Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

2. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 24.04.2015 **Abgabe:** 01.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Wie viele Verlosungen von 5 identischen Kaffeemaschinen unter 25 Teilnehmern gibt es?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau 7 Chips auf die drei Felder 1-12, 13-24, 25-36 beim Roulette zu legen?

(c) Wie viele Binärzahlen der Länge 8 beginnen mit einer 0 oder enden mit 11?

(d) Sie haben 5 Informatik-Bücher, 4 Mathematik-Bücher und 3 Philosophie-Bücher zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf eine Reise zwei Bücher aus verschiedenen Themenbereichen mitzunehmen?

(e) In einer Gruppe von 11 Personen sind 5 Vorstandsposten (ohne Personalunion) für jeweils eine Person zu vergeben: *Präsidentin*, *Vizepräsidentin*, *Geschäftsführerin*, *stellvertretende Geschäftsführerin*, *Schatzmeisterin*. Wie viele verschiedene Vorstände sind möglich?

(f) Wie viele verschiedene Wörter können Sie aus dem Wort PICHICHI bilden?

(g) Welcher Faktor $B(n,k)$ erfüllt die Gleichung $\binom{n}{k} = B(n,k) \cdot \binom{n-1}{k-1}$?

(h) Welchen Koeffizienten besitzt x^6y^7 in $(x+y)^{13}$?

(i) Welchen Koeffizienten besitzt $x^3y^3z^7$ in $(x+y+z)^{13}$?

(j) Wie können Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ vereinfachen?

Lösung:

(a) Die Situation entspricht Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge. Somit gilt:

$$\binom{25}{5} = 53\,130$$

(b) Dies entspricht Ziehen ohne Reihenfolge mit Zurücklegen (gezogen werden die Felder). Somit ergibt sich folgende Rechnung $(n = 3, k = 7)$:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{9}{7} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

(c) Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned} B_{11} &=_{\text{def}} \{u11 \mid u \in \{0,1\}^6\} \\ B_0 &=_{\text{def}} \{0u \mid u \in \{0,1\}^7\} \\ B_{011} &=_{\text{def}} \{0u11 \mid u \in \{0,1\}^5\}. \end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\|B_{11} \cup B_0\| = \|B_{11}\| + \|B_0\| - \|B_{011}\| = 2^6 + 2^7 - 2^5 = 160.$$

(d) Wir bilden alle Buch-Tupel, die der Anforderung genügen, und bestimmen mit der Produktregel ihre Anzahl. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|I \times M\| + \|M \times P\| + \|I \times P\| &= \|I\| \cdot \|M\| + \|M\| \cdot \|P\| + \|I\| \cdot \|P\| \\ &= 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \\ &= 20 + 12 + 15 = 47. \end{aligned}$$

(e) Unter Ausschluss von Personalunion darf keine Person mehrere Posten ausüben. Losen wir jeder der Personen ihren Posten zu, entspricht dies Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge:

$$n^{\underline{k}} = 11^{\underline{5}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440.$$

(f) In diesem Wort kommt dreimal I, einmal P und jeweils zweimal C und H vor. Um die Anzahl der möglichen Wörter zu bestimmen, kann man sich zunächst überlegen wie viele Möglichkeiten es gibt die drei I's in das Wort einzubauen. Dies entspricht dem Modell Ziehen ohne Zurücklegen, Ohne Reihenfolge, also gibt es dafür $\binom{8}{3}$ verschiedene Möglichkeiten. Nun überlege man sich wie viele Möglichkeiten es gibt die 2 C's auf die restlichen 5 Stellen zu verteilen. Hierfür gibt es $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten. Für die restlichen Buchstaben wird analog vorgegangen. Am Ende werden alle Werte multipliziert, es ergibt sich:

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 1680$$

(g) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow B(n,k) = \frac{n}{k}$

(h) Mit dem Binomialtheorem folgt:

$$(x+y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \cdot x^{13-k} \cdot y^k$$

Es gibt also $\binom{13}{7} = 1716$ Monome von der Form x^6y^7

(i) $(x+y+z)^{13} = ((x+y)+z)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (x+y)^{13-k} z^k = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \left[\sum_{i=0}^{13-k} \binom{13-k}{i} x^{13-k-i} y^i \right] z^k$

Es gibt also $\binom{13}{7} \cdot \binom{6}{3} = 34\,320$ Monome der Form $x^3y^3z^7$

(j) Mit der Symmetrie des Binomialkoeffizienten und der Vandermonde Identität folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Kreativität: **10 Punkte**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Hinweis: Verwenden Sie im Induktionsschritt das PASCALsche Dreieck.

