\forall x P(x)$ переменная x *связана квантором всеобщности.*

Под выражением $\exists x P(x)$ понимаем высказывание, истинное тогда и только тогда, когда существует элемент x из M, для которого $P(x)$ истинен, и ложное в противном случае. Это высказывание не зависит от x, его словесное выражение выглядит так: «Существует x, для которого $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называется *квантором существования.*

Переменная x в предикате $P(x)$ *свободна*, в высказывании $\exists x P(x)$ переменная x *связана квантором существования.*

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам.

Например, применение кванторной операции $\exists x P(x, y)$ к двухместному предикату, превращает его в одноместный, зависящий только от переменной y.

Рассмотрим предикат $P(x)$, определенный на множестве $M=\{a_1, a_2,\dots,a_n\}$. Если $P(x)$ тождественно истинен, то истинными будут высказывания $P(a_1),\dots,P(a_n)$. При этом истинными будут выказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1)\,\&\,P(a_2)\,\&\dots\&\,P(a_n)$. Если найдется хотя бы один элемент a_j из M, на котором $P(a_j)=0$, то ложными будут высказывания $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1)\,\&\,P(a_2)\,\&\ldots\&\,P(a_n)$. Следовательно, существует *равносильность* $\forall x P(x) = P(a_1)\,\&\,P(a_2)\,\&\ldots\&\,P(a_n)$.

Рассмотрим предикат $Q(x)$, определенный на множестве $M=\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$. Если $Q(x)$ тождественно ложен, то ложными будут высказывания $Q(a_1),\ldots,Q(a_n)$. При этом ложными будут выказывание $\exists x Q(x)$ и дизъюнкция $Q(a_1)\vee Q(a_2)\vee\ldots\vee Q(a_n)$. Если найдется хотя бы один элемент a_j из M, на котором $Q(a_j)=1$, то истинными будут высказывания $\exists x Q(x)$ и дизъюнкция

$$Q(a_1)\vee Q(a_2)\vee\ldots\vee Q(a_n).$$

Следовательно, существует *равносильность*

$$\exists x Q(x) = Q(a_1)\vee Q(a_2)\vee\ldots\vee Q(a_n).$$

Таким образом, кванторные операции можно трактовать как обобщение дизъюнкции и конъюнкции на случай бесконечных множеств.

3.3.3. Формальное определение исчисления предикатов

Исчисление предикатов – это формальная теория, в которой определены следующие компоненты [2].

Алфавит:

связки основные: $\overline{}$, $\to$, связки вспомогательные: $\&,\vee$;

служебные символы: (,);

свантор всеобщности: $\forall$, квантор существования $\exists$;

предметные константы: $a, b,\ldots, a_1, b_1, \ldots$;

предметные переменные: $x, y,\ldots, x_1, y_1,\ldots$;

предметные предикаты: $P, Q, R, \ldots$;

предметные функторы: $f, g, h,\ldots$.

Формулы (определены в нотации Бэкуса – Наура):

<формула> ::= <атом> | $\overline{\text{< формула >}}$ |

| <формула> $\to$ <формула> | $\forall$ <переменная><формула> |

| $\exists$ <переменная><формула>;

<атом> ::= <предикат>(<список термов>);

<список термов> ::= <терм> | <терм> , <список термов> ;

<терм> ::= <константа> | <переменная> | <функтор> (<список термов>).

Аксиомы:

$P_1 : \forall x A(x) \to A(t);$

$P_2 : A(t) \to \exists x A(x).$

Кроме того, выполняется любая система аксиом исчисления высказываний.

Правила вывода:

$$\frac{A, A \to B}{B} \qquad \text{Modus ponens}$$

$$A \to \forall x A \qquad \text{Правило обобщения}$$

Помимо этого, в исчислении предикатов действует правило подстановки и теорема о дедукции.

Исчисление предикатов, в котором кванторы могут связывать только предметные переменные, но не предикаты или функторы, называется исчислением первого порядка.

Исчисления, в которых кванторы связывают не только предметные переменные, но и предикаты, функторы и т.д., называются исчислениями высших порядков.

Равносильные формулы. Рассмотрим основные равносильности исчисления предикатов. Их можно разбить на четыре группы [1,3]:

1) равносильности для двойственности:

$$\exists x P(x) = \overline{\forall x \overline{P(x)}},$$

$$\forall x P(x) = \overline{\exists x \overline{P(x)}},$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)},$$

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)};$$

2) равносильности для конъюнкции и квантора всеобщности:

$$\forall x (P(x) \,\&\, Q(x)) = \forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x),$$

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y);$$

3) равносильности для дизъюнкции и квантора существования:

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x),$$
$$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y);$$

4) вынесение константы:
$$\forall x(C \,\&\, Q(x)) = C \,\&\, \forall x Q(x),$$
$$\forall x(C \vee Q(x)) = C \vee \forall x Q(x),$$
$$\exists x(C \,\&\, Q(x)) = C \,\&\, \exists x Q(x),$$
$$\exists x(C \vee Q(x)) = C \vee \exists x Q(x),$$
$$\forall x(C \to Q(x)) = C \to \forall x Q(x),$$
$$\exists x(C \to Q(x)) = C \to \exists x Q(x).$$

Задача 3.3. Доказать равносильность
$$\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) = \forall x(P(x) \,\&\, \forall x Q(x)).$$

Решение. Если предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно истинны, то тождественно истинен предикат, а поэтому будут истинны высказывания $\forall x P(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x))$, т.е. обе части равносильности принимают значение истина.

В случае если один из предикатов, например, $P(x)$ (а как следствие $P(x) \,\&\, Q(x)$) будет не тождественно истинен, то ложными будут $\forall x P(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x))$.

Задача 3.4. Определить, являются ли равносильными
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x).$$

Решение. Если предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно истинны, то тождественно истинен предикат $P(x) \vee Q(x)$, а поэтому, будут истинны высказывания $\forall x P(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, т.е. обе части равносильности принимают значение истина.

В случае если один из предикатов, например, $P(x)$, будет не тождественно истинен, то можно рассмотреть случай $P(x) = \overline{Q(x)}$. В этом случае, ложными будут $\forall x P(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x(P(x) \vee Q(x))$. Но $\forall x(\overline{Q(x)} \vee Q(x)) = \forall x 1$ будет тождественно истинен. Следовательно, указанные предикаты не являются равносильными.

Интерпретация. Возьмем множество $M = \{0, 1\}$ и заданный на нем предикат $P(x,y)$:

x	y	$P(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Определить, на каких областях истинны высказывания $\exists x \forall y P(x, y)$ и $\forall x \exists y P(x, y)$.

При $x = 1$ высказывание $\exists x \forall y P(x, y)$ истинно при любых значениях y.

При $y = 1$ высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ истинно при любых значениях y.

Общезначимость и выполнимость. Формула A ***выполнима в области*** M, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула принимает истинные значения.

Формула A ***выполнима,*** если существует область, на которой она выполнима.

Формула A ***тождественно истинна*** в области M, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Формула A ***тождественно ложна*** в области M, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Формула A ***общезначима***, если она тождественно истинна во всякой области.

Из этих определений следуют следующие утверждения:

1) если формула A общезначима, то она и выполнима на любой области;

2) если формула A тождественно истинна в области M, то она и выполнима в этой области;

3) если формула A невыполнима, то она тождественно ложна в любой области.

Задача 3.5. Доказать, что формула $\dfrac{B \to A(x)}{B \to \forall x A(x)}$ (обобщение квантора всеобщности) общезначима.

Решение. Обозначим формулу R как

$$R = (B \to A(x)) \to (B \to \forall x A(x)).$$

Применим следующие аксиомы и равносильности:

1) аксиому для представления импликации через дизъюнкцию и отрицание

$$R = (\overline{B} \vee A(x)) \to (\overline{B} \vee \forall x A(x));$$

2) равносильность для вынесения константы

$$R = (\overline{B} \vee A(x)) \to \forall x (\overline{B} \vee A(x)).$$

Можно утверждать, что формула R тождественно истинна (по правилу обобщения)

Так как R – тождественно истинна, значит, R общезначима.

Задача 3.6. Доказать, что формула $\dfrac{A(x) \to B}{\exists x A(x) \to B}$ (обобщение квантора существования) общезначима.

Решение. Обозначим формулу R как

$$R = (A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B).$$

Применим следующие аксиомы и равносильности:

1) аксиому для представления импликации через дизъюнкцию и отрицание

$$R = (\overline{A(x)} \vee B) \to (\overline{\exists x A(x)} \vee B);$$

2) равносильность для двойственности

$$R = (\overline{A(x)} \vee B) \to (\forall x \overline{A(x)} \vee B);$$

3) равносильность для вынесения константы

$$R = (\overline{A(x)} \vee B) \to \forall x (\overline{A(x)} \vee B).$$

Можно утверждать, что формула R тождественно истинна (по правилу обобщения).

Так как R – тождественно истинна во всякой области, значит, R общезначима.

Разрешимость. Проблема разрешимости для исчисления предикатов ставится стандартно: существует ли алгоритм, позволяющий для любой формулы установить, является ли она общезначимой, выполнимой или тождественно ложной?

Ответ на этот вопрос для бесконечных областей дает теорема Черча.

Теорема 3.5 (Черча). ***Проблема разрешимости исчисления предикатов в общем виде неразрешима.***

Очевидно, что проблема разрешимости для конечных областей разрешима.

Контрольные вопросы и задания

3.1. Определить область истинности предиката $\forall x(P(x)\,\&\,Q(x)\to R(x))$, если предикаты $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ заданы на множестве натуральных чисел N:

- $P(x)$: «число X делится на 5»;
- $Q(x)$: «число X делится на 3»;
- $R(x)$: «число X четное».

3.2. Определить область истинности предиката $\forall x(P(x)\vee\overline{Q(x)})\to R(x))$, если предикаты $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ заданы на множестве натуральных чисел N:

- $P(x)$: «число X делится на 5»;
- $Q(x)$: «число X делится на 2»;
- $R(x)$: «число X нечетное».

3.3. Определить область истинности предиката $\forall x(\overline{P(x)}\,\&\,Q(x)\to R(x))$, если предикаты $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ заданы на множестве натуральных чисел N:

- $P(x)$: «число X делится на 7»;
- $Q(x)$: «число X делится на 3»;
- $R(x)$: «число X нечетное».

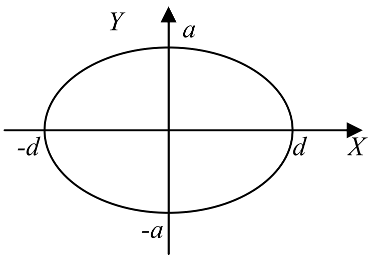


Рис. 3.2

3.4. Найти область истинности предиката $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$.

3.5. Даны следующие условия для X и Y (рис. 3.2). Записать их в виде формулы исчисления предикатов.

3.6. Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката $x^2+y^2\le 5$.

3.7. Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката $(x-2)^2+(y+2)^2=0$.

3.8. Определить область выполнения формулы $R = (B \to A) \to (B \to \forall xA)$.

3.9. Определить область выполнения формулы $R = (A \to B) \to (\exists xA \to B)$.

3.10. Определить область выполнения формулы $R = \exists x(B(x) \to A(x)) \vee \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.

3.11. Определить область выполнения формулы $R = \forall x(B(x) \to (A(x) \to A(x)))$.

3.12. Исследовать на общезначимость формулу $R : ((A \to (B \to \overline{C})) \to ((A \to B) \to (A \to \overline{C})))$.

3.13. Исследовать на общезначимость формулу $R : ((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((A \to \overline{B}) \to (A \to C)))$.

3.14. Исследовать на общезначимость формулу $R : (((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((A \to \overline{B}) \to (A \to C))) \to \overline{A \to A})$.

3.15. Исследовать на общезначимость формулы $\forall xR(x) \vee P(x)) \to (\forall xR(x) \vee \forall xP(x))$.

3.16. Какие три аксиомы относятся к исчислению высказываний:

1) $A_1 : (A \to (B \to A))$;

2) $A_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;

3) $A_3 : ((\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B))$;

4) $A_4 : A \oplus B = (\overline{A} \to \overline{B}) \to \overline{A \to B}$;

5) $A_5 : A(x) \to \forall tA(t)$;

6) $A_6 : \exists xA(x) \to A(t)$;

7) $A_7 : (A = B) = (A \to B) \& (B \to A)$;

8) $A_8 : \forall xA(x) \to A(t)$;

9) $A_9 : A(t) \to \exists xA(x)$?

3.17. Какие пять аксиом относятся к исчислению предикатов первого порядка:

1) $A_1 : (A \to (B \to A))$;

2) $A_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;

3) $A_3 : ((\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B))$;

4) $A_4 : A \oplus B = (\overline{A} \to \overline{B}) \to \overline{A \to B}$;

5) $A_5 : A(x) \to \forall t A(t)$;

6) $A_6 : \exists x A(x) \to A(t)$;

7) $A_7 : (A = B) = (A \to B) \& (B \to A)$;

8) $A_8 : \forall x A(x) \to A(t)$;

9) $A_9 : A(t) \to \exists x A(x)$?

3.18. Даны формулы исчисления высказываний. Какие из формул являются тавтологиями?

1) $R_1 : (\bar{A} \to (B \to A))$;

2) $R_2 : ((A \to (A \to A)) \to \overline{A \to A})$;

3) $R_3 : (A \to A)$;

4) $R_4 : (\bar{A} \to (\bar{B} \to A))$;

5) $R_5 : (A \to (\bar{A} \to A))$;

6) $R_6 : ((A \to (\bar{B} \to C)) \to ((\bar{A} \to B) \to (\bar{A} \to C)))$;

7) $R_7 : ((A \to A) \to \overline{(A \to A)})$;

8) $R_8 : ((\bar{A} \to (B \to C)) \to ((\bar{A} \to B) \to (\bar{A} \to C)))$.

3.19. Даны следующие формулы исчисления высказываний. Какие из формул не являются ни тавтологиями, ни противоречиями?

1) $R_1 : (\bar{A} \to (B \to A))$;

2) $R_2 : ((A \to (A \to A)) \to \overline{A \to A})$;

3) $R_3 : (A \to A)$;

4) $R_4 : (\bar{A} \to (\bar{B} \to A))$;

5) $R_5 : (A \to (\bar{A} \to A))$;

6) $R_6 : ((A \to (\bar{B} \to C)) \to ((\bar{A} \to B) \to (\bar{A} \to C)))$;

7) $R_7 : ((A \to A) \to \overline{(A \to A)})$;

8) $R_8 : ((\bar{A} \to (B \to C)) \to ((\bar{A} \to B) \to (\bar{A} \to C)))$.

3.20. Даны формулы исчисления высказываний. Какие из формул являются противоречиями?

1) $R_1 : (\bar{A} \to (B \to A))$;

2) $R_2 : ((A \to (A \to A)) \to \overline{A \to A})$;

3) $R_3 : (A \to A)$;

4) $R_4 : (\overline{A} \to (\overline{B} \to A))$;

5) $R_5 : (A \to (\overline{A} \to A))$;

6) $R_6 : ((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((\overline{A} \to B) \to \overline{(A \to C)}))$;

7) $R_7 : ((A \to A) \to \overline{(A \to A)})$;

8) $R_8 : ((\overline{A} \to (B \to C)) \to ((\overline{A} \to B) \to (\overline{A} \to C)))$.

3.21. Даны формулы исчисления предикатов первого порядка. Какие из формул являются равносильными?

1) $R_1 : \forall x(C \,\&\, Q(x)) = C \,\&\, \exists x Q(x)$;

2) $R_2 : \forall x(C \vee Q(x)) = C \vee \exists x Q(x)$;

3) $R_3 : \forall x(C \to Q(x)) = C \to \forall x Q(x)$;

4) $R_4 : \exists x(C \to Q(x)) = C \to \exists x Q(x)$;

5) $R_5 : \overline{\forall x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$;

6) $R_6 : \exists x(C \,\&\, Q(x)) = C \,\&\, \forall x Q(x)$;

7) $R_7 : \forall x(C \,\&\, Q(x)) = C \,\&\, \forall x Q(x)$;

8) $R_8 : \overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

3.22. Даны следующие формулы исчисления предикатов первого порядка.

$R = (B \to A(x)) \to (B \to \forall x A(x))$,

$R = (A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$,

$R = (A \to \forall x A(x))$.

Для каждой из них отметить свойства из приведенного списка, чтобы выражение «эта формула является….» стало истинным:

- общезначимой;
- невыполнимой;
- тождественно истинной во всякой области;
- противоречием;
- равносильностью;
- выполнимой на любом множестве;
- выполнимой на множестве $X = \{1, 0\}$;
- выполнимой на множестве $X = \{1, 2, 3, 5, 6\}$;
- тождественно ложной.

Глава 4. Теория математических доказательств

4.1. Прямые доказательства

Теория доказательства разработана в формальной логике и включает три структурных компонента: тезис; аргументы; демонстрация.

Тезис – это то, что предполагается доказать.

Аргументы – совокупность фактов, общепринятых понятий, законов и т.п. соответствующей науки.

Демонстрация – сама процедура развертывания доказательства; последовательная цепь умозаключений, когда n-е умозаключение становится одной из посылок (n+1)-го умозаключения. Выделяются правила доказательства, указаны возможные логические ошибки.

Математическое доказательство имеет много общего с теми принципами, которые устанавливаются формальной логикой. Более того, математические правила рассуждений и операций, очевидно, послужили одной из основ в разработке процедуры доказательства в логике.

В математике доказательством называется цепочка логических умозаключений, показывающая, что при каком-то наборе аксиом и правил вывода, верно, некоторое утверждение. Таким образом, математическое доказательство представляет рассуждение, имеющее задачей обосновать истинность (конечно, в математическом, то есть как выводимость, смысле) какого-либо утверждения.

Как правило, в математике выделяют следующие понятия:

- теоремы, как доказуемые утверждения;
- гипотезы, если ни утверждение, ни его отрицание ещё не доказаны;
- леммы, как менее сложные утверждения, которые доказываются.

В математике существуют нерешённые проблемы, решение которых учёным очень хотелось бы найти. За доказательства особенно интересных и важных утверждений математические общества назначают премии.

В зависимости от контекста может иметься в виду формальное доказательство (построенная по специальным правилам последовательность утверждений, записанная на формальном языке) или текст на естественном языке, по которому при желании можно восстановить формальное доказательство. Формальными доказательствами занимается специальная ветвь математики теория доказательств.

Сами формальные доказательства математики почти никогда не используют, поскольку для человеческого восприятия они очень сложны и часто занимают очень много места. Обычно доказательство имеет вид текста, в котором автор, опираясь на аксиомы и доказанные ранее теоремы, с помощью логических средств показывает истинность некоторого утверждения. В отличие от других наук, в математике недопустимы эмпирические доказательства: все утверждения доказываются исключительно логическими способами.

В математике важную роль играют математическая интуиция и аналогии между разными объектами и теоремами; тем не менее, все эти средства используются учёными только при поиске доказательств, сами доказательства не могут основываться на таких средствах. Доказательства, написанные на естественных языках, могут быть не очень подробными в расчёте на то, что подготовленный читатель сам сможет восстановить детали. Строгость доказательства гарантируется тем, что его можно представить в виде записи на формальном языке (это и происходит при компьютерной проверке доказательств).

Ошибочным доказательством называется текст, содержащий логические ошибки, то есть такой, по которому нельзя восстановить формальное доказательство. Ошибочным может быть только признание «доказательства» на естественном или формальном языке доказательством; формальное доказательство ошибочным не может быть по определению.

При характеристике математического доказательства выделяют две особенности:

1) математическое доказательство исключает какие-либо ссылки на эмпирию. Вся процедура обоснования истинности вывода осуществляется в рамках принимаемой аксиоматики;

2) наивысшая абстрактность математического доказательства, которой оно отличается от процедур доказательства в остальных науках.

В этом случае речь идет не просто о степени абстракции, а о ее природе. Дело в том, что высокого уровня абстрагирования доказательство достигает и в ряде других наук, например в физике, космологи и, конечно, в философии, поскольку предметом последней становятся предельные проблемы бытия и мышления.

Математику же отличает то, что здесь функционируют переменные, смысл которых в отвлечении от любых конкретных свойств. Напомним, что по определению переменные – это знаки, которые сами по себе не имеют значений и обретают последние только при подстановке вместо них имен определенных предметов (индивидные переменные) или при указании конкретных свойств и отношений (предикатные переменные), или, наконец, в случаях замены переменной содержательным высказыванием (пропозициональная переменная).

Сама процедура доказательства, определяемая в логике как демонстрация, протекает на основе правил вывода, опираясь на которые осуществляется переход от одних доказанных утверждений к другим, образуя последовательную цепь умозаключений.

К наиболее часто используемым приемам относятся два правила (подстановки и вывода заключений) и теорема о дедукции, которые мы рассматривали на примере исчисления высказываний.

4.1.1. Правило подстановки

В математике подстановка определяется как замена каждого из элементов a данного множества каким-либо другим элементом $F(a)$ из того же множества. В математической логике правило подстановки формулируется следующим образом: «Если истинная формула M в исчислении высказываний содержит букву, скажем A, то, заменив ее повсюду, где она встречается, произвольной буквой D, мы получим формулу, также истинную, как и исходная».

Это возможно и допустимо именно потому, что в исчислении высказываний отвлекаются от смысла высказываний (формул). Учитываются только значения «истина» или «ложь». Например, в формуле $M: A \to (B \cup A)$ на место A подставляем выражение $(A \cup B)$, в результате получаем новую формулу

$$M : (A \cup B) \to [B \cup (A \cup B)].$$

4.1.2. Правило вывода

Правило вывода заключений (иногда называют правило отделения) соответствует структуре условно-категорического силлогизма modus ponens (модус утверждающий) в формальной логике. Он имеет вид: $\dfrac{a, a \to b}{b}$.

Дано высказывание *a* и еще дано $a \to b$. Из этого следует *b*.

Например, «если идет дождь, то мостовая мокрая, дождь идет (*a*), следовательно, мостовая мокрая (*b*)». В математической логике это высказывание записывается таким образом $((a \to b)\ \&\ a) \to b$.

Умозаключение определяется, как правило, отделения для импликации. Если дана импликация ($a \to b$) и ее посылка (*a*), то мы вправе присоединить к рассуждению (доказательству) также и следствие данной импликации (*b*). Силлогизм носит принудительный характер, составляя арсенал дедуктивных средств доказательства, то есть, абсолютно отвечая требованиям математических рассуждений.

4.1.3. Дедукция

Большую роль в математическом доказательстве играет теорема о дедукции – общее название для ряда теорем, процедура которых обеспечивает возможность установить доказуемость импликации: $A \to B$, когда налицо логический вывод формулы B из формулы A. В наиболее распространенном варианте исчисления высказываний (в классической, интуиционистской и др. видах математики) теорема о дедукции утверждает следующее: «Если дана система посылок G

и посылка A, из которых, согласно правилам, выводимо B, ($G, A \vdash B$, где $\vdash$ – знак выводимости), то следует, что только из посылок G можно получить предложение $A \to B$».

Выделяется два вида доказательств – прямое и косвенное.

При прямом доказательстве доказывается тезис, а при косвенном используется антитезис.

Наиболее используемые виды прямых доказательств:

- прямой логический вывод;
- доказательство по индукции.

Задача 4.1. Прямой вывод. Доказать общезначимость формулы $\forall x R(x) \to \exists x R(x)$.

Решение. Проведем доказательство.

1. Предположим, что формула общезначима.

2.Тогда, используя равносильности для двойственности исчисления предикатов, получим тождественно истинную формулу

$$\forall x R(x) \to \exists x R(x) = \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x R(x) = \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x R(x) =$$
$$= \exists x \overline{R(x)} \vee \exists x R(x) = \exists x (\overline{R(x)} \vee R(x)) = \exists x 1 \equiv 1.$$

3. Раз формула тождественно истинна, то она общезначима.

Что и требовалось доказать.

4.1.4. Математическая индукция

Математическая индукция – один из методов прямых доказательства. Обычно используется, когда нужно доказать некое утверждение для всех натуральных чисел. Для этого доказывается «первое утверждение» – ***база индукции***, и затем доказывая, что если любое утверждение в бесконечной последовательности утверждений верно, то верно и следующее – ***шаг индукции***.

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_n{+}1, \ldots$$

Допустим, что:

- установлено, что P_1 верно (это утверждение называется базой индукции);

• для любого n доказано, что если верно P_n, то верно P_n+1 (это утверждение называется индукционным переходом).

Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Трансфинитная индукция – метод доказательства, обобщающий математическую индукцию на случай несчетного числа значений параметра.

Теорема 4.1. ***Пусть M – упорядоченное множество, P(x) при $x \in M$ – некоторое утверждение. Пусть для любого $x \in M$ из того, что P(y) истинно для всех $y < x$ следует, что верно P(x), и пусть верно утверждение P(x), если x – минимальный элемент M, тогда утверждение P(x) верно для любого x.***

Задача 4.2. Доказательство по индукции. Доказать, что бинарное отношение $T(N) = \{\text{res}(b+1, a) =1\}$, заданное на множестве натуральных чисел $N > 1$, обладает свойством рефлексивности.

Решение.

1. База индукции. Пусть $a = 2$, $b = 2$. Тогда res(2+1,2) = 1, и пара (2,2) принадлежит бинарному отношению T.

2. Индукционный переход. Рассмотрим $b = a = i$. Тогда $\text{res}(i+1,i)= (i+1) - i = 1$, и пара (i,i) принадлежит бинарному отношению T. Возьмем $b = a = i+1$, тогда $\text{res}(i+1+1, i+1) = (i+1+1) - (i+1) =1$, и пара $(i+1, i+1)$ принадлежит бинарному отношению T для любого i.

3. Тогда наша последовательность верна и все рефлексивные пары на натуральных числах $N>1$ принадлежат нашему бинарному отношению T.

Что и требовалось доказать.

4.2. Косвенные доказательства

Косвенное доказательство устанавливает справедливость тезиса тем, что вскрывает ошибочность противоположного ему допущения, антитезиса. Оно особенно ценно и незаменимо в принятии фундаментальных понятий и положений математики, например, понятия актуальной бесконечности, которое никак иначе ввести невозможно.

Не имея в силу ряда причин (недоступность объекта исследования, утрата реальности его существования и т.п.) возможности провести прямое доказательство истинности какого-либо утверждения, тезиса, строят антитезис. Убеждаются, что антитезис ведет к противоречиям, и, стало быть, является ложным. Тогда из факта ложности антитезиса делают на основании закона исключенного третьего ($a \vee \overline{a}$) вывод об истинности тезиса.

Известны следующие схемы косвенных доказательств:

- доказательство от противного;
- доказательство через контрпример.

4.2.1. Доказательство «от противного»

Доказательство «от противного» в математике – один из самых часто используемых методов доказательства утверждений.

Дана последовательность формул *G* и отрицание *A* (*G*, *A*). Если из этого следует *B* и его отрицание (*G, A, B*, $\overline{B}$), то можно сделать вывод, что из последовательности формул *G* вытекает истинность *A*. Иначе говоря, из ложности антитезиса следует истинность тезиса. Этот способ доказательства основывается на истинности формулы $((A \to B) \,\&\, \overline{B}) \to \overline{A}$ в классической логике и законе двойного отрицания $\overline{\overline{A}} = A$.

Доказательство утверждения *A* проводится следующим образом.

Сначала принимают предположение, что утверждение *A* неверно, а затем доказывают, что при таком предположении было бы верно некоторое утверждение *B*, которое заведомо неверно.

Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверным, и поэтому верно утверждение $\overline{\overline{A}} = A$, которое по закону двойного отрицания равносильно утверждению *A*.

Задача 4.3. Доказать равносильность формул

$$\forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x) = \forall x (P(x) \,\&\, Q(x))$$

Решение. Воспользуемся доказательством «от противного». Предположим, что это не так, что формулы не равносильны, т.е.

$$\forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x) \neq \forall x (P(x) \,\&\, Q(x)).$$

Тогда должны найтись *P*(*x*) и *Q*(*x*), такие, что равносильность не выполняется. В этом случае возможны три варианта:

1) $P(x)$ и $Q(x)$ оба тождественно истинные,
2) $P(x)$ – тождественно истинная, а $Q(x)$ – нет,
3) $P(x)$ и $Q(x)$ оба не тождественно истинные.

Рассмотрим случай 1, когда $P(x)$ и $Q(x)$ оба тождественно истинные (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Таблица для случая 1 задачи 4.3

Предикат	Значение
$P(x)$	Тождественно истинное
$Q(x)$	Тождественно истинное
$P(x)\ \&Q(x)$	Тождественно истинное
$\forall xP(x)$	1
$\forall xQ(x)$	1
$\forall xP(x)\ \&\ \forall xQ(x)$	1
$\forall x(P(x)\ \&\ Q(x))$	1

Рассмотрим случай 2, когда $P(x)$ – тождественно истинный, а $Q(x)$ – нет (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Таблица для случая 2 задачи 4.3

Предикат	Значение	
$P(x)$	Тождественно истинное	
$Q(x)$	0	1
$P(x)\ \&Q(x)$	0	1
$\forall xP(x)$	1	1
$\forall xQ(x)$	0	0
$\forall xP(x)\ \&\ \forall xQ(x)$	0	0
$\forall x(P(x)\ \&\ Q(x))$	0	0

Рассмотрим случай 3, когда $P(x)$ и $Q(x)$ обе не тождественно истинные (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Таблица для случая 3 задачи 4.3

Предикат	Значение			
$P(x)$	0	0	1	1
$Q(x)$	0	1	0	1
$P(x)\,\&Q(x)$	0	0	0	1
$\forall xP(x)$	0	0	0	0
$\forall xQ(x)$	0	0	0	0
$\forall xP(x)\ \&\ \forall xQ(x)$	0	0	0	0
$\forall x(P(x)\ \&\ Q(x))$	0	0	0	0

Во всех трех случаях, обе формулы принимают одинаковые значения при одинаковых условиях, следовательно, наше предположение о неравносильных формулах было неверным.

Следовательно, указанные формулы равносильны.

Что и требовалось доказать.

Задача 4.4. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x(R(x) \vee P(x)) \to (\exists xR(x) \vee \exists xP(x))\,.$$

Решение. Воспользуемся доказательством «от противного». Предположим, что это не так, что формула не общезначима, т.е. должны найтись $P(x)$ и $R(x)$, такие, на которых формула равна 0. Тогда

$$\begin{aligned}
&\forall x(R(x) \vee P(x)) \to (\exists xR(x) \vee \exists xP(x)) = \\
&= \overline{\forall x(R(x) \vee P(x))} \vee \exists xR(x) \vee \exists xP(x) = \\
&= \exists x(\overline{R(x)}\ \&\ \overline{P(x)}) \vee \exists xR(x) \vee \exists xP(x) = \\
&= \exists x(\overline{R(x)}\ \&\ \overline{P(x)} \vee R(x) \vee P(x)) = \exists x1 \equiv 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили тождественно истинное высказывание для любых $P(x)$ и $R(x)$.

Следовательно, наше предположение об отсутствии общезначимости было неверным, и наша формула – общезначима.

Что и требовалось доказать.

4.2.2. *Доказательство через контрпример*

Доказательство через контрпример строится по другой схеме.

Сначала принимают предположение, что утверждение A верно, а затем рассматривается особый случай – контрпример, при котором данное утверждение A неверно.

Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверным, и поэтому верно утверждение $\overline{A}$.

Задача 4.5. Исследовать, является ли общезначимой формула $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) = \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Решение. Предположим, что формула общезначима. Тогда она тождественно истинная для любой области.

Приведем контрпример. Положим $Q(x) = \overline{P(x)}$, оба не тождественно истинные. Тогда $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)}) = \forall x 1 = 1$ – тождественно истинное высказывание, $\forall xP(x) \vee \forall x\overline{P(x)} = 0 \vee 0 = 0$ – тождественно ложное высказывание.

Правая и левая части формулы не равны между собой. Это означает, что мы получили противоречие и на данном контрпримере рассматриваемая формула ложна.

Следовательно, наше предположение об общезначимости было неверным. Значит, рассматриваемая формула не является общезначимой.

Контрольные вопросы и задания

4.1. Даны формулы $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x))$ и $\exists xP(x) \,\&\, \exists Q(x)$. Проверить, являются ли они равносильными.

4.2. Даны формулы $\exists x(Q(x) \to C)$ и $\forall xQ(x) \to C$. Проверить, являются ли они равносильными.

4.3. Даны формулы $\exists x(C \to Q(x))$ и $C \to \exists xQ(x)$. Проверить, являются ли они равносильными.

4.4. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x(R(x) \to P(x)) \to (\forall xR(x) \to \forall xP(x)).$$

4.5. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x(R(x) \vee P(x)) \to (\forall x R(x) \vee \forall x P(x)).$$

4.6. Построить прямое доказательство утверждения, что формула $R_1 : (((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((A \to \overline{B}) \to (A \to C))) \to \overline{A \to A}$ является противоречием.

4.7. Построить косвенное доказательство утверждения, что формула $R_1 : ((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((A \to B) \to (\overline{A} \to C)))$ не является ни противоречием, ни тавтологией.

4.8. Построить прямое доказательство утверждения, что формула $R_1 : ((A \to (B \to \overline{C})) \to ((\overline{A} \to B) \to (\overline{A} \to C)))$ не является ни противоречием, ни тавтологией.

4.9. Построить косвенное доказательство утверждения, что формула $R_1 : ((A \to (\overline{B} \to C)) \to ((A \to \overline{B}) \to (A \to C)))$ является тавтологией.

4.10. Построить прямое доказательство, что $R : A(t) \to \exists x A(x)$ – аксиома исчисления предикатов.

4.11. Построить косвенное доказательство, что $R : \forall x A(x) \to A(t)$ – аксиома исчисления предикатов.

4.12. Построить прямое доказательство, что $R : ((\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B))$ – аксиома исчисления предикатов **.**

4.13. Построить доказательство от противного для утверждения «Формула R (P,Q) не общезначима».

4.14. Построить доказательство от противного с использованием контрпримера для утверждения «Формула $R(P,Q)$ не общезначима».

4.15. Построить доказательство через контрпример для утверждения «Формула $R = (\forall x(P(x) \vee Q(x)) = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ не общезначима».

4.16. Построить доказательство через контрпример для утверждения «Формула $R = (\exists x(P(x) \mathbin{\&} Q(x)) = \exists x P(x) \mathbin{\&} \exists x Q(x)$ не общезначима».

4.17. Из каких компонентов строится прямое математическое доказательство:

1) тезис;

2) антитезис;

3) аргументы;

4) контрпример;

5) демонстрация;

6) индукция?

4.18. Какие виды доказательств относятся к прямым доказательствам, а какие – к косвенным:

1) логический вывод;

2) доказательство по индукции;

3) использование контрпримера;

4) внесение противоречия;

5) доказательство от противного;

6) доказательство на основе трансфинитной индукции?

4.19. Построить прямое доказательство по индукции для утверждения: «Бинарное отношение $T(N)=\{\text{res}(b+1,a)=1\}$, заданное на множестве натуральных чисел $N>1$, обладает свойством рефлексивности».

4.20. Построить прямое доказательство по индукции для утверждения: «Бинарное отношение $T(N)=\{\text{res}(b,a)=1\}$, заданное на множестве натуральных чисел $N>1$, иррефлексивно».

Глава 5. Основы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Природа элементов в данном случае не имеет значения.

Мы разделяем задачи пересчета, перечисления и оптимизации.

Если нас интересует, сколько элементов, принадлежащих конечному множеству, обладает неким свойством (набором свойств), то это задача пересчета.

Если необходимо выделить все элементы множества, обладающие заданным свойством, то это – задача перечисления.

Если на множестве задана некая целевая функция и нас интересуют элементы множества, на которых функция достигает экстремального значения, то это задача оптимизации.

При решении указанных задач используются следующие понятия [4.1].

Подмножество из m элементов на множестве X, состоящем из n элементов, называется (n, m) ***выборкой***, где m – объем этой выборки.

Если (n, m) выборка рассматривается с учетом порядка элементов в них, то она называется (n, m)-***размещением*** и обозначается A_n^m от слова *arrengment.* Если $m = n$, то такое (n, n)-размещение называется собственно P_n ***перестановкой***.

Если порядок элементов в выборке (n, m) не имеет значения, то она называется (n, m)-***сочетанием*** и обозначается C_n^m (от слова *combination*).

И перестановки, и сочетания могут быть с повторениями и без повторений.

Рассмотрим множество $X=\{a, b, c\}$.Тогда все упорядоченные и неупорядоченные выборки объемом 2 выглядят следующим образом:

1) размещения с повторениями $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$, $A_n^m = 9$;

2) размещения без повторений $\{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$, $A_n^m = 6$;

3) сочетания с повторениями $\{aa, ab, ac, bb, bc, cc\}$, $C_n^m = 6$;

4) сочетания без повторений $\{ab, ac, bc\}$, $C_n^m = 3$.

5.1. Правила суммы и произведения

Рассмотрим конечное множество X, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что объект x из X может быть выбран $|X| = n$ способами.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – попарно не пересекающиеся множества, т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда выполняется равенство:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|.$$

При таком выборе объектов они называются несовместными событиями.

Теорема 5.1 (правило суммы). ***Если некоторый объект x может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект y может быть выбран n способами, то выбрать либо a, либо y можно (m + n) способами.***

Если объект x из M может быть выбран n способами, а объект y может быть выбран m способами, то упорядоченная пара $\langle x,y \rangle$ (когда выбирается как объект x, так и объект y) может быть выбрана $n \cdot m$ способами.

Обобщая на k объектов, получаем, что выбор упорядоченной последовательности $\langle X_1,\ldots,X_k \rangle$ может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами. nk!

Теорема 5.2 (правило произведения). ***Если объект x можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект y можно выбрать n способами, то пара объектов (x, y) в указанном порядке может быть выбрана m·n способами.***

Рассмотрим несколько задач. Во всех случаях мы выбираем и объект x, и объект y, т.е. и то, и другое.

Задача 5.1. Сколькими способами можно в группе из 20 студентов выбрать старосту и его заместителя?

Решение. В данном случае мы выбираем пару $<x,y>$ без повторений. Старосту можно выбрать 20 способами, а его заместителя 20–1=19 способами. По правилу произведения 20·19=380.

Задача 5.2. В урне находится 12 шаров. Три из них – красные, пять – белые, остальные – синие. Мы выбираем из урны два разноцветных шара. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данном случае мы выбираем пару $<x,y>$ без повторений.

Если пара <красный, синий>, то по правилу произведения таких способов 3·4=12.

Если пара <красный, белый>, то по правилу произведения таких способов 3·5=15.

Если пара <белый, синий>, то по правилу произведения таких способов 5·4=20.

У нас получается три вида несовместных событий: либо пара <красный, синий>, либо <красный, белый>, либо <белый, синий>. По правилу суммы получаем 12+15+20 = 47 различных способов выбора.

