3. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

1. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Umfangreiche empirische Untersuchungen haben folgende statistischen bzw. probabilistischen Zusammenhänge ergeben:

- Von 100 Studenten können 60 mit einem Web-Browser umgehen.
- Von 100 Schülern können 80 mit einem Web-Browser umgehen.
- Unter der restlichen Bevölkerung (also weder Student noch Schüler) können von 100 Personen 24 mit einem Web-Browser umgehen.
- Die Bevölkerung besteht zu 20% aus Studenten, zu 30% aus Schülern und zu 50% aus sonstigen Personen.

Welches ist die wahrscheinlichste Bevölkerungsgruppe (Studenten, Schüler oder Sonstige), zu der ein Besucher (also eine im Umgang mit einem Web-Browser geübte Person) Ihrer privaten Web-Seite gehört? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Bayes.

Aufgabe 1: Induktion **10 Punkte**

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der FIBONACCI-Zahlen ist definiert als

$$F_n =_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2 \text{ sowie} \qquad F_0 =_{\text{def}} 0,\ F_1 =_{\text{def}} 1.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Aufgabe 7: Rekursionen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} 2F_{n-1} + 3F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2 \\ F_1 &=_{\text{def}} 2 \\ F_0 &=_{\text{def}} 3 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$.

(b) Bestimmen Sie F_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitstheorie 10 Punkte

Beim Würfelspiel *Kniffel* (*Yahtzee, Knobeln, Pasch*) wird mit fünf Würfeln gespielt. Jeder Spieler darf in einer Runde bis zu drei Mal hintereinander würfeln. Dabei darf man „passende“ Würfel zur Seite legen und mit den verbleibenden Würfeln weiterwürfeln. Die nach dem dritten Wurf liegenden Würfeln werden als Spielergebnis gewertet.

Eine *Straße* besteht aus mindestens vier aufeinander folgende Augenzahlen. Es gibt *kleine* Straßen mit den vier Augenzahlen 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 sowie *große* Straßen mit den fünf Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 2, 3, 4, 5, 6. Große Straßen bringen mehr Punkte als kleine Straßen.

In einer gegebenen Spielsituation sind die beiden Straßen die einzigen Spielfiguren, für die Ihnen auf dem Spielzettel noch Spielergebnisse fehlen. Daher versuchen Sie Straßen zu würfeln.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf eine kleine Straße zu bekommen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf eine beliebige Straße zu bekommen?

(c) Wie oft müssen Sie Würfe mit allen Würfeln im Erwartungswert wiederholen, um eine beliebige Straße in einem Wurf zu bekommen?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die nach zwei Würfen zur Seite gelegte kleine Straße 2, 3, 4, 5 im dritten Wurf in eine große Straße umwandeln?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im dritten Wurf eine Straße zu bekommen, wenn Sie nach zwei Würfen 3 und 4 zur Seite gelegt haben und Sie im dritten Wurf mit drei Würfeln weiterwürfeln?

Aufgabe 3: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1\}$ gibt es, die keine Nullstelle besitzen?

(b) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, die keine Nullstelle besitzen?

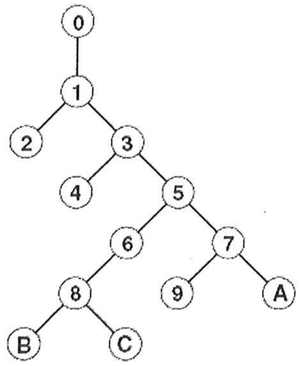
(c) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte 0 und 1 genau gleich oft vorkommen?

(d) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte 0, 1 und 2 genau gleich oft vorkommen?

(e) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1, 2\}$ gibt es, für die stets $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ gilt?

