12. (und letztes) Übungsblatt

Ausgabe: 05.06.2015 **Abgabe:** 10.07.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: 10 Punkte

Ordnen Sie den nachfolgenden Algebren jeweils den speziellsten Algebratyp *Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Loop* oder *Gruppoid mit Eins* zu. Geben Sie auch an, ob es sich um einen abelschen Gruppoid handelt.

(a) $\langle \{5\}, \circ \rangle$ mit $\circ : \{5\}^2 \to \{5\}$ beliebig

(b) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto x$

(c) $\langle \mathbb{N}, \min \rangle$

(d) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto (x + y)^2 - (x - y)^2$

(e) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto y^x$

(f) $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ mit $\circ : (x, y) \mapsto 42$

(g) $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$

(h) $\langle \mathbb{Z}_6, \cdot_6 \rangle$

(i) $\langle \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot_6 \rangle$

(j) $\langle \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot_7 \rangle$

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Kreativität: 10 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage: In jeder Gruppe G gilt für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ die Gleichung

$$\mathrm{ord}(a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \cdots \circ a_{n-1} \circ a_n) = \mathrm{ord}(a_2 \circ a_3 \circ \cdots \circ a_{n-1} \circ a_n \circ a_1).$$

Verwenden Sie vollständige Induktion über n.

Transfer: 10 Punkte

Sie arbeiten in einem *Robotik*-Projekt bei der Entwicklung eines kognitiven Schaltkreises mit. Dabei sind Sie für die Logik-Einheit zuständig und sollen die vierwertige Belnap-Logik mit den Wahrheitswerten „wahr“ (w), „falsch“ (f), „unbekannt“ ($\perp$) und „paradox“ ($\top$) implementieren. Eine aussagenlogische Variable x kann also genau einen dieser vier Wahrheitswerte annehmen.

Innerhalb der Logik werden die Wahrheitswerte wie folgt durch Paare von Bits repräsentiert:

$$\begin{aligned} \mathsf{w} &\mapsto (1,0) \\ \mathsf{f} &\mapsto (0,1) \\ \bot &\mapsto (0,0) \\ \top &\mapsto (1,1) \end{aligned}$$

Die Operationen auf der Grundmenge $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ sind durch folgende Konnektoren gegeben:

$$\begin{aligned} \wedge &: ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (\min\{x_1,x_2\}, \max\{y_1,y_2\}) \\ \vee &: ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (\max\{x_1,x_2\}, \min\{y_1,y_2\}) \\ \neg &: (x,y) \mapsto (y,x) \end{aligned}$$

Bei der Umsetzung der Logik sollen Sie die beiden folgenden Aufgaben lösen.

(a) Beschreiben Sie die Operatoren $\wedge, \vee, \neg$ als Verknüpfungen über der Menge $\{\mathsf{w}, \mathsf{f}, \top, \bot\}$.

(b) Ist die Algebra $\mathsf{FOUR} = \langle\{\mathsf{w}, \mathsf{f}, \top, \bot\}, \wedge, \vee, \neg\rangle$ eine boolesche Algebra?