សាកលវិទ្យាល័យ ឯកទេស នៃកម្ពុជា

CAMBODIAN UNIVERSITY FOR SPECIALTIES

Your route to the top

គណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល២

Differential Calculation2

រៀបរៀងដោយសាស្ត្រាចារ្យ

មួន សុធន

ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ

មហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យា

ឯកទេស គណិតវិទ្យា

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៩-២០២០

មេរៀនទី១
សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

១.១. សញ្ញាណសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១.១.១. និយមន័យ និងពាក្យគន្លឹះ

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ ដែលមានដេរីវេ $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យ $f(x) = e^{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$
$$= 2xy \quad (1)$$

ស្រាយពីករណីខាងលើ បើយើងមានសមីការ $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ នោះយើងកំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$ ដែលបំពេញសមីការ ។ ក្នុងន័យនេះគឺយើងចង់ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

និយមន័យ:

សមីការទាំងឡាយដែលមានដេរីវេនៃអថេរអាស្រ័យមួយឬច្រើនធៀបនឹងអថេរមិនអាស្រ័យមួយឬច្រើនត្រូវបានគេហៅថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

នៅពេលសមីការមួយទាក់ទងដេរីវេមួយឬច្រើនធៀបនឹងអថេរជាក់លាក់មួយអថេរនោះហៅថា អថេរមិនអាស្រ័យ ។អថេរមួយហៅថាអថេរអាស្រ័យ ប្រសិនបើដេរីវេនៃអថេរនោះកើតមានឡើង ។

ឧទាហរណ៍ : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$ ដែល y ជាអថេរអាស្រ័យ ហើយ x ជាអថេរមិនអាស្រ័យ ។

® . សំគាល់ : សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានគេចែកជាថ្នាក់ទៅតាមលក្ខណៈចំនួនពីរដូចខាងក្រោម:

១.១.២. ចំណាត់ថ្នាក់តាមប្រភេទ

បើសមីការមានដេរីវេនៃអថេរអាស្រ័យមួយឬច្រើន ធៀបទៅនឹងអថេរមិនអាស្រ័យតែមួយ នោះគេហៅសមីការនោះថា ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតាឬលំដាប់ ។

ឧទាហរណ៍: $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 1$, $(x+y)dx - 4ydy = 0$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

១.១.៣. ចំណាត់ថ្នាក់ទៅតាមលំដាប់

តាមលំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយគឺ ជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់បំផុត ដែលកើតមាននៅក្នុងសមីការនោះ ។

ឧទាហរណ៍: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = x$ គឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ

$x^2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ គឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ

ជាទូទៅលំដាប់ទី n នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានគេតាងដោយ:

១.១.៤. ភាពលីនេអ៊ែឬមិនលីនេអ៊ែ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែមានទម្រង់ :

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+......+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

ក្រៅពីទម្រង់នេះសុទ្ធជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនលីនេអ៊ែ ។

ឧទាហរណ៍: $xdy+ydx=0\Leftrightarrow x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

$$y''-2y'+y=0\Leftrightarrow\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=e^x$$

វិបាក: សមីការខាងក្រោមជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនលីនេអ៊ែរ:

$$\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$$

$$yy''-2y'=x+1$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+y^2=0$$

១.១.៥. ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

និយមន័យ:អនុគមន៍ f ណាមួយកំណត់នៅលើចន្លោះ I ដែល $a<x<b$, $a\le x\le b$, $0<x<\infty$, $a<x<\infty$ នៅពេលយើងជំនួសទៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានភាពផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ គេហៅថាចម្លើយសមីការនៅលើចន្លោះ I

ចម្លើយនៃសមីការ (2) គឺ ជាអនុគមន៍ $y=f(x)$ ដែលមានយ៉ាងហោចណាស់ n ដេរីវេនៃសមីការដូចជា:

$F(x,f(x),f'(x),.......,f^{(n)}(x))=0$ ចំពោះគ្រប់ x ជារបស់ I ។

ឧទាហរណ៍: $y=xe^x$ ជាចម្លើយអិចព្លីស៊ិត នៃសមីការ $y''-2y'+y=0$, $-\infty<x<\infty$ ពីព្រោះ

$$y'=xe^x+e^x$$

$$y''=xe^x+2e^x$$

$$\Rightarrow y''-2y'+y=\left(xe^x+2e^x\right)-2\left(xe^x+e^x\right)+xe^x=0$$

ឧទាហរណ៍៧: អនុគមន៍ $y=\dfrac{x^4}{16}$ ជាចម្លើយនៃសមីការមិនលីនេអ៊ែ $\dfrac{dy}{dx}-xy^{\frac{1}{2}}=0$ ពីព្រោះ $-\infty<x<+\infty$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{16}=\frac{x^3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}-xy^{\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{4}-x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{4}=0$$

ឧទាហរណ៍៨: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$, $(y')^2+y^2+4=0$ មិនមានចម្លើយពិតទេ ព្រោះចម្លើយនៃសមីការទាំងនេះទាក់ទងនឹងចម្លើយឯកអិចព្លីស៊ិត និងចម្លើយអឹមព្លីស៊ិត ។

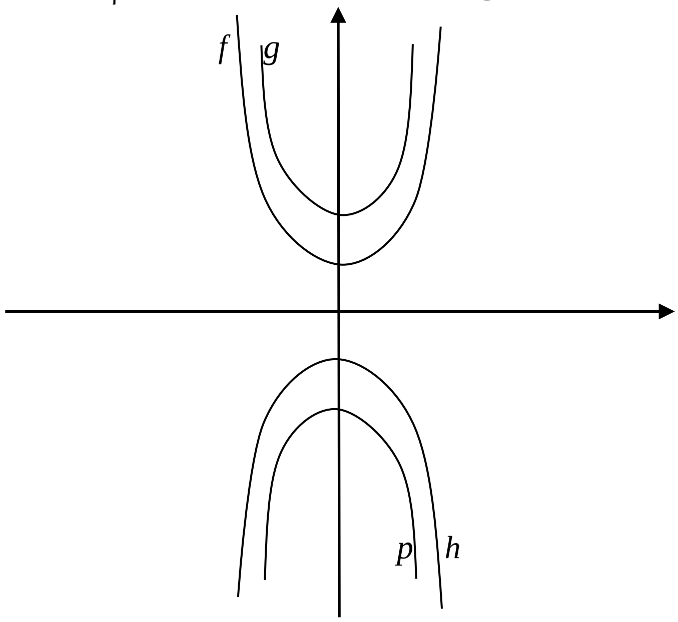
ឧទាហរណ៍៩: ចំពោះ $-2<x<2$ នោះ ជាចម្លើយអឹមព្លីស៊ិត នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

ពីព្រោះ $\frac{d\left(x^2\right)}{dx}+\frac{d\left(y^2\right)}{dx}=0\Leftrightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

ទំនាក់ទំនង $x^2+y^2-4=0$ កំណត់អនុគមន៍ពីរគឺ $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=-\sqrt{4-x^2}$ ដូចនេះយើងអាចសំគាល់ថា ទំនាក់ទំនង $x^2+y^2-c=0$ នឹងបំពេញសមីការ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ចំពោះ c ថេរ ។

តាមវិធីជំនួសដោយផ្ទាល់យើងអាចបង្ហាញខ្សែកោងទូទៅនៃគ្រួសារប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $y=ce^{x^2}$, c ថេរក៏បំពេញសមីការ (1) ខាងលើដែរ ។ក្នុងរូបខាងក្រោមបង្ហាញ $y=o$ នាំឱ្យ $c=0$ ក៏ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ដែរ ។



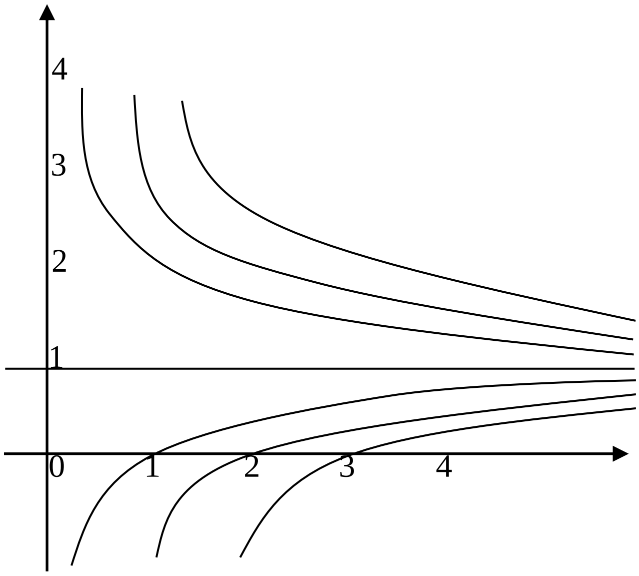
ឧទាហរណ៍១០: $y=xe^{x^2}$ ជាចម្លើយនៃ $y''-2y'+y=0$ ហើយ $y=cxe^{x}$ ក៏តាងគ្រួសារចម្លើយនៃសមីការដែរ ។

ឧទាហរណ៍១១: អនុគមន៍ $y=\frac{c}{x}+1$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ $x\frac{dy}{dx}+y=1$, $-\infty<x<+\infty$

យើងបាន: $\frac{dy}{dx}=c\frac{d\left(x^{-1}\right)}{dx}+\frac{d(1)}{dx}=-cx^{-2}=-\frac{c}{x^2}$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=x\left(-\frac{c}{x^2}\right)+\left(\frac{c}{x}+1\right)=1$$

ដោយជ្រើសរើស c ជាចំនួនពិត យើងអាចបង្កើតចំនួនមិនកំណត់នៃចម្លើយ ជាពិសេសចំពោះ $c=0$ យើងបាន $y=1$ មើលរូបខាងក្រោម:



ឧទាហរណ៍១២: អនុគមន៍ $y=cx^4$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការ $xy'-4y=0$ យើងមាន:

$$xy'-4y=x\left(4cx^3\right)-4cx^4=0$$

$$\Rightarrow y\begin{cases}-x^4 \ , \ x<0 \\ x^4 \ , \ x\geq 0\end{cases}$$ ជាចម្លើយនៃសមីការខាងលើ

១.១.៦. ប្រភពនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក.គ្រួសារខ្សែកោងនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

សមីការមួយដែលទាក់ទងនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ព្រមទាំងកូអរដោនេមួយឬច្រើននៃចំនុចមួយក្នុងប្លង់អាចតាង ដោយគ្រួសារមួយនៃខ្សែកោងដោយខ្សែកោងមួយត្រូវនឹងតម្លៃនីមួយៗនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

សំគាល់ :ចម្លើយនៃគ្រួសារមួយមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $y=ce^x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'=y$

បើយើងស្វែងរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារដែលមានពីរប៉ារ៉ាម៉ែត្រ: $y=c_1e^x+c_2$

យើងមាន: $\dfrac{dy}{dx}=c_1e^x\,,\dfrac{d^2y}{dx^2}=c_1e^x$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow c_1e^x-c_2e^x=0$$

ឧទាហរណ៍១៣: រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារ $y=cx^3$

ចម្លើយ:

យើងសង្កេតឃើញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសមីការលំដាប់មួយព្រោះគ្រួសារនៃ y មានមួយប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

ដូចនេះ $\frac{dy}{dx}=3cx^2$, $c=\frac{y}{x^3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2=3\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}-3\frac{y}{x}=0 \Leftrightarrow y'-3\frac{y}{x}=0 \Leftrightarrow xy'-3y=0$$

ឧហរណ៍១៤:រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសាររង្វង់ផ្ចិត 0

ចម្លើយ:

សមីការរង្វង់គឺ $x^2+y^2=c^2, c>0$ ជាអនុគមន៍មានមួយប៉ារ៉ាមែត្រធ្វើដេរីវេ នៃអនុគមន៍អ៊ីមព្លីស៊ីត

គេបាន: $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \Leftrightarrow xdx+ydy=0$$

ឧទាហរណ៍១៥: រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារប៉ារ៉ាបូល $y=(x+c)^2$

ចម្លើយ:

គេមាន $y=(x+c)^2$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=2(x+c)$, $(x+c)=\pm y^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4y$$

ឧទាហរណ៍១៦: រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសាររង្វង់កាត់តាមគល់ o

ចម្លើយ:

ទម្រង់ទូទៅនៃគ្រួសាររង្វង់គឺ $(x-h)^2+(y-k)=\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2xh+y^2-yk=0$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ពីរដងគេបាន:

$$x-h+yy'-ky'=0 \qquad (*)$$

$$1+yy''+(y')^2-ky''=0 \quad (**)$$

សមីការខាងលើ $h=\frac{x^2+y^2-2ky}{2x}$ ជំនួស h ចូលក្នុងសមីការ $(*)$

គេបាន $x-\frac{x^2+y^2-2ky}{2x}+yy'-ky'=0$

$$\Rightarrow k=\frac{x^2-y^2+2xyy'}{2(xy'-y)}$$

k ជំនួសចូលក្នុងសមីការ $(*)$ គេបាន $1+yy''+(y')^2-\frac{x^2-y^2+2xyy'}{2(xy'-y)}y''=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)y''+2\left[(y')^2+1\right](y-xy')=0$$

១.១.៧. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយមានរាងទូទៅ $F(x,y,y')=0 \quad (1)$ ។ គេដោះស្រាយសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយធៀបនឹងដេរីវេ គេបាន $y'=f(x,y)$ សមីការ $y'=f(x,y)$ កំណត់ត្រង់ (x,y) នីមួយៗនូវតម្លៃ y' មួយកាលណាអនុគមន៍ $f(x,y)$ កើតមាន មានន័យថា y' ត្រង់ចំនុចនេះជាមេគុណប្រាប់ទិស នៃ បន្ទាត់ ប៉ះខ្សែកោងអាំងតេក្រាល ។ បើគេធ្វើអាំងតេក្រាល $y'=f(x,y)$ គេបានអនុគមន៍ $y=\varphi(x,c)$ (ដែល c ជា ចំនួនថេរ ណាមួយក៏បាន) ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។ អនុគមន៍ចម្លើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។ ខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលហៅថា ខ្សែកោងតំណាងអាំងតេក្រាល ។

ចំណោទ *Cauchy* ជាចំណោទដែលស្វែងរកចម្លើយ $y=\varphi(x)$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'=f(x,y)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0)=y_0\,(x=x_0\,,y=y_0)$ ។ ចម្លើយនេះហៅថា ចម្លើយដោយឡែក តាមលក្ខខណ្ឌដើមមួយ ។ តាមន័យធរណីមាត្រគឺ គេរកខ្សែកោងអាំងតេក្រាលមួយដែលកាត់តាមចំនុច $M_0(x_0,y_0)$ ដែលគេឱ្យក្នុងប្លង់ (xoy) ។

គ្រប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល មិនមែនសុទ្ធតែអាចដោះស្រាយបានតាមបែបពិជគណិតទាំងអស់នោះទេ ។

១.១.៨. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែមានរាងទូទៅ ។ $y'+p(x)y=f(x)$ គេអាចសរសេរ: $a_0(x)\dfrac{dy}{dx}+a_1(x)y=F(x), a_0(x)\neq 0$ ដែល $a_0(x),a_1(x),F(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x កំណត់លើចន្លោះ I ។

បើអនុគមន៍ $p(x)$ និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ លើចន្លោះ នោះសមីការឌីផេរ៉ង់ ស្យែលមានចម្លើយតែមួយគត់ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0)=y_0$ ។

ចម្លើយនេះហៅថាចម្លើយដោយឡែកតាមលក្ខខណ្ឌដើមមួយ ។

បើ $f(x)=0$ សមីការ $y'+p(x)y=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែ *Homogene* ។

បើ $f(x)\neq 0$ សមីការ $y'+p(x)y=f(x)$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែមិន *Homogene* ។

១.១.៩. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១

ក. វិធីសាស្ត្រកត្តាអាំងតេក្រាល

ក.១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ មេគុណថេរ

$$y'+ay=f(x) \quad (1)$$

គុណ(1) នឹង e^{ax} គេបាន $e^{ax}(y'+ay)=e^{ax}f(x)$

$$e^{ax}y'+ae^{ax}y=e^{ax}f(x)$$

$$u'.v+v'.u=d(uv)$$
$$\frac{d\left(e^{ax}y\right)}{dx}=e^{ax}f(x)$$
$$\int\frac{d\left(e^{ax}y\right)dx}{dx}=\int e^{ax}f(x)dx$$
$$e^{ax}y=\int e^{ax}f(x)dx+c$$
$$y=e^{-ax}\int e^{ax}f(x)dx+e^{-ax}c$$

ដូចនេះ $\boxed{y=e^{-ax}\int e^{ax}f(x)dx+e^{-ax}c}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(1) ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ក.២. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១មេគុណជាអថេរ

$$y'+p(x)y=f(x)\quad(2)$$

គុណ(2) នឹង $\mu(x)$ គេបាន $\mu(x)\left[y'+p(x)y\right]=\mu(x)f(x)\qquad(i)$

យើងស្វែងរកកត្តា $\mu(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ: $\mu(x)\left[y'+p(x)y\right]=\dfrac{d\left[\mu(x)f(x)\right]}{dx}\qquad(ii)$

គេបាន $\mu(x)y'+\mu(x)p(x)y=\mu'(x)y+\mu(x)y'$

$$\mu(x)p(x)y=\mu'(x)y$$

$(y\neq 0$ ព្រោះ $y=0$ មិនមែនជាចម្លើនៃសមីការ(2))

$$\mu'(x)=\mu(x)p(x)$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=p(x)$$
$$\int\frac{\mu'(x)dx}{\mu(x)}=\int p(x)dx$$
$$\Rightarrow \ln\left|\mu(x)\right|=\int p(x)dx+c$$

គេបាន $\left|\mu(x)\right|=e^{\int p(x)dx+c}$

$$\mu(x)=\pm e^{c}.e^{\int p(x)dx}$$

ដើម្បីងាយសិក្សាគេយក $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ ដែល $\mu(x)$ហៅថាអាំងតេក្រាល $\boxed{\mu(x)=e^{\int p(x)dx}}$

