## fgabe 1: Kombinatorik **10 Punkte**

) Bestimmen Sie für die Menge $\{50, \dots, 200\}$ die Anzahl der Zahlen, die durch ($x^2$ mod 7), $x \in \mathbb{N}$, teilbar sind. (4 Punkte)

) Wie viele Möglichkeiten gibt es aus dem Alphabet $\{A, \dots, Z\}$,

a) ein Wort mit 8 Buchstaben zu erstellen? (1 Punkt)

b) ein Wort der Länge 6 zu erstellen, bei dem der erste Buchstabe aus der ersten Hälfte und der letzte Buchstabe aus der zweiten Hälfte des Alphabets stammt? (1 Punkt)

) Sei $\pi$ eine wie in der Vorlesung definierte Permutation.

Bestimmen Sie $\pi$ so, dass gilt:

$$\pi \circ (4\ 1\ 6)\ (3\ 5\ 2) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

Geben Sie das Ergebnis sowohl in Tupelschreibweise wie auch in Zyklenschreibweise an. (2 Punkte)

) Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Kniffel mit 5 Würfeln zu werfen, wenn nach den ersten beiden Würfen bereits zwei Würfel heraus gelegt wurden? (Bei einem Kniffel zeigen alle Würfel die selbe Augenzahl an) (2 Punkte)

## gabe 2: Wahrscheinlichkeitstheorie **10 Punkte**

Gegeben sei ein gewöhnliches Kartenspiel mit 36 Karten ($\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7, 6\}$) wobei jede Karte in vier verschiedenen Farben vorkommt. (3 Punkte)

Es werden zwei Karten gezogen. Bestimmen sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1) 2 Asse werden gezogen.
2) AB, AK oder AD werden gezogen.
3) 2 Buben, Damen oder Könige werden gezogen.
4) 2 rote oder schwarze Karten werden gezogen. (Als rot zählt Herz und Karo und als schwarz zählt Pik und Kreuz)
5) 2 unterschiedliche Karten werden gezogen, die nicht die selbe Farbe besitzen und keine Kombination aus 2) beinhalten.

) Bei einem Spiel dürfen Sie zwei Karten aus dem Kartenstapel aus Aufgabenteil a) ziehen. Für die Ereignisse aus Aufgabenteil a) erhalten Sie: für 1) 5€, für 2) 4€, für 3) 2€, für 4) 1€ und für 5) müssen sie 3€ zahlen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz. (3 Punkte)

:) Ein in einem Gebäude installierter Rauchmelder löst bei einem Brand zu 98% Feueralarm aus. Ein Fehlalarm wird dagegen pro Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,05% ausgelöst. Die Wahrscheinlichkeit pro Tag für einen Brand liegt bei 0,01%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich brennt, falls der Feueralarm ausgelöst wird? (4 Punkte)

## ufgabe 3: Graphentheorie **10 Punkte**

*inweis:* Für die Teilaufgaben a)-c) sind keine Begründungen erforderlich.

(a) Zeichnen Sie den Baum zum Prüfercode $\varphi(T) = 112341$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den lexografisch größten Prüfercode zum Graphen $A$ mit Gradfolge $(3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ (4 Punkte).

*Hinweis:* Für zwei Wörter $t = t_1 \dots t_n$ und $t' = t'_1 \dots t'_n$ mit $t_i, t'_i \in [n+2]$ sagen wir, dass $t$ lexikographisch kleiner als $t'$ ist (symbolisch: $t <_{\text{lex}} t'$), falls es ein $i \in [n]$ gibt mit $t_i < t'_i$ und $t_j = t'_j$ für alle $j < i$. Zum Beispiel gilt $112 <_{\text{lex}} 121$ und $121 <_{\text{lex}} 211$.

(c) Bestimmen sie $\chi(G)$ sowie $\chi'(G)$ für alle $G \in M = \{A, M_{2,4}, K_5\}$, wobei $A$ der Grap aus Teilaufgabe (b) ist. (2 Punkte)

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planare Graph $G = (V, E)$ enthält einen Knote mit $deg_G(v) \leq 5$. (2 Punkte

10 Pu

## Aufgabe 4: Rekursionsgleichungen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

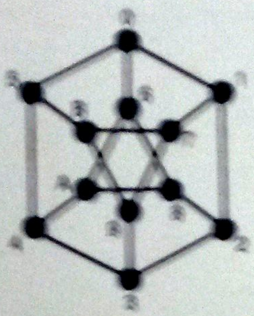
$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (5 Punkte).

(b) Bestimmen Sie den expliziten Ausdruck für $a_n$ (5 Punkte).

**Aufgabe 1: Graphentheorie** **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 9, A, B\}$:



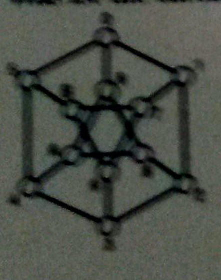
(a) Ist der Graph $G$ planar? - Wenn ja, geben Sie eine überschneidungsfreie Einbettung in der Ebene an. Andernfalls geben Sie eine Begründung an, warum der Graph nicht planar sein kann.

ja

(b) Ist der Graph $G$ hamiltonsch? - Wenn ja, geben Sie einen Hamiltonkreis an.