Задача 5.3. Сколько существует четырехзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение. В данном случае мы выбираем четверку $<x, y, z, w>$ с повторениями, причем последний элемент w – либо 0, либо 5 по правилу делимости, а первый x – не может быть 0, иначе число не четырехзначное.

По правилу произведения получаем 9·10·10·2=1800.

5.2. Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Заметим, что по определению, 0! = 1.

Перестановка n-элементного множества X – это взаимно однозначная функция f: $X \to X$. Если для простоты принять $X=\{1, \ldots, n\}$, то перестановкой можно назвать упорядоченный набор из n различных чисел, лежащих в промежутке от 1 до n (далее будет рассматриваться именно этот случай).

Обозначим множество всех перестановок множества X через S_n. Понятно, что $|S_n|=n!$, так как на первое место набора можно поставить любое число из n возможных, на второе – любое из $n-1$ оставшихся и т.д. до последней позиции, в которую мы помещаем последний оставшийся элемент: в результате мы получим произведение, которое и будет являться факториалом n.

Рассмотрим множество X_i из предыдущего параграфа. Пусть каждое X_i будет представлять собой множество чисел от 0 до $(i-1)$. Обозначим через T_n произведение n таких множеств. Тогда если будет существовать взаимнооднозначное соответствие между X_n и T_n, то мы сможем, в частности, перенумеровать все перестановки S_n.

Задача 5.4. В слове НИЯУ меняют местами буквы. Чему равно количество всех возможных различных слов?

Решение. Все буквы в слове различны, следовательно, число всех возможных перестановок в этом слове равно $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Задача 5.5. В слове МИФИ меняют местами буквы. Чему равно количество всех возможных различных слов?

Решение. Две буквы в слове совпадают, следовательно, число всех различных перестановок в 2! меньше возможных, т.е. равно $P_4 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(2!) = 12$.

Задача 5.6. В слове НИЯУ МИФИ меняют местами буквы и пробел. Чему равно количество всех возможных различных слов?

Решение. Три буквы в слове совпадают, следовательно, число всех различных перестановок в 3! меньше возможных, т.е. равно $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(3!) = 60480$.

5.3. Размещения и сочетания

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, лежащих в промежутке от 1 до

n, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Другими словами, размещение – это множество с повторениями. Обозначим число его элементов через A_n^m. Число всех возможных размещений $A_n^m = n\,(n-1)(n-2)\,...\,(n-m+1)$.

Теорема 5.3 (число размещений). ***Число упорядоченных*** m ***-элементных подмножеств множества*** X_n***, содержащего*** n ***элементов, равно*** $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Задача 5.7. Чему равно количество всех возможных различных слов, составленных из трех различных букв $\{A, B, C, D, E\}$?

Решение. Все буквы в слове различные, следовательно, число всех различных размещений равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Сочетание из n элементов по m – это неупорядоченный набор (множество) из m различных чисел, принадлежащих множеству X. Таким образом, сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Так как сочетание является неупорядоченным набором, то каждому такому набору соответствует $m!$ размещений (т.е. упорядоченных наборов тех же элементов).

Теорема 5.3 (число сочетаний). ***Число неупорядоченных*** m ***-элементных подмножеств множества*** X_n***, содержащего*** n ***элементов, равно*** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Можно привести некоторые свойства сочетаний:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;

3) $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

Эти свойства следуют из самих определений и проверяются непосредственно подстановкой.

Задача 5.8. В слове НИЯУ выбирают две буквы. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок букв в данном случае не имеет значения, то результат определяется по формуле для числа сочетаний

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Задача 5.9. Определить, сколько существует различных способов выбора (порядок не имеет значения) 3 томов из 5-томного собрания сочинений А. П. Чехова?

Решение. Результат определяется по формуле для числа сочетаний $C_5^3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$

Задача 5.10. В слове НИЯУ МИФИ выбирают по две буквы (все буквы различны) и составляют из них слова. Сколькими способами это можно сделать?

Решение 1. Количество различных букв равно 6, из них и осуществляется выбор пары. Результат выбора пары букв $<x, y>$ определяется по формуле для числа сочетаний

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

После того, как выбор произведен, из пары букв $<x, y>$ составляют слова. Количество таких слов вычисляем по формуле для перестановок: $P_2 = 2! = 2.$

Мы совершаем два события последовательно: выбираем буквы и составляем слова, следовательно, по правилу произведения получаем решение $N = C_6^2 \cdot P_2 = 15 \cdot 2 = 30.$

Решение 2. Используя формулу размещения, получаем:

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Задача 5.11. В слове НИЯУ МИФИ выбирают по две буквы (все буквы не обязательно различны) и составляют из них слова. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Мы выбираем либо пару различных букв, либо пару одинаковых. По правилу суммы получаем:

$$N = N_1 + N_2,$$

где N_1 – количество слов из разных букв, а N_2 – количество слов из одинаковых букв.

Количество различных букв равно 6, n=6, из них и осуществляется выбор пары. Результат выбора пары букв $<x, y>$ определяется по формуле для числа сочетаний:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

После того, как выбор произведен, из пары букв <x, y> составляют слова. Количество таких слов вычисляем по формуле для перестановок: $P_2 = 2! = 2$.

Мы совершаем два события последовательно: выбираем буквы и составляем слова, следовательно, по правилу произведения получаем решение: $N_1 = C_6^2 \cdot P_2 = 15 \cdot 2 = 30$.

В случае выбора одинаковых букв, слов столько, сколько различных букв, т.е. n: $N_2 = n = 6$.

Таким образом, общее количество слов

$$N = N_1 + N_2 = 30 + 6 = 36.$$

5.4. Разбиения

Разбиение множества X из n элементов на k блоков – это формирование множества $Q = \{B_1, \ldots, B_k\}$, в котором $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = X$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $B_i \neq \varnothing$ для $1 \le i < j \le k$. Обозначим множество всех разбиений множества X на k блоков через $\Pi_k(X)$, а через $\Pi(X)$ – множество все разбиений.

Существует алгоритм построения разбиений, описанный в рекуррентной форме.

Можно показать, что разбиение Q множества $\{1, \ldots, n\}$ однозначно определяет разбиение Q_{n-1} множества $\{1, \ldots, n-1\}$, которое получается из Q после удаления элемента n (или пустого блока) из соответствующего блока. Также если имеется разбиение $W=\{B_1, \ldots, B_k\}$ множества $\{1, \ldots, n-1\}$, то можно отыскать все разбиения Q множества $\{1, \ldots, n\}$, для которых $Q_{n-1} = W$, т.е. такие разбиения:

$B_1 \cup \{n\}, \ldots, B_k$,

…

$B_1, \ldots, B_k \cup \{n\}$,

$B_1, \ldots, B_k, \{n\}$.

Обозначим такую последовательность через E. Тогда алгоритм разбиений выглядит следующим образом: если у нас есть список

L_{n-1} всех разбиений множества $\{1, \ldots, n-1\}$, то список L_n разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ будем создавать, заменяя каждое разбиение Q в списке L_{n-1} на соответствующую ему последовательность E.

5.5. Формула включений и исключений

Рассмотрим классическую задачу о количестве элементов, получаемых при объединении множеств (рис. 5.1).

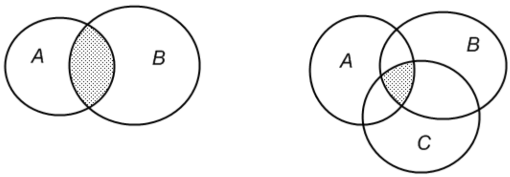


Рис. 5.1

Основная формула, по которой находят количество элементов в объединении двух множеств, вычисляется по диаграмме Эйлера–Венна, так как часть элементов принадлежат одновременно A и B и не могут учитываются дважды:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Для трех множеств A, B и C формула пересчета выглядит следующим образом:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| -$$
$$- |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Теорема 5.4 (формула включений и исключений). ***Если X_1, X_2, …, X_n некоторые множества и их мощность равна $|X_1|$, $|X_2,|,\ldots,|X_n|$, тогда***

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| -$$
$$-\{|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|\} +$$
$$+\{|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|\} +$$
$$+(-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n|.$$

Обобщая, получаем формулу включения и исключения для N объектов со свойствами, которыми эти объекты могут обладать или не обладать. Пусть имеется N объектов, которые могут обладать n

свойствами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через $N(a_i, a_j, \ldots, a_k)$ число предметов, обладающих свойствами $a_i, a_j, \ldots, a_k$ и, быть может, какими-либо другими свойствами. Тогда число N предметов, не обладающих ни одним из свойств, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, даётся формулой

$$N = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_n) + N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + \ldots$$
$$\ldots + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - \ldots - N(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n N(a_1, \ldots, a_n).$$

Задача 5.12. В аудитории находится несколько программистов. Шестеро знают VISIAL BASIC, шестеро – PHP, семеро умеют программировать на JAVA. Четверо знают VISIAL BASIC и PHP, трое VISIAL BASIC и JAVA, двое – PHP и JAVA. Один из них умеет программировать на всех языках. Сколько человек в аудитории? Сколько из них знают только VISIAL BASIC?

Решение. По условию задачи каждый из присутствующих знает хотя бы один язык программирования.

Зададим P_{VB} – свойство знать VISIAL BASIC, P_P – свойство знать PHP, P_J – свойство знать JAVA.

Тогда количество программистов в аудитории n

$$n = n(P_{VB}) + n(P_P) + n(P_J) + n(P_{VB} \,\&\, P_P) - n(P_{VB} \,\&\, P_J) -$$
$$-n(P_P \,\&\, P_J) + n(P_{VB} \,\&\, P_P \,\&\, P_J) = 6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11.$$

При этом по формуле включений и исключений получается, что людей, знающих только VISIAL BASIC, нет:

$$n(P_{VB}, \overline{P_P}, \overline{P_J}) = n(P_{VB}) - n(P_{VB} \,\&\, P_P) - n(P_{VB} \,\&\, P_J) +$$
$$+n(P_{VB} \,\&\, P_P \,\&\, P_J) = 6 - 4 - 3 + 1 = 0.$$

5.6. Рекуррентные соотношения

При решении многих комбинаторных задач пользуются методом сведения данной задачи к другой задаче, решаемой для меньшего числа предметов. Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений (от латинского *recurrere*).

Понятие рекуррентных соотношений проиллюстрируем классическим решением определения ***чисел Фибоначчи***.

Сам Фибоначчи в 1202 году поставил задачу в форме рассказа о скорости роста популяции кроликов при следующих предположениях. Все начинается с одной пары кроликов. Каждая пара становится фертильной через месяц, после чего каждая пара рождает новую пару кроликов каждый месяц. Кролики никогда не умирают, и их воспроизводство никогда не прекращается.

Пусть F_n – число пар кроликов в стае по прошествии n месяцев, и пусть эта стая состоит из N_n пар приплода и O_n «старых» пар, т.е. $F_n = N_n + O_n$.

Таким образом, в очередном месяце произойдут следующие события: $O_{n+1} = N_n + O_n = F_n$. Старая стая в ($n$+1)-й момент увеличится на число родившихся кроликов в момент времени n.

В последующий месяц эта картина повторяется:

$$O_{n+2} = O_{n+1} + N_{n+1} = F_{n+1},$$

$$N_{n+2} = O_{n+1}.$$

Объединяя эти равенства, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_{n+2} = O_{n+2} + N_{n+2} = F_{n+1} + O_{n+1},$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Будем предполагать $F_0 = 0, F_1 = 1$ (иногда $F_0 = F_1 = 1$).

Выбор начальных условий для последовательности чисел Фибоначчи не важен; существенное свойство этой последовательности определяется рекуррентным соотношением.

Иначе, это рекуррентное соотношение имеет вид:

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1),$$

где $F(n)$ – называются числа Фибоначчи.

Другим примером являются ***числа Каталана***. Они появляются в контексте следующей задачи: нужно найти число различных последовательных действий, чтобы вычислить сумму $S_0, \ldots, S_n$, складывая любые два рядом стоящих числа и результат помещая на их место. Тогда если обозначить искомое число через C_n, то производящая функция будет выглядеть, как

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0.$$

Для чисел Каталана известно и нерекуррентное соотношение:

$$C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

5.7. Производящие функции

Метод производящих функций является одним из самых развитых методов комбинаторного анализа и опирается на понятия функционального ряда.

Стандартная задача для использования производящих функций ставится следующим образом. Сколькими способами можно выполнить некоторое действие в ситуации, которая зависит от некоторого целого неотрицательного параметра n (им может быть, например, число каких-то объектов)?

К такому вопросу сводится большое число комбинаторных задач, ответ во всех таких задачах определяется этим параметром n, так что можно считать, что решением является последовательность $a_0, a_1, a_3, ..., a_n$.

Рекуррентное соотношение, если задано несколько первых членов последовательности (сколько - зависит от задачи), полностью определяет последовательность. Мощным методом решения вопросов подобного рода является метод производящих функций.

Производящей функцией последовательности $\{an\}$, $n \geq 0$ называется формальный степенной ряд

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 Z^2 + ... = a_n Z^n.$$

Переход от последовательностей к их производящим функциям позволяет операции над последовательностями заменить операциями над их производящими функциями. Можно использовать то, что сумме двух последовательностей соответствует сумма их производящих функций, произведению последовательности на число - произведение ее производящей функции на это же число, и, что особенно замечательно, свертке двух последовательностей соответствует произведение производящих функций этих последовательностей.

Идея метода производящих функций состоит в том, что рекуррентное соотношение, определяющее последовательность $\{an\}$, переписывают как уравнение для ее производящей функции, это уравнение решают и по найденной производящей функции получают зависимость общего члена последовательности $\{a_n\}$ от n.

5.8. Числа Стирлинга второго и первого рода

Числа Стирлинга первого рода $s(n, k)$ – это коэффициенты при последовательных степенях переменной x в многочлене k:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k,$$

где $(x)_n$ – убывающий факториал: $(x)_n = x\,(x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-n+1)$.

Абсолютные значения чисел Стирлинга первого рода задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами.

Для них определяются рекуррентные соотношения:

$s(n, n) = 1$ для $n \geq 0$,

$s(n, 0) = 0$ для $n > 0$,

$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$ для $0 < k < n$.

Доказательство. Для $n = 1$ это равенство проверяется непосредственно. Пусть перестановка (n-1)-го порядка распадается на k циклов. Число n можно добавить после любого числа в соответствующий цикл. Все полученные перестановки – различные и содержат k циклов, их количество $(n-1)s(n-1, k)$. Из любой перестановки (n – 1)-го порядка, содержащей (k – 1) цикл, можно сформировать единственную перестановку n порядка, содержащую k циклов, добавив цикл образованный единственным числом n. Очевидно, что эта конструкция описывает все перестановки n-го порядка, содержащие k циклов. Тем самым равенство доказано.

Число Стирлинга второго рода $S(n, k)$ – это число разбиений n-элементного множества на k блоков, т. е.

$$S(n, k) = |\Pi k(X)|,$$

где множество X состоит из n элементов. Например, $S(4, 2) = 7$.

Рассмотрим некоторые утверждения, связанные с числами Стирлинга второго рода:

- $S(n, n) = 1$ для $n \geq 0$,

- $S(n, 0) = 0$ для $n > 0$,
- $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ для $0 < k < n$
- $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$ для $n \geq 0$, где $[x]_k = x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

Число Белла B_n – это число всех разбиений n-элементного множества:

$$B_n = |\Pi(X)|, \text{ где } |X| = n.$$

Рассмотрим несложное рекуррентное соотношение:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)B_i \ .$$

Для доказательства достаточно заметить, что множество всех разбиений множества $X = \{1, \ldots, n+1\}$ можно разделить на различные классы в зависимости от блока B, который содержит элемент $n+1$, или в зависимости от множества X/B. Далее для каждого множества X/B из $\{1, \ldots, n\}$ имеется $|\Pi(X/ B)| = B|X\backslash B|$ разбиений множества X, которое содержит B в качестве блока. Группируя классы в зависимости от мощности множества X/B, доказываем утверждение.

Контрольные вопросы и задания

5.1. В ящике 10 качественных и 5 бракованных деталей. Опыт состоит в выборе только одной детали. Событие A – вынули качественную деталь. Событие B – вынули бракованную деталь. Какое утверждение для этих событий будет неверным:

- событие A невозможно;
- событие B невозможно;
- события A и B равновероятны;
- события A и B несовместимы?

5.2. В слове SHUT меняют местами буквы. Чему равно количество всех возможных различных слов?

5.3. Чему равно количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 4 томов из 7-томного собрания сочинений А.П. Чехова?

5.4. Чему равно количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв слова ЦВЕТОК (все буквы в комбинации различны)?

5.5. Чему равно количество различных двухбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв слова КОМАР (все буквы в комбинации различны)?

5.6. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров. Во второй урне 1 белый и 9 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Сколькими способами можно выбрать один белый шар?

Глава 6. Основы теории графов

Одним из наиболее важных понятий, относящихся к структуре дискретных систем, является понятие графа. Это понятие, описывающее структуру связей между отдельными частями системы, в силу своей общности используется во многих математических моделях.

Графы очень часто используются в приложениях, поскольку они возникают как модель при изучении многих объектов. Например, структура молекулы является графом, в котором вершинами служат атомы, а ребрами – валентные связи. Блок-схема алгоритма представляет собой орграф, в котором вершинами являются отдельные операторы, а дуги указывают переходы между ними. Другие примеры графов: узлы и соединения в электрической цепи, схема дорог, множество предприятий с указанием двухсторонних связей между ними, группа людей с указанием их психологической совместимости, структура управления с указанием объектов и их подчиненности друг другу и т.д.

В полном объеме теория графов представляется собой курс, для изучения которого при наличии базовой математической подготовки потребуется несколько семестров, а для глубокого понимания - несколько лет вдумчивой и целеустремленной работы.

Целью данной главы является ознакомление с простейшими базовыми понятиями и алгоритмами теории графов, обзор возможностей соответствующего математического аппарата, формирование устойчивых навыков работы с графовыми структурами, понимание их свойств, предоставление минимально необходимых навыков в решении небольших типовых задач с целью подготовить базу для практического применения теории в прикладных целях. В дальнейшем студенты, обучающиеся по экономическим специальностям, столкнутся с теорией графов при изучении курса «Логистика», в котором на базе полученных знаний будут изучаться более сложные алгоритмы, предназначенные для решения прикладных оптимизационных задач.

6.1. Основные понятия

Графом G (в широком понимании) называется любая пара (V,U), где $V = \{v_1, v_2, ... \}$ – множество элементов любой природы, а $U = \{u_1, u_2, ... \}$ – семейство пар элементов из V, причем допускаются пары вида (v_i, v_j) и одинаковые пары вида (v_i, v_i).

Если пары в U рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется ***неориентированным***, если как упорядоченные, то граф называется ***ориентированным*** (***орграфом***).

Элементы множества V называются ***вершинами*** графа, а пары из U в неориентированном графе называются ***ребрами***, а в орграфе – ориентированными ребрами, или чаще ***дугами***.

Говорят, что ребро $u = (v_i, v_j)$ в неориентированном графе соединяет вершины v_i и v_j, а в ориентированном графе дуга $u = (v_i, v_j)$ идет из вершины v_i в вершину v_j.

Графы можно условно изображать следующим образом: вершины – точками, а каждое ребро (дугу) (v_i, v_j) – линией, соединяющей точки, соответствующие вершинам v_i и v_j. Если (v_i, v_j) – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от v_i к v_j.

Пара вида (v_i, v_i) называется ***петлей*** в вершине v_i. Если пара (v_i, v_j) встречается в U более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) – ***кратное ребро***.

Говорят, что вершины v_i и v_j ***смежны*** в графе $G = (V, U)$, если в U входит пара (v_i, v_j) или (v_j, v_i). Говорят, что ребро (дуга) (v_i, v_j) ***инцидентно*** вершинам v_i и v_j. В этом смысле, граф можно задать как совокупность двух множеств: вершин V и ребер U, между которыми определено отношение инцидентности. Каждое ребро u из U инцидентно ровно двум вершинам v_i, v_j, которые оно соединяет. При этом вершина v_i и ребро u называются инцидентными друг другу, а вершины v_i и v_j называются смежными. Два различных ребра графа называются смежными, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину.

Степенью вершины v неориентированного графа G называется число ребер, инцидентных v, при этом степень вершины будем обозначать через St_v. Вершина степени 0 называется ***изолированной*** вершиной. Вершина степени 1 называется ***висячей***, или ***концевой*** вершиной.

6.1.1. Классификация графов

Изучаемые в данном курсе графы будем разделять на ориентированные и неориентированные.

Ориенированным графом G называется пара ($V(G)$, $U(G)$), где $V(G)$ – непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а $U(G)$ – конечное множество упорядоченных пар элементов из $V(G)$, называемых дугами (или ориентированными ребрами). Дуга, у которой вершина v_1 является первым элементом, а вершина v_2 – вторым, называется дугой из v_1 в v_2: (v_1, v_2). Заметим, что дуги (v_1, v_2) и (v_2, v_1) различны (рис. 6.1).

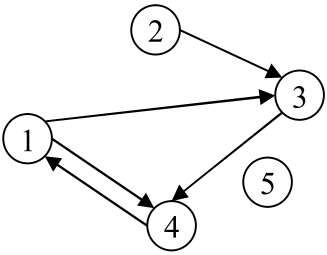


Рис. 6.1

Неориентированным графом G называется пара ($V(G)$, $U(G)$), где $V(G)$ – непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а $U(G)$ – конечное множество неупорядоченных пар элементов из $V(G)$, называемых ребрами. Будем называть $V(G)$ «множеством вершин», а $U(G)$ – множеством ребер графа G. О каждом ребре вида (v_1, v_2) говорят, что оно соединяет вершины v_1 и v_2 (рис. 6.2).

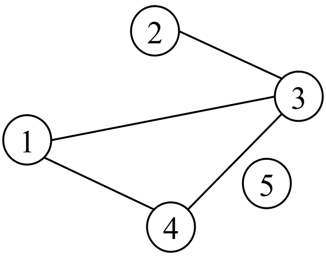


Рис. 6.2

При изображении графов на рисунках или схемах отрезки, изображающие ребра или дуги, могут быть прямолинейными или криволинейными, длины этих отрезков и расположение точек (вершин) произвольны.

В литературе и при решении прикладных задач иногда встречаются понятия смешанных графов, взвешенных графов, мультиграфов.

Смешанный граф – граф, содержащий как ориентированные, так и неориентированные ребра.

Мультиграф – граф, в котором имеется несколько парных ребер или однонаправленных дуг: $u_1 = (v_i, v_j)$, $u_2 = (v_i, v_j)$.

Псевдограф – граф, содержащий петли. Петлей в неориентированном графе называется ребро вида (v_1, v_1), которое соединяют вершину v_1 саму с собой, в ориентированном графе петлей называется дуга вида (v_1, v_1), которая соединяет вершину v_1 саму с собой.

Мульти-псевдограф – граф, в котором имеются петли и парные ребра или дуги.

Взвешенный граф – граф, дугам или ребрам которого сопоставляются (приписываются) числа, называемые весом, или длиной, или стоимостью (ценой) дуги или ребра. В этом случае граф называется графом со взвешенными дугами (ребрами). Иногда веса приписываются вершинам графа, и тогда получается граф со взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны и дугам, и вершинам, то он называется просто взвешенным.

В данной книге рассматриваются только невзвешенные ориентированные и неориентированные графы без кратных ребер и петель.

Приведем краткое описание некоторых специальных типов графов.

Простым графом называется граф, который не содержит кратных ребер и не содержит петель.

Простой граф называется ***полным***, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром. Полный граф с n вершинами обычно обозначается через K_n (рис. 6.3).

Заметим, что граф K_n имеет ровно $n \cdot \dfrac{n-1}{2}$ ребер.

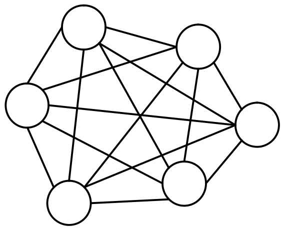


Рис. 6.3

Пустым графом называется граф, у которого множество ребер пусто. Будем обозначать пустой граф с n вершинами через P_n.

Регулярным графом называется граф, у которого все n вершин имеют одну и ту же степень. Если степень каждой вершины равна r, то граф называется регулярным степени r (рис. 6.4).

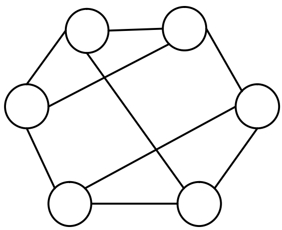


Рис. 6.4

Заметим, что регулярный граф степени r на n вершинах имеет ровно $n \cdot \frac{r}{2}$ ребер.

Двудольный граф – это граф $G(V,U)$, такой, что множество вершин V разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, причем всякое ребро U инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются «долями» двудольного графа.

Двудольный граф называется ***полным***, если любые две вершины из V_1 и V_2 являются смежными. Если $|V_1|=a$, $|V_2|=b$, то полный двудольный граф обозначается $K_{a,b}$ (рис. 6.5). Заметим, что граф $K_{n1,n2}$ имеет ровно n_1+n_2 вершин и n_1n_2 ребер.

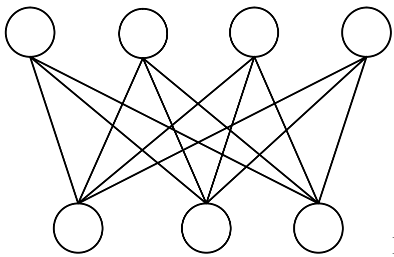


Рис. 6.5

6.1.2. Способы задания графов

Графический способ. Графическое изображение графов является самым наглядным и наиболее удобным для человеческого восприятия. Однако для практического использования в прикладных целях, когда с помощью теории графов решаются прикладные задачи с помощью вычислительной техники и специально разработанных алгоритмов, требуется специальное, ориентированное на автоматизированную обработку, представление данных.

Функциональное представление. При помощи функционального представления Γ^1 и Γ^{-1}:

$$\Gamma^1(v_i)=\{v_j\} : \exists \text{ дуга } (v_i , v_j),$$
$$\Gamma^{-1}(v_i)=\{v_j\} : \exists \text{ дуга } (v_j, v_i)$$

однозначно задаются как неориентированные (в этом случае $\Gamma^1=\Gamma^{-1}$), так и ориентированные и смешанные графы.

Как и в случае с матрицей смежности, для смешанных графов эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг. Никаких проблем не возникает с псевдографами (если вершина v_i имеет петлю, то и в $\Gamma^1(v_i)$, и в $\Gamma^{-1}(v_i)$ войдет вершина v_i). Мультиграфы заданы быть не могут. В качестве примера зададим граф при помощи функционального представления:

$\Gamma^1(v_1)=\{v_3,v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_1)=\{\varnothing\}$;
$\Gamma^1(v_2)=\{v_3\}$; $\Gamma^{-1}(v_2)=\{\varnothing\}$;
$\Gamma^1(v_3)=\{v_3,v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$;
$\Gamma^1(v_4)=\{\varnothing\}$; $\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_1,v_3\}$;
$\Gamma^1(v_5)=\{\varnothing\}$; $\Gamma^{-1}(v_5)=\{\varnothing\}$.

Аналогичный метод задания для неориентированных графов иногда называют списком смежности.

При помощи матрицы смежности $S\ (V\times V)$:

$$s(i,j)=\begin{cases}1, & \text{если } \exists \text{ ребро или дуга } (v_i,v_j);\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Матрицы смежности однозначно задают как неориентированные (в этом случае матрица симметрична относительно главной диагонали), так и ориентированные графы (табл. 6.1). Принципиально, нет проблем и с заданием смешанных графов, для них эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг.

Таблица 6.1

Матрица смежности для графа на рис. 6.1

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	1	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Никаких проблем не возникает и с псевдографами (петле соответствует единица на главной диагонали), тогда как мультиграфы заданы быть не могут.

При помощи матрицы инциденций A (U×V):
для ориентированных графов:

$$a(i,j)=\begin{cases}1,\text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i;\\ -1,\text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i;\\ 0,\text{если } v_j \text{ не инцидентна дуге } u_i.\end{cases}$$

для неориентированных графов:

$$a(i,j)=\begin{cases}1,\text{если } v_j \text{ инцидентна ребру } u_i;\\ 0,\text{если } v_j \text{ не инцидентна ребру } u_i.\end{cases}$$

Матрицы инциденций однозначно задают как неориентированные, так и ориентированные графы. В принципе нет никаких препятствий для задания смешанных графов – в отличие от матрицы смежности в этом случае задание ребра и пары разнонаправленных дуг будет отличаться. Никаких проблем не возникает с мультиграфами (и в ориентированном, и в неориентированном случаях), а также с неориентированными псевдографами.

В качестве примера зададим граф при помощи матрицы инциденций (табл. 6.2):

Таблица 6.2

Матрица инциденций для графа на рис. 6.1

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_{23}	0	1	-1	0	0
u_{13}	1	0	-1	0	0
u_{14}	1	0	0	-1	0
u_{41}	-1	0	0	1	0
u_{34}	0	0	1	-1	0

Неоднозначность возникает при задании ориентированных псевдографов с помощью матрицы инциденций: на пересечении строки, помеченной петлей, и столбца, помеченного вершиной, на которой эта петля присутствует, по правилу должны одновременно находиться как 1, так и –1. Из этой ситуации есть выход: вместо одной матрицы A ($U \times V$) граф задается двумя матрицами: истоков A^+ ($U \times V$) и стоков A^- ($U \times V$).

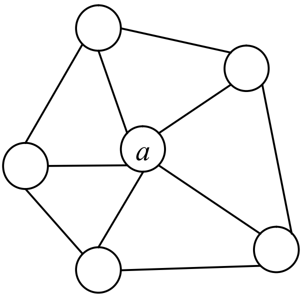
$$a^+(i,j) = \begin{cases} 1, \text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i; \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

$$a^-(i,j) = \begin{cases} 1, \text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i; \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

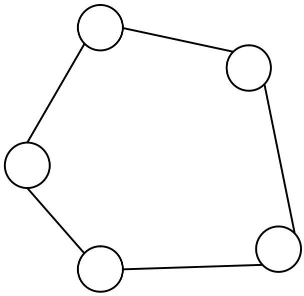
6.2. Операции над графами

6.2.1. Удаление вершин и ребер

Удаление вершины. Пусть G = (V(G), U(G)) – граф и $a \in V$. Удалить вершину a из графа G – это значит построить новый граф G'=(V'(G'), U'(G')), в котором $V'(G')=V(G)\backslash\{a\}$ и U'(G') получается из U(G) удалением всех ребер, инцидентных вершине a. На рис 6.6 приведен пример удаления вершины a из графа:



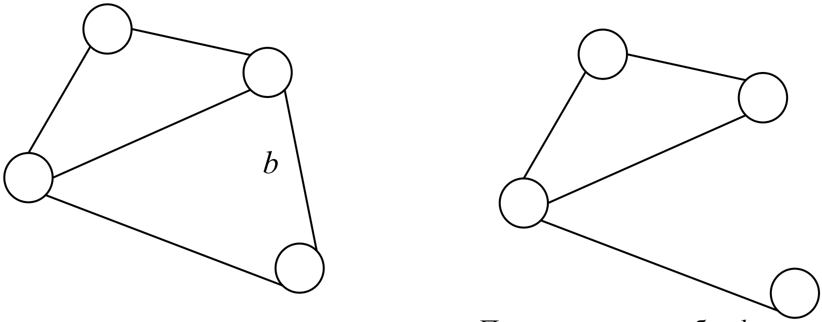
До удаления вершины a



После удаления вершины a

Рис. 6.6

Удаление ребра. Пусть G = (V(G), U(G)) – граф и $b \in U$. Удалить ребро b – это значит построить новый граф G'=(V'(G'), U'(G')), в котором $V'(G')= V(G)$ и $U'(G')=U(G)\backslash\{b\}$. На рис. 6.7 дана иллюстрация удаления ребра графа



До удаления ребра *b* После удаления ребра *b*

Рис. 6.7

Граф $G_1=(V_1,U_1)$ называется *подграфом* графа $G=(V,U)$, если V_1 является подмножеством V и U_1 является подмножеством U.

6.2.2. Дополнение

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G, чтобы получился полный граф (рис. 6.8).

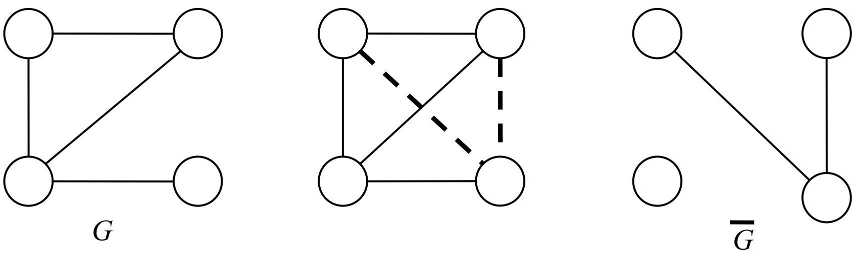


Рис. 6.8

Например, дополнением полного графа на n вершинах будет пустой граф на n вершинах и наоборот.

Особую внимательность необходимо проявлять при построении дополнения двудольных графов. В этом случае добавлять следует не только те ребра, которые нужны исходному графу G чтобы стать полным двудольным графом, но еще и те ребра, которые соединяют вершины в своих долях, т.е. дополняют исходных граф до полного вообще (рис. 6.9).

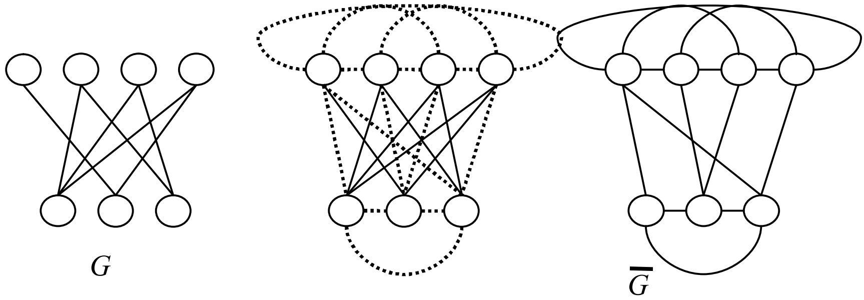


Рис. 6.9

Например, если исходный граф является полным двудольным графом $K_{4,5}$, то его дополнение будет представлять из себя несвязный граф, состоящий из двух компонент K_4 и K_5 (рис. 6.10).

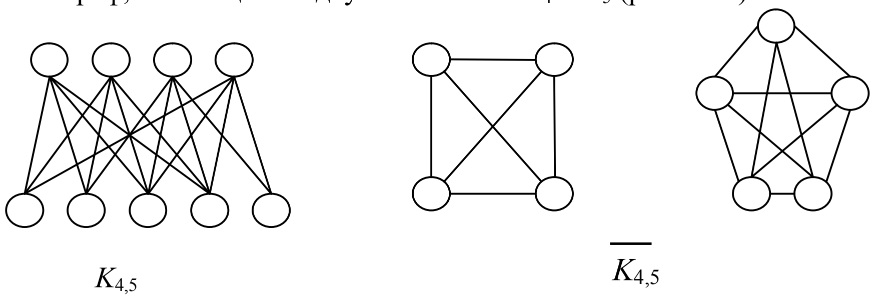


Рис. 6.10

6.2.3. *Объединение графов*

Пусть даны два графа $G_1 = (V(G_1), U(G_1))$, $G_2 = (V(G_2), U(G_2))$, причем множества $V(G_1)$, $V(G_2)$ не пересекаются. Тогда объединением $G = G_1 \cup G_2$ графов G_1, G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и семейством ребер $U(G_1) \cup U(G_2)$.

При графической интерпретации операции объединения, объединяемые графы просто изображаются рядом, и полученный в итоге граф будет содержать две компоненты связности, количество его вершин равно сумме вершин исходных графов, а количество ребер – сумме ребер исходных графов (рис. 6.11).

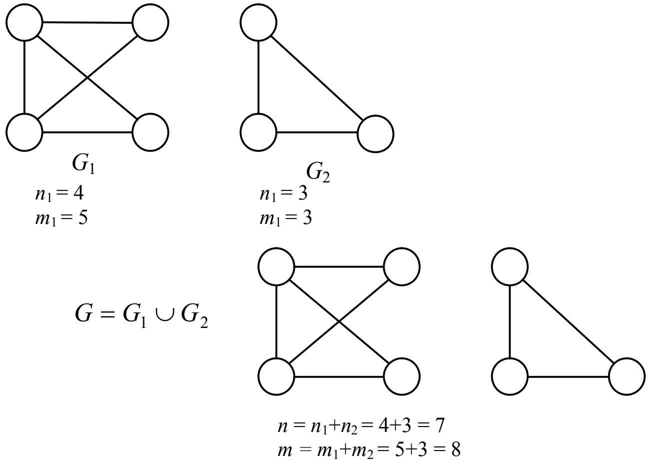
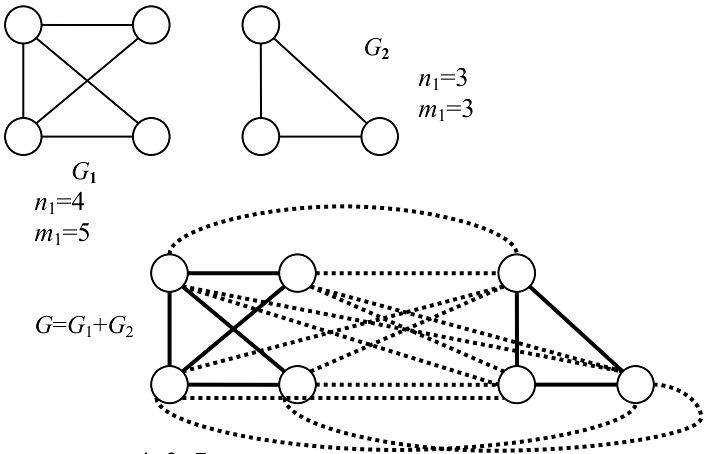


Рис. 6.11

6.2.4. *Сложение графов*

Пусть даны два графа $G_1 = (V(G_1), U(G_1))$, $G_2 = (V(G_2), U(G_2))$, причем множества $V(G_1)$, $V(G_2)$ не пересекаются. Тогда суммой графов G_1, G_2, обозначаемой $G=G_1+G_2$, называется граф, полученный как их объединение, причем каждая вершина графа G_1 соединяется ребром с каждой вершиной графа G_2.

При графической интерпретации операции сложения, складываемые графы просто изображаются рядом (как при операции объединения), а затем проводятся ребра от каждой вершины первого графа к каждой вершине второго графа. Полученный в итоге граф будет иметь количество вершин, равное сумме вершин исходных графов $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, а количество ребер – сумме ребер исходных графов плюс количество новых ребер, равное произведению количеств вершин исходных графов $m = \sum_{j=1}^{l} m_j + \prod_{i=1}^{k} n_i$ (рис. 6.12).



