UNIVERSITÄT KONSTANZ — Mathematik: Diskrete Strukturen
FACHBEREICH INFORMATIK & INFORMATIONSWISSENSCHAFT — SS 2015
Prof. Dr. Sven Kosub / Michael Aichem, Julian Müller, Dagmar Sorg, Michael Strecke, Nadja Willenborg

5. Übungsblatt

Ausgabe: 15.05.2015 **Abgabe:** 22.05.2015, bis spätestens 12:00 per Mail an den Tutor

Vertiefung: **10 Punkte**

(a) Bei einem Turnier spielen n Mannschaften „jeder gegen jeden“ (genau einmal). Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt, für eine Niederlage 0 Punkte. Die Platzierungen ergeben sich aus den erzielten Punkten, bei Punktgleichheit wird gelost.

Kann eine Mannschaft mit n Punkten Turnierletzter werden?

(b) Muss eine Mannschaft mindestens n Punkte für den Turniersieg erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird? ?

(c) Wie viele Punkte kann der Turnierzweite höchstens erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(d) Wie viele Mannschaften können höchstens $n + 1$ Punkte erreichen, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(e) Gibt es stets zwei Mannschaften mit gleicher Punktzahl, wenn das gleiche Szenario wie in Teilaufgabe (a) betrachtet wird?

(f) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von EUKLID, um $\mathrm{ggT}(2^{n+1} + 1, 2^n + 1)$ zu bestimmen.

(g) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von EUKLID, um $\mathrm{ggT}(n^2+1, n+1)$ zu bestimmen.

(h) Wie viele rekursive Aufrufe benötigt der Algorithmus von EUKLID, um $\mathrm{ggT}(F_{k+2}, F_{k+4})$ zu bestimmen. Hierbei steht F_k für die k-te FIBONACCI-Zahl.

(i) Wie viele FIBONACCI-Zahlen gibt es in der Menge $I_n =_{\text{def}} \{2^n + 1, 2^n + 2, \ldots, 2^{n+1}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ auf jeden Fall? – Begründen Sie Ihre Antwort mittels vollständiger Induktion über n.

(j) Der Algorithmus von EUKLID benötigt maximal $k^*(n) =_{\text{def}} \max \{ k \in \mathbb{N} \mid F_{k+3} \leq n \}$ rekursive Aufrufe, um den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $n \geq 2$ zu bestimmen.

Können Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe (i) verwenden, um zu zeigen, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $k^*(n) \leq c \cdot \log_2 n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$?

Kreativität: **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass es für jede Menge $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Zahlen $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $x = y + z$
- $\{x, y, z\} \subseteq A$ oder $\{x, y, z\} \subseteq \overline{A}$

Hinweis: Verwenden Sie das Beispiel zum verallgemeinerten Schubfachschluss aus der Vorlesung und definieren Sie sich eine geeignete „Kennen"-Relation auf den Zahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eine Aufzählung und Überprüfung aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird *nicht* als Lösung akzeptiert!

Selbststudium: **10 Punkte**

Erarbeiten Sie sich den Inhalt des Abschnitts „Lineare Rekursionsgleichungen" (Abschnitt 2.2) aus dem Skriptum *Mathematik: Diskrete Strukturen* (Version v4.6 oder höher) und beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 3x_{n-1} + \sqrt{2}$ für $n \geq 1$ mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 2$ und $x_0 = 1$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 2$ und $x_0 = 1$.

(d) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 1$ und $x_0 = 0$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionsgleichung $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 0$ und $x_0 = 1$.