Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

Quiz zur Vorlesung „Mathematik: Diskrete Strukturen“ (Musterlösung)

Termin: 3. Juni 2015, 10:05–10:35 Uhr

Name: ____________ **Vorname:** ____________

Matr.-Nr.: ____________ **Gruppe:** ____________

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Die Bearbeitungszeit beträgt **30 Minuten**. Viel Erfolg!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	30
erreichte Punkte				

Aufgabe 1: Kombinatorik — 10 Punkte

Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 identische Bälle vollständig auf 3 nummerierte Container mit beliebigem Fassungsvermögen zu verteilen, sodass die folgenden Szenarien eintreten?

Tragen Sie die konkreten Zahlwerte in die Box ein.

(a) In genau einem Container liegen keine Bälle.

27

(b) In mindestens zwei Containern liegen keine Bälle.

3

(c) Kein Container ist leer.

$\binom{9}{2} = 36$

(d) Der dritte Container enthält eine ungerade Anzahl an Bällen.

$10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$

(e) Kein Container ist leer und der dritte Container enthält eine ungerade Anzahl an Bällen.

$8 + 6 + 4 + 2 = 20$

Aufgabe 2: Permutationen **10 Punkte**

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{\ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation } \}$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Hintereinanderausführung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \;:\; [n] \to [n] \;:\; x \mapsto \pi_2(\pi_1(x))$$

Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie Ihre Antworten in die jeweiligen Boxen ein.

(a) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6) \circ (1\ 2)(3\ 4\ 6)(5)$?

$(1)(2)(3\ 6)(4\ 5)$

(b) Welches $\pi \in \mathcal{S}_6$ in Zyklenschreibweise erfüllt $\pi \circ (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$?

$(2\ 1)(5\ 4\ 3)(6)$

(c) Wie viele Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ erfüllen $\pi(1) < \pi(2)$?

$\frac{1}{2}n!$

(d) Wie viele Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ erfüllen $\pi(1) < \pi(2)$ oder $\pi(1) < \pi(3)$?

$\frac{2}{3}n!$

(e) Wie groß ist $s_{5,4}$?

$\binom{5}{2} = 10$

Aufgabe 3: Vermischtes **10 Punkte**

Betrachten Sie die gegebenen Konstellationen und beantworten Sie die jeweils gestellten Fragen, in dem Sie für „Ja“ ein Kreuz in die Box eintragen und für „Nein“ die Box frei lassen.

Beachtung: Pro Teilaufgabe erhalten Sie für eine richtige Antwort $+0,5$ Punkte und für eine falsche Antwort $-0,5$ Punkte!

(a) Ein Dominostein ist ein Rechteck bestehend aus zwei (ununterscheibaren) Quadraten, wobei in jedem Quadrat durch Punkte eine Zahl von 1 bis n dargestellt wird. Sie wollen die Anzahl verschiedener Dominosteine bestimmen.

Gibt es $2n - 1$ verschiedene Dominosteine? ☐

Gibt es n^2 verschiedene Dominosteine? ☐

Gibt es $\binom{n}{2}$ verschiedene Dominosteine? ☐

Gibt es $\binom{n+1}{2}$ verschiedene Dominosteine? X

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsgleichung $a_n =_{\text{def}} 2 - a_{n-1}$ (für $n \geq 1$) mit der Anfangsbedingung $a_0 =_{\text{def}} 1$ gegeben.

Ist die Rekursionsgleichung linear, inhomogen und von 1. Ordnung? [X]

Kommt 23 als Folgenglied vor? [ ]

Gilt stets $a_n = a_{n+2}$? [X]

Ist $\frac{1+x}{1-x^2}$ die erzeugende Funktion zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [X]

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsgleichung $a_n =_{\text{def}} a_{n-2} + (-1)^n$ (für $n \geq 2$) mit den Anfangsbedingungen $a_1 =_{\text{def}} -1$ und $a_0 =_{\text{def}} 0$ gegeben.

Ist die Rekursionsgleichung linear, homogen und von 1. Ordnung? [ ]

Kommt 23 als Folgenglied vor? [X]

Gilt $a_{42} = 21$? [X]

Ist $\frac{1-x}{1+x^2}$ die erzeugende Funktion zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [ ]

(d) Als ungerichteter Graph sei der d-dimensionale Hyperwürfel Q_d gegeben.

Enthält der Q_d genau 2^d Knoten? [X]

Enthält der Q_d genau $d2^d$ Kanten? [ ]

Enthält der Q_d genau $d2^{d-1}$ Kanten? [X]

Ist jede Kante im Q_d mit genau $2(d-1)$ Kanten inzident? [X]

(e) Für einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $u, v \in V$ bezeichne $d_G(u, v)$ die minimale Länge eines (u, v)-Pfades in G.

Gilt für Knoten $u, v, x \in V$ stets $d_G(u, v) \geq d_G(u, x) + d_G(x, v)$? [ ]

Gilt für Knoten $u, v, x \in V$ stets $d_G(u, v) = d_G(u, x) + d_G(x, v)$? [ ]

Gilt für Knoten $u, v, x \in V$ stets $d_G(u, v) \leq d_G(u, x) + d_G(x, v)$? [X]

Gilt für Knoten $u, v, x \in V$ stets $d_G(u, v) \geq \min\{d_G(u, x), d_G(x, v)\}$? [ ]

Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.