$n=n_1+n_2=4+3=7$

$m=m_1+m_2+n_1n_2=5+3+4\cdot3=20$

Рис. 6.12

6.2.5. Произведение графов

Пусть даны два графа $G_1= (V(G_1), U(G_1))$, $G_2 = (V(G_2), U(G_2))$, причем множества $V(G_1)$, $V(G_2)$ не пересекаются. Тогда произведение графов G_1, G_2, обозначаемой $G_1\cdot G_2$, называется граф, множество вершин которого образовано как декартово произведение множеств вершин исходных графов $V_1\cdot V_2$, а множество ребер как декартово произведение окрестностей соответствующих исходных вершин (рис. 6.13).

$V = V_1\cdot V_2 = \{1,2,3\}\cdot\{a,b,c\} = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$,

$\Gamma_1 = \{2\}$,

$\Gamma_2 = \{1\}$,

$\Gamma_3 = \varnothing$,

$\Gamma_a = \{b,c\}$,

$\Gamma_b = \{a,c\}$,

$\Gamma_c = \{a,b\}$,

$\Gamma_{1,a} = \Gamma_1\cdot\Gamma_a=\{2\}\cdot\{b,c\}=\{(2,b),(2,c)\}$,

$\Gamma_{1,b} = \Gamma_1\cdot\Gamma_b=\{2\}\cdot\{a,c\}=\{(2,a),(2,c)\}$,

…

$\Gamma_{3,c}=\Gamma_3\cdot\Gamma_c= \varnothing\cdot\{a,b\}= \varnothing$.

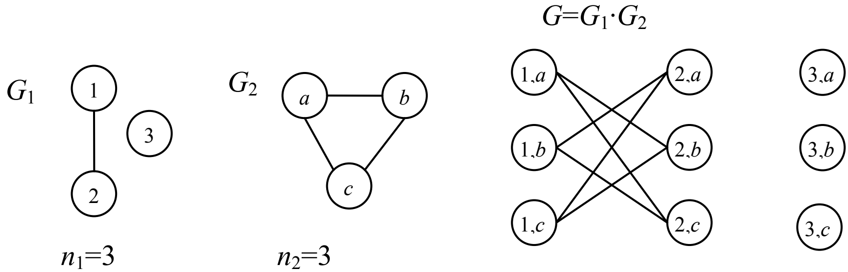


Рис. 6.13

Как видно из рис. 6.13, в силу того, что вершина 3 в первом графе была изолированной, в результирующем графе все вершины, в состав которых вошла вершина 3, а именно 3*a*, 3*b* и 3*c*, тоже являются изолированными. Читатель, заинтересовавшийся этой операцией, может умножить графы с петлями и несколькими изолированными вершинами и ответить на вопрос о том, в каком случае в результирующем графе могут получиться петли.

6.3. Связность в графах

6.3.1. Компоненты связности

Теорема 6.1. ***Пусть в графе G n вершин и m ребер. Пусть St(v*_i*) – степень вершины v*_i*. Тогда суммарная степень всех вершин равна удвоенному числу ребер графа.***

По этой причине суммарная степень всех вершин графа всегда является **четным** числом.

Иными словами, количество вершин с нечетной степенью в графе всегда четное. Это один из критериев, который помогает иногда доказать невозможность построения некоторых графов. Например нельзя построить регулярный граф степени 5 на 7 вершинах, так как его суммарная степень вершин получается равна 35, и в нем должно быть 17,5 ребер, что невозможно.

Маршрутом (***путем***) в данном графе G называется конечная последовательность ребер вида: $\{v_0, v_1\}$, $\{v_1, v_2\},\ldots,\{v_{m-1}, v_m\}$, обозначаемая также через $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$.

Каждому маршруту соответствует последовательность вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$. В этом случае v_0 называется начальной вершиной, а v_m – конечной вершиной маршрута, а сам маршрут называется маршрутом из v_0 в v_m. Длиной маршрута называется число ребер в нем.

Маршрут (путь) называется ***цепью***, если все его ребра различны.

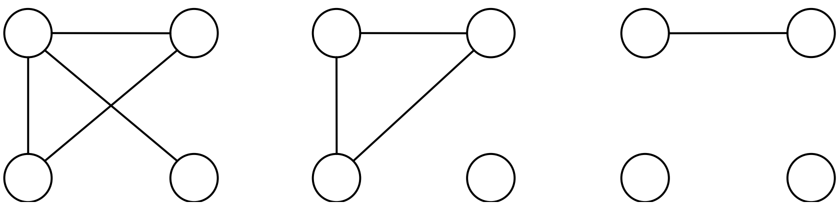
Маршрут (путь) называется ***простой незамкнутой цепью***, если все вершины $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$ различны.

Иными словами, цепь – это маршрут (путь) без повторяющихся ребер, простая цепь – это маршрут (путь) без повторяющихся вершин.

Маршрут (путь) называется ***простой замкнутой цепью*** или ***простым циклом***, если все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_m$ различны, кроме $v_0 = v_m$.

Граф G называется ***связным***, если для любых двух различных вершин v_1 и v_2 существует простая незамкнутая цепь из v_1 в v_2.

Любой граф можно разбить на непересекающиеся связные графы, называемые компонентами или ***компонентами связности*** графа G. Внутри каждой компоненты будет выполняться определение связности графа. Таким образом, несвязный граф имеет более одной (две или больше) компонент. Связный граф всегда по определению состоит из одной компоненты (рис. 6.14).



1 компонента 2 компоненты 3 компоненты

Рис. 6.14

Приведем без доказательства два простых, но полезных утверждений.

Утверждение 1. Если граф $G = (V,U)$ связный и $a \in V$, $b \in V$, $a \neq b$ и $(a,b) \in U$, то при добавлении к графу G ребра (a,b) в полученном графе будет простой цикл.

Утверждение 2. Если граф $G = (V,U)$ связный и ребро (a,b) содержится в некотором цикле в графе G, то при выбрасывании из графа G ребра (a,b) снова получится связный граф.

Читатель без труда докажет эти утверждения на основе приведенных выше определений. Следующая теорема уже требует доказательства, однако доказательство следствия из нее рекомендуется провести самостоятельно.

Теорема 6.2. ***Пусть в графе G = (V,E) n вершин и m ребер. Тогда в G не менее (n-m) связных компонент. Если при этом в G нет циклов, то G состоит ровно из (n-m) связных компонент.***

Следствие. Если $m \leq n–2$, то любой граф с n вершинами и m ребрами не связен.

6.3.2. Вершинная и реберная связность

Вершинной связностью к («каппа») связного графа G называется наименьшее число вершин, которое нужно удалить, чтобы граф перестал быть связным.

Для несвязного графа вершинная связность равна нулю. Для полного графа на n вершинах вершинная связность полагается равной $(n - 1)$ (так как сколько вершин ни удалять из графа, он все равно не перестанет быть связным).

Реберной связностью λ («лямбда») связного графа G называется наименьшее число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф перестал быть связным. Для несвязного графа реберная связность равна нулю. Число реберной связности одновершинного графа также полагается равным нулю.

Вершина v графа G называется ***точкой сочленения (разделяющей вершиной)***, если граф $G – v$, полученный после операции удаления у графа G вершины v, имеет больше компонент связности, чем сам граф G. В частности, если G связен и v – точка сочленения, то $G – v$ не связен.

Ребро u графа G называется ***мостом***, если его удаление увеличивает число компонент связности графа.

Таким образом, точки сочленения и мосты – это своего рода «узкие места» графа. Граф на рис. 6.15 имеет три точки сочленения – это вершины *a, b, c* и один мост – ребро (*a,b*).

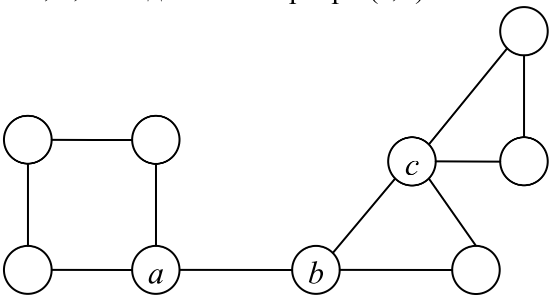


Рис. 6.15

Для любого графа справедливо ***соотношение Уитни*** между реберной связностью λ, вершинной связностью κ и наименьшей из степеней вершин δ: $\kappa \le \lambda \le \delta$.

На основании этого соотношения иногда удается показать невозможность построения некоторых графов, как, например, в следующей задаче.

Задача 6.1. Построить или обосновать невозможность построения графа на 11 вершинах, у которого наименьшая степень вершин равна 7, а вершинная связность равна 8.

Решение. Наименьшей из степеней вершин является степень 7. По условию вершинная связность равна 8. Это противоречит соотношению Уитни: $\kappa \le \lambda \le \delta$, так как получим, что $8 \le \lambda \le 7$. Значит, такого графа не существует.

6.3.3. Сильная связность в графах

Термин «сильная связность» относится только к ориентированным графам. Введем необходимые предварительные понятия.

Полустепенью исхода $St^{-}(v)$ вершины *v* в ориентированном графе называется число дуг, выходящих из данной вершины.

Полустепенью захода $St^{+}(v)$ вершины *v* в ориентированном графе называется число дуг, входящих в данную вершину.

Изолированной вершиной называется вершина, у которой и полустепень захода, и полустепень исхода равны 0.

Истоком называется вершина, полустепень исхода которой положительна, а полустепень захода равна 0.

Стоком называется вершина, полустепень захода которой положительна, а полустепень исхода равна 0.

Путем в ориентированном графе G от v_1 до v_m называется последовательность ориентированных дуг (ребер) $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\},\ldots,\{v_{m-1}, v_m\}$, такая, что конец каждой предыдущей дуги (ребра) совпадает с началом следующей, и ни одна дуга (ребро) не встречается более одного раза. Если в ориентированном графе G нашелся путь от v_a до v_b , то обратного пути от v_b к v_a может и не быть.

Простым путем в ориентированном графе называется путь, в котором ни одна вершина не содержится более одного раза.

Замкнутый путь в ориентированном графе называется ***ориентированным циклом***.

Длиной пути называется число дуг (ребер) в этом пути. Расстоянием от v_a до v_b в ориентированном графе называется длина наикратчайшего пути от v_a до v_b. Если пути от v_a до v_b не существует, то расстояние от v_a до v_b называется бесконечным. Оно обозначается ∞. Расстояние от v_a до v_b будем обозначать $S(v_a, v_b)$.

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одной ориентированной дугой (ребром). Если с каждого ребра (дуги) полного ориентированного графа снять направление, то образуется полный граф с неориентированными ребрами (дугами).

Компонентой сильной связности (КСС) ориентированного графа называется такое максимальное по включению подмножество его вершин, что между любыми двумя вершинами существует путь.

Соответственно, задача поиска компонент сильной связности в орграфе сводится к поиску такого разбиения множества вершин графа на набор подмножеств, что в рамках каждого подмножества любые две вершины взаимно достижимы друг из друга.

Эту задачу можно решать двумя различными способами.

Первый способ построен на классическом алгоритме нахождения пересечения положительной и отрицательной окрестности каждой из вершин. Он характеризуется значительной надежностью, но довольно объемными временными затратами. При необходимости найти решение за более короткое время можно воспользоваться эмпирическим методом, разобрав граф на ключевые элементы: стоки, истоки и циклы. Детализированный по шагам алгоритм выглядит так.

Шаг 1. Поиск стоков и истоков. Каждый найденный сток или исток в любом случае является отдельной компонентой, так как по своему определению не может входить в состав других компонент.

Шаг 2. Поиск циклов. Вершины, входящие в цикл, всегда образуют общую компоненту. Возможно, это множество вершин не максимально по включению, но наличие цикла как минимум гарантирует, что входящие в этот цикл вершины входят также в общую компоненту. Это связано с тем, что по циклу всегда возможно из любой отдельно взятой вершины добраться до любой из вершин этого же цикла, что в полной мере согласуется с определением компоненты сильной связности.

Шаг 3. Склейка циклов. Если на предыдущем шаге будут найдены циклы, имеющие хотя бы одну общую вершину, то такие циклы необходимо объединить в единую компоненту. Это связано с тем, что общие вершины являются узловыми в том смысле, что при операции объединения они связывают за счет склейки исходные циклы, и с их помощью возможно добраться из любой вершины первого цикла в любую вершину второго.

Шаг 4. Проверка. Необходимо проверить, что в результате шагов 1-3 полученные компоненты сильной связности включают в себя все вершины исходного графа, причем ровно по одному разу. Иными словами. Ни одна из вершин не должна быть включена более чем в одну компоненту, и в результате процедуры все вершины должны быть распределены по компонентам. Если суммарное число вершин по всем компонентам меньше, чем общее количество вершин в исходном графе, то необходимо выявить те вершины, которые не вошли в список найденных компонент сильной связности и с особой внимательностью их рассмотреть. Причин обычно две. Первая: не слишком внимательно был произведен поиск циклов, и на самом деле «забытые» вершины входят в один из пропущенных циклов. Вторая: эти «забытые» вершины действительно представляют собой отдельные компоненты, так как, не входя ни в один из циклов, и не являясь в чистом виде ни стоками, ни истоками, образуют, по сути, шлюзы или мосты между какой-то частью графа и его стоком\истоком. Чаще всего ситуация похожа на изображенную на рис. 6.16.

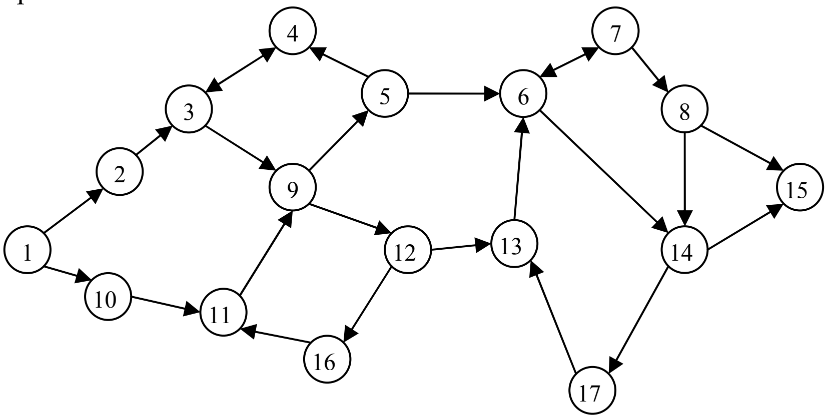


Рис. 6.16

На основе изображенного графа (рис. 6.16) продемонстрируем работу приведенного алгоритма.

Задача 6.2. Найти все компоненты сильной связности в данном графе. Компоненты задать перечислением вершин.

Решение.

Шаг 1. Стоки: вершина 15. Значит, $КСС_1=\{15\}$. Истоки: вершина 1. Значит, $КСС_2=\{1\}$.

Шаг 2. Циклы: $Ц_1= \{3,4\}$, $Ц_2=\{11,9,12,16\}$, $Ц_3=\{6,7\}$, $Ц_4=\{6,14,17,13\}$, $Ц_5= \{3,9,5,4\}$.

Шаг 3. Склейка. Циклы $Ц_1$ и $Ц_5$ склеиваются по двум общим вершинам так, что $Ц_5$ полностью поглощает $Ц_1$. Обозначим полученный цикл как $Ц_{15}$. $Ц_{15} = \{3,9,5,4\}$. Далее циклы $Ц_{15}$ и $Ц_2$ склеиваются по вершине 9, образуя цикл $Ц_{152} = \{3,9,5,4,11,12,16\}$. Кроме того, можно склеить циклы $Ц_3$ и $Ц_4$, образовав в результате цикл $Ц_{34} = \{6,7,14,17,13\}$. Таким образом, в результате применения операции склейки циклов получено два цикла, дальнейшая склейка которых невозможна: $Ц_{152} = \{3,9,5,4,11,12,16\}$ и $Ц_{34}=\{6,7,14,17,13\}$. Значит, $КСС_3 = \{3,9,5,4,11,12,16\}$ и $КСС_4= \{6,7,14,17,13\}$.

Шаг 4. Проверка. В найденных четырех КСС совокупно участвуют 14 вершин. Всего в исходном графе 17 вершин. Оставшиеся три не вошли в списки истоков, стоков и циклов. Это вершины 2,10,8. Рассмотрим их подробнее. Вершины 2 и 10 являются типичными шлюзами между истоком (вершиной 1) и остальной частью графа. В них можно попасть только из истока (вершины 1), а значит, выйдя из этих вершин, обратно мы уже не вернемся. Таким образом, это отдельные компоненты: $КСС_5 = \{2\}$ и $КСС_6 = \{10\}$.

Что касается вершины 8, то она, на первый взгляд, кажется похожей на шлюз между основной частью графа и стоком, вершиной 15. В реальности, если посмотреть более внимательно, можно увидеть, что из вершины 8 можно также попасть в вершину 14, которая является составной частью цикла {6,14,17,13}, а оттуда с помощью цикла {6,7} снова вернуться в вершину 8. Значит, ситуация тут в корне другая и на этот раз вершина 8 пропущена ошибочно. И действительно, при более внимательном рассмотрении можно заметить, что в графе есть еще один цикл: $Ц_6 = \{6,7,8,14,17,13\}$, который как раз подтверждает включение вершины 8 в $КСС_4$.

В данном графе шесть компонент сильной связности.

$КСС_1 = \{15\}$, $КСС_2 = \{1\}$,

$КСС_3 = \{3,9,5,4,11,12,16\}$, $КСС_4=\{6,7,8,14,17,13\}$,

$КСС_5 = \{2\}$, $КСС_6 = \{10\}$.

Существует довольно простой способ проверки результата решения задачи на нахождение компонент сильной связи в ориентированных графах, независимо от того, какой способ применялся для поиска этого решения. Для этого строится конденсат графа.

Конденсат графа представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют компонентами сильной связности, а дуги отражают достижимость компонент друг из друга.

Процесс построения конденсата состоит из двух шагов. Сначала рисуются вершины, соответствующие компонентам сильной связности, каждую такую укрупненную вершину удобно назвать перечислением входящих в данную компоненту вершин. Затем строятся дуги по очень простому принципу: если из i-й компоненты в исходном графе достижима j-я компонента, то в конденсате строится дуга (i,j) (рис. 6.17).

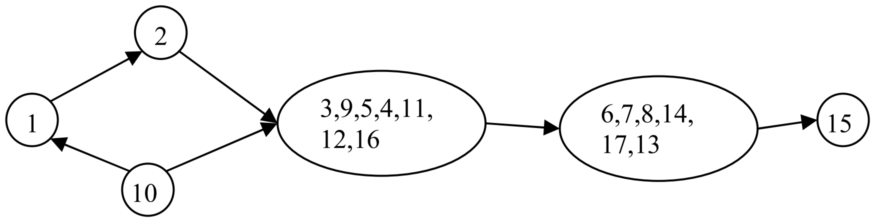


Рис. 6.17

Построенный конденсат полезно проанализировать на предмет нахождения циклов – их там быть ни в коем случае не должно. Если обнаружился цикл, значит, есть множество взаимодостижимых укрупненных вершин, и, следовательно, входящие в наименование этих укрупненных вершин конденсата вершины исходного графа должны были войти в одну компоненту. Например, если была допущена ошибка при решении задачи на рис. 6.17 и найдены только два цикла {1,2,3} и {4,5,6,7}, то конденсат выглядел бы так (рис. 6.18, слева), как видно в нем присутствует цикл, чего быть не должно. Это сигнал ошибки. При правильном решении конденсат выглядит иначе (рис. 6.18, справа).

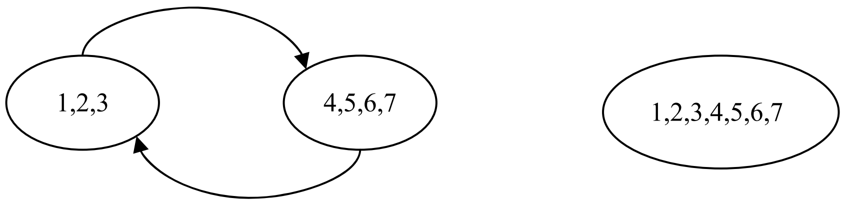


Рис. 6.18

6.4. Цикломатика графов

6.4.1. Ациклические графы

Ациклическим графом называется граф, не содержащий циклов.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

Несвязный граф, состоящий из нескольких деревьев, иногда называют ***лесом.***

Вершина в графе называется ***висячей,*** если ее степень равна единице. Дерево должно обязательно иметь висячую вершину, так как если бы степень всех вершин в дереве была бы больше или равна 2, то граф должен иметь цикл, что противоречит определению дерева.

Теорема 6.3. ***Если граф G является деревом, то число его ребер (m) и число его вершин (n) связаны соотношением m = n – 1.***

На самом деле, верно и обратное утверждение, которое является частью более общей теоремы о свойствах деревьев.

Теорема 6.4. ***Следующие условия равносильны:***

- ***граф G является деревом;***
- ***число ребер (m) и число вершин в графе (n) связаны соотношением m = n – 1;***
- ***любые две вершины в графе могут быть связаны (простым) путем, и этот путь единствен;***
- ***граф G связен и не содержит циклов.***

По этой причине в качестве определения понятия дерева, кроме приведенного выше, можно также использовать другое.

Дерево – связный граф, в котором существует одна и только одна цепь, соединяющая каждую пару вершин. Удобно считать, что граф, состоящий из одной изолированной вершины, тоже является деревом. На рис 6.19 изображен лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых является деревом.

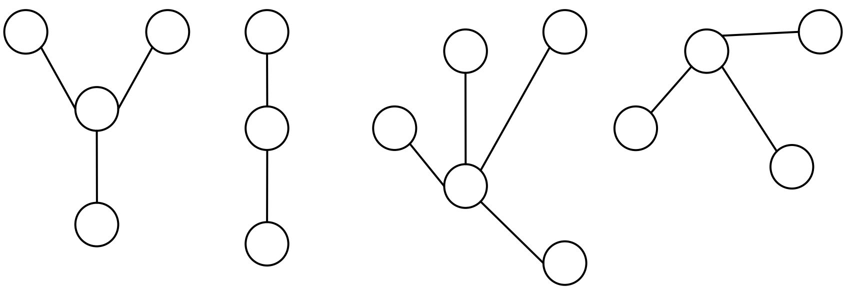


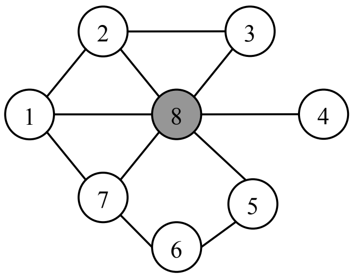
Рис. 6.19

6.4.2. Базисные циклы и цикломатическое число

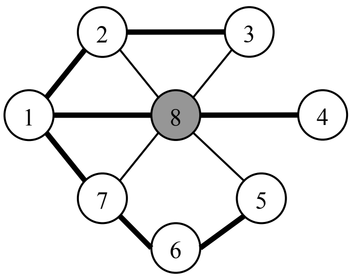
В связном графе G удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Эту процедуру к одному из оставшихся циклов будем применять до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа G, оно называется ***остовным деревом*** или ***остовом***, или ***каркасом графа*** G.

Строго говоря, подграф $G_1 = (V_1, U_1)$ графа $G = (V, U)$ называется *остовным деревом*, если G_1 – дерево и $V_1 = V$.

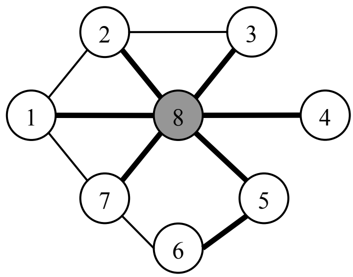
Теорема 6.5. ***Любой (конечный) связный граф $G = (V,U)$ содержит хотя бы одно остовное дерево $G_1 = (V,U_1)$.***



Исходный граф



Остов – вариант 1



Остов – вариант 2

Рис. 6.20

Как видно из рис. 6.20, выделенные остовы, если их рассматривать отдельно от остальных ребер, представляют собой деревья, в которые вошли все вершины графа. Те ребра, которые не вошли в остов, называются свободными хордами (или просто хордами). Если построить цикл, состоящий только из одной свободной хорды и каких-либо ребер остова, то такой цикл будет называться ***базисным***.

В общем случае обозначим через G произвольный граф с n вершинами, m ребрами и k компонентами. Применяя описанную выше процедуру к каждой компоненте G, получим в результате граф, называемый остовным лесом. Число удаленных в этой процедуре ребер называется ***цикломатическим числом*** графа G и обозначается через $\gamma(G)$.

Поскольку для каждой i-й компоненты на n_i вершинах число ребер в соответствующем остовном дереве равно $n_i–1$, то на k компонентах с общим количеством вершин, равным n (n – сумма всех n_i) сумма ребер в остовном лесе составит $(n – k)$. Значит, из имеющихся m ребер нужно будет удалить $m – (n – k) = m – n + k$ ребер.

Значит, для произвольного графа цикломатическое число определяется по формуле (6.1) и является неотрицательным целым числом:

$$\gamma(G)= m – n + k. \tag{6.1}$$

Таким образом, цикломатическое число дает меру связности графа: цикломатическое число дерева равно нулю, а цикломатическое число простого цикла равно единице.

Кроме того, цикломатическое число в силу того, что оно равно числу удаленных ребер при построении остова, равно также и количеству базисных циклов. Таким образом, для конкретного выделенного остова можно найти все базисные циклы, это удобно делать с помощью так называемой матрицы базисных циклов.

Задача 6.3. Построить матрицу базисных циклов для графа на рис. 6.20 при условии, что остов выбран, как в варианте 1.

Решение. Столбцам матрицы будут соответствовать ребра исходного графа, причем для удобства построения выпишем сначала свободные хорды, а затем ребра выделенного остова. Строки будут содержать искомые базисные циклы, при этом ребра, вошедшие в соответствующий цикл, помечаются в матрице единичками, пустые клетки по умолчанию содержат нули (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Матрица базисных циклов

	Хорды				Ребра остова						
	3,8	2,8	7,8	5,8	2,3	1,2	1,7	1,8	8,4	7,6	6,5
БЦ1	1				1	1		1			
БЦ2		1				1		1			
БЦ3			1				1	1			
БЦ4				1			1	1		1	1

6.4.3. Базисные разрезы и ранг

Удобно также определить ***коциклический ранг*** или ***ранг разреза графа*** G как число ребер в его остовном лесе. Коциклический ранг обозначается через $\chi(G)$ и равен $(n - k)$.

В отличие от базисных циклов базисные разрезы строятся на одном ребре основа и необходимом количестве ребер остова. Смысл построения разреза можно сформулировать следующим образом.

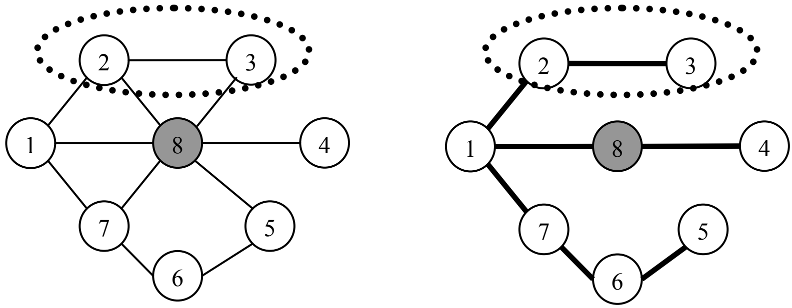
Базисный разрез составляет совокупность ребер, состоящая из одного ребра остова и нескольких хорд, удаление которых делает исходный связный граф несвязным (а для произвольного графа в общем случае увеличивает количество компонент связности).

Правило построения базисных разрезов: возьмем одно из ребер основа и мысленно его удалим. Поскольку остов является деревом (или, в общем случае, лесом), то удаление одного ребра в обязательном порядке приведет к увеличению количества компонент связности. Иными словами, какая-то вершина или набор вершин будет откалываться («отваливаться») от основной части графа.

Далее, если посмотреть на исходный граф, то после «разрезания» «толстого» ребра остова окончательному откалыванию данной вершины (набора вершин) чаще всего препятствуют некоторые «тонкие» ребра (хорды). Совокупность таких хорд вместе с исходным ребром остова и составляет базисный разрез.

Чтобы не ошибиться в построении базисного разреза, можно отдельно нарисовать остов графа и именно на его основе определять, какие вершины собираются отделяться после удаления одного из ребер остова (по картинке остова это видно графически). И затем «откалывающийся» фрагмент графа на исходной картинке можно обвести замкнутой линией. Тогда те ребра, которые будут пересекаться этой линией, как раз и составят базисный разрез на основе этого остовного ребра. Для конкретного выделенного остова можно найти все базисные разрезы, это удобно делать с помощью так называемой матрицы базисных разрезов.

Задача 6.4. Построим матрицу базисных разрезов для графа на рис. 6.20, при условии, что остов выбран в соответствии с вариантом 1.



Исходный граф Остов

Рис. 6.21

Решение. Столбцам матрицы будут соответствовать ребра исходного графа, причем для удобства построения выпишем сначала ребра выделенного остова, а затем свободные хорды. Строки будут содержать искомые базисные разрезы, при этом ребра, вошедшие в соответствующий разрез, помечаются в матрице единичками, пустые клетки по умолчанию содержат нули.

Например, возьмем ребро остова (2,3) (рис. 6.21, справа). При его удалении из остова собирается «отколоться» от остального графа вершина 3. В исходном графе вершина 3 будет удерживаться еще и хордой (3,8) (рис. 6.21, слева).

При удалении ребра (1,2) из остова собирается «отколоться» от остального графа пара вершин (3 и 2), вместе с соединяющим их ребром (2.3) (рис. 6.21, справа). В исходном графе эта группа вершин будет удерживаться еще и хордами (3,8) и (2,8) (рис. 6.21, слева).

Аналогично находим остальные разрезы (табл. 6.4).

Таблица 6.4

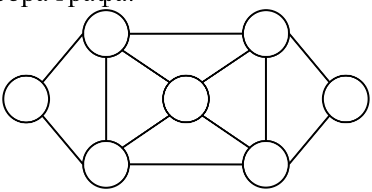
Матрица базисных разрезов

	Хорды				Ребра остова						
	3,8	2,8	7,8	5,8	2,3	1,2	1,7	1,8	8,4	7,6	6,5
БР1	1				1						
БР2	1	1				1					
БР3			1	1			1				
БР4	1	1	1	1				1			
БР5									1		
БР6				1						1	
БР7				1							1

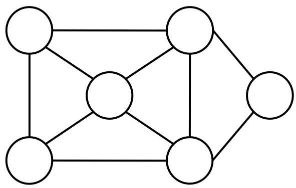
6.4.4. Эйлеровы графы

Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

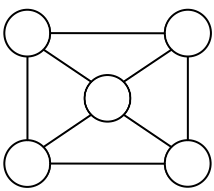
Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.



Эйлеров граф



Граф, в котором есть незамкнутая эйлеровая цепь



Неэйлеров граф

Рис. 6.22

Связный граф G называется ***эйлеровым***, если существует замкнутая цепь, проходящая через каждое его ребро (другими словами, если существует эйлеров цикл). Отметим, что в этом определении требуется, чтобы каждое ребро проходилось только один раз, вершины могут проходиться неоднократно.

Заметим, что предположение о связности графа G введено только ради удобства, так как оно позволяет не рассматривать тривиальный случай графа, содержащего несколько изолированных вершин.

Теорема 6.6. ***Граф G обладает эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда он является связным, а все его вершины – четными.***

В качестве примера практического применения эйлеровых графов можно привести план выставки, на которой необходимо так расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

Иногда требуется не только определить эйлеровость графа, но и предложить наиболее эффективный способ превращения неэйлеровых графов в эйлеровые за счет удаления минимально возможного количества ребер.

Задача 6.5. Определить, является ли граф (рис. 6.23) эйлеровым, и, если нет, указать с достаточным обоснованием, удаление какого минимального числа ребер делает граф эйлеровым. Указать, какие это ребра. Указать эйлеров цикл.

Решение. Первое, что необходимо сделать, это проверить критерий эйлеровости, а именно четность вершин графа. Как видно из рис. 6.23, *б*, в графе из n=10 вершин 8 имеют нечетную степень.

Удобно при решении задач на рисунке заштриховать вершины, которые имеют нечетную степень. Поскольку удаление одного ребра может исправить степень двух вершин, то если удалять попарно несмежные ребра, соединяющие только нечетные вершины, минимально возможное количество таких кандидатов на увольнение будет 8/2=4. Теперь нужно попробовать найти попарно несмежные ребра, соединяющие именно нечетные вершины. В данном случае это возможно: решением могут быть, например, ребра (1,2), (4,5), (7,8), (6,10) (рис. 6.23, *в*)

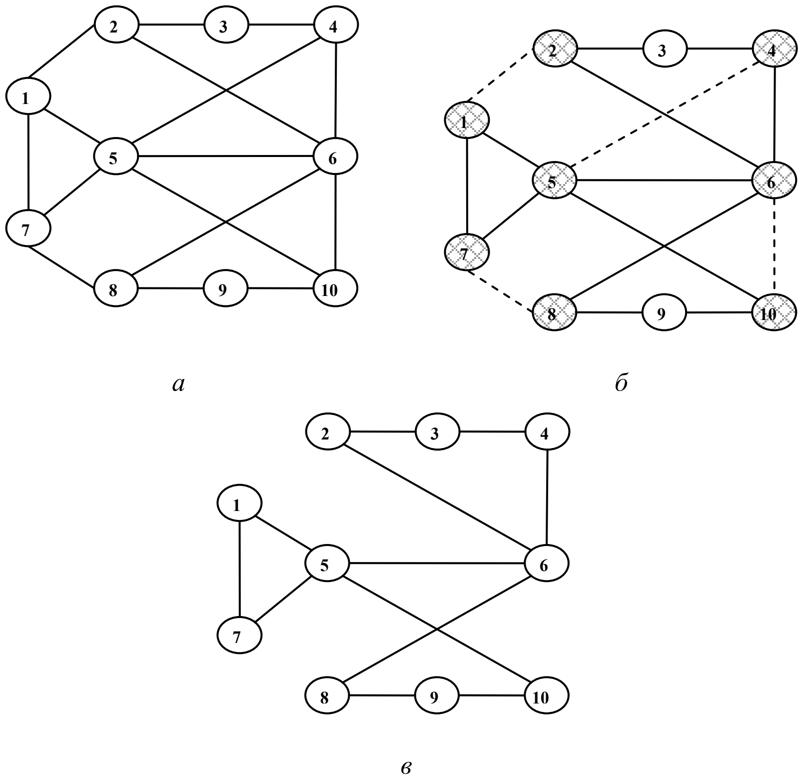


Рис. 6.23

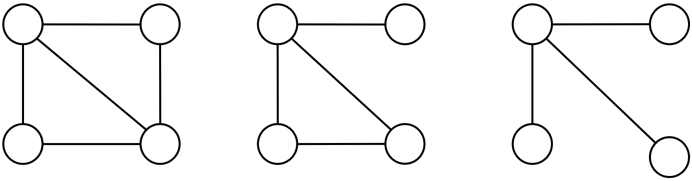
Исходный граф не эйлеров, так как в нем существует восемь вершин с нечетной степенью, а по теореме в эйлером графе все вершины имеют четную степень. Чтобы граф стал эйлеровым, необходимо, как минимум, удалить 4 ребра.

Такое решение есть: (1,2), (4,5), (7,8), (6,10). Тогда эйлеров цикл, например, выглядит таким образом: (1,5,6,2,3,4,6,8,9,10,5,7,1).

6.4.5. *Гамильтоновы графы*

Рассмотрим проблему существования замкнутой цепи, проходящей ровно один раз через каждую вершину графа *G*. Ясно, что такая цепь должна быть простым циклом.

Если такой цикл существует, то он называется ***гамильтоновым*** циклом (путем), а G называется ***гамильтоновым графом*** (рис. 6.24).



Гамильтонов граф

Граф, в котором есть незамкнутая гамильтонова цепь

Негамильтонов граф

Рис. 6.24

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые пути содержат все ребра, по одному разу каждое, вторые – все вершины, по одному разу каждую. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их поиска резко отличаются по степени трудности. Для решения вопроса о наличии эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четны. Критерий существования гамильтонова цикла в произвольном графе еще не найден. Решение этой проблемы имеет практическую ценность, так как к игре Гамильтона близка известная задача о коммивояжере, который должен объехать несколько пунктов и вернуться обратно. Он обязан побывать в каждом пункте в точности по одному разу и заинтересован в том, чтобы затратить на поездку как можно меньше времени. А для этого требуется определить все варианты посещения городов и подсчитать в каждом случае затрату времени. По своей математической постановке игра Гамильтона близка к задаче о порядке переналадки станков, о подводке электроэнергии к рабочим местам и т.д.

Однако существует несколько достаточных условий наличия гамильтоновых циклов в графе.

Большинство известных теорем имеет вид «если граф G имеет достаточное число ребер, то граф G является гамильтоновым графом». Вероятно, самыми известными являются критерии Дирака и Оре.

Теорема 6.7 (Дирака). ***Если в простом графе с n вершинами, причем n ≥ 3, выполняется условие*** $\rho(v) \geq n/2$ ***для любой вершины v, то граф G является гамильтоновым.***

Теорема 6.8 (Оре). ***Пусть n - количество вершин в данном графе. Если для любой пары несмежных вершин v_i, v_j выполнено неравенство $d(v_i) + d(v_j) \geq n$, то граф является гамильтоновым.***

Однако существуют и гамильнотовы графы, не являющиеся графами Оре или Дирака.

В некоторых задачах дополнительно используется *условие Поша,* которое в данном пособии не рассматривается.

6.5. Диаметр графа

6.5.1. Основные определения

Расстоянием d между вершинами v_i и v_j называется длина минимального пути между этими вершинами.

Диаметром δ связного графа *G* называется максимальное возможное расстояние между любыми двумя его вершинами.

Для несвязных графов диаметр полагается равным бесконечности.

Центром графа *G* называется такая вершина *v*, что максимальное расстояние между *v* и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных. Это расстояние называется ***радиусом r***. Таким образом,

$$r = \min_{v_1}(\max_{v_2} d(v_1, v_2)),$$

где $d(v_1, v_2)$ – расстояние между v_1 и v_2.

6.5.2. Алгоритм нахождения диаметра

Процесс нахождения диаметра графа представляет собой, по сути, полный перебор.

Сначала необходимо по всем парам вершин вычислить расстояние, а затем найти максимум из этого множества чисел.

Задача 6.6. Для графа на рис. 6.25 соответствующие расстояния представлены в табл. 6.5.