តាម(i)និង (ii) គេបាន $\dfrac{d\left[\mu(x)y\right]}{dx}=\mu(x)f(x)$

$$\mu(x)y=\int\mu(x)f(x)dx+c$$

ដែលc ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ដូចនេះ $\boxed{y=\dfrac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)f(x)dx+\dfrac{c}{\mu(x)}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2)

ឬ $y=e^{-\int p(x)dx}\int e^{p(x)dx}f(x)dx+c.e^{-\int p(x)dx}$

១.១.១០. វិធីបំរែបំរួលចំនួនថេរ

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+ay=f(x)$ (1) a ជាចំនួនថេរដំបូងគេដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Homogene* $y'+ay=0$ (i) គេបាន $y=0$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (i) ព្រោះ

$y=0\Rightarrow y'=0$, $0+a.0=0$

បើ $y\neq 0$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=-ay$

$$\frac{dy}{y}=-adx$$

$$\ln|y|=-\int adx+c$$

$$=-ax+c$$

$$\Rightarrow y=\pm e^{-ax}.e^{c}$$

$$=Ae^{-ax}\ ,\ A=\pm e^{c}$$

គេធ្វើបំរែបំរួលចំនួន A ដើម្បីរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីស្យែល (i)

$$y=A(x)e^{-ax}\Rightarrow y'=A'(x)e^{-ax}-a\,A(x)e^{-ax}$$

តាម (1) $A'(x)e^{-ax}-a\,A(x)e^{-ax}+a\,A(x)e^{-ax}=f(x)$

$$A'(x)e^{-ax}=f(x)$$

$$A'(x)=e^{ax}f(x)$$

$$A(x)=\int e^{ax}f(x)dx+c$$

$$y=\left[\int e^{ax}f(x)dx+c\right]e^{-ax}$$

ដូចនេះ $\boxed{y=e^{-ax}\int e^{ax}f(x)dx+c\,e^{-ax}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+p(x)y=f(x)$ (2), $p(x)$ **ជាអនុគមន៍នៃ** x

ដំបូងគេដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Homogene* $y'+p(x)y=0$ (i) គេបាន $y=0$ ជាចម្លើយដោយឡែកមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (i) ព្រោះ $y=0\Rightarrow y'=0$, $0+p(x).0=0$

បើ $y\neq 0$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=-p(x)y$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln|y|=e^{-\int p(x)dx+c}$$

$$y=Ae^{-\int p(x)dx}$$

បំរែបំរួលមេគុណ A , $y=Ae^{-\int p(x)dx}\Rightarrow y'=A'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)A(x)(x)e^{-\int p(x)dx}$

$(2):A'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)A(x)(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)A(x)(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$

$$A'(x)=(x)e^{\int p(x)dx}f(x)$$

$$A(x)=\int(x)e^{\int p(x)dx}f(x)dx+c$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f(x)dx+c\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{y=e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}f(x)dx+ce^{-\int p(x)dx}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2)

គ. វិធីរកចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមទម្រង់ $y=u(x).v(x)$

$$y'+p(x)y=f(x)\quad(2)$$

បើ $y=u(x).v(x)\Rightarrow y'=u'v+v'u$

$(2):u'v+v'u+p(x)u.v=f(x)$

$$u'v+u\left[v'+p(x)v\right]=f(x)\quad(i)$$

រកតម្លៃ$v(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $:v'+p(x)=0$

$$\frac{v'}{v}=-p(x)$$

$$\Rightarrow \ln|v|=-\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow v=ce^{-\int p(x)dx}$$

ជំនួសតម្លៃv ក្នុង(i) គេបានតម្លៃu ជំនួសតម្លៃu និង v ក្នុង $y=u(x).v(x)$ (2) គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ឃ. បើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានរាង $\frac{dx}{dy}+p(y)x=\varphi(y)$

$\frac{dx}{dy}+p(y)x=\varphi(y)$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែដែល y ជាអថេរមិនអាស្រ័យហើយ x ជាអនុគមន៍អញ្ញាតជាអថេរអាស្រ័យ ។

ឧទាហរណ៍: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

សមីការនេះសរសេរជា $\frac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y$

$$\frac{dx}{dy}=\sin 2y+x\cos y$$

ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែមិន *Homogene* ដែល y ជាអថេរអាស្រ័យ និង x ជាអនុគមន៍អញ្ញាត ។

១.១១. សមីការ *Bernolli*

សមីការ *Bernolli* មានរាងទូទៅ $y'+p(x)y=f(x)y^n$ ដែល $n\neq 0$ និង $n\neq 1$ ។

បើ $n=0$ ឬ $n=1$ នោះសមីការ *Bernolli* ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ *Bernolli* គេប្តូរអថេរ $z=\frac{1}{y^{n-1}}$ គេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែ:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)\,p(x)\,z=(1-n)\,f(x)$$

ឧទាហរណ៍១៧: ដោះស្រាយសមីការ $y'-xy=-xy^3 \quad (1)$

ចម្លើយ:

តាង $z=\frac{1}{y^2}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{2y'}{y^3}$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $y'-xy=-xy^3$ នឹង y^3 គេបាន:

$$\frac{y'}{y^3}-\frac{x}{y^2}=-x$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dx}-xz=-x$$

$\frac{dz}{dx}+2xz=2x$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១លីនេអ៊ែរដែលមាន z ជាអនុគមន៍អញ្ញាត

$$z=e^{-\int 2xdx}\int e^{-\int 2xdx}2x\,dx+c\,e^{-\int 2xdx}$$

$$=e^{-x^2}\int e^{-x^2}2x\,dx+c\,e^{-x^2}$$

$$=1+c\,e^{-x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y^2=\frac{1}{1+c\,e^{-x^2}}}$ ឬ $y^2\left(1+c\,e^{-x^2}\right)=1$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(1)

១.១២. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអថេរអាចបំបែកចេញពីគ្នាបាន

សមីការដែលមានទម្រង់ $q(y)dy=f(x)dx$

ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអថេរអាចបំបែកចេញពីគ្នា

បាន ។

១.១២.១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\varphi_1(x)\psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\psi_2(y)dx$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\varphi_1(x)\psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\psi_2(y)dx$ ដែលមានមេគុណ ឌីផេរ៉ង់ ស្យែល ជាកត្តាអាស្រ័យនឹងអថេរ x តែមួយនិងអថេរ y តែមួយ ។ សមីការនេះក៏ជា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលមានអថេរ អាចបំបែកចេញពីគ្នាបាន ព្រោះបើគេចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល នឹងផលគុណ$\varphi_1(x)\psi_2(y)$ នោះ គេបាន$\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}dy=\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dx$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអថេរអាចបំបែកចេញពីគ្នាបាន ។ បើគេ ធ្វើអាំង តេក្រាលទូទៅនៃសមីការនេះគេបាន $\int\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}dy-\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dx=0$ ។

សំគាល់ :

- ការចែកសមីការនឹងផលគុណ$\varphi_1(x)\psi_2(y)$ នាំឱ្យបាត់ចម្លើយដោយឡែក ដែលផលគុណ$\varphi_1(x)\psi_2(y)=0$ ។
- សមីការ $\frac{dy}{dx}=x+y$ មិនមែនជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអថេរអាចបំបែកចេញពីគ្នាបាន ។

១.១២.២. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ក. សរសេរសមីការឱ្យមានរាង $q(y)dy = f(x)dx$

ខ.ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គនីមួយៗធៀបនិងអថេររៀងៗខ្លួន: $\int q(y)dy = \int f(x)dx + c$ គេបានចម្លើយ *implicit*

គ. បើអាចគេនឹងដោះស្រាយ y ក្នុងចម្លើយ *implicit* នេះគេបានចម្លើយ *Explicit* ។

១.១២.៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ ដែល a,b,c ជាចំនួនថេរ

សមីការនេះក៏អាចសរសេរជាសមីការមានអថេរអាចបំបែកចេញពីគ្នាបានដែលដោយប្តូរអថេរ $z = ax+by+c$ ។

វិធីដោះស្រាយ:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \qquad (1)$$

តាង $z = ax+by+c$

$$z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{1}{b}(z'-a)$$

$$\frac{1}{b}(z'-a) = f(x) \Rightarrow z' = bf(x) - a$$

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a \Rightarrow \frac{dz}{bf(z)+a} = dx$$

$$\int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + c$$

១.១៣. សមីការ *Homogene*

អនុគមន៍ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍ *Homogene* ធៀបនឹង *Arguments* របស់វាមានដឺក្រេ n កាលណា អនុគមន៍នោះផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

ឧទាហរណ៍១៨:អនុគមន៍ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ ជាអនុគមន៍ *Homogene* ដឺក្រេទី២ព្រោះ

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + tx.ty$$
$$= t^2(x^2 + y^2 - xy)$$
$$= t^2 f(x,y)$$

ឧទាហរណ៍១៩: អនុគមន៍ $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ជាអនុគមន៍ *Homogene* ដឺក្រេទី0 ព្រោះ

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2}$$
$$= \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2(x^2 + y^2)}$$
$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
$$= f(x,y)$$
$$= t_0 f(x,y)$$

១.១៣.១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$ (1)

សមីការនេះជាសមីការ *Homogene* ធៀបនឹង x និង y កាលណា $f\left(x,y\right)$ ជាអនុគមន៍ *Homogene* ធៀបនឹង *Arguments* $\left(x,y,y'\right)$ ហើយមានដឺក្រេទី0 ។

សមីការ *Homogene* អាចសរសេរជារាង $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (i)

តាង $u=\frac{y}{x}$ គេបាន $y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$

$$(i):\ u'x+u=\varphi(u)$$

$$u'x=\varphi(u)-u$$

-បើ $\varphi(u)-u$ អាចស្មើសូន្យនោះគេបាន $u'=0\Rightarrow u=a$ ជាចំនួនថេរគេបាន $y=ax$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

-បើ $\varphi(u)-u\neq 0$ គេបាន $u'x=\varphi(u)-u\Rightarrow\frac{u'}{\varphi(u)-u}=\frac{1}{x}$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\varphi(u)-u}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{1}{x}dx$$

$$G(x)=\ln|x|+c$$

ដូចនេះ $\boxed{G(x)=\ln|x|+c}$ ដែល $G(x)$ ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\frac{1}{\varphi(u)-u}$

១.១៣.២. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ (2)

ដែល a,b,c,a_1,b_1 និង c_1 ជាចំនួនថេរ និង ជាអនុគមន៍ជាប់

-បើ $c=c_1=0$ នោះសមីការ (2) ជាសមីការ *Homogene* ។គេដោះស្រាយសមីការ (2) ដោយតាង $z=\frac{y}{x}$ ដូចសមីការ (1)

-បើ $c\neq 0$ *or* $c_1\neq 0$ នោះគេដោះស្រាយសមីការ (2) តាមពីរករណី:

ករណីទី១: បើដេទែមីណង់ $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0$ យើងសង្កេតអថេរ ξ និង η តាមរូបមន្ត $x=\xi+h$ និង $y=\eta+k$ ដែល h និង k ជាចំនួនថេរត្រូវកំណត់ ។ ជំនួស $x=\xi+h$ និង $y=\eta+k$ ក្នុង (2) គេបាន:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}\right)$$

គេកំណត់យក h និង k ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \quad , \ \Delta \neq 0$$

ក្រោយពីចំនួស h និង k គេបាន $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right)$ ជាសមីការ $Homogene$ ។ គេដោះស្រាយសមីការអថេរ ξ និង η ដូចសមីការ (1) ។

ករណីទី២:

បើដេទែមីណង់ $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, $\Delta=0$ ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$ គ្មានចម្លើយ ។ គេមិនអាច តាងអថេរថ្មីដូចករណីទី១បានទេ ។

ដោយ $\Delta=0$ នោះ $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda \Rightarrow a_1=\lambda a \wedge b_1=\lambda b$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (2) អាចសរសេរ $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$

តាង $z=ax+by$ គេបានសមីការថ្មីអាចដោះស្រាយបានតាមវិធីបំបែកអថេរ ។

១.១៣.៣. សមីការដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

រំលឹក

$M(x,y)dx+N(x,y)dy$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបលុះត្រាតែ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

ឧទាហរណ៍២០: $u(x,y)=3xy^3+2x^2y+3y-3x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^3+4xy-3=M(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=9xy^2+2x^2+3=N(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y}&=9y^2+4x \\ \frac{\partial N}{\partial x}&=9y^2+4x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

សមីការនេះមានរាងទូទៅ: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad (1)$ ដែលអង្គទី១ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $u(x,y)$ ។

គេបាន: $du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

បើ $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

គេបាន: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

ដូចនេះ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យសមីការ (1) មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបគឺ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

-ដំបូងត្រូវបញ្ជាក់ថា: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

គេបាន $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

បើ $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow u(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ (i) ដែល $g(y)$ ជាអនុគមន៍ y ដែលជា ចំនួនថេរក្នុងអាំងតេក្រាលធៀបនឹង x ។

-ធ្វើដេរីវេសមីការ (i) ធៀបនឹង y :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)$$

គេបាន: $g'(y)=\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ (ii)

-ធ្វើអាំងតេក្រាលសមីការ (ii) ធៀបនឹង y គេបាន $g(y)$

-ជំនួស $g(y)$ ក្នុង (i) គេបាន $u(x,y)=c$ ជាចម្លើយសមីការ (i) ។

* សំគាល់ :ក្នុងជំហានទី២ គេអាចឱ្យ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ រួចធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y ដើម្បីរក $u(x,y)$ ក៏បាន។

គេបាន $u(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)$ ដែល $h'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$ ។ គេអាចគណនាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $\boxed{\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=c}$

ឧទាហរណ៍២១: ដោះស្រាយសមីការ: $2xydx+(x^2-1)dy=0$ (1)

ចម្លើយ:

គេបាន $M(x,y)=2xy$, $N(x,y)=x^2-1$

នោះ $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\Rightarrow\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int 2xy\,dx$$

$$u(x,y)=x^2y+g(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+g'(y)$$

$$g'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-x^2$$

២. ការអនុវត្តន៍សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

២.១. ចំណោលកែង

ក្នុងផ្នែកនេះរំលឹកចេញពីធរណីមាត្រវិភាគដែលបន្ទាត់ពីរ L_1, L_2 បន្ទាត់នីមួយៗមិនស្រប ទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេ ។បន្ទាត់ទាំងនេះ កែងនឹងអ័ក្សកូអរដោនេលុះត្រាតែ បំពេញទំនាក់ទំនង $m_1m_2=-1$ ។ ចំពោះហេតុផលនេះក្រាបនៃ $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ និង $y=2x+4$ កែងរវាងគ្នា។ មានន័យថាបន្ទាត់ $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ កែងនឹងគ្រប់ បន្ទាត់នៃគ្រួសារខ្សែកោង $y=2x+c_1$ ។

២.២. ខ្សែកោងកែង

ជាទូទៅខ្សែកោងពីរ C_1 និង C_2 ត្រូវបានគេហៅថាកែងត្រង់ចំនុចមួយលុះត្រាតែបន្ទាត់ប៉ះ T_1 និង T_2 កែងគ្នាត្រង់ចំនុចមួយ ។ លើកលែងចំពោះករណីដែល T_1 និង T_2 ស្របទៅនឹងអ័ក្ស កូអរដោនេនោះរាងគ្នានៃ បន្ទត់ប៉ះគឺអវិជ្ជាមាន ។

ឧទាហរណ៍២២: បង្ហាញថាខ្សែកោង $y=x^3$ និង $x^2+3y^2=4$ កែងគ្នាត្រង់ចំនុច(s) មួយ ។

ចម្លើយ:

យើងឃើញថាចំនុចប្រសព្វនៃក្រាបគឺ: $(1,1)$ និង$(-1,-1)$ ។បន្ទាត់ប៉ះនៃ $y=x^3$ ត្រង់ចំនុចទូទៅណាមួយគឺ $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$

ដូច្នេះ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ ចំណែក $\dfrac{dy}{dx}$ នៃខ្សែកោងទីពីរគឺ $2x+6y\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{3y}$ វិបាកគេបាន

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=-\dfrac{1}{3}$ ដូច្នេះត្រង់ $(1,1)$ និង$(-1,-1)$ យើងបាន $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{c_1}\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{c_2}=-1$

សន្និដ្ឋាន: គ្រួសារខ្សែកោង C_1 គឺ $y=c_1x^3,\ c_1\neq 0$ កែងទៅនឹងគ្រួសារខ្សែកោង C_2 , $x^2+3y^2=c_2^2$ ដែលសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទីមួយគឺ: $\dfrac{dy}{dx}=3c_1x^2=3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2=\dfrac{3y}{x}$ ដែល $c_1=\dfrac{y}{x^3}$ ។ ចំណែក $x^2+3y^2=c_2^2$ ដូចទៅនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ $x^2+3y^2=4$ ដែល $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{3y}$ ។

ដូចនេះ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{c_1}\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{c_2}=\left(\dfrac{3y}{x}\right)\left(-\dfrac{x}{3y}\right)=-1$ ។

និយមន័យ: គ្រប់ខ្សែកោងនៃគ្រួសារ $G(x,y,c_1)=0$ កែងទៅនឹងគ្រួសារខ្សែកោង $H(x,y,c_2)=0$ នោះគ្រួសារទាំងពីរហៅថា ចំណោលកែងរវាងគ្នា។

ឧទាហរណ៍២៣: (a) ក្រាបនៃ $y=\dfrac{1}{2}x+1$ កែងទៅនឹងចំណោលនៃ $y=2x+c_1$ ។គ្រួសារនៃ $y=\dfrac{1}{2}x+c_2$ និង $y=2x+c_1$ ជាចំណោលកែងរវាងគ្នា។

(b) ក្រាបនៃ $y=4x^3$ ជាចំណោលកែងនៃ $x^2+3y^2=c_2^2$ ។ដូចនេះគ្រួសារនៃ $y=c_1x^3$ និង $x^2+3y^2=c_2^2$ ជាចំណោលកែងរវាងគ្នា។

