МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Расчётно-графическая работа. Математический анализ №1

по теме «Множества»

Вариант №6

Выполнила группа №6, Поток 15.1:
Студенты: Эминов Расим,
Бободжонов Комронджон,
Носов Георгий,
Солиев Илхом
Преподаватель:
Беспалов Владимир Владимирович

Санкт-Петербург, 2023

Дата сдачи: 25.11.2023

Задание 1.1

Перечислите элементы множества:
K = {x : x < 12, x - натуральное число}

Решение:

K = {x : x < 12, x - натуральное число} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}.

Задание 1.2

Опишите множество при помощи характеристического свойства:
M = { Множество неотрицательных нечетных чисел 1, 3, 5, 7,....}

Решение:

M={x | x ∈ N и x=2n+1 для некоторого n ∈ N_0 }
$M = \{x | x \in N$ и $x = 2n + 1$ для некоторого $n \in N_0\}$

Здесь N обозначает множество натуральных чисел, а N_0— множество натуральных чисел включая ноль. Выражение x=2n+1 указывает на то, что ‘x’ является нечетным числом, так как оно представляет собой удвоенное натуральное число (включая ноль) плюс один.

Задание 1.3

Эквивалентны ли следующие множества: $A = \{x \mid x^3 - 8 = 0\}$ и $B = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$

Решение:

Рассмотрим множество $A = \{x \mid x^3 - 8 = 0\}$.
Решим уравнение $x^3 - 8 = 0$.
$x = 2$
Рассмотрим множество $B = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$.
Решим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

$D = B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$
Исходя из 0-го значения дискриминанта, мы имеем один корень.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

Таким образом у нас получилось так $A = \{2\}$и$B = \{2\}$.
Исходи из того, что $\{2\} = \{2\}$, множества $A = \{2\}$и$B = \{2\}$ являются эквивалентными.

Задание 1.4

Даны множества:
- $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$
- $A = \{p, q, r, s, t\}$
- $B = \{p, r, t, v\}$
- $C = \{p, s, t, u, v\}$

Требуется найти:
1) $A \setminus C$
2) $A \setminus \overline{B}$
3) $B \setminus C$
4) $\overline{A \cup B}$
5) $\overline{C} \cup A$
6) $\overline{A} \cup B$
7) $B \cap \overline{A}$
8) $A \cup B \cup C$
9) $(A \cup B) \cap C$
10) $(A \setminus B) \cup C$
11) $(\overline{A} \setminus B) \cup C$
12) $(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C}$
13) $(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C)$
14) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
15) $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$
16) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$
17) $\overline{A \cup B \cup C}$
18) $\overline{C} \cup (B \setminus A)$
19) $A \oplus C$
20) $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C)$

21) $(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A)$

Определения:

- Объединение: $A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B\}$
- Пересечение: $A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Вычитание: $A \setminus B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B\}$
- Симметрическое вычитание: $A \oplus B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \overline{\left((x \in A) \wedge (x \in B)\right)}\}$
- Дополнение: $\overline{A} = \{x: (x \in U) \wedge (x \notin A)\}$

Решение:

1) $A \setminus C = \{p, q, r, s, t\} \setminus \{p, s, t, u, v\} = \{q, r\}$
2) $A \setminus \overline{B} = A \setminus (U \setminus B) = \{p, q, r, s, t\} \setminus (\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, r, t, v\}) = \{p, q, r, s, t\} \setminus \{q, s, u, w\} = \{p, r, t\}$
3) $B \setminus C = \{p, r, t, v\} \setminus \{p, s, t, u, v\} = \{r\}$
4) $\overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B) = \{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus (\{p, q, r, s, t\} \cup \{p, r, t, v\}) = \{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t, v\} = \{u, w\}$
5) $\overline{C} \cup A = (U \setminus C) \cup A = (\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, s, t, u, v\}) \cup \{p, q, r, s, t\} = \{q, r, w\} \cup \{p, q, r, s, t\} = \{p, q, r, s, t, w\}$
6) $\overline{A} \cup B = (U \setminus A) \cup B = (\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t\}) \cup \{p, r, t, v\} = \{u, v, w\} \cup \{p, r, t, v\} = \{p, r, t, u, v, w\}$
7) $B \cap \overline{A} = B \cap (U \setminus A) = \{p, r, t, v\} \cap (\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t\}) = \{p, r, t, v\} \cap \{u, v, w\} = \{v\}$
8) $A \cup B \cup C = \{p, q, r, s, t\} \cup \{p, r, t, v\} \cup \{p, s, t, u, v\} = \{p, q, r, s, t, u, v\}$
9) $(A \cup B) \cap C = (\{p, q, r, s, t\} \cup \{p, r, t, v\}) \cap \{p, s, t, u, v\} = \{p, q, r, s, t, v\} \cap \{p, s, t, u, v\} = \{p, s, t, v\}$
10) $(A \setminus B) \cup C = (\{p, q, r, s, t\} \setminus \{p, r, t, v\}) \cup \{p, s, t, u, v\} = \{q, s\} \cup \{p, s, t, u, v\} = \{p, q, s, t, u, v\}$
11) $\left(\overline{A} \setminus B\right) \cup C = \left((U \setminus A) \setminus B\right) \cup C = \left((\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t\}) \setminus \{p, r, t, v\}\right) \cup \{p, s, t, u, v\} = (\{u, v, w\} \setminus \{p, r, t, v\}) \cup \{p, s, t, u, v\} = \{u, w\} \cup \{p, s, t, u, v\} = \{p, s, t, u, v, w\}$
12) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \overline{C} = \left((U \setminus A) \cup B\right) \cap (U \setminus C) = \left((\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t\}) \cup \{p, r, t, v\}\right) \cap (\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, s, t, u, v\}) = (\{u, v, w\} \cup \{p, r, t, v\}) \cap \{q, r, w\} = \{p, r, t, u, v, w\} \cap \{q, r, w\} = \{r, w\}$
13) $(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C) = (A \cup B) \setminus ((U \setminus A) \cap C) = (\{p, q, r, s, t\} \cup \{p, r, t, v\}) \setminus ((\{p, q, r, s, t, u, v, w\} \setminus \{p, q, r, s, t\}) \cap \{p, s, t, u, v\}) =$

$\{p,q,r,s,t,v\} \setminus (\{u,v,w\} \cap \{p,s,t,u,v\}) = \{p,q,r,s,t,v\} \setminus \{u,v\} = \{p,q,r,s,t\}$

14) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (\{p,q,r,s,t\} \setminus \{p,r,t,v\}) \cup (\{p,q,r,s,t\} \setminus \{p,s,t,u,v\}) = \{q,s\} \cup \{q,r\} = \{q,r,s\}$

15) $(C \cup A) \setminus (C \cap A) = (\{p,s,t,u,v\} \cup \{p,q,r,s,t\}) \setminus (\{p,s,t,u,v\} \cap \{p,q,r,s,t\}) = \{p,q,r,s,t,u,v\} \setminus \{p,s,t\} = \{q,r,u,v\}$

16) $(A \cup B) \cap (A \cap C) = (\{p,q,r,s,t\} \cup \{p,r,t,v\}) \cap (\{p,q,r,s,t\} \cap \{p,s,t,u,v\}) = \{p,q,r,s,t,v\} \cap \{p,s,t\} = \{p,s,t\}$

17) $\overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C) = \{p,q,r,s,t,u,v,w\} \setminus (\{p,q,r,s,t\} \cup \{p,r,t,v\} \cup \{p,s,t,u,v\}) = \{p,q,r,s,t,u,v,w\} \setminus \{p,q,r,s,t,u,v\} = \{w\}$

18) $\overline{C} \cup (B \setminus A) = (U \setminus C) \cup (B \setminus A) = (\{p,q,r,s,t,u,v,w\} \setminus \{p,s,t,u,v\}) \cup (\{p,r,t,v\} \setminus \{p,q,r,s,t\}) = \{q,r,w\} \cup \{v\} = \{q,r,v,w\}$

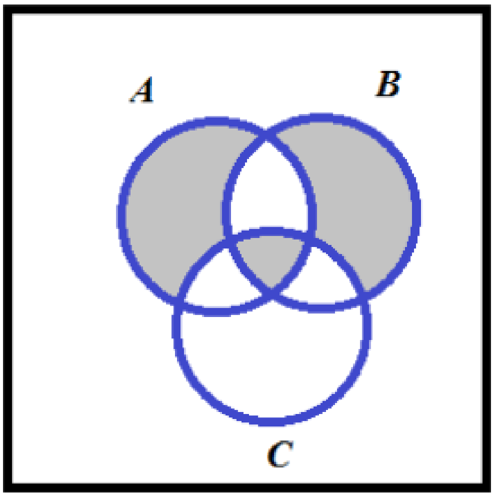
19) $A \oplus C = \{p,q,r,s,t\} \oplus \{p,s,t,u,v\} = \{q,r,u,v\}$