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1 \Rightarrow \binom{2}{1} = 2 \geq 2 = \frac{4^1}{2 \cdot \sqrt{1}}$
Induktionsvorraussetzung: Für n-1 gelte:

$$\binom{2(n-1)}{n-1} \geq \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n-1}}$$

Induktionsschritt: Zweimaliges anwenden des Pascalschen Dreiecks ergibt:

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-2}{n} + \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2}$$

$$= 2 \cdot \binom{2n-2}{n-1} + \frac{(2n-2)!}{n! \cdot (n-2)!} + \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}$$

$$= 2 \cdot \binom{2n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \cdot (n-1)!} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \cdot (n-1)!}$$

$$= 2 \cdot \left(\binom{2n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \binom{2n-2}{n-1}$$

$$= \frac{4n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

$$\overset{IV}{\geq} \frac{4n-2}{n} \cdot \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{(4n-2) \cdot \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n-1}} \cdot \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n}}$$

$$= 4 \cdot \frac{(4n-2) \cdot \sqrt{n}}{4n \cdot \sqrt{n-1}} \cdot \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n}}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{\frac{(4n-2)^2}{16n \cdot (n-1)}} \cdot \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n}}$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{16n^2 - 16n + 4}{16n^2 - 16n}}}_{>1} \cdot \frac{4^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{n}}$$

$$> \frac{4^n}{2 \cdot \sqrt{n}}$$

Transfer: **10 Punkte**

Sie arbeiten an einem Projekt zum Aufbau und Management eines *Sensornetzes* zur Überwachung submariner Vulkanaktivitäten mit. Dabei senden auf dem Meeresgrund verteilte Sensoren in regelmäßigen Abständen binär kodierte Messwerte an eine Basisstation. Ihre Aufgabe ist es, für die Basisstationen eine Software zur Aggregation dieser Datenstreams zu entwerfen, mit der es möglich ist, Abweichungen vom Normalverhalten zeitnah zu erkennen. Die Rausch-Charakteristik der Sensoren bringt es jedoch mit sich, dass zufällig beliebig lange und beliebig aussehende Bitfolgen in den Datenstream eingefügt werden können. In einem Analysemodul wollen Sie Rückschlüsse aus dem empfangenen auf den tatsächlich gesendeten Datenstream ziehen und diesen möglichst rekonstruieren.

Kombinatorische Vorüberlegungen legen nahe, dass es dazu wichtig ist zu zählen, wie oft ein Wort (also ein endliches Segment des Datenstreams) in einem anderen Wort als Teilwort vorkommen kann. Dazu führen Sie den *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* für Wörter $v = v_1 \dots v_m$ und $w = w_1 \dots w_n$ über einem beliebigen Alphabet ein:

$$\binom{w}{v} =_{\text{def}} \|\{\ (i_1, \dots, i_m) \mid i_1 < i_2 < \dots < i_m \text{ und } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = v\ \}\|$$

Beispielsweise gilt

$$\binom{abracadabra}{ab} = 5,$$

denn das Wort ab kommt im Wort $abracadabra$ genau fünf mal vor:

$$\textcolor{red}{ab}racadabra, \quad \textcolor{red}{a}bracada\textcolor{red}{b}ra, \quad abr\textcolor{red}{a}cada\textcolor{red}{b}ra, \quad abrac\textcolor{red}{a}da\textcolor{red}{b}ra, \quad abracad\textcolor{red}{ab}ra$$

Im Folgenden werden einige Schreibweisen für Wörter verwendet: v^n für ein Wort v ist das Wort, das aus genau n hintereinandergesetzten Wörtern v besteht, z.B. $(ab)^3 = ababab$. Für ein Wort v der Länge n bezeichnet $|v| = n$ die Länge von v, z.B. $|(ab)^3| = 6$.

Um mehr über den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten zu erfahren, versuchen Sie folgende Fragen zu beantworten:

(a) Wie groß ist $\binom{a^n}{a^m}$?

(b) Wie groß ist $\binom{a^{n_1} b^{n_2}}{a^{m_1} b^{m_2}}$?

(c) Wie groß ist $\binom{(ba)^n}{(ba)^m}$?

(d) Für welches Wort $v \in \{a, b\}^*$ der Länge 5 wird

$$\sum_{\substack{w \in \{a,b\}^* \\ |w| = m}} \binom{w}{v}$$

maximal?

(e) Wie könnte ein PASCALsches Dreieck für den oben definierten, verallgemeinerten Binomialkoeffizienten aussehen?

Lösung:

(a) Da jeder Index nur einmal vorkommen darf und die a's nicht unterschieden werden, entspricht dies Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge. Damit:

$$\binom{a^n}{a^m} = \binom{n}{m}$$

(b) Man überlege sich erst wie viele Möglichkeiten es gibt die a's anzuordnen, dann wie viele Möglichkeiten es gibt die b's anzuordnen. In beiden Fällen hat man Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge und damit:

$$\binom{a^{n_1}b^{n_2}}{a^{m_1}b^{m_2}} = \binom{n_1}{m_1} \cdot \binom{n_2}{m_2}$$

(c) Wir lösen diese Aufgabe mithilfe einer *stars and bars*-Darstellung. In dieser Lösung erhalten die Sterne und Striche folgende Interpretation, wenn man eine solche Darstellung von links nach rechts liest:
Ein Stern ($\star$) bedeutet, dass das nächste Zeichen als Bestandteil des Teilwortes ausgewählt wird.
Ein Strich ($|$) bedeutet, dass die nächsten zwei Zeichen übersprungen/ausgelassen werden.