២.៣. វិធីសាស្ត្រទូទៅ

ដើម្បីរកចំណោលកែងនៃគ្រួសារខ្សែកោងដែលឱ្យជាដំបូងត្រូវរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$ បន្ទាប់មករកសមិការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទី២ ដែលកែងទៅនឹងគ្រួសារទី១នោះ $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{f\left(x,y\right)}$ ។

ឧទាហរណ៍២៤: រកចំណោលកែងនៃគ្រួសារអ៊ីពែបូល $y=\frac{c_1}{x}$ ។

ចម្លើយ:

ដេរីវេនៃ $y=\frac{c_1}{x}$ គឺ $\frac{dy}{dx}=-\frac{c_1}{x^2}$ ជំនួស c_1 ដោយ xy គេបាន $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ ហើយសមីការឌីផេរ៉ង់ ស្យែលនៃ គ្រួសារខ្សែកោងកែងគឺ $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\frac{-y}{x}}=\frac{x}{y}$ ដោះស្រាយសមីការតាមការបំបែកអថេរគេបាន:

$$ydy=xdx\Leftrightarrow\int ydy=\int xdx$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c'_2$$

$$x^2+y^2=c_2\ ,\ c_2=c'_2$$

ឧទាហរណ៍២៥: រកចំណោលកែងនៃ $y=\frac{c_1x}{1+x}$

ចម្លើយ:

$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{\left(1+x\right)^2}$ ជំនួស $c_1=\frac{y\left(1+x\right)}{x}$ យើងបាន: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x\left(1+x\right)}$ ហើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចំណោលកែងគឺ: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x\left(1+x\right)}{y}$ ដោះស្រាយសមីការតាមការបំបែកអថេរ គេបាន:

$$ydy=-x\left(1+x\right)dx$$

$$\int ydy=-\int\left(x+x^2\right)dx$$

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+c'_2$$

$$3y^2+3x^2+2x^3=c_2\ ,\ c_2=6c'_2$$

២.៤. ការអនុវត្តន៍ក្នុងរូបវិទ្យា

ឧទាហរណ៍២៦: គេមាន N_0 ចំនួននៃបាក់តេរី។ នៅត្រង់ $t=1$ ម៉ោងចំនួននៃបាក់តេរីត្រូវបានវាស់ស្មើ $\left(\frac{3}{2}\right)N_0$ ។ បើអត្រា កើនសមមាត្រទៅនឹងចំនួននៃបាក់តេរីដែលមាន។ ចូរកំណត់រយៈពេលចាំបាច់ ចំពោះចំនួននៃបាក់តេរី *triple* ។

ចម្លើយ: យើងដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dN}{dt}=kN\quad(*)$, $N\left(0\right)=N_0$ ។ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយបញ្ហានេះ យើងប្រើលក្ខខណ្ឌ $N\left(1\right)=\left(\frac{3}{2}\right)N_0$ ដើម្បីកំណត់ចំនួនថេរសមមាត្រ k ។

សមីការ$(*)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែហើយអាចបំបែកអថេរបាន ។

គេបាន: $\frac{dy}{dx}-kN=0$ ដែលមានកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ e^{-kt} សមមូល $\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}N\right)=0$

$$\Rightarrow e^{-kt}N=c\Leftrightarrow N(t)=ce^{kt}$$

ត្រង់ $t=0$ ឱ្យ $N_0=ce^0=c\Rightarrow N(t)=N_0e^{kt}$ ។

ត្រង់ $t=1$ យើងបាន: $\frac{3}{2}N_0=N_0e^k\Leftrightarrow\frac{3}{2}=e^k$

$$\Rightarrow k=\ln\left(\frac{3}{2}\right)=0.4055$$

$$\Rightarrow N(t)=N_0e^{0.4055}$$

ដើម្បីរករយៈពេលដែលបាក់តេរីមាន*triple* យើងដោះស្រាយ $3N_0=N_0e^{0.4055t}$

$$\Rightarrow 0.4055t=\ln 3$$

$$\Rightarrow t=\frac{\ln 3}{0.4055}\approx 2.71$$

ឧទាហរណ៍២៧: យើងដឹងថាទន្លាក់សេរីនៃវត្ថុមួយនៅជិតផ្ទៃនៃផែនដីមានសំទុះទំនាញ g ។ សំទុះគឺជាដេរីវេ នៃល្បឿនរឹង នៅក្នុងផ្នែកនេះគឺជាដេរីវេនៃចំងាយ s ។ យើងបាន: $\frac{d^2s}{dt^2}=-g$

គឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលទាក់ទង់ចំងាយនៃអ័ក្ស ឈរដែលវត្ថុឬអង្គធាតុធ្លាក់។ សញ្ញាអវិជ្ជមាន ដោយសារកំលាំងទំនាញនៃអង្គធាតុមានទិសដៅច្រាសនឹងទិសដៅវិជ្ជមាន។ ជាឧទាហរណ៍បើមានដុំថ្មមួយដុំត្រូវបានគេ ទម្លាក់ពីដំបូលអាគារមានតម្លៃ s_0 និងមានល្បឿន v_0 ដូច្នេះយើងត្រូវដោះស្រាយសមីការ $\frac{d^2s}{dt^2}=-g$, $0<t<t_0$

បន្ទាប់មកយើងកំណត់លក្ខខណ្ឌ $s(0)=s_0, s'(0)=v_0$ ត្រង់ $t=0$ ជារយៈពេលដែលដុំថ្មធ្លាក់ដល់ដី។ ក្នុងការធ្លាក់ $v_0>0$ ។

ឧទាហរណ៍២៨: ដើម្បីកំណត់បំលាស់ទីឈរ $x(t)$ នៃម៉ាស់ដែលភ្ជាប់ទៅនឹងរ៉ឺស័រ។ យើងប្រើច្បាប់ពីរខុសៗគ្នា គឺ ច្បាប់ញូតុន និងច្បាប់ហូប។ កំលាំង $F=ma$ ដែល m ជាម៉ាស់និង a ជាសំទុះ។ តាមច្បាប់ហូបបង្ហាញថា កំលាំងនៃភាពយឺតរបស់ រ៉ឺស័រសមាមាត្រទៅនឹងបន្លាយ $s+x$ ឬ $k(s+x)$ ដែល $k>0$ ហើយថេរ ។ចំណែក s ជាភាពយឺតនៃរ៉ឺស័រនៅពេលម៉ាស់បាន ភ្ជាប់រួចហើយប្រព័ន្ធព្យួរត្រូវបានគេដាក់ឱ្យនៅក្នុងទីតាំងនឹង។ ពេលប្រព័ន្ធមានចលនាអថេរ x តាងបំលាស់ទីផ្ទាល់នៃម៉ាស់ លោតផុតពីទីតាំងលំនឹងពេលនោះ $F=-kx$ ។

ចម្លើយ:

ក្នុងទីតាំងលំនឹងកំលាំងយឺតគឺ ks ព្រោះ $x=0$ មានទំងន់ $W=mg$ ហើយទំងន់ W ត្រូវបានដាក់ ឱ្យយោលចុះឡើងដោយកំលាំង ks ។ លក្ខខណ្ឌលំនឹងគេបាន: $mg=ks$ ឬ $mg-ks=0$ ។ បើ m ត្រូវបានគេដាក់ ឱ្យមានចលនាបានចំងាយ x ពីទីតាំងលំនឹង ហើយភ្ជាប់កំលាំង F ក្នុងច្បាប់ទីពីញូតុនគឺ $F=ma$ នោះយើងអាចទាញ ទំនាក់ទំនងរវាង F និងកំលាំងនៃភាពយឺតដោយ: $F=-k(s+x)+mg\Leftrightarrow -kx+mg-ks=-kx$ ព្រោះ $mg-ks=0$

ដូចនេះ $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ ។

ឧទាហរណ៍២៩: នៅក្រោមព្រឹត្តិការណ៍ទម្លាក់អង្គធាតុមានម៉ាស់ m (ដូចជាការលោតឆ័ត្រយោង) កំលាំងទប់នៃខ្យល់សមាមាត្រទៅនឹងល្បឿន $v(t)$ ។ ប្រើច្បាប់ទីពីរញូតុនដើម្បីរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលចំពោះល្បឿននៃ អង្គធាតុ នៅខណ: ពេលណាមួយ ។

ចម្លើយ:

សន្មតទិសដៅចុះក្រោមជាទិសដៅវិជ្ជមាន ហើយផលបូកនៃកំលាំងមានអំពើលើអង្គធាតុគឺ: $mg - kv$, k ថេរ (1) ច្បាប់ញូតុន $F = ma \quad (2)$ ។

តាម (1) និង (2) គេបាន: $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

២.៥. ការអនុវត្តក្នុងគីមីវិទ្យា

ឧទាហរណ៍៣០:អំបិលចំនួន៥០ផោនត្រូវបានគេលាយក្នុងធុងមួយ ដែលមានទឹកចំនុះ៣០០ហ្គាឡុង ។ សូលុយស្យុងទឹកអំបិលបូមចូលក្នុងធុងបាន៣ហ្គាឡុងក្នុងមួយនាទី និងបង្ហូរចេញវិញក៏បានដូចគ្នាដែរ ។ ក្នុងការបង្ហូរចូលនោះមានសូលុយស្យុង២ផោនក្នុងហ្គាឡុង កំណត់ចំនួនអំបិលដែលមាននៅក្នុងធុងនៅរយ:ពេលណាមួយ ។

តើមានអំបិលចំនួនប៉ុន្មានបន្ទាប់ពី៥០នាទីក្រោយមក ? បន្ទាប់ពីរយ:ពេលជាយូរ ?

ចម្លើយ:

តាង $A(t)$ ជាចំនួនអំបិលគិតជាផោននៅក្នុងធុងនៅរយ:ពេលណាមួយ ។ អត្រា $A(t)$ ប្រែប្រួលឱ្យដោយ

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} rate\ of\ subs\tan ce \\ entering \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} rate\ of\ subs\tan ce \\ leaving \end{pmatrix}$$

$$= R_1 - R_2 \quad (**)$$

គេបាន $R_1 = (3gal/\min).(2lb/gal) = 6lb/\min$

$$R_2 = (3gal/\min).\left(\frac{A}{300}lb/gal\right) = \frac{A}{100}lb/\min$$

សមីការ $(**)$ ក្លាយជា $\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}, A(0) = 500 \ (***)$ ដែលមានកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $e^{\frac{t}{100}}$

សមីការ $(***)$ អាចសរសេរ : $\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{100}}A\right) = 6e^{\frac{t}{100}}$

$$\Rightarrow e^{\frac{t}{100}}A = 600e^{\frac{t}{100}} + c$$

$$\Rightarrow \quad A = 600 + ce^{-\frac{t}{100}}$$

ពេល $t = 0$, $A = 50$ ឱ្យ $c = -500$ នាំឱ្យ $A = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$ ត្រង់ $t = 50$ យើងរក $A(50) = 266.41$ ផោន ។

ក្នុងរយៈពេលយ៉ាងយូរចំនួនសូលុយស្យុងអំបិលគឺ $(300gal)(2lb/gal)=600lb$

t(នាទី)	A(ផោន)
៥០	២៦៦.៤១
១០០	៣៩៧.៦៧
១៥០	៤៧៧.២៧
២០០	៥២៥.៥៧
៣០០	៥៧២.៦២
៤០០	៥៨៩.៩៣

មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២

១.១. ទ្រឹស្តីជំនួយ

យើងបានដឹងរួចមកហើយថាសមីការមានច្រើនប្រភេទដូចជា: សមីការលីនេអ៊ែមួយ ឬ ច្រើនអថេរសមីការដឺក្រេ ទី២សមីការមានដឺក្រេខ្ពស់និងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ក្នុងនោះយើងលើកយកសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២មកសិក្សា

និយមន័យ: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសមីការគណិតវិទ្យាចំពោះអនុគមន៍មិនស្គាល់មួយមានអរថេរមួយ ឬច្រើនដែលទាក់ទងនឹងតម្លៃនៃអនុគមន៍នោះ និងតម្លៃនៃដេរីវេរបស់វាមួយឬច្រើនលំដាប់។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានអនុវត្តក្នុងជំនាញវិស្វករ រូបវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច និងកម្មវិធីសិក្សាដទៃមួយចំនួនទៀត។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ជាសមីការដែលមានទម្រង់:

$$\boxed{a_2(x)\frac{d^2y}{dx}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)}$$

១.១.១. បញ្ហាតម្លៃដើមនិងតម្លៃព្រំដែន

ក. បញ្ហាតម្លៃដើម

ការសិក្សាលើផ្នែកមេកានិចឌីណាមិចអគ្គិសនី....បានប្រមូលផ្តុំនូវស្ថានភាពដែលទាក់ទងនឹងការសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍មួយទៅនឹងដេរីវេបន្តបន្ទាប់របស់វា លើចន្លោះណាមួយ។

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y''-y'+3y=0$ គឺ រកគ្រប់អនុគមន៍ f មានដេរីវេពីរដងលើ R ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $2f''(x)-f'(x)+3f(x)=0$ ។ សមីការនេះជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរព្រោះក្នុងសមីការនេះមានដេរីវេលំដាប់២ហើយគ្មានដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ជាង២ទេ។ គេហៅសមីការនេះជា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ ហើយអង្គទី២ស្មើសូន្យ។

ឧទាហរណ៍២: អនុគមន៍ $y=xe^x$ ជាចម្លើយអ៊ិចព្លីស៊ិតនៃបញ្ហាតម្លៃដើមរបស់សមីការ

$y''-2y'+y=0$, $y(1)=e, y'(1)=2e$ ព្រោះ $y'=xe^x+e^x$

$$\begin{aligned} y''=xe^x+2e^x \Leftrightarrow y''-2y'+y &= \left(xe^x+2e^x\right)-2\left(xe^x+e^x\right)+xe^x \\ &= xe^x+2e^x-2xe^x-2e^x+xe^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ខ. បញ្ហាតម្លៃព្រំដែន

បញ្ហាក្នុងការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលអាស្រ័យលើអថេរ y ត្រូវបានផ្តល់លក្ខណៈពិសេសត្រង់ចំនុចពីរផ្សេងគ្នា។ ពោលគឺដូចជាបញ្ហា: $\boxed{a_2(x)\frac{d^2y}{dx}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)}$ ឬ

$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ ដែល $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$ ត្រូវបានគេហៅថាបញ្ហាតម្លៃព្រំដែន។

ឧទាហរណ៍១: ចំពោះបញ្ហាតម្លៃព្រំដែន $x^2y''-2xy'+2y=0$, $y(1)=0$, $y(2)=3$ គឺយើងស្វែងរកអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ I មួយដែលមានផ្ទុក $x=1$ និង $x=2$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងលើហើយមានក្រាហ្វិកកាត់តាមចំនុចពីរគឺ $(1,0)$ និង $(2,3)$ ។

ឧទាហរណ៍២:បើគេដឹងថា $y=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+16y=0$ ។

ចូរកំណត់ចម្លើយនៃសមីការនេះដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខណ្ឌព្រំដែន $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើយើងកំណត់បាន: $0=c_1\cos 0+c_2\sin 0$ នោះយើងបាន $c_1=0$

ដូចនេះ $y=c_2\sin 4x$ ។ ប៉ុន្តែនៅពេល $x=\frac{\pi}{2}$ យើងបាន $0=c_2\sin 2\pi$ ដោយ $\sin 2\pi=0$ នោះយើងអាចកំណត់យក c_2 ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃបញ្ហាតម្លៃព្រំដែន នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺ $y=c_2\sin 4x$ ។ ក្រាហ្វិកនៃអនុគមន៍ $y=c_2\sin 4x$ តាមតម្លៃនៃ c_2 ។

១.១.២. ភាពអាស្រ័យ និងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ

$f_1(x), f_2(x), f_3(x),...., f_n(x)$ មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែនៅលើចន្លោះ I ណាមួយបើ $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ មិនសូន្យទាំងអស់ដែល $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)+.....+c_nf_n(x)=0$ បើ $c_1=c_2=c_3=......=c_n=0$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

ឧទាហរណ៍១: $f_1(x)=\sin 2x, f_2(x)=\sin x\cos x$ ដែល $-\infty<x<+\infty$ គេបាន

$c_1\sin 2x+c_2\sin x\cos x=0$, $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=-1$ នោះ $f_1(x), f_2(x)$ មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\sin 2x+(-1)\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin 2x-2\sin x\cos x=0 \Rightarrow \sin 2x=2\sin x\cos x$

ឧទាហរណ៍២: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=|x|$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែព្រោះ

$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)=0 \Leftrightarrow c_1x+c_2|x|=0 \Rightarrow c_1=c_2=0,\ \ 0\le x<+\infty$

ឧទាហរណ៍៣: $f_1(x)=5, f_2(x)=\cos^2 x, f_3(x)=\sin^2 x$

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$$
$$\Leftrightarrow c_1\cdot 5+c_2\cos^2 x+c_3\sin^2 x=0$$

ដើម្បីឱ្យ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ជាអនុគមន៍អាស្រ័យលីនេអ៊ែលុះត្រាតែ $c_1=-1, c_2=c_3=5$ ។

ឧទាហរណ៍៤: $f_1(x)=1+x, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2$

ចម្លើយ:

គេបាន: $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$

$$\Leftrightarrow c_1(1+x)+c_2x+c_3x^2=0$$
$$\Leftrightarrow c_3x^2+(c_1+c_2)x+c_1=0$$

ដើម្បីឱ្យផលបូកស្មើសូន្យលុះត្រាតែ: $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$ ដោយ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ នាំឱ្យ

$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

ទ្រឹស្តីបទ: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)$ មានយ៉ាងហោចណាស់ $(n-1)$ ដេរីវេ ។ គេថា $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែលើ I ណាមួយលុះត្រាតែ

$$W(f_1, f_2, ... f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 .... f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & f_3^{'} .... f_n^{'} \\ f_1^{"} & f_2^{"} & f_3^{"} .... f_n^{"} \\ .... \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & f_3^{n-1} ... f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

