Universität Konstanz | Mathematik: Diskrete Strukturen
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft | SS 2015
Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

5. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 15.05.2015 **Abgabe:** 22.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: 10 Punkte

(a) Bei einem Turnier spielen n Mannschaften „jeder gegen jeden" (genau einmal). Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt, für eine Niederlage 0 Punkte. Die Platzierungen ergeben sich aus den erzielten Punkten, bei Punktgleichheit wird gelost.

Kann eine Mannschaft mit n Punkten Turnierletzter werden?

(b) Muss eine Mannschaft mindestens n Punkte für den Turniersieg erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird? ?

(c) Wie viele Punkte kann der Turnierzweite höchstens erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(d) Wie viele Mannschaften können höchstens $n+1$ Punkte erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(e) Gibt es stets zwei Mannschaften mit gleicher Punktzahl, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(f) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von Euklid, um $\mathrm{ggT}(2^{n+1}+1, 2^n+1)$ zu bestimmen.

(g) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von Euklid, um $\mathrm{ggT}(n^2+1, n+1)$ zu bestimmen.

(h) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von Euklid, um $\mathrm{ggT}(F_{k+2}, F_{k+4})$ zu bestimmen. Hierbei steht F_k für die k-te Fibonacci-Zahl.

(i) Wie viele Fibonacci-Zahlen gibt es in der Menge $I_n =_{\mathrm{def}} \{2^n+1, 2^n+2, \dots, 2^{n+1}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ auf jeden Fall? – Begründen Sie Ihre Antwort mittels vollständiger Induktion über n.

(j) Der Algorithmus von Euklid benötigt maximal $k^*(n) =_{\mathrm{def}} \max \{ k \in \mathbb{N} \mid F_{k+3} \leq n \}$ rekursive Aufrufe, um den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $n \geq 2$ zu bestimmen.

Können Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe (i) verwenden, um zu zeigen, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $k^*(n) \leq c \cdot \log_2 n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$?

Lösung:

In den Vertiefungsaufgaben (a)-(e) bezeichne stets $M = \{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$ die Menge der Mannschaften. Außerdem gilt offensichtlich, dass jede Mannschaft genau $n-1$ Spiele hat.

(a) Wir betrachten das folgende Szenario: Für $i = 0, \ldots, n-1$ gewinnt Mannschaft M_i gegen Mannschaft $M_{mod(i+1,n)}$. Alle weiteren Spiele gehen unentschieden aus. Somit ergibt sich für jede Mannschaft genau ein Sieg, ein Verlust und $n-3$ Spiele gehen unentschieden aus. Jede Mannschaft erzielt dann genau

$$(n-3) \cdot 1 + 3 + 0 = n$$

Punkte. Anschließend wird durch das Los entschieden, doch da jede Mannschaft n Punkte hat, insbesondere die Letzte.

(b) Wir betrachten nun das Szenario, in dem alle Spiele unentschieden ausgehen. Dann erhält jede Mannschaft genau $n-1$ Punkte. Anschließend wird durch das Los entschieden, doch da jede Mannschaft $n-1$ Punkte hat, insbesondere die Siegmannschaft.

(c) Wenn eine Mannschaft alle Spiele gewinnt, so ist sie automatisch Sieger des Turniers, da alle anderen Mannschaften bereits einmal 0 Punkte erreicht haben. Folglich kann der Turnierzweite höchstens $n-2$ Spiele gewinnen und eines unentschieden spielen. Dies erreichen wir, in dem z.B. die Mannschaften M_0 und M_1 unentschieden gegeneinander spielen, alle weiteren Spiele aber gewinnen. Gehen alle anderen Spiele unentschieden aus, so erzielen M_0 und M_1 jeweils genau

$$3(n-2) + 1 = 3n - 5$$

Punkte. Das Los entscheidet, aber der Turnierzweite hat auf jeden Fall $3n-5$ Punkte.

(d) Aus den Szenarien in Teilaufgabe (a) oder (b) folgt sofort, dass alle Mannschaften höchstens $n+1$ Punkte erreichen können.

