

TexBook-School

៣២

វិញ្ញាសាត្រៀមបទាន់ខុប

គណិតវិទ្យា (វិទ្យាសាស្ត្រ)

វិញ្ញាសាចេញប្រឡងឆ្នាំ ២០១៤ ដល់ ២០២៣

វិញ្ញាសាត្រៀមចំនួន ២៣ វិញ្ញាសា

រៀបរៀងដោយ៖ លោកគ្រូ ហ៊ឺង វ៉ុច្ចី និងកូនសិស្ស Latex

មាតិកា

១	ចាក់ឌុប២០១៤(លើកទី១)	១
២	ចាក់ឌុប២០១៥	៩
៣	ចាក់ឌុប២០១៦	១៧
៤	ចាក់ឌុប២០១៧	២៥
៥	ចាក់ឌុប២០១៨	៣៥
៦	ចាក់ឌុប២០១៩	៤៥
៧	ចាក់ឌុប២០២១	៥៥
៨	ចាក់ឌុប២០២២	៦៣
៩	ចាក់ឌុប២០២៣	៧១
១០	ហ៊ុន ឌុន្ទី	៧៩
១១	ហ៊ុន ឌុន្ទី	៨៩
១២	ហ៊ុន ឌុន្ទី	៩៩
១៣	ហ៊ុន ឌុន្ទី	១០៧
១៤	ហ៊ុន ឌុន្ទី	១១៥
១៥	ហ៊ុន ឌុន្ទី	១២៣
១៦	ហ៊ុន ឌុន្ទី	១៣៣
១៧	ឡឺន សំណាង	១៤៣
១៨	ឡូប ម៉ុនថន	១៥៣
១៩	ឡី ចាន់ធា	១៦១
២០	ជា ឃ្មឿន	១៧៣
២១	សុខលាត	១៨៥

២២ ជិត ជី ១៩៥

២៣ Kim Hun ២០៣

២៤ ថា មករា ២០៩

២៥ ម៉ី ចន្ទីមករា ២១៧

២៦ រស់ មាន ២២៧

២៧ ផល ផានុ ២៣៥

២៨ សារីន សុទ្ធា ២៤៧

២៩ ម្យ៉េច ពន្លឺ ២៥៧

៣០ ខែត វត្តចរ ២៦៥

៣១ សាង សំរេច ២៧៥

៣២ ភ្លើង សុភ្លើត ២៨៣

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះមេត្តជន: -----
 ហត្ថលេខាមេត្តជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: លោកខុប២០១៤ (លើកទី១)

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

១. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{4} - x)}$

២. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$

៣. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2}$

៤. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

- ក. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$ ។
 ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
 គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងផ្ទាំងមួយគេមានប៊ូល១២ ដែលគេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ១២។ គេចាប់យកប៊ូល៣ ចេញពីផ្ទាំងព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A : គេចាប់យកប៊ូលទាំង៣មាន លេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣។ B : គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៣។
 C : គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ីតនព្វន្ឋដែលមានផលសង្ខេប $d = 3$ ។

IV. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0, +\infty[$ ដោយ $f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$ និង C ជាក្រាបរបស់វា។

១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។
 ខ. រក $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ។
 គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y = x - 5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ខាង $+\infty$ ។
 ឃ. កំណត់អាបស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងខ្សែកោង C ។
 ២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0, +\infty[$ គេបាន $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ។
 ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយដឹងថាសមីការ $g(x) = 0$ មានចម្លើយ $x' = 1$ និង $x'' = \alpha$ ដែល $(1 < \alpha)$ ។

V. (៤៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា។

១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។
 ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ។
 គ. តើខ្សែកោង C នៅលើឬនៅក្រោមបន្ទាត់ D ចូរបញ្ជាក់។
 ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ។
 ង. រក $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, (ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$) ។
 ២. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។
 ខ. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C ដែលមានអាបស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A ។
 គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ១. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{4} - x)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{4}$ នាំឲ្យ $\frac{\pi}{4} - x = -t$

បើ $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-t} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$
 $= -2 \times 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{4} - x)} = -2$

២. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}{(\sqrt{5} - \sqrt{x+5})(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}{5 - (x+5)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \times 10(\sqrt{5} + \sqrt{x+5}) \right)$
 $= 10(\sqrt{5} + \sqrt{5})$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}} = 20\sqrt{5}$

៣. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{-2x^2} = -\frac{3^2}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}$
 $= -\frac{9}{2} \times 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2} = -\frac{9}{2}$

៤. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 1}{-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{1} = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{|x|} = 1$ និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{|x|} = -1$

II. គេមាន $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

ក. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$

គេបាន $z_1 + z_2 = -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2$

$z_1 - z_2 = -1 + i\sqrt{3} - (-1 - i\sqrt{3})$
 $= -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_1 \times z_2 &= (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) \\ &= 1 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 + z_2 = -2, z_1 - z_2 = 2\sqrt{3}i \text{ និង } z_1 \times z_2 = 4$$

ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= -1 + i\sqrt{3} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង គេមាន } z_2 &= -1 - i\sqrt{3} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ និង } z_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1^3 - 8 &= \left(2 \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3 - 8 \\ &= 2^3 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) - 8 \\ &= 8(1 + 0i) - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

នាំឲ្យ z_1 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2^3 - 8 &= \left(2 \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)^3 - 8 \\ &= 2^3 (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) - 8 \\ &= 8(1 + 0i) - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

នាំឲ្យ z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \text{ និង } z_2 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } z^3 - 8 = 0$$

$$\text{III. តាង } S : \text{ចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីប៊ូលសរុប 12 នាំឲ្យ } n(S) = C(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 10 \cdot 11$$

A : គេចាប់យកប៊ូលទាំង ៣ មាន លេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង ៣

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } A &= \{3, 6, 9, 12\} \text{ នាំឲ្យ } n(A) = 4 \\ \text{គេបាន ប្រូបាបនៃ } A \text{ គឺ } P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{2 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1}{55} \end{aligned}$$

B : គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង ៣

$$\text{នាំឲ្យ } n(B) = C(4, 1) \cdot C(8, 2) = 4 \times \frac{8!}{(8-2)!2!} = 2 \cdot \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 2 \cdot 7 \cdot 8$$

គេបាន ប្រូបាបនៃ B គឺ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{28}{55}$

C : គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 3$

នាំឲ្យ $C = \{(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (4, 7, 10), (5, 8, 11), (6, 9, 12)\}$ នាំឲ្យ $n(C) = 6$

គេបាន ប្រូបាបនៃ C គឺ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{2 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{3}{110}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{55}, P(B) = \frac{28}{55}$ និង $P(C) = \frac{3}{110}$

IV. គេមានក្រាប $C : f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$ មានដែនកំណត់ $D =]0, +\infty[$

១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right)$
 $= +\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ខ. រក $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right)$
 $= -\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ $\Delta : y = x - 5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ខាង $+\infty$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} - (x - 5) \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right)$
 $= 0$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ Δ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

ឃ. កំណត់អាបស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងខ្សែកោង C

គេបាន $f(x) = y$

$$x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} = x - 5$$

$$\frac{8 \ln x + 9}{x} = 0$$

$$8 \ln x + 9 = 0$$

$$\ln x = -\frac{9}{8}$$

$$x = e^{-\frac{9}{8}}$$

ដូចនេះ: អាបស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ D គឺ $x = e^{-\frac{9}{8}}$

២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0, +\infty[$ គេបាន $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

គេមាន $f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 1 - 0 + \frac{8[(\ln x)'x - (x)' \ln x]}{x^2} - \frac{9}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 8\left(\frac{1}{x} \cdot x - \ln x\right) - 9}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 8 - 8 \ln x - 9}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 8 \ln x - 1}{x^2} \text{ យក } g(x) = x^2 - 8 \ln x - 1 \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ ដែល } g(x) = x^2 - 8 \ln x - 1$$

ខ. សិក្សាអំពីភាពនៃអនុគមន៍ f

ដោយ $x^2 > 0$ ចំពោះ $x > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $g(x)$

ដោយដឹងថាសមីការ $g(x) = 0$ មានចម្លើយ $x' = 1$ និង $x'' = \alpha$ ដែល $(1 < \alpha)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } g'(x) &= (x^2) - 8(\ln x)' - (1)' \\ &= 2x - \frac{8}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 8}{x} \end{aligned}$$

$$\text{បើ } g'(x) = 0 \text{ នោះ } 2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ ព្រោះ } x > 0$$

$$\text{នាំឲ្យ } g(2) = 2^2 - 8 \ln 2 - 1 = 3 - 8(0.67) = -2.5$$

$$\text{ដោយ } g(e) = e^2 - 8 \ln e - 1 = e^2 - 9 < 0$$

$$g(4) = 4^2 - 8 \ln 4 - 1 = 15 - 16 \ln 2 > 0$$

$$\text{នាំឲ្យ } g(e) \cdot g(4) < 0 \text{ នាំឲ្យ } e < \alpha < 4 \text{ នាំឲ្យ } \alpha > 2$$

x	0	1	2	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		↘ 0	-2.5	0 ↗	

តាមតារាងអំពីភាពនៃ g

គេបាន $g(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (1, \alpha)$

និង $g(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (0, 1) \cup (\alpha, +\infty)$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺ

x	0	1	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x = 1$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាជ្រុលត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - 5 + \frac{8 \ln 1}{1} + \frac{9}{1} = 5$

និង $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = \alpha$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាជ្រុលត្រង់ $x = \alpha$ គឺ $f(\alpha)$ ដែល $e < \alpha < 4$
 អនុគមន៍ f កើន ចំពោះ $x \in (-\infty, 1) \cup (\alpha, +\infty)$

អនុគមន៍ f ចុះ ចំពោះ $x \in (1, \alpha)$ ដែល $e < \alpha < 4$

តារាងអថេរភាពនៃ f គឺ

x	0	1	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$-\infty$	-2.5	$f(\alpha)$	$-\infty$

V. គេមានក្រាប $C : f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x - 2e^{-x}) \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [4 - x - 2e^{-x} - (-x + 4)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{D \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } C \text{ ខាង } +\infty}$$

គ. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ D

$$\text{ដោយ } f(x) - y = -2e^{-x} < 0 \text{ ចំពោះ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{ក្រាប } C \text{ នៅក្រោមបន្ទាត់ } D \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}}$$

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= 4 - x - 2e^{-x} \\ &= \frac{(4 - x - 2e^{-x})e^x}{e^x} \\ &= \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}}$$

ង. រក $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, (ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{xe^x + 2}{e^x} \right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$

២. ក. គណនា $f'(x)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x) &= (4 - x - 2e^{-x})' \\ &= 0 - 1 + 2e^{-x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f'(x) = 2e^{-x} - 1$

សិក្សាអថេរភាពនៃ f និង កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $2e^{-x} - 1 = 0$

$$\begin{aligned}e^{-x} &= \frac{1}{2} \\ -x &= \ln \frac{1}{2} \\ x &= \ln 2\end{aligned}$$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $2e^{-x} - 1 > 0$

$$\begin{aligned}e^{-x} &> \frac{1}{2} \\ -x &> \ln \frac{1}{2} \\ x &< \ln 2\end{aligned}$$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $2e^{-x} - 1 < 0$

$$\begin{aligned}e^{-x} &< \frac{1}{2} \\ -x &< \ln \frac{1}{2} \\ x &> \ln 2\end{aligned}$$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺ

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

អនុគមន៍ f កើនចំពោះ $x \in (-\infty, \ln 2)$

អនុគមន៍ f ចុះចំពោះ $x \in (\ln 2, +\infty)$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - ត្រង់ $x = \ln 2$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាជ្រៀបត្រង់ $x = \ln 2$

គឺ $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2}$

$$\begin{aligned}&= 4 - \ln 2 - \frac{2}{e^{\ln 2}} \\ &= 4 - \ln 2 - \frac{2}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f(\ln 2) = 3 - \ln 2$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺ

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$3 - \ln 2$	$-\infty$

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A

A មានអាប់ស៊ីស ០ នាំឲ្យ $f(0) = 4 - 0 - 2^0 = 3$

និង $f'(0) = 2e^0 - 1 = 1$

គេបាន $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$y - 3 = 1(x)$$

$$y = x + 3$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A មានសមីការ $y = x + 3$

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$

គេមាន $f(-1) = 4 - (-1) - 2e^{-(-1)} = 4 + 1 - 2e = 5 - 2e < 0$

$$f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 4 - 2 = 2 > 0$$

គេបាន $f(-1) \cdot f(0) < 0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិត β មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(\beta) = 0$

ឬ សមីការ $f(x) = 0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ (១)

ម្យ៉ាងទៀត តាមតារាងអថេរភាពនៃ f នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[-1, 0]$ (២)

តាមទំនាក់ទំនង (១) និង (២)

ដូចនេះ: សមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[-1, 0]$

មណ្ឌលប្រឡង

លេខបន្ទប់: លេខគុ

ឈ្មោះបេក្ខជន:

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របង្រៀនបណ្ឌិតសិក្សាស្រាវជ្រាវ

វិញ្ញាបនបត្រ : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០១៥

- I. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ ។ ១. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$ ។
 ២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$ ។
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} + 2 - 2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x}$ ។
- III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បែងមួយមានប៊ូលស្រទាប់ ៣ ប៊ូលខ្សែវង់ និងប៊ូលក្រហម២។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង៣ ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បែងដោយចៃដន្យ។
 គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
 A : យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ។ B : ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ ក. $I = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) dx$ ។
 ខ. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{2-x}{(x-1)^2}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$ ។ គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។
- V. (២៥ពិន្ទុ)
 A គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ និង $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ។ រកវ៉ិចទ័រ៖
 ក. $\vec{u} + \vec{v}$ ខ. $\vec{w} \times \vec{u}$ គ. $\vec{w} \times \vec{v}$ ។
 B រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(-1, 0)$ និងចំណុចកំពូលពីរមាន កូអរដោនេ $(-3, 0)$ និង $(3, 0)$ ។ សង់អេលីបនេះ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ ។
 ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។
 ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\phi - f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E') : y' + 2y = 0$ ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ)
 A គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + \ln x$ ។
 ១. ក. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនជាប់លើ $(0, +\infty)$ ។
 ខ. គណនា $g(1)$ ។
 ២. ក. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃលំហាត់ទី១បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម៖ បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ និង បើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$ ។
 ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា x នៅលើ $(0, +\infty)$ ។
 B គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណូមេ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
 ១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ (ដោយដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
 ២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ។
 ៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$ ។
 ៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។
 ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ ។ សង់ Δ និង ក្រាប C ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. គេឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

១. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z_1 + z_2 &= -1 + i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}i \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 - z_2 &= -1 + i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3}) \\ &= -1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} \\ &= -2 + 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } z_1 \times z_2 &= (-1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) \\ &= -(1 - i\sqrt{3})^2 \\ &= -1(1 - 2\sqrt{3}i - 3) \\ &= 2 + 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 + z_2 = 0, z_1 - z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i \text{ និង } z_1 \times z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i}$$

២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z_1 - z_2 &= 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } z_1 \times z_2 &= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 - z_2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ និង } z_1 \times z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)] \\ &= [2^2 + 2(2) + 4](2 + 2)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= -\frac{1}{1 + 1}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}}$$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 &= 3 \times 1 \times 3 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x} = 9}$$

III. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង B

តាង S : ចាប់យកប៊ូលម្តងៗ ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បែងមានឃ្លីសរុប ៨ ។

$$\text{នាំឲ្យ } n(S) = C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{5!6 \cdot 7 \cdot 8}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \times 8 \text{ ករណី}$$

$$\begin{aligned}A : \text{យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ} \text{ ។ នាំឲ្យ } n(A) &= C(3, 2) \cdot C(5, 1) + C(3, 3) \\ &= \frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{5!}{(5-1)!1!} + \frac{3!}{(3-3)!3!} \\ &= 3 \times 5 + 1 = 16 \text{ ករណី}\end{aligned}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } A \text{ គឺ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{7 \times 8} = \frac{2}{7}$$

$$\begin{aligned}B : \text{ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា} \text{ ។ នាំឲ្យ } n(B) &= C(3, 1) \cdot C(3, 1) \cdot C(2, 1) \\ &= 3 \times 3 \times 2 \\ &= 9 \times 2 \text{ ករណី}\end{aligned}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } B \text{ គឺ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9 \times 2}{7 \times 8} = \frac{9}{7 \times 4} = \frac{9}{28}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{2}{7} \text{ និង } P(B) = \frac{9}{28}}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned}\text{ក. } I &= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + 3 \int_1^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + 3x \right]_1^2 \\ &= \frac{2^3}{9} - \frac{2^2}{4} + 3(2) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + 3 \right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{109}{36}}$$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

គេមាន $f(x) = -\frac{2-x}{(x-1)^2}$

គេបាន $f(x) = -\frac{1+1-x}{(x-1)^2}$
 $= -\frac{1-(x-1)}{(x-1)^2}$
 $= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{-(x-1)}{(x-1)^2}$
 $= -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

ដូចនេះ: $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x)dx$

គេបាន $K = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx$
 $= -\int_{-1}^0 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{d(x-1)}{x-1}$
 $= \left[\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| \right]_{-1}^0$
 $= \left(\frac{1}{0-1} + \ln|0-1| \right) - \left(\frac{1}{-1-1} + \ln|-1-1| \right)$
 $= -1 + \ln 1 + \frac{1}{2} - \ln 2$

ដូចនេះ: $K = -\frac{1}{2} - \ln 2$

V. A គេមាន $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ និង $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ។

ក. កេរ៉ូបទំរ $\vec{u} + \vec{v}$

គេបាន $\vec{u} + \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + (-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$
 $= \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
 $= \vec{j} + 4\vec{k}$

ដូចនេះ: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{j} + 4\vec{k}$

ខ. កេរ៉ូបទំរ $\vec{w} \times \vec{u}$

គេបាន $\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$
 $= (2-2)\vec{i} - (2+2)\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$

ដូចនេះ: $\vec{w} \times \vec{u} = -4\vec{j} - 2\vec{k}$

គ. $\vec{w} \times \vec{v}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{w} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2+4)\vec{i} - (2-2)\vec{j} + (2+1)\vec{k} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\vec{w} \times \vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{k}$

B រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

គេមានកំណុំ $F_1(-1,0)$ និងកំពូល $V_1(-3,0)$ និង $V_2(3,0)$

ដោយពី V_1 ទៅ V_2 មានការប្រែប្រួលអ័ក្សអាប៉ូស៊ីសនោះអេលីបមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក

មានសមីការស្តង់ដារ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = x_{V_2} - x_{V_1} = 3 - (-3) = 6$ នាំឲ្យ $a = \frac{6}{2} = 3$

