Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

12. (und letztes) Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 05.06.2015 **Abgabe:** 10.07.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

Ordnen Sie den nachfolgenden Algebren jeweils den speziellsten Algebratyp *Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Loop* oder *Gruppoid mit Eins* zu. Geben Sie auch an, ob es sich um einen abelschen Gruppoid handelt.

(a) $\langle \{5\}, \circ \rangle$ mit $\circ : \{5\}^2 \to \{5\}$ beliebig

(b) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto x$

(c) $\langle \mathbb{N}, \min \rangle$

(d) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto (x + y)^2 - (x - y)^2$

(e) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto y^x$

(f) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto 42$

(g) $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$

(h) $\langle \mathbb{Z}_6, \cdot_6 \rangle$

(i) $\langle \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot_6 \rangle$

(j) $\langle \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot_7 \rangle$

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung:

(a) Es gibt nur die Verknüpfung $\circ : (x, y) \mapsto 5$, daher handelt es sich bei dieser Algebra um eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 5.

(b) Die Verknüpfung ist assoziativ, denn es gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ z = x = x \circ y = x \circ (y \circ z)$, aber sie ist nicht abelsch, denn für $x \neq y$ gilt $x \circ y = x \neq y = y \circ x$. Darüber hinaus existiert auch kein neutrales Element: Angenommen, es gäbe ein neutrales Element x, dann gilt aber für eine Zahl $y \neq x$, dass $x \circ y = x \neq y$. Daher handelt es sich bei dieser Algebra um eine Halbgruppe.

(c) Die Minimumoperation ist assoziativ und kommutativ, aber es gibt kein neutrales Element, da es für jedes Zahl x eine Zahl $y > x$, und für diese gilt $\min\{x, y\} = x \neq y$. Damit ist die Algebra eine abelsche Halbgruppe.

(d) Wir vereinfachen den Term, der die Verknüpfung definiert: $\circ : (x, y) \mapsto (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$. Da Multiplikation assoziativ und kommutativ ist, ist damit auch $\circ$ kommutativ und assoziativ. Es gibt aber ein neutrales Element: Für $x = 0$ gilt immer $x \circ y = 0$ für jedes y, und wenn x und y verschieden von 0 sind, dann gilt $x \circ y = 4xy \geq> \max\{x, y\}$. Somit ist die Algebra eine albelsche Halbgruppe.

(e) $\circ$ ist nicht assoziativ, denn es gilt: $(3 \circ 3) \circ 3 = 3^{3^3} = 3^{27} \neq 3^9 = (3^3)^3 = 3 \circ (3 \circ 3)$. Außerdem ist $\circ$ nicht kommutativ, denn $1^0 = 1 \neq 0^1 = 0$. Schließlich gibt es auch kein neutrales Element: Es gilt $y^1 = y$, also ist 1 linksneutral, aber da $1^x = 1$, ist 1 nicht rechtsneutral. Somit handelt es sich um einen Gruppoiden.

(f) Die Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ und kommutativ, denn sie nimmt unabhängig von den Argumenten immer den Wert 42 an. Aus dem gleichen Grund besitzt die Algebra aber auch kein neutrales Element. Somit ist die Algebra eine abelsche Halbgruppe.

(g) Die Verknüpfung $+_6$ is assoziativ und kommutativ (aufgrund der Modulorechenregeln und da die normale Addition kommutativ und assoziativ ist), das neutrale Element ist 0, da $x +_6 0 = x$ ist, und zu jedem $x \in \mathbb{Z}_6$ gibt es das inverse Element $\operatorname{mod}(6 - x, 6)$. Daher ist diese Algebra eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.

(h) Die Verknüpfung $\cdot_6$ is assoziativ und kommutativ (aufgrund der Modulorechenregeln und da die normale Multiplikation kommutativ und assoziativ ist), das neutrale Element ist 1, da $x \cdot_6 1 = x$ ist, aber es gibt kein inverses Element zu 0, da $x \cdot_6 0 = 0$ für alle x. Somit ist diese Algebra ein abelscher Monoid mit neutralem Element 1.