Aufgabe 1: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$:



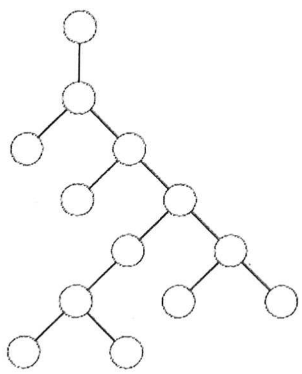
Die Knotenmenge V ist geordnet: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \mathsf{A} < \mathsf{B} < \mathsf{C}$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

(c) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

(d) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_1 \dots t_{11}$ monoton aufsteigend ist, d.h., damit $t_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in [10]$ gilt?



(e) Betrachten Sie den aus T erzeugten Graphen $T^2 = (V, E')$ mit

$$E' =_{\text{def}} E \cup \{ \{u, v\} \mid u, v \in V \text{ und es gibt ein } z \in V \text{ mit } \{u, z\} \in E \text{ und } \{z, v\} \in E \}$$

Wie groß ist der chromatische Index $\chi'(T^2)$?

Aufgabe 4: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1,2,3,4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen die Gruppe $\mathcal{S}_4$. Das neutrale Element der Gruppe ist $\mathrm{id} : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} : x \mapsto x$. Wir betrachten die folgenden in Zyklenschreibweise gegebenen Permutationen:

$$p = (1\ 2)(3\ 4), \qquad q = (1\ 2)(3)(4)$$

(a) Gilt $p \circ p = \mathrm{id}$?

(b) Gilt $p \circ q = q \circ p$?

(c) Es seien $r =_{\mathrm{def}} p \circ q$ und $U =_{\mathrm{def}} \{\mathrm{id}, p, q, r\}$. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Elemente von U an.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge U für jedes Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält.

(e) Aus den beiden obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist. Ist die Gruppe $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ isomorph zur Gruppe U?

Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

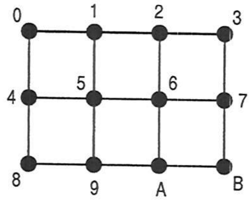
Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ heißt *biquadratfrei*, wenn es keine Biquadratzahl k^4 mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ gibt, die n teilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der biquadratfreien Zahlen zwischen 2 und 1000.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 2: Graphentheorie **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{0, \ldots, 9, \mathsf{A}, \mathsf{B}\}$:



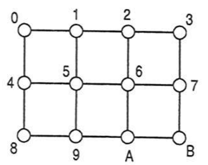
(a) Ist der Graph G hamiltonsch? - Wenn ja, geben Sie einen Hamiltonkreis an.

ja - 8 4 0 1 5 6 2 3 7 B A 9 8

(b) Ist der Graph G eulersch? - Wenn ja, geben Sie einen Eulerkreis an.

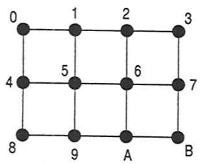
Nein

(c) Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$? - Geben Sie eine passende Knotenfärbung an.



2

(d) Was ist der chromatische Index $\chi'(G)$? - Geben Sie eine passende Kantenfärbung an.



4

(e) Ist der Graph G bipartit? - Wenn ja, geben Sie eine Partition der Knotenmenge an.

ja

Aufgabe 3: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Die Menge der bijektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, wobei wir die Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Abbildungen f und g als $f \circ g : x \mapsto g(f(x))$ definieren. Das neutrale Element der Gruppe ist $\mathrm{id} : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\} : x \mapsto x$.

Wir betrachten die beiden bijektiven Funktionen $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad g : x \mapsto 1 - x$$

(a) (*2 Punkte*) Gilt $f \circ g = g \circ f$?

(b) (*4 Punkte*) Es seien $r =_{\text{def}} f \circ g$, $s =_{\text{def}} g \circ f$ und $U =_{\text{def}} \{\mathrm{id}, f, g, r, s\}$. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Elemente von U an.

(c) (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Menge U für jedes Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält.

(d) (*2 Punkte*) Aus den beiden obigen Aussagen folgt, dass U eine Gruppe ist. Ist U eine zyklische Gruppe?