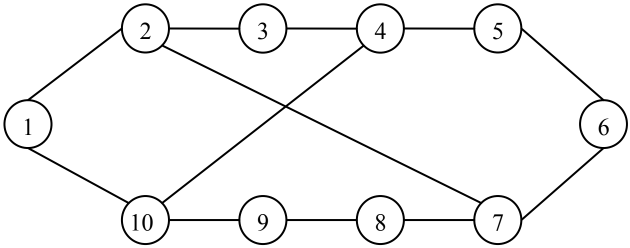


Рис. 6.25

Решение. Представлено в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Матрица расстояний

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
1		1	2	2	3	3	2	3	2	1
2			1	2	3	2	1	2	3	2
3				1	2	3	2	3	3	2
4					1	2	3	3	2	1
5						1	2	3	3	2
6							1	2	3	3
7								1	2	3
8									1	2
9										1
10										

Необходимо быть аккуратным при вычислении расстояний, например, расстояние между 1-й и 4-й вершинами равно двум, так как помимо пути (1-2-3-4), имеющего длину 3, также существует путь (1-10-4), имеющий длину 2.

Среди всех значений согласно определению диаметра выбирается наибольшее, в данном случае диаметр равен трем.

6.5.3. *Поиск диаметра при операциях над графами*

При операциях над графами иногда значение диаметра проще найти, рассматривая по отдельности участвующие в операциях графы. При этом всегда надо помнить, что диаметр любого несвязного графа равен бесконечности.

При операциях объединения по этой причине в случае отсутствия общих вершин диаметр равен всегда бесконечности. При наличии одной общей вершины значение диаметра вычисляется как сумма диаметров двух участвующих в объединении графов. В более сложных случаях необходимо рисовать полученный граф и анализировать его. Важно помнить, что если в задаче не указано, сколько общих вершин имеют объединяемые графы, то необходимо рассматривать все случаи.

Задача 6.7. Найти значение диаметра графа, полученного в результате объединения простого цикла на 7 вершинах и полного графа на 5 вершинах, если известно, что они имеют 1 общую вершину.

Решение. См. рис. 6.26.

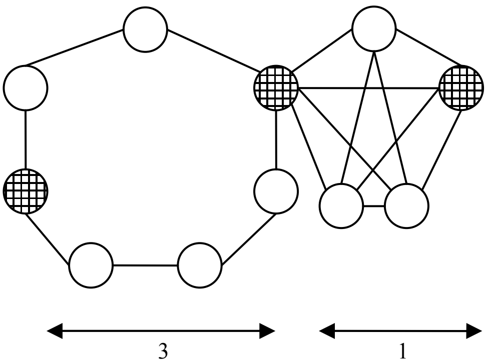


Рис. 6.26

Диаметр простого цикла на 7 вершинах равен [7/2] = 3, а диаметр полного графа всегда равен 1. Значит, диаметр полученного в результате объединения графа равен 3+1 = 4.

При операциях сложения двух графов в случае отсутствия общих вершин диаметр всегда будет не более двух. Это связано с тем, что при сложении графов из каждой вершины первого графа тянется ребро к каждой вершине второго графа. Значит, если рассматривать вершины из разных графов, между ними расстояние всегда равно 1. А если рассматривать две вершины из одного графа, то всегда можно за один шаг перебраться в соседний граф, а потом за один шаг вернуться обратно. Диаметр двух складываемых графов может быть равен единице только в том случае, если оба исходных графа были полные, тогда при сложении также получается полный граф.

При операции дополнения никаких предварительных оценок сделать нельзя, необходимо рассматривать полученную конфигурацию и следить за связностью графа.

6.6. Устойчивость графов

6.6.1. Внутренняя устойчивость

Внутренне-устойчивое множество вершин – множество вершин графа, никакие две вершины которого не инцидентны.

Пустой подграф – внутренне-устойчивое множество вершин, такое, что: при добавлении к нему хотя бы одной вершины образуется хотя бы одно ребро.

Пустой подграф – максимальное по включению внутренне-устойчивое множество вершин. В данном определении «максимальность» означает «нерасширяемость»; в общем случае граф может иметь несколько пустых подграфов различной мощности.

Вершинное число независимости графа (или ***число внутренней устойчивости графа***) – мощность наибольшего пустого подграфа, обозначение – $\varepsilon_0(G)$.

Независимое множество ребер (или ***паросочетание***) – множество ребер графа, никакие два ребра которого не инцидентны.

Реберное число независимости (или ***число паросочетания***) – мощность наибольшего паросочетания (независимого множества ребер), обозначение – $\varepsilon_1(G)$.

В общем случае число вершинной внутренней устойчивости изменяется от n (у пустых графов на n вершинах) до 1 (у полных графов на n вершинах).

Для нахождения числа внутренней устойчивости надо определить мощность максимального пустого подграфа. Существует ***алгоритм поиска пустых подграфов***, который позволяет найти все пустые подграфы. Из них выбирается максимальный по мощности.

Пошаговое описание алгоритма:

1) строим фиктивную вершину, ее пометка – множество всех вершин графа $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (или ребер – если ищется реберное число внутренней устойчивости, тогда далее во всем алгоритме вместо вершин говорим о ребрах);

2) выбираем любую вершину из указанного в пометке множества, рисуем ее на уровень ниже (это потомок);

3) рядом с ней на этом же уровне рисуем все ***смежные*** с ней вершины из множества, указанного в пометке вершины – родителя;

4) в качестве пометки каждой полученной вершины v_i указываем множества вершин, входящих в ее неокрестность (т.е. несмежных с v_i);

5) повтор шагов 2-4 для всех получающихся веток дерева до тех пор, пока все пометки не будут пустые.

Задача 6.8. Для заданного графа (рис. 6.27) найти все пустые подграфы и число вершинной внутренней устойчивости.

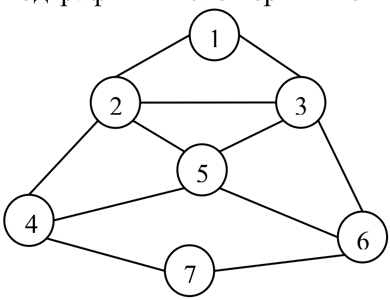


Рис. 6.27

Решение. В соответствии с алгоритмом получим дерево (рис. 6.28).

В этом дереве все пути от фиктивной вершины до каждого листа есть пустые подграфы или максимальные внутренне устойчивые множества (в данном случае – вершины). Повторные пути указываются единократно. Например, пути 1-4-6, 1-6-4 и 4-1-6 задаются единственный раз множеством {1,4,6}.

Выбираем из них самое ***длинное*** (с максимальной мощностью), это, например, {1,4,6}, его мощность равна 3. Значит, ε_0=3.

Пустые подграфы: {2,6}, {2,7}, {1,5,7}, {1,4,6}, {3,2,7}, {3,4}. ε_0=3.

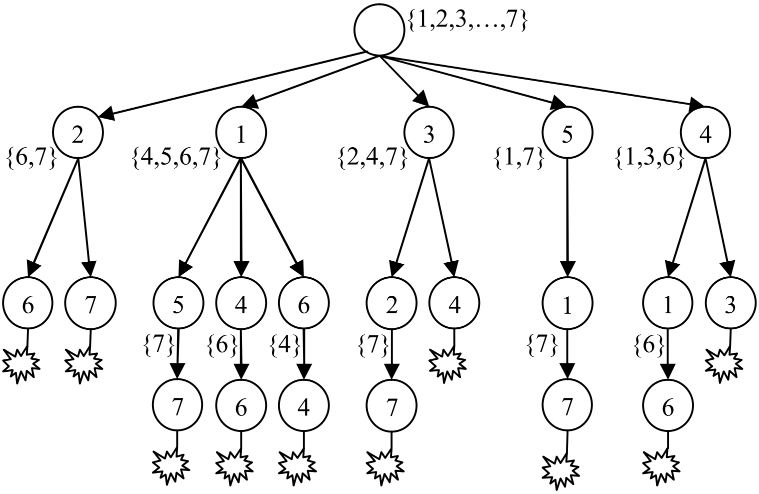


Рис. 6.28

6.6.1. *Внешняя устойчивость*

Прежде чем определить понятие внешней устойчивости, введем правила покрытия.

Любая вершина ***покрывает***:

- саму себя;
- смежные вершины;
- инцидентные ребра.

Любое ребро ***покрывает***:

- само себя;
- смежные ребра;
- инцидентные вершины.

Вершинное число внешней устойчивости – минимальная мощность множества вершин, покрывающих все вершины графа, обозначается β_0.

Реберное число внешней устойчивости – минимальная мощность множества ребер, покрывающих все ребра графа, обозначается β_1. В общем случае число вершинной внешней устойчивости изменяется от n (у пустых графов на n вершинах) до 1 (у полных графов на n вершинах).

Основная идея ***алгоритма поиска минимального покрытия*** заключается в построении модифицированной матрицы смежности (обычная матрица смежности, только по главной диагонали у нее единички), чтобы затем при помощи алгебры логики найти наименьшее число строк, покрывающих все столбцы этой матрицы (или столбцов, покрывающих строки – разницы нет, матрица симметричная).

Пошаговое описание алгоритма:

1) построить матрицу смежности и заполнить все клетки главной диагонали единичками;

2) составить логическое выражение в виде произведения сумм логических переменных, соответствующих вершинам графа (или ребрам – если ищется реберное число внешней устойчивости). Каждая сумма представляет собой сложение переменных, которые в данной строке содержат «1». Логическое сложение обозначается как «+», логическое умножение – как «·»;

3) привести это выражение к ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме), т.е. к сумме произведений переменных;

4) мощность максимального слагаемого и есть искомое число внешней устойчивости.

Задача 6.9. Для заданного графа (рис. 6.29) с достаточным обоснованием найти число внешней вершинной устойчивости.

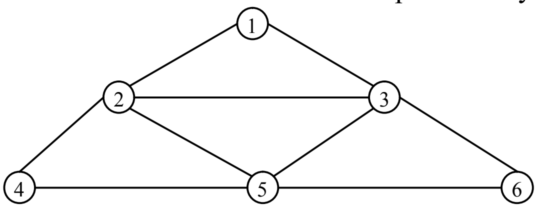


Рис. 6.29

Решение. Получим матрицу:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1			
2	1	1	1	1	1	
3	1	1	1		1	1
4		1		1	1	
5		1	1	1	1	1
6			1		1	1

Из нее получаем логическое выражение (идем по строчкам):

$$\text{Покрытие} = (1+2+3)\cdot(1+2+3+4+5)\cdot(1+2+3+5+6)\cdot(2+4+5)\times$$
$$\times(2+3+4+5+6)\cdot(3+5+6).$$

Упрощаем с учетом того, что по закону поглощения:

$$(\underline{1+2+3})\cdot(\underline{1+2+3}+4+5)=(1+2+3),$$
$$(\underline{2+4+5})\cdot(\underline{2}+3+\underline{4+5}+6)=(2+4+5),$$
$$(1+2+\underline{3+5+6})\cdot(\underline{3+5+6})=(3+5+6).$$
$$\text{Покрытие} = (1+2+3)\cdot(2+4+5)\cdot(3+5+6).$$

Раскрываем скобки с учетом того, что

$$(2+4+\underline{5})\cdot(3+\underline{5}+6)=\underline{5}+2\cdot3+2\cdot6+4\cdot3+4\cdot6.$$
$$\text{Покрытие} = (1+2+3)\cdot(5+2\cdot3+2\cdot6+4\cdot3+4\cdot6)=$$
$$=1\cdot5+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot6+1\cdot4\cdot3+1\cdot4\cdot6+2\cdot5+2\cdot2\cdot3+2\cdot2\cdot6+2\cdot4\cdot3+2\cdot4\cdot6+3\cdot5+$$
$$+3\cdot2\cdot3+3\cdot2\cdot6+3\cdot4\cdot3+3\cdot4\cdot6.$$

Упрощаем по закону поглощения ($x+x\cdot y=x$) и с учетом $x\cdot x=x$.

$$\text{Покрытие} = 1\cdot5+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot6+1\cdot4\cdot3+1\cdot4\cdot6+2\cdot5+2\cdot2\cdot3+2\cdot2\cdot6+$$
$$+2\cdot4\cdot3+2\cdot4\cdot6+3\cdot5+3\cdot2\cdot3+3\cdot2\cdot6+3\cdot4\cdot3+3\cdot4\cdot6=$$
$$=2\cdot6+\underline{2}\cdot\underline{3}+\underline{2}\cdot\underline{3}+4\cdot3+1\cdot5+1\cdot4\cdot6+2\cdot5+3\cdot5==$$
$$2\cdot6+2\cdot3+4\cdot3+1\cdot5+1\cdot4\cdot6+2\cdot5+3\cdot5.$$

Получили ДНФ, выбираем самое ***короткое*** слагаемое, например 2·6. Значит, искомое число внешней устойчивости равно 2, а пример внешне устойчивого множества вершин – {2,6}.

Ответ: β_0=2.

6.7. Хроматика графов

6.7.1. Хроматическое число

Пусть необходимо раскрасить вершины графа так, чтобы любые две смежные вершины были раскрашены в *разные* цвета, при этом число использованных цветов должно быть *наименьшим*.

Это число называется ***хроматическим числом графа***, будем его обозначать $h(G)$. Если $h(G)=k$, то граф называется *k-раскрашиваемым*.

Заметим, что если данный граф является полным, т. е. любые две вершины являются смежными, то хроматическое число такого графа равно n, где n – число вершин.

Существует несколько ***алгоритмов нахождения точного значения хроматического числа.*** Один из них основан на методе поиска наименьшего покрытия.

Поскольку при любой допустимой раскраске графа G множество вершин, окрашиваемых в один и тот же цвет, должно быть независимым множеством, то всякую допустимую раскраску можно интерпретировать как **разбиение** всех вершин графа G на такие независимые множества. Далее, если каждое независимое множество расширить до максимального (путем добавления к нему других вершин), то раскраска графа G может быть тогда истолкована как покрытие вершин графа G максимальными независимыми множествами вершин (пустыми подграфами). Очевидно, что в последнем случае некоторые вершины графа G могут принадлежать более чем одному максимальному независимому множеству (пустому подграфу). Это говорит о возможности существования различных допустимых раскрасок (использующих одно и то же число цветов), так как вершину, принадлежащую разным максимальным множествам, можно окрасить в любой из цветов, соответствующих тем множествам, которым она принадлежит.

Итак, пусть построены все максимальные независимые множества графа G (пусть таких множеств t) и пусть задана ($n \times t$) матрица $M = \{m_{ij}\}$, у которой $m_{ij}=1$, если вершина x_i принадлежит j-му максимальному независимому множеству, и $m_{ij}=0$ в противном случае. Если теперь каждому максимальному независимому множеству сопоставить единичную стоимость, то задача раскраски сведется просто к задаче нахождения наименьшего числа столбцов в матрице M, покрывающих все ее строки x. Каждый столбец из решения этой задачи соответствует определенному цвету, который может быть использован для окраски всех вершин максимального независимого множества, представленного этим столбцом.

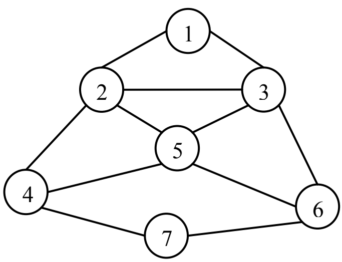


Рис. 6.30

Задача 6.10. Найти точное значение хроматического числа графа (рис. 6.30) и предложить вариант раскраски.

Решение. В соответствии с алгоритмом найдем все пустые подграфы:

{2,6}, {2,7}, {1,5}, {1,4,6}, {3,2,7}, {3,4}, {5,7}, {4,3}.

Составим матрицу покрытий:

	1	2	3	4	5	6	7	Цвет
{2,6}		1				1		*a*
{2,7}		1					1	*b*
{1,5}	1				1			*c*
{1,4,6}	1			1		1		*d*
{3,2,7}		1	1				1	*e*
{3,4}			1	1				*f*
{5,7}					1		1	*g*

Присвоим каждому пустому подграфу свой цвет. Запишем покрытие, используя логические операции (аналогично тому, как мы поступали при поиске внешне устойчивых множеств вершин). Для этого рассмотрим составленную матрицу по столбцам: 1-й столбец покрывается 3-й или 4-й строкой (это означает, что первую вершину можно окрасить в цвет c или d), 2-й столбец покрывается 1-й, 2-й или 5-й строкой (действительно, вторую вершину можно окрасить в цвет a, c или e) и т.д. Получим логическое выражение $(c+d)\cdot(a+b+e)\cdot(e+f)\cdot(d+f)\cdot(c+g)\cdot(a+d)\cdot(b+e+g)$, которое можно упростить, сначала перемножив соответственно 2-ю и 7-ю, 1-ю и 5-ю, 3-ю и 4-ю скобки $(b+e+a\cdot g)\cdot(c+d\cdot g)\cdot(f+e\cdot d)\cdot(a+d)$. Дальнейшее легкое упрощение невозможно и строго говоря, если бы стояла задача найти все возможные способы покрытий, необходимо было бы раскрыть все скобки и провести окончательное упрощение. В нашем случае необходимо найти одно решение с минимальной мощностью. Например, в результате умножения получится слагаемое $g\cdot d\cdot e$ (из первой скобки e, из второй $d\cdot g$, из третьей $e\cdot d$, из четвертой d), мощность которого равна трем. Это и есть точное значение хроматического числа. Соответствующая этому решению раскраска выглядит так: в цвет g (например, красный) красим вершины {5,7}, в цвет d (синий) красим вершины {1,4,6}, в цвет e (зеленый) по идее следует покрасить вершины {3,2,7}, но вершине 7 уже присвоен красный цвет, поэтому в множество зеленых вершин ее включать не будем.

Ответ: h=3, раскраска: {5,7} – красный цвет, {1,4,6} – синий, {3,2} – зеленый.

Одной из наиболее полезных теорем при определении хроматического числа является следующая теорема.

Теорема 6.9. ***Хроматическое число графа равно 2 тогда и только тогда, когда все имеющиеся в графе циклы содержат четное число ребер.***

Довольно много задач решается на основе этого правила. В остальных случаях приходится прибегать к различным способам оценки хроматического числа.

Теорема 6.10. ***Если наибольшая из степеней вершин графа G равна ρ, то этот граф (ρ+1)-раскрашиваем (т.е. его хроматическое число не превосходит (ρ+1)).***

Оценка хроматического числа, даваемого этой теоремой, является достаточно грубой. Особенно наглядно это выглядит на примере дерева, для которого степень вершин может быть как угодно велика, а хроматическое число равно 2.

При этом хроматическое число графа равно $St_m + 1$ только в двух случаях: во-первых, если граф является полным (или, точнее, содержит полный подграф на $St_m + 1$ вершине, и, во-вторых, если $St_m = 2$ и при этом данный граф содержит *контур* нечетной длины (такой граф изображен на рис. 6.31, *б*, максимальная степень его вершин – 2, а хроматическое число – 3).

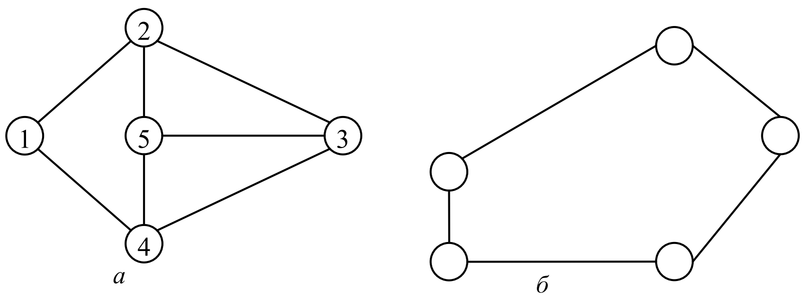


Рис. 6.31

Во всех остальных случаях хроматическое число графа не превосходит максимальной степени вершин, конечно, за исключением ситуации, когда граф тривиальный (максимальная степень тогда равна 0, но первая краска все равно потребуется). На рис. 6.31, *а* изображен граф, максимальная степень вершин которого равна 3, и, поскольку он не содержит полного подграфа на четырех вершинах, оценка хроматического числа может быть снижена до St_m.

Улучшение на единицу оценки, даваемое теоремой 6.10, позволяет сформулировать другую теорему, имеющую в ряде случае довольно явное практическое значение при решении задач.

Теорема 6.11. ***Если наибольшая из степеней вершин нетривиального графа G равна St_m, то этот граф St_m-раскрашиваемый (т.е. его хроматическое число не превосходит St_m) всегда, за исключением двух случаев:***

1) граф содержит полный подграф на St_m + 1 вершине,

2) St_m = 2 и при этом данный граф содержит контур нечетной длины.

Иногда эта теорема формулируется еще проще, сразу исключая обе эти ситуации при помощи ограничений формулировки.

В качестве примера приведем условие задачи, которая легко решается именно с помощью этой теоремы.

Задача 6.11. Определить с достаточным обоснованием точное значение хроматического числа графа (рис. 6.32).

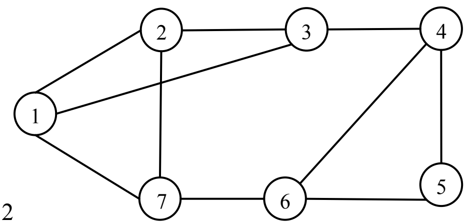


Рис. 6.32

Решение. Максимальная степень вершины $St_m = 3$, граф связный и не является полным, значит, по теореме Брукса он 3-раскрашиваемый, т.е. $h \leq 3$.

Граф содержит контуры нечетной длины, значит, по теореме 6.9 его хроматическое число строго больше двух: $h > 2$.

Так как h – натуральное число, совмещая данные ограничения получим $2 < h \leq 3$ и отсюда $h = 3$.

Хроматическое число графа на n вершинах может изменяться от 1 до n. Ясно, что у полного графа $\chi_e(K_n) = n$, и, следовательно, легко построить графы со сколь угодно большим хроматическим числом. С другой стороны, нетрудно видеть, что $\chi(G)=1$ тогда и только тогда, если G – вполне несвязный (пустой) граф, и что $\chi(G)=2$ тогда и только тогда, если G – двудольный граф, отличный от вполне несвязного графа. Не следует, впрочем, путать двудольные графы с графами, имеющими двудольное представление.

Если обратиться к привычным терминам, то можно утверждать, что хроматическое число, равное двум, имеют:

- ациклические графы, содержащие хотя бы одно ребро,
- простые циклы на четном числе вершин,
- двудольные графы,
- графы, содержащие только четные циклы.

Все указанные четыре категории графов по своей сути являются двудольными.

6.7.2. Поиск хроматического числа при операциях над графами

Операция удаление ребра. При удалении ребер из полных графов хроматическое число уменьшается, причем размер этого уменьшения зависит от того, какую конфигурацию образуют удаляемые ребра. Напомним, что у полного графа на n вершинах хроматическое число $h(K_n)=n$.

При удалении *одного* ребра у полного графа на n вершинах хроматическое число снижается на единицу, так как образуются две несмежные вершины, которые можно покрасить в единый цвет. Таким образом, $h = n - 1$.

При удалении *двух* ребер у полного графа на n вершинах хроматическое число снижается на единицу или сразу на две единицы, в зависимости от того, являются ли удаляемые ребра смежными или несмежными (рис. 6.33). В случае на рис. 6.33, *б* образуются две пары несмежных вершин (1,2) и (3,4), каждую пару можно покрасить в свой цвет, т.е. сэкономить удастся два цвета и $h = n - 2$. В случае на рис. 6.33, *в* образуется одна вершина (2), которая несмежна с двумя другими (1, 3), но поскольку между собой эти вершины соединены ребром, то вершине 2 можно присвоить цвет, совпадающий, например, с цветом вершины 1 и на этом процесс экономии завершится, и в результате $h = n - 1$.

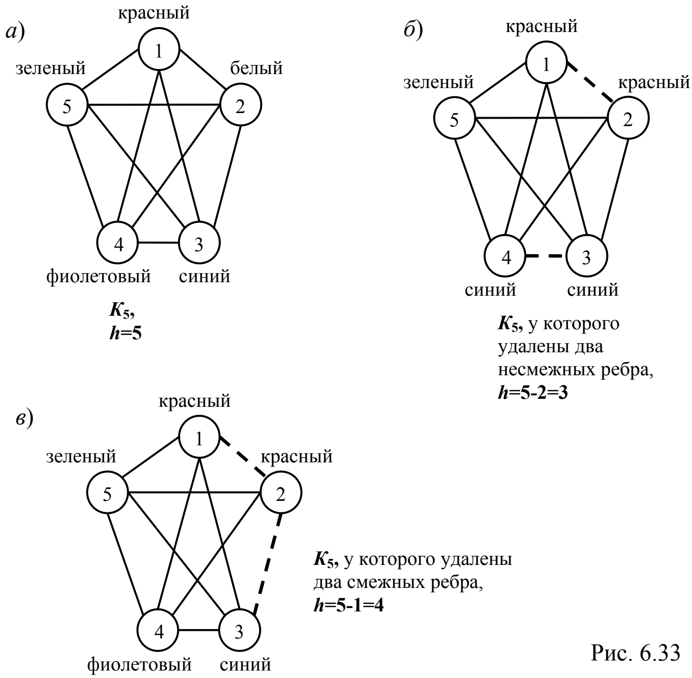
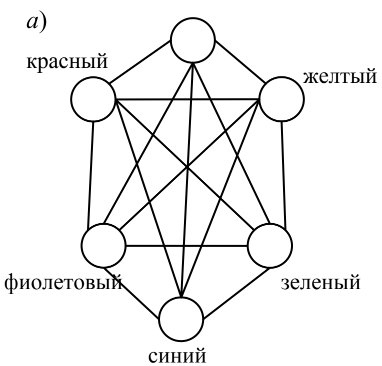


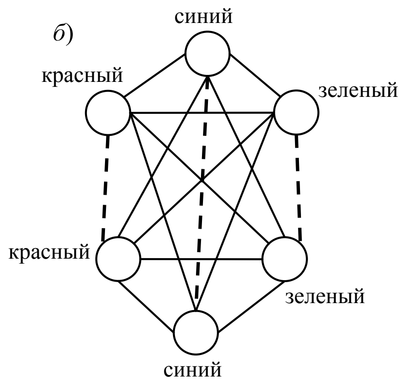
Рис. 6.33

При удалении *трех* ребер у полного графа на n вершинах хроматическое число снижается на одну, две или сразу на три единицы, в зависимости от того, какую конфигурацию образуют удаляемые ребра (рис. 6.34). В случае, если все три ребра попарно несмежны (рис. 6.34, *б*), образуются три пары несмежных вершин (1,2) и (3,4) и (5,6), каждую пару можно покрасить в свой цвет, т.е. сэкономить удастся 3 цвета и $h = n - 3$.

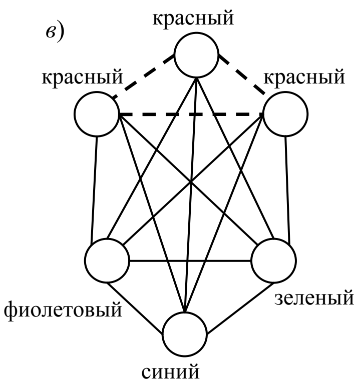
В случае, если удаляемые ребра образуют простой цикл (рис. 6.34, *в*), формируется множество из трех попарно несмежных вершин (1,2,3), которое можно покрасить в единый цвет. Таким образом, для этих трех вершин ранее расходовалось три цвета, а теперь достаточно одного, т.е. экономия составляет два цвета и в результате $h = n - 2$. Если же удаляемые ребра имеют одну общую вершину (рис. 6.34, *г*), то образуется одна вершина (2), которая несмежна с тремя другими (1, 3, 4), но поскольку между собой эти вершины соединены ребрами, то вершине 2 можно присвоить цвет, совпадающий, например, с цветом вершины 1 и на этом процесс экономии завершится, в результате $h = n - 1$.



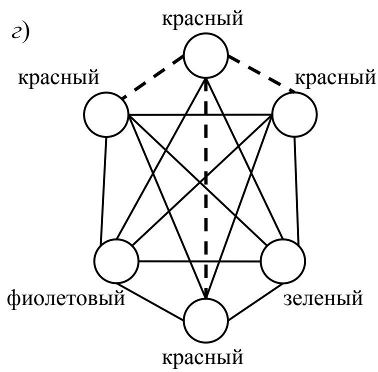
K_6,
$h = 6$



K_6, у которого удалены 3 несмежных ребра,
$h = 6 - 3 = 3$



K_6, у которого удалены 3 смежных ребра,
$h = 6 - 2 = 4$

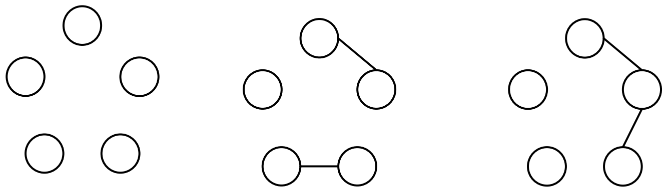


K_6, у которого удалены 3 ребра, имеющие одну общую вершину,
$h = 6 - 1 = 5$

Рис. 6.34

Операция дополнение. При выполнении операции дополнения хроматическое число может как возрастать, так и уменьшаться. Интерес представляют следующие часто встречающиеся ситуации.

Дополнение полного графа представляет собой пустой граф (рис. 6.35, *а* и 6.36, *а*), и его хроматическое число равно 1.

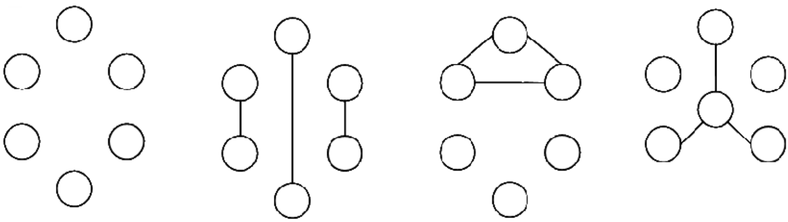


а *б* *в*

Рис. 6.35

Если из полного графа были удалены некоторые ребра и затем построено его дополнение, то в это дополнение войдут именно удаленные ребра и, значит, необходимо рассмотреть, какую конфигурацию они образуют. При удалении двух ребер в случае на рис. 6.33, *б* дополнение будет выглядеть так, как на рис. 6.35, *б*, и $h = 2$. При удалении двух ребер в случае, как на рис. 6.33, *в*, и применения операции дополнения получим граф, как на рис. 6.35, *в*, и снова $h = 2$. При удалении трех ребер ситуация уже может отличаться.

Для графа на рис. 6.34, *в* в его дополнении образуется цикл на нечетном количестве вершин (рис. 6.36, *в*), и хроматическое число получается равным 3. Для случаев на рис. 6.34, *б* и *г* дополнением являются ациклические графы на рис. 6.36, *б* и *г*, и их хроматические числа равны 2.



а *б* *в* *г*

Рис. 6.36

Дополнение простого цикла представляет собой довольно интересную ситуацию. Например, возьмем простой цикл на семи вершинах (рис. 6.37, *а*), изначально, как и у любого нечетного цикла, $h = 3$. Построим его дополнение (рис. 6.37, *б*).

Начнем раскрашивать вершины. Вершины v_1 и v_2 несмежны, значит, их можно окрасить в один цвет, например красный. Вершину v_3 в красный цвет открасить нельзя, так как она смежна с v_1, значит, на нее расходуем новый цвет, например синий. Ее соседку v_4 можно тоже покрасить в синий цвет ввиду отсутствия ребра (v_3, v_4). Далее процесс продолжается.

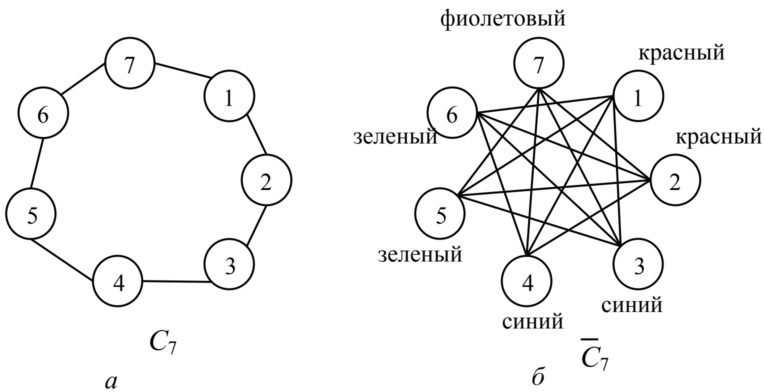


Рис. 6.37

Таким образом, каждые две вершины, если идти по внешнему кругу (бывшему циклу), окрашиваются в один цвет. В рассматриваемом случае вершина v_7, получив фиолетовый цвет, останется единственной вершиной этого цвета, так как число вершин в графе нечетно. Всего на процесс оказывается потраченным четыре цвета. В общем случае, если G – дополнение простого цикла на n вершинах, то $h(G)=[(n+1)/2]$, где n – количество вершин, а квадратные скобки обозначают целую часть.

Применение операции дополнения к полному двудольному графу может только увеличить хроматическое число, которое изначально у всех двудольных графов всегда равно двум. Например, дополнением полного двудольного графа $K_{5,7}$ является граф, состоящий из двух компонент: K_5 и K_7. Соответственно, его хроматическое число будет равно 7.

Операция объединение и пересечение графов. При объединении двух графов, не имеющих общих вершин, хроматическое число результирующего графа равно максимальному из хроматических чисел исходных графов. Итак, если $G = G_1 \cup G_2$, $V_1 \cap V_2 = 0$, то верно

$$h(G)=\max (h(G_1), h(G_2)). \qquad (6.2)$$

При сложении двух графов, не имеющих общих вершин, хроматическое число результирующего графа равно сумме хроматических чисел исходных графов. Итак, если $G=G_1+G_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, то верно

$$h(G)=h(G_1) + h(G_2). \qquad (6.3)$$

Задача 6.12. Вычислить диаметр, цикломатическое и хроматическое числа графа ($\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$), где G_1 – простой цикл на 20 вершинах, G_2 – полный граф на 6 вершинах, у которого удалили три ребра, образующих цикл. При этом графы не имеют общих вершин, горизонтальная черта сверху обозначает дополнение.

Решение. Для всех задач данного типа рекомендуется заполнить таблицу (табл. 6.6), с помощью которой проще отслеживать результаты операций.

Начнем с графа G_1. Простой цикл на 20 вершинах имеет 20 ребер, он связный (k=1), его цикломатическое число равно единице (m-n+k=20-20+1=1). Хроматическое число простого цикла с четным числом вершин равно 2. Диаметр такого графа равен половине длины цикла, т.е. 10.

Таблица 6.6

Форма для решения задачи 6.12

	G_1	$\overline{G_1}$	G_2	$\overline{G_2}$	$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$
N					
m					
K					
$Г$					
h					
d					

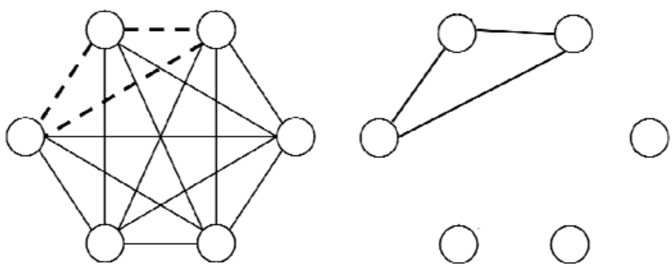
Дополнение графа G_1 содержит столько же вершин (20), а количество его ребер равно количеству ребер в полном графе на 20 вершинах (20·19/2=190) за вычетом имеющихся 20, т.е. 170. Компонента связности по-прежнему будет одна, цикломатическое число рассчитывается по формуле $m–n+k$=170-20+1=151. Интерес представляет расчет хроматического числа: оно будет равно половине числа вершин с округлением вверх, т.е.]20[= 10. Диаметр, как видно, равен 2. В итоге заполнены первые два столбца табл. 6.7.

Таблица 6.7

Решение задачи 6.7 – данные о графе G_1

	G_1	$\overline{G_1}$
n	20	20
m	20	20·19/2-20 = 170
k	1	1
γ	1	170-20+1=151
h	2	]20[= 10
d	10	2

G_2 – полный граф на 6 вершинах, у которого удалили три ребра, образующих цикл. Подсчитаем количество ребер: 6·5/2 – 3 = 12. Граф связный (k=1), его цикломатическое число равно $m - n + k$ = =12-6+1=7. Интерес представляет расчет хроматического числа: по аналогии с рис. 6.34, *в* оно будет равно: 6 исходных цветов минус 2 цвета, которые удастся сэкономить, итого 4.



а *б*

Рис. 6.38

Судя по внешнему виду графа, диаметр будет равен 2 (рис. 6.38, *а*), так как между вершинами, инцидентными удаленным ребрам, расстояние равно 2. Дополнение графа G_2 содержит столько же вершин (6), а количество его ребер равно количеству ребер в полном графе на 6 вершинах (6·5/2=15) за вычетом имеющихся 12, т.е. 3 (еще проще – число ребер в дополнении равно числу ребер, которые были удалены из исходного полного графа, а их было удалено именно 3).

Компонент связности, судя по внешнему виду графа будет 4 (одна компонента на трех вершинах и три изолированные вершины), цикломатическое число рассчитывается как $m - n + k =$ $= 3 - 6 + 4 = 1$ (что хорошо согласуется с внешним видом графа на рис. 6.38, *б*).

В силу наличия цикла нечетной длины хроматическое число будет равно 3. Диаметр равен бесконечности на основании того, что граф несвязный (табл. 6.8).

Таблица 6.8

Решение задачи 6.7 – данные о графе G_2

	G_2	$\overline{G_2}$
n	6	6
m	6·5/2 – 3 = 12	6*5/2-12=15-12=3
k	1	4
γ	12-6+1=7	3-6+4=1
h	6-(3-1)=4	3
d	2	Бесконечность

В результате объединения двух графов $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ (графы не имеют общих вершин), получим следующие характеристики. Количество вершин складывается (20+6=26), то же верно в отношении ребер (170+3=173) и компонент (1+4=5). Цикломатическое число при объединении графов в случае отсутствия общих вершин также получается путем сложения цикломатических чисел исходных графов. Хроматическое число можно вычислить, а диаметр равен бесконечности в силу того, что граф несвязный (табл. 6.9).

Таблица 6.9

Ответ к задаче 6.7

	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$
n	20	6	20+6=26
m	170	3	170+3=173
k	1	4	1+4=5
γ	151	1	151+1=152
h	10	3	max(10,3)=10
d	2	Бесконечность	Бесконечность

Цикломатическое число равно 152, хроматическое число равно 10, диаметр равен бесконечности.

6.7.3. Двудольное представление графов

Биграф, ***двудольный граф*** или ***четный граф*** – это математический термин теории графов, который обозначает множество вершин и связей между ними, таких, что если множество вершин разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, то связи будут только между вершинами из разных подмножеств.