(i) Hierbei handelt es sich um keine Algebra, denn $2 \cdot_6 3 = 0 \notin \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$.

(j) Zunächst einmal ist es so, dass diese Algebra wohldefiniert ist, da nur Zahlen teilerfremd zu 7 miteinander multipliziert werden und damit die Verknüpfung $\cdot_7$ niemals den Wert 0 annimmt. Darüber hinaus ist $\cdot_7$ assoziativ und kommutativ, und 1 ist ein neutrales Element, denn $1 \cdot_7 x = x$ für alle $x \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$. Schließlich existiert zu jeder Zahl ein inverses Element: 1 und 1, 2 und 4, 3 und 5, 6 und 6. Daher ist diese Algebra eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

Kreativität: **10 Punkte**

Zeigen Sie folgende Aussage: In jeder Gruppe G gilt für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ die Gleichung

$$\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \cdots \circ a_{n-1} \circ a_n) = \operatorname{ord}(a_2 \circ a_3 \circ \cdots \circ a_{n-1} \circ a_n \circ a_1).$$

Verwenden Sie vollständige Induktion über n.

Lösung:

- Induktionsanfang: $n = 1$: Es gilt trivialerweise $\operatorname{ord}(a_1) = \operatorname{ord}(a_1)$.
  $n = 2$: Dann gilt:

  $$e \circ a_2 = a_2 \circ (a_1 \circ a_2)^{\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2)} = (a_2 \circ a_1)^{\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2)} \circ a_2$$

  Daraus folgt nach Kürzungsregel $(a_2 \circ a_1)^{\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2)} = e$. Es ergibt sich, dass $\operatorname{ord}(a_2 \circ a_1) | \operatorname{ord}(a_1 \circ a_2)$. Außerdem gilt

  $$e \circ a_1 = a_1 \circ (a_2 \circ a_1)^{\operatorname{ord}(a_2 \circ a_1)} = (a_1 \circ a_2)^{\operatorname{ord}(a_2 \circ a_1)} \circ a_1$$

Daraus folgt nach Kürzungsregel $(a_1 \circ a_2)^{\operatorname{ord}(a_2 \circ a_1)} = e$. Also gilt $\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2) | \operatorname{ord}(a_2 \circ a_1)$. Mithin folgt $\operatorname{ord}(a_2 \circ a_1) = \operatorname{ord}(a_2 \circ a_1)$.

- Induktionsschritt: $n > 2$: Seien $a = a_1$ und $b = a_2 \circ \cdots \circ a_n$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\operatorname{ord}(a \circ b) = \operatorname{ord}(b \circ a)$$

Durch Resubstitution ergibt sich:

$$\operatorname{ord}(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n) = \operatorname{ord}(a_2 \circ \cdots \circ a_n \circ a_1)$$

Transfer: **10 Punkte**

Sie arbeiten in einem *Robotik*-Projekt bei der Entwicklung eines kognitiven Schaltkreises mit. Dabei sind Sie für die Logik-Einheit zuständig und sollen die vierwertige BELNAP-Logik mit den Wahrheitswerten „wahr“ (w), „falsch“ (f), „unbekannt“ ($\perp$) und „paradox“ ($\top$) implementieren. Eine aussagenlogische Variable x kann also genau einen dieser vier Wahrheitswerte annehmen.

Innerhalb der Logik werden die Wahrheitswerte wie folgt durch Paare von Bits repräsentiert:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{w} & \mapsto & (1,0) \\ \mathsf{f} & \mapsto & (0,1) \\ \perp & \mapsto & (0,0) \\ \top & \mapsto & (1,1) \end{array}$$

Die Operationen auf der Grundmenge $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ sind durch folgende Konnektoren gegeben:

$$\begin{array}{rcl} \wedge & : & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (\min\{x_1,x_2\}, \max\{y_1,y_2\}) \\ \vee & : & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (\max\{x_1,x_2\}, \min\{y_1,y_2\}) \\ \neg & : & (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}$$

Bei der Umsetzung der Logik sollen Sie die beiden folgenden Aufgaben lösen.