Beispiel: Wenn man das Teilwort *ba* aus dem Wort *baba* auswählt (Auswahl jeweils blau markiert), so werden diese Auswahlen wie folgt mit Sternen und Strichen dargestellt:

Auswahl	Sterne und Striche
baba	$\star\star\|$
baba	$\star\|\star$
baba	$\|\star\star$

Jede Darstellung mit Sternen und Strichen besteht aus exakt $2m$ Sternen (da m a's und m b's ausgewählt werden müssen) und $n-m$ Strichen (da $2(n-m)$ Zeichen übersprungen werden müssen). Daher hat jede Darstellung mit Sternen und Strichen die Länge $n+m$.

Wir können jede Auswahl von $(ba)^m$ in $(ba)^n$ mit Sternen und Strichen kodieren, und umgekehrt können wir aus jeder Darstellung mit Sternen und Strichen, die aus $2m$ Sternen und $n-m$ Strichen besteht, wieder die Auswahl des Teilwortes $(ba)^m$ in $(ba)^n$ eindeutig bestimmen. Die Kodierung ist daher bijektiv.

Deswegen ist es ausreichend, die Anzahl der Darstellungen mit Sternen und Strichen zu zählen. Dies entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, $2m$ Sterne in einer Darstellung aus Sternen und Strichen mit $n+m$ Zeichen zu platzieren. Daher gilt:

$$\binom{(ba)^n}{(ba)^m} = \binom{n+m}{2m}$$

(d) Die Summe ist für jedes Wort der Länge 5

$$\binom{m}{5} \cdot 2^{m-5}$$

Beweis:
Wir berechnen die Summe aus der Aufgabenstellung für Wörter v beliebiger Länge n.

Es seien $m \geq n \geq 1$ und $v \in \{a,b\}^n$. Wir betrachten die Menge

$$B := \{(w, i_1, ..., i_n) | w \in \{a,b\}^m, i_1 < i_2 < \cdots < i_n \text{ und } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} = v\}$$

Zusätzlich definieren wir die folgenden Teilmengen von B:

$$\begin{aligned} C_w &:= \{(w, i_1, ..., i_n) | i_1 < i_2 < \cdots < i_n \text{ und } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} = v\} \\ D_{i_1,...,i_n} &:= \{(w, i_1, ..., i_n) | w \in \{a,b\}^m \text{ und } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} = v\} \end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst die Kardinalitäten von C_w und $D_{i_1,...,i_n}$. Die Definition von C_w entspricht gerade der Definition des verallgemeinerten Binomialkoeffizienten (die Tupel unterscheiden sich gerade in den Indizes $i_1, ..., i_n$), daher gilt $\|C_w\| = \binom{w}{v}$.

Im Gegensatz zu C_w unterscheiden sich die Tupel in $D_{i_1,...,i_n}$ gerade im gewählten Wort w, die Indizes $i_1, ..., i_n$ sind aber festgelegt. Für ein beliebiges Tupel in $D_{i_1,...,i_n}$ gilt, dass die Zeichen $w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_n}$ in einem Wort w festgelegt sind, aber an allen anderen Stellen beliebig gewählt sein können. Es gibt daher 2^{m-n} Wörter w der Länge m, die diese Eigenschaft erfüllen, somit gilt $\|D_{i_1,...,i_n}\| = 2^{m-n}$.

Darüber hinaus sind $\{C_w | w \in \{a,b\}^m\}$ und $\{D_{i_1,...,i_n} | 1 \leq i_1 < ... < i_n \leq m\}$ Partitionen von B. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \{a,b\}^m} \binom{w}{v} &= \sum_{w \in \{a,b\}^m} \|C_w\| \\ &= \|B\| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} \|D_{i_1,...,i_n}\| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} 2^{m-n} \\ &= \binom{m}{n} 2^{m-n} \end{aligned}$$

(e) Ein Pascalsches Dreieck für den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten könnte für Worte $w = a_1 \cdots a_n, v = b_1 \cdots b_m$ wie folgt aussehen:

$$\binom{w}{v} = \binom{a_1 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_m} = \begin{cases} \binom{a_2 \cdots a_n}{b_2 \cdots b_m} + \binom{a_2 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_m} & \textbf{falls } a_1 = b_1 \\ \binom{a_2 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_m} & \textbf{sonst} \end{cases}$$