

# Mathematik: Diskrete Strukturen

## Lösungsblatt

Anton Bubnov, Yevgen Kuzmenko

April 29, 2015

### Vertiefung:

- (a) Wie viele Verlosungen von 5 identischen Kaffeemaschinen unter 25 Teilnehmern gibt es?

Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge.

$$\binom{n}{k} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{20! \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{5! \cdot 20!} = 53\,1230$$

- (b) Wie viele Möglichkeit gibt es, genau 7 Chips auf die drei Felder 1-12, 13-24, 25-36 beim Roulette zu legen?

Wir ziehen die Felder ohne Reihenfolge mit Zurücklegen.

$n = 3$ ;  $k = 7$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!(2!)} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

- (c) Wie viele Binärzahlen der Länge 8 beginnen mit einer 0 oder enden mit 11?

Da am Anfang haben wir 0, bleib für die Reste 7 Stellen, also  $2^7 = 128$  Varianten.

Da am Ende haben wir zwei 1, bleib für die Reste 6 Stellen, also  $2^6 = 64$  Varianten.

Nach Satz 6. (geordnet, mit Zurücklegen)

- (d) Sie haben 5 Informatik-Bücher, 4 Mathematik-Bücher und 3 Philosophie-Bücher zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf eine Reise zwei Bücher aus verschiedenen Themenbereichen mitzunehmen?

Nach Satz 6. (ungeordnet, ohne Zurücklegen) es gibt 3 Kombinationen von Fächern und zwar Inf. und Mathe, Inf. und Phil., Mathe und Phil.

Gemäss jeden Fall haben wir insgesamt so viel Kombinationen:

$$5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 47$$

- (e) In einer Gruppe von 11 Personen sind 5 Vorstandsposten (ohne Personalunion) für jeweils eine Person zu vergeben: Präsidentin, Vizepräsidentin, Geschäftsführerin, stellvertretende Geschäftsführerin, Schatzmeisterin. Wie viele verschiedene Vorstände sind möglich?

In diesem Fall sollen wir ein Formel aus Satz 6. (geordnet, ohne Zurücklegen) benutzen:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{6!} = 55440$$

- (f) Wie viele verschiedene Wörter können Sie aus dem Wort PICHICHI bilden?

In dieser Wort haben wir 8 Buchstaben. Da aber manche Buchstaben sich wiederholen:

I=3, C=2, H=2 - Mal. Da wir die Umstellung der gleiche Buchstaben nicht unterscheiden, haben wir:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1680$$

(g) Welcher Faktor  $B(n, k)$  erfüllt die Gleichung  $\binom{n}{k} = B(n, k) \cdot \binom{n-1}{k-1}$ ?

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &=_{def} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ B(n, k) &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{k} \end{aligned}$$

(h) Welchen Koeffizienten besitzt  $x^6 y^7$  in  $(x+y)^{13}$ ?

Gemass Satz 8.:  $(x+y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} x^{13-k} y^k$ .

Dann  $x^6 y^7$  besitzt  $\binom{13}{7}$ .

(i) Welchen Koeffizienten besitzt  $x^3 y^3 z^7$  in  $(x+y+z)^{13}$ ?

Da wir hier drei Variablen haben, sollen wir kombinatorisches Beweis modifizieren, um brauchende Formel zu bekommen.

Insofern jeder Summant besteht aus  $n$  Faktoren, sind  $j$  davon  $z$ , so sind  $(k-j)$  davon  $y$  und  $(n-k)$  davon  $x$ . Dies entspricht  $x^{n-k} y^{k-j} z^j$ . Somit gilt:

$$(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k-j} z^j$$

Dann nach Voraussetzung:

$$(x+y+z)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{10} x^{13-10} y^{10-7} z^7$$

Folglich  $x^3 y^3 z^7$  besitzt  $\binom{13}{10}$ .

(j) Wie können Sie  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  vereinfachen?

Gemass Satz 11.:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{2n}{n}$ .

## Kreativitat:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

$$IA : n = 1 : \binom{2}{1} \geq \frac{4}{2} = 2$$

$$IV : \binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

$$IS : \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}$$

$$\binom{2n}{n-1} + 2 \cdot \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \iff 2 \cdot \left( \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} \right) \geq 2 \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+1}}$$

Da die linke Seite ist deutlich groesser als rechte.

## Transfer:

- (a) Wie groß ist  $\binom{a^n}{a^m}$ ? Hier haben wir einfach Kombination (Satz 6. (ungeordnet, ohne Zurucklegen)) mit  $|a^n| = n$  und  $|a^m| = m$ , also  $\binom{n}{m}$