Aufgabe 6: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n = \langle S_n, \circ \rangle$ bezeichnen wir die Gruppe der Permutationen von n Elementen mit der Hintereinanderausführung $\circ$, wobei diesmal $\pi \circ \sigma : [n] \to [n] : x \mapsto \sigma(\pi(x))$ für Permutationen $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt.

Das *Zentrum* Z_n von $\mathcal{S}_n$ ist wie folgt definiert:

$$Z_n =_{\text{def}} \{ \pi \in \mathcal{S}_n \mid \pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi \text{ für alle } \sigma \in \mathcal{S}_n \}$$

(a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie Z_2.

(b) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie Z_3.

(c) (*4 Punkte*) Wie viele Elemente enthält Z_n für $n > 3$? - Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7: Rekursionen **10 Punkte**

Betrachten Sie die folgende inhomogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} F_{n-2} + a \qquad \text{für } n \geq 2 \\ F_1 &=_{\text{def}} 1 \\ F_0 &=_{\text{def}} 0 \end{aligned}$$

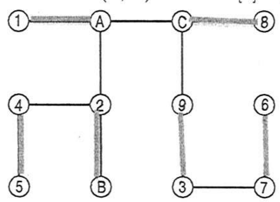
Hierbei steht a für eine beliebige reelle Zahl.

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(x)$ der Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (in Abhängigkeit von a).

(b) Bestimmen Sie F_n für $c = 2$.

Aufgabe 2: Graphentheorie 10 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = [9] \cup \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$:



Die Knotenmenge V ist wie folgt geordnet: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \mathsf{A} < \mathsf{B} < \mathsf{C}$

(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?

8

(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?

C

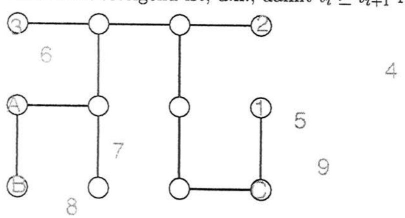
(c) Wie viele perfekte Matchings besitzt der Baum?

1

(d) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?

A 4 2 7 3 9 C C 2 A

(e) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_1 \dots t_{10}$ monoton absteigend ist, d.h., damit $t_i \geq t_{i+1}$ für alle $i \in [9]$ gilt?



Diskrete Strukturen SS 2012 1. Termin

Aufgabe 3: Algebraische Strukturen 10 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass in jeder zyklischen additiven Gruppe $G = \langle G, + \rangle$ ungerader Ordnung die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine zyklische additive Gruppe $G = \langle G, + \rangle$ gerader Ordnung gibt, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.

Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

(c) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	b	a	b
b	a	b	c
c	c	c	b

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? ☐

(d) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	b	c	c
b	a	b	c
c	a	a	b

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? ☐

(e) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	b	c	b
b	c	b	c
c	b	c	b

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? ☐

Aufgabe 2: Kombinatorik **10 Punkte**

Zur Bildung von Passwörtern sei die Zeichenmenge $\Sigma =_{\text{def}} \{\mathsf{A}, \mathsf{E}, \mathsf{I}, \mathsf{U}, 2, 4, 6, 8\}$ aus Buchstaben und Ziffern gegeben.

Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Passwörter und tragen Sie das Ergebnis in die jeweilige Box ein. Sie brauchen dabei den konkreten Zahlwert nicht ausrechnen.

(a) Wie viele Passwörter mit genau 8 Zeichen aus Σ gibt es?

☐

(b) Wie viele Passwörter mit genau 8 Zeichen aus Σ beginnen nicht mit einer Ziffer?

☐

(c) Wie viele Passwörter mit genau 8 Zeichen aus Σ enthalten ein Zeichen mindestens zweimal?

☐

(d) Wie viele Passwörter mit genau 8 Zeichen aus Σ enthalten genau 4 A's?

☐

(e) Wie viele Passwörter mit genau 8 Zeichen aus Σ enthalten genau 4 A's oder 4 U's?

