11 вариант

№1

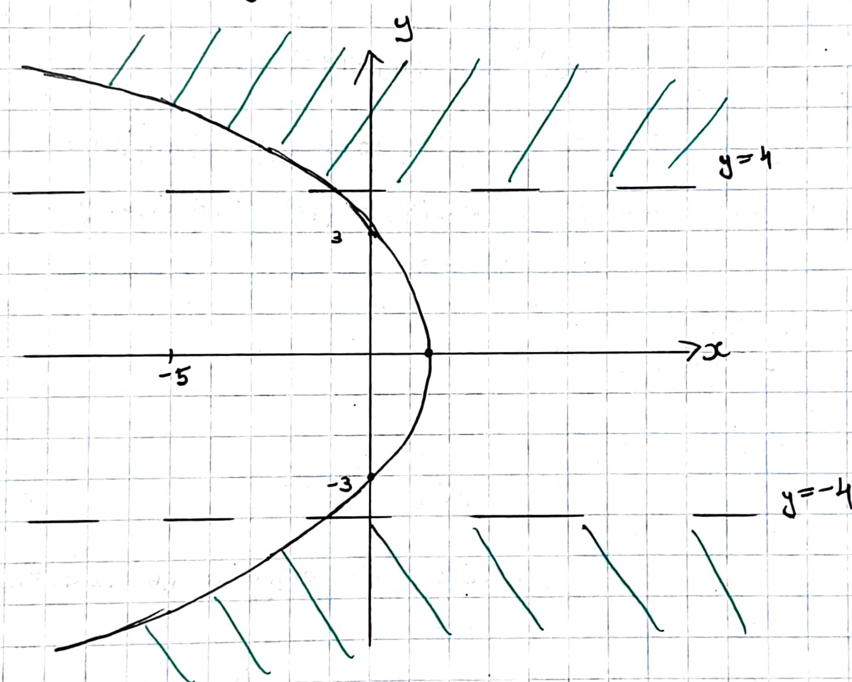
$D = \{z: |z| \geq 3 - \mathrm{Re}\, z, \ |\mathrm{Im}\, z| > 4\}$

Пусть $z = x+iy$

$|z| \geq 3 - \mathrm{Re}\, z \Rightarrow |x+iy| \geq 3 - \mathrm{Re}(x+iy) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq 3-x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2 \geq (3-x)^2 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 9-6x+x^2 \Rightarrow y^2 \geq -6(x-\frac{3}{2})$ – область „снаружи" параболы с вершиной $(\frac{3}{2};0)$

$|\mathrm{Im}\, z| > 4 \Rightarrow |y| > 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y<-4 \\ y>4 \end{array}\right.$



№2

$\cos(5-i)$

Используем формулу: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$

$\cos(5-i) = \frac{1}{2}\left(e^{i(5-i)} + e^{-i(5-i)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{5i}\cdot e + e^{-5i}\cdot e^{-1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(e(\cos 5 + i\sin 5) + e^{-1}(\cos 5 - i\sin 5)\right) = \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 5 + \frac{e-e^{-1}}{2}\sin 5 \cdot i =$

$= \mathrm{ch}1\cdot\cos 5 + i\,\mathrm{sh}1\cdot\sin 5$

№3

$$u(x,y) = 2\sin x \, ch y - x$$

$$f(x,y) = u(x,y) + i\,\upsilon(x,y)$$

Воспользуемся условиями Коши - Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x \, ch y - 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin x \, sh y$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x \, ch y - 1 \Rightarrow \upsilon(x,y) = \int (2\cos x \, ch y - 1)\, dy = 2\cos x \, sh y - y + \varphi(x)$$

$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -2\sin x \, sh y + \varphi'(x)$ - это равно $-\frac{\partial u}{\partial y} = -2\sin x \, sh y$, тогда $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x) = C \Rightarrow \upsilon(x,y) = 2\cos x \, sh y - y + C$$

Тогда $f(x,y) = 2\sin x \, ch y - x + i\,(2\cos x \, sh y - y + C) =$

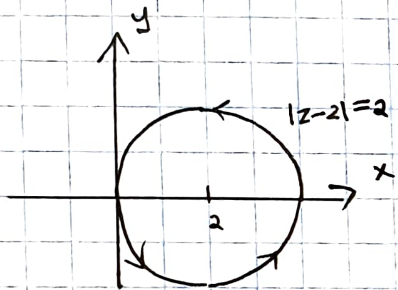
$$= 2(\sin x \, ch y + i \cdot \cos x \, sh y) - (x + iy) + \varphi(x) = 2\sin(x+iy) - (x+iy) + Ci$$

$$x + iy = z$$

$$f(z) = 2\sin z - z + Ci$$

№4

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz \quad, C - \text{окружность } |z-2|=2.$$



Пусть $z = 2e^{i\varphi} + 2$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(2\cos\varphi + 2i\sin\varphi + 2) = 2\cos\varphi + 2$

$dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi + 2)\cdot 2ie^{i\varphi}d\varphi = 4i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\cdot e^{i\varphi}d\varphi + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ie^{i\varphi}d\varphi$$

Найдем интеграл: $\int \cos\varphi \cdot e^{i\varphi}d\varphi = \begin{vmatrix} u = \cos\varphi & du = -\sin\varphi d\varphi \\ d\vartheta = ie^{i\varphi}d\varphi & \vartheta = e^{i\varphi} \end{vmatrix} =$

$$= e^{i\varphi}\cos\varphi + \int e^{i\varphi}\sin\varphi\, d\varphi = \begin{vmatrix} u = \sin\varphi & du = \cos\varphi d\varphi \\ d\vartheta = e^{i\varphi}d\varphi & \vartheta = \frac{1}{i}e^{i\varphi} = -ie^{i\varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{i\varphi}\cos\varphi - ie^{i\varphi}\sin\varphi + i\underbrace{\int e^{i\varphi}\cos\varphi d\varphi}_{= I}$$

$$I = e^{i\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi) + iI \Rightarrow (1-i)I = e^{i\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{1-i}e^{i\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1+i}{2}e^{i\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = 4i\cdot\frac{1+i}{2}e^{i\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4e^{i\varphi}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2(i-1)\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) - e^{-\frac{\pi}{2}i}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) + 4\left(e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) =$$

$$= 2(i-1)\left(i(0-i) + i(0+i)\right) + 4(i+i) = 8i$$

Ответ: $8i$

№5

$$f(z) = \frac{z}{z+2}, \quad z_0 = 1$$

Замена: $w = z-1, \; z = w+1$

$$f(w) = \frac{w+1}{w+3} = \frac{w+3-2}{w+3} = 1 - \frac{2}{w+3} = 1 - \frac{2}{3\left(1+\frac{w}{3}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^n}{3^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2\,w^n}{3^{n+1}} \quad \left(\left|\frac{w}{3}\right| < 1 \Rightarrow |w| < 3\right)$$

$$f(w) = 1 - \frac{2}{w+3} = 1 - \frac{2}{w}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{w}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2\cdot 3^n}{w^{n+1}} \quad \left(\left|\frac{3}{w}\right| < 1 \Rightarrow |w| > 3\right)$$

В результате

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2\,(z-1)^n}{3^{n+1}}, \quad |z-1| < 3$$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2\cdot 3^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 3.$$

№6

$$f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad 0<|z|<\infty$$

$$f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right)=$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\ldots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\ldots = \underline{z^2+z+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}}}$$

№7

$$\int_L (z-5)\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)dz, \quad L=\{z: |z|=3\}.$$

Особая точка: $z=-1$ – внутри контура $|z|=3$

Разложим $f(z)=(z-5)\cos\frac{1}{z+1}$ в ряд Лорана в окрестности $z_0=-1$

Пусть $z+1=w$, $z=w-1$, $w_0=0$.

$$f(w) = (w-6)\cos\frac{1}{w} = (w-6)\left(1-\frac{1}{2w^2}+\frac{1}{24w^4}-\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}}+\dots\right) =$$

$$= w-6-\frac{1}{2w}+\frac{3}{w^2}+\frac{1}{24w^3}+\dots$$

$$f(z) = (z+1)-6-\frac{1}{2(z+1)}+\frac{3}{(z+1)^2}+\frac{1}{24(z+1)^3}+\dots$$

Главная часть Лорана содержит бесконечное число слагаемых $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $z_0=-1$ – существенно особая точка.

$\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z) = C_{-1} = -\frac{1}{2}$ – коэффициент Лорановского разложения

Тогда $\displaystyle\int\limits_L (z-5)\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$

Ответ: $-\pi i$

№8

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+5}\,dx, \quad a<0$$

$$-\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+5}\,dx \leftarrow a>0$$

$$-\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+5}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)\,dx}{x^2+5}$$

Построим функцию $f(z) = \dfrac{ze^{-azi}}{z^2+5}$, которая на действительной оси совпадает с $f(x)$.

Особые точки $f(z)$: $z^2+5=0$, $z_1=\sqrt{5}i$, $z_2=-\sqrt{5}i$, в верхней полуплоскости только $z_1=\sqrt{5}i$. — полюс 1го порядка.

$$\operatorname*{res}_{z=\sqrt{5}i} f(z) = \lim_{z\to\sqrt{5}i} (z-\sqrt{5}i) f(z) = \lim_{z\to\sqrt{5}i} \frac{ze^{-aiz}}{z+\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{5}i\cdot e^{-a\sqrt{5}\cdot(-1)}}{2\sqrt{6}i} = \frac{1}{2}e^{a\sqrt{5}}$$

Тогда $-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)\,dx}{x^2+5} = \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{a\sqrt{5}}\right) = -\frac{\pi}{2}e^{a\sqrt{5}}$, $a>0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}e^{a\sqrt{5}}$, $a>0$