20) $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = (\{p,q,r,s,t\} \setminus \{p,r,t,v\}) \oplus (\{p,q,r,s,t\} \setminus \{p,s,t,u,v\}) = \{q,s\} \oplus \{q,r\} = \{r,s\}$

21) $\left(\overline{A} \setminus B\right) \oplus (B \setminus A) = \left((U \setminus A) \setminus B\right) \oplus (B \setminus A) = \left((\{p,q,r,s,t,u,v,w\} \setminus \{p,q,r,s,t\}) \setminus \{p,r,t,v\}\right) \oplus (\{p,r,t,v\} \setminus \{p,q,r,s,t\}) = (\{u,v,w\} \setminus \{p,r,t,v\}) \oplus \{v\} = \{u,w\} \oplus \{v\} = \{u,v,w\}$

Задание 1.5

Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Венна:



Решение:

$(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C))$

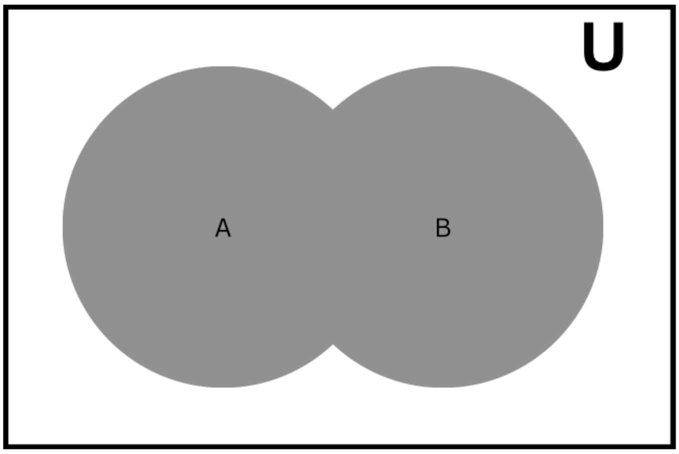
Задание 1.6

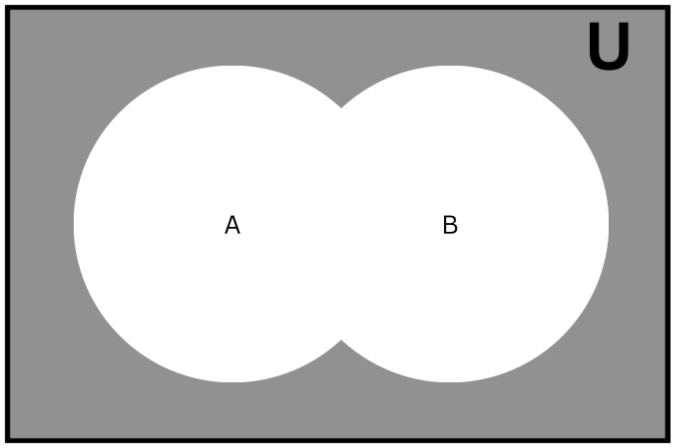
Для каждого из приведенных ниже множеств используйте диаграммы Венна и заштрихуйте те ее части, которые изображают заданные множества:

$\overline{A \cup B}$, $B \setminus (A \cup C)$

Решение:

$\overline{A \cup B}$



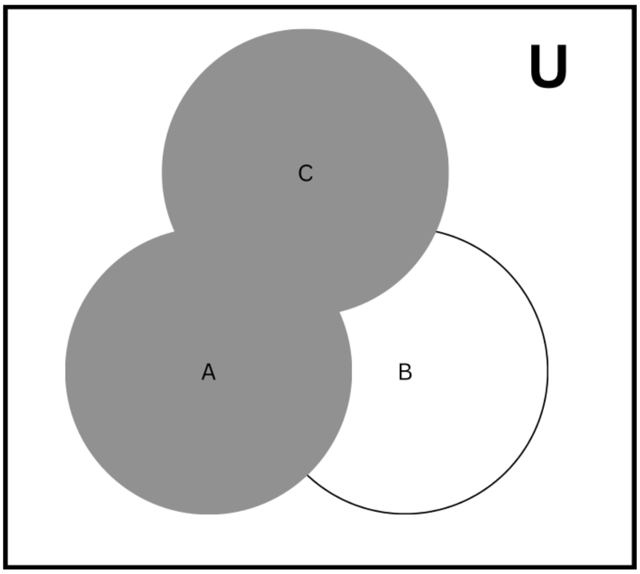


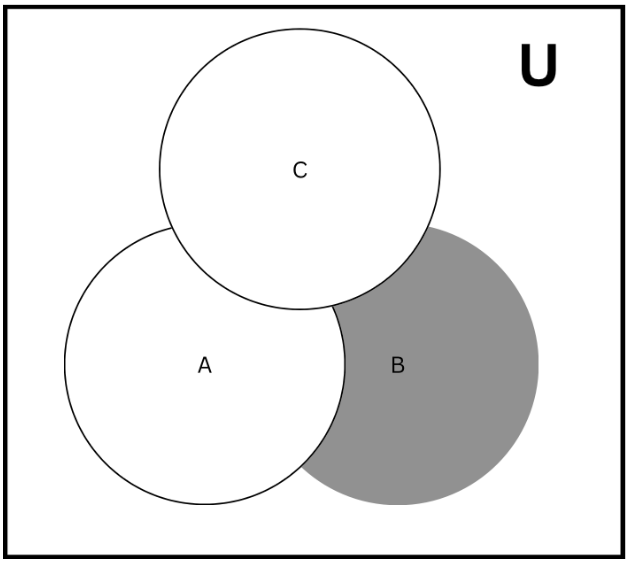
а) $\overline{A \cup B}$

$B \setminus (A \cup C)$

$A \cup B$

b)

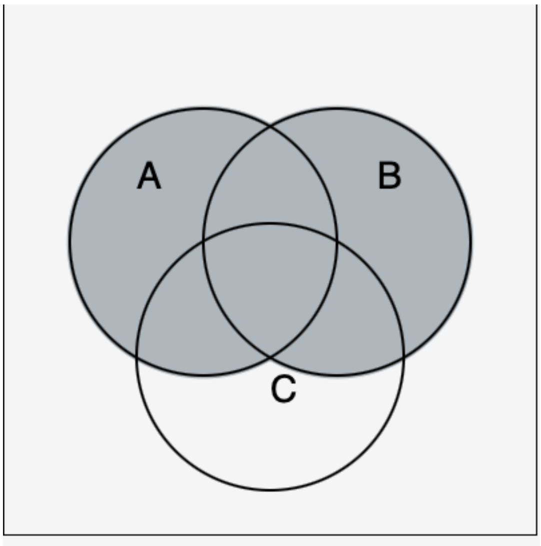




Задание 1.7

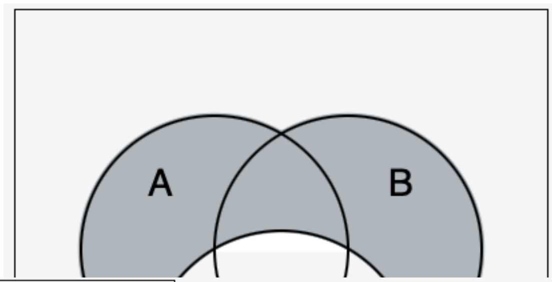
С помощью диаграммы Венна проверьте справедливость соотношения
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Решение: $A \cup C$ $\qquad$ $B \setminus (A \cup C)$