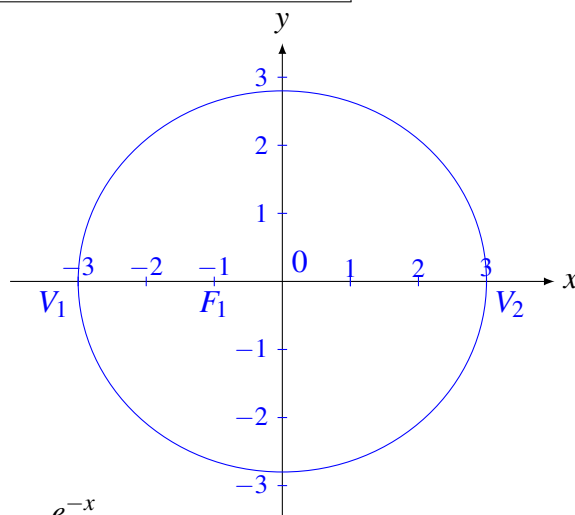
កំពូល $V_1(h-a, k)$ និង $V_1(-3,0)$ សមមូល $h-a = -3$ នាំឲ្យ $h = -3 + a = -3 + 3 = 0$ និង $k = 0$

និង កំណុំ $F_1(-1,0)$ និង $F_1(h-c, k)$ សមមូល $h-c = -1$ នាំឲ្យ $c = h+1 = 1$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2$ នាំឲ្យ $b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

សង់អេលីប



VI. គេមាន (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E)

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= (e^{-2x})' \ln(1+2e^x) + [\ln(1+2e^x)]' e^{-2x} \\ &= (-2x)' e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{(1+2e^x)'}{(1+2e^x)} e^{-2x} \\ &= -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{2e^x}{(1+2e^x)} e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) + 2f(x) &= -2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^x}{1 + 2e^x} e^{-2x} + 2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \\ &= 2 \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \text{ ជាចម្លើយនៃ (E)}}$$

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\phi - f)$ ជាចម្លើយនៃ (E') : $y' + 2y = 0$

ស្រាយថា បើ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $\phi - f$ ជាចម្លើយនៃ (E')

គេមាន ϕ ជាចម្លើយនៃ (E)

$$\text{នោះ } \phi'(x) + 2\phi(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} \text{ និង } f'(x) + 2f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$$

$$\text{គេបាន } \phi'(x) + 2\phi(x) = f'(x) + 2f(x)$$

$$\phi'(x) - f'(x) + 2[\phi(x) - f(x)] = 0$$

$$[\phi(x) - f(x)]' + 2[\phi(x) - f(x)] = 0$$

នាំឲ្យ $\phi - f$ ជាចម្លើយនៃ (E')

និងស្រាយថា បើ $\phi - f$ ជាចម្លើយនៃ (E') នោះ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E)

គេមាន $\phi - f$ ជាចម្លើយនៃ (E')

$$\text{គេបាន } [\phi(x) - f(x)]' + 2[\phi(x) - f(x)] = 0$$

$$\phi'(x) - f'(x) + 2\phi(x) - 2f(x) = 0$$

$$\phi'(x) + 2\phi(x) = f'(x) + 2f(x) \text{ ដោយ } f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$$

$$\phi(x) + 2\phi(x) = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$$

នាំឲ្យ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E)

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\phi \text{ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ } \phi - f \text{ ជាចម្លើយនៃ (E')}} \quad \square$$

VII. A គេមាន $g : g(x) = x^2 + \ln x$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$

១. ក. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនជាប់លើ $(0, +\infty)$

$$\text{គេមាន } g(x) = x^2 + \ln x \text{ នាំឲ្យ } g'(x) = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ ចំពោះ } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g \text{ ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាតលើ } (0, +\infty)}$$

ខ. គណនា $g(1)$

$$\text{គេបាន } g(1) = 1^2 + \ln 1 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g(1) = 1}$$

២. ក. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃលំហាត់ទី១បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម៖ បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ និង បើ $0 < x \leq 1$

$$\text{នោះ } x^2 + \ln x \leq 1$$

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាតលើ $(0, +\infty)$

$$\text{គេបាន ចំពោះ } x \geq 1 \text{ នាំឲ្យ } g(x) \geq g(1)$$

$$x^2 + \ln x \geq 1$$

$$\text{ចំពោះ } 0 < x \leq 1 \text{ នាំឲ្យ } g(x) \leq g(1)$$

$$x^2 + \ln x \leq 1$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បើ } x \geq 1 \text{ នោះ: } x^2 - \ln x \geq 1 \text{ និង បើ } 0 < x \leq 1 \text{ នោះ: } x^2 + \ln x \leq 1}$

ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា x នៅលើ $(0, +\infty)$

បើ $x = 1$ នោះ: $x^2 + \ln x = 1$ នាំឲ្យ $x^2 + \ln x - 1 = 0$

បើ $x > 1$ នោះ: $x^2 + \ln x > 1$ នាំឲ្យ $x^2 + \ln x - 1 > 0$

បើ $0 < x < 1$ នោះ: $x^2 + \ln x < 1$ នាំឲ្យ $x^2 + \ln x - 1 < 0$

ដូចនេះ: $\begin{cases} x^2 + \ln x - 1 = 0 \text{ ចំពោះ } x = 1 \\ x^2 + \ln x - 1 > 0 \text{ ចំពោះ } x > 1 \\ x^2 + \ln x - 1 < 0 \text{ ចំពោះ } x < 1 \end{cases}$

B គេមានក្រាប (C) ដែល $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (ដោយដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$ ព្រោះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$ ព្រោះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$

គេមាន $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ នាំឲ្យ $f'(x) = 1 + 0 - \frac{(\ln x)'x - x' \ln x}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{x} \cdot x + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2}}$

៣. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2 > 0$ ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$ នោះ: $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $x^2 + \ln x - 1$

ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A គេបាន $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ ចំពោះ } x = 1 \\ f'(x) > 0 \text{ ចំពោះ } x > 1 \\ f'(x) < 0 \text{ ចំពោះ } 0 < x < 1 \end{cases}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = 1$ នោះ: f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1^2 + 1 - \frac{\ln 1}{1} = 2$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\Delta : y = x + 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ ដោយ $f(x) - y = -\frac{\ln x}{x}$ ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} > 0 \text{ សមមូល } \ln x < 0$$

$$\ln x < \ln 1$$

$$0 < x < 1$$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} < 0 \text{ សមមូល } \ln x > 0$$

$$\ln x > \ln 1$$

$$x > 1$$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ សមមូល } \ln x = 0$$

$$\ln x = \ln 1$$

$$x = 1 \text{ នាំឲ្យ } f(1) = 2$$

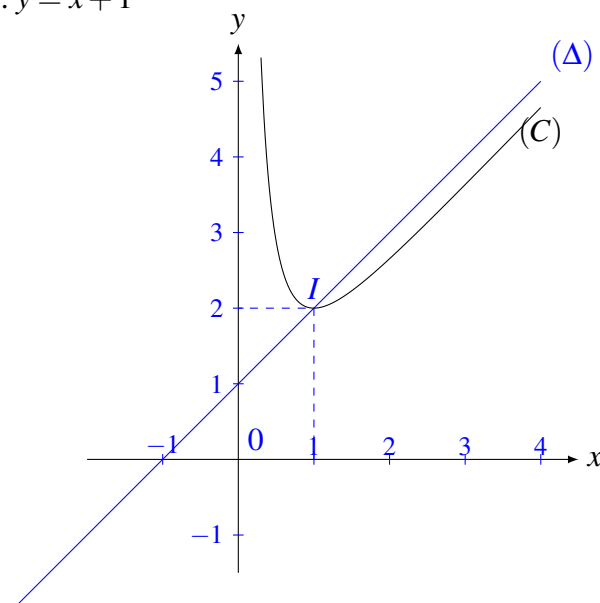
ចំពោះ $0 < x < 1$ នោះក្រាប C នៅខាងលើបន្ទាត់ Δ

ដូចនេះ: ចំពោះ $x > 1$ នោះក្រាប C នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ Δ
ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ Δ គឺ $I(1, 2)$

សង់ Δ និង ក្រាប C

តារាងតម្លៃលេខ $(\Delta) : y = x + 1$

x	0	1
y	1	2



មណ្ឌលប្រឡង.....

លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន:.....

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០១៦

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$ ។ គណនា $z_1 + z_2$ និង $(z_1 + z_2) \times z_3$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z = (z_1 + z_2) \times z_3$ ។ ទាញយកតម្លៃនៃ z^3 ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1)dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \sin^2 x)dx$ ។ គេមាន f កំណត់លើ \mathbb{R}^* ដោយ $f(x) = -2 \left(\frac{x+1}{x^2} \right)$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ ។ គណនា $K = \int_1^e f(x)dx$ ។ ($\ln e = 1$) ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលដ្ឋាន១៥ ដែលចែកជាមូលពណ៌បៃតងចំនួន៧ និងគេសរសេរលើមូលទាំង៧នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៧ រួចមូលរៀងចំនួន៥ និងគេសរសេរលើមូលទាំង៥នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៥ ចុងក្រោយមូលពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងសរសេរលើមូលទាំង៣នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៣ ។ គេចាប់យកមូលមួយចេញពីក្នុងចំណោមមូលទាំង១៥ ។ កេប្រែប្រួលនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង។

B : មូលដែលចាប់បានមានលេខសេស។

C : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស។

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. គេមានសមីការ $18x^2 + 10y^2 = 90$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប៊ីប។ កេប្រែប្រួលអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។

ខ. សង់អេលីបនេះ។

2. នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(2,3,4), N(3,5,6), P(4,6,7)$ និង $Q(3,4,5)$ ។

ក. កេរ៉ិចទ័រ \overrightarrow{MN} និង \overrightarrow{QP} ។

ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

VI. (១០ពិន្ទុ)

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$ ។

ខ. កេចមើលពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1, y'(1) = e$ ។ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$)

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$ ។ គេតាង C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

1. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$ ។

2. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ \mathbb{R} និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. ក. តើគេអាចយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

4. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x + 1$ ។

ខ. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln 3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។ (នៅតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ 2cm)

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីត៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2-3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{-(1+1)}{1+2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2-3x} = 2}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x^3-3^3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-3}{(x-3)(x^2+3x+3^2)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x^2+3x+9)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \frac{1}{(9+9+9)(3+3)}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27} = \frac{1}{162}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times 5 \times 5 = 1 \times 25$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{x} = 25}$$

II. គេមាន $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$

គណនា $z_1 + z_2$ និង $(z_1 + z_2) \times z_3$

$$\text{គេបាន } z_1 + z_2 = \sqrt{3} - i + (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$$

$$= \sqrt{3} - i + 1 - \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i$$

$$= 1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{និង } (z_1 + z_2) \times z_3 = (1 - \sqrt{3}i) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 + z_2 = 1 - \sqrt{3}i \text{ និង } (z_1 + z_2) \times z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z = (z_1 + z_2) \times z_3$ ។ ទាញយកតម្លៃនៃ z^3

$$\text{គេបាន } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{នាំឲ្យ } z^3 = \cos \frac{3 \times 2\pi}{3} + i \sin \frac{3 \times 2\pi}{3} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \text{ និង } z^3 = 1}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1)dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 x)dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= 6 \int_0^2 x^2 dx - 3 \int_0^2 x dx - \int_0^2 dx \\ &= \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right]_0^2 \\ &= 2(2)^3 - \frac{3}{2}2^2 - 2 \\ &= 16 - 6 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - (1 - \cos 2x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{4} - \sin 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 8 \text{ និង } J = \frac{1}{2}}$$

បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= -2 \left(\frac{x+1}{x^2} \right) \\ &= -2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

គណនា $K = \int_1^e f(x)dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= -2 \int_1^e \frac{1}{x} dx - 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-2 \ln |x| + \frac{2}{x} \right]_1^e \\ &= \left(-2 \ln e + \frac{2}{e} \right) - \left(-2 \ln 1 + \frac{2}{1} \right) \\ &= -2 + \frac{2}{e} - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{K = \frac{2}{e} - 4}$$

IV. តាង S : ចាប់យកប៊ូល១ចេញពីចុងដែលមានប៊ូល ១៥

នាំឲ្យ $n(S) = C(15, 1) = 15$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A

A : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង។ នាំឲ្យ $n(A) = C(7, 1) = 7$ ករណី

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{15}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{7}{15}$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B

B : ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខសេសស ។

ដោយប៊ូលពណ៌បៃតងមានលេខសេសចំនួន៤ ហើយប៊ូលពណ៌ខៀវមានចំនួន ៣ និងប៊ូលពណ៌ក្រហមមានចំនួន ២ នាំឲ្យ $n(B) = 9$ ករណី

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{3}{5}$

C : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស។ នាំឲ្យ $n(C) = 4$ ករណី

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{15}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{4}{15}$

V. 1. គេមានសមីការ $18x^2 + 10y^2 = 90$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ $18x^2 + 10y^2 = 90$ ជាសមីការអេលីប

គេបាន $\frac{2 \times 9x^2}{9 \times 10} + \frac{10y^2}{9 \times 10} = 1$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ដូចនេះ: $18x^2 + 10y^2 = 90$ ជាសមីការអេលីប

រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

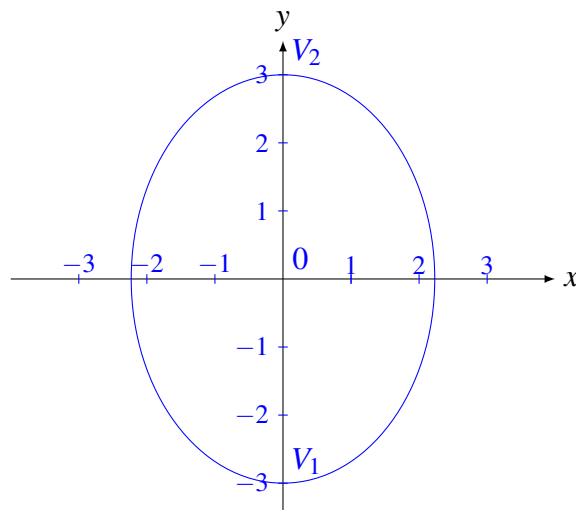
នាំឲ្យ $a = \sqrt{3}$ និង $b = \sqrt{5}$

គេបាន ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a = 2 \times 3 = 6$

ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b = 2\sqrt{5}$

កំពូល $V_1(0, -a)$ នាំឲ្យ $V_1(0, -3)$ និង $V_2(0, a)$ នាំឲ្យ $V_2(0, 3)$

ខ. សង់អេលីប



2. គេមានចំណុច $M(2, 3, 4), N(3, 5, 6), P(4, 6, 7)$ និង $Q(3, 4, 5)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ \overrightarrow{MN} និង \overrightarrow{QP}

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{MN} = (3 - 2, 5 - 3, 6 - 4)$$

$$= (1, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{QP} = (4 - 3, 6 - 4, 7 - 5)$$

$$= (1, 2, 2)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\overrightarrow{MN} = (1, 2, 2) \text{ និង } \overrightarrow{QP} = (1, 2, 2)}$$

ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចតុកោណ } MNPQ \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$$

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 - 2^2 = 0$$

$$(\lambda + 1 - 2)(\lambda + 1 + 2) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

$$\text{នាំឲ្យ } \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) : } y = Ae^x + Be^{-3x} \text{ ដែល } A, B \in \mathbb{R}}$$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1, y'(1) = e$

$$\text{គេមាន } \begin{cases} y = Ae^x + Be^{-3x} \\ y' = Ae^x - 3Be^{-3x} \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} y(0) = Ae^0 + Be^{-3(0)} \\ y'(1) = Ae^1 - 3Be^{-3(1)} \end{cases}$$

$$\text{នាំឲ្យ } \begin{cases} 1 = A + B \\ e = Ae - 3Be^{-3} \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} A + B = 1 \quad (1) \\ A - 3Be^{-4} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{យកសមីការ (1) ដក (2) គេបាន } A + B - A + 3Be^{-4} = 0$$

$$4Be^{-4} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 1 - B = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) : } y = e^x}$$

VII. គេមានក្រាប C ដែល $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$ ។

1. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\begin{aligned}\text{និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \frac{4}{1 + \frac{3}{e^x}} \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f(x) - y &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - (x + 2) \\ &= -\frac{4e^x}{e^x + 3} < 0 \text{ ព្រោះ: } \frac{4e^x}{e^x + 3} > 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ក្រាប } C \text{ នៅក្រោមបន្ទាត់ } d_1 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}}$$

2. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x) &= \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right)' \\ &= 1 - 4 \frac{(e^x)'(e^x + 3) - (e^x + 3)'e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 - 4[e^x(e^x + 3) - (e^x)^2]}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x)^2 + 6e^x + 9 - 4(e^x)^2 - 12e^x + 4(e^x)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x)^2 - 2e^x(3) + 3^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2}$$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ \mathbb{R} និងសង្កេតរកអថេរភាពនៃ f

$$\text{ដោយ } f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \geq 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើនលើ } \mathbb{R}}$$

$$\text{បើ } f'(x) = 0 \text{ នោះ } e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln 3$$

$$x = \ln 3$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f(\ln 3) &= \ln 3 + 2 - \frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + 3} \\ &= \ln 3 + 2 - \frac{4 \times 3}{3 + 3} \\ &= \ln 3\end{aligned}$$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

3. ក. តើគេអាចថាដោយណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$

ដោយ $f(\ln 3) = \ln 3$ និង $f'(\ln 3) = 0$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $d_2 : y = \ln 3$

ដូចនេះ $d_2 : y = \ln 3$ គឺជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ $I(\ln 3, \ln 3)$

- ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

តាមតារាងអថេរភាពនៃ f គេបាន

- ចំពោះ $x \in (-\infty, \ln 3)$ នោះ $f(x) < \ln 3$ នាំឲ្យក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d_2
- ចំពោះ $x = \ln 3$ នោះ $f(x) = \ln 3$ នាំឲ្យក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_2
- ចំពោះ $x \in (\ln 3, +\infty)$ នោះ $f(x) > \ln 3$ នាំឲ្យក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d_2

4. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x + 1$

ដោយប៉ះត្រង់ $x = 0$ នាំឲ្យ $f(0) = 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3} = 2 - \frac{4}{1+3} = 1$

និង $f'(0) = \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 = \left(\frac{-2}{4} \right)^2 = \frac{1}{4}$

គេបានបន្ទាត់ប៉ះ $d_3 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$= \frac{1}{4}x + 1$$

ដូចនេះ $d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1$

- ខ. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln 3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។ (នៅតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ 2cm)

