Mathematik: Diskrete Strukturen
Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

May 14, 2015

Vertiefung:

(a) Drücken Sie die Anzahl der surjektiven Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^2$ mit Hilfe der Stirling-Zahlen zweiter Art aus.

Nach Lemma 4 (Potenzregel) und Kreuzprodukt Definition es gilt entsprechend:

$$||\{0,1\}^n|| = 2^n$$
$$||\{0,1\}^2|| = 2^2 = 4$$

Wir muessen 2^n Funktionsargumente auf 4 Funktionswerte abbilden. Da Stirling-Zahlen auf nicht unterscheidbare Funktionswerte aufzuteilt, sollen wir noch nit 4! multiplizieren. Folglich:

$$4! \cdot \left\{ {2^n \atop 4} \right\}$$

(b) Kein Antwort

(c) Von 18 Studierenden in einer Spezialvorlesung studieren 7 Mathematik, 9 Physik und 10 Informatik. Davon studieren 3 Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Informatik sowie 5 Physik und Informatik. Ein Student studiert sogar all drei Fächer. Wie viele Studierende studieren keines der drei Fächer?
Sei nach Voraussetzung:

$||M|| = 7$, $||I|| = 10$, $||P|| = 9$, $||M \cap P|| = 3$, $||M \cap I|| = 3$, $||P \cap I|| = 5$, $||M \cap P \cap I|| = 1$

Die gesamte Zahl der Studierenden, die in einer Spezialvorlesung studieren ist:

$$||M \cup P \cup I||$$

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$\begin{aligned} ||M \cup P \cup I|| &= ||M|| + ||P|| + ||I|| - ||M \cap P|| - ||M \cap I|| - ||I \cap P|| + ||M \cap P \cap I|| \\ &= 7 + 9 + 10 - 3 - 3 - 5 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Folglich die Anzahl der Studierende, die keines der drei Fächer studieren ist $18 - 16 = 2$.

(d) Für drei Mengen A, B und C gelten folgende Eigenschaften: $||A|| = 63, ||B|| = 91, ||C|| = 44, ||A \cap B|| = 25, ||A \cap C|| = 23, ||C \cap B|| = 21$. Außerdem gelte $||A \cup B \cup C|| = 139$. Wie groß ist $||A \cap B \cap C||$?

Nach Theorem 1.19 Beispiel es gilt:

$$||A \cup B \cup C|| = ||A|| + ||B|| + ||C|| - ||A \cap B|| - ||A \cap C|| - ||C \cap B|| + ||A \cap B \cap C||$$

$$\Rightarrow ||A \cap B \cap C|| = ||A \cup B \cup C|| - ||A|| - ||B|| - ||C|| + ||A \cap B|| + ||A \cap C|| + ||C \cap B||$$
$$\Rightarrow ||A \cap B \cap C|| = 139 - 63 - 91 - 44 + 25 + 23 + 21 = 10$$

(e) Für zwei Mengen A und B gelte: $||A|| = 100, ||B|| = 60$ und die Anzahl der Elemente von A B, die zu genau einer der beiden Mengen gehören, ist genau doppelt so groß, wie die Anzahl der Elemente, die in beiden Mengen liegen. Wie viele Elemente liegen in beiden Mengen?

$$\begin{aligned}
||A\Delta B|| &= 2 \cdot ||A \cap B|| \\
||A \cup B|| &= ||A\Delta B|| + ||A \cap B|| \\
||A \cup B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cap B|| \\
||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - ||A \cup B|| \\
||A \cap B|| &= ||A|| + ||B|| - 3||A \cap B|| \\
4 \cdot ||A \cup B|| &= ||A|| + ||B|| \\
||A \cap B|| &= \frac{||A|| + ||B||}{4} = \frac{100 + 60}{4} = 40
\end{aligned}$$

(f) Wie viele Zahlen im Bereich $1, 2, \ldots, 200$ sind durch keine der Zahlen 3, 7, 11, 27 teilbar?

$$\begin{aligned}
&200 - \left(\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{27} \right\rfloor \right) \\
&+ \left(\left\lfloor \frac{200}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{77} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{189} \right\rfloor \right) \\
&- \left(\left\lfloor \frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7 \cdot 11 \cdot 27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{3 \cdot 11 \cdot 27} \right\rfloor \right) \\
&+ \left\lfloor \frac{200}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 27} \right\rfloor \\
&= 200 - (66 + 28 + 18 + 7) + (9 + 6 + 2 + 2 + 1) - (0 + 0 + 0 + 0) + 0 = 101
\end{aligned}$$

(g) Wie viele Zahlen im Bereich $1, ..., 10^9$ sind weder von der Form x^3 noch x^7 noch x^{13} für ein geeignetes $x \in N$?
Es gibt:

$$\begin{aligned}
&\lfloor 10^{9/3} \rfloor = 1000 \text{ Zahlen der Form } x^3 \\
&\lfloor 10^{9/7} \rfloor = 19 \text{ Zahlen der Form } x^7 \\
&\lfloor 10^{9/13} \rfloor = 4 \text{ Zahlen der Form } x^{13} \\
&\lfloor 10^{9/21} \rfloor = 2 \text{ Zahlen der Form } (x^3)^7 = x^{21} \\
&\lfloor 10^{9/39} \rfloor = 1 \text{ Zahlen der Form } (x^3)^{13} = x^{39} \\
&\lfloor 10^{9/91} \rfloor = 1 \text{ Zahlen der Form } (x^7)^{13} = x^{91} \\
&\lfloor 10^{9/273} \rfloor = 1 \text{ Zahlen der Form } ((x^3)^7)^{13} = x^{273}
\end{aligned}$$

$$10^9 - (1000 + 19 + 4) + (2 + 1 + 1) - 1 = 999\,998\,980$$

Transfer:

(a)

$$K : \{0,1\}^n \to \bigcup_{k=0}^{n-1} \{0,1\}^k$$

$$||\{0,1\}^n U|| > || \bigcup_{k=0}^{n-1} \{0,1\}^k||$$

$$||\{0,1\}^n|| = 2^n \qquad \text{(Korollar 1.8)}$$

$$|| \bigcup_{k=0}^{n-1} \{0,1\}^k|| = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 \qquad \text{(Theorem 1.20)}$$