

4. Übungsblatt

Ausgabe: 08.05.2015 **Abgabe:** 15.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung:

10 Punkte

- (a) Drücken Sie die Anzahl der surjektiven Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^2$ mit Hilfe der STIRLING-Zahlen zweiter Art aus.
- (b) Wieso gilt $n^m = \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot n^{\underline{k}}$ für $n, m \in \mathbb{N}_+$?
- (c) Von 18 Studierenden in einer Spezialvorlesung studieren 7 Mathematik, 9 Physik und 10 Informatik. Davon studieren 3 Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Informatik sowie 5 Physik und Informatik. Ein Student studiert sogar all drei Fächer. Wie viele Studierende studieren keines der drei Fächer?
- (d) Für drei Mengen A , B und C gelten folgende Eigenschaften: $\|A\| = 63$, $\|B\| = 91$, $\|C\| = 44$, $\|A \cap B\| = 25$, $\|A \cap C\| = 23$, $\|C \cap B\| = 21$. Außerdem gelte $\|A \cup B \cup C\| = 139$. Wie groß ist $\|A \cap B \cap C\|$?
- (e) Für zwei Mengen A und B gelte: $\|A\| = 100$, $\|B\| = 60$ und die Anzahl der Elemente von $A \cup B$, die zu genau einer der beiden Mengen gehören, ist genau doppelt so groß, wie die Anzahl der Elemente, die in beiden Mengen liegen. Wie viele Elemente liegen in beiden Mengen?
- (f) Wie viele Zahlen im Bereich $1, 2, \dots, 200$ sind durch keine der Zahlen $3, 7, 11, 27$ teilbar?
- (g) Wie viele Zahlen im Bereich $1, \dots, 10^9$ sind weder von der Form x^3 noch x^7 noch x^{13} für ein geeignetes $x \in \mathbb{N}$?
- (h) Auf einer großen Informatikerkonferenz finden immer parallel 5 Vorträge statt. Die dafür vorgesehenen 5 Konferenzräume bieten 150, 200, 200, 300 und 500 Teilnehmern einen Sitzplatz. Für die Konferenz haben sich 1523 Teilnehmer registriert. Wie viele registrierte Teilnehmer müssen in einem der Konferenzräume auf jeden Fall stehen, wenn alle registrierten Teilnehmer zeitgleich genau einen Vortrag besuchen?
Beachtung: Vortragende besuchen keine Vorträge anderer und zählen auch nicht als registrierte Teilnehmer.
- (i) Menschen haben bis zu 150.000 Kopfhare. Mindestens wie viele Chinesen haben die exakt gleiche Anzahl von Kopfharen (zu einem bestimmten Zeitpunkt), wenn Sie von einer chinesischen Bevölkerung von 1,33 Milliarden ausgehen?
- (j) Wie oft müssen Sie mindestens würfeln, damit eine Zahl n -mal vorkommt?

Kreativität:**10 Punkte**

Auf *Oneway Island* gibt es zwischen den Städten nur Einbahnstraßen. Jede Stadt ist mit jeder Stadt durch eine Einbahnstraße verbunden: Für zwei beliebige, unterschiedliche Städte A und B gilt, dass man entweder direkt von A nach B oder direkt von B nach A kommen kann, nicht aber beides direkt.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Stadt geben muss, von der man direkt in mindestens die Hälfte aller anderen Städte kommen kann.
- (b) Zeigen Sie, dass es eine Stadt geben muss, von der man mit höchstens einem Zwischenstopp zu jeder Stadt kommen kann.

Transfer:**10 Punkte**

Im Rahmen eines Projektes zum Aufbau eines Storage-Area-Networks interessieren Sie sich für Verfahren der *Datenkompression* von Bitstreams. Formal gesehen besteht ein derartiges Komprimierungsverfahren aus zwei Algorithmen: einem Komprimierungsalgorithmus K , der einen gegebenen Bitstring komprimiert, und einem Dekomprimierungsalgorithmus D , der den ursprünglichen Bitstring wieder herstellt. Damit das Verfahren korrekt ist, muss $x = D(K(x))$ für jedes endliche Wort x über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gelten.

Bei Ihren Recherchen im Internet sind Sie auf eine Webseite gestoßen, auf der Sie ein Tool mit Namen *OmniZip* herunterladen können, das mit den Worten „*OmniZip* bekommt jede Datei klein“ beschrieben wird und eine Komprimierungsrate von 80% garantiert. Sie sind skeptisch und wollen beweisen, dass es so ein Programm gar nicht geben kann.

Dazu stellen Sie folgende Überlegungen an:

- (a) Zeigen Sie, dass es für jede Funktion K , die Bitstrings der Länge n auf Bitstrings kürzerer Länge abbildet, mindestens zwei Bitstrings x und y der Länge n gibt, für die $K(x) = K(y)$ gilt.
- (b) Welchen relativen Verlust können Sie für alle Wörter der Länge n bestenfalls erwarten, wenn jedes Wort auf 80% seiner Länge komprimiert wird?

Hinweis: Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass bei einer 80%-igen Komprimierungsrate die Dekomprimierung verlustbehaftet sein muss. Der absolute Verlust bei der Komprimierung/Dekomprimierung eines Wortes x der Länge n ist die Anzahl der Bits, in denen sich x und $D(K(x))$ unterscheiden. Der relative Verlust ist das Verhältnis von absolutem Verlust zu Wortlänge. – Um die Aufgabe zu lösen, sollten Sie sich zunächst überlegen, wie viele Wörter der Länge n bestenfalls auf 80% ihrer Länge verlustfrei komprimiert werden können.