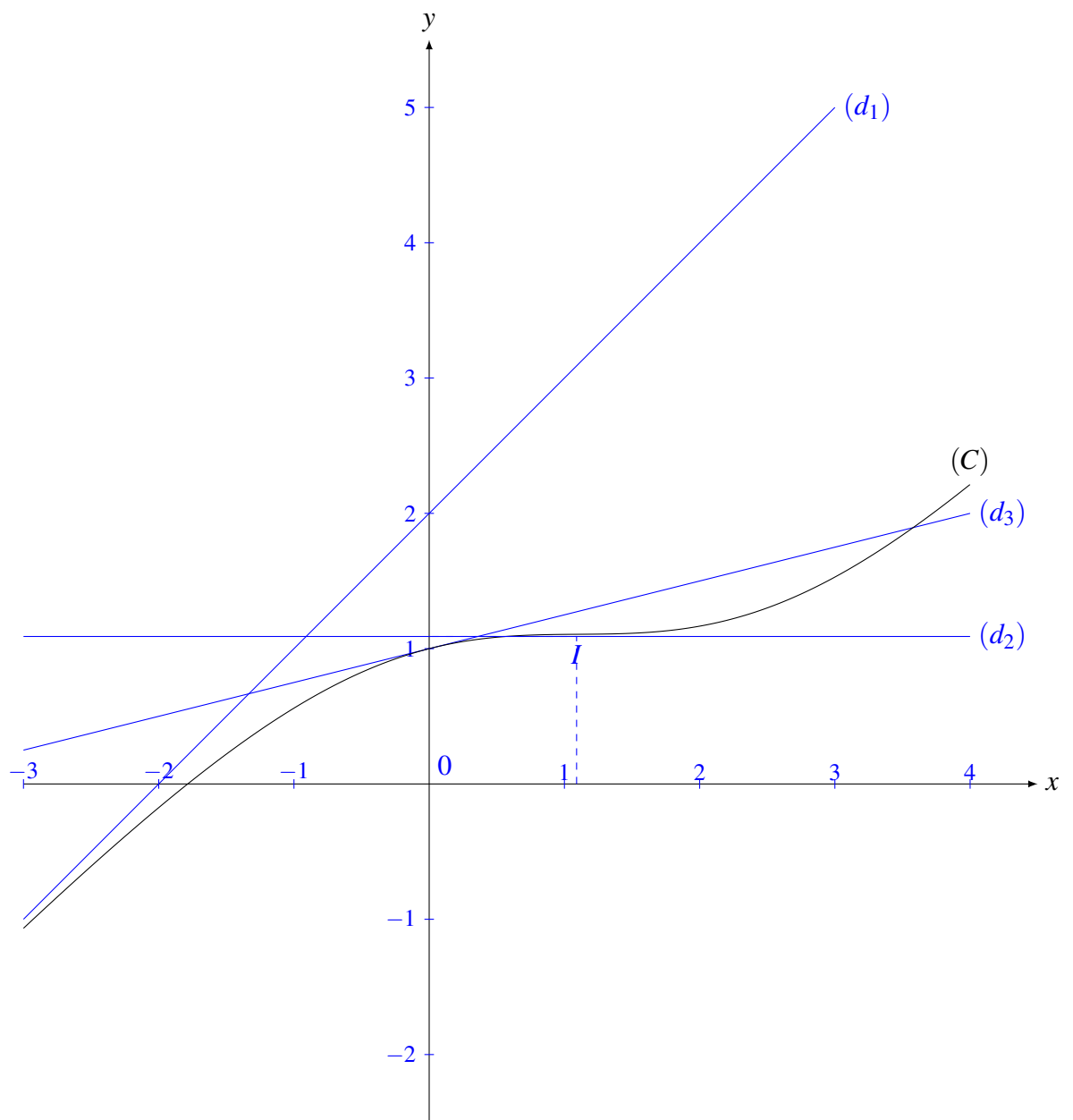
សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1, d_2

តារាងតម្លៃលេខ $(d_1) : y = x + 2$

x	-2	0
y	0	2

តារាងតម្លៃលេខ $(d_3) : y = \frac{1}{4}x + 1$

x	-4	0
y	0	1



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ័ត្រាឌីប៊ុន ២០១៧

- I. គណនាលីមីត៖
- ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$
- II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សចំនួន 10 នាក់ ដែលក្នុងនោះមាន 4 នាក់ជាសិស្សស្រី និង 6 នាក់ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមាន 4 នាក់ដោយចៃដន្យក៏ទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
- A : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី។
 B : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស។
 C : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន 50% ជាសិស្សប្រុស។
- III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ។
- ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
 ខ. រកម៉ូឌុល និងអាក្យមង់នៃ z_1^3 ។
 គ. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- IV. 1. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$ ។
 ក. រកវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}$ និង \vec{CD} ។
 ខ. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD ។ ទាញបញ្ជាក់ថា ABD និង ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។
2. គេមានសមីការ $9y^2 - 16x^2 = 144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។
- V. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^3 (x-2+3x^2)dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x)dx$ និង $K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2+1} dx$ ។ ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2+1} = x+1 + \frac{x}{x^2+1}$ ។
- VI. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$ ។
 2. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = 2e^2$ ។
- VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{k}) ។
1. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។
2. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។
3. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x; f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ។
 ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1, d_2 របស់វា។

ដំណោះស្រាយ

I. គណនាលីមីត៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2-1)}{x^2(x-1)+(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{x^2+1} \\ &= -\frac{1+1}{1^2+1} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1} = -1}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times (-3) &= 1 \times (-3) = -3 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x} = -3}$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{\sin x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2+x}{\sin x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \times \frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} \right] \\ &= 1 \times \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B និង C

តាង S : ជ្រើសរើសសិស្ស 4 នាក់ចេញពីសិស្សសរុប 10 នាក់

$$\text{នាំឱ្យ } n(S) = C(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{6!7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6!1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = 3 \cdot 7 \cdot 10 \text{ ជម្រើស}$$

A : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី នាំឱ្យ $n(A) = C(4, 4) = 1$ ជម្រើស

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃ A គឺ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{210}$$

B : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស នាំឱ្យ $n(B) = C(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{4!5 \cdot 6}{2 \cdot 4!} = 3 \cdot 5$ ជម្រើស

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃ A គឺ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14}$$

C : ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន 50% ជាសិស្សប្រុស

$$\text{នាំឱ្យ } n(C) = C(4, 2)C(6, 2) = \frac{4!6!}{(4-2)!2!(6-2)!2!} = \frac{6!1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 6 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃ A គឺ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{3}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{210}, P(B) = \frac{1}{14} \text{ និង } P(C) = \frac{3}{7}}$$

III. គេមាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ខ. រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃ z_1^3

$$\text{គេបាន } z_1^3 = 2^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right)$$

$$= 8 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{ម៉ូឌុល } |z_1^3| = 8 \text{ អាកុយម៉ង់ និង } \arg(z_1^3) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

គ. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } z_1 \times z_2 = (1 + i\sqrt{3})6 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= (1 + i\sqrt{3})6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i)$$

$$= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i + 3\sqrt{6}i - i^2\sqrt{6}$$

$$= 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - (3\sqrt{2} - 3\sqrt{6})i$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \times z_2 = 3\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) + 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)i$$

IV. 1. គេមាន $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ និង \overrightarrow{CD}

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (0 + 2, 1 - 1, 1 - 0)$$

$$= (2, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 + 2, 2 - 1, 2 - 0)$$

$$= (3, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0 + 2, 3 - 1, -4 - 0)$$

$$= (2, 2, -4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1 - 0, 2 - 1, 2 - 1)$$

$$= (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (0 - 0, 3 - 1, -4 - 1)$$

$$= (0, 2, -5)$$

$$\text{និង } \overrightarrow{CD} = (0 - 1, 3 - 2, -4 - 2) = (-1, 1, -6)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (3, 1, 2), \overrightarrow{AD} = (2, 2, -4), \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1), \overrightarrow{BD} = (0, 2, -5) \text{ និង } \overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6)$$

ខ. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD

$$\text{គេបាន } AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$AD = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$BD = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 4 + 25} = \sqrt{29} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{និង } CD = \sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដូចនេះ: } AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{14}, AD = 2\sqrt{6}, BC = \sqrt{3}, BD = \sqrt{29} \text{ និង } CD = \sqrt{38}$$

បង្ហាញថា ABD និង ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= (2)(2) + (0)(2) + (1)(-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \vec{AB} \perp \vec{AD}$$

$$\text{ដូចនេះ: } ABD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= (3)(2) + (1)(2) + (2)(-4) \\ &= 6 + 2 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \vec{AC} \perp \vec{AD}$$

$$\text{ដូចនេះ: } ACD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A$$

2. បង្ហាញថា $9y^2 - 16x^2 = 144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល

$$\text{គេបាន } \frac{3^2 y^2}{12^2} - \frac{4^2 x^2}{12^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } 9y^2 - 16x^2 = 144 \text{ ជាសមីការអ៊ីពែបូល}$$

រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល និង រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល

$$\text{ដោយ } a = 4, b = 3 \text{ និង } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

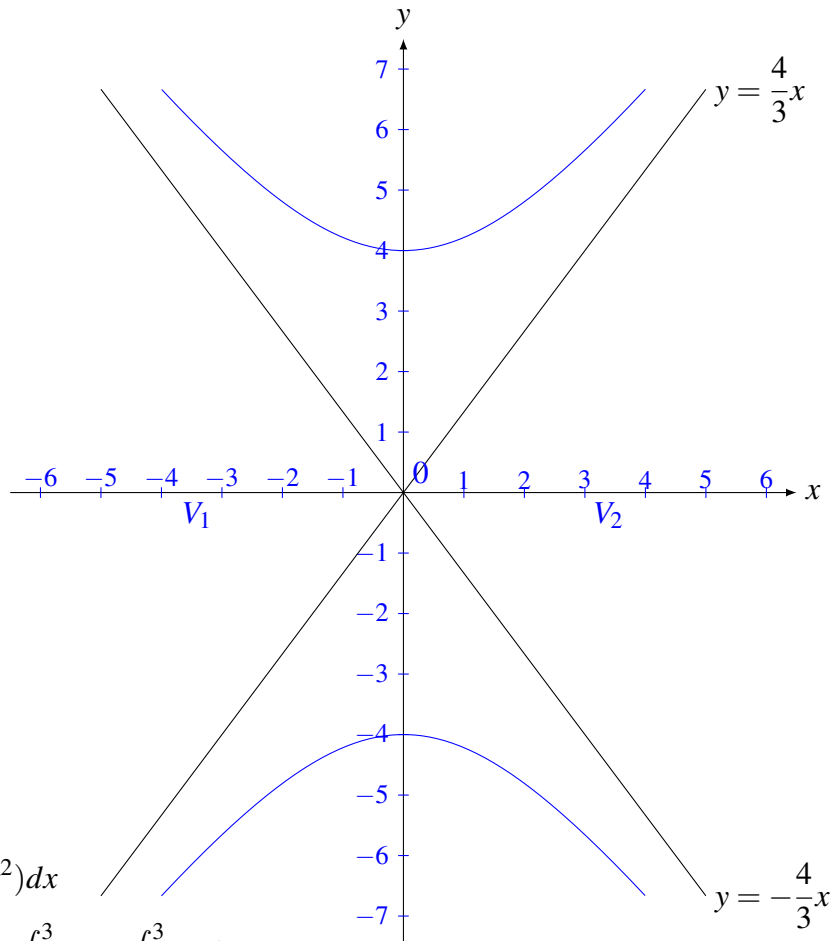
$$\text{គេបាន កំពូល } \begin{cases} V_1(0, -a) = (0, -4) \\ V_2(0, a) = (0, 4) \end{cases}$$

$$\text{កំណុំ } \begin{cases} F_1(0, -c) = (0, -5) \\ F_2(0, c) = (0, 5) \end{cases}$$

$$\text{និង សមីការអាស៊ីមតូត } \begin{cases} y_1 = -\frac{a}{b}x = -\frac{4}{3}x \\ y_2 = \frac{a}{b}x = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: កំពូល } V_1(0, -4), V_2(0, 4) \text{ កំណុំ } F_1(0, -5), F_2(0, 5) \text{ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } y_1 = -\frac{4}{3}x, y_2 = \frac{4}{3}x$$

សង់អ៊ីពែបូល



V. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 d(x^2) - 2 \int_1^3 dx + \int_1^3 d(x^3) \\
 &= \frac{1}{2} [x^2]_1^3 - 2[x]_1^3 + [x^3]_1^3 \\
 &= \frac{1}{2} (3^2 - 1^2) - 2(3 - 1) + (3^3 - 1^3) \\
 &= \frac{1}{2} (9 - 1) - 2(2) + 27 - 1 \\
 &= 4 - 4 + 26
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $I = 26$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\cos 2x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin x) \\
 &= -\frac{1}{2} [\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{4} - \cos 0 \right) - \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) \\
 &= -\frac{1}{2} (0 - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $J = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

បង្ហាញថា $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$

គេបាន $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$

$$= \frac{(x^3 + x) + (x^2 + 1) + x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) + x}{x^2 + 1}$$

$$= x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

ដូចនេះ: $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$

និង $K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

$$= \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 d(x^2) + \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} [x^2]_0^1 + [x]_0^1 + \frac{1}{2} [\ln |x^2 + 1|]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) + (1 - 0) + \frac{1}{2} [\ln(1^2 + 1) - \ln(0^2 + 1)]$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$

VI. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{2x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

2. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = 2e^2$

គេបាន $\begin{cases} y = Ae^x + Be^{2x} \\ y' = Ae^x + 2Be^{2x} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} y(0) = Ae^0 + Be^0 \\ y'(1) = Ae^1 + 2Be^2 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} 1 = A + B \\ 2e^2 = Ae + 2Be^2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 1 - B \quad (1) \\ 2e = 1 - B + 2Be \quad (2) \end{cases}$

តាម (2) : $2e - 1 = B(2e - 1) \Rightarrow B = 1$ ជំនួសចូល(1) : $A = 1 - B = 1 - 1 = 0$

ដូចនេះ: ចម្លើយពិសេសនៃ (E) គឺ $y = e^{2x}$

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ តាងដោយ C

1. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f(x) &= x + \frac{1-3e^x}{1+e^x} \\ &= x + \frac{1+e^x-4e^x}{1+e^x} \\ &= x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \right) \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} - (x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1+e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(d_1) : y = x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } -\infty}$$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

$$\text{គេបាន } f(x) - y = -\frac{4e^x}{1+e^x} < 0 \text{ ព្រោះ } e^x > 0, \text{ ចំពោះ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ក្រាប } (C) \text{ នៅក្រោមបន្ទាត់ } (d_1) \text{ ជានិច្ច}}$$

2. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{4}{\frac{1}{e^x} + 1} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} - x + 3 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(1+e^x) - 4e^x}{1+e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 4e^x - 4e^x}{1+e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(d_2) : y = x - 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C) \text{ ត្រង់ } +\infty}$$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2

ដោយ $f(x) - y = \frac{4}{1+e^x} > 0$ ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d_2) ជានិច្ច

3. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}\right)' \\ &= 1 - 4 \frac{(e^x)'(1+e^x) - (1+e^x)'e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4(e^x(1+e^x) - e^x e^x)}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4[e^x(1+e^x) - e^x e^x]}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4(e^x + e^{2x} - e^{2x})}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

- ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង្កេតតាមអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 \geq 0$ ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: f ជាអនុគមន៍កើនលើ \mathbb{R}

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $e^x - 1 = 0$ នាំឱ្យ $e^x = 1$ នាំឱ្យ $e^x = e^0$ នាំឱ្យ $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } f(0) &= 0 + 1 - \frac{4e^0}{1+e^0} \\ &= 1 - \frac{4}{2} \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

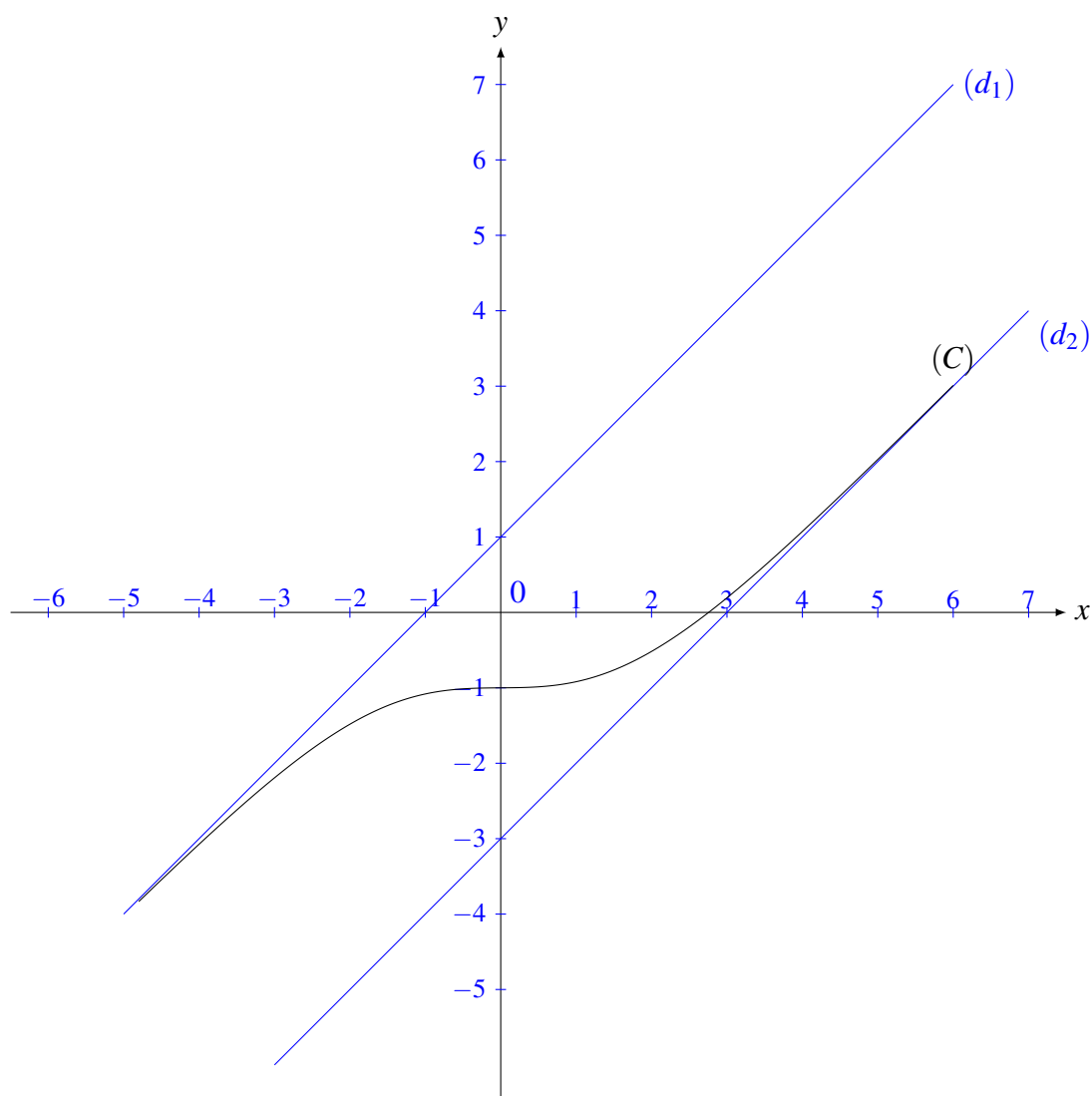
សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1, d_2