ដេទែមីណង់នេះហៅថា *wronskian* នៃ $f_1, f_2, f_3, ... f_n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងបកស្រាយទ្រឹស្តីបទខាងលើ ជាដំបូងយើងស្រាយថាបើ $f_1, f_2, f_3, ... f_n$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែគ្នានោះ $W(f_1, f_2, f_3, ... f_n) \neq 0$ ។ ដោយ $f_1, f_2, f_3, ... f_n$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទី $n-1$ លើចន្លោះ I នោះ

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \quad (1)$$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$ បើយើងធ្វើដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃផលបូកនេះយើងបាន:

$$c_1 f_1^{'}(x) + c_2 f_2^{'}(x) + c_3 f_3^{'}(x) + ... + c_n f_n^{'}(x) = 0$$
$$c_1 f_1^{"}(x) + c_2 f_2^{"}(x) + c_3 f_3^{"}(x) + ... + c_n f_n^{"}(x) = 0$$
$$...$$
$$...$$
$$c_1 f_1^{n-1}(x) + c_2 f_2^{n-1}(x) + c_3 f_3^{n-1}(x) + ... + c_n f_n^{n-1}(x) = 0$$

ដូចនេះយើងទទួលបាន:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1^{'}(x) + c_2 f_2^{'}(x) + c_3 f_3^{'}(x) + ... + c_n f_n^{'}(x) = 0 \\ c_1 f_1^{"}(x) + c_2 f_2^{"}(x) + c_3 f_3^{"}(x) + ... + c_n f_n^{"}(x) = 0 \\ .... \\ .... \\ c_1 f_1^{n-1}(x) + c_2 f_2^{n-1}(x) + c_3 f_3^{n-1}(x) + ... + c_n f_n^{n-1}(x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

ប៉ុន្តែភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)$ នេះបញ្ជាក់ថា (2) មានឫស $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$

ដូចនេះយើងបានៈ$W\left(f\ (x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)\right)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)..................f_n(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & f_3^{'}(x)..................f_n^{'}(x) \\ f_1^{''}(x) & f_2^{''}(x) & f_3^{''}(x)................f_n^{''}(x) \\ .... \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & f_3^{n-1}(x)......f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}=0$

ឥឡូវនេះយើងស្រាយថាបើ$(f_1, f_2, f_3,..., f_n)$ នោះ $f_1(x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)$ មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែគ្នា។ យើងបកស្រាយដោយប្រើលក្ខណៈច្រាសចំពោះ n អនុគមន៍ f_i ។ ដែល $i=1,2,3,...,n$, $f_i(x)$ មានដេរីវេទី$(n-1)$ ។ សន្មតថា$W\left[f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0),...f_n(x_0)\right]\neq 0$ ចំពោះចំនុចនឹង x_0 នៅលើចន្លោះ I ហើយដែល $f_1(x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)$ អាស្រ័យលីនេអ៊ែលើចន្លោះ I ។

ជាការពិតដែលអនុគមន៍អាស្រ័យលីនេអ៊ែមានន័យថាមានចំនួនថេរ $c_1, c_2, c_3..., c_n$ មិនស្មើសូន្យព្រមគ្នាដែលៈ

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+c_3 f_3(x)+...+c_n f_n(x)=0 \qquad (3)$$

ចំពោះគ្រប់ x នៅចន្លោះ I ឌីផេរ៉ង់ស្យែលបន្តបន្ទាប់នៃផលបូកនេះយើងបានៈ

$$\begin{cases} c_1 f_1\ (x)+c_2 f_2\ (x)+c_3 f_3\ (x)+.....+c_n f_n\ (x)=0 \\ c_1 f_1^{'}(x)+c_2 f_2^{'}(x)+c_3 f_3^{'}(x)+.....+c_n f_n^{'}(x)=0 \\ c_1 f_1^{''}(x)+c_2 f_2^{''}(x)+c_3 f_3^{''}(x)+.....+c_n f_n^{''}(x)=0 \\ .... \\ .... \\ c_1 f_1^{n-1}(x)+c_2 f_2^{n-1}(x)+c_3 f_3^{n-1}(x)+.....+c_n f_n^{n-1}(x)=0 \end{cases}$$

ដូចនេះយើងទទួលបានៈ$\begin{cases} c_1 f_1\ (x)+c_2 f_2\ (x)+c_3 f_3\ (x)+.....+c_n f_n\ (x)=0 \\ c_1 f_1^{'}(x)+c_2 f_2^{'}(x)+c_3 f_3^{'}(x)+.....+c_n f_n^{'}(x)=0 \\ c_1 f_1^{''}(x)+c_2 f_2^{''}(x)+c_3 f_3^{''}(x)+.....+c_n f_n^{''}(x)=0 \\ .... \\ .... \\ c_1 f_1^{n-1}(x)+c_2 f_2^{n-1}(x)+c_3 f_3^{n-1}(x)+.....+c_n f_n^{n-1}(x)=0 \end{cases} \qquad (4)$

ប៉ុន្តែភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែគ្នានេះបញ្ជាក់ថា(4) មានចម្លើយរាប់មិនអស់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅលើចន្លោះ I ដូចនេះយើងបាន

$$W\left(f\ (x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)\right)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)..................f_n(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & f_3^{'}(x)..................f_n^{'}(x) \\ f_1^{''}(x) & f_2^{''}(x) & f_3^{''}(x)................f_n^{''}(x) \\ .... \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & f_3^{n-1}(x)......f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}=0 \quad (5)$$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅលើចន្លោះ I ច្រាសមកវិញយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា

$W\left[f_1(x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)\right] \neq 0$ នោះ $f_1, f_2, f_3,....f_n$ (6) មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែគ្នា ។

តាម(2) និង(6) យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $f_1, f_2, f_3,....f_n$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែលុះត្រាតែៈ

$$W\left(f\ (x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x)\right) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)..................f_n(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & f_3^{'}(x).................f_n^{'}(x) \\ f_1^{"}(x) & f_2^{"}(x) & f_3^{"}(x)...............f_n^{"}(x) \\ .... & .... & .... \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & f_3^{n-1}(x)......f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

ឧទាហរណ៍: $f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = 1-\cos 2x$

$$W = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\sin x\cos x & 2\sin x \end{vmatrix} = \sin 2x\left(\sin^2 x + \cos^2 x - 1\right)$$

ដូចនេះ $f_1(x), f_2(x)$ មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញតាមដេទែមីណង់W នូវអនុគមន៍ខាងក្រោមរួចកំណត់ថា

តើអនុគមន៍នេះមានភាពអាស្រ័យឬមិនអា

ស្រ័យលីនេអ៊ែៈ

ក. $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = e^{4x}\ ,-\infty < x < +\infty$

យើងបាន: $W\left[f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right] = W\left(e^x, e^{-x}, e^{4x}\right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & e^{4x} \\ e^x & -e^{-x} & 4e^{4x} \\ e^x & e^{-x} & 16e^{4x} \end{pmatrix}$

$$= \left[e^x\left(-e^{-x}\right)16e^{4x} + e^{-x}\cdot e^x + e^{4x}\cdot e^x\cdot e^{-x}\right] - \left[e^x\left(-e^{-x}\right)e^{4x} + e^x\cdot e^{-x}\cdot 16e^{4x} + e^x\cdot e^{-x}\cdot 4e^{4x}\right]$$

$$= -16e^{4x} + 4e^{4x} + e^{4x} + e^{4x} - 16e^{4x} - 4e^{4x} = -30e^{4x} \neq 0$$

ដូចនេះ $W\left[f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right]$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

ខ. $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}},\ f_2(x) = x^2$ ដែល$0 < x < +\infty$

$$W\left[f_1(x), f_2(x)\right] = W\left(x^{\frac{1}{2}}, x^2\right) = \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 2x \end{pmatrix} = 2x\sqrt{x} - x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4x^2 - x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}} \neq 0$$

ដូចនេះ$W\left[f_1(x), f_2(x)\right]$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ ។

១.១.៣. ចម្លើយនៃសមីការលីនេអ៊ែ

សមីការលីនេអ៊ែមានទម្រង់: $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $a_1(x)$ យើងបាន

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \qquad (1)$ ដែល $P(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)},\ f(x)=\dfrac{g(x)}{a_1(x)}$

$\Leftrightarrow dy+\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow \mu(x)dy+\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0$ ជាសមីការពិត ។

ដូចនេះ $\dfrac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\dfrac{\partial}{\partial y}\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]$

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu P(x)$$

សមីការខាងក្រោមនេះជាសមីការដែលអាចបំបែកអថេរបាន ដូចនេះយើងបាន $\dfrac{d\mu}{\mu}=\mu P(x)dx$ ធ្វើអាំងតេក្រាល លើអង្គទាំងពីរយើងបាន $\displaystyle\int\frac{d\mu}{\mu}=\int P(x)dx$

$$\ln|\mu|=\int P(x)dx\Rightarrow \mu=e^{\int P(x)dx}$$

ដូចនេះ $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ ហៅថាកត្តាអាំងតេក្រាល ។

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការ $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$

ចម្លើយ

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x យើងបាន $\dfrac{dy}{dx}-4\dfrac{y}{x}=x^5e^x$ ដែល $\mu(x)=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln|x|}=e^{\ln|x|^{-4}}=x^{-4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\mu(x)$ យើងបាន: $x^{-4}\dfrac{dy}{dx}-4x^{-4}\dfrac{y}{x}=x^{-4}x^5e^x$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right)=xe^x$$

$$x^{-4}y=\int xe^x dx$$

តាង $u=x\Rightarrow du=dx$, $dv=e^xdx\Rightarrow v=\int e^xdx=e^x$

យើងបាន $x^{-4}y=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+c\Rightarrow y=x^4e^x(x-1)+x^4c$

ដូចនេះ $y=x^4e^x(x-1)+x^4c$ ជាចម្លើយនៃសមីការលីនេអ៊ែ ។

ឧទាហរណ៍២: ដោះស្រាយសមីការ $\left(1+x^2\right)dy+\left(xy+x^3+x\right)dx=0$

ចម្លើយ

ដោយ $\left(1+x^2\right)dy+\left(xy+x^3+x\right)dx=0$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\left(1+x^2\right)$ យើងបាន $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{xy}{\left(1+x^2\right)}=\dfrac{-x^3-x}{\left(1+x^2\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{1+x^2}\cdot y=-x$ ដែល $\mu(x)=e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln u}=u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x^2}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការខាងលើនឹង $\mu(x)$ យើងបាន

$$\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+x^2}\frac{x}{1+x^2}y=-x\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}.y\right)=-x\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}.y=-\int x\sqrt{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{\frac{3}{2}}+c=-\frac{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}{3}+c$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\frac{\left(1+x^2\right)}{3}+\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$$

ជាចម្លើយនៃសមីការលីនេអ៊ែ ។

១.២. ការបង្កើតចម្លើយទី២ចេញពីចម្លើយទី១

$y_1(x)\neq 0$ ជាចម្លើយនៃ $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ (1) ហើយ $y_2(x)$ ជាចម្លើយទី២ស្មើប៉ុន្មានដែលចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ។

ករណីទូទៅ:

ឧបមាថាយើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង $a_2(x)$ យើងបានទម្រង់ថ្មី $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (2) ដែល $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាប់លើចន្លោះ I បើយើងឧបមាថាយើងដឹងចម្លើយទី១ នៃសមីការ (2) លើចន្លោះ I និង $y_1(x)\neq 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x លើចន្លោះ I ។

បើយើងកំណត់ $y=u(x)y_1(x)$ យើងបានដូចខាងក្រោម៖

$$y'=uy_1'+y_1u'$$

$$y''=uy_1''+2y_1'u'+y_1u''$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=u\left(y_1''P(x)y'+Q(x)y_1\right)+y_1u''+\left(2y_1'+P(x)y_1\right)u'=0$$

នេះបញ្ជាក់ថាយើងត្រូវបាន : $y_1u''+\left(2y_1'+P(x)y_1\right)u'=0$

ឬ $y_1\omega'+\left(2y_1'+P(x)y_1\right)\omega=0$ (3) ដែលយើងតាង $\omega=u'$ ទទួលបានសមីការ (3) លីនេអ៊ែ និងអាចញែកអថេរបាន ។ ដោយចែក (3) នឹង ωy_1 យើងបាន៖ $\frac{d\omega}{\omega}+2\frac{y_1'}{y_1}dx+P(x)dx=0$

$$\ln|\omega|+2\ln|y_1|=-\int P(x)dx+c$$

$$\mathrm{n}\left|\omega y_1^2\right|=-\int P(x)dx+c$$

$$\omega y_1^2=c_1e^{-\int P(x)dx}$$

$$\omega=c_1\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$$

$\frac{du}{dx}=c_1\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$ ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរយើងបាន $u=c_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx+c_2$

ដូចនេះ $y=u(x)y_1(x)=c_1y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx+c_2y_1(x)$ ដោយយក $c_1=1$, $c_2=0$ យើងរកបានចម្លើយ

ទី២នៃសមីការ (2) : $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

១.៣. សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនមានមេគុណជាចំនួនថេរ

១.៣.១. និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនលំដាប់២ ដែលមានមេគុណថេរគឺគ្រប់សមីការដែលមានទម្រង់:

$ay''+by'+cy=0$; $a,b,c,a\neq 0$ ជាចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍: សមីការ $y''-3y'+\frac{5}{2}y=0$, $2y''+3y'+1=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ ។

១.៣.២. ចម្លើយនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនមានមេគុណថេរ

យើងបានឃើញរួចមកហើយថាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់១មានរាង $\frac{dy}{dx}+ay=0$, a ជាចំនួនថេរមានចម្លើយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលលើចន្លោះ $-\infty<x<+\infty$ យើងនឹងរកចម្លើយនៃសមីការលំដាប់ខ្ពស់ ដូចជាសមីការ: $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+....+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ (1) ដែល a_i , $i=1,2,3,.....n$ ជាចំនួនថេរ ។

យើងចាប់ផ្ដើមដោយករណីពិសេសមួយគឺសមីការលំដាប់២: $ay''+by'+cy=0$ (2)

តាង $y=e^{mx}$ ជាចម្លើយនោះ $y'=me^{mx}$ និង $y''=m^2e^{mx}$ នាំឱ្យសមីការ (2) ក្លាយជា:

$am^2e^{mx}+bme^{mx}+ce^{mx}=0$ or $e^{mx}\left(am^2+bm+c\right)=c$ ដោយ $e^{mx}>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ x

យើងទាញបាន:

am^2+bm+c (3) សមីការ (3) នេះហៅសមីការជំនួយឬសមីការសម្គាល់ យើងពិភាក្សាចម្លើយនៃសមីការ (2) តាមករណីឫសនៃសមីការសម្គាល់ (3) :

ករណីទី១ : បើសមីការ (3) មាន $\Delta=b^2-4ac>0$ នោះវាមានឫសពីរ គឺ m_1 និង m_2 នោះចម្លើយនៃ (2) គឺ $y_1=e^{m_1x}$ និង $y_2=e^{m_2x}$ ដោយពួកវាមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែគ្នាយើងបានចម្លើយទូទៅ: $y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$ (4)

ករណីទី២: បើសមី (3) មាន $\Delta=b^2-4ac=0$ នោះវាមានឫសឌុប $m_1=m_2$ យើងបានចម្លើយទី១គឺ

$y_1=e^{m_1x}$ យើងរកចម្លើយទី២តាមរូបមន្តក្នុង (2.2) យើងមាន: $y_2=e^{m_1x}\int\frac{e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x}}{e^{2m_1x}}dx$ (5)

ដោយ $m_1=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}$ យើងអាចសរសេរ: $y_2=e^{m_1x}\int\frac{e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x}}{e^{2m_1x}}dx=e^{m_1x}\int dx=xe^{m_1x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (2) គឺ $y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}$ (6)

ករណីទី៣: បើសមីការ(3) មាន$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ នោះមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ដែលអាចសរសេរ: $m_1 = \alpha + i\beta$ និង$m_2 = \alpha - i\beta$ ដែលα, β ជាចំនួនពិតនិង $i^2 = -1$ មិនខុសពីករណីទី១ទេ យើងបានចម្លើយទូទៅ: $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ (7) ។ តាមរូបមន្តអឺលែយើងបាន: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ដែលθ ជាចំនួនពិត ។

យើងបាន: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$ និង $e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$

សមីការ(7) ក្លាយជា: $y = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x}\right)$

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}\left[c_1\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + c_2\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[\left(c_1 + c_2\right)\cos\beta x + \left(c_1 - c_2\right)i\sin\beta x\right] \\ &= e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + Bi\sin\beta x\right),\ A = c_1 + c_2, B = c_1 - c_2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(2) គឺ $y = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + i\sin\beta x\right)$ (8)

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

គេបានសមីការសម្គាល់: $m^2 - 3m + 2 = 0$

មាន $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ គេបាន $m_1 = 1, m_2 = 2$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ $(c_1, c_2$ ជាចំនួនពិត) ។

ឧទាហរណ៍២: ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 4y' + 4y = 0$

គេបានសមីការសម្គាល់: $m^2 - 4m + 4 = 0$

មាន $\Delta = 16 - 16 = 0$ គេបានសមីការមានឫសឌុប $m_1 = m_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$; c_1, c_2 ជាចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍៣: ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 2y' + 2y = 0$ ។

ចម្លើយ:

គេបានសមីការសម្គាល់: $m^2 - 2m + 2 = 0$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \ ,\ m_2 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $y = e^x\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right)$; $c_1, c_2 \in R$

១.៣.៣. ចម្លើយសមីការ $ay'' + by' + cy = 0$ មានតម្លៃដើមឬតម្លៃព្រំដែន

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y' = 0$ (1) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់: $m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$