(a) Beschreiben Sie die Operatoren $\wedge, \vee, \neg$ als Verknüpfungen über der Menge $\{\mathsf{w},\mathsf{f},\top,\perp\}$.

(b) Ist die Algebra $\mathsf{FOUR} = \langle\{\mathsf{w},\mathsf{f},\top,\perp\},\wedge,\vee,\neg\rangle$ eine boolesche Algebra?

Lösung:

(a)

$\wedge$	w	f	$\perp$	$\top$
w	w	f	$\perp$	$\top$
f	f	f	f	f
$\perp$	$\perp$	f	$\perp$	f
$\top$	$\top$	f	f	$\top$

$\vee$	w	f	$\perp$	$\top$
w	w	w	w	w
f	w	f	$\perp$	$\top$
$\perp$	w	$\perp$	$\perp$	w
$\top$	w	$\top$	w	$\top$

$\neg$	w	f	$\perp$	$\top$
	f	w	$\perp$	$\top$

(b) Wir prüfen die Eigenschaften:

i. $\langle\{\mathsf{w},\mathsf{f},\top,\bot\},\wedge\rangle$ ist ein abelscher Monoid, da w neutrales Element ist ($a \wedge \mathsf{w} = a$) und $\wedge$ assoziativ ist:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge c &= (\min\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}) \wedge c\\ &= (\min\{a_1,b_1,c_1\},\max\{a_2,b_2,c_2\})\\ &= a \wedge (\min\{b_1,c_1\},\max\{b_2,c_2\})\\ &= a \wedge (b \wedge c)\end{aligned}$$

Außerdem ist $\wedge$ kommutativ: $a \wedge b = (\min\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}) = b \wedge a$

ii. $\langle\{\mathsf{w},\mathsf{f},\top,\bot\},\vee\rangle$ ist ein abelscher Monoid, da f neutrales Element ist ($a \vee \mathsf{f} = a$) und $\vee$ assoziativ ist:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee c &= (\max\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\}) \vee c\\ &= (\max\{a_1,b_1,c_1\},\min\{a_2,b_2,c_2\})\\ &= a \vee (\max\{b_1,c_1\},\min\{b_2,c_2\})\\ &= a \vee (b \vee c)\end{aligned}$$

Außerdem ist $\vee$ kommutativ: $a \vee b = (\max\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\}) = b \vee a$

iii. Es gilt $\bot \vee (\neg\bot) = \bot \vee \bot = \bot \neq \mathsf{w}$ und $\bot \wedge (\neg\bot) = \bot \wedge \bot \neq \mathsf{f}$, also ist die 3. Eigenschaft nicht erfüllt.

iv. Es gilt:

$$\begin{aligned}a \wedge (b \vee c) &= a \wedge (\max\{b_1,c_1\},\min\{b_2,c_2\})\\ &= (\min\{a_1,\max\{b_1,c_1\}\},\max\{a_2,\min\{b_2,c_2\}\})\\ &= (\max\{\min\{a_1,b_1\},\min\{a_1,c_1\}\},\min\{\max\{a_2,b_2\},\max\{a_2,c_2\}\})\\ &= (\min\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}) \vee (\min\{a_1,c_1\},\max\{a_2,c_2\})\\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \vee (b \wedge c) &= a \vee (\min\{b_1,c_1\},\max\{b_2,c_2\})\\ &= (\max\{a_1,\min\{b_1,c_1\}\},\min\{a_2,\max\{b_2,c_2\}\})\\ &= (\min\{\max\{a_1,b_1\},\max\{a_1,c_1\}\},\max\{\min\{a_2,b_2\},\min\{a_2,c_2\}\})\\ &= (\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}) \wedge (\max\{a_1,c_1\},\min\{a_2,c_2\})\\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c)\end{aligned}$$

Es handelt sich folglich um keine boolesche Algebra.