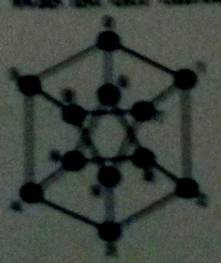
nein

(c) Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$? - Geben Sie eine passende Knotenfärbung an.



3

(d) Was ist der chromatische Index $\chi'(G)$? - Geben Sie eine passende Kantenfärbung an.



3

(e) Ist der Graph $G$ bipartit? - Wenn ja, geben Sie eine Partition der Knotenmenge an.

Nein! =(

## Aufgabe 4: Kombinatorik

**10 Punkte**

Eine Permutation $\pi : [n] \to [n]$ heißt *fixpunktfrei*, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von 5 Elementen.

*Hinweis:* Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

## Aufgabe 5: Kombinatorik 10 Punkte

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, $n$ ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen?

n^2 über n

(b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, $n$ ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n^2

(c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, $n$ ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe höchstens eine Figur steht?

n!

(d) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, $n$ ununterscheidbare Figuren auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in mindestens einer senkrechten Reihe keine Figur steht?

a-b: (n^2 über n) - n^2

(e) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, $k$ ununterscheidbare Figuren schwarzer Farbe und $n-k$ ununterscheidbare Figuren weißer Farbe auf ein $n \times n$-Schachbrett zu stellen, sodass in jeder waagerechten Reihe genau eine Figur (beliebiger Farbe) steht?

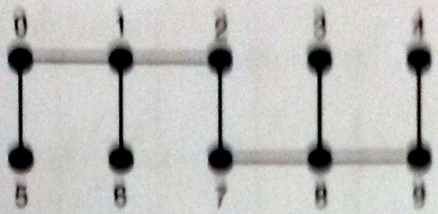
n^n * (n über k)?

n^n als Grundlage und dann mit (n über k) die Zeilen auswählen, wo schwarz

(unklar)

## Aufgabe 1: Graphentheorie 10 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:




Die Knotenmenge $V$ ist wie folgt geordnet: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$

**(a) Was ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten des Baumes?**

7

**(b) Für welche Knoten ist der maximale Abstand zu einem anderen Knoten minimal?**

2,7

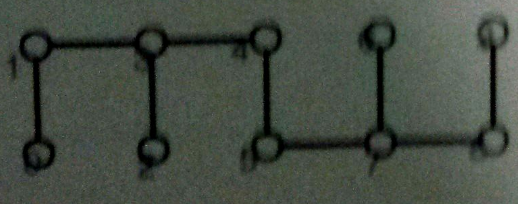
**(c) Wie viele perfekte Matchings besitzt der Baum?**

1

**(d) Welchen Prüfercode besitzt der Baum?**

8 9 0 1 1 2 7 8

**(e) Wie müssen Sie die Knoten des Baumes nummerieren, damit der Prüfercode $t = t_0 \dots t_7$ monoton aufsteigend ist, d.h., damit $t_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gilt?**



## Aufgabe 4: Algebraische Strukturen — 10 Punkte

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1,2,3,4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen die Gruppe $\mathcal{S}_4$. Das neutrale Element der Gruppe ist $\mathrm{id} : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} : x \mapsto x$. Wir betrachten die folgenden in Zyklenschreibweise gegebenen Permutationen:

$$p = (1\ 2)(3\ 4), \qquad q = (1\ 2)(3)(4)$$

(a) Gilt $p \circ p = \mathrm{id}$?

(b) Gilt $p \circ q = q \circ p$?

(c) Es seien $r =_{\mathrm{def}} p \circ q$ und $U =_{\mathrm{def}} \{\mathrm{id}, p, q, r\}$. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Elemente von $U$ an.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge $U$ für jedes Element $x \in U$ auch sein Inverses $x^{-1}$ enthält.

(e) Aus den beiden obigen Aussagen folgt, dass $U$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist. Ist die Gruppe $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ isomorph zur Gruppe $U$?

## Aufgabe 5: Kombinatorik **10 Punkte**

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ heißt *biquadratfrei*, wenn es keine Biquadratzahl $k^4$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ gibt, die $n$ teilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der biquadratfreien Zahlen zwischen 2 und 1000.

*Hinweis:* Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

## Aufgabe 2: Algebraische Strukturen

**10 Punkte**

(a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für $\circ$ an, sodass jedes Element $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der Algebra $\langle\{1, 2, 3, 4\}, \circ\rangle$ genau $i - 1$ linksinverse Elemente besitzt:

| $\circ$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

(b) Können Sie die Verknüpfungstabelle für $\circ$ ergänzen, dass $\circ$ assoziativ auf $\{a, b, c, d\}$ ist:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | | $b$ | $a$ |
| $b$ | $c$ | $b$ | | $b$ |
| $c$ | | $a$ | $c$ | $c$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

(c) Ist die Algebra $\{a, b, c\}$ mit der Verknüpfung

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

eine Gruppe?

(d) Ist die Algebra $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ\rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

(e) Ist die Algebra $\langle \mathbb{N}, \circ\rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto |x - y|$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid oder ein Gruppe? Geben Sie den speziellsten Algebratyp aus der Liste an.

**Aufgabe 4: Kombinatorik** **10 Punkte**

Wie viele Zahlen in der Menge $\{2, 3, \ldots, 360\}$ haben mindestens einen gemeinsamen Primfaktor mit 360?

*Hinweis:* Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.