យើងបាន: $\alpha = 0, \beta = 2$ នោះចម្លើយទូទៅគឺ $y = e^0\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$

$$= A\cos 2x + B\sin 2x$$

រក A និង B តាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

យើងបាន $f(0)=A\cos 0+B\sin 0 \Leftrightarrow 1=A$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A\cos\frac{\pi}{2}+B\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}=A\cdot 0+B\cdot 1 \Rightarrow B=\sqrt{3}$$

ដូចនេះចម្លើយតែមួយគត់នៃ (1) ដោយមានលក្ខខណ្ឌដើមគឺ $y=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$$

$$=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

ឧទាហរណ៍២: ដោះស្រាយសមីការ $y''=4y$ (1) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ។

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់: $m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$

ចម្លើយទូទៅ គឺ $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$, $(A\ ,\ B\in R)$

រក A និង B តាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

យើងបាន: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=Ae^{\pi}+Be^{-\pi} \Leftrightarrow 1=Ae^{\pi}+Be^{-\pi}$ (1)

ដោយ $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}\Rightarrow y'=2Ae^{2x}-2Be^{-2x}$

យើងបាន: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2Ae^{\pi}-2Be^{-\pi} \Leftrightarrow 1=2Ae^{\pi}-2Be^{-\pi}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\begin{cases} Ae^{\pi}+Be^{-\pi}=1 & (1)\\ 2Ae^{\pi}-2Be^{-\pi}=1 & (2)\end{cases}$ គុណ (1) និង 2 យើងបាន: $\begin{cases} 2Ae^{\pi}+2Be^{-\pi}=2\\ 2Ae^{\pi}+2Be^{-\pi}=1\end{cases}$

បូកអង្គនិងអង្គនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន: $4Ae^{\pi}=3\Rightarrow A=\frac{3}{4e^{\pi}}=\frac{3}{4}e^{-\pi}$ យកតម្លៃ $A=\frac{3}{4}e^{-\pi}$ ជំនួសក្នុង (1)

យើងបាន: $\frac{3}{4}e^{-\pi}\cdot e^{\pi}+Be^{-\pi}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}+Be^{-\pi}=1 \Leftrightarrow Be^{-\pi}=-\frac{1}{4}\Rightarrow B=-\frac{e^{\pi}}{4}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានចម្លើយតែមួយគត់ដោយមានលក្ខខណ្ឌដើម គឺ $y=\frac{3}{4}e^{2x-\pi}-\frac{1}{4}e^{\pi-2x}$

១.៤. មេគុណមិនកំណត់

១.៤.១. ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេតាង $Dy=\frac{dy}{dx}$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ y នាំឱ្យគេបាន $D^n y=\frac{d^n y}{dx^n}$

$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_0(x)y=g(x)$ គេអាចសរសេរ:

$$\left[a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_0\right]y = g(x)$$

ឧទាហរណ៍: $D^2 - 4 \quad = (D-2)(D+2)$

$$9D^2 - 49 = (3D-7)(3D+7)$$

ក. ប្រមាណវិធីធ្វើឱ្យសូន្យចំពោះ $\left[a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_0\right]y = g(x)$ អនុគមន៍ពហុធា:

$1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1}$

ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ $1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1}$ គឺ D^n

ឧទាហរណ១: ក. ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃចំថេរ k គឺ D មានន័យថា $Dk = 0$

ខ. ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ x គឺ $D^2x = 0$

គ. ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ x^2 គឺ $D^3x^2 = 0$

ឧទាហរណ៍២: រកប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ $1-5x^2+8x^3$ ចេញពីប្រមាណវិធីខាងលើគេបាន:

$D^4\left(1-5x^2+8x^3\right) = 0$ ព្រោះ $D^4x^3 = 0$

ខ. ប្រមាណវិធី $(D-\alpha)^n$ ធ្វើឱ្យសូន្យនៃអនុគមន៍ $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើយើងពិនិត្យមើលលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ n ដែលមានរាង:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x) \quad (1)$$

បើយើងតាង $D^ny = a\dfrac{d^ny}{dx^n}$ នោះសមីការមួយអាចសរសេរជា:

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1Dy + a_0y = 0 \quad (1)$$

$$\left(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0\right)y = 0 \quad (2)$$

បើយើងតាង $f(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0 \;(3)$ នោះ $f(D)$ អាចមានរាង $(D-\alpha)^n$ ហើយបើយើងដោះស្រាយសមីការ: $(D-\alpha)^n = 0 \quad (3)$ នោះយើងបានសមីការសម្គាល់: $(m-\alpha)^n = 0 \quad (4)$

ដោះស្រាយសមីការ (4) យើងបាន: $m_1 = m_2 = ... = m_n = \alpha$ ។ ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ

$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + ... + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}$ យើងទាញបាន

$$(D-\alpha)^n y = 0 \Leftrightarrow (D-\alpha)^n\left(c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + ... + c_nx^{n-1}e^{\alpha x} = 0\right)$$

យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា: $(D-\alpha)^n$ ជាប្រមាណវិធីធ្វើឱ្យសូន្យនៃអនុគមន៍ $e^{\alpha x} + xe^{\alpha x} + ... + x^{n-1}e^{\alpha x}$

ឧទាហរណ៍: $1.e^{5x}$ ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឱ្យសូន្យគឺ $(D-5)^1\left(e^{5x}\right) = 0$

$2.4e^{2x} - 6xe^{2x}$ គឺ $(D-2)^2\left(4e^{2x} - 6xe^{2x}\right) = 0$

គ. ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left[D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right]^n$ ធ្វើឱ្យសូន្យនៃអនុគមន៍

$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ ឬ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើយើងពិនិត្យមើលលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ $2n$ ដែលមានរាង

$$a_{2n}\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+a_{2n-1}\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)\quad(1)$$

បើយើងតាង $D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}$ នោះសមីការមួយអាចសរសេរជា៖

$$a_{2n}D^{2n}y+a_{2n-1}D^{2n-1}y+\ldots.+a_1Dy+a_oy=g(x)\quad(1)$$

$$\left(a_{2n}D^{2n}+a_{2n-1}D^{2n-1}+\ldots..+a_1D+a_0\right)y=g(x)\quad(2)$$

បើយើងតាង $f(D)=a_{2n}D^{2n}+a_{2n-1}D^{2n-1}+\ldots..+a_1D+a_0=g(x)$ នោះ $f(D)$ អាចមានរាង $\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n$ ហើយបើយើងដោះស្រាយសមីការ $\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n\quad(3)$

នោះយើងបានសមីការសម្គាល់៖ $\left[m^2-2\alpha m+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n\quad(4)$ ដោះស្រាយសមីការ(4) យើងបាន៖

$$\alpha^2-\left(\alpha^2-\beta^2\right)=-\beta^2$$

ដូចនេះ សមីការ(4) មានចម្លើយ $m_1=m_3=\ldots.=m_{2n-1}=\alpha+i\beta,m_2=m_4=\ldots..=m_{2n}=\alpha-i\beta$ ។

នោះសមីការ(3) មានចម្លើយ៖

$$y=C_1e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)+C_2xe^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)+\ldots+C_nx^{n-1}e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$$

យើងទាញបាន៖ $\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n=0$ ឬ$\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n\times$

$$\left[C_1e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)+C_2xe^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)+\ldots+C_nx^{n-1}e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)\right]=0$$

យើងអាចសន្និដ្ឋានថា៖$\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]^n$ ជាប្រមាណវិធីធ្វើឱ្យសូន្យនៃអនុគមន៍

$e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots.,x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ ឬ$e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots.,x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

ឧទាហរណ៍១៖ រកប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ $7-x+6\sin 3x=0$ ។

ចម្លើយ

$D^2(7-x)=0$ និង $\left(D^2+9\right)'(6\sin 3x)=0\Rightarrow D^2(7-x)\left(D^2+9\right)'(6\sin 3x)=0$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ដោះស្រាយសមីការ $y''-9y=54$ ។

ចម្លើយ

ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ(54) គឺ $D(54)=0\Rightarrow D=0$

សមីការសម្គាល់៖ $m^2-9=0\Rightarrow m=\pm 3$

$$y_c=c_1e^{-3x}+c_2e^{3x}$$

$$y_p=c_3e^{0x}=c_3\Rightarrow y_p'=0\Rightarrow y_p''=0$$

យក $y_p',y_p''=0$ ជំនួសក្នុងសមីការដើមយើងបាន $0-9c_3=54\Rightarrow c_3=-6$ នោះគេបាន

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-3x}+c_2e^{3x}-6$$

ដូចនេះ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{3x} - 6$

១.៤.២. ដំណោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូហ្សែន

វិធានទូទៅ: ពិនិត្យសមីការលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូហ្សែន $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x)$ ដែលយើងអាចសរសេរ $P(D)y = g(x)$ ដែល $g(x)$ ជាអនុគមន៍:

- ចំនួនថេរ k
- អនុគមន៍ពហុធា x
- អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $e^{\alpha x}$
- អនុគមន៍ $\cos\beta x, \sin\beta x$
- ផលបូកឬផលដកនៃអនុគមន៍ទាំងនេះ

បើ $P_1(D)\left[g(x)\right] = 0$ នោះ $P(D)\cdot P_1(D)y = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការ: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$ ។

ចម្លើយ

ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ $4x^2$ គឺ $D^3\left(4x^2\right) = 0$

សមីការអូម៉ូហ្សែនសម្គាល់: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Leftrightarrow D^2 + 3D + 2 = 0 \Leftrightarrow D^3\left(D^2 + 3D + 2\right) = 0$

យើងបានសមីការសម្គាល់ $m^3\left(m^2 + 3m + 2\right) = 0$ គេបាន $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = -2$

នោះយើងបាន $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

$$y_p = c_3e^{0x} + c_4xe^{0x} + c_5x^2e^{0x} = c_3 + c_4x + c_5x^2$$

$$\Rightarrow y_p^{''} = c_4 + 2c_5x \Rightarrow y_p^{''} = 2c_5$$

យក $y_p^{'}, y_p^{''}$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការដើមយើងបាន $2c_5 + 3\left(c_4 + 2c_5x\right) + 2\left(c_3 + c_4x + c_5x^2\right) = 4x^2$

$$\left(2c_5 + 3c_4 + 2c_3\right) + \left(6c_5 + 2c_4\right)x + 2c_5x^2 = 4x^2$$

គេបាន: $\begin{cases} 2c_5 + 3c_4 + 2c_3 = 0 \\ 6c_5 + 2c_4 = 0 \\ 2c_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 7 \\ c_4 = -6 \\ c_5 = 2 \end{cases}$

ដោយ $y = 7 - 6x + 2x^2$ យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = y_c + y_p = c_1e^{-x} + c_3e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2$

ដូចនេះ $y = c_1e^{-x} + c_3e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin x$ ។

ចម្លើយ

សមីការអូម៉ូហ្សែន $y'' - 3y' = 0 \Leftrightarrow D^2 - 3D = 0$

យើងបានសមីការសម្គាល់ $m^2-3m=0 \Leftrightarrow m(m-3)=0 \Rightarrow m_1=0, m_2=3$

$$\Rightarrow y_c = c_1e^{0x}+c_2e^{3x}=c_1+c_2e^{3x}$$

ប្រមាណវិធីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឱ្យសូន្យនៃ: $8e^{3x}+4\sin x \Leftrightarrow (D-3)(8e^{3x})=0$ និង $(D^2+1)(4\sin x)=0$

$$\Rightarrow (D-3)(D^2+1)(8e^{3x})(4\sin x)=0$$

យើងបានសមីការសម្គាល់: $(m-3)(m^2+1)=0 \Rightarrow m_1=3, m_2=i, m_3=-i$

នោះគេបាន $y_p = c_3xe^{3x}+e^{0x}(c_4\cos x+c_5\sin x)=c_3xe^{3x}+c_4\cos x+c_5\sin x$

$$\Rightarrow y_p' = c_3e^{3x}+3c_3xe^{3x}-c_4\sin x+c_5\cos x$$

$$\Rightarrow y_p'' = 3c_3e^{3x}+3c_3e^{3x}+9c_3xe^{3x}-c_4\cos x-c_5 simx$$

ជំនួសក្នុងសមីការដើមយើងបាន : $3c_3e^{3x}+3c_4\sin x-3c_5\cos x-c_4\cos x-c_5\sin x=8e^{3x}+4\sin x$

$$\Leftrightarrow 3c_3e^{3x}+(3c_4-c_5)\sin x-(c_4+3c_5)\cos x=8e^{3x}+4\sin x$$

យើងបាន: $\begin{cases}3c_3=8\\ 3c_4-c_5=4\\ c_4-3c_5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c_3=\dfrac{8}{3}\\ c_4=\dfrac{6}{5}\\ c_5=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

$$\Rightarrow y_p = \frac{8}{3}xe^{3x}+\frac{6}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$$

ដោយ $y=y_c+y_p=c_1+c_2e^{3x}+\dfrac{8}{3}xe^{3x}+\dfrac{6}{5}\cos x-\dfrac{2}{5}\sin x$

ដូចនេះ $y=c_1+c_2e^{3x}+\dfrac{8}{3}xe^{3x}+\dfrac{6}{5}\cos x-\dfrac{2}{5}\sin x$

១.៥. បំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត

សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់២ $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់:

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \quad (1)$ ដែល $P(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ និង $f(x)=\dfrac{g(x)}{a_2(x)}$ ចំនុចសន្មតថា $P(x), Q(x)$ និង $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ I ។ យើងបានដឹងរួចហើយថាបើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាចំនួនថេរវាមិនពិបាកក្នុងការរក y_c ។ ទោះយ៉ាងណានៅពេលនេះយើងចាប់អារម្មណ៍ លើសមីការលំដាប់២មានមេគុណជាចំនួនថេរ យើងចាំថាវិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត អាចធ្វើទូទៅកម្ពលើសមីការលំដាប់ខ្ពស់ទៀត ហើយក៏អាចអនុវត្តនីបានចំពោះសមីការមានមេគុណជាអថេរ ។

ឧបមាថា y_1 និង y_2 បង្កើតបានសំណុំចម្លើយលើចន្លោះ I នៃសមីការ (1) :

$y_1''(x)+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0$ និង $y_2''(x)+P(x)y_2'+Q(x)y_2=0$ ។

ឥឡូវនេះយើងសួរថា: តើមានអនុគមន៍ពីរ u_1 និង u_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ ដោយធ្វើដេរីវេយើងបាន: $y_p'=u_1y_1'+y_1u_1'+u_2y_2'+y_2u_2' \quad (2)$

បើយើងចង់បាន u_1 និង u_2 ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \quad (3)$

នោះសមីការ (2) ក្លាយជា $y_p' = y_1'u_1 + y_2'u_2$ បន្ទាប់មកយើងបាន $y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2'$

ដូចនេះយើងបាន
$$\begin{aligned} y_p'' + Py_p' + Qy_p &= u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + Pu_1y_1' + Pu_2y_2' + Qu_1y_1 + Qu_2y_2 \\ &= u_1\left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right) + u_2\left(y_2'' + Py_2' + Qy_2\right) + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \end{aligned}$$

ព្រោះ $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$, $y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$

ដូចនេះយើងបាន $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \quad (4)$

សមីការ (3) និង (4) នាំឱ្យយើងបានប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែនៃសមីការសម្រាប់ការកំណត់ u_1' និង u_2' ។

ដូចនេះយើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \end{cases}$

ដោយប្រើវិធី $Cramer\,(Cramer\ rules)$ យើងបាន:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 f(x)}{w}, u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{w}$$ ដែល $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅ: $y = c_1y_c + c_2y_p$ ដែល $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ ដែល $u_1' = -\dfrac{y_2 f(x)}{w}$, $u_2' = \dfrac{y_1 f(x)}{w}$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ: $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ ។

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់គឺ $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$

យើងបាន: $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ ដោយយក $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ យើងគណនាតាម $Wronskian$

$W\left(e^{2x}, xe^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$ ដោយមេគុណនៃ $y'' = 1$ ដូចនេះយើងបាន:

$$u_1' = -\frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = -x^2 - x$$

$$u_2' = \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = x + 1$$

ដូចនេះ $u_1 = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$, $u_2 = \dfrac{x^2}{2} + x$ ហើយយើងបាន
$$\begin{aligned} y_p &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} \\ &= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{2x}$ ។

មេរៀនទី៣ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ភាពងាយស្រួលដូចដែលយើងបានដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ ។ ទូទៅពុំបានគ្របដណ្តប់លើគ្រប់សមីការដែលមានមេគុណជាអថេរ(Equation with variable coefficients)ទេ។ ជាការពិតយើងមិនគិតថាអាចបញ្ជាក់ពីដំណោះស្រាយសូម្បីតែសមីការលីនេអ៊ែដូចជា $y''-xy=0$ ក្នុងទម្រង់ ស៊ីនុស កូស៊ីនុសលោការិត អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍បឋម (Element function) ។ ទោះបីវាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការបញ្ជាក់ថា: $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ និង $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ មាន (Element solutions) $y=x$ និង $y=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ រៀងគ្នាជាការល្អបំផុតដែលយើង ជាទូទៅអាចគិតបានពីសមីការ ដែលមានចម្លើយជាស៊េរីមិនកំណត់មួយបែបនេះ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀតឥឡូវនេះ យើងនឹងយកមកពិនិត្យនូវប្រភេទសំខាន់ y នៃសមីការដែលមានមេគុណជាអថេរ ដែលចម្លើយទូទៅរបស់វាជានិច្ចកាលសរសេរក្នុងទម្រង់អនុគមន៍បឋម ។

១.១. សមីការកូស៊ីអឺលែ $\left(The\ Cauchy-Euler\ Equation\right)$

សមីការទាំងឡាយណាដែលមានទម្រង់: $a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=g\left(x\right)$ ដែល $a_n,a_{n-1},....a_1,a_0$ ជាចំនួនថេរត្រូវបានគេហៅថាសមីការកូស៊ីអឺលែ[១] ។ លក្ខណៈជាក់ស្តែងនៃសមីការបែបនេះគឺមានមេគុណជាពហុធា(The Polynomial Coefficients) x^k ដែលត្រូវនឹងលំដាប់ឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងទម្រង់ $\frac{d^kx}{dx^k}$ ដែល $k=1,2...,n$ ។ ប៉ុន្តែយើងចាប់អារម្មណ៍លើការដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែនលំដាប់២(Homogeneous 2nd order equation) $ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$ ។ ចំពោះដំណោះស្រាយសមីការលំដាប់ខ្ពស់យើងធ្វើតាមរបៀបស្រដៀងគ្នានឹងសមីការលំដាប់២ដែរ។ ប៉ុន្តែយើងក៏អាចដោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន (The nonhomogeneous equation) $ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=g\left(x\right)$ ។

តាមបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត (Variation of parameters)យើងបានកំណត់អនុគមន៍បំពេញ (The compement function) $y_c\left(x\right)$ ។

® ចំណាំ : មេគុណនៃ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ស្មើសូន្យនៅពេល $x=0$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងលទ្ធផលចំបងនៃទ្រឹស្តី (1.1) យើងអាចអនុវត្តន៍បានចំពោះសមីការកូស៊ីអឺលែយើងនឹងមានចំណាប់អារម្មណ៍ក្នុងការរកចម្លើយនៅលើចន្លោះ $0<x<+\infty$ ។ ចម្លើយនៅលើចន្លោះ $-\infty<x<0$ អាចទទួលបានដោយគ្រាន់តែជំនួស $t=-x$ ក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

១.១.១. វិធីដោះស្រាយ (The method of solution)

[១] សមីការនេះត្រូវបានដាក់ឈ្មោះបន្ទាប់ពីអ្នកគណិតវិទ្យាល្បីល្បាញពីរនាក់គឺលោក Leon hard Euler ជនជាតិស្វីស(1707-1783)និងលោក Augustin Lovis Cauchy ជនជាតិបារាំង (1739-1857)សមីការកូស៊ីអឺលែ ពេលខ្លះចាត់ទុកជាសមីការ Equidimensional(Equidimensional equation) ។

យើងសាកល្បងចម្លើយដែលមានទម្រង់ $y=x^m$ ដែល m នឹងត្រូវកំណត់ ។ ដេរីវេទី១និងទី២ គេបាន:

$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$ ។ ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្លាយជា:

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy &= ax^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+bx\cdot mx^{m-1}+cx^m \\ &= am(m-1)x^m+bmx^m+cx^m \\ &= x^m\left(am(m-1)+bm+c\right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y=x^m$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅពេលណាដែល m ជាចម្លើយនៃសមីការសម្គាល់:

$am(m-1)+bm+c=0 \quad (1)$ ឬ $am^2+(b-a)m+c=0$ មានបីករណីផ្សេងគ្នាដែលត្រូវយកមកពិនិត្យ គឺអាស្រ័យឬសនៃសមីការដឺក្រេទី២ជាចំនួនពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតមួយ ឬជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

- ករណីទី១: សន្មតថា m_1 និង m_2 ជាឬសចំនួនពិតនៃ (1) ហើយដែល $m_1\neq m_2$ នោះ $y_1=x^{m_1}$ និង $y_2=x^{m_2}$

ដូចនេះ យើងបានចម្លើយទូទៅ: $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការ $x^2\frac{d^2y}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$ ។

ចម្លើយ

យើងចង់ឱ្យមានការចងចាំសមីការ (1) ដូចនេះយើងសន្មតថា $y=x^m$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$ ដើម្បីឱ្យយើងយល់ពីប្រភពដើមនិងភាពខុសគ្នារវាងសមីការសម្គាល់ថ្មីនេះ និងសមីការសម្គាល់ដែលបានមកពីជំពូក ២។ ដោយធ្វើដេរីវេពីរដងរួចជំនួសចូលសមីការ យើងបាន :

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y &= x^2\cdot m(m-1)x^{n-2}-2x\cdot mx^{m-1}-4x^m \\ &= x^2\left[m(m-1)-2m-4\right] \\ &= x^m\left[m^2-3m-4\right]=0 \end{aligned}$$

បើ $m^2-3m-4=0\Leftrightarrow(m+1)(m-4)=0\Rightarrow m_1=-1,m_2=4$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $y=c_1x^{-1}+c_2x^4$

ករណីទី២: បើ $m_1=m_2$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយតែមួយគឺ $y_1=x^{m_1}$ ។ នៅពេលឬសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $am^2+(b-a)m+c=0$ ជាចំនួនពិតដូចគ្នានោះឌីសគ្រីមីណង់ $(b-a)^2-4ac=0$ យើងបានចម្លើយនៃសមីការ $m_1=-\frac{(b-a)}{2a}$ ឥឡូវនេះយើងអាចរកចម្លើយទី២ y_2 ដោយប្រើរូបមន្ត: $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ ក្នុងជំពូក ១ជាដំបូងយើងសរសេរសមីការកូស៊ីអឺលែក្នុងទម្រង់ $\frac{d^2y}{dx^2}+-\frac{b}{ax}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{c}{ax^2}y=0$ យើងកំណត់បាន $P(x)=\frac{b}{ax}$

ដូចនេះ
$$y_2(x)=x^{m_1}\int\frac{e^{-\int\left(\frac{b}{a}\right)dx}}{\left(x^{m_1}\right)^2}dx=x^{m_1}\int\frac{e^{-\left(\frac{b}{a}\right)\ln x}}{x^{2m_1}}dx=x^{m_1}\int\frac{e^{\ln x^{\left(-\frac{b}{a}\right)}}}{x^{2m_1}}dx$$
$$=x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{a}}\cdot x^{-2m_1}dx$$
$$=x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{a}}\cdot x^{\frac{b-a}{a}}dx$$
$$=x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}}dx=x^{m_1}\int\frac{1}{x}dx=x^{m_1}\ln x$$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃ y គឺ $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_1}\ln x$ (3)

ឧទាហរណ៏២: ដោះស្រាយសមីការ $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=0$ ។

ចម្លើយ

ដោយជំនួស $y=x^m$ យើងបាន $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$

យើងបានសមីការ $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=x^m\left[4m(m-1)+8m+1\right]$
$$=x^m\left(4m^2+4m+1\right)=0$$

បើ $4m^2+4m+1=0\Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^{-\frac{1}{2}}+c_2x^{-\frac{1}{2}}\ln x$ ។

ករណីទី៣: បើ m_1 និង m_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នានោះ $m_1=\alpha+i\beta,\ m_2=\alpha-i\beta\quad;\alpha,\beta$ ជាចំនួនពិត នោះចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^{\alpha+i\beta}+c_2x^{\alpha-i\beta}$ ។ ប៉ុន្តែដូចក្នុងករណីសមីការមានមេគុណជាចំនួនថេរដែរនៅពេលឬស សមីការសម្គាល់ ជាចំនួនកុំផ្លិចយើងចង់សរសេរចម្លើយក្នុងទម្រង់ជាចំនួនពិត យើងកត់សម្គាល់លើសមភាព:

$x^{i\beta}=\left(e^{\ln x}\right)^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}$ ដែលតាមរូបមន្តអឺលែ(Euler formula)គឺ ដូចគ្នានឹង: $x^{i\beta}=\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)$

ដូចនេះយើងបាន $y=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta}$
$$=x^{\alpha}\left[C_1x^{i\alpha}+C_2x^{-i\beta}\right]$$
$$=x^{\alpha}\left[C_1\{\cos+i\sin(\beta\ln x)\}+C_2\{\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\}\right]$$
$$=x^{\alpha}\left[(C_1+C_2)\cos(\beta\ln x)+(iC_1-iC_2)\sin(\beta\ln x)\right]$$

នៅលើចន្លោះ $0<x<+\infty$ យើងអាចបញ្ជាក់ថា $y_1=x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$ និង $y_2=x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$ ជាសំណុំចម្លើយ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលវានាំឱ្យបានចម្លើយទូទៅមួយគឺ $y=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)\right]$ (4)

ដែល $c_1=C_1+C_2, c_2=iC_1-iC_2$

ឧទាហរណ៏៣: ដោះស្រាយសមីការ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=0$ ។

ចម្លើយ

ដោយជំនួស $y = x^m$ និងដេរីវេទី១ និងទី២របស់វាទៅក្នុងសមីការយើងបាន:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y = x^m\left[m(m-1)+3m+3\right]$$
$$= x^m\left(m^2+2m+3\right)$$

ពេល $m^2+2m+3=0 \Rightarrow m_1=-1+i\sqrt{2}$, $m_2=-1-i\sqrt{2}$ ដែល $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{2}$ យើងជំនួសក្នុង(4)

យើងបានចម្លើយទូទៅមួយគឺ $y = x^{-1}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right]$ ។

ឧទាហរណ៍៤: ដោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$ ។

ចម្លើយ

ដោយជំនួស $y = x^m$ និងដេរីវេទី១ និងទី២របស់វាទៅក្នុងសមីការយើងបានសមីការសម្គាល់

$m(m-1)-3m+3=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3)=0 \Rightarrow m_1=1, m_2=3$

យើងបានចម្លើយទូទៅគឺ $y_c = c_1x+c_2x^3$ មុននឹងប្រើបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រយើងរំលឹករូបមន្ត: $u_1' = -\dfrac{y_2 f(x)}{\omega}$ និង $u_2' = -\dfrac{y_2 f(x)}{\omega}$ ដែលទទួលបានមកពីការ សន្និដ្ឋានថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានដាក់ជាទម្រង់ $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ ។ បើយើងចែកសមីការដែលឱ្យខាងលើនឹង x^2 យើងទទួលបាន:

$y''-\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=2x^2e^x$ ដែល $f(x)=2x^2e^x$ ដោយ $\omega=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^3-x^3=2x^3$

យើងបាន $u_1' = -\dfrac{x^3\left(2x^2e^x\right)}{2x^3}=-x^2e^x$ និង $u_2' = \dfrac{x\left(2x^2e^x\right)}{2x^3}=e^x$ យើងនឹងរកបាន u_1 និង u_2 ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលលើ u_1' និង u_2' រៀងគ្នាយើងបាន $u_1=\int -x^2e^xdx=-\int x^2e^xdx$

តាង $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$, $dv=e^xdx \Rightarrow v=e^x$

យើងបាន $u_1=-\left(x^2e^x-\int 2xe^xdx\right)=-x^2e^x+2\int xe^xdx$

តាង $t=x \Rightarrow dt=dx$, $dv=e^xdx \Rightarrow v=e^x$

យើងបាន$u_1=-x^2e^x+2\left[xe^x-\int e^xdx\right]=-x^2e^x+2xe^x-e^x$ ហើយ $u_2=\int e^xdx=e^x$

ដោយ $y_p=u_1y_1+u_2y_2=\left(-x^2e^x+2xe^x-e^x\right)x+e^xx^3=2x^2e^x-2xe^x$ ជាចុងក្រោយយើងបាន

$y=y_c+y_p=c_1x+c_2x^3+2x^2e^x-2xe^x$ ។

ចំណាំ: សមីការកូស៊ីអឺលែរអាចសម្រួលជាសមីការដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរដោយជំនួស $x=e^t$ ។

ឧទាហរណ៍៥: ដោះស្រាយសមីការ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=\ln x$ ។

ចម្លើយ

ដោយជំនួស $x=e^t$ ឬ $t=\ln x$ តាមរូបមន្តបណ្តាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

ដោយជំនួសចូលក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងលើយើងបាន:

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]-x\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)+y=\ln e^t$$

$$\Leftrightarrow\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+y=t$$

សមីការចុងក្រោយនេះជាសមីការដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរដែលមានសមីការសម្គាល់:

$m^2-2m+1=0\Leftrightarrow(m-1)^2=0$ ដោយប្រើវិធីមេគុណមិនកំណត់យើងបាន:$D^2t=0$

យើងបាន $D^2\left(D^2-2D+1\right)=0$

នោះសមីការសម្គាល់គឺ $m^2\left(m^2-2m+1\right)=0\Leftrightarrow m^2(m-1)^2=0\Rightarrow m_1=m_2=0$, $m_3=m_4=1$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1e^t+c_2te^t+c_3+c_4t$, $y_c=c_1e^t+c_2te^t$, $y_p=c_3+c_4t$

ឬ $y_p=A+Bt\Rightarrow y_p'=B\Rightarrow y_p''=0$ ជំនួសក្នុងសមីការ $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$

យើងបាន $y_p''-2y_p'+y_p=0-2B+A+Bt$

$$=-2B+A+Bt$$

$$\Rightarrow -2B+A+Bt=t$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2B+A=0\\ B=1\end{cases}\Leftrightarrow A=2B=2$$

$$\Rightarrow y_p=2+t$$

យើងបានចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1e^t+c_2te^t+2+t$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការចំពោះ $0<x<+\infty$ គឺ $y=c_1x+c_2x\ln x+2+\ln x$ ។

១.១.២. បញ្ហាផ្សេងទៀត(Miscellaneous Problems)

គេអាចដោះស្រាយសមីការ $A(ax+b)^2\frac{d^2y}{dx^2}+B(ax+b)\frac{dy}{dx}+cy=0$ (5) (ដែល A, B,C,a និង bជាចំនួនថេរ)ដោយគ្រាន់តែតាង $t=ax+b$ នោះយើងបានសមីការខាងដើមក្លាយជាសមីការកូស៊ីអឺលែរ តាមរូបមន្តបណ្តាក់យើងបាន: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot a=a\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+(0)\frac{dy}{dt}=a\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot a\right)=a^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

ជំនួស t និងដេរីវេខាងលើចូលក្នុងសមីការ(5) យើងបាន: $A\cdot t^2\cdot a^2\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+B\cdot t\cdot a\cdot\frac{dy}{dt}+cy=0$

$$A\cdot a^2\cdot t^2\frac{d^2y}{dt^2}+B\cdot a\cdot t\frac{dy}{dt}+cy=0$$

តាម(1) យើងបានសមីការសម្គាល់ $A\cdot a^2\cdot m^2+\left(Ba-Aa^2\right)m+c=0$ ។

ឧទាហរណ៍៦: ដោះស្រាយសមីការ $2(2x-1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4(2x-1)\dfrac{dy}{dx}-8=0$ ។

ចម្លើយ

តាង $t=2x-1$ តាមរូបមន្តបណ្តាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot 2=2\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+(0)\frac{dy}{dt}=2\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\cdot 2\right)=4\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

ជំនួស t និងដេរីវេខាងលើចូលក្នុងសមីការដែលឱ្យយើងបាន:

$$2t^2\cdot 4\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+4\cdot t\cdot 2\cdot\frac{dy}{dt}-8=0$$

ជំនួស $y=t^m$

$$8t^2\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+8t\frac{dy}{dt}-8=0$$

និងដេរីវេទី១ទី២របស់វាយើងបានសមីការសម្គាល់

$$8m^2+(8-8)m-8\Leftrightarrow m^2-1=0\Rightarrow m_1=1,m_2=-1$$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=c_1t+c_2t^{-1}=c_1(2x-1)+c_2(2x-1)^{-1}$ ។

ឧទាហរណ៍៧: ដោះស្រាយសមីការ $(1-x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(1-x)\dfrac{dy}{dx}-4=0$ ។

ចម្លើយ

តាង $t=1-x$ តាមរូបមន្តបណ្តាក់យើងបាន:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}(-1)=-\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)+(0)\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}(-1)=\frac{d^2y}{dt^2}$$

ជំនួស t និង ដេរីវេខាងលើចូលក្នុងសមីការដែលឱ្យយើងបាន $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}-2t\dfrac{dy}{dt}-4=0$ ជំនួស $y=t^m$

និងដេរីវេទី១ទី២របស់វាយើងបានសមីការសម្គាល់:

$$m^2+(-2-1)m-4=0\Leftrightarrow m^2-3m-4=0$$

$$\Rightarrow m_1=-1\ \ ,m_2=4$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=c_1t^{-1}+c_2t^4=c_1(1-x)^{-1}+c_2(1-x)^4$

១.២. ចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណ (Power series solution)

១.២.១. ចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងចង់ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយយកចម្លើយជាទម្រង់ស៊េរីស្វ័យគុណ ។ ដើម្បីឃើញថាការដោះស្រាយតាមមេរៀននេះមានភាពត្រឹមត្រូវយើងយកសមីការលីនេអ៊ែលំដាប់១ យើងរកចម្លើយជាអនុគមន៍ធម្មតា រួចរកតាមមេរៀនថ្មីដោយសន្មតថាវាមានចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់គ្នាដោយប្រើវិធីរបស់ *Taylor* និង Maclaurin.

យើងដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល: $\frac{dy}{dx}-2xy=0$ (1) ដោយអនុគមន៍ $P(x)=-2x$ យើងបានកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int -2xdx}=e^{-x^2}$ យើងបានសមីការក្លាយជា

$e^{-x^2}\frac{dy}{dx}-2xe^{-x^2}y=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right)=0$ ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរយើងបាន

$e^{-x^2}y=c\Rightarrow y=ce^{x^2}$

ដូចនេះ $y=ce^{x^2}$ ជាឫសនៃសមីការ (1) ។

តាមស៊េរី Taylor និង Maclaurin យើងបាន $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (2) យើងក៏អាចសរសេរចម្លើយនៃសមីការ (1) ជាទម្រង់ស៊េរីស្វ័យគុណ: $y=e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ (3) ។

ស៊េរី (2) និង (3) ជាស៊េរីរួមលើគ្រប់តម្លៃ x យើងអាចសរសេរជាស៊េរីទូទៅ $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

យើងសាកល្បងយកស៊េរីនេះនិងដេរីវេរបស់វាជំនួសរួចរកតម្លៃនៃមេគុណ c_n តាមវិធីសាស្ត្រ Attack (The method of Attack) ដែលស្រដៀងគ្នានឹងវិធីមេគុណមិនកំណត់ដែរ ។

យើងមាន $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ (4)

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$ (តួទី១ ដែលត្រូវគ្នានឹង $n=0$ មានតម្លៃស្មើសូន្យ) ដោយយក y និង $\frac{dy}{dx}$ ខាងលើជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន: $\frac{dy}{dx}-2xy=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+1}$ (5)

យើងចង់បូកស៊េរីទាំងពីរបញ្ចូលគ្នា ដោយបូកតួដែលមានស្វ័យគុណដូចគ្នាយើងតម្រូវស្វ័យគុណនៃ x ឱ្យត្រូវគ្នា។

យើងសរសេរ (5) ជា $\frac{dy}{dx}-2xy=1\cdot c_1x^0+\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+1}$ (6)

យើងតាង $k=n-1$ ក្នុងស៊េរីទី១និង $k=n+1$ ក្នុងស៊េរីទី២[២] ។ អង្គខាងស្តាំនៃ (6) ពេលនេះទៅជា:

$c_1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2c_{k-1}x^k$ ដោយបូកតាមតួនីមួយៗនៃស៊េរីយើងបាន:

២ តួនីមួយៗនៃផលបូកជាតួដែលមានអថេរប៉ាន់ស្មាន ។ ជាការពិត k=n-1 ជាករណីមួយហើយ k=n+1 ជាករណីមួយផ្សេងទៀតវានឹងមិនមានការ ភ័ន្តច្រឡំទេបើយើងគិតថា តម្លៃតួនៃផល បូកទេដែលសំខាន់ ។ ក្នុងករណីទាំងពីរ k=1,2,3...បើ n=2,3,4...(ចំពោះ k=n-1) និង n=0,1,2...(ចំពោះ k=n+1) ។

$\frac{dy}{dx}-2xy=c_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)c_{k+1}-2c_{k-1}\right]x^k=0 \qquad (7)$ ដើម្បីឱ្យ(7) ស្មើសូន្យលុះត្រាតែមេគុណនៃ x ស្មើសូន្យ ។$c_1=0$ និង $(k+1)c_{k+1}-2c_{k-1}=0$ ដែល $k=1,2,3,.....$ (8) ។ ប្រើទំនាក់ទំនងកំនើន(Recurrence Relation)ដែលកំណត់បានc_k ដោយ $k+1\neq 0$ យើងបាន: $c_{k+1}=\frac{2c_{k-1}}{k+1} \qquad (9)$

ជំនួសតាមតម្លៃ k បន្តបន្ទាប់យើងបាន:

$$k=1\Rightarrow c_2=c_0$$
$$k=2\Rightarrow c_3=\frac{2}{3}c_1=0$$
$$k=3\Rightarrow c_4=\frac{2}{4}c_2=\frac{1}{2}c_0=\frac{1}{2!}c_0$$
$$k=4\Rightarrow c_5=\frac{2}{5}c_3=0$$
$$k=5\Rightarrow c_6=\frac{2}{6}c_4=\frac{1}{3\cdot 2!}c_0=\frac{1}{3!}c_0$$
$$k=6\Rightarrow c_7=\frac{2}{7}c_5=0$$
$$k=7\Rightarrow c_8=\frac{2}{8}c_6=\frac{1}{4\cdot 3!}c_0=\frac{1}{4!}c_0$$

យើងធ្វើរបៀបនេះបន្តបន្ទាប់យើងបាន: $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+.....$

$$=c_0+0+c_0x^2+0+\frac{1}{2!}c_0x^4+0+\frac{1}{3!}c_0x^6+0+...$$
$$=c_0\left[x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+...\right]$$
$$=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

ដោយយក$c_0=c$ យើងបានចម្លើយនៃ(1) គឺ $y=c\,e^{x^2}$ ។

ដូចនេះយើងឃើញថាយើងអាចរកចម្លើយនៃសមីការនេះកក្នុងទម្រង់ស៊េរីស្វ័យគុណ ។ ចំពោះសមីការលំដាប់២ យើងអាចធ្វើរបៀបដូចគ្នានេះដែរ ។

ឧទាហរណ៍៨: ដោះស្រាយសមីការ $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-2y=0$ ។

ចម្លើយ

សន្មត $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ ជាចម្លើយនៃសមីការ ។ យើងធ្វើដេរីវេទី១និងទី២យើងបាន:

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$ (តួដំបូងដែលត្រូវ $n=0,n=1$ ស្មើសូន្យ) ។ជំនួស $y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ ក្នុងសមីការដើមយើងបាន:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-2y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= 2c_2x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - 2c_0x^0 - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \\ &= 2c_2 - 2c_0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_n x^n\end{aligned}$$

ដោយយក $k=n-2$ និង យក $k=n$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-2y &= 2c_2-2c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+1}x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)c_k x^k \\ &= 2c_2-2c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}-2(k+1)c_k\right]x^k = 0\end{aligned}$$

លុះត្រាតែ $2c_2-2c_0=0 \Leftrightarrow (k+2)(k+1)c_{k+2}-2(k+1)c_k=0$, $c_2=c_0$ យើងបាន: $c_{k+2}=\dfrac{2c_k}{k+2}$ យើង ជំនួសតាមតម្លៃk បន្តបន្ទាប់គ្នាយើងបាន:$k=1 \Rightarrow c_3=\dfrac{2}{3}c_1$

$$k=2 \Rightarrow c_4=\frac{2}{4}c_2=\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{2}c_0=\frac{1}{2!}c_0$$

$$k=3 \Rightarrow c_5=\frac{2}{5}c_3=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}c_1=\frac{2^2}{5\cdot 3}c_1=\frac{2^2}{3\cdot 5}c_1$$

$$k=4 \Rightarrow c_6=\frac{2}{6}c_4=\frac{1}{3}c_4=\frac{1}{3\cdot 2!}c_4=\frac{1}{3!}c_0$$

$$k=5 \Rightarrow c_7=\frac{2}{7}c_5=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}c_1=\frac{2^3}{7\cdot 5\cdot 3}c_1=\frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}c_1$$

$$k=6 \Rightarrow c_8=\frac{2}{8}c_6=\frac{1}{4}c_6=\frac{1}{4\cdot 3!}c_0=\frac{1}{4!}c_0$$

$$k=7 \Rightarrow c_9=\frac{2}{9}c_7=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}c_1=\frac{2^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}c_1$$

យើងធ្វើរបៀបនេះបន្តបន្ទាប់យើងបាន:

$$\begin{aligned}y &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7+c_8x^8+c_9x^9+\ldots \\ &= c_0+c_1x+c_0x^2+\frac{2}{3}c_1x^3+\frac{1}{2!}c_0x^4+\frac{2^2}{3\cdot 5}c_1x^5+\frac{1}{3!}c_0x^6+\frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}c_1x^7+\frac{1}{4!}c_0x^8+\frac{2^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}c_1x^9+\ldots \\ &= c_0\left(1+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\ldots\right)+c_1\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2^2}{3\cdot 5}x^5+\frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\frac{2^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^9+\ldots\right) \\ \Rightarrow y &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}+c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1)}x^{2n+1}\end{aligned}$$

១.២.២. ចម្លើយជុំវិញចំណុច

-ចំណុច Ordinary និង Singular

សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ: $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad (10)$ យើងអាចសរសេរជារាង:

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (12)$ ដែល $P(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ យើងបង្កើតនិយមន័យមួយដូចខាងក្រោមៈ

និយមន័យ ១. (Difinition)

ចំណុច $x=x_0$ ហៅថាចំណុច Ordinary (ordinary point) នៃសមីការ (10) បើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ Analytic ត្រង់ x_0 គឺ $P(x)$ និង $Q(x)$ មានស៊េរីស្វ័យគុណនៃ $(x-x_0)$ ដែលមានកាំនៃភាពរួម R ។
ចំនុចដែលមិន មែនជាចំណុច Ordinary ហៅថាចំណុច Singular (Singular Point) នៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍១: គ្រប់តម្លៃ x ជាចំនុច Ordinary នៃសមីការ $y''+e^x y'+\sin x\, y=0$ ។ ចំពោះគ្រប់ x នោះ e^x និង $\sin x$ សុទ្ធតែមានស៊េរីស្វ័យគុណ ។ ជាពិសេសយើងឃើញថា $x=0$ ជាចំនុច Ordinary ព្រោះ
$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$ ហើយ $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$ រួមគ្រប់តម្លៃនៃ x ។

ឧទាហរណ៍២: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy''+\sin xy=0$ ។មានចំនុច Ordinary មួយត្រង់ $x=0$ ព្រោះគេអាចបង្ហាញ $Q(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ មានពន្លាតស៊េរីស្វ័យគុណ ។ $Q(x)=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\dfrac{x^6}{7!}+\ldots..$ រួមគ្រប់តម្លៃ x ។

ឧទាហរណ៍៣: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+(\ln x)y=0$ មានចំនុច Singular មួយត្រង់ $x=0$ ព្រោះ $Q(x)=\ln x$ គ្មានស៊េរីស្វ័យគុណនៃ ទេ ។

ឧទាហរណ៍៤: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ បើ $a_2(x),a_1(x),a_0(x)$ ជាពហុធាគ្មានកត្តារួម $(Common\ \ Factor)$ នោះចំនុច $x=x_0$ ជាៈ

១. ចំនុច Ordinary បើ $a_2(x)\neq 0$

២. ចំនុច Singular បើ $a_2(x)=0$

ទ្រឹស្តីបទៈ មានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \quad (12)$

បើ $x=x_0$ ជាចំនុច $Ordinary$ នៃសមីការ (12) នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការជាស៊េរីស្វ័យគុណចំពោះ x_0 ។
$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ដែល $y_1(x)$ និង $y_2(x)$ ជាអនុគមន៍មិនលីនេអ៊ែរហើយ c_1,c_2 ជាចំនួនថេរដែលអាចជ្រើសរើសបាន ។ស៊េរីនេះរួមយ៉ាងហោចណាស់ចំពោះ $|x-x_0|<R$ ដែល R ជាកាំនៃភាពរួម ។
តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើចម្លើយទូទៅ: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$
តាមការសន្មត់ $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ និង ប្រើទំនាក់ទំនងកំនើនយើងនឹងទទួលបាន $c_1=c_0,c_2=c_1$ ដែល c_0,c_1 ជាចំនួនថេរអាចជ្រើសរើសបាន ។

វិធីសាស្ត្រក្នុងការរកចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណជុំវិញចំនុច $Ordinary$ $x=x_0$ មានសមីការ
$a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \quad (13)$, $a_2(x),a_1(x),a_0(x)$ ជាពហុធា ។

១. សម្រួលកត្តារួមនៃពហុធា $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ បើមានរួចសន្មតចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណមានទម្រង់

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad (14)$$ [៣] ។

២. រកដេរីវេទី១និងទី២នៃ $y(x)$ រួចជំនួសក្នុងសមីការ(13)

៣. បង្រួមស៊េរីស្វ័យគុណបញ្ចូលគ្នាដោយប្តូរតួនៃផលបូកស៊េរីតម្រូវគ្នា (ស៊េរីស្វ័យគុណចាប់ ផ្តើមដោយតួដំបូងដែលស្វ័យគុណនៃ x មានតម្លៃស្មើគ្នា) ។

៤. កំណត់តម្លៃមេគុណនៃស៊េរីចុងក្រោយស្មើសូន្យ ។ យើងបានទំនាក់ទំនងកំនើនមេគុណដំបូងនិងមេគុណបន្ទាប់នៃស៊េរី(14) ។

៥. រកគ្រប់មេគុណ c_n ដែលជាប់ទាក់ទងមេគុណ c_0, c_1 ដូចនេះ គេអាចសរសេរស៊េរីស្វ័យគុណ(14) ជាទម្រង់

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ ដែល $y_1(x)$ និង $y_2(x)$ ជាស៊េរីស្វ័យគុណពីរមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា។

កាំនៃភាពរួមរបស់ស៊េរី $y_1(x)$ និង $y_2(x)$ ត្រូវធំជាងឬស្មើកាំនៃភាពរួមរបស់ស៊េរី(14) ។

ឧទាហរណ៍១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ $y''-2xy=0$ ។

ចម្លើយ

យើងឃើញថា $x=x_0$ ជាចំនុច $Ordinary$ មួយនៃសមីការ។ ដោយគ្មានចំនុច Singular តាមទ្រឹស្តីបទ២.១ មានចម្លើយពីរដែលមានទម្រង់ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ រួមក្នុងចន្លោះ $|x|<\infty$ ជាបន្តបន្ទាប់យើងសរសេរ:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

ដែលតួទីមួយៗនៃស៊េរីនីមួយៗត្រូវនឹង $n=0$ និង $n=1$ រៀងគ្នាស្មើសូន្យដូចនេះយើងបាន:

$$y''-2xy=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1}$$

$$=2\cdot 1\cdot c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1}$$

យើងតាង $k=n-2$ ក្នុងស៊េរីទី១និង $k=n+1$ ក្នុងស៊េរីទី២យើងបាន:

$$y''-2xy=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k$$

$$=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}-2c_{k-1}\right]x^k=0$$

បើ $2c_2=0$ និង$(k+2)(k+1)c_{k+2}-2c_{k-1}=0$ តាមសមីការនេះយើងបាន:

$c_{k+2}=\dfrac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$, $k=1,2,3,......$ តាមតម្លៃ k យើងបាន:

$$k=1 \Rightarrow c_3=\frac{2c_0}{3\cdot 2}$$

$$k=2 \Rightarrow c_4=\frac{2c_1}{4\cdot 3}$$

$$k=3 \Rightarrow c_5=\frac{2c_2}{5\cdot 4}$$

៣ ដើម្បីភាពងាយស្រួលយើងតាង $X=(x-x_0)$យើងមានស៊េរីស្វ័យគុណ $Y(x)=c_nX^n$

$$k=4 \Rightarrow c_6 = \frac{2c_3}{6\cdot 5} = \frac{2^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0$$
$$k=5 \Rightarrow c_7 = \frac{2c_4}{7\cdot 6} = \frac{2^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1$$
$$k=6 \Rightarrow c_8 = \frac{2c_5}{8\cdot 7} = 0$$
$$k=7 \Rightarrow c_9 = \frac{2c_6}{9\cdot 8} = \frac{2^3}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0$$
$$k=8 \Rightarrow c_{10} = \frac{2c_7}{10\cdot 9} = \frac{2^3}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1$$
$$k=9 \Rightarrow c_{11} = \frac{2c_8}{11\cdot 10} = 0$$

និងបន្តបន្ទាប់វាធ្វើឱ្យយើងឃើញច្បាស់ថា c_0 និង c_1 ជាចំនួនដែលអាចជ្រើសរើសបានឥឡូវនេះ

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + ...$$
$$= c_0 + c_1x + \frac{2}{3\cdot 2}c_0x^3 + \frac{2}{4\cdot 3}c_1x^4 + \frac{2^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0x^6 + \frac{2^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1x^7 + ...$$
$$= c_0\left(1 + \frac{2}{3\cdot 2}x^3 + \frac{2^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{2^3}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + ...\right) + c_1\left(x + \frac{2}{4\cdot 3}x^4 + \frac{2^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + ...\right)$$

ទោះបីជាទម្រង់នៃមេគុណនៃឧទាហរណ៍ខាងលើនេះមានលក្ខណៈច្បាស់លាស់ក៏ដោយក៏ប៉ុន្តែពេលខ្លះវាមានប្រយោជន៍ក្នុងការសរសេរចម្លើយក្នុងទម្រង់ផលបូក ។ ដោយប្រើលក្ខណៈនៃហ្វាក់តូរីយ៉ែលយើងអាចសរសេរ

$$y_1(x) = c_0\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\left[1\cdot 4\cdot 7\cdot ...(3k-2)\right]}{(3k)!}x^{3k}\right\}$$
$$y_2(x) = c_1\left\{x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\left[2\cdot 5\cdot 8\cdot ...(3k-1)\right]}{(3k+1)!}x^{3k+1}\right\}$$

ក្នុងទម្រង់នេះតួផលធៀបអាចត្រូវបានបង្ហាញស៊េរីនីមួយៗរួមចំពោះ $|x| < \infty$ ។

ឧទាហរណ៍២: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(x^2+1\right)y'' + xy' - y = 0$ ។

ចម្លើយ

ដោយចំនុច *Ordinary* គឺ $x = \pm 1$ នោះចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណ និង រួមយ៉ាងហោចណាស់ចំពោះ $|x| < 1$ ។ ការសន្មតថា $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ធ្វើដេរីវេនិងជំនួសក្នុងសមីការយើងបាន:

$$\left(x^2+1\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$=2c_2x^0 - c_0x^0 + 6c_3x + c_1x - c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

យក $k=n$, $k=n-2$ យើងបាន:

$$=2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k\right]x^k$$

$$=2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(k+1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}\right]x^k = 0$$

បើ $c_3=0$, $2c_2-c_0=0 \Rightarrow c_2=\frac{1}{2}c_0$ នោះយើងបាន:

$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} \Leftrightarrow c_{k+2}=\frac{1-k}{k+2}c_k$, $k=2,3,4$ ដោយជំនួសជាបន្តបន្ទាប់តាមតម្លៃ k

យើងបាន: $k=2 \Rightarrow c_4=-\frac{1}{4}c_2=-\frac{1}{2\cdot 4}c_0=-\frac{1}{2^2\cdot 2!}c_0$

$$k=3 \Rightarrow c_5=-\frac{2}{5}c_3=0$$

$$k=4 \Rightarrow c_6=-\frac{3}{6}c_4=-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0=-\frac{1}{2^3\cdot 3!}c_0$$

$$k=5 \Rightarrow c_7=-\frac{4}{7}c_5=0$$

$$k=6 \Rightarrow c_8=-\frac{5}{8}c_6=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}c_0$$

$$k=7 \Rightarrow c_9=-\frac{6}{9}c_7=0$$

$$k=8 \Rightarrow c_{10}=-\frac{7}{10}c_8=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5\cdot 5!}c_0$$

ធ្វើបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់យើងបាន: $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+......$

$$=c_1x+c_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^8+...\right)$$

ដូចនេះចម្លើយគឺ $y_1(x)=c_0\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2n-3)}{2^n\ n!}\cdot x^{2n}\right]$, $|x|<1$

$$y_2(x)=c_1x$$

ឧទាហរណ៍៣: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+(\cos x)y=0$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$ យើងឃើញថា $x=0$ ជាចំនុច *Ordinary* នោះសន្មត់ថា $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