(e) Sei $n = 2$. Das Turnier besteht also trivialerweise aus genau 2 Mannschaften. Gewinnt M_0 gegen M_1, so erzielt M_0 gerade 3 Punkte, während M_1 keinen Punkt erzielt. Es gibt also nicht immer zwei Mannschaften mit gleicher Punktzahl.
Verallgemeinert kann man das folgende Szenario betrachten: M_{n-1} gewinnt alle $n-1$ Spiele. M_{n-2} hat dann noch $n-2$ Spiele vor sich und gewinnt von diesen jedes. Führt man dies weiter, ergibt sich für $i = 0, \ldots, n-1$: Mannschaft M_i gewinnt genau i Spiele und erzielt somit $3 \cdot i$ Punkte. Also haben alle Mannschaften paarweise verschiedene Punktzahlen.

(f) Der Algorithmus von Euklid benötigt zwei rekursive Aufrufe, um $\mathrm{ggT}(2^{n+1}+1, 2^n+1)$ zu bestimmen.

$$\mathrm{EUKLID}(2^{n+1}+1, 2^n+1) = \mathrm{EUKLID}(2^n+1, 2^n) = \mathrm{EUKLID}(2^n, 1) = 1$$

da

$$\mathrm{mod}(2^{n+1}+1, 2^n+1) = \mathrm{mod}(2^n+2^n+1, 2^n+1) = 2^n$$

(g) Der Algorithmus von Euklid benötigt $\begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$ Aufrufe, um $\mathrm{ggT}(n^2+1, n+1)$ zu bestimmen. Es gilt

$$n^2 + 1 = n^2 - 1 + 2 = (n+1)(n-1) + 2$$

und damit

$$\mathrm{mod}(n^2+1, n+1) = \mathrm{mod}((n+1)(n-1)+2, n+1) = \mathrm{mod}(2, n+1) = 2$$

Also erhalten wir

$$\mathrm{EUKLID}(n^2+1, n+1) = \mathrm{EUKLID}(n+1, 2) = \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \mathrm{EUKLID}(2,1) \quad = 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

(h) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{mod}(F_{k+4}, F_{k+2}) &= \mathrm{mod}(F_{k+2} + F_{k+3}, F_{k+2}) \\ &= \mathrm{mod}(F_{k+3}, F_{k+2}) \\ &= \mathrm{mod}(F_{k+2} + F_{k+1}, F_{k+2}) \\ &= \mathrm{mod}(F_{k+1}, F_{k+2}) \\ &= F_{k+1} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{EUKLID}(F_{k+4}, F_{k+2}) = \mathrm{EUKLID}(F_{k+2}, F_{k+1})$$

Nach *Lemma 2.1* benötigt $\mathrm{EUKLID}(F_{k+2}, F_{k+1})$ nun $k-1$ rekursive Aufrufe. Insgesamt erhalten wir also k rekursive Aufrufe.

(i) Behauptung: In der Menge $I_n =_{\mathrm{def}} \{2^n+1, 2^n+2, \ldots, 2^{n+1}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ gibt es auf jeden Fall eine FIBONACCI-Zahl. Wir beweisen diese Behauptung per Induktion:

Induktionsanfänge n=0,1

Für $n = 0$ gilt $I_0 =_{\mathrm{def}} \{2^0+1, 2^n+2, \ldots, 2^{0+1}\} = \{2\}$ und $2 = F_2$ ✓

Für $n = 1$ gilt $I_1 =_{\mathrm{def}} \{2^1+1, 2^n+2, \ldots, 2^{1+1}\} = \{3, 4\}$ und $3 = F_3$ ✓

Induktionsvoraussetzung In den Intervallen I_{n-2} und I_{n-1} gebe es jeweils eine FIBONACCI-Zahl.

Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$

Sein $f_1 \in I_{n-2}, f_2 \in I_{n-1}$ FIBONACCI-Zahlen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass diese aufeinanderfolgend sind. Es gilt nun

$$f_1 + f_2 \leq 2^{n-1} + 2^n \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$$

Sei $f_3 =_{\mathrm{def}} f_1 + f_2$. Gilt zusätzlich $f_3 \geq 2^n + 1$, so gilt bereits $f_3 \in I_n$ und wir sind fertig, da f_3 ebenfalls eine FIBONACCI-Zahl ist.