Неориентированный граф $G = (V, U)$ называется ***двудольным***, если множество его вершин можно разбить на две части $V_1 \cup V_2 = V$, $|V_1| > 0$, $|V_2| > 0$, так, что выполняются условия:

- ни одна вершина в V_1 не соединена с вершинами в V_1;
- ни одна вершина в V_2 не соединена с вершинами в V_2.

Двудольный граф называется ***полным двудольным графом***, если для каждой пары вершин $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$ существует ребро $(v^1, v^2) \in U$. Для $|U| = i$, $|V| = j$ такой граф называется $K_{i,j}$

Теорема 6.12. ***Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он 2-раскрашиваемый (то есть его хроматическое число равняется двум).***

На самом деле, если раскрасить вершины графа в два цвета, то легко расположить все вершины одного цвета в одной доле, все вершины другого цвета – в другой доле и провести имеющиеся ребра. Соответственно, вершины каждой из долей будут попарно несмежными и, таким образом, граф – двудольным. На самом деле от способа изображения свойства графа, конечно же, не меняются, все 2-раскрашиваемые графы сами по себе изначально являются двудольными, только они могут иметь недвудольное представление, по которому факт двудольности не сразу кажется очевидным.

Задача 6.13. Определить, является ли граф (рис. 6.39, *а*) двудольным, и если да, построить его двудольное представление.

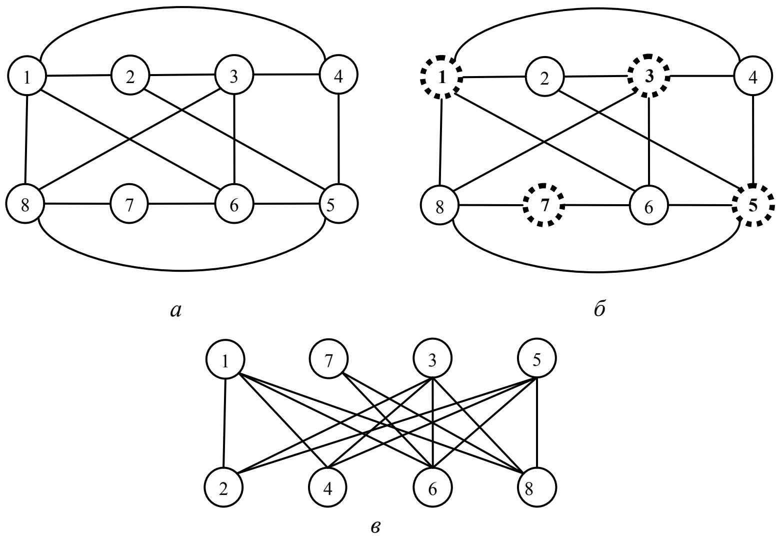


Рис. 6.39

Решение. В графе (рис. 6.39, *а*) все циклы имеют четную длину, следовательно, граф 2-раскрашиваемый (его хроматическое число равно 2). Это означает, что граф двудольный. Для построения двудольного представления раскрасим граф в два цвета (разные штриховки на рис. 6.39, *б*). Теперь разместим все заштрихованные одним способом вершины в первой доле (вершины 1, 7, 3, 5 – например, имеющие красный цвет), а остальные вершины (2, 4, 6, 8 – например, имеющие синий цвет) – во второй доле. Теперь остается только провести ребра так, чтобы они соединяли смежные в исходном графе вершины. Например, из вершины 1 нужно провести ребра в вершины 2, 4, 6, 8. Далее достаточно рассмотреть 7, 3 и 5, т.е. вершины одной доли, в результате все ребра будут построены. Двудольное представление графа построено на рис. 6.39, *в*.

6.7.4. Хроматический класс

В теории графов ставится часто вопрос о реберной раскраске графов. Какое минимальное число цветов нужно, чтобы раскрасить ребра графа так, что любые 2 смежных ребра (т.е. 2 ребра, имеющих общую вершину) были бы окрашены в разный цвет? Это минимальное число цветов называется хроматическим классом.

Дадим строгое определение. Граф G называется реберно ***k-раскрашиваемым***, если его ребра можно раскрасить k красками таким образом, что никакие два смежных ребра не окажутся одного цвета. Если граф G реберно k-раскрашиваемый, но не является реберно (k–1)-раскрашиваемым, то k называется ***хроматическим классом*** графа G. При этом используется запись $H(G)=k$. На рис. 6.40 изображен граф G, для которого $H(G)=4$.

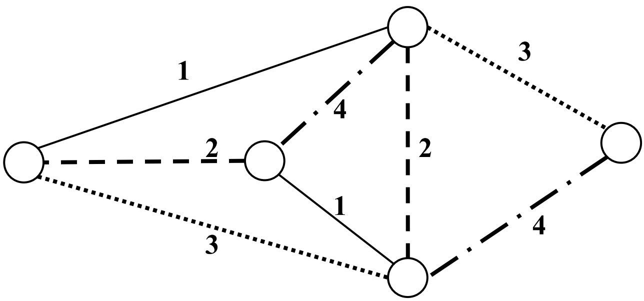


Рис. 6.40

Ясно, что если наибольшая из степеней вершин графа G равна $St_{\max}$, то $H(G) \geq St_{\max}$. Для хроматического класса графа справедлива следующая теорема, известная как теорема Визинга.

Теорема 6.13 (Визинга). ***Если в графе максимальная степень вершин равна St_m, то хроматический класс равен либо St_m, либо $St_m + 1$.***

Очевидно, что простейший алгоритм нахождения хроматического класса (и соответствующей раскраски ребер) состоит в следующем. По данному графу строим так называемый *двойственный* граф: ребра графа соответствуют вершинам нового (двойственного) графа, причем, если 2 ребра имеют общую вершину, то соответствующие вершины являются смежными и в двойственном графе, т.е. при построении соединяются ребром. После этого раскрашиваем наилучшим образом вершины двойственного графа и, переходя к «старому» графу, получаем (одну из возможных) наилучших реберных раскрасок графов. Можно собственно и не строить двойственный граф, а просто применить алгоритм поиска хроматического числа, заменив вершины ребрами. Например, при использовании алгоритма на методе поиска наименьшего покрытия ввести изначально при поиске пустых подграфов в виде пометки начальной вершины список ребер графа. На выходе первой части алгоритма получатся списки максимальных по включению множеств, содержащих попарно несмежные ребра. Вторая часть алгоритма будет выполняться аналогично.

В заключение отметим, что реберная раскраска часто применяется при конструировании различных устройств, где провода, соединяющиеся в одном узле, должны для удобства иметь разные цвета.

Заметим, что до сих пор нет «хороших» критериев для графов, позволяющих определить, когда же именно хроматический класс равен St_m, а когда $St_m + 1$.

Однако в некоторых частных случаях соответствующие результаты находятся легко. Например, хроматический класс простого цикла на n вершинах равен 2 или 3 в зависимости от того, четно n или нечетно. Хроматические классы полных двудольных и просто полных графов вычисляются в соответствии со следующими теоремами.

Теорема 6.14. ***Для полных двудольных графов*** $\chi_e(K_{n_1,n_2}) = \rho = \max(n_1, n_2)$.

Теорема 6.15. ***Для полных графов*** $\chi_e(K_n) = n$***, если n нечетно*** **(*n*≠1)*, и*** $\chi_e(K_n) = n - 1$***, если n четно.***

6.8. Преобразование графов

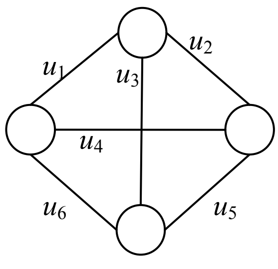
6.8.1. Реберные графы

Граф G_1=(V,U) называется ***реберным*** по отношению к графу G=(V,U) – если каждой вершине v графа G_1 сопоставлено ребро u графа G и две вершины в G_1 смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра смежны в графе G.

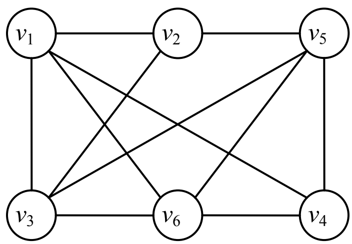
Методика построения реберного графа состоит из двух этапов.

1. Строим вершины. Каждое ребро исходного графа G превращается в вершину нового, реберного по отношению к нему графа G_1. Реберный граф G_1 графа G имеет столько же вершин, сколько ребер у графа G.
2. Строим ребра. Ребро между двумя вершинами графа G_1 существует тогда и только тогда, когда ребра графа G, соответствующие этим двум вершинам, смежны (т.е. инцидентны одной и той же вершине графа G).

Построим реберный граф для графа на рис. 6.41, *а*. Исходный граф имеет 6 ребер, значит у реберного будет 6 вершин. Соединим эти вершины на основе смежности исходных ребер. Возьмем ребро u_1 было смежно с ребрами u_2 и u_3, значит вершина реберного графа v_1 будет смежна с v_2 и v_3. Продолжая по всем вершинам, получим реберный граф (рис. 6.41, б).



а



б

Рис. 6.41

Для каждого графа G можно построить реберный по отношению к нему G_1. Тогда по отношению к G_1 исходный граф G будет называться ***образом***.

Хотя для каждого графа можно построить реберный, далеко не каждый произвольный граф имеет образ. Иными словами, в общем случае нельзя без дополнительной проверки утверждать, существует ли где-то в природе граф, для которого данный граф является реберным.

Для того чтобы выяснить, существует ли образ данного графа (т.е. является ли данный граф реберным для какого-либо графа), необходимо воспользоваться ***критерием реберности***.

Теорема 6.16 (критерий реберности). ***Граф реберный тогда и только тогда, когда он разложим по аддитивной операции объединения на полные подграфы так, чтобы каждая вершина входила в них не более двух раз (при этом каждое ребро будет задействовано точно один раз)***.

Если критерий выполняется (найдено разбиение на подграфы K_1, K_2, ...), то значит, что граф реберный, и можно приступать к построению его образа. Если такое разбиение не может быть найдено (это надо доказать), то это означает, что граф не реберный, и образа у него не существует.

Методика построения образа графа:

1. Вершинам образа будут соответствовать выделенные полные подграфы (K_1, K_2, ...).
2. Строить начинаем с вершин, по очереди с наибольшего полного подграфа, который удалось выделить в исходном графе.
3. У каждой вершины образа будут смежные ребра, соответствующие номерам вершин в данном полном подграфе, выделенном в исследуемом графе.

В результате ребра образа, соответствующие тем вершинам исследуемого графа, которые вошли в разбиение дважды (например, в подграфы K_3 и K_4), будут иметь инцидентные вершины K_3 и K_4. Если же вершина исследуемого графа вошла в разбиение один раз, то при построении образа соответствующее ребро изначально не будет иметь второй инцидентной вершины, и ее нужно будет нарисовать дополнительно.

Задача 6.14. Проверить, обладает ли граф (рис. 6.42, *а*) свойством реберности. Если да, найти его образ.

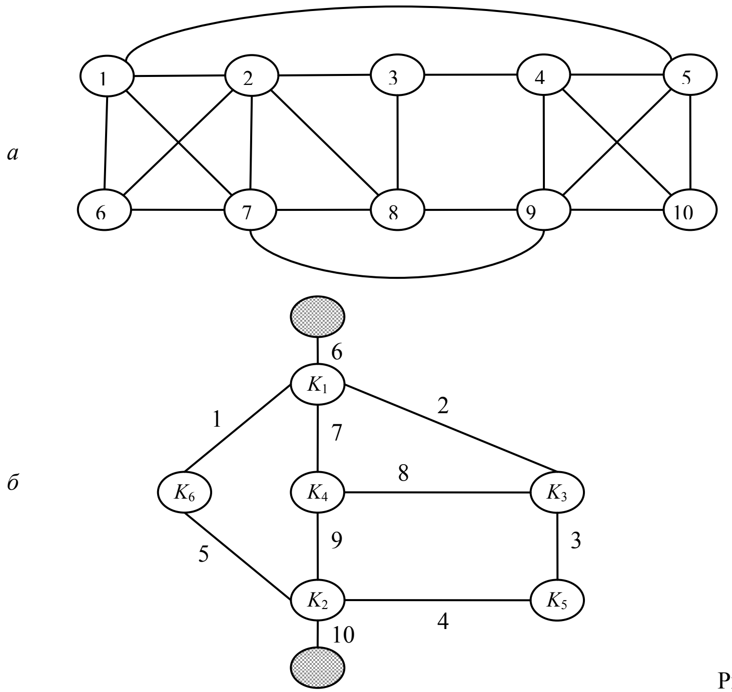


Рис. 6.42

Решение. Граф реберный тогда и только тогда, когда он разложим по аддитивной операции объединения на полные подграфы так, чтобы каждая вершина входила в них не более двух раз. Данный граф можно разложить на такие полный подграфы: K_1={1,2,6,7}, K_2={4,5,9,10}, K_3={2,3,8}, K_4={7,8,9}, K_5={3,4}, K_6={1,5}.

При этом видно, что все вершины кроме 6-й и 10-й, вошли в этот список по два раза, а 6-я и 10-я – только по одному. Это означает, что граф реберный и у него существует образ. Построим его.

Каждой вершине соответствует полный подграф, значит, изначально будет построено 6 вершин. Из вершин K_1 и K_2 будет выходить по 4 ребра, пока они не имеют совпадений. Зато при построении вершины K_3 ребро 2 строить не следует, оно уже присутствует в графе и инцидентно вершине K_1.Продолжая далее, получим образ исходного графа (рис. 6.42, *б*). Как и следовало ожидать, после построения ребра 6 и 10 нуждаются в добавлении замыкающих вершин (заштрихованы), так как в исходном графе при разложении на полные подграфы они входили только по одному разу.

6.8.2. Изоморфизм графов

Изоморфные графы – это графы, которые имеют одинаковое число вершин и одинаковое число ребер, причем для вершин графов можно ввести одинаковые обозначения таким образом, что неупорядоченные пары вершин, обозначающие ребра, у изоморфных графов будут одинаковы.

Иными словами, графы называются ***изоморфными***, если существует такая нумерация вершин в этих графах, что они имеют одну и ту же матрицу смежности (фактически изоморфные графы – это одинаковые графы, которые отличаются только другим *изображением*) (рис. 6.43). Тогда взаимно однозначное отображение множества вершин графа G_1 на множество вершин графа G_2, сохраняющее смежность, называют ***изоморфизмом.***

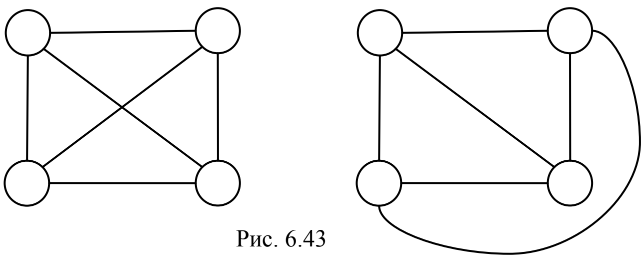


Рис. 6.43

Ясно, что необходимым условием изоморфизма являются: $|V(G)|=|V(H)|$ и $|U(G)|=|U(H)|$.

Изоморфные графы естественно отождествлять, т.е. считать совпадающими (их можно изобразить одним рисунком). Они могли бы различаться конкретной природой своих элементов, но именно это игнорируется при введении понятия «граф».

Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным. Для изоморфизма двух n-вершинных графов само определение этого отношения дает теоретически безукоризненный способ проверки: надо просмотреть все $n!$ взаимно однозначных соответствий между множествами вершин и установить, совмещаются ли полностью ребра графа хотя бы при одном соответствии. Однако даже весьма грубая оценка показывает, что такое решение задачи «в лоб» практически непригодно в силу слишком большого объема вычислений уже при n больше 20.

Подобная ситуация, естественно, толкнула многих математиков на классический путь: попытаться найти такой инвариант (число или систему чисел), который бы, с одной стороны, легко вычислялся по заданному графу (и по возможности имел наглядный смысл), а с другой – обладал свойством полноты, т.е. определял граф однозначно с точностью до изоморфизма.

Математическая теория графов интересуется такими свойствами графов, которые инвариантны относительно изоморфизма. Примеры таких инвариантов графа G известны: это количество вершин $n(G)$, количество ребер $m(G)$ и вектор степеней $s(G)=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, который, в частности, дает числовые инварианты минимальной и максимальной степени вершин графа: min_$st(v_i)$ и max_$st(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приведенное в списке инвариантов новое понятие вектора степеней определяется следующим образом.

Пусть $G=(V,U)$ – n-вершинный граф, а $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – степени его вершин, выписанные в порядке неубывания: $s_1 \geq s_2 \geq\ldots\geq s_n$. Упорядоченную систему $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ будем называть ***вектором степеней графа*** G и кратко обозначать $s(G)$. Вместо самого вектора степеней часто пользуются его обращением $t(G)=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $t_i=s_{n-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – те же степени вершин, но расположенные в порядке невозрастания: $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$

Из сказанного выше следует, что для изоморфизма графов G и G' необходимо совпадение векторов их степеней: $s(G)=s(G')$. Однако достаточным это условие не является, так как, например, на рис. 6.44 мы видим две пары неизоморфных графов с одинаковыми векторами: $s = (1, 2, 2, 2, 2, 3)$.

Не будучи идеальным средством распознавания изоморфизма, вектор степеней может, тем не менее, во многих случаях оказать существенную помощь. Во-первых, если $s(G) \neq s(G')$, то отсюда сразу следует *неизоморфность* графов G и G'. Во-вторых, если $s(G)=s(G')$, то для проверки графов G и G' на изоморфизм требуется перебор не всех $n!$ соответствий между вершинами, а лишь тех, при которых сопоставляются вершины одинаковой степени.

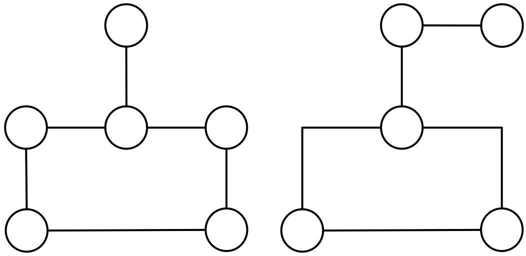


Рис. 6.44

Однако имеются случаи, когда при выяснении изоморфизма графов их векторы степеней практически бесполезны: речь идет об регулярных (однородных) графах, в которых степень всех вершин одна и та же. Например, граф, степени всех вершин которого равны трем (рис. 6.45).

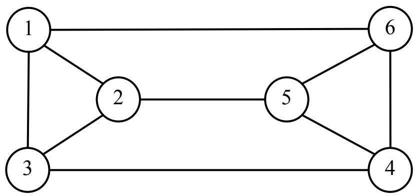


Рис. 6.45

Противоположный случай представляют графы, определяемые однозначно с точностью до изоморфизма своим вектором степеней (или, что равносильно, его обращением) и называемые *униграфами*.

6.8.3. Гомеоморфизм графов

Два графа ***гомеоморфны*** (или тождественны с точностью до вершин степени 2), если они оба могут быть получены из одного и того же графа «включением» в его ребра новых вершин степени 2. Если ребро графа изображено в виде линии, то можно на ней поставить точку и считать ее новой вершиной степени 2. Формально эта операция определяется следующим образом.

Пусть G – любой граф и (a,b) – его ребро. ***Операцией подразделения ребра*** (a,b) называется удаление из графа G ребра (a,b), добавление новой вершины c и добавление двух новых ребер (a,c) и (c,b).

Граф G_1 называется ***подразделением*** графа G, если G_1 может быть получен из G несколькими подразделениями ребер.

Графы G_1 и G_2 называются ***гомеоморфными***, если существуют их подразделения, которые изоморфны.

Изображенные на рис. 6.46 графы гомеомофны, и то же самое можно сказать о любых двух циклических графах.

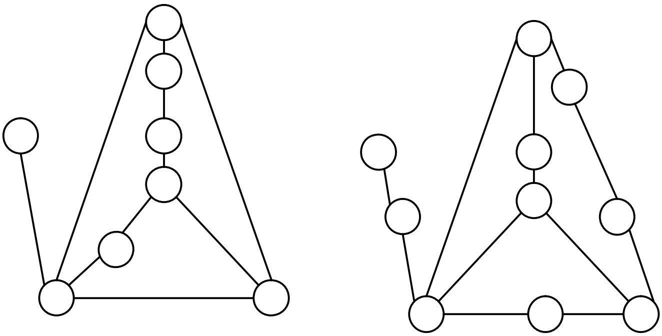


Рис. 6.46

6.8.4. Автоморфизм графов

Автоморфизмом графа G называется изоморфизм графа G на себя, при этом всякий граф G имеет тождественный (или тривиальный) автоморфизм I, такой, что $I(x)=x$ для каждого ребра x и каждой вершины x из G.

Автоморфизм графа есть отображение множества вершин на себя, сохраняющее смежность. Множество таких автоморфизмов, обозначаемое $\Gamma(G)$, образует группу, называемую группой графа G, или ***группой автоморфизмов*** графа G. Таким образом, элементы группы $\Gamma(G)$ являются подстановками, действующими на множестве вершин графа.

На рис. 6.47 представлен исходный граф и его автоморфизм.

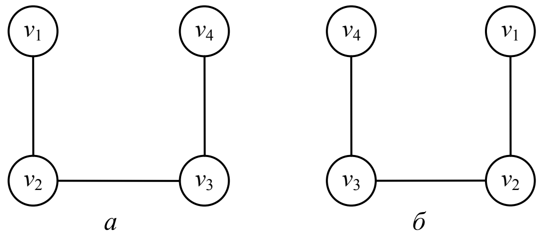


Рис. 6.47

Для подстановки в теории графов принята запись

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – те же числа 1, 2,..., n, но записанные, возможно, в каком-либо ином порядке.

Таким образом, вторая строка подстановки образует перестановку $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ из чисел 1, 2,..., n. Различных подстановок вообще из n элементов существует столько же, сколько и перестановок, т.е. $n! = 1\times2\times3\times\dots\times n$. Однако при построении автоморфизмов требуется сохранение степеней вершин и смежности между ними, что в большинстве случаев существенно сокращает их количество.

Наибольшее количество автоморфизмов в группе автоморфизмов существует у полных и пустых графов – их на n вершинах в обоих случаях будет $n!$.

Подстановка, оставляющая на месте все элементы, называется ***начальной*** (***единичной***, ***тождественной***).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

Ее краткая запись $\alpha_0=(1)(2)\dots(n)$.

Для каждой подстановки A существует обратная, т. е. такая, которая переводит φ_i в i, она обозначается через A^{-1}. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Результат последовательного применения двух подстановок A и B снова будет некоторой подстановкой C: если A переводит i в φ_i, а B переводит φ_i в ψ_i, то C переводит i в ψ_i. Подстановка C называется произведением подстановок A и B, что записывается так: $C = AB$. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении подстановок не выполняется закон коммутативности, т.е., вообще говоря, $AB \neq BA$, как в том же примере

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $IA = AI = A$, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативный закон).

Подстановка, переставляющая местами только два элемента i и j, называется ***транспозицией***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2,4).$$

Подстановка, циклически переставляющая данную группу элементов, а остальные элементы оставляющая на месте, называется ***циклом***. Число переставляемых элементов называют ***длиной цикла***. Например, подстановка A есть цикл длины 4: она переводит 1 в

3, 3 в 5, 5 в 4, 4 в 1, при этом 2 остается на своем месте. Коротко это записывается так:

$$A = (1, 3, 5, 4)(2).$$

Рассмотрим граф G, изображенный на рис. 6.48.

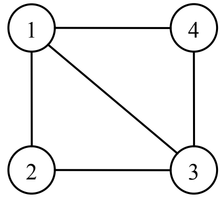


Рис. 6.48

Его четыре вершины составляют множество X целых чисел 1, 2, 3, 4. Заметим, что следующий список подстановок:

$\alpha_0 = (1)(2)(3)(4)$, $\alpha_1 = (1)(3)(2,4)$,

$\alpha_2 = (1,3)(2)(4)$, $\alpha_3 = (1,3)(2,4)$

включает все подстановки множества X, сохраняющие отношение смежности в графе G. Например, вершины 1 и 4 смежны в G. Подстановка (1,3)(2)(4) преобразует вершины 1 и 4 в вершины 3 и 4, и эти образы 3 и 4, также являются смежными. Таким образом, подстановка (1,3)(2)(4) сохраняет смежность вершин 1 и 4.

В случае если в короткой записи присутствуют только циклы длиной 2, обратная подстановка строится всегда очень просто, так как совпадает с исходной, например, для α_1 обратной является $\alpha_1^{-1} =$ $=(1)(3)(2,4)$, а для $\alpha_3 = (1,3)(2,4)$ обратной является $\alpha_3^{-1} = (1,3)(2,4)$.

На практике, если граф задан своим изображением, поиск всех автоморфизмов практически осуществляется путем поиска возможных поворотов графа или его «частей» вокруг осей симметрии.

Задача 6.15. Найти группу автоморфизмов данного графа (рис. 6.49) и для каждой подстановки привести обратную.

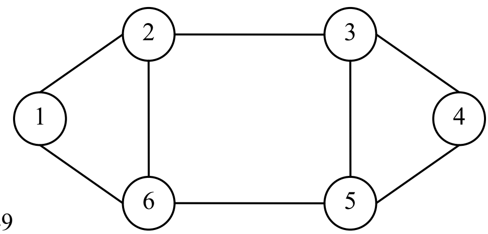


Рис. 6.49

Решение. В данном графе просматривается несколько условных осей симметрии, относительно которых можно поворачивать граф.

Начальная подстановка:

$$\alpha_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6).$$

Если перевернуть граф относительно горизонтальной оси, получим подстановку (рис.6.50):

$$\alpha_1=(1)(2,6)(3,5)(4).$$

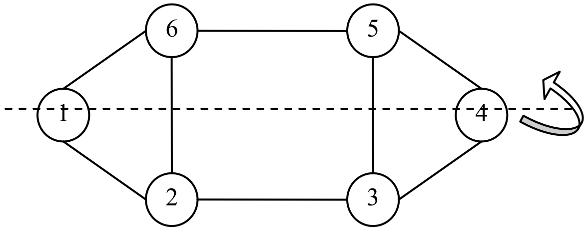


Рис. 6.50

Если перевернуть граф относительно вертикальной оси, получим подстановку (рис.6.51):

$$\alpha_2=(2,3)(6,5)(1,4).$$

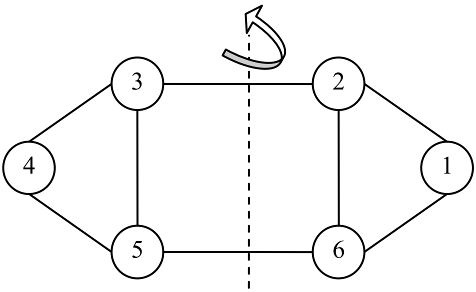


Рис. 6.51

Если сделать эти повороты по очереди, то получим четвертую и последнюю в данном случае подстановку (рис.6.52):

$$\alpha_3=(1,4)(2,5)(3,6).$$

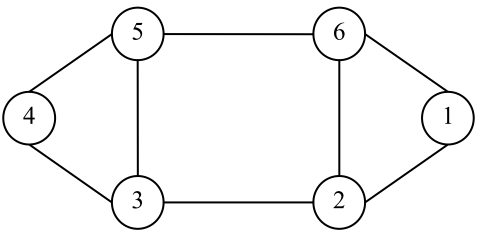


Рис. 6.52

Задача 6.16. Найти все графы, группа подстановок которых содержит подстановку $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

Решение. Такого рода задачи решаются переборным методом, причем перебор удобнее всего осуществлять по степеням вершин.

Поскольку, как видно из данной подстановки, в графе пять вершин, максимальная степень вершины равна 4, минимальная в случае пустого графа равна 0. Кроме того, поскольку в цикле участвуют все пять вершин, это значит, что у всех вершин степени одинаковые. Переберем все степени от 0 до 4.

Пусть степень всех вершин равна 0. Эта ситуация наблюдается в пустом графе на пяти вершинах, и он нам по своим свойствам подходит. Итак, первый найденный граф – P_5 (отметим, что конкретная нумерация вершин в данном случае не важна).

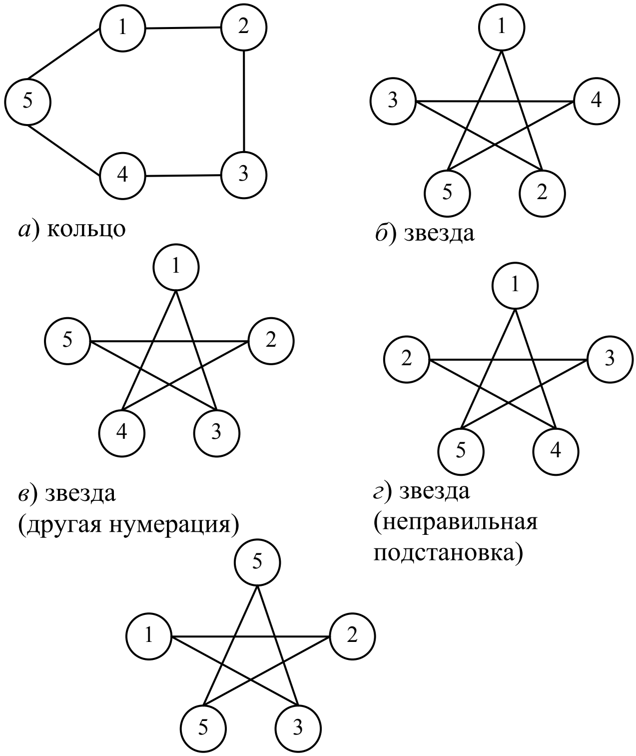
Пусть степень всех вершин равна 1. Значит, суммарная степень вершин графа равна 5, это число нечетное, следовательно, такого графа не существует.

Пусть степень всех вершин равна 2. Эта ситуация наблюдается в простом цикле на пяти вершинах, по своим свойствам он нам подходит, только важно правильно пронумеровать вершины. Графически можно изобразить найденное решение в виде кольца (рис. 6.53, *а*) или звезды (рис. 6.53, *б*). Оба решения эквивалентны.

Обратите внимание на нумерацию вершин: она должна позволять осуществлять переход $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$. Например, вершины в звезде можно было пронумеровать иначе (рис 6.53, *в*), но ни в коем случае нельзя нарушать циклический порядок (рис. 6.53, *г*). В последнем случае перестановка (1,2,3,4,5) нарушит смежность вершин (рис. 6.53, *д*): в исходном графе вершина v_1 была смежна с v_4 и v_5, а после такой перестановки станет смежна с v_2 и v_3. Итак, второй найденный граф – простой цикл на 5 вершинах (с правильной нумерацией вершин).

Пусть степень всех вершин равна 3. Значит, суммарная степень вершин графа равна 15, следовательно, такого графа не существует.

Пусть степень всех вершин равна 4. Эта ситуация наблюдается в полном графе на пяти вершинах, и он нам по своим свойствам подходит (отметим, что нумерация вершин в данном случае не важна). Следовательно, найдено три возможных графа: P_5, $Ц_5$, K_5.



а) кольцо

б) звезда

в) звезда (другая нумерация)

г) звезда (неправильная подстановка)

д) результат подстановки к графу *г*)

Рис. 6.53

В более сложных случаях, когда заданная подстановка имеет вид, например $(v_1, v_2, v_3, v_4)(v_5)$, перебор необходимо производить по двум параметрам: изменять степень четырех вершин (v_1, v_2, v_3, v_4) от 0 до 4 и для каждого случая подбирать возможные значения степени вершины v_5.

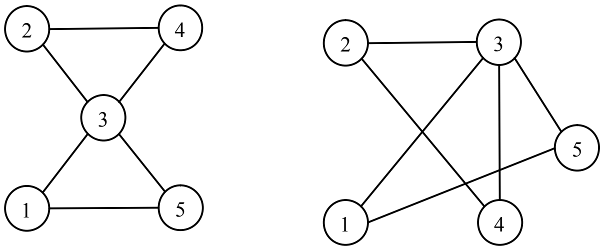
6.9. Планарность

6.9.1. Основные определения

Плоским графом называется граф, изображенный на плоскости так, что никакие два его ребра (или, вернее, представляющие их кривые) геометрически не пересекаются нигде, кроме инцидентной им обоим вершины.

Граф называется ***планарным***, если он изоморфен плоскому графу.

Таким образом, планарный граф можно изобразить на плоскости как плоский. На (рис. 6.54) изображены 2 изоморфных (одинаковых) графа, причем первый из них плоский, а второй является планарным.



а *б*

Рис. 6.54

Планарный граф можно определить еще так: граф *планарен*, если его можно уложить на плоскости. Рисунок графа, в котором никакие два его ребра не пересекаются, если не считать точками пересечения общие вершины, называют ***плоским представлением*** графа. Ясно, что плоское представление имеет только плоский граф. Наоборот, у всякого плоского графа непременно найдется плоское представление.

Плоские графы – это в том числе простые циклы, деревья (рис. 6.55), лес, а также граф, содержащий цикл, из вершин которого «выходят» деревья.

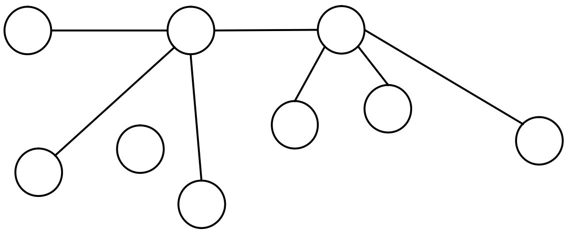


Рис. 6.55

Примером неплоского графа может служить полный граф с пятью вершинами (у него должно быть 10 ребер). Любые попытки начертить его плоское представление обернутся неудачей. Рассмотрим плоский граф G (рис. 6.56).

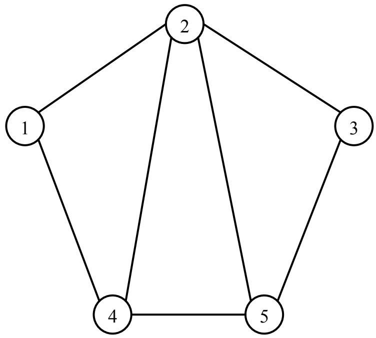


Рис. 6.56

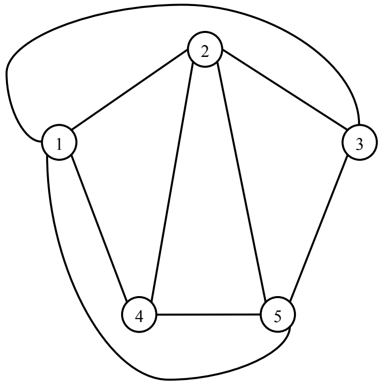


Рис. 6.57

Если добавить к графу на рис. 6.56 ребра (1,3) и (1,5), то полученный новый граф G тоже будет плоским (рис. 6.57).

К этому графу уже не удастся добавить ни одного ребра так, чтобы новый граф тоже был плоским.

6.9.2. *Критерии непланарности*

Можно ввести два условия, определяющие ***непланарность*** графа:

- достаточное условие – если граф содержит двудольный подграф $K_{3,3}$ или полный подграф K_5, то он является не планарным;
- необходимое условие – если граф не планарный, то он должен содержать больше четырех вершин, степень которых больше 3, или больше пяти вершин степени больше 2.

Введение понятия гомеоморфности графов позволяет установить следующий важный результат, известный как теорема Куратовского (точнее, как теорема Понтрягина – Куратовского, так как Л.С. Понтрягин доказал, но не опубликовал, эту теорему еще в

1927 году), которая дает необходимое и достаточное условие планарности графа.

Теорема 6.17 (Понтрягина–Куратовского). ***Для того чтобы граф G был планарным, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал ни одного подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.***

Подобный критерий может быть основан не на гомеоморфизме, а на понятии стягивания.

Элементарным стягиванием называется следующая процедура: берем ребро e (вместе с инцидентными ему вершинами, например, v_1 и v_2) и «стягиваем» его, то есть удаляем e и отождествляем v_1 и v_2. Полученная при этом вершина инцидентна тем ребрам (отличным от e), которым первоначально были инцидентны v_1 или v_2 (рис. 6.58).

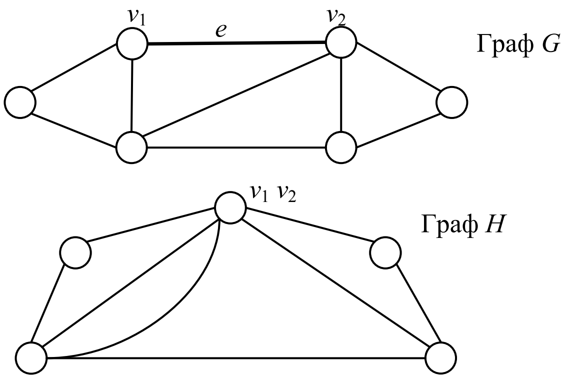


Рис. 6.58

Граф G называется ***стягиваемым*** к графу H, если H можно получить из G с помощью некоторой последовательности элементарных стягиваний (см. рис. 6.58).

Теперь теорема Понтрягина–Куратовского может быть сформулирована иначе.

Теорема 6.18. ***Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых в K_5 или $K_{3,3}$.***

Существует более общий подход к проблеме планарности, основанный на понятии геометрической реализации. Действительно, окружающий нас мир, как минимум, имеет три измерения, существуют разные геометрии, так что ограничиваться при построении теорий плоскостью довольно неосмотрительно.

Введем более общее определение.

Пусть задан неориентированный граф $G=(V,U)$. Пусть каждой вершине v_i из V сопоставлена точка a_i в некотором евклидовом пространстве, причем $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Пусть каждому ребру $u = (v_i, v_j)$ из U сопоставлена непрерывная кривая L, соединяющая точки a_i и a_j и не проходящая через другие точки a_k. Тогда если все кривые, сопоставленные ребрам графа, не имеют общих точек, кроме концевых, то это множество точек и кривых называется ***геометрической реализацией*** графа G.

Теорема 6.19. ***Каждый конечный граф G можно реализовать в трехмерном евклидовом пространстве (без пересечения ребер).***

Таким образом, можно иначе сформулировать определение планарности. Граф называется ***планарным***, если существует его планарная реализация, то есть геометрическая реализация на плоскости (без пересечения ребер).

Отсюда переходим к чрезвычайно важному понятию граней. Если имеется планарная реализация графа на плоскости, и мы разрежем плоскость по всем линиям этой планарной реализации, то плоскость распадется на части, которые называются ***гранями*** этой планарной реализации (одна из граней бесконечна, она называется ***внешней гранью***).

Так, граф K_4 имеет четыре грани (три внутренних и одну внешнюю) (рис 6.59). В свою очередь, граф куба (рис. 6.60) имеет шесть граней (пять внутренних и одну внешнюю).