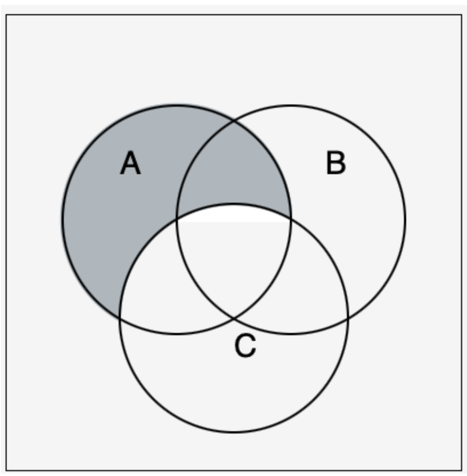


$(A \cup B)$

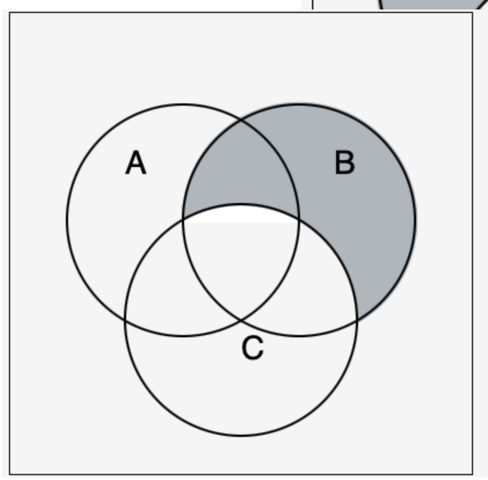
С помощью диаграммы Венна построим множество $(A \cup B) \setminus C$



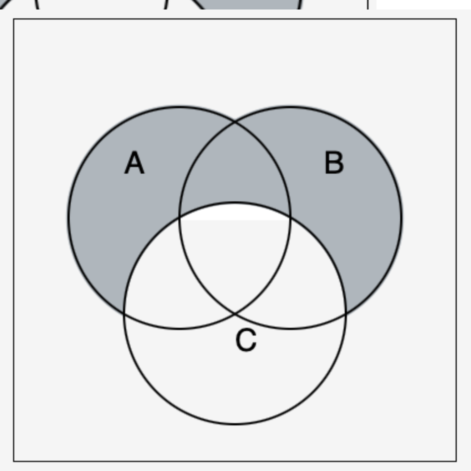
С помощью диаграммы Венна построим множество $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$



$(A \setminus C)$



$(B \setminus C)$



$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Таким образом $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Задание 1.8

Доказать тождество $\overline{A \cup B} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$, используя свойства операций.

Решение: п. ч. $C \setminus \big(C \cap (A \cup B)\big) =^{\text{дистрибутивность пересечения}} C \setminus \big((C \cap A) \cup (C \cap B)\big) =^{\text{закон де Моргана для вычитания}} \big(C \setminus (C \cap A)\big) \cap \big(C \setminus (C \cap B)\big) =^{\text{закон де Моргана для вычитания}} \big((C \setminus C) \cup (C \setminus A)\big) \cap \big((C \setminus C) \cup (C \setminus B)\big) = \big(\emptyset \cup (C \setminus A)\big) \cap \big(\emptyset \cup (C \setminus B)\big) =^{\text{свойства пустого множества}} (C \setminus A) \cap (C \setminus B) =^{\text{закон де Моргана для вычитания}} C \setminus (A \cup B) =^{\text{выражение для вычитания } A\setminus B = A \cap \overline{B}} C \cap \overline{(A \cup B)} =^{\text{коммутативность пересечения}} \overline{(A \cup B)} \cap C$ л. ч

Задание 1.9

Опрос группы студентов показал, что 70 % из них любят ходить в кино, 60 % – в театр, 30% – в музей. В кино и театр ходят 40 % студентов, в кино и в музей – 20 %, в театр и в музей – 10 %. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и в музей?

Решение:
|A| = 70% (кино)
|B| = 60% (театр)
|C| = 30% (музей)
|A ∩ B| = 40% (кино и театр)
|A ∩ C| = 20% (кино и музей)
|B ∩ C| = 10% (театр и музей)

Чтобы найти |A ∩ B ∩ C|, нам нужно из суммы процентов групп, посещающих по два места, вычесть сумму процентов каждой группы по отдельности и добавить неизвестный нам процент студентов, посещающих все три места.
|A∩B∩C| = |A|+ |B| + |C| - |A∩B| - |A∩C| - |B∩C| - |A ∪ B ∪ C|

Заметим, что $|A \cup B \cup C|$ не может быть больше 100%, так что максимальное значение для $|A \cup B \cup C|$ - это 100%.

Процент студентов, которые любят ходить и в кино, и в театр, и в музей $|A \cap B \cap C|$, можно рассчитать, вычтя из суммы процентов студентов, которые любят ходить и в кино, и в театр $|A \cap B|$, и в кино, и в музей $|A \cap C|$, и в театр, и в музей $|B \cap C|$, сумму процентов студентов, которые любят ходить в каждое место отдельно $|A \cap B \cap C|$, и добавим общий процент студентов, чтобы скорректировать пересечения.

