11 вариант

I

$$D = \{ z : |z| \geq 3 - z \;,\; |z| > 4 \}.$$

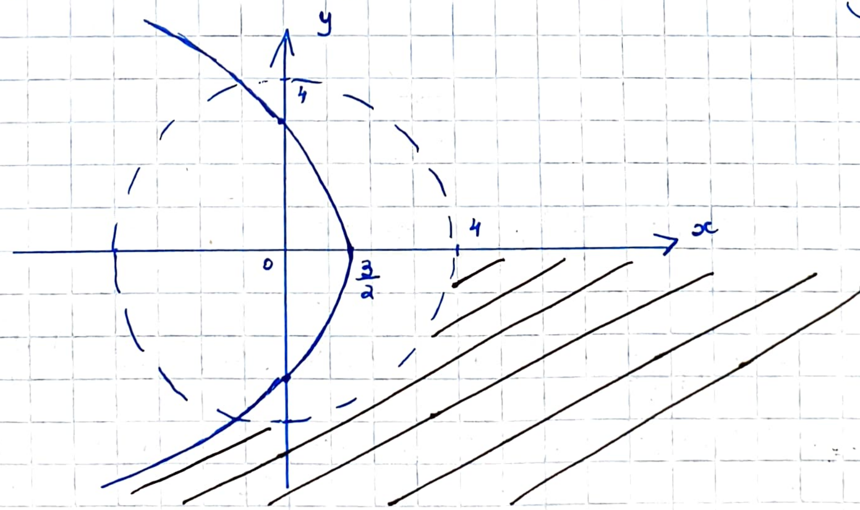
Пусть $z = x + iy$

$|z| \geq 3 - z \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq 3 - x - iy$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \geq 3 - x \\ 0 \geq -y \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 \geq (3-x)^2 \\ y \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{x^2}+y^2 \geq 9 - 6x + \cancel{x^2} \\ y \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 \geq -6\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ y \leq 0 \end{cases}$ ← область вне парабол

$|z| > 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} > 4 \Rightarrow x^2+y^2 > 16$ — область вне окружности



II

$\cos(5-i)$

Используем формулу: $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\cos(5-i) = \frac{e^{i(5-i)}+e^{-i(5-i)}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{5i+1}+e^{-5i-1}\right) = \frac{1}{2}\left(e\cdot e^{5i}+e^{-1}\cdot e^{-5i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e\left(\cos 5 + i\sin 5\right) + e^{-1}\left(\cos(-5)+i\sin(-5)\right)\right) =$$

$$= \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 5 + \frac{e-e^{-1}}{2}\sin 5\cdot i = \underline{\operatorname{ch}1\cdot\cos 5 + i\operatorname{sh}1\sin 5}$$

III

$u(x,y) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x.$

Восстановим функцию $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

Воспользуемся условиями Коши – Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\,\mathrm{ch}\,y - 1\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin x\,\mathrm{sh}\,y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2\cos x\,\mathrm{ch}\,y - 1\ ; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin x\,\mathrm{sh}\,y$$

$$dv = -2\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dx + (2\cos x\,\mathrm{ch}\,y - 1)\,dy = P\,dx + Q\,dy.$$

Отсюда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Из уравнения Лапласа для $u(x,y)$ имеем $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$dV = Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал.

Возьмем $(x_0, y_0) = (0,0)$, тогда:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-2\sin x\, sh y)\,dx + (2\cos x\, ch y - 1)\,dy =$$

$$= \int_0^x (-2\sin x\, \underset{0}{\underset{\parallel}{sh 0}})\,dx + \int_0^y (2\cos x\, ch y - 1)\,dy =$$

$$= (2\cos x\, sh y - y)\Big|_0^y + C = 2\cos x\, sh y - y + C$$

Искомая функция:

$$f(x,y) = 2\sin x\, ch y - x + i\,(2\cos x\, sh y - y + C) =$$

$$= 2(\sin x\, ch y + i\cos x\, sh y) - x - iy + Ci = 2\sin z - z + Ci = f(z)$$

Ответ: $f(z) = 2\sin z - z + Ci$

IV

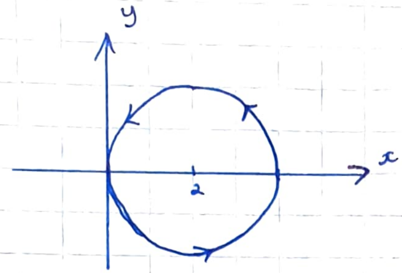
$\int_C z\,dz$, C - окружность $|z-2| = 2$.

$|z - z_0| = R \iff z = z_0 + Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$|z-2| = 2 \iff z = 2 + 2e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$dz = 2ie^{i\varphi}\,d\varphi$

Тогда:



$$\int_C z\,dz = \int_0^{2\pi} (2+2e^{i\varphi})\cdot 2ie^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\cdot 2\int_0^{2\pi}(1+e^{i\varphi})\,d(e^{i\varphi}) = 4\left(e^{i\varphi}+\frac{e^{2i\varphi}}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$=4\left(e^{2\pi i}+\frac{e^{4\pi i}}{2}-e^0-\frac{e^0}{2}\right)=4\left(1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right)=0$$

Ответ: 0

V

$$f(z)=\frac{z}{z+2}, \quad z_0=1$$

Пусть $z-1=w$, $z=w+1$

$$f(w)=\frac{w+1}{w+3}=\frac{w+3-2}{w+3}=1-\frac{2}{w+3}$$

Разложим в окрестности $w_0=0$.

Используем разложение: $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

$$f(w)=1-\frac{2}{w+3}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{3}}=1-\frac{2}{3}\left(1-\frac{w}{3}+\frac{w^2}{9}-\frac{w^3}{27}+\ldots+\frac{(-1)^n w^n}{3^n}+\ldots\right)=$$

$$=\underbrace{1-\frac{2}{3}}_{=1/3}+\frac{2w}{9}-\frac{2w^2}{27}+\frac{2w^3}{81}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2w^n}{3^{n+1}}+\ldots$$

Тогда $f(z)=\frac{z}{z+2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(z-1)-\frac{2}{27}(z-1)^2+\frac{2}{81}(z-1)^3-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2(z-1)^n}{3^{n+1}}+\ldots=$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}(z-1)^n}{3^{n+1}}$$