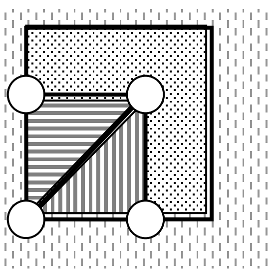
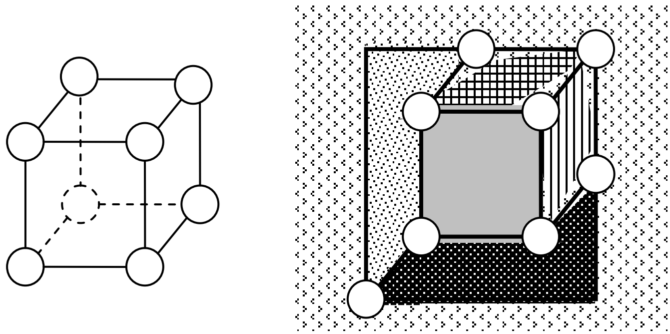


Рис. 6.59



Классическая реализация   Плоская реализация

Рис. 6.60

Внешнюю грань имеет всякий планарный граф, даже если в нем нет циклов.

Теорема 6.20 (формула Эйлера). ***Для любой планарной реализации связного планарного графа $G = (V,U)$ с n вершинами, m ребрами и r гранями выполняется равенство: $n - m + r = 2$.***

Следствие 1. Формула Эйлера справедлива и для геометрической реализации связных графов на сфере.

Следствие 2. Для любого выпуклого многогранника справедливо равенство $n - m + r = 2$, где n – число вершин, m – число ребер, r – число граней.

Соотношение:

$$n - m + r = 2 \tag{6.5}$$

было найдено Эйлером в 1736 г. при изучении свойств выпуклых многогранников. Это соотношение справедливо и для других поверхностей с точностью до коэффициента, называемого эйлеровой характеристикой. Это инвариант для поверхности (для плоскости или сферы) равен двум.

Теорема 6.21. ***Если в связном планарном графе нет циклов длины меньше k ($k \geq 3$), то $m \leq k\,(n - 2)/(k - 2)$, где $n = |V|$, $m = |U|$.***

Теорема 6.22. ***Для любого связного планарного графа без петель и кратных ребер выполняется неравенство: $m \leq 3(n - 2)$, где $n=|V|$, $m=|U|$.***

Таким образом, поскольку каждая грань ограничена не более чем тремя ребрами, что для плоского графа верно следующее соотношение:

$$m \leq 3n - 6. \tag{6.6}$$

Это означает, что при большем числе ребер граф заведомо непланарен (обратное утверждение, кстати, неверно). Отсюда следует, что в планарном графе всегда можно найти вершину степени не более 5.

6.10. Построение графов

6.10.1. Преобразование прилагательных в числительные

К сожалению, не существует универсальной методики, позволяющей точно определить, может ли быть построен граф с заданными характеристиками. Зато существует набор критериев и признаков, по которым можно определить невозможность построения того или иного графа.

Первое, что необходимо сделать, внимательно прочитав условие задачи, это превратить все прилагательные, описывающие свойства графа, в числительные, попутно формируя представление о свойствах задаваемого графа.

В табл. 6.6 приведены такие соответствия, чаще всего встречающиеся в формулировке задач.

Таблица 6.6

Соответствие между описанием графа и свойствами

Прилагательное	Числительное	Что это значит
Связный	$k = 1$	В графе ровно одна компонента связности
Несвязный	$k \geq 2$	В графе более одной компоненты, его диаметр точно равен бесконечности
Регулярный	$St(v_i) = \text{const}$	Степени всех вершин равны
Регулярный степени y	$St(v_i) = y$	Степени всех вершин равны y. Если известно n (число вершин), то можно

Прилагательное	Числительное	Что это значит
		сразу рассчитать m (число ребер): $m = n \cdot y/2$ (n или y должно быть числом четным)
Ациклический	$\gamma = m - n + k = 0$	Цикломатическое число равно 0, в графе нет циклов, это – дерево или лес (в зависимости от связности), такие графы всегда можно раскрасить в два цвета. Если известны две переменные из трех (n,m,k), то с помощью формулы можно найти третью
Дерево (или ациклический связный граф)	$\gamma = m - n + 1 = 0$, откуда $m = n - 1$	Цикломатическое число равно 0, в графе нет циклов, это – дерево, такие графы всегда можно раскрасить в два цвета. Если известна одна переменная из двух (n или m), то с помощью формулы можно найти вторую
Бихроматический	$h = 2$	Хроматическое число графа равно 2, такие графы всегда можно раскрасить в два цвета, это – двудольные графы, графически это или ациклические графы, или графы у которых все циклы имеют четную длину

6.10.2. Оценка количества ребер на основе степеней вершин

Отметим, что в задачах на построение решение необходимо искать среди простых неориентированных графов (т.е. графов без кратных ребер и без петель).

Имея даже общие представления о графе, иногда можно судить о степенях его вершин.

1. В графе G сумма степеней всех его вершин – число четное, равное удвоенному числу ребер графа, так как каждое ребро участвует в этой сумме ровно два раза. Этот результат, известный еще двести лет назад Эйлеру, часто называют леммой о рукопожатиях.

Из нее следует, что если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно четно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях).

2. Число вершин с нечетной степенью у любого графа четно (это прямое следствие из п.1).

3. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geq 2$, всегда найдутся по меньшей мере две вершины с одинаковыми степенями (попробуйте самостоятельно доказать это совсем несложное утверждение).

4. Если в графе с вершинами $n > 2$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $(n - 1)$ (немного сложнее, но тоже вполне по силу для самостоятельного доказательства в самом начале ознакомления с теорией графов).

Теперь, когда получены все необходимые числительные, надо попробовать рассчитать недостающие характеристики графа. Иногда в условии приводятся степени всех или нескольких вершин. В этом случае на основе того факта, что каждое ребро графа добавляет к его суммарной степени вершин ровно 2, можно воспользоваться формулой $\sum St(v_i) = 2 \cdot m$, где m – количество вершин, а суммирование ведется по всем вершинам от 1 до n. Отсюда следует уже упоминаемый факт, что суммарная степень вершин должна быть числом четным.

Задача 6.17. Построить регулярный граф степени 5 на 11 вершинах или доказать невозможность такого построения.

Решение. Суммарная степень вершин равна $11 \cdot 5 = 55$, это нечетное число (количество ребер должно быть 55/2, а это число нецелое). Граф с указанными характеристиками построить нельзя.

Задача 6.18. Построить или доказать невозможность построения графа на 8 вершинах, у которого степень одной из вершин равна 5, у двух других равна 4, у двух равна 3, у одной равна 2 и у двух равна 1.

Решение. Суммарная степень вершин равна $1 \cdot 5+2 \cdot 4+2 \cdot 3+2+2 \cdot 1 = {}$ $=5+8+6+2+2 = 23$, это число нечетное (количество ребер должно быть 23/2, а это число нецелое). Граф с указанными характеристиками построить нельзя.

Задача 6.19. Построить или доказать невозможность построения графа на 9 вершинах, у которого степень одной из вершин равна 6, еще у одной 5, у двух равна 4, у одной 3, у двух равна 2 и у одной равна 1.

Решение. Суммарная степень вершин равна $6+5+2\cdot4+3+$ $+2\cdot2+1=27$, это число нечетное. Но в условии указана информация только о 8 вершинах, тогда как в графе их 9. Значит, у 9-й вершины должна быть обязательно нечетная степень. Можно построить графы, в которых степень 9-й вершины равна 1,3,5,7 (больше она быть не может, так как в графе на 9 вершинах максимальная степень вершины равна 8). Четыре графа с различными степенями 9-й вершины представлены на рис. 6.61 (вместо номеров вершин указаны их степени).

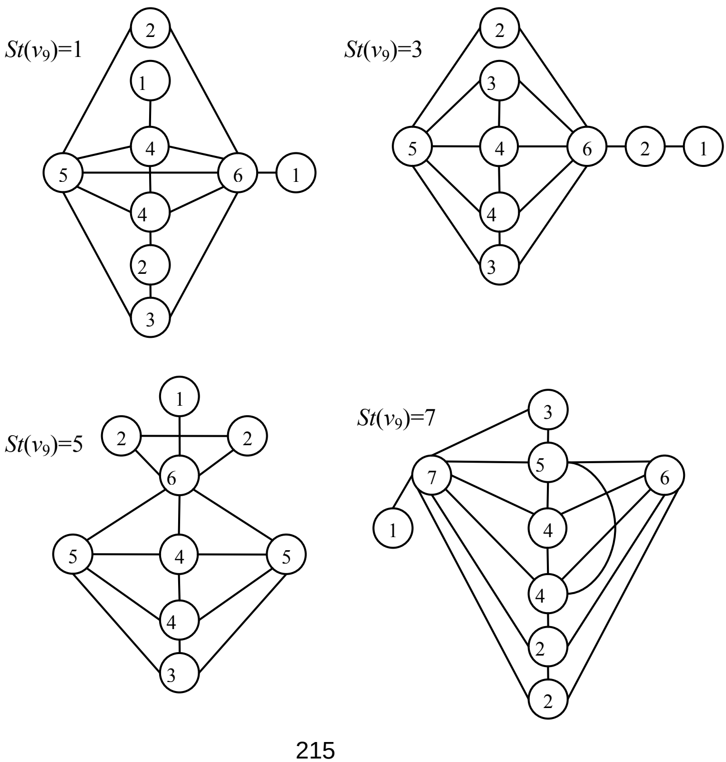


Рис. 6.61

Приведенная задача демонстрирует необходимость дополнительной проверки: следует убедиться, что информация дана про все вершины или обозначить как неизвестные переменные степени остальных вершин и решать задачу уже исходя из этого. Уменьшенная ровно в 2 раза суммарная степень однозначно определяет количество ребер в графе.

Итак, первое условие – четность суммарной степени вершин графа. Далее можно попробовать проверить выполнение ограничений на минимальное и максимальное число ребер в графе.

6.10.3. Оценка количества ребер сверху и снизу

Оценка количества ребер сверху и снизу проводится на основе нескольких фактов.

1. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин, полный граф на n вершинах всегда является регулярным графом степени $(n - 1)$, суммарная степень его вершин равна $n(n + 1)$, а значит, количество ребер в полном графе равно $n(n+1)/2$. Это и есть ограничение количества ребер сверху – построить больше на n вершинах нельзя. Например, у графа на 7 вершинах максимально может быть 21 ребро.
2. Максимальное число ребер на n вершинах можно построить именно в случае, когда граф связный. Иначе их будет еще меньше, например, у несвязного графа на n вершинах в лучшем случае количество ребер равно $(n–1)\cdot(n - 2)/2$ (лучший случай попытки разместить максимальное число ребер – это отделить одну изолированную вершину и построить полный граф на оставшихся $(n - 1)$ вершине). Например, у несвязного графа на 7 вершинах максимально может быть 15 ребер.
3. Оценка снизу чаще всего сводится к оценке количества ребер, необходимых для образования именно связного графа. Минимальная с точки зрения расхода ребер конфигурация состоит именно в построении дерева. В дереве на n вершинах содержится всегда $(n - 1)$ ребро.
4. Если помимо условия ацикличности поставлено также требование обеспечить несвязность графа, то ребер удастся разместить

еще меньше. Их будет столько же, сколько ребер в остовном лесе: на n вершинах при k компонентах связности ациклический граф содержит в общем случае $(n - k)$ ребер.

5. Если речь идет о двудольных графах, полезно помнить, что число ребер в полном двудольном графе с n_1 и n_2 вершинами в соответствующих долях равно $n_1 \cdot n_2$

В ряде случаев эти факты позволяют либо доказать невозможность построения графа с заданными характеристиками, либо помогают сформировать представление о свойствах графа.

Задача 6.20. Построить или обосновать невозможность построения несвязного графа на 12 вершинах, имеющего 56 ребер.

Решение. Несвязный граф состоит минимум из двух компонент, при этом наиболее экономичный в плане потенциально наибольшего количества ребер способ распределения вершин это 1 вершина в первой компоненте и остальные 11 – во второй. На 11 вершинах можно построить максимально 11·10/2=55 ребер, таким образом ,получим полный граф на 11 вершинах. Следовательно, графа, соответствующего условию задачи, не существует.

Задача 6.21. Построить или обосновать невозможность построения связного графа на 11 вершинах, имеющего следующее распределение степеней вершин: две вершины степени 3, три вершины степени 2, шесть вершин степени 1.

Решение. Суммарная степень всех вершин равна 2·3+3·2+6·1=18, следовательно, в графе должно быть 18/2=9 ребер. Однако для построения связного графа на 11 вершинах необходимо как минимум 10 ребер. Следовательно, графа, соответствующего условию задачи, не существует.

Задача 6.22. Построить или обосновать невозможность построения бихроматического графа на 13 вершинах, имеющего 41 ребро.

Решение. Бихроматическими являются двудольные графы, значит, имеющиеся 13 вершин нужно распределить на 2 доли так, чтобы удалось провести максимальное количество ребер. Самое выгодное разбиение – это соотношение по 50%, в данном случае это 6 и 7 вершин соответственно. При таком разбиении можно максимально построить 6·7=42 ребра. Нам нужно 41, значит, ответом является полный граф $K_{6,7}$, у которого удалили одно ребро. Граф, являющийся ответом на задачу 6.22, представлен на рис. 6.62.

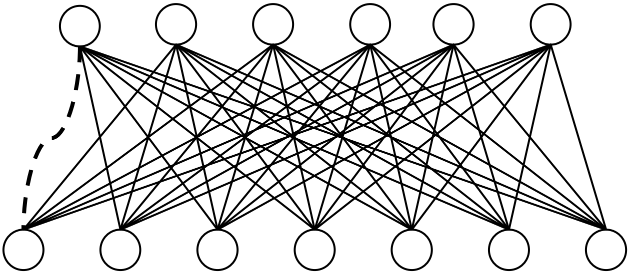


Рис. 6.62

6.10.4. Получение недостающих данных на основе формул

В ряде задач на построение дополнительную информацию о структуре графа можно получить на основе численных характеристик, таких, как цикломатическое число, ранг, хроматическое число графа, числа внешней и внутренней устойчивости и другие характеристики. Во всех этих случаях из приведенных в условии задачи данных желательно извлечь дополнительные сведения, которые могут помочь в непосредственном построении графа.

В качестве примера приведем несколько типовых задач.

Задача 6.23. Построить или обосновать невозможность построения связного графа на 7 вершинах, цикломатическое число которого равно 13.

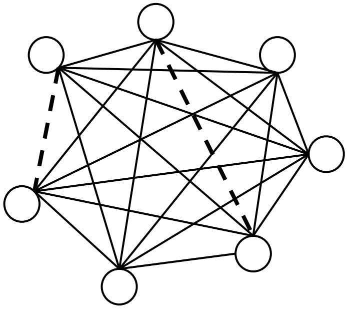


Рис. 6.63

Решение. В силу того, что граф связный, $k = 1$, по условию $n = 1$. Из формулы (5.1) получим: $13 = m - 7 + 1$, откуда $m = 19$. В графе на 7 вершинах максимально можно построить $7 \cdot 6/2 =$ $= 21$ ребро. Значит, искомый граф представляет собой полный граф на 7 вершинах, в котором удалено два ребра. Граф, являющийся ответом на задачу 6.23, представлен на рис. 6.63.

Задача 6.24. Построить или обосновать невозможность построения бихроматического связного графа, у которого ранг равен 12, а цикломатическое число равно 28.

Решение. Согласно формулам вычисления цикломатического числа и ранга получим:

$$\begin{cases} \chi(G) = n - k = 12; \\ \gamma(G) = m - n + k = m - (n - k) = 28. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим $28 = m - 12$, откуда $m = 40$. Поскольку граф связный, $k = 1$ и, значит, $n = 13$. Бихроматическими являются двудольные графы, значит, нужно разбить множество из 13 вершин на два подмножества так, чтобы удалось построить нужное количество ребер. Наиболее рациональный способ такого разбиения – пополам, что в данном случае соответствует 6 и 7 вершинам в каждой доле двудольного графа. При этом максимальное число ребер в полном двудольном графе $K_{6,7}$ равно $6 \cdot 7 = 42$, а значит 40 ребер можно построить на данном количестве вершин. Граф, являющийся ответом на задачу 6.24, представлен на рис. 6.64.

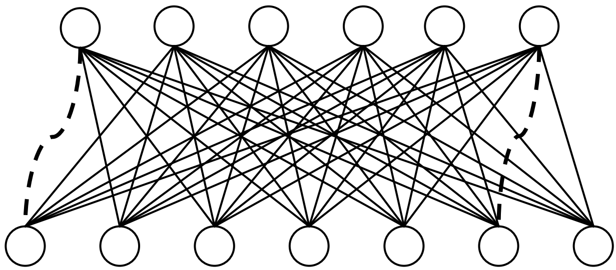


Рис. 6.64

Задача 6.25. Построить или обосновать невозможность построения двухкомпонентного графа на 18 вершинах, имеющего 15 ребер.

Решение. Исходя из условия задачи $k = 2$, $n = 18$, $m = 15$. Применим формулу нахождения цкломатического числа:

$$\gamma(G) = m - n + k = 15 - 18 + 2 = -1.$$

Однако цикломатическое число не может быть отрицательным. Следовательно, графа, соответствующего условию задачи, не существует.

Контрольные вопросы и задания

6.1. Дан ориентированный граф, заданный графическим способом (рис. 6.65). Задать этот граф тремя другими способами: с помощью матрицы смежности, с помощью матрицы инциденций, с помощью функционального представления.

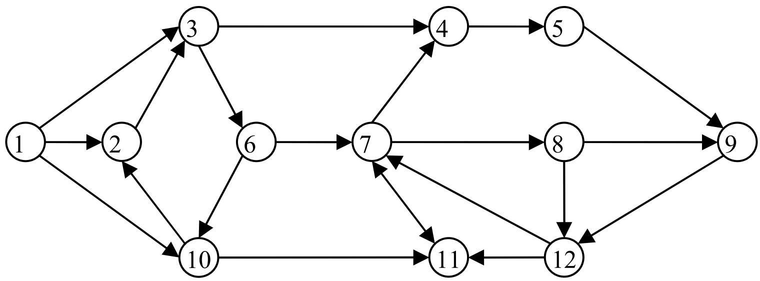


Рис. 6.65

6.2. Даны графы (рис. 6.66).

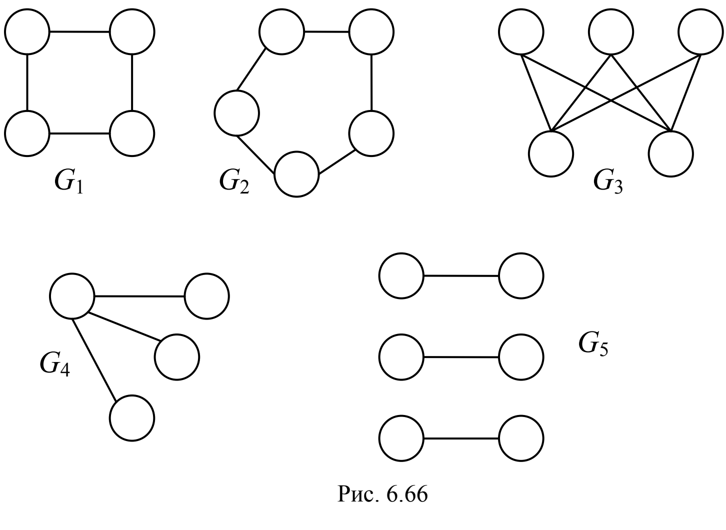


Рис. 6.66

Для заданных исходных графов определить число вершин, ребер и компонент связности, а также нарисовать графы, получаемые в результате следующих операций (нет общих вершин):

- $G_1 \cup G_3 \cup G_5$,
- $G_2 \cup G_5$,
- $G_3 \cup G_4$,
- $G_1 + G_3$,
- $G_4 + G_5$,
- $G_3 + G_5$,
- $G_3 + G_4$.

6.3. Сколько вершин, ребер и компонент связности имеет произведение графов G_1 и G_2 (рис. 6.67). Нарисовать полученный граф.

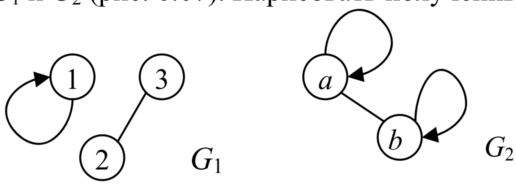


Рис. 6.67

6.4. Построить граф на 10 вершинах, имеющий следующее распределение степеней вершин:

- одна вершина степени 7,
- две вершины степени 6,
- две вершины степени 5,
- две вершины степени 4,
- две вершины степени 3,
- одна вершина степени 2,

или обосновать невозможность построения такого графа.

6.5. Построить граф на 11 вершинах, имеющий следующее распределение степеней вершин:

- одна вершина степени 7,
- две вершины степени 6,
- две вершины степени 5,
- две вершины степени 4,
- две вершины степени 3,
- одна вершина степени 2,

или обосновать невозможность построения такого графа.

6.6. Найти все компоненты сильной связности для заданного орграфа (рис. 6.68). Компоненты задать перечислением вершин, их образующих.

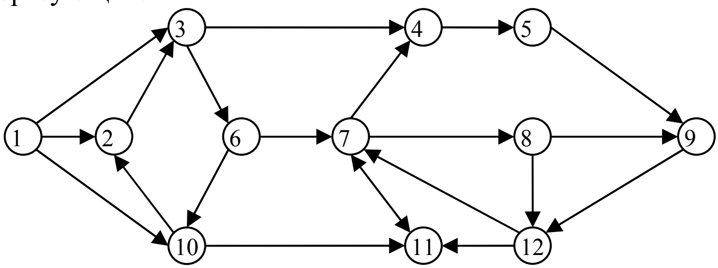


Рис. 6.68

6.7. Найти все компоненты сильной связности для заданного орграфа (рис. 6.69). Компоненты задать перечислением вершин, их образующих.

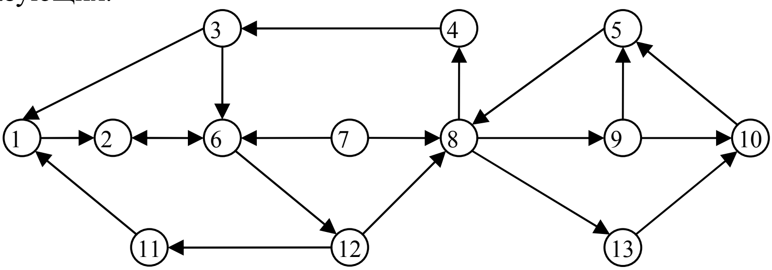


Рис. 6.69

6.8. Выделить остов, построить матрицу базисных циклов и найти цикломатическое число для данного графа (рис. 6.70).

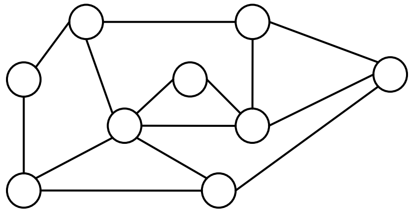


Рис. 6.70

6.9. Построить или обосновать невозможность построения графа на 8 вершинах, цикломатическое число которого равно 5, а ранг равен 4.

6.10. Для заданного графа (рис. 6.71) определить с достаточным обоснованием:

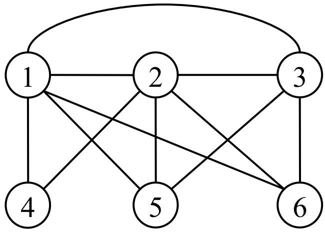


Рис. 6.71

- является ли граф Гамильтоновым и, если да, указать Гамильтонов цикл;
- является ли граф Эйлеровым и, если да, указать Эйлеров цикл. Если нет – указать с достаточным обоснованием минимальное количество и название ребер, удаление которых делает граф Эйлеровым.

6.11. Построить эйлеров, но не гамильтонов граф на 11 вершинах, число базисных циклов которого равно 6, про вершины которого известно, что 8 вершин имеют степень 2 и 2 вершины степень 4 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.12. Построить не эйлеров, но гамильтонов граф на 8 вершинах, число базисных циклов которого равно 6, про вершины которого известно, что 2 вершины имеют степень 4, а степени остальных вершин одинаковы или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.13. Построить граф, являющийся одновременно эйлеровым и гамильтоновым, у которого ребер в два раза больше чем вершин, а цикломатическое число равно 6 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.14. Проверить, существует ли Гамильтонов граф среди связных графов на 21 вершине с 37 ребрами, причем 15 вершин имеют степень 4, 4 вершины – степень 3. Если да – построить его, если нет – дать обоснование его отсутствия.

6.15. Проверить, существует ли Эйлеров граф среди связных графов на 15 вершинах с 26 ребрами, причем 6 вершин имеют степень 6, 7 вершин – степень 2. Если да – построить его, если нет – дать обоснование его отсутствия.

6.16. Для заданного графа (рис. 6.72) указать любые две вершины, расстояние между которыми максимально. Указать значение этого расстояния.

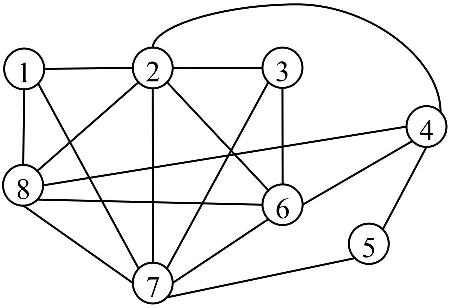


Рис. 6.72

6.17. Определить все возможные значения диаметра ациклических графов, имеющих 20 вершин и не более 19 ребер.

6.18. Вычислить диаметр графа $K_{13,14}$ – полного двудольного графа.

6.19. Для данного графа (рис. 6.73) найти:

- все пустые подграфы и вершинное число независимости (число внутренней устойчивости) ε_0;

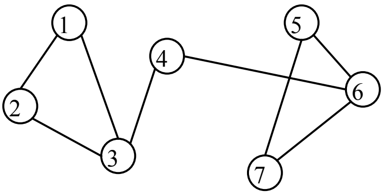


Рис. 6.73

- все внешне устойчивые множества ребер и реберное число внешней устойчивости β_1;
- вершинное число внешней устойчивости β_0;
- реберное число независимости ε_1;

6.20. Для графа, заданного матрицей смежности, указать все пустые подграфы, определить число внутренней и внешней устойчивости.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1	1					1	1
2	1		1	1					1
3	1	1		1	1				
4		1	1		1	1			
5			1	1		1			
6				1	1		1	1	
7						1		1	1
8	1					1	1		1
9	1	1					1	1	

6.21. Не проводя раскраски, найти точное значение хроматического числа данного графа (рис. 6.74).

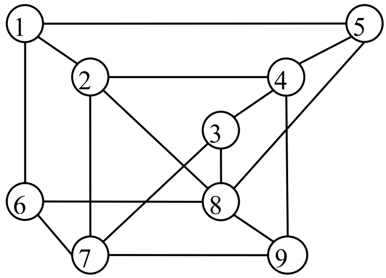


Рис. 6.74

6.22. Определить с достаточным обоснованием, чему может быть равно хроматическое число (указать точную цифру или возможный диапазон значений) связного графа на 92 вершинах, цикломатическое число которого равно двум.

6.23. Определить с достаточным обоснованием, чему может быть равно хроматическое число (указать точную цифру или возможный диапазон значений) связного графа на 7 вершинах, имеющего 19 ребер.

6.24. Определить с достаточным обоснованием, чему может быть равно хроматическое число (указать точную цифру или возможный диапазон значений) связного двудольного графа на 12 вершинах с долями, имеющими нечетное число вершин.

6.25. Определить все возможные значения хроматического числа графов на 17 вершинах, цикломатическое число которых не превосходит 2.

6.26. Определить, является ли граф двудольным и если да, построить его двудольное представление (рис. 6.75).

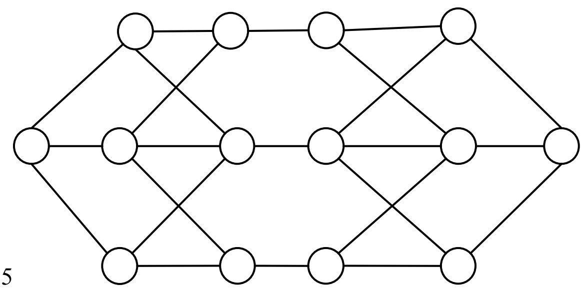


Рис. 6.75

6.27. Определить, является ли граф (рис. 6.76) двудольным и если да, построить его двудольное представление.

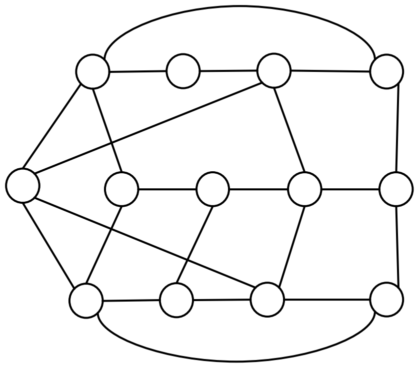


Рис. 6.76

6.28. Вычислить диаметр, цикломатическое и хроматическое числа графа ($\overline{G_1} + G_2$) $\cup$ $\overline{G_3}$, где G_1 – полный граф на 9 вершинах, у которого удалили 5 ребер, образующих простой цикл, G_2 – полный граф на 13 вершинах, у которого удалили 5 ребер имеющих одну общую вершину, G_3 – простой цикл на 21 вершине. При этом графы не имеют общих вершин.

6.29. Определить, является ли граф (рис. 6.77) двудольным, и если нет, найти минимальное число ребер, удаление которых делает его двудольным. Построить его двудольное представление.

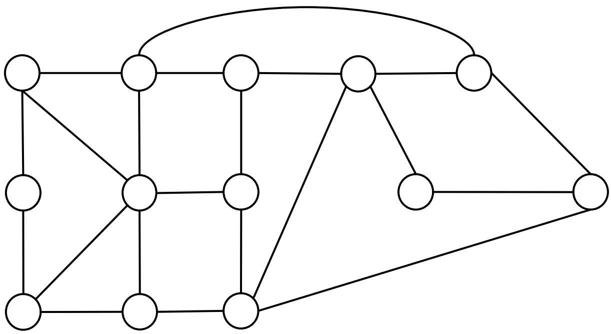


Рис. 6.77

6.30. Вычислить диаметр, цикломатическое и хроматическое числа графа ($G_1 \cup \overline{G_2}$) + G_3, где G_1 – полный двудольный граф с долями 7 и 9, у которого удалили одно ребро, G_2 – полный граф на 11 вершинах, у которого удалили 3 ребра, имеющих одну общую вершину, G_3 – простой цикл на 7 вершинах. При этом графы не имеют общих вершин.

6.31. Определить, является ли граф (рис. 6.78) двудольным, и если нет, найти минимальное число ребер, удаление которых делает его двудольным. Построить его двудольное представление.

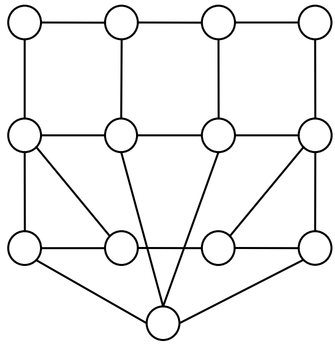


Рис. 6.78

6.32. Проверить, обладает ли граф (рис. 6.79) свойством реберности. Если да, найти его образ.

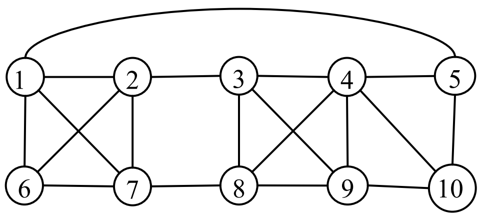


Рис. 6.79

6.33. Проверить, обладает ли граф (рис. 6.80) свойством реберности. Если да, найти его образ.

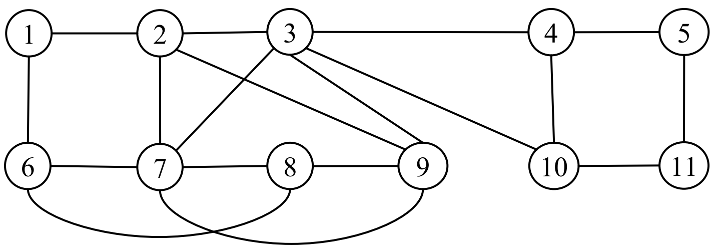


Рис. 6.80

6.34. Проверить, обладает ли граф (рис. 6.81) свойством реберности. Если да, найти его образ.

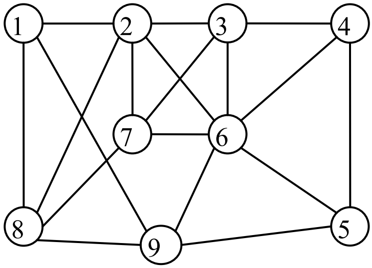


Рис. 6.81

6.35. Проверить, обладает ли граф (рис. 6.82) свойством реберности. Если да, найти его образ.

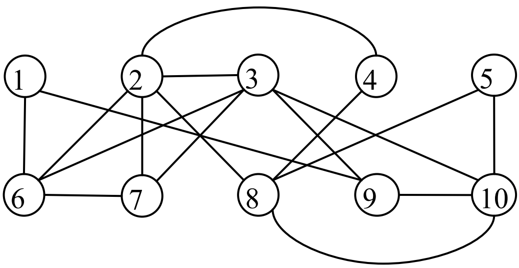


Рис. 6.82

6.36. Построить группу автоморфизмов для заданного графа (рис. 6.83). Для каждого автоморфизма (подстановки) указать обратный автоморфизм (обратную подстановку).

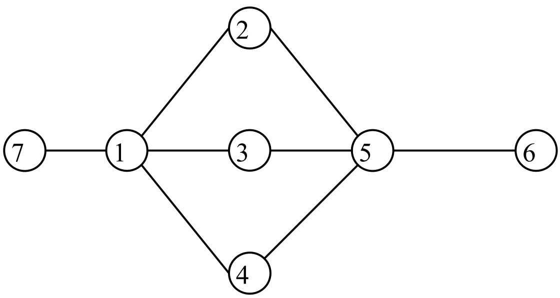


Рис. 6.82

6.37. Построить группу автоморфизмов для заданного графа (рис. 6.84). Для каждого автоморфизма (подстановки) указать обратный автоморфизм (обратную подстановку).

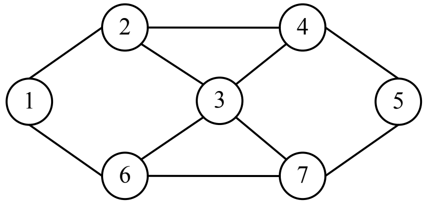


Рис. 6.84

6.38. Указать все графы на 4 вершинах, группа автоморфизмов которых содержит подстановку $(v_1,v_2,v_3)(v_4)$.

6.39. Указать все графы на 5 вершинах, группа автоморфизмов которых содержит подстановку $(v_1,v_2,v_3,v_4)(v_5)$.

6.40. Указать все графы на 6 вершинах, группа автоморфизмов которых содержит подстановку $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$.

6.41. Указать все графы на 6 вершинах, группа автоморфизмов которых содержит подстановку $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)(v_6)$.

6.42. Построить связный двудольный граф на 14 вершинах со следующим распределением степеней вершин: 1 вершина степени 4, 3 вершины степени 3, 3 вершины степени 2 и 7 вершин степени 1 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.43. Построить связный граф на 13 вершинах, цикломатическое число которого равно двум, а распределение степеней вершин следующее: 5 вершин степени 3, 1 вершины степени 2 и 6 вершин степени 1 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.44. Проверить, является ли граф, заданный матрицей смежности (рис. 6.85), планарным. Если да, то уложить его на плоскости.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1			1				
2	1					1	1	1	
3					1			1	1
4						1			1
5	1		1						
6		1		1					1
7		1						1	
8		1	1				1		
9			1	1		1			

Рис. 6.85

6.45. Проверить, является ли граф, заданный матрицей смежности (рис. 6.86), планарным. Если да, то уложить его на плоскости.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1				
2	1					1		
3	1				1		1	
4	1					1		
5			1			1		1
6		1		1	1		1	
7			1			1		1
8					1		1	

Рис. 6.86

6.46. Построить произвольный граф на 7 вершинах, цикломатическое число которого равно 16, а все вершины имеют степень 6 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.47. Построить связный ациклический граф на 15 вершинах, а распределение степеней вершин следующее: 2 вершины степени 4, 1 вершины степени 3, 1 вершина степени 2 и 11 вершин степени 1 или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.48. Построить или обосновать невозможность построения графа на 7 вершинах, который имеет две компоненты связности и цикломатическое число равное 4.

6.49. Построить произвольный связный граф на 13 вершинах, вершинная связность которого не менее 4, реберная связность рана 5, а минимальная степень вершин не более 4, или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

6.50. Построить произвольный двудольный связный граф на 12 вершинах, который имеет следующее распределение вершин: 1 вершина степени 4, 3 вершины степени 3, 3 вершины степени 2 и 5 вершин степени 1, или дать обоснованный ответ о невозможности построения такого графа.

Глава 7. Нечеткие модели дискретной математики

7.1. Введение в теорию нечетких моделей

Большинство задач управления сложными экономическими и техническими системами преследует цель достижения определенного эффекта в будущем времени. В этом случае управление протекает в условиях неопределенности относительно будущего состояния как самих объектов управления, так и их окружения. Данная книга ставит своей целью ознакомление с базовыми понятиями и методами учета неопределенности, которые включаются в себя следующие темы:

- нечеткие множества;
- нечеткие отношения;
- нечеткие числа;
- нечеткая логика;
- исчисление нечетких высказываний.

Эти темы в их классическом, «четком», представлении изучаются на младших курсах технических ВУЗов в рамках дисциплины «Дискретная математика», в этой связи при изложении материала предполагается, что элементарные определения и термины из области теории множеств, алгебры логики, исчисления высказываний и теории графов известны читателю.

7.1.1. Принятие решений в условиях неопределенности

Исторически первым способом учета неопределенности было изобретение ***вероятностей.*** Лица, специализирующиеся на азартных играх, были заинтересованы в оценке частот тех или иных исходов выпадения игральных костей или комбинаций карт, чтобы, реализуя серию из достаточного числа игр, придерживаться определенных фиксированных игровых стратегий ради достижения некоторого (пусть даже небольшого) выигрыша. При этом с самого начала было ясно, что исследованная частота тех или иных исходов не есть характеристика единичного события (одной игры), а полного их множества, позднее названного генеральной совокупностью событий.