$|A \cap B \cap C| = (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - (|A| + |B| + |C|) + 100\% =$
$= (40\% + 20\% + 10\%) - (70\% + 60\% + 30\%) + 100\% = 10\%$

Ответ: 10% студентов любят ходить и в кино, и в театр, и в музей.

Задание 1.10

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на a, ни на b, ни на c, ни на d?

$a = 3, b = 8, c = 16, d = 7;$

Решение:

Если число делится на 16, то оно делится и на 8. Поэтому число 16 можно в условии задачи опустить.

Пусть A, B, C – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 3, 8, и 7 соответственно. Тогда:

$$A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ A \cap B \cap C$$

– множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и делящихся нацело на 24 = 3· 8, 21 = 3· 7, 56 = 8· 7 и 168 = 3· 8· 7 соответственно.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

Тогда, используя формулу включения и исключения имеем:

= (10000/3) + (10000/8) + (10000/7) - (10000/24) - (10000/21) -
- (10000/56) + (10000/168) = 5000

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 8, 16 и 7, равно 10000 – 5000 = 5000.

Ответ: 5000 целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 8, 16 и 7.

Задание 1.11

Методом математической индукции доказать, что при $n \in \boldsymbol{N}$:
$7^n + 12n + 17$ кратно 18.

Решение:

Для доказательства по методу математической индукции, мы будем выполнять два шага: базовый шаг и шаг индукции.

Базовый шаг:

1. При n = 1: Подставим n = 1 в выражение $7^n + 12n + 17$:

$7^1 + 12 \cdot 1 + 17 = 7 + 12 + 17 = 36.$

Это число кратно 18, так как 36 делится на 18 без остатка.

Шаг индукции:

2. Предположим, что для некоторого положительного натурального числа k, формула $7^k + 12k + 17$ кратна 18.

3. Доказательство для $k + 1$: Теперь докажем, что при условии, что $7^k + 12k + 17$ кратно 18, также и $7^{k+1} + 12(k + 1) + 17$ кратно 18.

$$7^{k+1} + 12(k + 1) + 17 = 7 \cdot 7^k + 12k + 17 + 12$$

Мы знаем, что $7^k + 12k + 17$ кратно 18 (по предположению индукции). Таким образом, можно выделить $7^k + 12k + 17$ в выражении $7 \cdot 7^k + 12k + 17 + 12$.

$7 \cdot (7^k + 12k + 17) - 6(12k) - 6(17) + 12 = 7 \cdot (7^k + 12k + 17) - (6 \cdot 12k + 90) =$

$$= 7 \cdot (7^k + 12k + 17) - 18(4k + 5)$$

Таким образом, мы представили выражение $7^{k+1} + 12(k + 1) + 17$ в виде разности двух слагаемых, каждое из которых кратно 18, следовательно и самовыражения будет кратно 18.

Задание 1.12

Доказать, что при любом натуральном n выполняется равенство:
$1 + 6 + 20 + \cdots + (2n - 1) * 2^{n-1} = 3 + 2^n * (2n - 3)$.
Решение:

1. Пусть $k = 1$, тогда:

$$\text{л. ч } 1 + 6 + 20 + \cdots + (2k - 1) * 2^{k-1} = (2 - 1) * 2^{1-1} = 1$$
$$\text{п. ч } 3 + 2^k * (2k - 3) = 3 + 2^1 * (2 - 3) = 3 - 2 = 1$$
$$1 = 1 \text{ — верно}$$

2. Считая, что для $k = n$ равенство верно, рассмотрим $k = n + 1$:

$$\text{л. ч } 1 + 6 + 20 + \cdots + (2k - 1) * 2^{k-1}$$
$$= 1 + 6 + 20 + \cdots + (2n - 1) * 2^{n-1} + (2n + 2 - 1) * 2^{n+1-1} = 3 + 2^n * (2n - 3) + (2n + 1) * 2^n$$
$$= 3 + 2^n * (4n - 2)$$
$$\text{п. ч } 3 + 2^k * (2k - 3) = 3 + 2 * 2^n * (2n + 2 - 3)$$
$$= 3 + 2^n * (4n - 2)$$
$$3 + 2^n * (4n - 2) = 3 + 2^n * (4n - 2) \text{— верно}$$