យើងបាន

$$y''+(\cos x)y=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$=\left(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+...+\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)\left(c_0+c_1x+c_2x^2+...\right)$$

$$=2c_2+c_0+\left(6c_3x^2+c_1\right)x+\left(12c_4+c_2-\frac{1}{2}c_0\right)x^2+\left(20c_5+c_3-\frac{1}{2}c_1\right)x^3+\left(30c_6+c_4-\frac{1}{2}c_2\right)x^4+...$$

បើ $2c_2+c_0=0\Rightarrow c_2=-\frac{1}{2}c_0 \quad (a)$

$$6c_3+c_1=0\Rightarrow c_3=-\frac{1}{6}c_1 \quad (b)$$

$$12c_4+c_2-\frac{1}{2}c_0=0\Rightarrow c_4=\frac{c_0-2c_2}{24} \quad (c)$$

$$20c_5+c_3-\frac{1}{2}c_1=0\Rightarrow c_5=\frac{c_1-2c_3}{40} \quad (d)$$

$$30c_6+c_4-\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{24}c_0=0\Rightarrow c_6=\frac{-c_0+12c_2-24c_4}{720} \quad (e)$$

យក (a) ជំនួសក្នុង (c) យើងបាន: $c_4=\frac{c_0+c_0}{24}=\frac{c_0}{12} \quad (f)$

យក (b) ជំនួសក្នុង (d) យើងបាន: $c_5=\frac{3c_1+c_1}{120}=\frac{c_1}{30}$

យក (a) និង (f) ជំនួសក្នុង (e) យើងបាន: $c_6=\frac{-c_0-c_0-2c_0}{720}=\frac{-c_0}{180}$ ធ្វើរបៀបនេះជាបន្តបន្ទាប់យើងបាន:

$$y_1(x)=c_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{180}x^6+...\right)$$

$$y_2(x)=c_1\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{30}x^5-...\right)$$

ស៊េរីទាំងពីរនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

១.៣. ដំណោះស្រាយជុំវិញចំនុច Singular (Solution around Singular Pionts)

១.៣.១. ចំនុច Regular Singular និង Irregular Singular

នៅចំនុច $(3.2.2)$ យើងដោះស្រាយសមីការ: $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad (1)$ ជុំវិញចំណុច *Ordinary* $x=x_0$ ។ ពេល $x=x_0$ ជាចំណុច *Singular* យើងមិនអាចរកបានចម្លើយទម្រង់ $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ ទេ ។ប៉ុន្តែយើងអាចរកចម្លើយទម្រង់ $y=(x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \Leftrightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$, r ជាចំនួនដែលត្រូវរក ។

ក. ចំណុច Regular Singular និង Irregular Singular

យើងអាចចែកចំណុច *Singular* ជាពីរគឺចំណុច Regular Singular និង Irregular Singular ។

យើងអាចសរសេរសមីការ (1) ទៅជា: $y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (2)$ ដែល $P(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ និង

$Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ ។

និយមន័យ: $x=x_0$ ជាចំណុច $Singular$ នៃសមីការ (1) ហៅថាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;\;Singular$ កាលណា $(x-x_0)P(x)$ និង $(x-x_0)^2Q(x)$ ជាអនុគមន៍ $Analytic$ ត្រង់ x_0 មានន័យថា $(x-x_0)P(x)$ និង $(x-x_0)^2Q(x)$

មានស៊េរីស្វ័យគុណ $(x-x_0)$ ដែលមានកាំនៃភាពរួម ។ $(x-x_0)$ ចំណុចមិនមែន $\mathrm{Re}\,gular\;\;Singular$ គេហៅថាចំណុច $Irregular\;\;Singular$ នៃសមីការ ។

ខ. មេគុណជាពហុធា $(Poloynomial\;\;Coefficiens)$

នៅក្នុងសមីការ (1) បើ $a_0(x),a_1(x),a_2(x)$ ជាពហុធា និង $x-x_0$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;\;Singular$ កាលណា $P(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ មានយ៉ាងច្រើនបំផុតស្វ័យគុណទី១នៃ $(x-x_0)$ នៅភាគបែង ។ ហើយ $Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ មានយ៉ាងច្រើនបំផុតស្វ័យគុណទី២នៃ $(x-x_0)$ នៅភាគបែង ។

ឧទាហរណ៍១: ចំណុច $x=2$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;\;Singular$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(x-2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x^2-4)x\dfrac{dy}{dx}+(x+1)y=0$ ព្រោះ $P(x)=\dfrac{(x^2-4)x}{(x-2)^2}=\dfrac{(x+2)x}{x-2}$

ភាគបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី១នៃ $(x-2)$ និង $Q(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ ភាគបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី២នៃ $(x-2)$ ។

ឧទាហរណ៍២: ចំណុច $x=0$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;\;Singular$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\dfrac{dy}{dx}+(x^2+1)y=0$ ព្រោះ $P(x)=\dfrac{x+1}{x}$ ភាគបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី១នៃ x និង $Q(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ ភាគបែងមានស្វ័យគុណតិចជាងដឺក្រេទី២នៃ x ។

ឧទាហរណ៍៣: ចំណុច $x=0$ និង $x=-1$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;Singular$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$x^2(x-2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x(x-2)\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ ព្រោះ $P(x)=\dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)}=\dfrac{x-2}{x(x+1)}$

ភាគបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី១នៃ x និង $x-2$ ហើយ $Q(x)=\dfrac{2}{x^2(x+1)}$ ភាគបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី២នៃ x និង $x+1$ ។

ឧទាហរណ៍៤: ចំណុច $x=\pm3i$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\;Singular$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(x^2+9)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x^2\dfrac{dy}{dx}+(x+2)y=0$ ព្រោះ $P(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}=\dfrac{x^2}{(x-3i)(x+3i)}$

ភាកបែងមានស្វ័យគុណដឺក្រេទី១នៃ $x\pm3i$ ហើយ $Q(x)=\dfrac{x+2}{(x+3i)(x-3i)}$ ភាគបែងមានស្វ័យគុណតិចជាងដឺក្រេទី២នៃ $x\pm3i$ ។

១.៣.២. វិធីសាស្ត្ររបស់ *Frobenius* (*The method of Frobenius*)

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ (1) ចំពោះចំណុច Regular Singular យើងអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទរបស់លោក *Geog Frobenius* ។

ទ្រឹស្តីបទ: បើ $x=x_0$ ជាចំណុច Regular Singular នៃសមីការ (1) នោះសមីការមាន ចម្លើយជាស៊េរីស្វ័យគុណ ទម្រង់ $y=\left(x-x_0\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$, r ជាចំនួនថេរដែលត្រូវរក ។ ស៊េរីរួមយ៉ាងហោច ណាស់នៅចន្លោះ $0<x-x_0<R^+$ ។

- បើចំណុច Regular Singular នៅត្រង់ x_0 យើងប្តូរអថេរ $X=x-x_0$ ដើម្បីប្តូរចំណុចនេះទៅរកគល់នៃអ័ក្ស $x'ox$ ។

ការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រ *Frobenius* ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \quad (3)$

១. បញ្ជាក់ថា 0 ជាចំណុច Regular Singular នៃសមីការ (3) ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទខាងលើកំណត់អប្បបរមានៃកាំនៃភាពរួមរបស់ស៊េរីចម្លើយ[៤] ។

២. ជំនួស $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$, $\dfrac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$ និង $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$ ទៅក្នុងសមីការ (3) និងទំនាក់ទំនងកំនើននៃមេគុណយើងទទួលបានសមីការ *Indicial* (*Indicial Equation*) កាលណាយើងឱ្យមេគុណនៃស្វ័យគុណនីមួយៗនៃ x ស្មើសូន្យ ។ ដោះស្រាយសមីការនេះទទួលបាន r_1 និង r_2 ដែល $r_1\geq r_2$ ។

៣. ប្រើតម្លៃ r_1 ក្នុងទំនាក់ទំនងកំនើនដើម្បីរកតម្លៃទូទៅនៃមេគុណ c_n រួចទទួលបាន $y_1(x)=x^n\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

៤. ចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរទី២ $y_2(x)$ ទទួលបានដោយ:

ករណីទី១ : បើ $r_1-r_2\notin N$ (មិនមែនចំនួនគត់) សន្មតថាចម្លើយទី២ មានទម្រង់ $y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ រួចធ្វើជំហានទី២និងទី៣ដែរដើម្បីរកតម្លៃទូទៅនៃមេគុណ b_n នៃ $y_2(x)$ ។

ករណីទី២ : បើ $r_1=r_2$ សន្មតថាចម្លើយទី២មានទម្រង់ $y_2(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+(\ln x)y_1(x)$ រួចធ្វើដូចជំហានទី២និងទី៣ ដើម្បីកំណត់តម្លៃទូទៅនៃមេគុណ b_n នៃ $y_2(x)$ ។

ករណីទី៣ : បើ $r_1-r_2=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ សន្មតចម្លើយទី២មានទម្រង់: $y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+C(\ln x)y_1(x)$ រួចធ្វើដូចជំហានទី២និងទី៣ដែរដើម្បីកំណត់តម្លៃទូទៅនៃមេគុណ b_n និង $y_2(x)$ ។ វាអាស្រ័យលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ចំនួនថេរ C អាចសូន្យឬមិនសូន្យ ។

[៤] បើមានតែ x_0 ជាចំណុច Regular Singular ត្រូវតាង $X=x-x_0$ រួចធ្វើដូចគ្នា ។

ចំណាំ : ចំពោះករណីទាំងបីយើងអាចរកចម្លើយទី២ដោយប្រើរូបមន្ត $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

ដោយសម្រួលសមីការ(3) ទៅជា $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១: រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $xy'' + y' - 4y = 0$ ជាស៊េរីស្វ័យគុណចំពោះ $x = 0 \quad (1)$ ។

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថា $x = 0$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\ \ Singular$ នោះ $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}
xy'' + y' - 4y &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= x^r\left[r^2 c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] \ \ ,\ k = n-1\ ,\ k = n \\
&= x^r\left\{r^2 c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)^2 c_{k+1} - 4c_k\right]x^k\right\}
\end{aligned}$$

បើ $r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0\ ,(k+r+1)^2 c_{k+1} - 4c_k = 0\ ,\ k = 0,1,2,3\ldots \quad (2)$

ដោយ $r = 0$ យើងបានទំនាក់ទំនងកំនើន $c_{k+1} = \frac{4c_k}{(k+1)^2}c \quad ,\ k = 0,1,2,3\ldots$ ជំនួសតាម k

យើងបាន: $y_1 = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2} x^n \quad ,\ |x| < \infty \quad (3)$

ដោយ $\qquad y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad (4)$

$$y_2' = \frac{y_1}{x} + y_1' \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n x^{n-1}$$

$$y_2'' = -\frac{y_1}{x^2} + \frac{2y_1'}{x} + y_1'' \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow xy'' + y' - 4y &= \ln x\left[xy_1'' + y_1' - 4y_1\right] + 2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \\
&= 2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (5)\ \ ,\ (xy_1'' + y_1' - 4y = 0)
\end{aligned}$$

ដោយ $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2} x^n$ យើងបាន (5) ទៅជា:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n n}{(n!)^2}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n^2 b_n x^{n-1}-4\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$$

$$=8+b_1+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n n}{(n!)^2}x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n^2 b_n x^{n-1}-4\sum_{n=2}^{\infty}b_n x^n \quad , \quad k=n-1\,,\,k=n$$

$$=8+b_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot 4^{k+1}(k+1)}{\left[(k+1)!\right]^2}+(k+1)^2 b_{k+1}-4b_k\right]x^k \qquad (6)$$

ដោយ(6) ស្មើសូន្យយើងបាន $b_1=-8$ និង $b_{k+1}=\frac{4}{(k+1)^2}b_k-\frac{2\cdot 4^{k+1}}{(k+1)\left[(k+1)!\right]^2} \quad , k=1,2,3... \quad (7)$

តាមតម្លៃ k យើងបាន: $b_2=b_1-4=-12$

$$b_3=\frac{4}{9}b_2-\frac{32}{27}=-\frac{176}{27}$$

នោះ $y_2=y_1\ln x-8x-12x^2-\frac{176}{27}x^3-...$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y_2=c_1y_1(x)+c_2\left[y_1(x)\ln x+\left(-8x-10x^2-\frac{176}{27}x^3-...\right)\right] \quad (8)$

ឧទាហរណ៍២: រកចម្លើយនៃសមីការ $x\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)\frac{dy}{dx}-2y=0$ ជាស៊េរីស្វ័យគុណចំពោះ $x=0$ ។ ដោយ $x=0$ ជាចំណុច $\mathrm{Re}\,gular\ Singular$ នៃសមីការ ។ នោះយើងសន្មតថា $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$ យើងបាន:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)\frac{dy}{dx}-2y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-2)c_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)c_n x^{n+r}$$

$$=x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-2)c_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)c_n x^n\right]$$

$$=x^r\left[r(r-2)c_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-2)c_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)c_n x^n\right]\,,\ k=n-1,k=n$$

$$=x^r\left[r(r-2)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)(k+r-1)c_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r-2)c_k x^k\right]$$

$$=x^r\left\{r(r-2)c_0x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(k+r-1)c_{k+1}+(k+r-2)c_k\right]x^k\right\}$$

បើ $r(r-2)=0 \quad (1)$, $(k+r+1)(k+r-1)c_{k+1}+(k+r-2)c_k=0 \quad (2)$

តាម(1) យើងបាន $r_1=2, r_2=0$ ដោយ $r_1=2$ យើងបានទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា

$(k+3)(k+1)c_{k+1}+kc_k=0 \Rightarrow c_{k+1}=-\frac{k}{(k+3)(k+1)}c_k\ , k=0,1,2,3... \quad (3)$ ។ ដោយ c_0 ជាចំនួនដែលអាចជ្រើសរើសបានតាមទំនាក់ទំនងកំណើន(3) យើងមាន $c_1=0$ នោះមេគុណបន្ទាប់គឺស្មើសូន្យ ។ បើយើងយក $c_0=1$ យើងទទួលបានចម្លើយទី១នៃសមីការគឺ $y_1=x^2$ ។ ដោយ $r_1-r_2=2$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដូចនេះចម្លើយទី២មានទម្រង់ $y_2=Cx^2\ln x+x^0\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ ដោយធ្វើដេរីវេ y_2 យើងបាន:

$$y_2'=C(2x\ln x+x)+\sum_{n=1}^{\infty}nb_n x^{n-1}$$

$$y_2''=C(2\ln x+3)+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_n x^{n-2}$$

យើងយកជំនួសក្នុងសមីការដើមយើងបាន៖

$$x\left[C\left(2\ln x+3\right)+\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)b_nx^{n-2}\right]+\left(x-1\right)\left[C\left(2x\ln x+x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}\right]-2\left[Cx^2\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right]=0$$

ក្រោយពេលសម្រួលរួចយើងបាន៖

$$-2+2Cx+cx^2+\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)b_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n=0$$

$$\Leftrightarrow -2+2Cx+Cx^2+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-2\right)b_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-2\right)b_nx^n=0$$

យក $k=n$, $k=n+1$ ដែលយើងអាចសរសេរ៖

$$-2+2Cx+Cx^2+\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-2\right)b_kx^{k-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(k-3\right)b_{k-1}x^{k-1}=0$$

ឥឡូវនេះសំណុំមេគុណនៃស៊េរីស្វ័យគុណនៃ x ស្មើសូន្យយើងទទួលបាន៖

$$\begin{aligned}&-2-b_1=0\\&2C-b_1=0\\&C-3b_1+0b=0\\&k\left(k-2\right)b_k=-\left(k-3\right)b_{k-1}\quad ,\ k=4,5,6...\end{aligned}$$

ដោះស្រាយសមីការយើងទទួលបាន $b_1=-2$, $b=-1,$ b_2 ជាចំនួនអាចជ្រើសរើសបាន

$$b_3=\frac{1}{3}$$

$$b_4=-\frac{1}{4\cdot 2}b_3=-\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}$$

$$b_5=-\frac{2}{5\cdot 3}b_4=-\frac{\left(-2\right)\left(-1\right)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 3}$$

$$b_6=-\frac{3}{6\cdot 4}b_5=\frac{\left(-3\right)\left(-2\right)\left(-1\right)}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3}$$

....

$$b_n=\left(-1\right)^{n-3}\frac{2\left(n-3\right)!}{n!\left(n-2\right)!}=\frac{\left(-1\right)^{n-3}2}{n!\left(n-2\right)!}\quad ,\ n=4,5,6...$$

នោះចម្លើយទី២គឺ $y_2=-x^2\ln x+1-2x+b_nx^2+\dfrac{1}{3}x^3+2\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-3}x^n}{n!\left(n-2\right)!}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y=C_1y_1\left(x\right)+C_2y_2\left(x\right)$

$$=C_1x^2+C_2\left[-x^2\ln x+1-2x+b_2x^2+\frac{1}{3}x^3+2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-3}x^n}{n!\left(n-2\right)!}\right]$$

ឯកសារយោង

1. Ashley Evans, សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 2000.
2. Stephan L. Campbell, An Introduction to Differential Equations And Their Application,1990
3. Dennis G. Zill and Michael R. Cullen Differential Equations With Boundary-Value Problems
   , Fourth,U.S.A,1997.
4. Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Seventh Edition, Singapore,1993.
5. សន្ទានុក្រម គណិតសាស្ត្រ អង់គ្លេស-បារាំង-ខ្មែរ របស់លោក ភាវ សូរ៉ែល ឆ្នាំ២០០៣
6. សៀវភៅវចនានុក្រមខ្មែរសម្តេចសង្ឃរាជ ជួន ណាត ភាគ១ និង ភាគ២បោះពុម្ពលើកទី ៥ ការ ផ្សាយ របស់ពុទ្ធសាសនបណ្ឌិត ពុទ្ធសករាជ ២៥១១ គ្រឹះសករាជ ១៩៦៧ ។