Ansonsten gilt $f_3 < 2^n + 1$. Da aber bereits $f_2 \in I_{n-1}$, gilt demnach auch $f_1 + f_2 = f_3 \in I_{n-1}$. Wir betrachten dann $f_4 =_{\mathrm{def}} f_2 + f_3$. Da $f_2, f_3 \in I_{n-1}$ folgt

$$f_4 \geq 2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 2^n + 2 > 2^n + 1$$

und

$$f_4 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\Longrightarrow$ $f_4 \in I_n$. Da f_4 nach Konstruktion ebenfalls eine FIBONACCI-Zahl ist, folgt die Behauptung $\square$

(j) Nach Aufgabe (i) wissen, wir, dass in jedem Intervall I_n mindestens eine FIBONACCI-Zahl liegt. Behaupte nun, dass es zudem höchstens zwei sind.
Dazu nehmen wir an, es gäbe ein Intervall I_m, in dem mindestens drei FIBONACCI-Zahlen $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ liegen. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $f_1 + f_2 = f_3$ gilt. Da es in I_{m-1} mindestens eine FIBONACCI-Zahl gibt, gilt zudem

$$f_2 \geq 2^{m-1} + 1 + 2^m + 1$$

und damit

$$f_4 =_{\text{def}} f_3 + f_2 = 2 \cdot f_2 + f_1 \geq 2 \cdot (2^{m-1} + 1 + 2^m + 1) + 2^m + 1 \geq 4 \cdot 2^m = 2^{m+2}$$

Da somit $f_4 \in I_{m+2}$ oder einem späteren Intervall und f_4 die nächste FIBONACCI-Zahl, liegt in I_{m+1} keine FIBONACCI-Zahl. Das ist ein Widerspruch zu (i). Es liegen also höchstens zwei FIBONACCI-Zahlen in einem solchen Intervall.
Somit kann $F_{k^*(n)+3}$ frühestens in $I_{\frac{k^*(n)+3}{2}}$ liegen. Wir folgern

$$F_{k^*(n)+3} \geq 2^{\frac{k^*(n)+3}{2}} + 1$$

Außerdem gilt nach Definition von $k^*(n)$

$$F_{k^*(n)+3} \leq n$$

Daraus wiederum folgt

$$\begin{array}{rlll} & 2^{\frac{k^*(n)+3}{2}} + 1 & \leq & n \\ \Longrightarrow & 2^{\frac{k^*(n)+3}{2}} & \leq & n-1 \\ \Longrightarrow & \frac{k^*(n)+3}{2} & \leq & \log(n-1) \\ \Longrightarrow & k^*(n)+3 & \leq & 2\log(n-1) \\ \Longrightarrow & k^*(n) & \leq & 2\log(n-1) - 3 \\ & & \leq & 2\log(n) \end{array}$$

Wir erhalten die Behauptung folglich bereits mit $c =_{\text{def}} 2$. $\square$

Kreativität: **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass es für jede Menge $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Zahlen $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $x = y + z$
- $\{x, y, z\} \subseteq A$ oder $\{x, y, z\} \subseteq \overline{A}$

Hinweis: Verwenden Sie das Beispiel zum verallgemeinerten Schubfachschluss aus der Vorlesung und definieren Sie sich eine geeignete „Kennen“-Relation auf den Zahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eine Aufzählung und Überprüfung aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird *nicht* als Lösung akzeptiert!

Lösung:

Sei $A \subseteq [6]$. Wir definieren die Relation

$$(i, j) \in R \iff_{\text{def}} |i - j| \in A$$

für Zahlen $i, j \in [6]$. Entsprechend dem Beispiel mit den sechs Personen aus der Vorlesung gibt es nun entweder drei Zahlen, die alle untereinander in Relation stehen oder drei Zahlen, von denen keine untereinander in Relation stehen. Gebe es o.B.d.A. drei Zahlen, die alle untereinander in Relation stehen. Wir nennen diese Zahlen a, b, c mit $a < b < c$. Dann gilt

$$\underbrace{c - a}_{\in A} = c - b + b - a = \underbrace{(c - b)}_{\in A} + \underbrace{(b - a)}_{\in A}$$

wobei die Zugehörigkeit zu A aus den paarweisen Relationen folgt. Setzen also

$$x =_{\text{def}} c - a, \qquad y =_{\text{def}} c - b, \qquad z =_{\text{def}} b - a$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Selbststudium: **10 Punkte**