តារាងតម្លៃលេខ $(d_1) : y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

តារាងតម្លៃលេខ $(d_2) : y = x - 3$

x	0	3
y	3	0



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ័ត្រឌុប២០១៨

- I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមុខមានឃ្លីសចំនួន ២ ឃ្លីក្រហមចំនួន ៤ និងឃ្លីខៀវចំនួន ៤ ។ គេចាប់យកឃ្លី ៣ ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖ A : ឃ្លីទាំង ៣ មានពណ៌ក្រហម។ B : យ៉ាងតិចមានឃ្លី ២ មានពណ៌ខៀវ។ C : ឃ្លីទាំង ៣ មានពណ៌ខុសគ្នា ។
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)}$
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$
 ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។ ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
 គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 (2-x+x^2)dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx$ និង $K = \int_2^3 \left(3x-2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$ ។
- V. (២៥ពិន្ទុ)
 1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(-1, 0, 1)$ និង $D(2, 1, 2)$ ។
 ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ និង \overrightarrow{BC} ។ ខ. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។
 គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។
 2. គេមានសមីការ $(2x+3y)^2 = 12(xy+3)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងសង់អេលីបនេះ។
- VI. (១០ពិន្ទុ)
 ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E) : y'' + 4y' = 5y$ ។
 ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) ជាអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0, 3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង -3 ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ គេតាងក្រាប C របស់វាក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{k}) ។
 1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ។
 2. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1, +\infty)$ ។
 3. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។
 ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1, +\infty)$ គេបាន $\frac{x+1}{x-1} > 1$ និងទាញរកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_1) ។
 គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (d_2) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (d_2) នេះ។
 ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_1) និងបន្ទាត់ (d_2) ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3 = 1.1$ និងក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(4.5, 0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B និង C

តាង S : ចាប់យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីឃ្លីសរុប ចំនួន 10

$$\text{នាំឱ្យ } n(C) = C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{7!8 \cdot 9 \cdot 10}{7!3!} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 5 \cdot 8 \text{ ករណី}$$

គេមាន A : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម

$$\text{នាំឱ្យ } n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{3!4}{1!3!} = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } A \text{ គឺ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{15 \times 2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{30}}$$

B : យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ខៀវ

$$\text{នាំឱ្យ } n(B) = C(4, 2)C(6, 1) + C(4, 3) = \frac{4!}{(4-2)!2!} \cdot 6 + 4 = \frac{2!3 \cdot 4 \cdot 6}{2!2!} + 4 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } B \text{ គឺ } P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{1}{3}}$$

និង C : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា

$$\text{នាំឱ្យ } n(C) = C(4, 1)C(2, 1)C(4, 1) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } C \text{ គឺ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{4}{15}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{4}{15}}$$

II. គណនាលីមីត៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2+1) + (x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{-(x-1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)$$

$$= -(1+1)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x} = -2}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x} = -\frac{2}{3}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \text{ ឬ } -3t = \pi - 3x$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos(t + \frac{\pi}{3})}{2(-3t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos t - \sqrt{3}(\cos t \cos \frac{\pi}{3} - \sin t \sin \frac{\pi}{3})}{-6t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \sqrt{3}(\cos t \cdot \frac{1}{2} - \sin t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}{-6t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos t}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos t}{2} + \frac{3 \sin t}{2}}{-6t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-6t} \\
 &= -\frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\
 &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)} = -\frac{1}{3}$$

III. គេមាន $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= (3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \\
 &= 3\sqrt{3} + 3i + 3i(\sqrt{3})^2 + i^2 3\sqrt{3} \\
 &= 3\sqrt{3} + 3i + 9i - 3\sqrt{3} \\
 &= 12i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \\
 &= \frac{(3 + i3\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\
 &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 3i(\sqrt{3})^2 - i^2 3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} \\
 &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{3 + 1} \\
 &= \frac{6\sqrt{3}}{4} + \frac{6i}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \times z_2 = 12i \text{ និង } \frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= 12(0 + i) \\
 &= 12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង } \frac{z_1}{z_2} &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
 &= 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 &= 3^2 \left(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}\right) \\ &= 9 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \times z_2 = 12 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \text{ និង } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 &= 3^3 \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}\right) \\ &= 27 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 27(0 + i)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = 27i$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } I &= \int_1^2 (2 - x + x^2) dx \\ &= 2 \int_1^2 dx - \frac{1}{2} \int_1^2 d(x^2) + \frac{1}{3} \int_1^2 d(x^3) \\ &= 2[x]_1^2 - \frac{1}{2} [x^2]_1^2 + \frac{1}{3} [x^3]_1^2 \\ &= 2(2 - 1) - \frac{1}{2}(4 - 1) + \frac{1}{3}(8 - 1) \\ &= 2 - \frac{3}{2} + \frac{7}{3} = \frac{12 - 9 + 14}{6}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{17}{6}$$

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 2x) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 4x) \\ &= \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8} [\sin 4x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \frac{1}{8} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{1}{2}(1 - 0)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } K &= \int_2^3 \left(3x - 2 + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_2^3 d(x^2) - 2 \int_2^3 dx + \int_2^3 d(\ln |x-1|) \\ &= \frac{3}{2} [x^2]_2^3 - 2[x]_2^3 + [\ln |x-1|]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} (9 - 4) - 2(3 - 2) + \ln 2 - \ln 1 = \frac{15}{2} - 2 + \ln 2\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{11}{2} + \ln 2$

V. 1. គេមានចំណុច $A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(-1, 0, 1)$ និង $D(2, 1, 2)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ និង \overrightarrow{BC}

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 0 - 2, 1 - 3) = (2, -2, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-1 - 1, 0 - 2, 1 - 3) = (-2, -2, -2)$

$\overrightarrow{AD} = (2 - 1, 1 - 2, 2 - 3) = (1, -1, -1)$

និង $\overrightarrow{BC} = (-1 - 3, 0 - 0, 1 - 1) = (-4, 0, 0)$

ដូចនេះ: $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -2), \overrightarrow{AC} = (-2, -2, -2); \overrightarrow{AD} = (1, -1, -1)$ និង $\overrightarrow{BC} = (-4, 0, 0)$

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (4 - 4)\vec{i} - (-4 - 4)\vec{j} + (-4 - 4)\vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} \\ &\neq \vec{0} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: ចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

គេមាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 8, -8) = 8(0, 1, -1) = 8 \cdot \vec{n}$

នាំឱ្យ $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \parallel \vec{n}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នាំឱ្យ \vec{n} ក៏ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ដែរ

ដូចនេះ: \vec{n} ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)

2. បង្ហាញថាសមីការ $(2x + 3y)^2 = 12(xy + 3)$ ជាសមីការអេលីប

គេបាន $4x^2 + 12xy + 9y^2 = 12xy + 3 \times 12$

$4x^2 + 9y^2 = 3 \times 4 \times 3$

$\frac{4x^2}{3 \times 4 \times 3} + \frac{9y^2}{3 \times 4 \times 3} = 1$

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ ជាសមីការអេលីបដែលមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក

ដូចនេះ: $(2x + 3y)^2 = 12(xy + 3)$ ជាសមីការអេលីប

រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និង កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ

ដោយ $a = 3$ និង $b = 2$

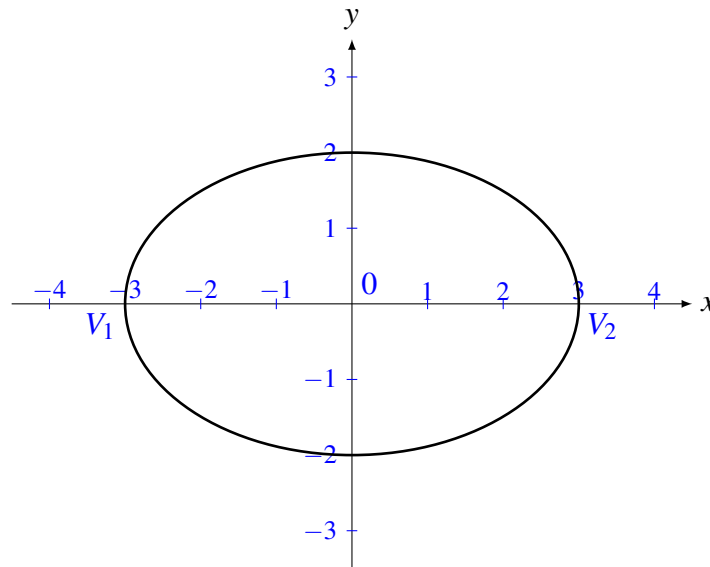
គេបាន ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b = 2 \times 2 = 4$

ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a = 2 \times 3 = 6$

$$\text{កូអរដោនេនៃកំពូល} \begin{cases} V_1(-a, 0) = (-3, 0) \\ V_2(a, 0) = (3, 0) \end{cases}$$

ដូចនេះ: ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ 4 ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ 6 និងកំពូល $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$

សង់អេលីប



VI. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E) : y'' + 4y' = 5y$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 + 4\lambda = 5$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ} \begin{cases} \lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \\ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{-5x}, A, B \in \mathbb{R}$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

ដោយដឹងថាក្រាប (C) ជាអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0, 3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង -3 មានន័យថា $y'(0) = -3$

$$\text{គេមាន } y = Ae^x + Be^{-5x} \Rightarrow y' = Ae^x - 5Be^{-5x}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \begin{cases} y(0) = Ae^0 + Be^0 \\ y'(0) = Ae^0 - 5Be^0 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} 3 = A + B & (1) \\ -3 = A - 5B & (2) \end{cases}$$

$$\text{យកសមីការ (1) ដក (2) គេបាន } 3 - (-3) = A - A + B - (-5B)$$

$$6 = 6B$$

$$\Rightarrow B = 1$$

$$\text{តាម (1) គេបាន } 3 = A + B \Rightarrow A = 3 - B = 3 - 1 = 2$$

ដូចនេះ: ចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) គឺ $y = 2e^x + e^{-5x}$

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ គេតាងក្រាប C

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right] \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x) &= \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right]' \\ &= [-x + 4 + \ln(x+1) - \ln(x-1)]' \\ &= -1 + 0 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1) + (x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1) + (x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-(x^2-1) + x-1 - x-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2+1-2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}}$$

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$\text{ចំពោះ } x > 1 \text{ នាំឱ្យ } (x-1)(x+1) > 0 \text{ នាំឱ្យ } f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ f ចុះជានិច្ច

តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1, +\infty)$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 4 + \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - (-x + 4) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) \\ &= \ln 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $(d_1) : y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតខាង $+\infty$

- ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1, +\infty)$ គេបាន $\frac{x+1}{x-1} > 1$ និងទាញរកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_1) ។

$$\begin{aligned}\text{ចំពោះ } x > 1 \text{ គេបាន } x+1 &> x-1 \text{ នាំឱ្យ } \frac{x+1}{x-1} > 1 \\ \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) &> \ln 1 \\ f(x) - y &> 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d_1) ចំពោះ $x > 1$

- គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (d_2) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f'(x_0) &= \frac{-(x_0^2 + 1)}{(x_0 + 1)(x_0 - 1)} \\ -\frac{5}{3} &= -\frac{x_0^2 + 1}{x_0^2 - 1}\end{aligned}$$

$$5(x_0^2 - 1) = 3(x_0^2 + 1)$$

$$5x_0^2 - 5 - 3x_0^2 - 3 = 0$$

$$2x_0^2 - 8 = 0$$

$$2(x_0 - 2)(x_0 + 2) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \\ x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \end{cases} \text{ មិនយកព្រោះ } x > 1$$

$$\text{នាំឱ្យ } f(x_0) = f(2) = -2 + 4 + \ln \frac{2+1}{2-1} = 2 + \ln 3$$

ដូចនេះ: $(2, 2 + \ln 3)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ (d_2)

សរសេរសមីការបន្ទាត់ (d_2)

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } (d_2) : y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= -\frac{5}{3}(x-2) + 2 + \ln 3 \\ &= -\frac{5x}{3} + \frac{10}{3} + 2 + \ln 3 \\ &= -\frac{5x}{3} + \frac{10+6}{3} + \ln 3\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $(d_2) : y = -\frac{5x}{3} + \frac{16}{3} + \ln 3$

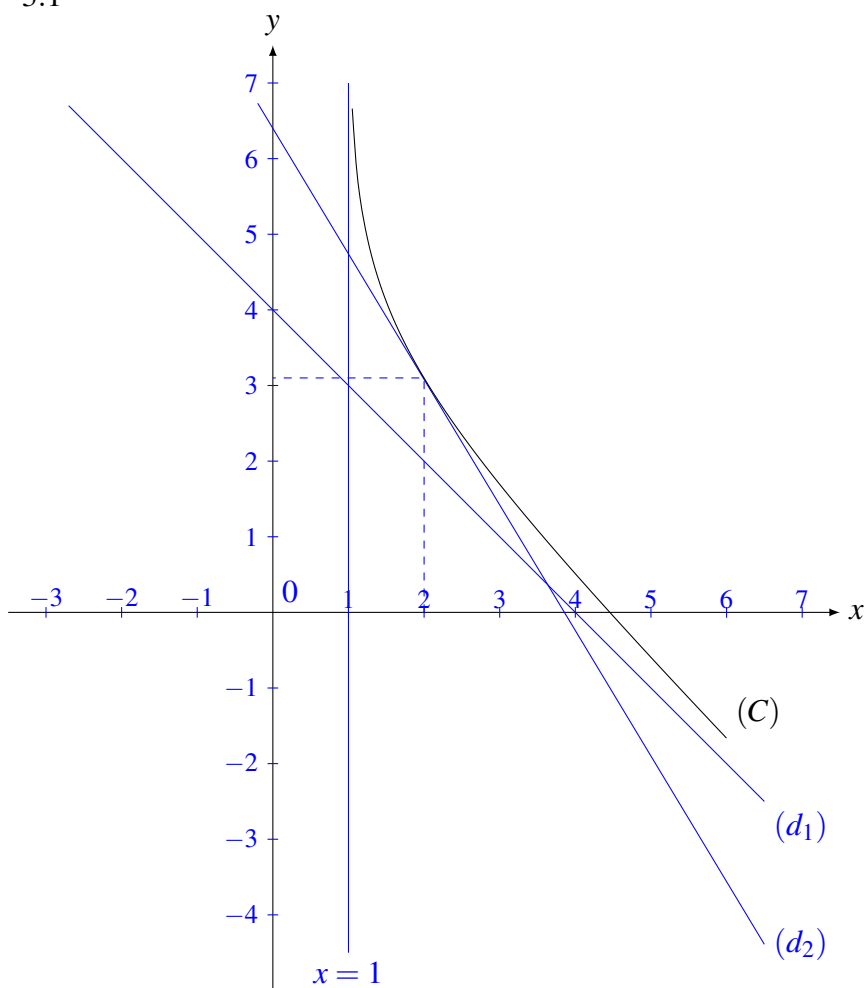
ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_1) និងបន្ទាត់ (d_2) ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3 = 1.1$ និងក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច (4.5, 0)

តារាងតម្លៃលេខ (d_1) : $y = -x + 4$

x	0	4
y	4	0

តារាងតម្លៃលេខ (d_2) : $y = -\frac{5x}{3} + \frac{16}{3} + \ln 3$

x	0	2
y	6.4	3.1



មណ្ឌលប្រឡង
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ឈ្មោះសាលាបង្រៀន: _____

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាបនបត្រ : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០១៩

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x + 1)]$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1}$ ។
- II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមានប៊ូល 16 គ្រាប់ ដែលគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 16 ។ គេចាប់ប៊ូល 3 ចេញពីចុងដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
 A : គេចាប់បានប៊ូលបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 4 ។ B : គេចាប់បានប៊ូលបីមានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5 ។
 C : គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 4 ។
- III. (១៥ពិន្ទុ)
 ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច C សមីការ $z^2 - 8z + 64 = 0$ ។
 ខ. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 4 - 4i\sqrt{3}$ ។ សរសេរ $(2z_1 + \overline{z_2})$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងគណនា $(2z_1 + \overline{z_2})^3$ ។ (យើងតាងដោយ $\overline{z_2}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_2)
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$, $J = \int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx$ និង $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx$ ។
- V. (២៥ពិន្ទុ)
 1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ $(o, \vec{j}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, -1, 4)$, $B(7, -1, -2)$ និង $C(1, 5, -2)$ ។
 ១. ក. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} និង \overrightarrow{BC} ។
 ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។
 គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។
 ឃ. ទាញបង្ហាញសមីការរបស់ប្លង់ (ABC) ។
 ២. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
 2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$ ។ ចូរប្រែសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 3y' + 3y = 2y' + 5y$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$ ។ គេតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។
 ១. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ និង $f(x) = \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2)$ ។
 ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។
 ២. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$ ។
 ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។
 ៣. ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 ។
 ខ. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង (C) ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$ ។
 ៤. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និង B ។ (គេឱ្យតម្លៃ $\ln 2 \approx 0.7$)

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x + 1)]$ រាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x + 1)] [\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1)]}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3})^2 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - (x^2 + 2x + 1)}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x + 1)] = 0$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{\sin^2 x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}$$

$$= -2 \times 1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x} = -2$

គ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{(\sin x + 1)(\sin x - 1)(\sin^2 x + 1)}$$

$$= \frac{1}{[\sin(-\frac{\pi}{2}) - 1][\sin^2(-\frac{\pi}{2})]}$$

$$= \frac{1}{(-1 - 1)(1 + 1)}$$

$$= \frac{1}{-2(2)}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1} = -\frac{1}{4}$

ក. • $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

• $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$

ខ. • $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

ក. • $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

• $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

• $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង B

តាង S : គេចាប់ប៊ូល 3 ចេញពីបង់ដែលមានប៊ូល 16

$$\text{នាំឱ្យ } n(S) = C(16, 3) = \frac{16!}{(16-3)!3!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!3!} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 16 \text{ ករណី}$$

A : គេចាប់បានប៊ូលបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 4

$$\text{គឺ } A = \{4, 8, 12, 16\} \text{ នាំឱ្យ } n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } A \text{ គឺ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 16} = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{1}{140}$$

B : គេចាប់បានប៊ូលបីមានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5

$$\text{គឺ } B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16\}$$

$$\text{នាំឱ្យ } n(B) = C(13, 3) = \frac{13!}{(13-3)!3!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{10!6} = 2 \cdot 11 \cdot 13 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } B \text{ គឺ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 13}{5 \cdot 7 \cdot 16} = \frac{11 \cdot 13}{5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{143}{280}$$

C : គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 4

ដោយលេខដែលចែកដាច់នឹង 4 មានបួនលេខគឺ $\{4, 8, 12, 16\}$

និងលេខដែលចែកមិនដាច់មាន 12 លេខគឺ $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$

$$\text{នាំឱ្យ } n(C) = C(4, 1) \cdot C(12, 2) = 4 \times \frac{12!}{(12-2)!2!} = \frac{4 \cdot 10! \cdot 11 \cdot 12}{10!2} = 2 \cdot 11 \cdot 12 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } C \text{ គឺ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 12}{5 \cdot 7 \cdot 16} = \frac{11 \cdot 3}{35 \cdot 2} = \frac{33}{70}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{140}, P(B) = \frac{143}{280} \text{ និង } P(C) = \frac{33}{70}}$$

III. ក. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 8z + 64 = 0$

$$\text{គេបាន } z^2 - 2z4 + 4^2 + 48 = 0$$

$$(z - 4)^2 - (4\sqrt{3}i)^2 = 0$$

$$(z - 4 - 4\sqrt{3}i)(z - 4 + 4\sqrt{3}i) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} z - 4 - 4\sqrt{3}i = 0 \\ z - 4 + 4\sqrt{3}i = 0 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} z = 4 + 4\sqrt{3}i \\ z = 4 - 4\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការមានឫស } z = 4 + 4\sqrt{3}i \text{ ឬ } z = 4 - 4\sqrt{3}i}$$

ខ. សរសេរ $(2z_1 + \overline{z_2})$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងគណនា $(2z_1 + \overline{z_2})^3$

$$\text{គេមាន } z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i \text{ និង } z_2 = 4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\text{គេបាន } (2z_1 + \overline{z_2}) = 2(4 + 4\sqrt{3}i) + 4 + 4\sqrt{3}i$$

$$= 12 + 12\sqrt{3}i$$

$$= 24 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= 24 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(2z_1 + \overline{z_2})^3 = 24^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right)$$

$$= 24^3 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= 24^3 (-1 + 0i)$$

$$\text{ដូចនេះ: } (2z_1 + \overline{z_2}) = 24 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ និង } (2z_1 + \overline{z_2})^3 = -24^3$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - 0 \\ &= \frac{3 + 2(5) + 15}{15} \\ &= \frac{3 + 10 + 15}{15} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{28}{15}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx \\ &= [e^x - x]_0^{\ln 6} \\ &= (e^{\ln 6} - \ln 6) - (e^0 - 0) \\ &= 6 - \ln 6 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = 5 - \ln 6$$

$$\begin{aligned} \text{និង } K &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d \left[\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin^5 x) \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{3} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{5} \left(\sin^5 \frac{\pi}{4} - \sin^5 0^\circ \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{5 \times 2^5} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{43\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } K = \frac{40 + 23\sqrt{2}}{120}$$

V. 1. គេមានចំណុច $A(1, -1, 4), B(7, -1, -2)$ និង $C(1, 5, -2)$ ។

១. ក. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ និង \overrightarrow{BC}

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (7 - 1, -1 + 1, -2 - 4) = (6, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 1, 5 - (-1), -2 - 4) = (0, 6, -6)$$

$$\text{និង } \overrightarrow{BC} = (1 - 7, 5 + 1, -2 + 2) = (-6, 6, 0)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{AB} = (6, 0, -6), \overrightarrow{AC} = (0, 6, -6) \text{ និង } \overrightarrow{BC} = (-6, 6, 0)$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (0 + 36)\vec{i} - (-36 + 0)\vec{j} + (36 - 0)\vec{k} \\ &= (36, 36, 36) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{ចំណុច } A, B, C \text{ បង្កើតបានប្លង់មួយ}$$

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (36, 36, 36)$$

$$= 36(1, 1, 1) = 36\vec{n}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \parallel \vec{n}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \vec{n} \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)$$

ឃ. រកសមីការប្លង់ (ABC)

$$\text{គេបាន } 1(x - x_A) + 1(x - y_A) + 1(z - z_A) = 0$$

$$(x - 1) + [y - (-1)] + (z - 4) = 0$$

$$x - 1 + y + 1 + z - 4 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{សមីការប្លង់ } (ABC) : x + y + z - 4 = 0$$

ង. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$$\text{គេមាន } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36}$$

$$= 6\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{0 + 36 + 36}$$

$$= 6\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{និង } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 36 + 0}$$

$$= 6\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{គេបាន } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$\text{ដូចនេះ: } \triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}$$

2. គេមាន $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$

គេបាន $y^2 + 2y(2) + 4 = 8x + 16$

$$(y+2)^2 = 8(x+2)$$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y+2)^2 = 8(x+2)$

ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

ដោយ $h = -2, k = -2$ និង $4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$

គេបាន កំពូល $V(h, k) \Rightarrow V(-2, -2)$

កំណុំ $F(h+p, k) \Rightarrow F(-2+2, -2) \Rightarrow F(0, -2)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: x = h - p = -2 - (2) = -4$

ដូចនេះ: កូអរដោនេកំពូល $V(-2, -2)$ កំណុំ $F(0, -2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: x = -4$ សង់ប៉ារ៉ាបូល

- ចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ចំពោះ $y = 0$ នោះ $(0+2)^2 = 8(x+2)$

$$\frac{1}{2} = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2} - 2$$

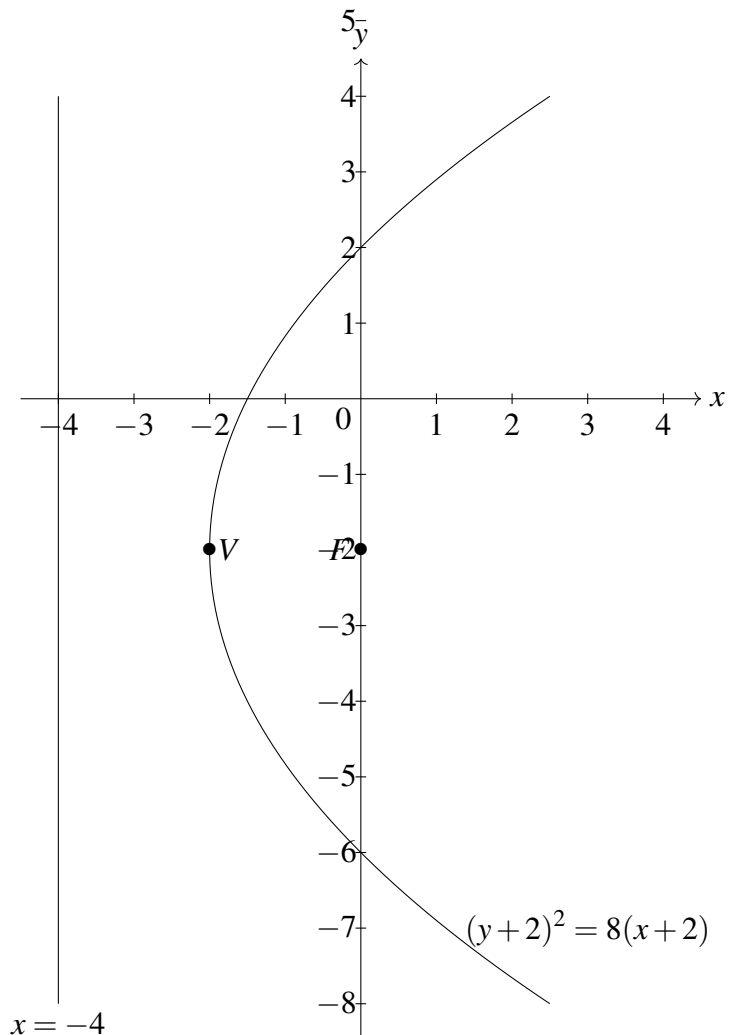
$$= -\frac{3}{2}$$

- ចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលនិងអ័ក្សអរដោនេ

ចំពោះ $x = 0$ នោះ $(y+2)^2 = 16$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+2 = -4 \\ y+2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$



VI. ដោះស្រាយសមីការ (E) : $y'' + 3y' + 3y = 2y' + 5y$

$$y'' + 3y' - 2y' + 3y - 5y = 0$$

$$y'' + y' - 2y = 0$$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 + r - 2 = 0$

$$(r-1)(r+2) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} r-1=0 \\ r+2=0 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } \begin{cases} r=1 \\ r=-2 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) : $y = Ae^x + Be^{-2x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

$$\text{នាំឱ្យ } y' = -(-2x)'e^{-2x} + 2e^x$$

$$= 2e^{-2x} + 2e^x$$

$$y'' = 2(-2x)'e^{-2x} + 2e^x$$

$$= -4e^{-2x} + 2e^x$$

$$\text{តេបាន } y'' + y' - 2y = -4e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-2x} + 2e^x - 2(-e^{-2x} + 2e^x)$$

$$= -2e^{-2x} + 4e^x + 2^{-2x} - 4e^x$$

$$= 0$$

ដូចនេះ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$

១. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ និង $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - x \ln x - 2)$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$$

$$= \frac{x}{x} \left(x - \frac{2}{x} - \ln x \right)$$

$$= x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$\text{និង } f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 2 - x \ln x)$$

$$= \frac{1}{x}(x^2 - x \ln x - 2)$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \text{ និង } f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - x \ln x - 2)$$

២. ប្រើលទ្ធផលដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}(x^2 - x \ln x - 2) = -\infty$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

២. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x = x - \frac{2}{x} - \ln x$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2 + 2 - x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - x + 2}{x^2} \end{aligned}$$

ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $x^2 > 0$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2 - x + 2$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2} \text{ និង } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } x^2 - x + 2$$

- ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$\text{បើ } x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4} \text{ មិនពិតចំពោះ } x \in \mathbb{R}$$

នាំឱ្យ $x^2 - x + 2 > 0$ នោះ $f'(x) > 0$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) > 0 \text{ ចំពោះ } x \in (0, +\infty)$$

តារាងអថេរភាព

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

៣. ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 នាំឱ្យ $f(1) = \frac{1-2}{1} - \ln 1 = -1$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1^2 - 1 + 2}{1^2}(x-1) - 1 \\ &= 2(x-1) - 1 \\ &= 2x - 2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច } A \text{ គឺ } y = 2x - 3$$

- ខ. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង (C) ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច B គឺស្របនឹងសមីការបន្ទាត់ $y = x$

នោះគេបាន $f'(x_B) = y'$

$$\frac{x_B^2 - x_B + 2}{x_B^2} = 1$$

$$x_B^2 - x_B + 2 = x_B^2$$

$$\begin{aligned}x_B = 2 \Rightarrow f(2) &= \frac{2^2 - 2}{2} - \ln 2 \\&= 1 - 0.7 \\&= 0.3\end{aligned}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច B គឺ $B(2, 0.3)$

$$\begin{aligned}\text{ម៉ូឌុលទៀបបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ } B \text{ មានសមីការ } y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\&= \frac{2^2 - 2 + 2}{2^2}(x - 2) + 0.3 \\&= x - 2 + 0.3 \\&= x - 1.7\end{aligned}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច B មានសមីការ $y = x - 1.7$

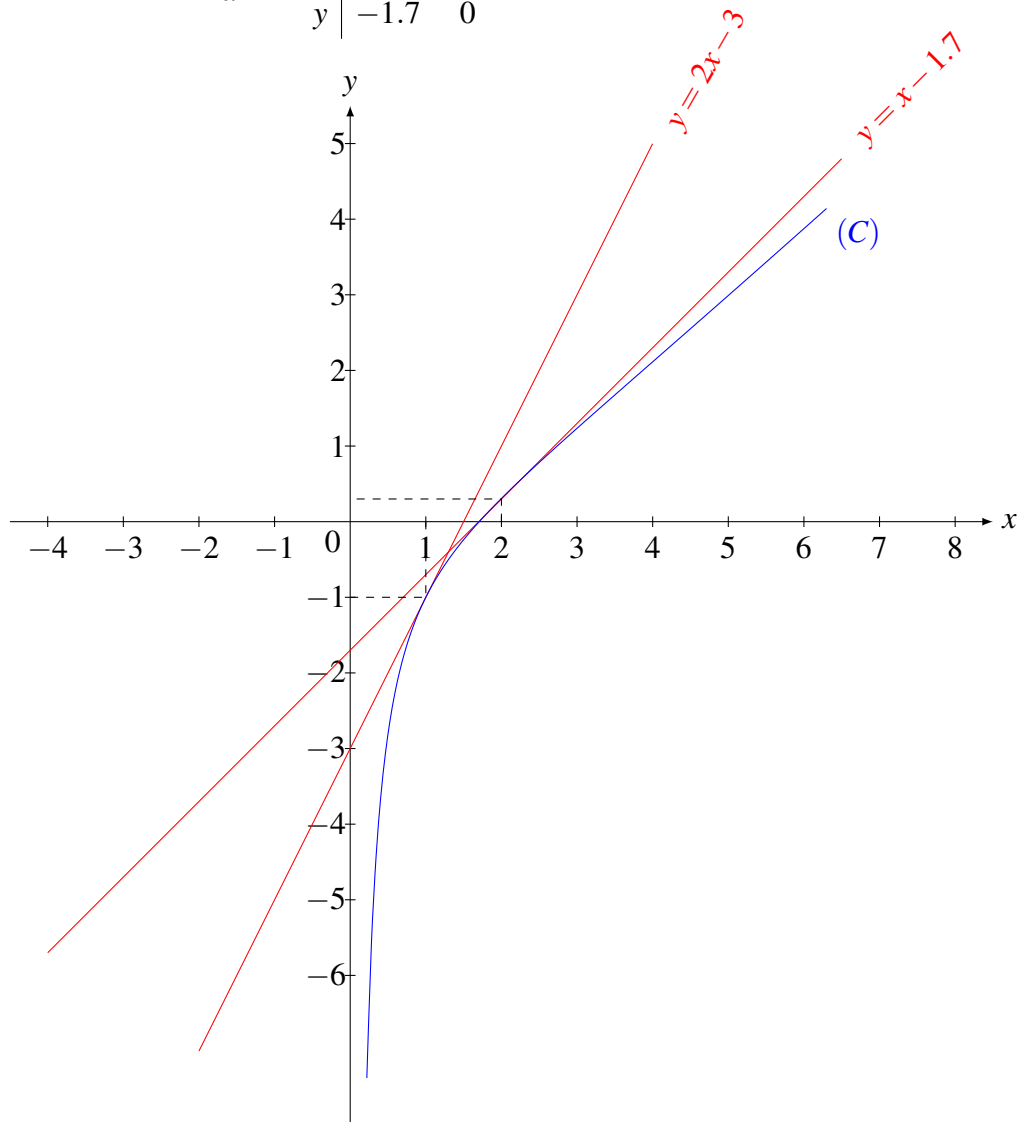
៤. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និង B

បន្ទាត់ $y = 2x - 3$ មានតារាងតម្លៃលេខ

x	0	1.5
y	-3	0

បន្ទាត់ $y = x - 1.7$ មានតារាងតម្លៃលេខ

x	0	1.7
y	-1.7	0



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០២១

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 11}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{3} - x)}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមួយមានឃើញពណ៌ក្រហមចំនួន ២ ឃើញពណ៌ខៀវចំនួន ៣ និងឃើញពណ៌សចំនួន ៤ ។ គេចាប់យកឃើញចំនួន ៣ ចេញពីក្នុងចំណោមដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ឃើញទាំង ៣ មានពណ៌ស។

B: ឃើញទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា។

III. (១៥ពិន្ទុ)

ក. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។ រក $\overline{z_1}(\overline{z_1})$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 ។

ខ. រកមូឌុល និងអាក្យម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 ។ សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. បង្ហាញថា $\overline{z_1}$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)dx$, $J = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$ និង $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cos x) dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0, -2, 0), B(-4, 1, 2), C(0, 3, 7)$ និង $D(4, 0, 5)$ ។ រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង \overrightarrow{AD} រួចបង្ហាញចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណកែង តែមិនមែនជាការ៉េ។

2. គេមានសមីការ $9y^2 = 25(3 - x)(3 + x)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរបស់អេលីបនេះ។ សង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' = -4y$ ។

1. បង្ហាញថា $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ ដែល λ, μ ជាចំនួនពិត ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

2. រកចម្លើយពិសេសរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y''(0) = 1$ និង $y'(0) = 0$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$ ។ យើងតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ យើងដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ត្រង់ $+\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (D) ។

3. យើងតាង $f'(x)$ ដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}$ ។ គេដឹងថាគ្រប់ x ធាតុរបស់ $\mathbb{R}, e^x - 2x > 0$ ។ ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីទាញយកការសិស្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស ០ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ (D) ។ សង់បន្ទាត់ $(D), (\Delta)$ និងក្រាប (C) ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 11} = \sqrt{3(3)^2 - 11} = \sqrt{3 \times 9 - 11} = \sqrt{16} = 4$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{3} - x)} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin t}{-t} &= -\sqrt{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -\sqrt{3} \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3} - x} = -\sqrt{3}}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x) \text{ រាងមិនកំណត់ } +\infty - \infty$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{7}{x} - 11 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7 - 11 \ln x) = +\infty}$$

II. តាង S : គេចាប់យកឃ្លីចំនួន 3 ចេញពីឃ្លីសរុប 9 គ្រាប់

$$\text{នាំឱ្យករណីអាច } n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ ករណី}$$

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $p(A)$

ដោយ A : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ស

$$\text{នាំឱ្យ } n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(A) = \frac{1}{21}}$$

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $p(B)$

ដោយ B : ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា

$$\text{នាំឱ្យ } n(B) = C(2, 1) \cdot C(3, 1) \cdot C(4, 1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{p(B) = \frac{2}{7}}$$

III. គេមាន $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$ក. \text{ រក } \overline{z_1} \text{ (ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច } z_1)$$

$$\text{នាំឱ្យ } \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$ខ. \text{ រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច } z_1$$

$$\text{គេបាន } |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{និង } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ម៉ូឌុល } |z_1| = 2 \text{ និង អាគុណម៉ង់ } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= |z_1| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

គ. បង្ហាញថា \bar{z}_1 ជាឫសរបស់សមីការ $z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } 2(\bar{z}_1\sqrt{2} - 2) &= 2[(\sqrt{2} - i\sqrt{2})\sqrt{2} - 2] \\ &= 2(2 - 2i - 2) \\ &= \sqrt{2} - 4i + (\sqrt{2}i)^2 \\ &= (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 \\ &= \bar{z}_1^2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\bar{z}_1 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx \\ &= [x^3 - x^2 + x]_0^1 \\ &= 1^3 - 1^2 + 1 - (0) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 1}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } J &= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} \\ &= \ln |e^x + 1|_0^1 \\ &= \ln(e + 1) - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = \ln \frac{e + 1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \left(\sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{K = \frac{3}{16}}$$

