Universität Konstanz — Mathematik: Diskrete Strukturen
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft — SS 2015
Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

3. Übungsblatt

Ausgabe: 01.05.2015 **Abgabe:** 08.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie folgende Begriffsbildung: Es sei π eine Permutation von n Elementen. Ein Tupel $(z_1, \ldots, z_k)$ mit $z_1 \geq \cdots \geq z_k \geq 1$ und $\sum_{i=1}^{k} z_i = n$ heißt *Zyklentyp* von π, falls π gerade aus Zyklen der Längen $z_1, \ldots, z_k$ besteht.

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Welchen Wert hat $\pi^{23}(5)$ für $\pi = (4\ 2\ 5\ 3\ 1)(8\ 6\ 7)$?

(b) Wie sieht die Permutation $(3, 2, 6, 7, 5, 1, 4)$ in Zyklenschreibweise aus?

(c) Wie sieht die Permutation $(8\ 1\ 5\ 3)(2\ 4)(6\ 7)$ in Tupelschreibweise aus?

(d) Welchen Zyklentyp besitzt die Permutation $(2, 4, 1, 3, 5, 8, 6, 9, 7)$?

(e) Wie viele Permutationen von n Elementen mit dem Zyklentyp $(3, 1, \ldots, 1)$ gibt es für $n \geq 4$?

(f) Zeigen Sie kombinatorisch die Gleichung $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ für alle $n \geq 2$.

(g) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichung $S_{n,3} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$ für $n \geq 3$.

Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung aus Teilaufgabe (f).

(h) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine ganzzahlige Zahl $n \geq 3k$ als Summe von k ganzzahligen Summanden darzustellen, wobei jeder Summand mindestens 3 ist?

(i) Wie viele Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt es, in denen die Blöcke 01 und 10 genau einmal vorkommen?

(j) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100000 gibt es, deren Quersumme gerade 13 ergibt?

Kreativität: **10 Punkte**

Beweisen Sie durch kombinatorische Argumente folgende Aussagen für fallende Faktorielle:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}_+$ gilt $n^{\underline{k}} = k \cdot (n-1)^{\underline{k-1}} + (n-1)^{\underline{k}}$.

(b) Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt $(n+m)^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot n^{\underline{k-i}} \cdot m^{\underline{i}}$.

Bemerkung: Wir setzen $n^{\underline{k}} =_{\text{def}} 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$ gilt.

Transfer: **10 Punkte**

Sie arbeiten in einem *Games Engineering*-Projekt mit, in dem eine Software für historische Sportsimulationen entwickelt und implementiert werden soll. Dabei sollen fiktive Computerspielelemente mit realen Sportspielabläufen (wie zum Beispiel Fernsehmitschnitten) vermischt werden. Um einen möglichst realitätsnahen Eindruck beim Nutzer zu gewährleisten, müssen im Rahmen des *Interactive Narrative Design* für Abweichungen von der Realität (weil der Nutzer beispielsweise zu gut spielt) Fortsetzungen gefunden werden, die wieder auf reale Ereignisse und Ergebnisse zurück führen.

Als Sportart wurde Ihnen Basketball zugeteilt. Sie beginnen Ihre Analyse der Projektaufgabe mit Überlegungen dazu, wie viele unterschiedliche Spielverläufe überhaupt möglich sind. Dazu wählen Sie folgendes Ereignis: Im zweiten Spiel der *1956 Western Division Semifinals* der *NBA* (National Basketball Association) besiegten die *Minneapolis Lakers* die *Saint Louis Hawks* mit 133:75 und damit mit dem höchsten jemals einem Playoff-Spiel der NBA erzielten Punkteabstand.

(a) Wie viele verschiedene Punktezwischenstände führen zu dem gleichen Ergebnis, wenn Sie dabei davon ausgehen, dass es 1956 in der NBA für erfolgreiche Korbwürfe 1 oder 2 Punkte geben konnte?

(b) Wie viele verschiedene Punktezwischenstände führen ebenfalls zu dem gleichen Ergebnis, wenn Sie davon ausgehen, dass es damals bereits die Dreipunktelinie gegeben hätte und es somit für erfolgreiche Korbwürfe 1, 2 oder 3 Punkte geben konnte?

Geben Sie möglichst auch allgemeine Formeln für Ihre konkreten Ergebnisse an.