

## 8. Übungsblatt

**Ausgabe:** 05.06.2015    **Abgabe:** 12.06.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie weitere Begriffe für einen Graphen  $G = (V, E)$ :

- Eine Folge  $(d_1, \dots, d_n)$  natürlicher Zahlen  $d_i \geq 0$  mit  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  heißt *Gradfolge* des Graphen  $G$ , falls  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\deg_G(v_i) = d_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt.
- Der *Abstand*  $d_G(u, v)$  zwischen Knoten  $u, v \in V$  in  $G$  ist die Länge eines kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  in  $G$ , falls ein Weg existiert; anderenfalls gilt  $d_G(u, v) = \infty$ .

### Vertiefung:

10 Punkte

- Welche Gradfolge besitzt  $M_{3,4}$ ?
- Gibt es einen Graphen mit Gradfolge  $(5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$ ? - Und wenn ja, welchen?
- Gibt es einen Graphen mit Gradfolge  $(5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$ ? - Und wenn ja, welchen?
- Gibt es einen Graphen mit Gradfolge  $(5, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ? - Und wenn ja, welchen?
- Wie groß ist der maximale Abstand zweier Knoten im Hyperwürfel  $Q_d$ ?
- Wie groß ist der maximale Abstand zweier Knoten im Gittergraphen  $M_{n,n}$ ?
- Welche Knoten haben im  $M_{n,n}$  den kleinsten maximalen Abstand zu einem anderen Knoten?
- Welche Knoten haben im  $M_{n,n}$  den größten maximalen Abstand zu einem anderen Knoten?
- Wie viele Wege der Länge  $k$  enthält ein  $r$ -regulärer Graph mit  $n$  Knoten?
- Wie viele Kreise der Länge  $k$  enthält der vollständige Graph  $K_n$ ?

### Kreativität:

10 Punkte

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt *Splitgraph*, falls es eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  gibt, sodass  $G[U]$  ein vollständiger Graph und  $G[V \setminus U]$  ein leerer Graph ist.

Zeigen Sie folgende Aussage:

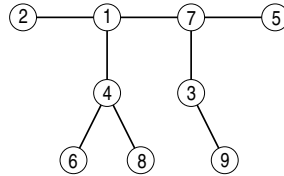
Es sei  $G = (V, E)$  ein Splitgraph mit  $\|V\| \geq 4$ . Kein induzierter Teilgraph von  $G$  mit vier Knoten ist ein Kreis der Länge 4 oder ein Paar nicht inzidenter Kanten.

### Selbststudium:

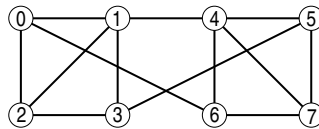
10 Punkte

Erarbeiten Sie sich den Inhalt des Abschnitts „Bäume und Wälder“ (Abschnitt 3.2) aus dem Skriptum *Mathematik: Diskrete Strukturen* (Version v4.10 oder höher) und beantworten Sie folgende Fragen:

- (a) Ist jeder zusammenhängende Graph mit  $n$  Knoten und  $n - 1$  Kanten ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Wie viele Spannbäume enthält der Hyperwürfel  $Q_3$ ?
- (c) Welchen PRÜFER-Code besitzt der folgende, markierte Baum?



- (d) Welcher markierte Baum hat den PRÜFER-Code 212323212?
- (e) Welcher Spannbaum des folgenden, markierten Graphen



besitzt den lexikographisch kleinsten PRÜFER-Code?

*Hinweis:* Für zwei Wörter  $t = t_1 \dots t_n$  und  $t' = t'_1 \dots t'_n$  mit  $t_i, t'_i \in [n + 2]$  sagen wir, dass  $t$  lexikographisch kleiner als  $t'$  ist (symbolisch:  $t <_{\text{lex}} t'$ ), falls es ein  $i \in [n]$  gibt mit  $t_i < t'_i$  und  $t_j = t'_j$  für alle  $j < i$ . Zum Beispiel gilt  $112 <_{\text{lex}} 121$  und  $121 <_{\text{lex}} 211$ .