☐

Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

(c) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	a	c
c	a	c	b

Ist $\circ$ assoziativ? ☐
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? $\boxed{X}$

(d) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Ist $\circ$ assoziativ? $\boxed{X}$
Gibt es ein neutrales Element? $\boxed{X}$
Gibt es stets inverse Elemente? $\boxed{X}$
Ist $\circ$ kommutativ ? $\boxed{X}$

(e) Trägermenge $A = \{a, b, c\}$ mit dem Operator:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	a
b	b	a	b
c	a	b	a

Ist $\circ$ assoziativ? $\boxed{X}$
Gibt es ein neutrales Element? ☐
Gibt es stets inverse Elemente? ☐
Ist $\circ$ kommutativ ? $\boxed{X}$

Aufgabe 2: Kombinatorik **10 Punkte**

Zur Bildung von Passwörtern sei die Zeichenmenge $\Sigma =_{\text{def}} \{\mathsf{A}, \mathsf{E}, \mathsf{I}, \mathsf{O}, \mathsf{U}, 0, 2, 4, 6, 8\}$ aus Buchstaben und Ziffern gegeben.

Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Passwörter und tragen Sie das Ergebnis in die jeweilige Box ein. Sie brauchen dabei den konkreten Zahlwert nicht ausrechnen.

(a) Wie viele Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ gibt es?

$$\boxed{10^{10}}$$

(b) Wie viele Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ beginnen nicht mit einer Ziffer?

$$\boxed{5 \cdot 10^9}$$

(c) Wie viele Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ enthalten jedes Zeichen genau einmal?

$$\boxed{10!}$$

(d) Wie viele Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ enthalten genau 3 O's?

$$\boxed{\binom{10}{3} \cdot 9^7}$$

(e) Wie viele Passwörter mit genau 10 Zeichen aus Σ enthalten genau 3 O's und 2 U's?

$$\boxed{\binom{10}{3}\binom{7}{2} \cdot 8^5}$$

Leerseite für Lösungen. Bitte machen Sie jeweils deutlich, auf welche Aufgabe Sie sich beziehen.

Aufgabe 3: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Eine *ID-Nummer* bestehe aus einer Folge von drei Buchstaben über dem Alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\dots,\mathtt{z}\}$ und einer anschließenden Folge von fünf Ziffern aus $\{\mathtt{0},\mathtt{1},\dots,\mathtt{9}\}$.

Wie viele verschiedene ID-Nummern gibt es, wenn für die Ziffern Wiederholungen zulässig sind, für die Buchstaben aber nicht? (3 Punkte)

Das angegebene Alphabet besteht aus 26 Buchstaben; damit gibt es

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10^5$$

verschiedene ID-Nummern.

(b) Wie viele Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, die genau 3 Nullstellen besitzen? (3 Punkte)

Es gibt für $n = 1$ keine (da $\|\{0,1\}^1\| = 2$ und $\|f(\{0,1\}^1)\| \leq 2$ ist) und für $n \geq 2$

$$\binom{2^n}{3} \cdot 2^{2^n-3}$$

viele solche Funktionen.

(c) Wie viele Zahlen aus $M = \{100, 101, \dots, 200\}$ sind durch keine der Zahlen 3, 4, 5, 6 teilbar (ohne Rest)?

(4 Punkte)

Wir benutzen das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Zunächst stellen wir fest: Ist eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar. Damit reduziert sich das Problem auf die Frage, wie viele Zahlen aus der angegebenen Menge weder durch 3 noch durch 4 noch durch 5 teilbar sind.

Wir definieren für $X \subseteq \{3,4,5\}$:

$$M_X = \|\{\ z \mid z \in M \ \wedge \ \text{jede Zahl aus } X \text{ teilt } z\}\|$$

Damit ist die gesuchte Anzahl gegeben durch

$$\begin{aligned} N &=_{\text{def}} 101 - \left(M_{\{3\}} + M_{\{4\}} + M_{\{5\}} - M_{\{4,5\}} - M_{\{3,5\}} - M_{\{3,4\}} + M_{\{3,4,5\}}\right) \\ &= 101 - 33 - 26 - 20 + 5 + 6 + 8 - 1 = 40. \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation } \}.$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Verknüpfung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 : [n] \to [n] : x \mapsto \pi_2(\pi_1(x)).$$

Damit ist $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ eine Gruppe.