Однако, начиная с 50-х годов XX века, в академической науке появились работы, ставящие под сомнение тотальную применимость вероятностной теории к учету неопределенности. Авторы этих работ закономерно отмечали, что классическая вероятность аксиоматически определена как характеристика генеральной совокупности статистически однородных случайных событий. В том случае, если статистической однородности нет, то применение классических вероятностей в анализе оказывается незаконным.

Реакцией на эти вполне обоснованные замечания стали фундаментальные работы, где обосновывалось введение неклассических вероятностей, не имеющих частотного смысла, а выражающих познавательную активность исследователя случайных процессов или лица, вынужденного принимать решения в условиях дефицита информации. Так появились субъективные (аксиологические) вероятности. При этом подавляющее большинство научных результатов из классической теории вероятностей перекочевало в теорию аксиологических вероятностей и, в частности, логико-вероятностные схемы дедуктивного вывода интегральных вероятностей сложных событий на основе перебора полного множества исходных гипотез о реализации простых событий, входящих составными частями в исследуемое сложное событие. Эти схемы были названы импликативными.

Однако появление неклассических вероятностей не было единственной реакцией на возникшую проблему. Одним из альтернативных решений стало зарождение теории нечетких множеств.

Теория нечетких множеств, впервые фундаментально описана в работах родившегося в Баку американского математика Лотфи А. Заде в 60-х годах XX века. Первоначальным замыслом этой теории было построение функционального соответствия между нечеткими лингвистическими описаниями (типа «высокий», «теплый» и т.д.) и специальными функциями, выражающими степень принадлежности значений измеряемых параметров (длины, температуры, веса и т.д.) упомянутым нечетким описаниям. Были введены так называемые лингвистические вероятности – вероятности, заданные не количественно, а при помощи нечетко-смысловой оценки.

Впоследствии диапазон применимости теории нечетких множеств существенно расширился. Сам Заде определил нечеткие множества как инструмент построения теории возможностей. С тех пор научные категории случайности и возможности, вероятности и ожидаемости получают теоретическое разграничение.

Следующим достижением теории нечетких множеств является введение в обиход так называемых нечетких чисел – нечетких подмножеств специализированного вида, соответствующих высказываниям типа «значение переменной примерно равно а». С их введением оказалось возможным прогнозировать будущие значения параметров, которые ожидаемо меняются в установленном расчетном диапазоне. Вводится набор операций над нечеткими числами, которые сводятся к алгебраическим операциям с обычными числами при задании определенного интервала достоверности (уровня принадлежности).

Прикладные результаты теории нечетких множеств не заставили себя ждать. Например, сегодня зарубежный рынок так называемых нечетких контроллеров (разновидность которых установлена даже в стиральных машинах широко рекламируемой марки LG) обладает емкостью в сотни миллионов долларов. Нечеткая логика как модель человеческих мыслительных процессов встроена в системы искусственного интеллекта и в автоматизированные средства поддержки принятия решений (в частности, в системы управления технологическими процессами).

Начиная с конца 70-х годов, методы теории нечетких множеств начинают применяться в экономике.

7.1.2. Основы нечетких моделей

Фундаментальный принцип современной науки – явление нельзя считать хорошо понятым до тех пор, пока оно не описано посредством количественных характеристик.

Научное знание представляет собой совокупность принципов и методов, необходимых для конструирования математических моделей различных систем. Развитие вычислительных машин эффективно сказывалось на развитии методов анализа механических систем, т.е. систем, поведение которых определяется законами механики, физики, химии и электромагнетизма. Однако этого нельзя сказать об анализе ***гуманистических систем***, т.е. систем, в которых участвует человек. Неэффективность вычислительных машин в изучении гуманистических систем является подтверждением так называемого ***принципа несовместимости*** – высокая точность системы несовместима с большой сложностью системы. Для систем, сложность которых превосходит некоторый пороговый уровень, точность и практический смысл становятся почти исключающими друг друга характеристиками. Возможной причиной неэффективности ЭВМ является неспособность машины охватить огромную сложность процессов человеческого мышления и принятия решений. Ведь одним из примечательных свойств человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации.

Элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности к классу» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. В основе процесса мышления человека лежит не традиционная двузначная или даже многозначная логика, а логика с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода.

Поэтому для действенного анализа гуманистических систем нужны подходы, для которых точность, строгость и математический формализм не являются чем-то необходимым и в которых используется методологическая схема, допускающая нечеткости и частичные истины. Одним из таких подходов является применение нечетких моделей.

Применение нечетких моделей целесообразно в случаях, когда существует недостаточность и неопределенность знаний об исследуемой системе, что может происходить по трем причинам:

1) получение информации: сложно, трудно, долго, дорого, невозможно;

2) источником основной информации являются экспертные данные или эвристические описания процессов функционирования системы;

3) информация о системе разнокачественная, или оценка параметров проводится с использованием разных шкал.

Достоинством применения нечетких моделей является прозрачность за счет возможности лингвистической интерпретации в виде нечетких продукционных правил. Недостатком можно считать трудности с априорным определением компонентов модели (нечетких высказываний, функций принадлежности для каждого значения лингвистических переменных, структуры базы нечетких правил и т.д.).

Теория нечетких моделей представляет собой обобщение и переосмысление важнейших направлений классической математики. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики, которая указала на возможности перехода от двух к произвольному числу значений истинности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием.

Кроме того, значительный вклад внесла теория вероятностей, которая, породив большое количество различных способов статистической обработки экспериментальных данных, открыла пути определения и интерпретации функции принадлежности. Наконец, у классической дискретной математики был взят инструментарий для построения моделей многомерных и многоуровневых систем, удобный при решении практических задач. Получившийся результат открыл действительно богатейшие возможности для анализа сложных систем в условиях неопределенности.

7.2. Нечеткие множества. Базовые определения

7.2.1. Базовые и нечеткие значения переменных

Система – совокупность абстрактных сущностей или объектных переменных. В качестве объектной переменной может выступать:

- одно значение из списка базовых значений;
- одно или несколько значений из списка нечетких значений.

В табл. 7.1 приведены примеры множеств базовых и нечетких значений для характеристики различных параметров.

При этом различные элементы из множества нечетких значений в различной степени могут быть применимы к конкретному элементу из множества базовых значений.

Таблица 7.1

Соответствие между базовыми и нечеткими значениями

Параметр	Множество базовых значений	Множество нечетких значений
Дата	$B_1 = \{\text{Пн, Вт, ..., Вс}\}$, $B_2 = \{01.01.07, 02.01.07, ..., 31.12.07\}$, $B_3 = \{\text{январь, февраль, ..., декабрь}\}$	$F_1 = \{\text{начало недели, середина недели, конец недели}\}$, $F_2 = \{\text{весна, лето, осень, зима}\}$, $F_3 = \{\text{рождественские праздники, майские праздники, ноябрьские праздники}\}$
Температура	$B_1 = \{0\text{ К}, ..., 100\text{ К}\}$, $B_2 = \{-10\ °\text{C}, ..., 20\ °\text{C}\}$	$F_1 = \{\text{холодная, горячая, теплая, обжигающая}\}$, $F_2 = \{\text{низкая, высокая}\}$, $F_3 = \{< 0, \text{около } 0, > 0\}$
Цена или зарплата	$B_1 = \{x : 500 \le x \le 15000\}$, $B_2 = \{x : 10000 \le x \le \le 120000\}$	$F_1 = \{\text{малая, средняя, большая}\}$, $F_2 = \{\text{дешевая, нормальная, высокая}\}$

Задача 7.1. Для каждого дня недели из множества базовых значений «Пн, Вт, Ср, Чт, Пт, Сб, Вс» выбрать одно или несколько значений из множества «начало недели, середина недели, конец недели».

Решение. Выбор значений будет характеризоваться различной степенью применимости (табл.7.2).

Рассмотрим понятие «середина недели». Это понятие не применимо для характеристики понедельника, пятницы, субботы и воскресенья.

Таблица 7.2

Отличия в применимости нечетких понятий для базовых значений

Базовое значение	Понятие			
	неприменимое	возможное	допустимое	подходящее
ПН	Середина недели, конец недели	Нет	Нет	Начало недели
ВТ	Конец недели	Середина недели	Начало недели	Нет
СР	Начало недели, конец недели	Нет	Нет	Середина недели
ЧТ	Начало недели	Конец недели	Середина недели	Нет
ПТ	Начало недели, середина недели	Нет	Конец недели	Нет
СБ	Начало недели, середина недели	Нет	Нет	Конец недели
ВС	Начало недели, середина недели	Нет	Нет	Конец недели

С некоторой натяжкой, но все-таки возможно применить его характеристики вторника, идеально оно подходит для характеристики среды и вполне допустимо для характеристики четверга (такое смещение связано с тем, что психологически у большинства работающего населения терминология начало/середина/конец относится именно к рабочей неделе) для понятие «конец недели», и вполне допустимо использовать понятие «середина недели». Если рассматривать понятие «середина недели» как множество, к которому в различной степени относятся элементы «Пн, Вт, Ср, Чт, Пт, Сб, Вс», и выразить эту степень применимости численно, то мы приходим к основном понятиям теории – нечеткому множеству и функции принадлежности.

7.2.2. Основные определения

Функция принадлежности нечёткого множества $\mu_A(x)$ задает степень принадлежности каждого элемента x пространства рассуждения U к данному нечёткому множеству A.

По сути, функция принадлежности нечёткого множества представляет собой обобщение характеристической функции классического множества, которая принимала значения 0 или 1. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ количественно градуирует принадлежность элементов фундаментального множества пространства рассуждения $x \in U$ нечёткому множеству *A*. Значение «0» означает, что элемент не включен в нечёткое множество, «1» – описывает полностью включенный элемент. Значения между «0» и «1» характеризуют нечётко включенные элементы.

Нечеткое множество A – совокупность пар <*x*, $\mu_A(x)$>, где *U* – область рассуждений, $\mu_A(x)$ – область принадлежности.

$$A = \{< x, \mu_A(x) > | \, x \in U\}.$$

***Носитель* (*основа*)** *S*(*A*) нечеткого множества *A* – четкое множество таких точек в *U*, для которых $\mu_A(x)$>0. Иными словами, $S(A) = \{x \,|\, x \in U, \ \mu_A(x) > 0\}$. Если $\mu_A(x)$=1 на всем *S*(*A*), то *A* – обычное четкое множество.

***Высота h*(*A*)** нечеткого множества *A* – величина супремума для значений функции принадлежности подмножества *A* области рассуждений *U*: *h*(*A*) = $\sup\limits_U \mu_A(x)$. Если $\sup\limits_U \mu_A(x)$=1, то множество *A* называется нормальным, иначе – субнормальным.

Нечеткое множество *A* называется ***пустым***, если $\forall x \in U : \mu_A(x) = 0$

Нечеткое множество *A* называется ***унимодальным***, если $\mu_A(x)$=1 только для единственного $x \in U$.

Непустое субнормальное множество *A* можно ***нормализовать*** по правилу:

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}.$$

Полученная функция принадлежности $\mu'_A(x)$ задает нормальное множество A'.

Точка перехода нечеткого множества *A* – элемент $x \in U : \mu_A(x) = 0{,}5$.

Четкое множество A*, ближайшее к нечеткому множеству A, задается при помощи функции принадлежности $\mu_{A*}(x)$

$$\mu_{A*}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } \mu_A(x)<0,5,\\ 1, \text{ если } \mu_A(x)>0,5,\\ 0 \text{ или } 1, \text{ если } \mu_A(x)=0,5.\end{cases}$$

Нечеткое множество A называется ***одноточечным***, если его носитель состоит из единственной точки, обозначается $A=\mu/x$. Следовательно, любое нечеткое множество A можно рассматривать как объединение составляющих его одноточечных множеств

$$A=\mu_1/x_1+...+\mu_n/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/x_i,$$

а при бесконечном числе элементов:

$$A=\int_U \mu_A(x)/x.$$

Нечеткие множества A и B ***равны,*** если значение функции принадлежности любого элемента $x\in U$ к множеству A равно значению функции принадлежности этого элемента к множеству B:

$$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x), \forall x\in U.$$

Нечеткое множество A ***содержится*** в нечетком множестве B (является ***подмножеством*** B), если значение функции принадлежности любого элемента $x\in U$ к множеству A меньше или равно значению функции принадлежности этого элемента к множеству B:

$$A\subset B \Leftrightarrow \mu_A(x)\le\mu_B(x), \forall x\in U.$$

В случае если область рассуждений представляет собой конечное счетное множество, нечеткое множество часто задается простым перечислением пар вида «степень принадлежности/элемент». Например, если $U=\{1,2,3,...,10\}$ (первые десять натуральных чисел), то нечеткое множество

$$A=\text{"несколько"}=0,5/3+0,8/4+1/5+1/6+0,8/7+0,5/8$$

имеет следующие характеристики: высота равна 1, носитель представляет собой множество $\{3,4,5,6,7,8\}$, точки перехода 3, 8.

Можно также описывать функцию принадлежности непрерывным образом.

Задача 7.2. Для области рассуждений U=[0,100], соответствующей возрасту человека, определить нечеткое множество «старый» и нечеткое множество «молодой».

Решение.

$$B = \text{"старый"} = \int_{50}^{100} \mu_{\text{старый}}(x)/x,$$

где $$\mu_{\text{старый}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le x \le 50, \\ \dfrac{1}{1+(\dfrac{5}{x\text{-}50})^2}, \text{ при } 50 \le x \le 100. \end{cases}$$

Точка перехода вычисляется из уравнения $\mu_{\text{старый}}(x) = 0,5$ и равна 55.

Для задания нечеткого множества «молодой» можно воспользоваться другим способом:

$$C = \text{"молодой"} = \int_{0}^{100} \mu_{\text{молодой}}(x)/x,$$

где $$\mu_{\text{молодой}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } 0 \le x \le 25, \\ \dfrac{1}{1+(\dfrac{x-25}{5})^2}, \text{ при } 25 \le x \le 100. \end{cases}$$

Точка перехода вычисляется из уравнения $\mu_{\text{молодой}}(x) = 0,5$ и равна 30. Высота равна 1.

Если область рассуждений – бесконечное множество, например множество целых неотрицательных чисел, U = {0, 1, 2, 3, …}, то нечеткое множество «малый» можно задать как

$$D = \text{«малый»} = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_D(x)/x,$$

где

$$\mu_D(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{10}\right)^2}.$$

Функция принадлежности, заданная подобных образом, дает значения, вполне согласующиеся со смыслом, вкладываемым в понятие «малый». Действительно, для точки x = 0 получим $\mu_A(x)=1$, для точки x = 1 значение функции принадлежности будет равно 0,99, для x = 10 уже только 0,5. Точка перехода этого множества равна 10, высота равна 1.

7.2.3. Типовые функции принадлежности

Для задания различных нечетких множеств могут использоваться самые разнообразные виды функций принадлежности. Выбор остается за человеком, который занимается моделированием поведения системы или иными исследованиями предметной области. Приведем некоторые типы функций.

Функция принадлежности класса s определяется как

$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 2\cdot(\dfrac{x-a}{c-a})^2, & a\le x\le b,\\ 1-2\cdot(\dfrac{x-c}{c-a})^2, & b\le x\le c,\\ 1, & x\ge c,\end{cases}$$

где $b=\dfrac{a+c}{2}$.

Функция принадлежности класса π определяется через функцию класса s:

$$\pi(x;a,b,c)=\begin{cases}s(x;c-b,c-\dfrac{b}{2},c), & x\le c,\\ 1-s(x;c,c+\dfrac{b}{2},c+b), & x\ge c,\end{cases}$$

где $b=\dfrac{a+c}{2}$.

Функция принадлежности класса γ определяется как

$$
\gamma(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}
$$

Функция принадлежности класса t определяется как

$$
t(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c,\\ 1, & x\ge c.\end{cases}
$$

Функция принадлежности класса L определяется как

$$
L(x;a,b)=\begin{cases}1, & x\le a,\\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x\ge c.\end{cases}
$$

Для некоторых предметных областей и практических задач достаточно подобрать соответствующие коэффициенты функций принадлежности этого вида, но зачастую они модернизируются более существенно или создаются специальные функции, которые точнее определяют принадлежность элемента к заданному нечеткому множеству. Вопросы выбора класса функции принадлежности и соответствующих коэффициентов являются наиболее спорными и сложными при нечетком моделировании, точных требований и критериев здесь в силу той же самой нечеткости понятий не существует. Вся ответственность лежит на исследователе.

7.3. Операции над нечеткими множествами

Над нечеткими множествами можно производить различные операции, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда множество является четким, операции переходили в обычные операции теории множеств, то есть операции над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие операции над обычными множествами. При этом обобщение может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо операции над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

7.3.1. Операция «дополнение»

Дополнение нечеткого множества A определяется как $\overline{A} = (x, \mu_{\overline{A}}(x))$, где $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

На рис 7.1 приведены непрерывные функции принадлежности, характеризующие множество A (тонкая линия) и его дополнение $\overline{A}$ (жирная линия).

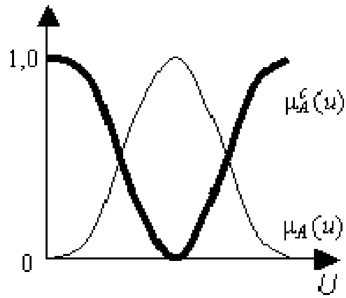


Рис. 7.1

Для нечеткого множества, заданного перечислением, дополнение строится еще проще.

Задача 7.3. Дано нечеткое множество A = «середина недели»:

$$A = \{(ПН,0),(ВТ,0.4),(СР,1),(ЧТ,0.9),(ПТ,0),(СБ,0),(ВС,0)\}.$$

Найти дополнение «не середина недели».

Решение.

$$\overline{A} = \{(ПН,1),(ВТ,0.6),(СР,0),(ЧТ,0.1),(ПТ,1),(СБ,1),(ВС,1)\}.$$

7.3.2. Операция «пересечение»

Для определения пересечения нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

- максиминная: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$,
- алгебраическая: $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$,
- ограниченная: $\mu_{A \cap B}(x) = \max\{0,\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$.

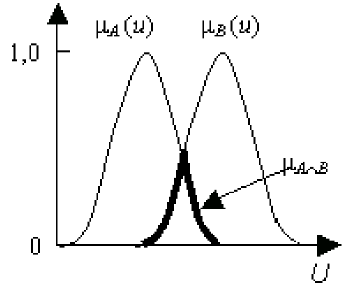


Рис. 7.2

Графическая интерпретация максиминного пересечения представлена на рис. 7.2 (исходные функции принадлежности – тонкие линии, результирующая – жирная линия).

Для нечетких множеств, заданных перечислением, построение пересечения строится аналитически.

Задача 7.4. Пусть даны два нечетких множества:

$$A = \begin{Bmatrix} (ПН,1.0),(ВТ,0.6),(СР,0.4),(ЧТ,0.2),(ПТ,0.0),(СБ,0.8), \\ (ВС,0.0) \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{Bmatrix} (ПН,0.7),(ВТ,0.2),(СР,1.0),(ЧТ,0.6),(ПТ,0.1),(СБ,0.0), \\ (ВС,0.0) \end{Bmatrix}.$$

Найти максиминное пересечение этих множеств.

Решение.

$$A \cap B = \begin{Bmatrix} (ПН,0.7),(ВТ,0.2),(СР,0.4),(ЧТ,0.2),(ПТ,0.0), \\ (СБ,0.0),(ВС,0.0) \end{Bmatrix}.$$

7.3.3. Операция «объединение»

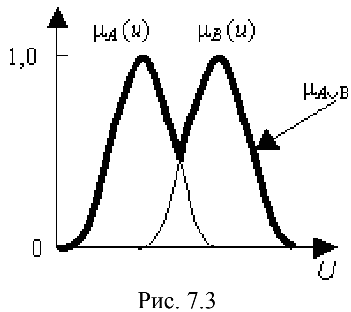


Рис. 7.3

Для определения ***объединения*** нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

- максиминная:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

- алгебраическая:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x),$$

- ограниченная:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\}.$$

Графическая интерпретация максиминного объединение представлена на рис. 7.3. (исходные функции принадлежности – тонкие линии, результирующая – жирная линия).

Задача 7.5. Пусть даны два нечетких множества:

$$A = \begin{Bmatrix} (ПН,1.0),(ВТ,0.6),(СР,0.4),(ЧТ,0.2),(ПТ,0.0), \\ (СБ,0.8),(ВС,0.0) \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{Bmatrix} (ПН,0.7),(ВТ,0.2),(СР,1.0),(ЧТ,0.6),(ПТ,0.1), \\ (СБ,0.0),(ВС,0.0) \end{Bmatrix}.$$

Найти их максиминное объединение.

Решение.

$$A \cup B = \begin{Bmatrix} (ПН,1.0),(ВТ,0.6),(СР,1.0),(ЧТ,0.6),(ПТ,0.1), \\ (СБ,0.8),(ВС,0.0) \end{Bmatrix}.$$

Важно отметить, что законы, которые выполняются в теории обычных (четких) множеств в теории нечетких множеств выполняются только частично.

7.3.4. Операция «включение»

Нечеткое множество *A* ***содержится*** в нечетком множестве *B* (является ***подмножеством*** *B*) если для всех элементов *U* значение функции принадлежности к множеству *A* меньше или равно значению функции принадлежности к множеству *B*:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x).$$

В случае, если условие $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ выполняется не для всех $x \in U$, говорят о степени включения нечеткого множества *A* в нечеткое множество *B*.

Степенью включения нечеткого множества *A* в нечеткое множество *B* называется величина η:

$$\eta(A \subset B) = 1 - \max_{x \in T}(\mu_A(x) - \mu_B(x)),$$

где $T = \{x \in U, \mu_A(x) > \mu_B(x)\}$. Степень включения может принимать любые значения из отрезка [0,1].

Задача 7.6. Пусть даны нечеткие множества

$A = \{<0.3/x_2>, <0.6/x_3>, <0.4/x_5>\}$ и

$B = \{<0.8/x_1>, <0.5/x_2>, <0.7/x_3>, <0.6/x_5>\}$,

определенные на множестве $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Определить степень включения множества *A* в множество *B* и степень включения множества *B* в множество *A*.

Решение. Степень включения множества A в множество B равна $T = \{0, \mu_A(x) > \mu_B(x)\}$, следовательно,

$$\eta(A \subset B) = 1 - \max_{x \in T}(\mu_A(x) - \mu_B(x)) = 1 - 0 = 1 .$$

Степень включения множества B в множество A равна

$$T = \{x_1, x_2, x_3, x_5; \mu_B(x) > \mu_A(x)\},$$

следовательно,

$$\eta(B \subset A) = 1 - \max_{x \in T}(\mu_B(x) - \mu_A(x)) =$$

$$= 1 - \max[(0.8 - 0), (0.5 - 0.3), (0.7 - 0.6), (0.6 - 0.4)] =$$

$$= 1 - \max[0.8, 0.2, 0.1, 0.2] = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$\eta(A \subset B) = 1, \ \eta(B \subset A) = 0.2 .$$

7.3.5. Операции «равенство» и «разность»

Равенство нечетких множеств определяется следующим образом:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U .$$

В случае, если значения функций принадлежности $\mu_A(x), \mu_B(x)$ почти равны между собой, говорят о степени равенства нечетких множеств A и B.

Степенью равенства нечетких множеств A и B называется величина

$$\rho(A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,$$

где $T = \{x \in U, \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\}$.

Задача 7.7. Определить степень равенства множеств A и B из предыдущего примера.

Решение. $T = \{x_1, x_2, x_3, x_5; \mu_B(x) \neq \mu_A(x)\}$, следовательно,

$$\rho(A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| =$$

$$= 1 - \max[|0 - 0.8|, |0.3 - 0.5|, |0.6 - 0.7|, |0.4 - 0.6|] =$$

$$= 1 - \max[0.8, 0.2, 0.1, 0.2] = 1 - 0.8 = 0.2;$$

$$\rho(A = B) = 0.2 .$$

Очевидно, что $\rho(A = B) = \eta(A \subset B) \cap \eta(B \subset A)$. Степень равенства может принимать любые значения из отрезка [0,1].

Разность двух нечетких множеств определяется формулой: $A - B = A \cap \overline{B}$, таким образом:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)).$$

7.3.6. Операция «дизъюнктивная сумма»

Дизъюнктивная сумма множеств иногда еще называется симметрической разностью множеств. Как видно из названия, в отличие от обычной разности, симметрическая разность не зависит от порядка ее аргументов (если поменять аргументы местами, результат останется неизменным).

Дизъюнктивная сумма двух нечетких множеств определяется по формуле:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \max[\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)); \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x))].$$

7.3.7. Операции «концентрирование» и «растяжение»

Степенью e нечеткого множества A называется нечеткое множество $A^e = \left\{ \left\langle x / \mu_{A^e}(x) \right\rangle \right\}$.

При e=2 получается частный случай операции возведения в степень – операция ***концентрации***, обозначаемая *CON*.

В общем случае:

$$CON(A) = A^k,$$

где $k > 0$, k – целое. В частном случае:

$$CON(A) = A^2,\ \mu_{A^2}(x) = \mu_A^2(x),\ \forall x \in U.$$

Результатом применения операции концентрирования к нечеткому множеству A является уменьшение степени принадлежности элементов к этому множеству, и происходит оно в квадратичной зависимости: если $\mu_A(x) \approx 1$, то это уменьшение мало, а если $\mu_A(x) \approx 0$, то уменьшение велико. В естественном языке применение операции концентрирования к значению лингвистической переменной соответствует использованию усиления «очень».

При $e = 0{,}5$ получается операция ***растяжения*** *DIL*:

В общем случае:

$$DIL(A) = A^{\frac{1}{k}},$$

$k > 0,\ k$ – целое.

В частном случае:

$$DIL(A) = A^{0,5}.$$

Операция *DIL* повышает степень нечеткости описания. В естественном языке применение операции концентрирования к значению лингвистической переменной соответствует использованию слов «достаточно» или «более-менее» («более-менее близкий»). Графическая интерпретация этих операций приведена на рис. 7.4.

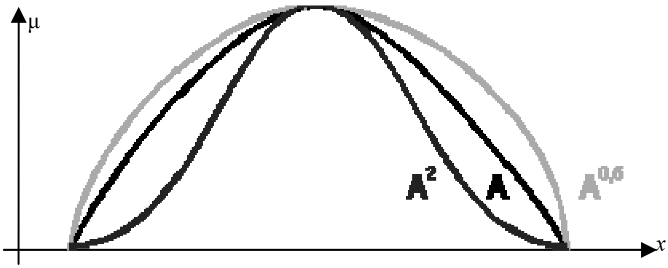


Рис. 7.4

7.3.8. Операция «отрицание»

Пусть задано некоторое отображение $\lambda:[0,1] \to [0,1]$. Это отображение будет называться оператором ***отрицания*** в теории нечетких множеств, если выполняются условия:

$$\lambda(0) = 1,\ \ \lambda(1) = 0, \tag{7.1}$$

$$\mu_A \le \mu_B \Rightarrow \lambda(\mu_A) \ge \lambda(\mu_B). \tag{7.2}$$

Если, кроме этого, выполняются условия:

$$\lambda \text{ – строго убывающая функция,} \tag{7.3}$$

$$\lambda \text{ – непрерывная функция,} \tag{7.4}$$

то она называется ***строгим отрицанием***.

Функция λ называется ***сильным отрицанием*** или ***инволюцией***, если наряду с условиями (7.1) и (7.2) для нее всегда справедливо:

$$\lambda(\lambda(\mu)) = \mu. \tag{7.5}$$

Точка μ называется ***инволютивным элементом***, если для нее выполняется условие (7.5), в противном случае – неинволютивным.

Если $\lambda(\mu) = \mu$, то μ – ***равновесная точка***. Если такая точка существует, то она единственная.

Отрицание λ называется ***сжимающим отрицанием*** в точке μ, если выполняется неравенство

$$\mu \wedge \lambda(\mu) \le \lambda(\lambda(\mu)) \le \mu \vee \lambda(\mu), \tag{7.6}$$

если выполняется неравенство

$$\lambda(\mu) \wedge \lambda(\lambda(\mu)) \le \mu \le \lambda(\mu) \vee \lambda(\lambda(\mu)), \tag{7.7}$$

то λ называется ***разжимающим отрицанием***.

Для любого λ выполняется, по крайней мере, одно из соотношений (7.6) или (7.7).

Оба соотношения выполняются одновременно тогда и только тогда, когда μ – инволютивный элемент.

Примерами отрицаний могут служить:

- классическое отрицание: $\lambda(\mu) = \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$,
- квадратичное отрицание: $\lambda(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}$,
- отрицание Сугено: $\lambda(\mu) = \dfrac{1 - \mu}{1 + k \cdot \mu}$, $-1 < k < \infty$,
- дополнение порогового типа: $\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu \le \alpha \\ 0, & \text{если } \mu > \alpha \end{cases}$.

7.3.9. Операция «контрастная интенсивность»

Операция контрастной интенсификации (*INT*) определяется с помощью функции принадлежности следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2, & 0 \le \mu_A(x) \le 0.5, \\ 1 - 2(1 - \mu_A(x))^2, & 0.5 \le \mu_A(x) \le 1 \end{cases}$$

или

$$INT(A)=\begin{cases}2A^2, & 0\le \mu_A(x)\le 0.5,\\ \overline{2\overline{A}^2}, & 0.5\le \mu_A(x)\le 1,\end{cases}$$

где $\overline{A}=\int_U x/(1-\mu_A(x))$.

Эта операция отличается от концентрирования тем, что она увеличивает значение $\mu_A(x)$, которое больше 0,5 и уменьшает те, которые меньше 0,5. Таким образом, контрастная интенсификация, по существу, уменьшает нечеткость A.

7.3.10. Операция «увеличение нечеткости»

Операция увеличения нечеткости, которая обозначается Ф(A), противоположна операции контрастной интенсивности и выполняет процедуру превращения четкого множества в нечеткое или увеличения степени нечеткого множества.

Операция увеличения нечеткости определяется как

$$\Phi(A)=2\cdot\mu_A(x)\cdot(1-\mu_A(x))\cdot(0.5-\mu_A(x))+\mu_A(x).$$

Оператор увеличения нечеткости используется для преобразования четких множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечеткого множества.

7.4. Обобщенные нечеткие операторы

Жесткие, поточечно однозначные операторы, недостаточно полно отражают смысл многозначных лингвистических преобразований термов лингвистических переменных. Поэтому большой практический интерес представляет построение обобщенных нечетких операторов, т.е. параметризованных операторов пересечения, объединения, дополнения и др. Весьма общий и изящный подход к целенаправленному формированию нечетких операторов пересечения и объединения заключается в их определении в классе треугольных норм и конорм.

7.4.1. Треугольные нормы

Треугольной нормой T (сокращенно *t*-нормой) называется двухместная действительная функция $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) ограниченность: $T(0,0)=0$, $T(\mu_A,1)=T(1,\mu_A)=\mu_A$;
2) монотонность: $\mu_A \le \mu_C, \mu_B \le \mu_D \Rightarrow T(\mu_A,\mu_B)\le T(\mu_C,\mu_D)$;
3) коммутативность: $T(\mu_A,\mu_B)\le T(\mu_B,\mu_A)$;
4) ассоциативность: $T(\mu_A,T(\mu_B,\mu_C))=T(T(\mu_A,\mu_B),\mu_C)$.

Треугольная норма T является ***архимедовой***, если она непрерывна и для любого нечеткого множества μ_A выполнено неравенство $T(\mu_A,\mu_A)\le\mu_A$. Она называется строгой, если функция T строго возрастает по обоим аргументам. Примерами треугольных норм являются операторы, показанные в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Треугольные нормы

Определение функций $T(x,y)=$	Имя функции
$=\begin{cases}0, & \text{если } \max(x,y)<1,\\ \min(x,y), & \text{если } \max(x,y)>1\end{cases}$	Ограниченное произведение
$=\max(0,x+y-1)$	Усиленная сумма (пересечение по Лукасевичу)
$=x\cdot y/[1+(1-x)\cdot(1-y)]$	Произведение Эйнштейна
$=x\cdot y$	Алгебраическое произведение (вероятностное)
$=x\cdot y/[1-(1-x)\cdot(1-y)]$	Произведение Гамахера
$=\min(x,y)$	Минимум (пересечение по Заде)

7.4.2. Треугольные конормы

Треугольной конормой $\perp$ (сокращенно *t*-конормой) называется двухместная действительная функция $\perp:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) ограниченность: $\perp(1,1)=1$, $\perp(\mu_A,0)=\perp(0,\mu_A)=\mu_A$;

2) монотонность: $\mu_A \geq \mu_C, \mu_B \geq \mu_D \Rightarrow \perp(\mu_A, \mu_B) \geq \perp(\mu_C, \mu_D)$;

3) коммутативность: $\perp(\mu_A, \mu_B) \leq \perp(\mu_B, \mu_A)$;

4) ассоциативность: $\perp(\mu_A, \perp(\mu_B, \mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$.

Треугольная конорма $\perp$ является ***архимедовой***, если она непрерывна и для любого нечеткого множества μ_A выполнено неравенство $\perp(\mu_A, \mu_A) \geq \mu_A$. Она называется строгой, если функция $\perp$ строго убывает по обоим аргументам. Примерами треугольных конорм являются операторы, показанные в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Треугольные конормы

Определение функций $\perp(x, y) =$	Имя функции
$= \max(x, y)$	Максимум (объединение по Заде)
$= 1 - (1 - x) \cdot (1 - y) / (1 - x \cdot y)$	Сумма Гамахера
$= 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$ или $= x + y - xy$	Алгебраическая сумма
$= 1 - (1 - x) \cdot (1 - y) / (1 + x \cdot y)$	Сумма Эйнштейна
$= \min(1, x + y)$	Усиленная разность (объединение по Лукасевичу, ограниченная сумма)
$= \begin{cases} 1, \text{ если } \min(x, y) > 0, \\ \max(x, y), \text{ если } \min x(x, y) = 0 \end{cases}$	Ограниченная сумма

Рассмотрим следующие шесть пар *t*-норм и *t*-конорм (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Пары *t*-норм и *t*-конорм

t-норма	*t*-конорма
Усиленное произведение	Усиленная сумма
Ограниченная сумма	Ограниченная разность
Произведение Эйнштейна	Сумма Эйнштейна
Алгебраическое произведение	Алгебраическая сумма
Произведение	Сумма Гамахера
Минимум	Максимум

Для каждой пары справедливы уравнения:

$$T(x,y)=1-\perp(1-x,1-y),$$

$$\perp(x,y)=1-T(1-x,1-y).$$

Для любых заданных значений x и y, таких, что $x + y < 1$, справедлива возрастающая последовательность: 0 ≤ усиленная сумма ≤ усиленное произведение ≤ произведение Эйнштейна ограниченная разность ≤ алгебраическое произведение ≤ произведение Гамахера ≤ минимум ≤ максимум ≤ сумма Гамахера ≤ алгебраическая сумма ≤ сумма Эйнштейна ≤ усиленная разность ≤ ограниченная сумма ≤ 1.

7.4.3. Декомпозиция нечетких множеств

Множеством уровня α (α-срезом) нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества U, определяемое по формуле

$$A_\alpha=\{x\,|\,\mu_A(x)\ge\alpha\},$$

где $\alpha\in[0,1]$.

По сути α – некоторый порог. Порог α = 0,5 называется ***точкой перехода***.

Множество строгого уровня определяется в виде

$$A_\alpha=\{x\,|\,\mu_A(x)>\alpha\}.$$

Для произвольной непрерывной функции принадлежности, задающей некоторое нечеткое множество, на рис. 7.5 показаны ядро, носитель и α-сечение.

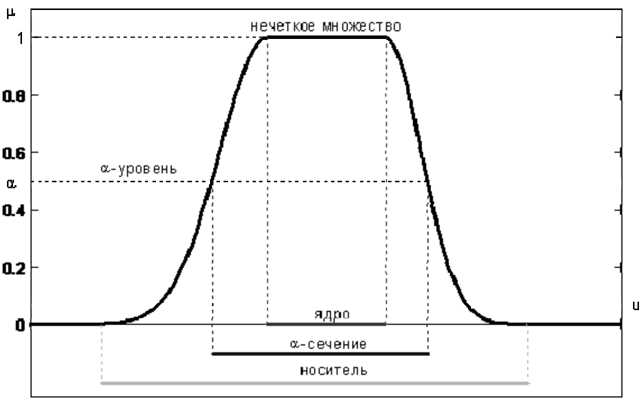


Рис. 7.5

Если нечеткое множество задано в дискретном виде, то α-сечение определяется следующим образом.

Задача 7.8. Для A = 1/1+0,8/2+0,5/3+0,1/4 определить α-сечение при α = 0,1, α = 0,5 и α = 1.

Решение. $A_{0,1}=\{1,2,3,4\}$, $A_{0,5}=\{1,2,3\}$, $A_1=\{1\}$.

Теорема 7.1 (о декомпозиции). ***Любое нечеткое множество A можно представить в виде*** $\mathbf{A=\max\limits_{\alpha}\alpha\times A_{\alpha}}$.

Доказательство. Обозначим через B нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_B(x)=\max\limits_{\alpha}\alpha\times A_{\alpha}$. Зафиксируем некоторую точку $x\in U$. Пусть $\mu_A(x)=a$. Тогда при $\alpha\le a$ и $\beta>a$, соответственно, имеем $\mu_{A_{\alpha}}(x)=1$ и $\mu_{A_{\beta}}(x)=0$. Таким образом, $\max\limits_{\alpha}\alpha\times A_{\alpha}(x)=\mu_{\beta}(x)=a$. Итак, при $x\in U$ имеем $\mu_A(x)=\mu_B(x)$, что означает равенство множеств A и B.

7.5. Индекс нечеткости

Если объект x обладает свойством R (порождающим нечеткое множество A) лишь в частной мере, т.е. $0<\mu_A(x)<1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта x в отношении R проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, «обладающих свойством R», и классу объектов, «не обладающих свойством R».

Эта двусмысленность максимальна, когда степени принадлежности объекта обеим классам равны, т.е. $\mu_A(x)=\mu_{\bar{A}}(x)=0,5$, и минимальна, когда объект принадлежит только одному классу, т.е. либо $\mu_A(x)=1$ и $\mu_{\bar{A}}(x)=0$, либо $\mu_A(x)=0$ и $\mu_{\bar{A}}(x)=1$.

Если объединить такие «двусмысленности» по всем объектам данного нечеткого множества, то итоговая характеристика будет называться ***индексом нечеткости***. Нечеткие множества могут иметь разную степень нечеткости. Меры нечеткости важны в приложениях теории нечетких множеств. Этот показатель является параметром оценки качества различных процедур и алгоритмов в распознавании образов, принятии решений, моделях поиска информации и т.п.

Исторически первыми были разработаны методы оценки нечеткости через энтропию, однако они обладают определенными недостатками и пригодны не для всех приложений. В настоящее время чаще применяется метрический подход, хотя в прикладных целях иногда разрабатываются и используются иные способы подсчета индекса нечеткости, объединенные в так называемый аксиоматический подход.

