Mathematik: Diskrete Strukturen
Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

April 30, 2015

Vertiefung:

(a) Wie viele Verlosungen von 5 identischen Kaffeemaschinen unter 25 Teilnehmern gibt es?

Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge.

$$\binom{n}{k} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{20! \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{5! \cdot 20!} = 53\,1230$$

(b) Wie viele Möglichkeit gibt es, genau 7 Chips auf die drei Felder 1-12, 13-24, 25-36 beim Roulette zu legen?

Wir ziehen die Felder ohne Reihenfolge mit Zurücklegen. $n = 3$; $k = 7$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!(2!)} = \frac{8 * 9}{2} = 36$$

(c) Wie viele Binärzahlen der Länge 8 beginnen mit einer 0 oder enden mit 11?

Da am Anfang haben wir 0, bleib für die Reste 7 Stellen, also $2^7 = 128$ Varianten.
Da am Ende haben wir zwei 1, bleib für die Reste 6 Stellen, also $2^6 = 64$ Varianten.
Nach Satz 6. (geordnet, mit Zurücklegen)

(d) Sie haben 5 Informatik-Bücher, 4 Mathematik-Bücher und 3 Philosophie-Bücher zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf eine Reise zwei Bücher aus verschiedenen Themenbereichen mitzunehmen?

Nach Satz 6. (ungeordnet, ohne Zurücklegen) es gibt 3 Kombinationen von Fächern und zwar Inf. und Mathe, Inf. und Phil., Mathe und Phil.
Gemäß jeden Fall haben wir insgesamt so viel Kombinationen:

$$5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 47$$

(e) In einer Gruppe von 11 Personen sind 5 Vorstandsposten (ohne Personalunion) für jeweils eine Person zu vergeben: Präsidentin, Vizepräsidentin, Geschäftsführerin, stellvertretende Geschäftsführerin, Schatzmeisterin. Wie viele verschiedene Vorstände sind möglich?

In diesem Fall sollen wir ein Formel aus Satz 6. (geordnet, ohne Zurücklegen) benutzen:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{6!} = 55440$$

(f) Wie viele verschiedene Wörter können Sie aus dem Wort PICHICHI bilden?

In dieser Wort haben wir 8 Buchstaben. Da aber manche Buchstaben sich viederholen: I=3, C=2, H=2 - Mal. Da wir die Umstellung der gleiche Buchstaben nicht unterscheiden, haben wir:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1680$$

Bemerkung: $k_n!$ ist eine Variation von Buchstaben Umstellung, die sich viederholen. Da wir solche Woertern nicht akzeptiren sollen, ausschließen wir ihre aus gesamte Variationen.

(g) Welcher Faktor B(n, k) erfüllt die Gleichung $\binom{n}{k} = B(n,k) \cdot \binom{n-1}{k-1}$?

$$\binom{n}{k} =_{def} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\begin{aligned} B(n,k) &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} && \text{(Nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{(n-1)!} && \text{(Nach Definition)} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{k} \end{aligned}$$

(h) Welchen Koeffizienten besitzt x^6y^7 in $(x+y)^{13}$?

Gemäß Satz 8. (Binomialtheorem): $(x+y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} x^{13-k} y^k$.

Dann x^6y^7 besitzt $\binom{13}{7} = 1716$.

(i) Welchen Koeffizienten besitzt $x^3y^3z^7$ in $(x+y+z)^{13}$?

Nach Binomialtheorem:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (y+z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^{k-j} z^j \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} x^{n-k} y^{k-j} z^j \end{aligned}$$

Dann nach Voraussetzung:

$$(x+y+z)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \sum_{j=0}^{k} \binom{13}{k} \binom{k}{j} x^{13-k} y^{k-j} z^j$$

Folglich $x^3y^3z^7$ besitzt $\binom{13}{10} \cdot \binom{10}{7} = 286 \cdot 120 = 34440$.

(j) Wie können Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ vereinfachen?

Gemass Satz 11.: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{2n}{k}$.

Kreativitat:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

$$IA: n = 1: \binom{2}{1} \geq \frac{4}{2} = 2$$

$$IV: \binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

$$IS: \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} \quad (1)$$

$$\binom{2n}{n-1} + 2\cdot\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \iff 2\cdot\left(\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n}\right) \geq 2\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+1}} \quad (2)$$

Wo die linke Seite ist deutlich groesser als rechte.
Oder koennen wir das anders zeigen. Es gilt:

$$\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}$$

Beweis:

$$\frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2n!\cdot n}{(n)!(n)!\cdot n} = \frac{2n!}{n!n!}$$

Also nach IV und IS(1):

$$4\cdot\binom{2n}{n} \geq 4\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

$$4\cdot\binom{2n}{n} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n}}$$

Transfer:

(a) Wie groß ist $\binom{a^n}{a^m}$?

Hier haben wir einfach Kombination (Satz 6. (ungeordnet, ohne Zurucklegen)) mit $|a^n| = n$ und $|a^m| = m$. Wir nehmen m aus n a's und folglich haben:

$$\binom{n}{m}$$

(b) Wie groß ist $\binom{a^{n_1}b^{n_2}}{a^{m_1}b^{m_2}}$?

Hier haben wir eine Folge von a und b. Da koennen wir erstens Variationen von a und dann Variationen von b (gemass Unterabsatz a) berechnen. Ein Produkt von diese zwei Variationen ist eine Variationen von die gesamte Folge. Folglich:

$$\binom{n_1}{m_1}\cdot\binom{n_2}{m_2}$$