Erarbeiten Sie sich den Inhalt des Abschnitts „Lineare Rekursionsgleichungen" (Abschnitt 2.2) aus dem Skriptum *Mathematik: Diskrete Strukturen* (Version v4.6 oder höher) und beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 3x_{n-1} + \sqrt{2}$ für $n \geq 1$ mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 2$ und $x_0 = 1$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 2$ und $x_0 = 1$.

(d) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 1$ und $x_0 = 0$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 0$ und $x_0 = 1$.

Lösung:

(a) Hierbei handelt es sich um eine inhomogene, lineare Rekursionsgleichung erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x_n &= ax_{n-1} + b_1 \\ x_0 &= b_0 \end{aligned}$$

mit

$$a = 3, \qquad b_1 = \sqrt{2}, \qquad b_0 = 1$$

Unter Anwendung von *Theorem 2.4* erhalten wir die Lösung

$$x_n = b_0 a^n + b_1 \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} = 3^n + \frac{3^n - 1}{\sqrt{2}}$$

(b) Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} \\ x_0 &= b_0 \\ x_1 &= b_1 \end{aligned}$$

mit

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 2, \qquad b_1 = 2, \qquad b_0 = 1$$

Die Nullstellen von $t^2 - a_1 t - a_2 = t^2 - 2$ sind $\alpha = \sqrt{2}$ und $\beta = -\sqrt{2}$. Wir bestimmen nun

$$A = \frac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$B = \frac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Unter Anwendung von *Theorem 2.4* erhalten wir die Lösung

$$x_n = A\alpha^n - B\beta^n = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot \sqrt{2}^n - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot (-\sqrt{2})^n$$

(c) Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} \\ x_0 &= b_0 \\ x_1 &= b_1 \end{aligned}$$

mit

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1, \qquad b_1 = 2, \qquad b_0 = 1$$

Die Nullstellen von $t^2 - a_1 t - a_2 = t^2 - 2t - 1$ sind $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ und $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Wir bestimmen nun

$$A = \frac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{2 - 1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{2 - 1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Unter Anwendung von *Theorem 2.4* erhalten wir die Lösung

$$x_n = A\alpha^n - B\beta^n = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2})^n - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot (1-\sqrt{2})^n$$

(d) Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} \\ x_0 &= b_0 \\ x_1 &= b_1 \end{aligned}$$

mit

$$a_1 = -3, \qquad a_2 = 4, \qquad b_1 = 1, \qquad b_0 = 0$$

Die Nullstellen von $t^2 - a_1 t - a_2 = t^2 + 3t - 4$ sind $\alpha = 1$ und $\beta = -4$. Wir bestimmen nun

$$A = \frac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{1}{1-(-4)} = \frac{1}{5}$$

$$B = \frac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{1}{1-(-4)} = \frac{1}{5}$$

Unter Anwendung von *Theorem 2.4* erhalten wir die Lösung

$$x_n = A\alpha^n - B\beta^n = \frac{1}{5} \cdot 1^n - \frac{1}{5} \cdot (-4)^n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot (-4)^n$$

(e) Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} \\ x_0 &= b_0 \\ x_1 &= b_1 \end{aligned}$$

mit

$$a_1 = -3, \qquad a_2 = 4, \qquad b_1 = 0, \qquad b_0 = 1$$

Die Nullstellen von $t^2 - a_1 t - a_2 = t^2 + 3t - 4$ sind $\alpha = 1$ und $\beta = -4$. Wir bestimmen nun

$$A = \frac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{4}{1-(-4)} = \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{1-(-4)} = -\frac{1}{5}$$

Unter Anwendung von *Theorem 2.4* erhalten wir die Lösung

$$x_n = A\alpha^n - B\beta^n = \frac{4}{5} \cdot 1^n - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-4)^n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot (-4)^n$$