- V. 1. គេមាន $A(0, -2, 0), B(-4, 1, 2), C(0, 3, 7)$ និង $D(4, 0, 5)$

រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង \overrightarrow{AD}

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (-4 - 0, 1 + 2, 2 - 0) = (-4, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 + 4, 3 - 1, 7 - 2) = (4, 2, 5)$$

$$\overrightarrow{CD} = (4 - 0, 0 - 3, 5 - 7) = (4, -3, -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (4 - 0, 0 + 2, 5 - 0) = (4, 2, 5)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{AB} = (-4, 3, 2), \overrightarrow{BC} = (4, 2, 5), \overrightarrow{CD} = (4, -3, -2) \text{ និង } \overrightarrow{AD} = (4, 2, 5)$$

បង្ហាញថាតួកោណ $ABCD$ ជាតួកោណកែង តែមិនមែនជាការ៉េ

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{និង } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(-4) + 2(3) + 5(2)$$

$$= -16 + 6 + 10$$

$$= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ និង } |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AD}|$$

$$\text{ដូចនេះ: } ABCD \text{ ជាតួកោណកែងមិនមែនជាការ៉េ}$$

2. បង្ហាញថាសមីការ $9y^2 = 25(3-x)(3+x)$ ជាសមីការអេលីប

$$\text{គេបាន } 9y^2 = 25(3-x)(3+x)$$

$$3^2y^2 = 5^2(9-x^2)$$

$$3^2y^2 = 5^2 \cdot 3^2 - 5^2x^2$$

$$5^2x^2 + 3^2y^2 = 5^2 \cdot 3^2$$

$$\frac{5^2x^2}{5^2 \cdot 3^2} + \frac{3^2y^2}{5^2 \cdot 3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } 9y^2 = 25(3-x)(3+x) \text{ ជាសមីការអេលីប}$$

រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរ

$$\text{ដោយ } a = 5, b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{គេបាន ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ } 2a = 2 \times 5 = 10 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

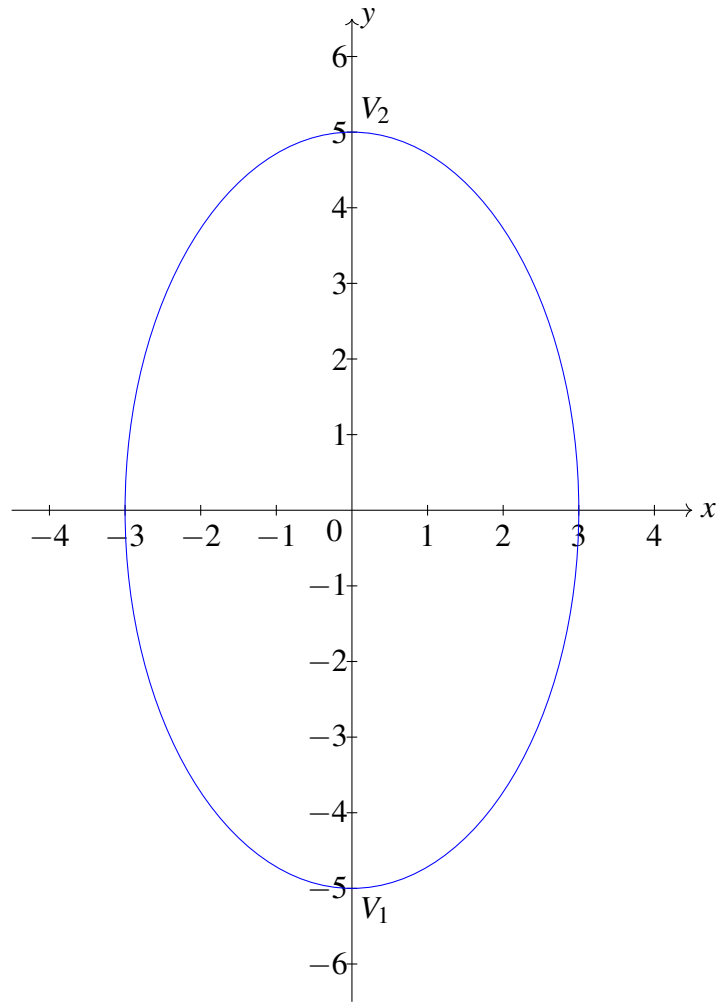
$$\text{ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ } 2b = 2 \times 3 = 6 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{កំពូលគឺ } V_1(0, -a) = (0, -5) \text{ និង } V_2(0, a) = (0, 5)$$

$$\text{កំណុំគឺ } F_1(0, -c) = (0, -4) \text{ និង } F_2(0, c) = (0, 4)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \begin{array}{l} \text{ប្រវែងអ័ក្សធំ } 2a = 10 \text{ ឯកតាប្រវែង, ប្រវែងអ័ក្សតូច } 2b = 6 \text{ ឯកតាប្រវែង} \\ \text{កូអរដោនេ កំពូល } V_1(0, -5) \text{ និង } V_2(0, 5) \text{ និង កំណុំគឺ } F_1(0, -4) \text{ និង } F_2(0, 4) \end{array}$$

សង់អេលីបនេះ



VI. តេមាស (E) : $y'' = -4y$

1. បង្ហាញថា $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ ដែល λ, μ ជាចំនួនពិត ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$\text{គេបាន } y' = -\lambda 2 \sin 2x + \mu 2 \cos 2x$$

$$y'' = -4\lambda \cos 2x - 4\mu \sin 2x$$

$$= -4(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$$

$$= -4y$$

ដូចនេះ $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

2. រកចម្លើយពិសេសរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$\text{ចំពោះ } y''(0) = 1 \text{ នោះ } y''(0) = -4(\lambda \cos 0 + \mu \sin 0)$$

$$1 = -4(\lambda)$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}$$

$$\text{និង } y'(0) = 0 \text{ នោះ } y'(0) = -\lambda 2 \sin 2x + \mu 2 \cos 0$$

$$0 = 2\mu$$

$$\mu = 0$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃ (E) : $y = -\frac{1}{4} \cos 2x$

VII. (៣៥ពិន្ទុ) តេមាសក្រាប (C) ដែល $f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ដែនកំណត់ } D = \mathbb{R}}$

គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} \right] \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x} - (x - 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{(D) : y = x - 2 \text{ ជាអស៊ីមតូតទ្រេតនៃ } (C) \text{ ខាង } +\infty}$

បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (D)

$$\text{ដោយ } f(x) - y = \frac{2(x+1)}{e^x}$$

$$\text{បើ } f(x) - y = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{បើ } f(x) - y > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{បើ } f(x) - y < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

ដូចនេះ: $\boxed{\begin{array}{l} x > -1 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ } (D) \\ x < -1 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ } (D) \end{array}}$

3. បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 1 - 0 + 2 \left[\frac{(x+1)'e^x - (e^x)'(x+1)}{(e^x)^2} \right] \\ &= 1 + 2 \frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1 - x - 1}{e^x} \\ &= \frac{e^x - 2x}{e^x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}}$

សិស្សអរមេរោពនៃអនុគមន៍ f

ដោយ $e^x - 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x} > 0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជាដាច់ខាត។

តារាងអថេរគោត

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ (D)

$$\text{គេមាន } f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x} \Rightarrow f'(0) = \frac{e^0 - 2(0)}{e^0} = 1$$

$$\text{និង } D: y = x - 2 \Rightarrow y' = 1$$

$$\text{ដោយ } y' = f'(0)$$

ដូចនេះ: (Δ) ស្របនឹងបន្ទាត់ D

សង់បន្ទាត់ (D), (Δ) និងក្រាប (C)

$$\text{ចំពោះ } (D): y = x - 2$$

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	2
y	-2	0

$$\text{ចំពោះ } (\Delta): y - f(0) = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = x + \left[0 - 2 + \frac{2(0+1)}{1} \right] = x$$

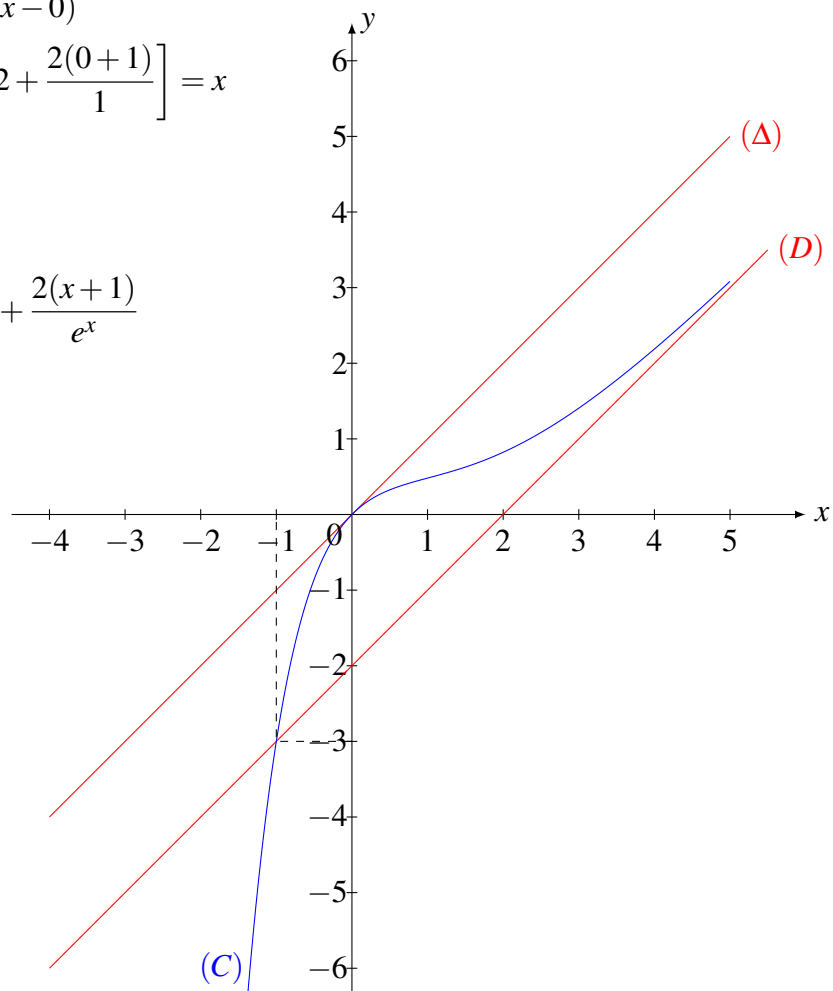
តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1
y	0	1

$$\text{ចំពោះ } (C): f(x) = x - 2 + \frac{2(x+1)}{e^x}$$

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	-1
$f(x)$	0	-3



មណ្ឌលប្រឡង:-----

លេខបន្ទប់:----- លេខតុ:-----

ឈ្មោះបេក្ខជន:-----

ឋានៈលេខាបេក្ខជន:-----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០២២

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3} - x)}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $I = \int_0^1 (2 - x + 2x^2) dx$

ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) dx$

គ. គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$ ។ គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i(3 + 2i)(2 + i)^2$ ។

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចរក $\overline{z_1}$ ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទាត់នៃ z_1 ។

ខ. សរសេរ $z_2 = z_1 + 19$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គណនា៖ z_2^4 និង z_2^6 ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងមណ្ឌលសុខភាពមួយមានបុគ្គលិកនារី១ នាក់ និងបុគ្គលិកបុរស 5 នាក់។ គេរៀបចំជាក្រុមការងារមួយក្រុមមានគ្នា 4 នាក់ ដោយចៃដន្យឲ្យចុះធ្វើការតាមភូមិ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិកទាំង 4 នាក់សុទ្ធតែជានារី។

B : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិក 50% ជានារី ។

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(0, 1, 1), N(1, 2, 2), P(0, 3, -4)$ និង $Q(-2, 1, 0)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$ និងរកប្រវែងវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ។

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ NPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។

2. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $(y + 2)^2 = -8(x - 2)$ ។ សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ y_0 កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $y_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E') : y' + y = 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = e$ ។

VII. (៤០ពិន្ទុ)

A. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x - \ln(1 + x)$ ។ យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់ f ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។

2. សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ D និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ D ។

B. គេចង់សិក្សាទីតាំងរបស់ក្រាប (C) នៃ f ធៀបទៅនឹងក្រាប (P) ដែលមានសមីការ $y = \frac{1}{2}x^2$ ។

1. ក្នុងន័យនេះគេបង្កើតអនុគមន៍ g កំណត់លើ D ដែនកំណត់របស់ f ដោយ $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g និងទាញយកសញ្ញានៃ $g(x)$ កាលណា x រត់នៅលើ D ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងក្រាប (P) ។

2. សង់ក្រាប (C) និងក្រាប (P) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។

ជំនេរស្រាយ

I. គណនាលីមីត៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x} = \frac{e^0 + 1}{2e^0}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x} = 1}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)[(\sqrt{x})^2-1]}{(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x+3})^2-2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \text{ ចំពោះ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3}t}{\sin t} = -\sqrt{3} \cdot 1 \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} = -\sqrt{3}}$$

II. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } I &= \int_0^1 (2-x+2x^2)dx \\ &= 2 \int_0^1 dx - \int_0^1 xdx + 2 \int_0^1 x^2dx \\ &= 2x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 \\ &= (2 \cdot 1 - 2(0)) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{13}{6}}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 4x) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin 2x) \\
 &= \frac{\sin 4x}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{8} \left(\sin \frac{4\pi}{4} - \sin 0 \right) - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2\pi}{4} - \sin 0 \right) \\
 &= 0 - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $J = -\frac{1}{4}$

គ. តើមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$

តើបាន $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)} = \frac{2x(2x - 1) + (2x - 1) - 3}{4(2x - 1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4x^2 - 2x + 2x - 1 - 3}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{4(x^2 - 1)}{4(2x - 1)} \\
 &= \frac{x^2 - 1}{2x - 1} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$

គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^0 d(x^2) + \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dx - \frac{3}{8} \int_{-1}^0 d(\ln |2x - 1|) \\
 &= \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x}{4} \Big|_{-1}^0 - \frac{3 \ln |2x - 1|}{8} \Big|_{-1}^0 \\
 &= \left(0 - \frac{1}{4} \right) + \left(0 + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{8} (\ln 1 - \ln 3) \\
 &= \frac{3 \ln 3}{8}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{3 \ln 3}{8}$

III. គេមាន $z_1 = i(3 + 2i)(2 + i)^2$

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចរក \bar{z}_1 ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= i(3 + 2i)(2 + i)^2 \\ &= (3i + 2i^2)(4 + 4i + i^2) \\ &= (-2 + 3i)(3 + 4i) \\ &= -6 - 8i + 9i - 12 \\ &= -18 + i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = -18 + i \text{ និង } \bar{z}_1 = -18 - i}$$

ខ. សរសេរ $z_2 = z_1 + 19$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_2 &= z_1 + 19 \\ &= -18 + i + 19 \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

គណនា z_2^4 និង z_2^6

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_2^4 &= (\sqrt{2})^4 \left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} \right) \\ &= 4(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= 4(-1 + 0i) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) \\ &= 2^3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= 8(0 - i) = -8i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_2^4 = -4 \text{ និង } z_2^6 = -8i}$$

IV. រក $P(A)$ និង $P(B)$

តាង S : “ជ្រើសរើស 4 នាក់ចេញពីបុគ្គលិកសរុប 14 នាក់”

$$\text{នាំឲ្យ } n(S) = C(14, 4) = \frac{14!}{(14-4)!4!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{10! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \text{ ជម្រើស}$$

ដោយ A : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិកទាំង 4 នាក់សុទ្ធតែជានារី

$$\text{នាំឲ្យ } n(A) = C(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} = 2 \cdot 7 \cdot 9 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{18}{143}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{18}{143}}$$

និង B : ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិក 50% ជានារី

$$\text{នាំឲ្យ } n(B) = C(9, 2) \cdot C(5, 2) = \frac{9!}{(9-2)!2!} \times \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{7!2!} \times \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{360}{1001}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{360}{1001}}$$

V. 1. គេមាន $M(0, 1, 1), N(1, 2, 2), P(0, 3, -4)$ និង $Q(-2, 1, 0)$

$$\text{ក. កេរ៉ិចទ័រ } \overrightarrow{MN} = (1 - 0, 2 - 1, 2 - 1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{NP} = (0 - 1, 3 - 2, -4 - 2) = (-1, 1, -6)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (-2 - 1, 1 - 2, 0 - 2) = (-3, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 0, 1 - 3, 0 + 4) = (-2, -2, 4)$$

និងរកប្រវែងកេរ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{NP}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{NQ}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ NPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q

$$\text{ដោយ } 38 = 14 + 24$$

$$(\sqrt{38})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2$$

$$|\overrightarrow{NP}|^2 = |\overrightarrow{NQ}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ គេបាន ត្រីកោណ NPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q

រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ NPQ

$$\text{គេបាន } S = \frac{|\overrightarrow{NQ}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$= \frac{4}{2} \cdot \sqrt{21}$$

$$= 2\sqrt{21} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

2. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមានសមីការ } (y + 2)^2 = -8(x - 2) \text{ នាំឲ្យ } h = 2, k = -2 \text{ និង } 4p = -8 \text{ នាំឲ្យ } p = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\text{គេបាន កំពូល } V(h, k) \Rightarrow V(2, -2)$$

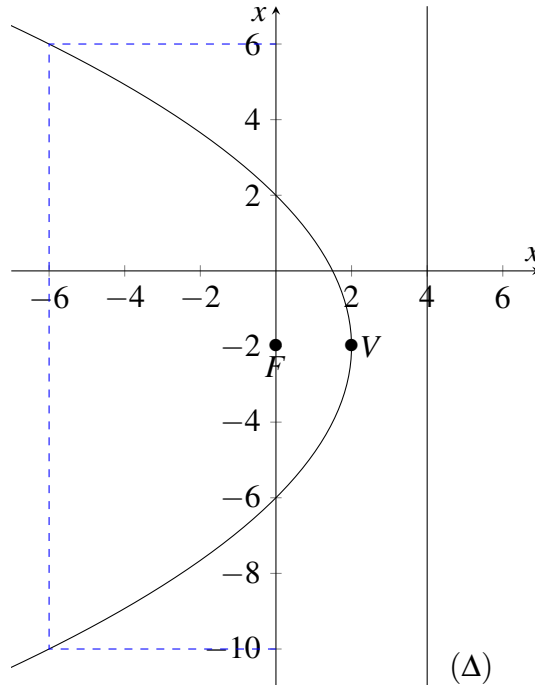
$$\text{កំណុំ } F(h + p, k) \Rightarrow V(0, -2)$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } \Delta : x = h - p = 2 - (-2) = 4$$

ចំពោះ $x = -6$ នោះគេបាន $(y+2) = -8(-6-2)$

$$(y+2) = 8^2 \Rightarrow \begin{cases} y+2 = -8 \\ y+2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -10 \\ y = -6 \end{cases}$$