Ferner sei die Permutation π in Zyklenschreibweise gegeben durch $\pi = (1\,2)(3)(4\,6\,5)$.

(a) Geben Sie π in Matrix- und in Tupelschreibweise an. (3 Punkte)

In Matrixschreibweise lautet die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

in Tupelschreibweise also

$$\pi = (2, 1, 3, 6, 4, 5).$$

(b) Bestimmen Sie das Inverse von π in $\mathcal{S}_6$ (in Zyklenschreibweise). (2 Punkte)

Das Inverse von π ist

$$\pi^{-1} = (1\,2)(3)(6\,5\,4).$$

Dies sieht man wie folgt: Die Zyklen $(1\,2)$ und (3) sind jeweils ihre eigenen Inversen; für den Zyklus $(6\,5\,4)$ überlegt man sich schnell (z. B. anhand der Matrixdarstellung aus (a)), wie man die Elemente permutieren muss, um die Permutation π „rückgängig" zu machen.

(c) Bestimmen Sie $\pi^{-1} \circ \pi^3$ in $\mathcal{S}_6$. (2 Punkte)

Assoziativität ist gegeben, berechnet also

$$\pi^2 = (1, 2, 3, 5, 6, 4).$$

(d) Welche Ordnung besitzt π in $\mathcal{S}_6$? (3 Punkte)

Da π einen Zyklus $(1\,2)$ der Ordnung 2 sowie einen Zyklus $(4\,6\,5)$ der Ordnung 3 enthält, besitzt π die Ordnung

$$\text{kgV}(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Leerseite für Lösungen. Bitte machen Sie jeweils deutlich, auf welche Aufgabe Sie sich beziehen.

Aufgabe 3: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Eine *ID-Nummer* bestehe aus einer Folge von drei Buchstaben über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{z}\}$ und einer anschließenden Folge von fünf Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Wie viele verschiedene ID-Nummern gibt es, wenn für die Ziffern Wiederholungen zulässig sind, für die Buchstaben aber nicht? (3 Punkte)

Das angegebene Alphabet besteht aus 26 Buchstaben; damit gibt es

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10^5$$

verschiedene ID-Nummern.

(b) Wie viele Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1,2\}$ gibt es, die genau 3 Nullstellen besitzen? (3 Punkte)

Es gibt für $n = 1$ keine (da $\|\{0,1\}^1\| = 2$ und $\|f(\{0,1\}^1)\| \leq 2$ ist) und für $n \geq 2$

$$\binom{2^n}{3} \cdot 2^{2^n - 3}$$

viele solche Funktionen.

(c) Wie viele Zahlen aus $M = \{100, 101, \ldots, 200\}$ sind durch keine der Zahlen 3, 4, 5, 6 teilbar (ohne Rest)? (4 Punkte)

Wir benutzen das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Zunächst stellen wir fest: Ist eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar. Damit reduziert sich das Problem auf die Frage, wie viele Zahlen aus der angegebenen Menge weder durch 3 noch durch 4 noch durch 5 teilbar sind.

Wir definieren für $X \subseteq \{3,4,5\}$:

$$M_X = \|\{\ z \mid z \in M \ \wedge \text{ jede Zahl aus } X \text{ teilt } z\}\|$$

Damit ist die gesuchte Anzahl gegeben durch

$$\begin{aligned} N &=_{\text{def}} 101 - \left(M_{\{3\}} + M_{\{4\}} + M_{\{5\}} - M_{\{4,5\}} - M_{\{3,5\}} - M_{\{3,4\}} + M_{\{3,4,5\}}\right) \\ &= 101 - 33 - 26 - 20 + 5 + 6 + 8 - 1 = 40. \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Algebraische Strukturen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation } \}.$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Verknüpfung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 : [n] \to [n] : x \mapsto \pi_2(\pi_1(x)).$$

Damit ist $\mathcal{S}_n = \langle \mathcal{S}_n, \circ \rangle$ eine Gruppe.