7.5.1. Оценка нечеткости через энтропию

Этот подход к оценке степени нечеткости множества базируется на использовании понятия энтропии в физике. Степень неопределенности компонент физической системы относительно вероятности ее состояния составляет содержание понятия энтропии. Поэтому желание использовать его для вычисления степени нечеткости (неопределенности) множества являлось естественным в силу очевидной аналогии. Напомним определение энтропии.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ - состояния системы, $p_1, p_2, ..., p_n$ – вероятности состояний. ***Энтропия системы*** $H(p_1, p_2, ..., p_n)$ определяется как

$$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \ln p_i \ .$$

Если перед знаком суммы поставить нормировочный коэффициент $\frac{1}{\ln n}$, то значение энтропии будет меняться в пределах от 0 до 1.

Непосредственно из данного определения вытекают следующие свойства энтропии:

а) $H = 0$ (минимально), если $\exists j \quad (1 \le j \le n) \quad (p_j = 1)$;

б) $H = \ln n$ (максимально), если $\forall j \quad (1 \le j \le n) \quad (p_j = \frac{1}{n})$.

Оценка степени нечеткости через энтропию заключается в следующем.

1. Проводится «нормировка» нечеткого множества A:

- вычисляется величина $C(A)=\sum_{x_i \in U} \mu_A(x_i)$ (для конечного универсального множества). Эта величина называется «*мощностью нечеткого множества*»;
- строится нечеткое множество A':

$$\mu_{A'}(x)=\frac{\mu_A(x)}{C(A)} .$$

Множество A' и есть пронормированное множество A.

2. В качестве степени нечеткости A берется значение пронормированной формулы энтропии для пронормированного множества A:

$$\xi(A)=-\frac{1}{\ln n}\sum_{x_i \in U} \mu_{A'}(x_i)\ln \mu_{A'}(x_i) .$$

На самом деле рассчитанное с помощью энтропийного подхода значение степени нечеткости зависит не от собственного значения функции принадлежности, а от их относительных значений. Это приводит к ряду «парадоксов», например к тому, что степень нечеткости четкого множества U (содержащего все элементы) максимальна, тот же результат (максимум, т.е. 1) получим, если все элементы U имеют равную, отличную от нуля или единицы степень принадлежности (например, 0,5 или 0,1).

Также интересен тот факт, что степень нечеткости множеств (как четких, так и нечетких) минимальна (равна нулю) в случае, если имеется единственный ненулевой элемент. Из сказанного вытекает, что энтропийная мера нечеткости обладает недостатками. Тем самым важно иметь в виду другие подходы к оценке степени нечеткости.

7.5.2. Метрический подход к оценке нечеткости

Метрический подход к оценке нечеткости основан на понятии расстояния между нечеткими множествами. Идея метрического подхода заключается в оценке степени нечеткости как расстояния между оцениваемым множеством и некоторым множеством с известной степенью нечеткости, например с ближайшим четким множеством.

Расстояние между нечеткими множествами. Пусть A и B – нечеткие подмножества универсального множества U.

Расстоянием между A и B называется величина $r(A, B)$, если выполняются следующие условия:

1) $r(A, B) \geq 0$ – неотрицательность;
2) $r(A, B) = r(B, A)$ – симметричность;
3) $r(A, B) \leq r(A, C) + r(C, B)$;
4) $r(A, A) = 0$.

Расстояние Хемминга (линейное расстояние):

$$r(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|.$$

Очевидно, что $r(A,B) \in [0;n]$.

Евклидово (квадратичное) расстояние:

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\ ;$$

$$e(A,B) \in \left[0;\sqrt{n}\right].$$

Относительное расстояние Хемминга:

$$r'(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|;$$

$$r'(A,B) \in [0;1].$$

Относительное евклидово расстояние:

$$e'(A,B) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\ ;$$

$$e'(A,B) \in [0;1].$$

Расстояние Хемминга и квадратичное расстояние, в случае, когда U бесконечно, определяются аналогично с условием сходимости соответствующих сумм:

если U счетное, то

$$r(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|;$$

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\ ;$$

если $U = \mathrm{R}$ (числовая ось), то

$$r(A,B) = \int_{-\infty}^{\infty} |\,\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\,|\, dx\,;$$

$$e(A,B) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2\, dx}\,.$$

Замечание. Здесь приведены два наиболее часто встречающихся определения понятия расстояния. Разумеется, для нечетких множеств можно ввести и другие определения понятия расстояния. Выбор того или иного расстояния зависит от природы рассматриваемой проблемы. Каждое из них обладает своими преимуществами и недостатками, которые становятся очевидными в приложениях.

Обычное множество, ближайшее к нечеткому. Пусть A – нечеткое множество. Вопрос: какое ***обычное множество является ближайшим к А***, т.е. находится на наименьшем евклидовом расстоянии от нечеткого множества A.

Таким подмножеством, обозначаемым $\underline{A}$, является подмножество с функцией принадлежности:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0,\ \text{ если } \mu_A(x) < 0{,}5; \\ 1,\ \text{ если } \mu_A(x) > 0{,}5; \\ 0 \text{ или } 1,\ \text{ если } \mu_A(x) = 0{,}5. \end{cases}$$

Если $\mu_A(x) = 0{,}5$ обычно принимают $\mu_{\underline{A}}(x) = 0$.

Отметим следующие свойства, связанные с ближайшим обычным множеством:

$$\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}\,, \qquad \underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}\,.$$

Используя понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому, введем следующие индексы нечеткости нечеткого множества A.

Линейный индекс нечеткости:

$$d_r(A) = \frac{1}{n} \cdot r(A, \underline{A})\,.$$

Здесь $r(A, \underline{A})$ – линейное (хеммингово) расстояние, множитель $1/n$ обеспечивает выполнение условия $0 < d_r(A) < 1$.

Квадратичный индекс нечеткости:

$$d_e(A) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e(A, \underline{A}),\ 0 < d_e(A) < 1.$$

Здесь $e(A, \underline{A})$ – квадратичное (евклидово) расстояние.

Мы ввели линейный и квадратичный индексы нечеткости, используя понятие расстояния и понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому.

Эти же индексы можно определить, используя операцию дополнения, следующим образом:

$d_r(A) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \min(\mu_A(x_i), \mu_{\overline{A}}(x_i))$ – линейный индекс;

$d_e(A) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \min(\mu_A^2(x_i), \mu_{\overline{A}}^2(x_i))}$ – квадратичный индекс.

Можно отметить следующий факт. Для $x \in U: |\mu_A - \mu_{\overline{A}}| = \mu_{A \cap \overline{A}}$, откуда для линейного индекса нечеткости имеем:

$$d(A) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_{A \cap \overline{A}}(x_i),$$

т.е. в этом представлении становится очевидным, что $d(A) = d(\overline{A})$.

7.5.3. Аксиоматический подход

Основная идея аксиоматического подхода заключается в формулировании некоторых «естественных» требований (аксиом) к степени нечеткости и поиске конкретных функционалов, удовлетворяющих этим требованиям.

В общем случае ***показатель размытости*** нечеткого множества можно определить в виде функционала $d(A)$ со значениями в R (положительная полуось), удовлетворяющего условиям:

1) $d(A) = 0 \Leftrightarrow A$ – обычное множество;
2) $d(A)$ максимально $\Leftrightarrow \mu_A(x) = 0{,}5$ для всех $x \in U$;
3) $d(A) \le d(B)$, если A является *заострением* B, т.е.

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) < 0{,}5;$$

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) > 0{,}5;$$
$$\mu_A(x) \text{ – любое при } \mu_B(x) = 0{,}5;$$

4) $d(A) = d(\overline{A})$ – симметричность по отношению к 0,5;

5) $d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$.

Приведенная система аксиом при введении конкретных показателей размытости часто используется частично, т.е., например, ограничиваются свойствами 1, 2 и 3, либо некоторые свойства усиливаются или ослабляются в зависимости от решаемой задачи.

7.6. Нечеткие бинарные отношения

Теория нечетких отношений находит применение в задачах, в которых традиционно используется теория обычных (четких) отношений. Как правило, аппарат теории четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы, когда связи носят дихотомический характер и могут быть проинтерпретированы в терминах «связь присутствует», «связь отсутствует», либо когда методы количественного анализа взаимосвязей по каким-либо причинам неприменимы и взаимосвязи искусственно приводятся к дихотомическому виду. Например, когда величина связи между объектами принимает значения из ранговой шкалы, выбор порога на силу связи позволяет преобразовать связь к требуемому виду. Однако, подобный подход, позволяя проводить качественный анализ систем, приводит к потере информации о силе связей между объектами либо требует проведения вычислений при разных порогах на силу связей. Этого недостатка лишены методы анализа данных, основанные на теории нечетких отношений, которые позволяют проводить качественный анализ систем с учетом различия в силе связей между объектами.

7.6.1. Нечеткие бинарные отношения

Нечетким бинарным отношением R на универсальном множестве $U = U \times U$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $U = U \times U$, которое характеризуется такой функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$, что $U \times U \xrightarrow{\mu_R} [0,1]$. Причем $\mu_R(x,y)$ принимается как субъективная мера выполнения отношения xRy.

Используется и другой способ записи:

$$R = \bigcup_{(x,y)\in U\times U} (x,y)/\mu_R(x,y).$$

Пусть, например, заданы:

а) четкое отношение $R_1(\geq, x \geq y)$, где $x \in [0,1]$ – «больше или равно»;

б) нечеткое отношение $R_2(>>, x >> y)$ – «намного больше».

На рис. 7.6, *а* приведены пары (x,y) из интервала [0,1], связанные отношением R_1, т.е. такие, что $x \geq y$. Они образуют множество точек заштрихованной области, которые отделены четкой границей – диагональю от других точек.

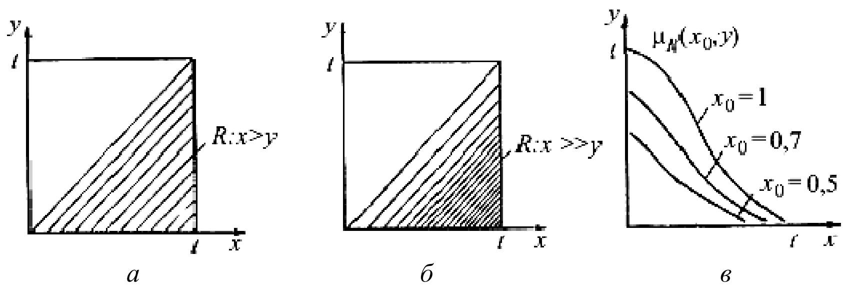


Рис. 7.6

Строя нечеткое отношение $R_2 : x >> y$ на единичном квадрате, убеждаемся, что существуют пары (x,y), которые можно определенно отнести ко множеству R_2 (например, точка (0,9; 0,01)), а также те, которые определенно не принадлежат R_2 (например, (0,01; 0,9)). Кроме того, имеется несчетное множество пар (x,y), о принадлежности которых к множеству R_2 можно судить лишь приблизительно с определенной субъективностью (например, точка (0,8; 0,6). Поэтому нечеткое множество R_2 характеризуется отсутствием четкой границы от дополнительного множества R_2, и степень принадлежности $\mu_{R_2}(x,y)$ пары (x,y) следует характеризовать плотностью штриховки (рис. 7.6, *б*). Можно рассмотреть некоторые сечения отношения R_2 при фиксированном x_0. Соответствующее семейство функций $\mu_{R_2}(x, y)$ приведено на рис. 7.6, *в*).

Если нечеткое отношение R на X конечно, то его функция принадлежности $\mu_R(x, y)$ задается в виде квадратной матрицы $\|r_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$ с элементами $r_{ij} \in [0,1]$. Если $r_{ij} = \alpha$, то это означает, что степень выполнения отношения $x_i R x_j$ равна α.

Носителем нечеткого отношения R на множестве U называется подмножество декартова произведения $U \times U$, определяемое так:

$$\sup^R = \{(x, y) : \mu_R(x, y) > 0, x \in U, y \in U\}.$$

В случае конечных или счетных универсальных множеств очевидна интерпретация нечеткого отношения в виде взвешенного графа, в котором каждая пара вершин (*x,y*) из $U \times U$ соединяются ребром с весом R(*x,y*).

7.6.2. Свойства нечетких бинарных отношений

Рефлексивность.

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ называется ***рефлексивным***, если выполняется условие $\mu_R(x, x) = 1, \ \forall (x, x) \in U \times U$.

Интуитивно понятно, что отношения «*у* примерно равно *х*», «*у* близко *х*» являются рефлексивными.

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ называется ***иррефлексивным***, если $\mu_R(x, x) = 0, \ \forall x \in U$.

Симметричность.

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ называется ***симметричным***, если для всех $(x, y) \in U \times U$: $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$.

Если R – множество действительных чисел, то отношение «у близко к х» интуитивно воспринимается как нечеткое симметричное отношение в $R \times R$.

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ называется ***антисимметричным***, если

$$\forall (x,y) \in U \times U \text{ при } x \neq y \ \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x) \text{ или}$$
$$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = 0.$$

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ называется ***совершенно антисимметричным***, если из того, что $\forall (x,y) \in U \times U$ при $x \neq y$ $\mu_R(x,y) > 0$, следует $\mu_R(y,x) = 0$.

Транзитивность.

• Нечеткое отношение R на $U \times U$ ***транзитивно***, если $x,y,z \in U$, $\forall (x,y),(y,z),(x,z) \in U \times U$:

$$\mu_R(x,z) \geq \max_y [\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\}].$$

Чтобы проверить транзитивность для конечного множества U мощности n, если нет правила, позволяющего доказать это с помощью функции принадлежности, нужно выполнить n^2 раз n операций.

Например, следующие отношения транзитивны: «*Y* много больше *X*», «*A* чище, чем *B*». Отношения «*X* – дальний родственник *Y*», «*X* похож на *Y*» нетранзитивны. Здесь все зависит от характера функции принадлежности, оценивающей сходство. Так, например, может случиться так, что «*X* похож на *Y*» и «*Y* похож на *Z*», но *X* не обязательно похож на *Z*.

Как и в случае четких отношений, над нечеткими бинарными отношениями можно определять различные **операции**.

7.6.3. Операции над нечеткими отношениями

Пусть на множестве $U_1 \times U_2$ заданы два нечетких отношения R_1 и R_2 с функциями принадлежности $\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)$.

Нечеткое отношение $R = R_1 \cup R_2$ называется ***объединением*** нечетких отношений R_1 и R_2, если его функция принадлежности определяется выражением $\mu_R(x,y) = \max\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}$.

Нечеткое отношение $R = R_1 \cap R_2$ называется ***пересечением*** нечетких множеств R_1 и R_2, если $\mu_R(x,y) = \min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}$.

Нечеткое отношение R_1 ***включает в себя (или содержит)*** нечеткое отношение R_2 ($R_1 \subset R_2$), если для них выполняется соотношение

$$\mu_{R_1}(x, y) \le \mu_{R_2}(x, y), \forall x, y \in X .$$

Нечеткое отношение $\overline{R}$ называется ***дополнением*** нечеткого отношения R, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) .$$

Нечеткое отношение R^{-1} называется ***обратным*** к отношению R, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x) .$$

Отношение $\underline{R}$ называется ***обычным отношением, ближайшим к нечеткому***, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_R(x, y) \le 0{,}5; \\ 1, & \text{если } \mu_R(x, y) > 0{,}5. \end{cases}$$

G_α называется ***обычным подмножеством α-уровня*** нечеткого отношения, если оно определяется выражением

$$G_\alpha = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) \ge \alpha\} ,\ \alpha \in [0{,}1] .$$

Нечеткое отношение $R^{(1)}$ называется ***первой проекцией*** нечеткого отношения R, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_R^{(1)}(x) = \max_y \mu_R(x, y) .$$

Нечеткое отношение $R^{(2)}$ называется ***второй проекцией*** нечеткого отношения R, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_R^{(2)}(y) = \max_x \mu_R(x, y) .$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) $h(R)$ называется глобальной проекцией нечеткого отношения R, если она определяется выражением

$$h(R) = \max_x \max_y \mu_R(x, y) = \max_y \max_x \mu_R(x, y)$$

или $h(R)=R^{(1)(2)}=R^{(2)(1)}$.

Если $h(R)=1$ – отношение нормально, если $h(R)<1$ – субнормально.

Важное значение в теории нечетких множеств имеет композиция (или произведение) нечетких отношений. В отличие от обычных (четких) отношений композицию (произведение) нечетких отношений можно определить разными способами.

Нечеткое отношение $R = R_1 R_2$ называется ***максиминной композицией*** (произведением) нечетких отношений R_1 и R_2, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_R(x, z) = \max_{y \in U} \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\}.$$

Нечеткое отношение $R = R_1 \circ R_2$ называется ***минимаксной композицией*** (произведением) нечетких отношений R_1 и R_2, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_R(x, z) = \min_{y \in U} \max\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\}.$$

Нечеткое отношение $R = R_1 \cdot R_2$ называется ***максимультипликативной композицией*** (произведением) нечетких отношений R_1 и R_2, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_R(x, z) = \sup_{y \in U}\{\mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z)\}.$$

7.7. Нечеткие числа

Нечеткое число – это нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее нормальную и выпуклую функцию принадлежности, то есть такую, что:

- существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице (условие нормальности);
- при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности не возрастает (условие выпуклости).

Нечеткое число A ***унимодально***, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси.

Выпуклое нечеткое число A называется ***нечетким нулем***, если $\mu_A(0) = \sup\limits_U(\mu_A(x))$.

Подмножество S_A называется ***носителем*** нечеткого числа A, если $S_A = \{x \mid \mu_A > 0\}$.

Нечеткое число A ***положительно***, если $\forall x \in S_A \Rightarrow x > 0$, и ***отрицательно***, если $\forall x \in S_A \Rightarrow x < 0$.

Нечеткие числа (L-R)-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними.

Функции принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа задаются с помощью невозрастающих на множестве неотрицательных действительных чисел функций действительного переменного $L(x)$ и $R(x)$.

Возможные графики функций принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа приведены на рис. 7.7.

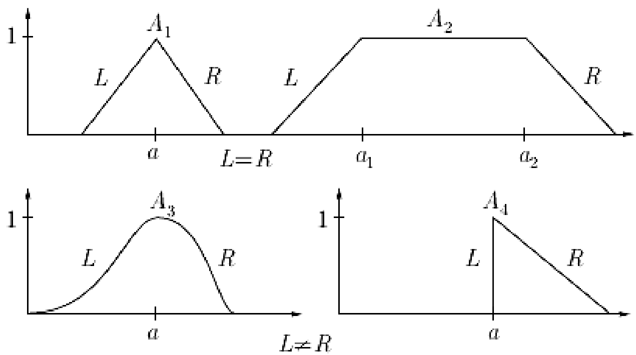


Рис. 7.7

Пусть $L(y)$ и $R(y)$ – функции (L-R)-типа. Унимодальное нечеткое число A с *модой* a (т.е. $\mu_A(a) = 1$) задается с помощью $L(y)$ и $R(y)$ следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{\alpha}), & \text{если } x \le a; \\ R(\dfrac{x-a}{\beta}), & \text{если } x \ge a, \end{cases}$$

где a – мода; $\alpha > 0$, $\beta>0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(y)$ и $R(y)$ нечеткое число (унимодальное) задается тройкой $A=(a;\alpha,\beta)$.

Толерантное нечеткое число задается, соответственно, четверкой параметров $A=(a_1,a_2;\alpha,\beta)$, где a_1 и a_2 – границы толерантности, т.е. в промежутке $[a_1;a_2]$ значение функции принадлежности равно 1. Толерантные нечеткие числа (L-R)-типа называются ***трапезоидными*** числами.

Унимодальные нечеткие числа (L-R)-типа называются ***треугольными*** числами.

Треугольные числа формализуют высказывания типа «приблизительно равно a». Ясно, что $a \pm \delta \approx a$, причем по мере убывания δ до нуля степень уверенности в оценке растет до единицы.

На практике часто используется альтернативное определение нечеткого треугольного числа.

Треугольным нечетким числом A называется тройка $\langle a,b,c\rangle$ ($a \le b \le c$) действительных чисел, через которые его функция принадлежности $\mu_A(x)$ определяется следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a;b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b;c]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Второе число b тройки $\langle a,b,c\rangle$ обычно называют ***модой*** или ***четким значением нечеткого треугольного числа***. Числа a и c характеризуют ***степень размытости четкого числа***.

В общем случае при определении нечеткого треугольного числа не обязательно использовать линейные функции. Часто в различных приложениях используются две функции, из которых одна монотонно возрастает на интервале $[a;b]$, а другая монотонно убывает на интервале $[b;c]$.

7.8. Приближенные рассуждения

Под ***приближенными рассуждениями*** понимается процесс, при котором из нечетких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие. Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.

7.8.1. Нечеткая лингвистическая логика

Лингвистическая переменная – переменная, значением которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка.

Например, «возраст» – лингвистическая переменная, если она принимает значения «молодой», «немолодой», «старый», «не очень старый» и т.д.

Лингвистическая переменная описывается набором

$$(x, T(x), U, G, M),$$

где x – название переменной; $T(x)$ – совокупность ее лингвистических значений (терм-множеств), т.е. множество названий лингвистических значений переменной x, причем каждое из таких значений является нечеткой переменной $\tilde{x}$ со значениями из универсального множества U; U – универсальное множество; G – синтаксическое правило, порождающее термины множества $T(x)$, т.е. названия $\tilde{x}$ значений переменной X; M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной $\tilde{x}$ ее смысл $M(\tilde{x})$, т.е. нечеткое подмножество $M(\tilde{x})$ универсального множества U.

Назначение семантического правила – связать совместимость первичных термов в составе лингвистического значения с совместимостью составного значения. Неопределенности, такие, как «очень», «вполне», «чрезвычайно», а также союзы «и», «или» понимаются как нелинейные операторы, преобразующие смысл соответствующих терминов.

Конкретное название $\tilde{x}$, порожденное синтаксическим правилом G, называется ***термом***. Терм, который состоит из одного слова или из нескольких слов, всегда фигурирующих вместе друг с другом, называется ***атомарным термом***. Терм, который состоит из более чем одного атомарного терма, называется ***составным термом***.

Лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке. Поскольку слова, в общем, менее точны, чем числа, понятие лингвистической переменной дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах. В частности, нечеткое множество, которое представляет собой ограничение, связанное со значениями лингвистической переменной, можно рассматривать как совокупную характеристику различных подклассов элементов универсального множества. В этом смысле роль нечетких множеств аналогична той роли, которую играют слова и предложения в естественном языке. Например, прилагательное «красивый» отражает комплекс характеристик внешности индивидуума. Это прилагательное можно также рассматривать как название нечеткого множества, которое является ограничением, обусловленным нечеткой переменной «красивый». С этой точки зрения термины «очень красивый», «некрасивый», «чрезвычайно красивый», «вполне красивый» и т.п. – названия нечетких множеств, образованных путем действия модификаторов «очень, не, чрезвычайно, вполне» и т.п. на нечеткое множество «красивый». В сущности, эти нечеткие множества вместе с нечетким множеством «красивый» играют роль значений лингвистической переменной «внешность».

Важный аспект понятия лингвистической переменной состоит в том, что эта переменная более высокого порядка, чем нечеткая переменная, в том смысле, что значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные. Например, значениями лингвистической переменной «возраст» могут быть: «молодой, немолодой, старый, очень старый, не молодой и не старый» и т.п. Каждое из этих значений является названием нечеткой переменной.

Если $\tilde{x}$ – название нечеткой переменной, то ограничение, обусловленное этим названием, можно интерпретировать как смысл нечеткой переменной $\tilde{x}$.

Любая ***нечеткая переменная*** характеризуется тройкой

$$< x, U, X >,$$

где x – название переменной, U – универсальное множество, X – нечеткое подмножество множества U, представляющее собой нечеткое ограничение на значение переменной $u \in U$, обусловленное x.

Используя аналогию с саквояжем, нечеткую переменную можно уподобить саквояжу с ярлыком, имеющим «мягкие» стенки. Тогда x – надпись на ярлыке (название саквояжа), U – список предметов, которые в принципе можно поместить в саквояж, а X – часть этого списка, где для каждого предмета u указано число $\mu_X(u)$, характеризующее степень легкости, с которой предмет можно поместить в саквояж x.

Другой важный аспект понятия лингвистической переменной состоит в том, что лингвистической переменной присущи два правила:

1) синтаксическое, которое может быть задано в форме грамматики, порождающей название значений переменной;

2) семантическое, которое определяет алгоритмическую процедуру для вычисления смысла каждого значения.

Задача 7.9. Рассмотрим лингвистическую переменную с именем x = «температура в комнате». Определить оставшуюся четверку $< T(x), U, G, M >$.

Решение.

1) универсальное множество U=[5,35];

2) терм-множество T = {«холодно», «комфортно», «жарко»} с такими функциями принадлежностями:

$$\mu_{\text{холодно}}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 10}{7})^{12}},$$

$$\mu_{\text{комфортно}}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 20}{3})^{6}},$$

$$\mu_{\text{жарко}}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 30}{6})^{10}};$$

3) синтаксическое правило *G*, порождающее новые термы с использованием квантификаторов «и», «или», «не», «очень», «более-менее» и других;

4) семантическое правило *M* будет являться процедурой, ставящей каждому новому терму в соответствие нечеткое множество из *X* по правилам, заданным в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Правила определения квантификаторов

Квантификатор	Функция принадлежности ($u \in U$)
Не *t*	$1 - \mu_t(u)$
Очень *t*	$(\mu_t(u))^2$
Более-менее *t*	$\sqrt{\mu_t(u)}$
А и В	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
А или В	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

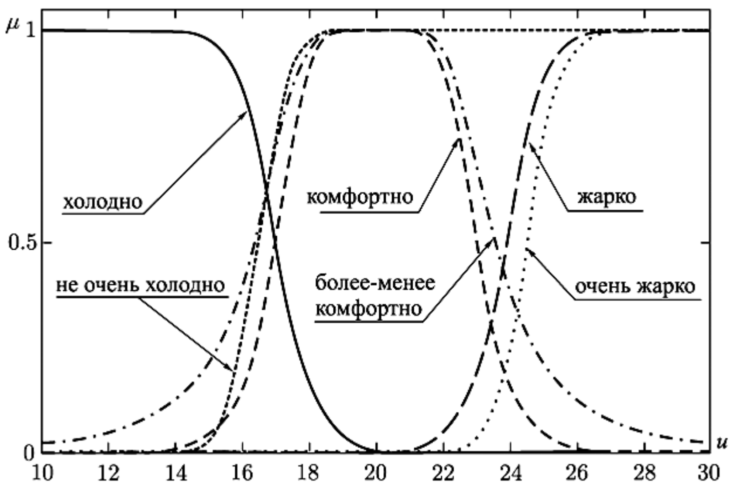


Рис. 7.8

Графики функций принадлежности термов «холодно», «не очень холодно» и т.п. к лингвистической переменной «температура в комнате» приведены на рис. 7.8.

В рассмотренном примере терм-множество состояло лишь из небольшого числа термов, так что целесообразно было просто перечислить элементы терм-множества $T(x)$ и установить прямое соответствие между каждым элементом и его смыслом. В более общем случае, число элементов в $T(x)$ может быть бесконечным, и тогда как для порождения элементов множества $T(x)$, так и для вычисления их смысла необходимо применять алгоритм, а не просто процедуру перечисления

Лингвистическая переменная X ***структурирована***, если ее терм-множество $T(X)$ и функцию M, которая ставит в соответствие каждому элементу терм-множества его смысл, можно задать алгоритмически.

7.8.2. Композиционное правило вывода

Пусть U и V – два универсальных множества с базовыми переменными u и v, соответственно. Пусть A и F – нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$. Тогда ***композиционное правило вывода*** утверждает, что из нечетких множеств A и F следует нечеткое множество $B = A \circ F$. Согласно определению максиминной композиции нечетких множеств, получим

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_F(u, v)).$$

Задача 7.10. Пусть U=V={1,2,3,4}, множество A=«малый»= ={<1/1>,<2/0,6>,<3/0,2>,<4/0>} и отношение F=«примерно равны» задано матрицей:

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Определить нечеткое множество $B,$ применяя композиционное правило вывода.

Решение.

$$B=[1\quad 0{,}6\quad 0{,}2\quad 0]\circ\begin{bmatrix}1 & 0{,}5 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1\end{bmatrix}=[1\quad 0{,}6\quad 0{,}5\quad 0{,}2].$$

Словами этот приближенный вывод можно записать в виде

u – «малый»	предпосылка
u,*v* – «примерно равны»	предпосылка
v – «более или менее малый»	приближенный вывод

7.8.3. Правило modus ponens

Основным правилом вывода в традиционной логике является ***правило modus ponens***, согласно которому мы судим об истинности высказывания B по истинности высказываний A и $A\to B$. Например, если A – высказывание «у Саши насморк», B – высказывание «Саша больна», то если истинны высказывания «у Саши насморк» и «Если у Саши насморк, то она больна», то истинно и высказывание «Саша больна».

Во многих привычных рассуждениях, однако, правило modus ponens используется не в точной, а в приближенной форме. Так, обычно мы знаем, что $A\to B$ истинно, и имеет место событие A^*, где A^* есть, в некотором смысле, приближение A. Тогда на основе этих фактов мы можем сделать вывод о том, что B приближенно истинно. В приведенном примере это означает, что A^* , допустим, имеет смысл «у Саши небольшой насморк». Тогда если истинно утверждение A^* и $A\to B$, то степень истинности высказывания B рассчитывается согласно ***обобщенному правилу modus ponens*** (generalized modus ponens).

Предпосылка	$A\to B$
Событие	A^*
Вывод	$A^*\circ(A\to B)$

Приведенная формулировка имеет два отличия от традиционной формулировки правила modus ponens:

1) здесь допускается, что A, A^*, B – нечеткие множества;
2) A^* необязательно идентично A.

В процессе вывода используется операция импликации. Введем соответствующее понятие.

Пусть A и B – нечеткие высказывания и μ_A, μ_B – соответствующие им функции принадлежности. Тогда ***импликации*** $A \rightarrow B$ будет соответствовать некоторая функция принадлежности $\mu_{A \rightarrow B}$. По аналогии с традиционной логикой, можно предположить, что $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$. Тогда $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

Однако это не единственное обобщение оператора импликации. В табл. 7.7 показаны различные интерпретации этого понятия.

Таблица 7.7

Интерпретация понятия импликации

Larsen	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$
Lukasiewicz	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$
Mamdani	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$
Standard Strict (Godel)	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$
Gaines	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ \dfrac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \text{в противном случае} \end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)$

Контрольные вопросы и задания

7.1. Определить, какие нечеткие (возможные) значения подходят для температуры {- 40°C; 40°C}.

7.2. Определить, какие базовые (точные) значения подходят для нечеткого множества «Зима».

7.3. Дано универсальное множество U={5, …, 15}, $\mu_A(7)=1$, $\mu_A(5)=0$. Как может задаваться нечеткое множество A.

7.4. Шторм оценивается по 10-бальной системе - U=[0,10]. [3,10] – шторм, [5,10] – буря. Найти точки перехода.

7.5. Дано универсальное множество U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Нечеткое множество А = «несколько» = {0,5/3; 0,8/4; 1/5; 0,9/6; 0,8/7; 0,5/8}. Каким является данное множество?

7.6. Дано универсальное множество U=[0,100] – жизненный опыт человека. Зрелость – [30,100], мудрость – [60,100]. Определите точки перехода.

7.7. Дано универсальное множество U=0+1+2… – бесконечное число звезд во вселенной. Вычислите функцию принадлежности $\mu_A(x)$ множества A = «малое».

7.8. Дано универсальное множество U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. A = «несколько» = {0/1; 0,1/2; 0,4/3; 0,6/4; 1/5; 0,9/6; 0,7/7; 0,5/8; 0/9; 0/10}. Найдите надмножества множества А.

7.9. Дано нечеткое множество A = «несколько» = {0/1; 0,1/2; 0,4/3; 0,6/4; 1/5; 0,9/6; 0,7/7; 0,5/8; 0/9; 0/10}. Найдите ближайшее четкое множество A^*.

7.10. Определите степень включения нечеткого множества A в нечеткое множество B, если

$$A = \{< 0{,}2 / x_2 >, < 0{,}7 / x_3 >, < 0{,}5 / x_5 >\},$$

$$B = \{0{,}9 / x_1 >, < 0{,}4 / x_2 >, < 0{,}5 / x_3 >, < 0{,}8 / x_5 >\}.$$

7.11. Даны два нечетких множества:

$$A = \{(15;1), (16;0,9), (17;0,8), (18;0,4), (19;0,3), (20;0)\},$$

$$B = \{(15;0), (16;0,1), (17;0,2), (18;0,6), (19;0,7), (20;1)\}.$$

Найти максиминное объединение этих множеств.

7.12. Даны множества:

$$A = \{< 0{,}2 / x_1 >, < 0{,}7 / x_2 >, < 0{,}5 / x_3 >\},$$

$$B = \{0{,}7 / x_1 >, < 0{,}4 / x_2 >, < 0{,}5 / x_3 >\}.$$

Найти множество $C = A \cup B$ ограниченным способом.

7.13. Дано нечеткое множество $A=\{x_1/0{,}2;\ x_2/1;\ x_3/0{,}7;\ x_4/0{,}5\}$. Определите результат применения отрицания Сугено с коэффициентом Сугено, равным 3.

7.14. Дано множество $\{1/0{,}2;\ 2/0{,}25;\ 3/0{,}44;\ 4/0{,}67;\ 5/0{,}86\}$.Произвести его концентрацию.

7.15. При y = 0,8 значение произведения Гамахера равно 0,10. Чему равно x?

7.16. Дано нечеткое множество

$$A=\{x_1/0{,}5;\ x_2/0;\ x_3/0{,}7;\ x_4/0{,}8;\ x_5/1;\ x_6/0;\ x_7/0{,}4;\ x_8/0{,}2\}.$$

Найти $A_{0,7}$.

7.17. Дано универсальное множество U={вольеры в зоопарке} и нечеткие множества:

$$A = \text{«популярное»} = \left\{ x_1/0{,}9;\ x_2/0{,}7;\ x_3/0{,}2;\ x_4/1;\ x_5/0{,}1 \right\},$$

$$B = \text{«теплое»} = \left\{ x_1/0{,}3;\ x_2/0{,}1;\ x_3/0{,}5;\ x_4/0;\ x_5/0{,}7 \right\}.$$

Найти четкое множество, которое является ближайшим к множеству «средне популярное и холодное».

7.18. Дано нечеткое множество $A=\{x_1/0{,}1;\ x_2/0{,}7;\ x_3/1;\ x_4/0{,}2;\ x_5/0{,}8\}$. Найти энтропию данной системы.

7.19. Дано отношение A=«нравится»:

	Вася	*Дима*	*Оля*	*Катя*
Вася	0,7	0,7	0,3	0,8
Дима	0,5	1	1	0,5
Оля	0,7	0	0	1
Катя	1	0,6	0,9	0,5

Определить обычное подмножество α-уровня (α=0,8).

7.20. Вычислить первую проекцию отношения A, заданного матрицей и расположить в порядке возрастания:

	Вася	*Дима*	*Оля*	*Катя*
Вася	0,7	0,7	0,3	0,8
Дима	0,5	1	1	0,5
Оля	0,7	0	0	1
Катя	1	0,6	0,9	0,5

7.21. Функция принадлежности нечеткого числа изображена на графике (рис. 7.9). Определить аналитический вид нечеткого числа.

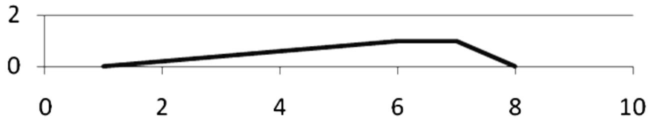


Рис. 7.9

7.22. Определите $\mu_A(x)$ для нечеткого числа, заданного тройкой <11, 17, 29> при x=13.

7.23. Пусть «*возраст*» – булева лингвистическая переменная с терм-множеством вида T(*возраст*)={*молодой, немолодой, старый, нестарый, очень молодой, не молодой и не старый, молодой или не очень старый, ...*}. Найдите атомарные термы.

7.24. Пусть U=V={1,2,3,4},

A=«большой»={<1/0>,<2/0,2>,<3/0,6>,<4/1>},

F=«примерно равны»=

	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Найти множество B, используя принцип обобщения.

7.25. Даны высказывания A = (x_1/0,2; x_2/0; x_3/0,6; x_4/0,7) и B=(x_1/0,4; x_2/0,2; x_3/0; x_4/0,7). Определить как выглядит высказывание $A \rightarrow B$ по Мамдани.

7.26. Рассчитать импликацию по Kleene-Dienes-Lu, если $\mu_A(x) = 0{,}2$, а $\mu_B(y) = 0{,}5$.

Список литературы

К главе 1

1. Лихтарникова Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика: Курс лекций. СПб.: Лань, 1998.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Наука, 1999.
3. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб.: БВХ-Петербург, 2004.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2006.
5. Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В.. Дискретная математика: Учебник для студентов втузов. М.: ООО «Издательства АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2003.
6. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.

К главе 2

1. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.:Наука, 1983.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Наука, 1999.
3. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб.: БВХ-Петербург, 2004.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2006.
5. Гусева А.И. Учимся информатике: задачи и методы их решения. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2005.
6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
7. Свами М., Тхуласироман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.
8. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2006.

К главе 3

1. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Наука, 1999.
2. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб.: БВХ-Петербург, 2004.

3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2006.
4. Гусева А.И. Учимся информатике: задачи и методы их решения. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2006.

К главе 4

1. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Наука, 1999.
2. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб.: БВХ-Петербург, 2004.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2006.
4. Гусева А.И. Учимся информатике: задачи и методы их решения. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2005.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2006.

К главе 5

1. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Наука, 1999.
2. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. СПб.: БВХ-Петербург, 2004.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2006.
4. Гусева А.И. Учимся информатике: задачи и методы их решения. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2005.

К главе 6

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965.
3. Оре О. Теория графов. – 2-е изд. М.: Наука, 1980.
4. Свами М., Тхулалираман К. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.

5. Татт У. Теория графов./Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
6. Уилсон Р. Введение в теорию графов./Пер с англ. М.: Мир, 1977.
7. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
8. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. Мир, 1977.
9. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Наука, 2000.

К главе 7

1. Яхъяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети. М.: Бином, 2006г.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. М.: Горячая линия – Телеком, 2007.
3. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. Санкт-Петербург, 2002.
4. Птускин А. С. Нечеткие модели и методы в менеджменте. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008.
5. Корченко А.Г. Построение систем защиты информации на нечетких множествах. М.: МК-Пресс, 2006.