Quiz zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (Musterlösung)

Termin: 12. Juni 2014, 11:50–12:20 Uhr

Name: ____________ **Vorname:** ____________

Matr.-Nr.: ____________ **Gruppe:** ____________

Hinweise: Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgaben bitte erst genau durch. Die Bearbeitungszeit beträgt **30 Minuten**. Viel Erfolg!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	gesamt
mögliche Punkte	10	10	10	30
erreichte Punkte				

Aufgabe 1: Kombinatorik — 10 Punkte

Sie erhalten drei Paare von Karten, wobei jeweils die beiden Karten in einem Paar durch ein X unterscheidbar gemacht worden sind, beispielsweise so:

$A \quad A_x \quad B \quad B_x \quad C \quad C_x$

(a) Wie viele Auswahlen von 4 Karten enthalten eine mit X markierte Karte?

$\binom{6}{4}$

(b) Wie viele Auswahlen von 4 Karten enthalten ein Paar?

$\binom{6}{4}$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Karten in eine Reihe zu legen?

$6!$

(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Karten so in eine Reihe zu legen, dass eine mit X markierte Karte am Anfang liegt?

$3 \cdot 5!$

(e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Karten so in eine Reihe zu legen, dass jeweils eine mit X markierte Karte am Anfang und am Ende liegt?

$3 \cdot 2 \cdot 4!$

Aufgabe 2: Permutationen 10 Punkte

Mit $\mathcal{S}_n$ wird die *symmetrische Gruppe* von n Elementen bezeichnet:

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation } \}$$

Auf $\mathcal{S}_n$ ist die Hintereinanderausführung $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ wie folgt für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n$ definiert:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \ : \ [n] \to [n] \ : \ x \mapsto \pi_2(\pi_1(x))$$

Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie Ihre Antworten in die jeweiligen Boxen ein.

(a) Welche Permutation in Tupelschreibweise ist $(2,3,1,4,6,5) \circ (2,3,1,4,6,5)$?

$(3,1,2,4,5,6)$

(b) Welche Permutation in Zyklenschreibweise ist $(1\ 2\ 3)(4\ 5)(6) \circ (1\ 2\ 3)(4\ 6)(5)$?

$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$

(c) Welches $\pi \in \mathcal{S}_6$ in Zyklenschreibweise erfüllt $\pi \circ (1\ 3)(2\ 4\ 5)(6) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$?

$(1\ 3)(2\ 5\ 4)(6)$

(d) Wie viele Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ erfüllen $\pi(1) < \pi(2)$ oder $\pi(1) < \pi(3)$?

$\frac{2}{3} \cdot n!$

(e) Wie groß ist $s_{3,2}$?

3

Aufgabe 3: Vermischtes 10 Punkte

Betrachten Sie die gegebenen Konstellationen und beantworten Sie die jeweils gestellten Fragen, in dem Sie für „Ja“ ein Kreuz in die Box eintragen und für „Nein“ die Box frei lassen.

Beachtung: Pro Teilaufgabe erhalten Sie für eine richtige Antwort $+0,5$ Punkte und für eine falsche Antwort $-0,5$ Punkte!

(a) Ein WM-Kader umfasst 23 Fußballspieler, von denen 11 Spieler in die Anfangsformation für ein Spiel bestimmt werden. Der Spielbericht führt diese ausgewählten Spieler in alphabetischer Reihenfolge auf. Nehmen Sie an, dass keine zwei Spieler namensgleich sind und dass theoretisch jeder Spieler auf jeder Position spielen könnte. Wie viele Spielberichte gibt es?

Entspricht das Szenario dem Ziehen von 11 Kugeln aus 23 Kugeln mit Zurücklegen? ☐

Entspricht das Szenario dem Ziehen von 11 Kugeln aus 23 Kugeln mit Reihenfolge? ☐

Gibt es $\binom{23}{11}$ verschiedene Spielberichte? X

Gibt es $23^{\underline{11}}$ verschiedene Spielberichte? ☐

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsgleichung $a_n =_{\mathrm{def}} 1 - a_{n-1}$ (für $n \geq 1$) mit der Anfangsbedingung $a_0 =_{\mathrm{def}} 0$ gegeben.

Ist die Rekursionsgleichung linear, inhomogen und von 1. Ordnung? X

Kommt 23 als Folgenglied vor? ☐

Gilt stets $a_n = a_{n+2}$? X

Ist $\frac{1-x}{1-x^2}$ die erzeugende Funktion zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? ☐

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsgleichung $a_n =_{\mathrm{def}} a_{n-2} + (-1)^n$ (für $n \geq 2$) mit den Anfangsbedingungen $a_1 =_{\mathrm{def}} 0$ und $a_0 =_{\mathrm{def}} 0$ gegeben.

Ist die Rekursionsgleichung linear, homogen und von 1. Ordnung? ☐

Kommt 23 als Folgenglied vor? X

Gilt $a_{42} = 21$? X

Ist $\frac{1-x}{1+x^2}$ die erzeugende Funktion zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? ☐

(d) Ein Dominostein ist ein Rechteck bestehend aus zwei (ununterscheidbaren) Quadraten, wobei in jedem Quadrat durch Punkte eine Zahl von 1 bis n dargestellt wird. Nehmen Sie an, Sie wählen einen Dominostein zufällig unter Gleichverteilung.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Dominostein eine gleiche Anzahl von Punkten in beiden Quadraten besitzt?

$\frac{1}{2n}$ ☐

$\frac{1}{n^2}$ ☐

$\frac{2}{n+1}$ X

$\frac{1}{n+1}$ ☐

(e) Betrachten Sie auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ für *Zweimal Würfeln* mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ und $\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{36}$ die beiden Ereignisse $A =_{\mathrm{def}} \{\ (j,k) \mid j+k \text{ ist gerade }\}$ und $B =_{\mathrm{def}} \{\ (j,k) \mid j \cdot k \text{ ist ungerade }\}$ und beantworten Sie folgende Fragen.

Gilt $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$? X

Gilt $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(B|A)$? X

Gilt $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$? X

Gilt $\mathbf{P}(A|\overline{B}) > \mathbf{P}(B|\overline{A})$? X

Zusatzblatt. Bitte machen Sie deutlich, auf welche Aufgabe(n) Sie sich hier beziehen.