Ferner sei die Permutation π in Zyklenschreibweise gegeben durch $\pi = (1\,2)(3)(4\,6\,5)$.

(a) Geben Sie π in Matrix- und in Tupelschreibweise an. (3 Punkte)

In Matrixschreibweise lautet die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

in Tupelschreibweise also

$$\pi = (2, 1, 3, 6, 4, 5).$$

(b) Bestimmen Sie das Inverse von π in $\mathcal{S}_6$ (in Zyklenschreibweise). (2 Punkte)

Das Inverse von π ist

$$\pi^{-1} = (1\,2)(3)(6\,5\,4).$$

Dies sieht man wie folgt: Die Zyklen $(1\,2)$ und (3) sind jeweils ihre eigenen Inversen; für den Zyklus $(6\,5\,4)$ überlegt man sich schnell (z. B. anhand der Matrixdarstellung aus (a)), wie man die Elemente permutieren muss, um die Permutation π „rückgängig“ zu machen.

(c) Bestimmen Sie $\pi^{-1} \circ \pi^3$ in $\mathcal{S}_6$. (2 Punkte)

Assoziativität ist gegeben, berechnet also

$$\pi^2 = (1, 2, 3, 5, 6, 4).$$

(d) Welche Ordnung besitzt π in $\mathcal{S}_6$? (3 Punkte)

Da π einen Zyklus $(1\,2)$ der Ordnung 2 sowie einen Zyklus $(4\,6\,5)$ der Ordnung 3 enthält, besitzt π die Ordnung

$$\mathrm{kgV}(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

2. Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.

Aufgabe 7: Analysis 10 Punkte

Hinweis: Bei den beiden folgenden Aufgaben denken Sie bitte daran, dass Sie Potenzreihen gliedweise differenzieren und integrieren können.

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) für die Funktion $f(x) =_{\text{def}} \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

(b) Zu welcher Funktion $f(x)$ gehört die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot x^n$?

Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele Bitstrings der Länge 7 sind Palindrome ? *Hinweis*: Ein Wort ist ein *Palindrom* genau dann, wenn es von links nach rechts gelesen und von rechts nach links gelesen das gleiche Wort ergibt. Zum Beispiel ist 0110 ein Palindrom (der Länge 4).

(b) Wie viele verschiedene Wörter können Sie aus dem Wort LOTTO bilden?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit dem gleichzeitigen Würfeln mit fünf Würfeln ein *full house*, d.h., drei gleiche Augenzahlen und zwei gleiche Augenzahlen, die aber verschieden zu den drei gleichen sind, zu erhalten?

(d) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1\}$ mit genau k Nullstellen gibt es?

(e) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1, 2\}$ mit genau k Nullstellen gibt es?

Aufgabe 3: Lineare Algebra **10 Punkte**

(a) Ergänzen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Kombinatorik **10 Punkte**

Bestimmen Sie die Anzahl der Primzahlen im Bereich zwischen 60 und 120.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 7: Kombinatorik **10 Punkte**

(a) Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit $n \geq 2$ gibt es, bei denen die 1 vor 2 vorkommt?

(b) Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit $n \geq 3$ gibt es, bei denen die 1 vor 2 und die 2 vor 3 vorkommt?

(c) Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit $n \geq 3$ gibt es, bei denen die 1 vor 2 aber die 2 nicht vor 3 vorkommt?

(d) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte 0 und 1 genau gleich oft vorkommen?

(e) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2\}^n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ gibt es, bei denen die Funktionswerte $0, 1$ und 2 genau gleich oft vorkommen?

Aufgabe 3: Lineare Algebra **10 Punkte**

(a) Ergänzen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass gilt:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Kombinatorik **10 Punkte**

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ nennen wir *quadratfrei*, wenn es keine Quadratzahl k^2 mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ gibt, die n teilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der quadratfreien Zahlen bis 120.

Hinweis: Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.