

Mathematik: Diskrete Strukturen

Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

May 13, 2015

Vertiefung:

- (a) Drücken Sie die Anzahl der surjektiven Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^2$ mit Hilfe der Stirling-Zahlen zweiter Art aus.

Nach Lemma 4 (Potenzregel) und Kreuzprodukt Definition es gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} ||\{0, 1\}^n|| &= 2^n \\ ||\{0, 1\}^2|| &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

Wir muessen 2^n Funktionsargumente auf 4 Funktionswerte abbilden. Da Stirling-Zahlen auf nicht unterscheidbare Funktionswerte aufzuteilt, sollen wir noch mit $4!$ multiplizieren. Folglich:

$$4! \cdot \left\{ \begin{matrix} 2^n \\ 4 \end{matrix} \right\}$$

- (b) Kein Antwort
- (c) Von 18 Studierenden in einer Spezialvorlesung studieren 7 Mathematik, 9 Physik und 10 Informatik. Davon studieren 3 Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Informatik sowie 5 Physik und Informatik. Ein Student studiert sogar all drei Fächer. Wie viele Studierende studieren keines der drei Fächer?
Sei nach Voraussetzung:

$$||M|| = 7, ||I|| = 10, ||P|| = 9, ||M \cap P|| = 3, ||M \cap I|| = 3, ||P \cap I|| = 5, ||M \cap P \cap I|| = 1$$

Die gesamte Zahl der Studierenden, die in einer Spezialvorlesung studieren ist:

$$||M \cup P \cup I||$$

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$\begin{aligned} ||M \cup P \cup I|| &= ||M|| + ||P|| + ||I|| - ||M \cap P|| - ||M \cap I|| - ||I \cap P|| + ||M \cap P \cap I|| \\ &= 7 + 9 + 10 - 3 - 3 - 5 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Folglich die Anzahl der Studierende, die keines der drei Fächer studieren ist $18 - 16 = 2$.

- (d) Für drei Mengen A, B und C gelten folgende Eigenschaften: $||A|| = 63, ||B|| = 91, ||C|| = 44, ||A \cap B|| = 25, ||A \cap C|| = 23, ||C \cap B|| = 21$. Außerdem gelte $||A \cup B \cup C|| = 139$. Wie groß ist $||A \cap B \cap C||$?

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$||A \cup B \cup C|| = ||A|| + ||B|| + ||C|| - ||A \cap B|| - ||A \cap C|| - ||C \cap B|| + ||A \cap B \cap C||$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||A \cap B \cap C|| &= ||A \cup B \cup C|| - ||A|| - ||B|| - ||C|| + ||A \cap B|| + ||A \cap C|| + ||C \cap B|| \\ \Rightarrow ||A \cap B \cap C|| &= 139 - 63 - 91 - 44 + 25 + 23 + 21 = 10\end{aligned}$$

- (e) Für zwei Mengen A und B gelte: $||A|| = 100$, $||B|| = 60$ und die Anzahl der Elemente von A B, die zu genau einer der beiden Mengen gehören, ist genau doppelt so groß, wie die Anzahl der Elemente, die in beiden Mengen liegen. Wie viele Elemente liegen in beiden Mengen?

$$\begin{aligned}||A \Delta B|| &= 2 \cdot ||A \cap B|| \\ ||A \cup B|| &= ||A \Delta B|| + ||A \cap B|| \\ ||A \cup B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cap B|| \\ ||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cup B|| \\ ||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - 3||A \cap B|| \\ 4 \cdot ||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| \\ ||A \cap B|| &= \frac{||A|| + ||B||}{4} = \frac{100 + 60}{4} = 40\end{aligned}$$

- (f) Wie viele Zahlen im Bereich $1, 2, \dots, 200$ sind durch keine der Zahlen 3, 7, 11, 27 teilbar?

$$\begin{aligned}200 - \left(\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{27} \right\rfloor \right) \\ + \left\lfloor \frac{200}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{77} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{189} \right\rfloor &= 200 - (66 + 28 + 18 + 7) + 9 + 6 + 2 + 2 + 1 = 101\end{aligned}$$