

1. Übungsblatt

Ausgabe: 17.04.2015 **Abgabe:** 24.04.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung:

10 Punkte

- (a) Bestimmen Sie $\text{mod } (5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 10)$.
- (b) Bestimmen Sie $\text{mod } (5^{31} \cdot 2^{789} - 23^{23}, 11)$.
- (c) Bestimmen Sie $\text{mod } (7^{31} \cdot 2^{789}, 10)$.
- (d) Bestimmen Sie $\text{kgV}(178, 144)$.
- (e) Bestimmen Sie $\text{ggT}(12877480, 24145275)$.
- (f) Wie sieht der zu $\frac{12877480}{24145275}$ äquivalente teilerfremde Bruch aus?
- (g) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau einmal den Funktionswert 0 annehmen?
- (h) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genau zweimal den Funktionswert 0 annehmen?
- (i) Wie viele Funktionen $f : \{0, 1, 2, 3\}^n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ gibt es, die genauso oft die Funktionswerte 0 und 1 annehmen?
- (j) Wie viele Funktionen $\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{ f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow A \}$ gibt es, wenn A eine endliche Menge ist?

Hinweis: Benutzen Sie auch das Skriptum *Brückenkurs Mathematik*.

Kreativität:

10 Punkte

Die *dyadische Kodierung* natürlicher Zahlen ist die wie folgt rekursiv definierte, bijektive Abbildung $\text{dya} : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2\}^*$:

$$\begin{aligned} \text{dya}(0) &=_{\text{def}} \varepsilon \\ \text{dya}(2n+1) &=_{\text{def}} \text{dya}(n)1 \\ \text{dya}(2n+2) &=_{\text{def}} \text{dya}(n)2 \end{aligned}$$

$\{1, 2\}^*$ steht für die Menge aller Wörter endlicher Länge, die mit den Buchstaben (Ziffern) 1 und 2 gebildet werden können, und ε steht für das leere Wort (das Wort der Länge 0).

Zum Beispiel gilt $\text{dya}(17) = \text{dya}(8)1 = \text{dya}(3)21 = \text{dya}(1)121 = \text{dya}(0)1121 = 1121$.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über die Länge n der Code-Wörter, dass für die Umkehrabbildung $\text{dya}^{-1} : \{1, 2\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{dya}^{-1}(a_{n-1} \dots a_1 a_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k$$

Transfer:

10 Punkte

Sie haben die Aufgabe, für ein Rechenzentrum einen Leitfaden mit Empfehlungen für die Erstellung hochsicherer Passwörter zu entwerfen. Dazu haben Sie die Empfehlungen, die ein großer Softwarekonzern diesbezüglich herausgegeben hat, wie folgt abgewandelt und konkretisiert:

Schritt	Aktion	Empfehlung	Beispiel
1	Wähle zwei Sätze (mit insgesamt X Wörtern)	Denke an etwas Bedeutsames	Lange komplexe Passwörter sind die sichersten. Ich halte meins geheim.
2	Bilde aus den Sätzen eine Folge von Kleinbuchstaben	Benutze die jeweils ersten Buchstaben	lkpsdsihmg
3	Erhöhe die Komplexität	Ersetze alle Buchstaben der ersten oder der zweiten Hälfte des Alphabets durch Großbuchstaben	LKpsDsIHMG
4	Erhöhe die Wortlänge durch Ziffern	Füge jeweils eine Ziffer mit Bedeutung in die beiden Satzbereiche ein, wobei auch Satzanfang und -ende möglich sind.	LK1psDsIH2MG
5	Erhöhe die Wortlänge durch Interpunktionszeichen	Füge eines der 6 Symbole ! , . : ; ? zwischen den beiden Sätzen oder am Anfang oder am Ende des Wortes ein	LK1psDs?IH2MG
6	Erhöhe die Wortlänge durch spezielle Symbole	Füge eines der 22 Symbole # \$ % & () * + - / < = > @ [\] ^ _ { } am Anfang oder am Ende ein	@LK1psDs?IH2MG

Wie viele verschiedene Passwörter folgender Längen gibt es, wenn wir vereinfachend annehmen, dass alle Folgen von Kleinbuchstaben durch zwei Sätze erzeugt werden können (wobei wir die Umlaute ä, ö, ü ausschließen wollen) und Einwortsätze natürlich auch möglich sind:

- (a) 8
- (b) 10
- (c) 12
- (d) 14
- (e) 16