សង់ប៉ារ៉ាបូល



VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$ ។

ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ y_0 កំណត់លើ \mathbb{R} ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } y_0(x) &= (x^2 + 2x)e^{-x} \Rightarrow y'_0(x) = (x^2 + 2x)'e^{-x} + (e^{-x})'(x^2 + 2x) \\ &= (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x) \\ &= e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x) \\ &= e^{-x}(2 - x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y'_0(x) + 2y_0 &= e^{-x}(2 - x^2) + (x^2 + 2x)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2 - x^2 + x^2 + 2x) \\ &= 2(x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: y_0 ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E') : y' + y = 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = e$

គេបាន $y = Ae^{-x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

$$\text{នាំឲ្យ } y(0) = Ae^0 \Rightarrow e = A$$

$$\text{នាំឲ្យ } y = e \cdot e^{-x} = e^{1-x}$$

ដូចនេះ: $y = e^{1-x}$

VII. A. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x - \ln(1+x)$

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$

ដូចនេះ: $D = (-1, +\infty)$

គណនា $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x - \ln(1+x)] = +\infty$

និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1+x)]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = +\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ D និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ D
 គេមាន $f(x) = x - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = [x - \ln(1+x)]'$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{(1+x)'}{1+x} \\ &= \frac{1+x-1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

ដោយ $1+x > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម x

សញ្ញា $f'(x)$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$

ដោយ f' ប្តូរសញ្ញាសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = 0$ នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$
 តារាងអថេរភាព

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$f(x)$ ចុះលើចន្លោះ: $(-1, 0)$

$f(x)$ កើនលើចន្លោះ: $(0, +\infty)$

និង $x = 0$ នាំឲ្យ $f(x) = 0$

B. គេមាន $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$

1. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g និងទាញយកសញ្ញានៃ $g(x)$ កាលណា x តែនៅលើ D

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } g : g(x) &= f(x) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x \\ &= \frac{x}{1+x} - x \\ &= \frac{x - x - x^2}{1+x} \\ &= -\frac{x^2}{1+x} < 0, \text{ ព្រោះ } \frac{x^2}{1+x} > 0 \text{ ចំពោះ } x \in D \end{aligned}$$

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$

ដោយ $g'(x) < 0$ នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ D

បើ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ នាំឲ្យ $g(0) = 0$

គេបាន $g(x) > 0$ លើចន្លោះ $(-1, 0)$

$g(x) < 0$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងក្រាប (P)

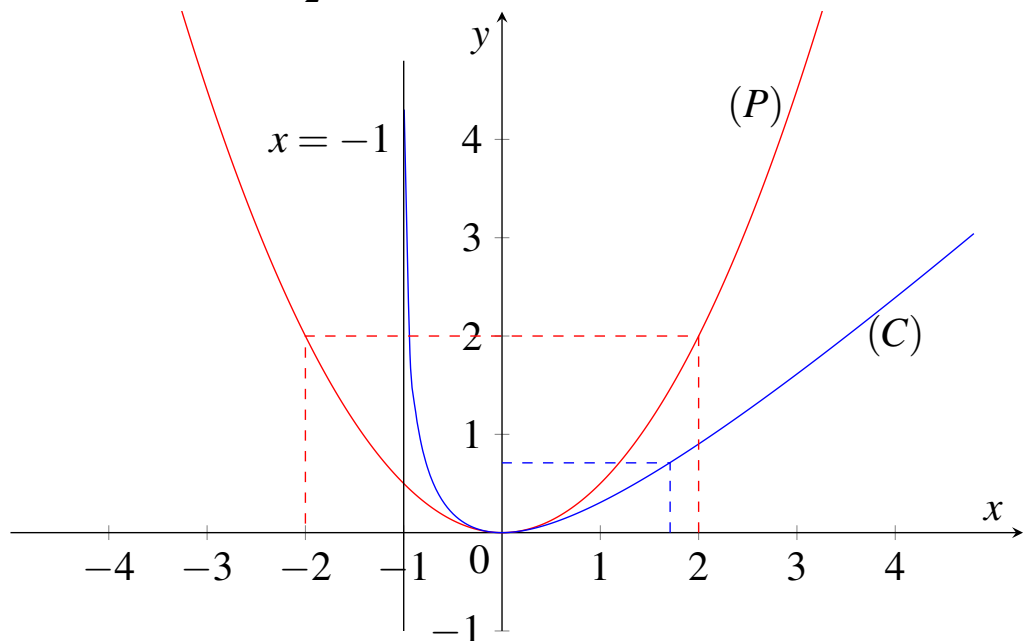
$g(x) > 0$ លើចន្លោះ $(-1, 0)$ នោះ $f(x) - y > 0$ នោះគេបានក្រាប (C) ប៊ិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) លើចន្លោះ $(-1, 0)$

និង $g(x) < 0$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$ នោះ $f(x) - y < 0$ នោះគេបានក្រាប (C) ប៊ិតនៅក្រោមប៉ារ៉ាបូល (P) លើចន្លោះ $(0, +\infty)$

2. សង់ក្រាប (C) និងក្រាប (P)

ក្រាប (C) ចំពោះ $x = 1.71 \Rightarrow f(1.71) = 1.71 - \ln e = 1.71 - 1 = 0.71$

ប៉ារ៉ាបូល (P) ចំពោះ $y = 2$ នោះ $2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 4 = x^2$ នាំឲ្យ $x = \pm 2$



មណ្ឌលប្រឡង
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន: _____

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ឆ្នាំ២០២៣

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ គេដឹងថា $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

គ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{27(\sqrt{x+6} - 3)}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{2 + 2 \sin x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $I = \int_0^3 (x-1)(x+3)dx$

ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin^4 x \cos x dx$

គ. $K = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2x+1} \right) dx$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចសមីការ: $z^2 + 4z + 16 = 0$ ។ សរសេរចម្លើយទាំងពីរតាងដោយ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. (១០ពិន្ទុ) អ្នកលក់បន្លាត់ម្នាក់ គាត់មានបន្លាត់ជ័រសំប៉ែតចំនួន 25 ដែលក្នុងនោះមានបន្លាត់ 3 ដែលឆែបចុង ។ គេចាប់យកបន្លាត់មួយក្នុងចំណោម 25 ដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A : “បន្លាត់ដែលចាប់បានមិនឆែបចុង”

ខ. អ្នកទិញគាត់ចាប់យកដោយមិនជឿងផ្គាត់ ហើយគាត់ចង់បានជាប់ខាតបន្លាត់ល្អចំនួន 7 តើគាត់ត្រូវទិញបន្លាត់យ៉ាងតិចប៉ុន្មាន? ។

គ. គេចាប់យកបន្លាត់ 2 ម្តងដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមបន្លាត់ទាំង 25 ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B : “បន្លាត់ទាំងពីរចាប់បានមិនឆែបចុង”

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(5, -5, 2), B(-1, 1, 0), C(0, 1, 2)$ និង $D(6, 6, -1)$ ។

ក. បង្ហាញចំណុច A, B, C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែង និងរកផ្ទៃក្រឡាប្រសព្វត្រីកោណនេះ។

2. គេឱ្យសមីការ $12(xy + 3) - (3x + 2y)^2 = 0$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

ខ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ រួចសង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ)

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : 3y'' = 9y - 6y'$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ ។ ($\ln e = 1$)

VII. (៤០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។ គេតាង (C) ក្រាបរបស់ f ។

A. 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ។ គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

3. សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (D) ។

B. 1. គណនា $f'(x)$ ដែល $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងគណនាតម្លៃអតិបរមារបស់ f ។

2. A ជាចំណុចនៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ។

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ។

4. សង់បន្ទាត់ប៉ះ (T) អាស៊ីមតូត (D) និងក្រាប (C) ។

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ រាងមិនកំណត់ $+\infty \times 0$

តាង $X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$

ពេល $x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{1}{X} \ln \left(1 + \frac{1}{X} \right) \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X}$
 $= 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{2 + 2 \sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{2(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{2}$
 $= \frac{1 - \sin(-\frac{\pi}{2})}{2}$
 $= \frac{1 - (-1)}{2} = 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{2 + 2 \sin x} = 1$

គ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{27(\sqrt{x+6} - 3)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3^3)(\sqrt{x+6} + 3)}{27(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 3^2)(\sqrt{x+6} + 3)}{27(x+6 - 3^2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{27(x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{27}$
 $= \frac{(9+9+9)(\sqrt{3+6} + 3)}{27} = 6$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{27(\sqrt{x+6} - 3)} = 6$

II. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $I = \int_0^3 (x-1)(x+3) dx$

$= \int_0^3 (x^2 + 2x - 3) dx$

$= \frac{1}{3} \int_0^3 d(x^3) + \int_0^3 d(x^2) - 3 \int_0^3 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3^2 - 3^2 - (0) = 9$

ដូចនេះ: $I = 9$

$$\begin{aligned}
 2. J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin^4 x \cos x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\sin^5 x) \text{ រក្សា: } \frac{d(\sin^5 x)}{dx} = 5 \sin^4 x \cos x \Rightarrow d(\sin^5 x) = 5 \sin^4 x \cos x dx \\
 &= \left[\sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \sin^5 \frac{\pi}{2} - \sin^5 0^\circ \\
 &= 1^5 - 0
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $J = 1$

$$\begin{aligned}
 គ. K &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2x+1} \right) dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d(2x+1)}{2x+1} \text{ រក្សា: } \frac{d(2x+1)}{dx} = 2 \Rightarrow d(2x+1) = 2dx \\
 &= \frac{3}{2} [\ln |2x+1|]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{3}{2} (\ln |2+1| - \ln |1+1|) \\
 &= \frac{3}{2} (\ln 3 - \ln 2)
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2}$

III. ដោះស្រាយសមីការ: $z^2 + 4z + 16 = 0$

$$\text{គេបាន } z^2 + 2z(2) + 2^2 + 12 = 0$$

$$(z+2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2 = 0$$

$$(z+2-2\sqrt{3}i)(z+2+2\sqrt{3}i) = 0$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} z+2-2\sqrt{3}i = 0 \\ z+2+2\sqrt{3}i = 0 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} z = -2+2\sqrt{3}i \\ z = -2-2\sqrt{3}i \end{cases}$$

ដូចនេះ: សមីការមានឫស $z_1 = -2-2\sqrt{3}i$ និង $z_2 = -2+2\sqrt{3}i$

សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } z_1 = -2-2\sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{និង } z_2 = -2+2\sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $z_1 = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ និង $z_2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

IV. តាង S : ចាប់យកបន្ទាត់មួយចេញពីបន្ទាត់សរុបចំនួន 25

$$\text{គេបាន } n(S) = C(25, 1) = 25 \text{ ករណី}$$

ក. ក្រប្បបាលនៃព្រឹត្តិការណ៍ A : “ បន្ទាត់ដែលចាប់បានមិនឆ្លងបង្គោល ”

$$\text{នាំឱ្យ } n(A) = C(22, 1) = 22 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } A \text{ គឺ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{22}{25}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{22}{25}$$

ខ. អ្នកទិញគាត់ចាប់យកដោយមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ហើយគាត់ចង់បានដាច់ខាតបន្ទាត់ល្អចំនួន 7 ដោយក្នុងនោះមានបន្ទាត់ឆ្លងបង្គោលចំនួន 3

$$\text{ដូចនេះ } \text{ដើម្បីបានបន្ទាត់ល្អចំនួន 7 គាត់ត្រូវតែទិញបន្ទាត់យ៉ាងតិចចំនួន 10}$$

គ. តាង S' : គេចាប់យកបន្ទាត់ 2 ម្តងដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមបន្ទាត់ទាំង 25

$$\text{នាំឱ្យ } n(S') = C(25, 2) = \frac{25!}{(25-2)!2!} = \frac{23!24 \cdot 25}{23!2} = 12 \cdot 25 \text{ ករណី}$$

ក្រប្បបាលនៃព្រឹត្តិការណ៍ B : “ បន្ទាត់ទាំងពីរចាប់បានមិនឆ្លងបង្គោល ”

$$\text{នាំឱ្យ } n(B) = C(22, 2) = \frac{22!}{(22-2)!2!} = \frac{20!21 \cdot 22}{20!2} = 11 \cdot 21 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបានប្រូបាបនៃ } B \text{ គឺ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S')} = \frac{11 \cdot 21}{12 \cdot 25} = \frac{231}{300}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{231}{300}$$

V. 1. គេមានចំណុច $A(5, -5, 2), B(-1, 1, 0), C(0, 1, 2)$ និង $D(6, 6, -1)$

ក. បង្ហាញចំណុច A, B, C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = (-1 - 5, 1 + 5, 0 - 2) = (-6, 6, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 5, 1 + 5, 2 - 2) = (-5, 6, 0)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 6 & -2 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [6(0) - 6(-2)]\vec{i} - [(-6)(0) - (-5)(-2)]\vec{j} + [(-6)(6) - (-5)(6)]\vec{k}$$

$$= 12\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\neq \vec{0}$$

$$\text{ដូចនេះ } \text{បីចំណុច } A, B \text{ និង } C \text{ រត់មិនត្រង់ជួរគ្នា}$$

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែង

$$\text{ដោយ } |\overrightarrow{BC}|^2 = [0 - (-1)]^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 0)^2$$

$$= 1 + 4 = 5 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = [6 - (-1)]^2 + (6 - 1)^2 + (-1 - 0)^2$$

$$= 49 + 25 + 1 = 75 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{និង } |\overrightarrow{CD}|^2 = (6-0)^2 + (6-1)^2 + (-1-2)^2$$

$$= 36 + 25 + 9 = 70 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{គេបាន } |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = 75 = |\overrightarrow{BD}|^2 \text{ ពិតតាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ}$$

ដូចនេះ: BCD ជាត្រីកោណកែង

រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ BCD

$$\text{គេបាន } S_{\triangle BCD} = \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{70}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5^2 \times 14}}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } S_{\triangle BCD} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}$$

$$2. \text{ គេមាន } 12(xy+3) - (3x+2y)^2 = 0$$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

$$\text{គេបាន } 12(xy+3) = (3x+2y)^2$$

$$12xy + 36 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ ជាសមីការអេលីប}$$

$$\text{ដូចនេះ: } 12(xy+3) - (3x+2y)^2 = 0 \text{ ជាសមីការអេលីប}$$

ខ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

$$\text{ដោយ } a = 3 \text{ និង } b = 2$$

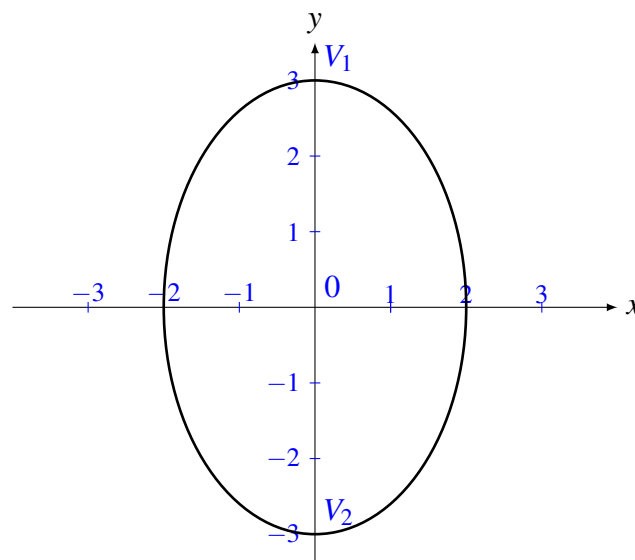
គេបាន

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 2 = 4$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 3 = 6$

- កូអរដោនេនៃកំពូល $V_1(0, a) \Rightarrow V_1(0, 3)$ និង $V_2(0, -a) \Rightarrow V_2(0, -3)$

សង់អេលីប



VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : 3y'' = 9y - 6y'$

មានសមីការសម្គាល់ $3\lambda^2 = 9 - 6\lambda$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ} \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ \lambda + 3 = 0 \end{cases} \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{-3x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ ($\ln e = 1$)

$$\text{គេមាន} \begin{cases} y = Ae^x + Be^{-3x} \\ y' = Ae^x - 3Be^{-3x} \end{cases} \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} y(0) = Ae^0 + Be^0 \\ y'(1) = Ae^1 - 3Be^{-3} \end{cases}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \begin{cases} 1 = A + B \\ e = Ae - 3Be^{-3} \end{cases} \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} A = 1 - B \\ 1 = A - 3Be^{-4} \end{cases}$$

$$\text{នាំឱ្យ} 1 = 1 - B - 3Be^{-4} \text{ នាំឱ្យ } B(1 + 3e^{-4}) = 0 \text{ នាំឱ្យ } B = 0 \text{ នាំឱ្យ } A = 1 - 0 = 1$$

ដូចនេះ: ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) គឺ $y = e^x$

VII. (៤០ពិន្ទុ) គេមានក្រាប $(C) : f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$

A. 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

$$\text{គេមាន } f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$$

$$= \frac{e^x(4 - x - 2e^{-x})}{e^x}, e^x > 0$$

$$= \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$$

$$\text{ដូចនេះ: } f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$$

$$\text{គណនា } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \right)$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x - 2e^{-x}) = -\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} = -\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^x} = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^{-x})$$

$$= 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{បន្ទាត់ } D : y = -x + 4 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C)$$

3. សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (D)

$$\text{គេបាន } f(x) - y = -2e^{-x} < 0 \text{ ព្រោះ: } e^{-x} > 0 \text{ ចំពោះ: } x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (D) ជានិច្ច

B. 1. គណនា $f'(x)$

គេមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$

គេបាន $f'(x) = -1 + 2e^{-x} = \frac{-e^x + 2}{e^x}$

ដូចនេះ: $f'(x) = \frac{2 - e^x}{e^x}$

សិក្សាអថេរភាពនៃ f

ដោយ $e^x > 0, x \in \mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2 - e^x$

ចំពោះ $2 - e^x > 0$ នាំឱ្យ $2 > e^x$ នាំឱ្យ $\ln 2 < x$

ចំពោះ $2 - e^x < 0$ នាំឱ្យ $2 < e^x$ នាំឱ្យ $\ln 2 > x$

ចំពោះ $2 - e^x = 0$ នាំឱ្យ $2 = e^x$ នាំឱ្យ $x = \ln 2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

គណនាតម្លៃអតិបរមានៃ f

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - ត្រង់ $x = \ln 2$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាជ្រុងមុខ

គឺ $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2} = 4 - \ln 2 - \frac{2}{e^{\ln 2}} \approx 4 - 0.7 - 1 \approx 2.3$

ដូចនេះ: តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ $f(\ln 2) \approx 2.3$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2.3	$-\infty$

2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A

ដោយ A ជាចំណុចនៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4 - 0 - 2e^0 = 2$

គេបាន (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$= \frac{2 - e^0}{e^0}(x - 0) + 2$$

$$= x + 2$$

ដូចនេះ: (T) : $y = x + 2$

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ β នៅក្នុងចន្លោះ: $[-1, 0]$

គេមានអនុគមន៍ f ជាប់លើ \mathbb{R} នាំឱ្យជាប់លើចន្លោះ: $[-1, 0]$

ដោយ $f(-1) = 4 + 1 - 2e = 5 - 2(2.7) = 5 - 5.4 = -0.4$

$$f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 4 - 2 = 2$$

គេបាន $f(-1) \cdot f(0) = -0.4 \times 2 < 0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = 0$ ឬ សមីការ $f(x) = 0$

មានឫសមួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ (១)

ម្យ៉ាងទៀត តាមតារាងអថេរភាពនៃ f នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[-1, 0]$ (២)

តាមទំនាក់ទំនង (១) និង (២)

ដូចនេះ សមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[-1, 0]$

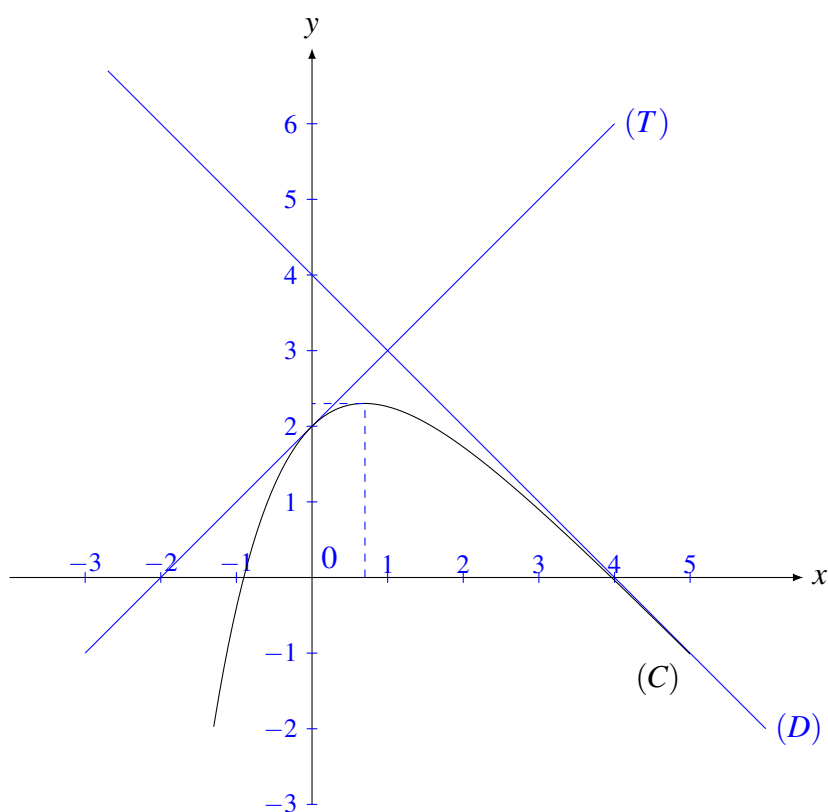
4. សង់បន្ទាត់ប៉ះ (T) អាស៊ីមតូត (D) និងក្រាប (C)

តារាងតម្លៃលេខ (T) : $y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0

តារាងតម្លៃលេខ (D) : $y = -x + 4$

x	0	4
y	4	0



មណ្ឌលប្រឡង
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: _____

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

- I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
- ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin 3x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖
- ក. $I = \int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)dx$ ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ គ. $K = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)^2} dx$
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i$ និង $z_2 = 1 + i$ ។
- ក. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ និង $z_1 \times z_2$ ។ ខ. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $x^2 - 2xi - 2 = 0$ ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងវិទ្យាល័យមួយមានគ្រូគណិតវិទ្យាចំនួន ៩ នាក់ ក្នុងនោះមានគ្រូស្រីចំនួន ៤ នាក់ និងគ្រូប្រុសចំនួន ៥ នាក់។ គណៈគ្រប់គ្រងសាលាបានជ្រើសរើសគ្រូចំនួន ៣ នាក់ដោយចៃដន្យដើម្បីទៅធ្វើជាគណៈកម្មការកំណែ ប្រែសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
- A : គណៈកម្មការកំណែសុទ្ធតែជាគ្រូស្រី។ B : គណៈកម្មការកំណែគ្រូប្រុស ២ នាក់ និងគ្រូស្រី ១ នាក់។
- C : គណៈកម្មការកំណែគ្រូស្រីយ៉ាងតិច ២ នាក់។
- V. (៤០ពិន្ទុ)
1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $P(2, 0, 1), Q(3, 4, -2)$ និង $R(-1, 3, 2)$ ។
- ក. ចូរដាច់ចំណុច P, Q និង R ក្នុងតម្រុយតែមួយ។ ខ. រកទំហំ $|\vec{PQ}|, |\vec{PQ}|$ និង $|\vec{QR}|$ ។
- គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (PQ) ។ ឃ. សរសេរសមីការប្លង់ PQR ។
2. គេឱ្យសមីការទូទៅនៃអេលីប $(E) : 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ ។
- ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប។
- ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ។ សង់អេលីបនេះ។ (គេឱ្យ $\frac{4\sqrt{2}}{3} = 1.9$) ។
3. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ ។
- ក. ដោះស្រាយសមីការ $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$ ។
- ខ. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
- VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។
1. ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។
- ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D) : y = x + 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) ។
2. ក. បង្ហាញថាគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$ ។
- ខ. គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta) : y = x - 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (Δ) ។
3. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
4. សង់បន្ទាត់ $(D), (\Delta)$ និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។

ជំនេរគណិតវិទ្យា

I. គណនា

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2} = \frac{\ln 1 + 1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{x^2} = 1}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1}-1) [(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1] (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) [(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(\sqrt[3]{2x-1})^3 - 1] (\sqrt{x}+1)}{[(\sqrt{x})^2 - 1] [(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1) [(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1]}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1}+1)}{(\sqrt[3]{2(1)-1})^2 + \sqrt[3]{2(1)-1} + 1}$$

$$= \frac{2(2)}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{4}{3}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \right]$$

$$= 1 \times \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x} = \frac{1}{3}}$$

II. គណនា

$$\text{ក. } I = \int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) dx$$

$$= 4 \int_1^2 x^3 dx - 5 \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + 9 \int_1^2 dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - 5 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + 6 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 9x \Big|_1^2$$

$$= x^4 \Big|_1^2 - \frac{5x^3}{3} \Big|_1^2 + 3x^2 \Big|_1^2 + 9x \Big|_1^2$$

$$= 2^4 - 1^4 - \left(\frac{5 \times 2^3}{3} - \frac{5 \times 1^3}{3} \right) + 3(2^2 - 1^2) + 9(2 - 1) = \frac{64}{3}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{64}{3}$

$$\begin{aligned} ខ. J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin 2x)}{2} \right] \text{ ព្រោះ: } \frac{d(\sin 2x)}{dx} = 2 \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x dx = \frac{d(\sin 2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{2} \right] - \frac{1}{2} \left(0 - \frac{\sin 0^\circ}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - 0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $J = \frac{\pi}{4}$

គ. ដោយ $\frac{d(x^2 + 2)}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{d(x^2 + 2)}{2} = x dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_1^2 \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 2)} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2 + 2} - \frac{1}{1^2 + 2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{1}{12}$

III. គេមាន $z_1 = -1 + i$ និង $z_2 = 1 + i$

ក. គណនា $z_1 + z_2 = -1 + i + 1 + i$
 $= 2i$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= -1 + i - (1 + i) \\ &= -1 + i - 1 - i \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_1 \times z_2 &= (-1+i)(1+i) \\ &= -1-i+i+i^2, i^2 = -1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 + z_2 = 2i, z_1 - z_2 = -2 \text{ និង } z_1 \times z_2 = -2$$

ខ. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= -1+i \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2 &= 1+i \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4} \right) \text{ និង } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right)$$

គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $x^2 - 2xi - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= -1+i \text{ គេបាន } (-1+i)^2 - 2(-1+i)i - 2 = (-1+i)(-1+i-2i) - 2 \\ &= (-1+i)(-1-i) - 2 \\ &= 1-i^2 - 2 \\ &= 1+1-2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } z_2 &= 1+i \text{ គេបាន } (1+i)^2 - 2(1+i)i - 2 = (1+i)(1+i-2i) - 2 \\ &= (1+i)(1-i) - 2 \\ &= 1-i^2 - 2 \\ &= 1+1-2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \text{ និង } z_2 \text{ ជាឫសរបស់សមីការ } x^2 - 2xi - 2 = 0$$

IV. តាង S : ជាគណៈកម្មការកំណែចំនួន 3 នាក់ ដែលជ្រើសរើសចេញពីគ្រួសារបំប៉ន 9 នាក់

$$\text{នាំឱ្យ } n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{6!7 \cdot 8 \cdot 9}{6!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } A : \text{ គណៈកម្មការកំណែសុទ្ធតែជាគ្រូស្រី នាំឱ្យ } n(A) = C(4,3) = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3!4}{3!} = 4 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ គឺ } p(A) = \frac{1}{21}$$

ព្រឹត្តិការណ៍ B : គណៈកម្មការកំណែគ្រូប្រុស 2 នាក់ និងគ្រូស្រី 1

$$\text{នាំឱ្យ } n(B) = C(5,2) \cdot C(4,1) = \frac{5!}{(5-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{3!4 \cdot 5}{3!2} \times \frac{3!4}{3!} = 34 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{34}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{17}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } B \text{ គឺ } p(B) = \frac{10}{21}$$

និង ព្រឹត្តិការណ៍ C : គណៈកម្មការកំណែត្រួស្រីយ៉ាងតិច 2 នាក់

$$\text{នាំឱ្យ } n(C) = C(4,2) \cdot C(5,1) + C(4,3) = \frac{4!}{(4-2)!2!} \times 5 + 4 = \frac{2!3 \cdot 4 \cdot 5}{2!2} + 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 34 \text{ ជម្រើស}$$

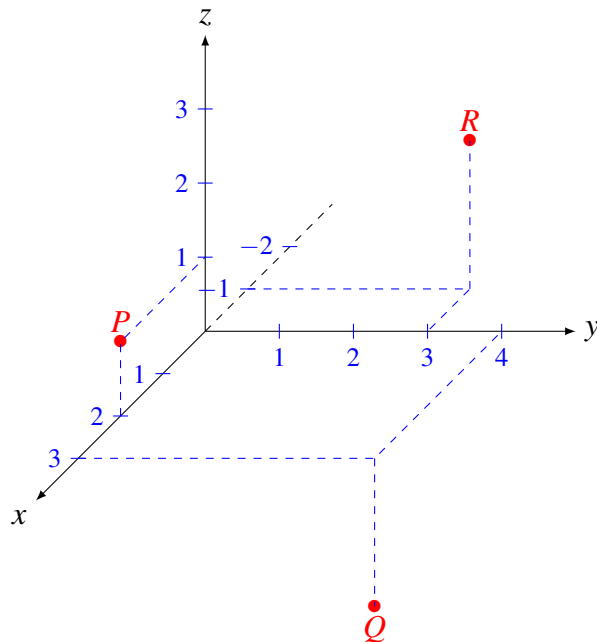
$$\text{គេបាន } p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{34}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } C \text{ គឺ } p(C) = \frac{17}{42}$$

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. គេមានចំណុច $P(2,0,1)$, $Q(3,4,-2)$ និង $R(-1,3,2)$

ក. ដៅចំណុច P, Q និង R



ខ. កេរ៉ិចទ័រ \overrightarrow{PQ} , $|\overrightarrow{PQ}|$ និង \overrightarrow{QR}

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{PQ} = (3-2, 4-0, -2-1)$$

$$= (1, 4, -3)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1+16+9}$$

$$= \sqrt{26} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\overrightarrow{QR} = (-1-3, 3-4, 2+2)$$

$$= (-4, -1, 4)$$

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (PQ)

$$\text{គេបាន } (PQ) : \begin{cases} x = x_Q + x_{PQ} \cdot t \\ y = y_Q + y_{PQ} \cdot t \\ z = z_Q + z_{PQ} \cdot t \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } (PQ) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ឃ. សរសេរសមីការប្លង់ PQR

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = (-1, -4, 3) \text{ និង } \overrightarrow{QR} = (-4, -1, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[-4(4) - (-1)(3)] - \vec{j}[(-1)(4) - (-4)(3)] + \vec{k}[(-1)(-1) - (-4)(-4)] \\ &= \vec{i}(-16 + 3) - \vec{k}(-4 + 12) + \vec{k}(1 - 16) \\ &= (-13, -8, -15) \end{aligned}$$

$$\text{គេបានសមីការប្លង់ } (PQR) \text{ គឺ } -13(x - x_P) - 8(y - y_P) - 15(z - z_P) = 0$$

$$-13(x - 2) - 8(y - 0) - 15(z - 1) = 0$$

$$-13x + 26 - 8y - 15z + 15 = 0$$

$$-13x - 8y - 15z + 41 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប្លង់ } PQR \text{ គឺ } 13x + 8y + 15z - 41 = 0$$

$$2. \text{ គេមាន } (E) : 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប

$$\text{គេបាន } 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y = -4$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 + 4y + 4 - 4) = -4$$

$$4(x - 1)^2 - 4 + 9(y + 2)^2 - 36 = -4$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$$

$$\frac{4(x - 1)^2}{36} + \frac{9(y + 2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

$$\text{មានទម្រង់ } \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំដេក}$$

$$\text{នាំឱ្យ } h = 1, k = -2$$

$$\text{និង } a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{ហើយ } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

គេបាន

- ផ្ចិត $I(h, k) = I(1, -2)$
- កំពូល $\begin{cases} V_1(h - a, k) = V_1(1 - 3, -2) = V_1(-2, -2) \\ V_2(h + a, k) = V_2(1 + 3, -2) = V_2(4, -2) \end{cases}$
- កំណុំ $\begin{cases} F_1(h - c, k) = F_1(1 - \sqrt{5}, -2) \\ F_2(h + c, k) = F_2(1 + \sqrt{5}, -2) \end{cases}$
- អ៊ីចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{ដូច្នេះ: } \left\{ \begin{array}{l} \text{ផ្ចិត } I(1, -2) \\ \text{កំពូល } \begin{cases} V_1(-2, -2) \\ V_2(4, -2) \end{cases} \\ \text{កំណុំ } \begin{cases} F_1(1 - \sqrt{5}, -2) \\ F_2(1 + \sqrt{5}, -2) \end{cases} \end{array} \right. \text{ និង } e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ

- ចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្ស ($x'ox$)
 បើ $y = 0$ គេបាន $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(0+2)^2}{4} = 1$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + 1 = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

គេបានចំណុចប្រសព្វគឺ $(1, 0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្ស ($y'oy$)
 បើ $x = 0$ គេបាន $\frac{(0-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$$\frac{1}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

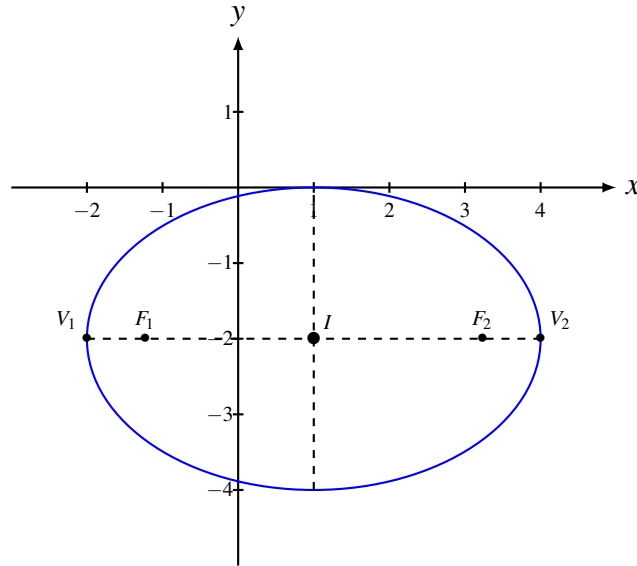
$$\frac{(y+2)^2}{4} = \frac{8}{9}$$

$$9(y+2)^2 = 32$$

$$(y+2)^2 = \frac{32}{9}$$

 - $y+2 = -\sqrt{\frac{32}{9}} \Rightarrow y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 = -1.9 - 2 = -3.9$
 - $y+2 = \sqrt{\frac{32}{9}} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 = 1.9 - 2 = -0.1$
 គេបានចំណុចប្រសព្វមានពីរគឺ $(0, -3.9)$ និង $(0, -0.1)$ ។

ដូច្នេះ (E) កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $(1, 0)$ និងកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $(0, -3.9)$ និង $(0, -0.1)$
សង់អេលីបនេះ



3. គេមាន $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$(r - 1)(r - 2) = 0$$

នាំឱ្យ $r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ ឬ $r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(F) : y_c = Ae^x + Be^{2x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ខ. ចូរកំណត់បំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E)

គេមាន $y_p = ax + b \Rightarrow y'_p = a \Rightarrow y''_p = 0$

គេបាន $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 2x + 1$

$$0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 1$$

$$2ax + (-3a + 2b) = 2x + 1$$

$$\text{សមមូល} \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ -3a + 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $y_p = x + 2$

រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $y = y_c + y_p = x + 2 + Ae^x + Be^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = x + 2 + Ae^x + Be^{2x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

VI. គេមានក្រាប (C) ដែល $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

1. ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) = -\infty$ ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D) : y = x + 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) - (x + 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x + 3} = 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D) : y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$

សិក្សាទីតាំងជៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D)

$$\text{គេមាន } f(x) - y = -\frac{4e^x}{e^x + 3} \text{ ដោយ } \begin{cases} e^x > 0 \\ e^x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{ចំពោះ } x \in \mathbb{R} \text{ នាំឱ្យ } \frac{e^x}{e^x + 3} > 0$$

$$\text{គេបាន } f(x) - y < 0$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (D) ជានិច្ច

2. ក. បង្ហាញថាគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } f(x) &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = x + 2 - 4 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \\ &= x - 2 + \frac{4e^x + 12 - 4e^x}{e^x + 3} = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$$

ខ. គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) = +\infty \quad \text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x + 3} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta) : y = x - 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) - (x - 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x + 3} = 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(\Delta) : y = x - 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (Δ)

$$\text{គេមាន } f(x) - y = \left(x - 2 + \frac{12}{e^x + 3} \right) - (x - 2) = \frac{12}{e^x + 3}$$

$$\text{ដោយ } e^x + 3 > 0 \text{ ចំពោះ } x \in \mathbb{R} \text{ គេបាន } f(x) - y > 0$$

ដូចនេះ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (Δ) ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$

3. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$$

$$\text{នាំឱ្យ } f'(x) = 1 - \frac{12(e^x + 3)'}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x+6e^x+9}-12e^x}{(e^x + 3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \text{ ចំពោះ } x \in \mathbb{R}$$

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0$ ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (e^x-3) = 0$

$$e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 3$$

ដូចនេះ $f'(x) > 0$ កាលណា $x \in (-\infty, \ln 3) \cup (\ln 3, +\infty)$

ចំពោះ $x = \ln 3$ នោះ $f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + 3} = \ln 3 + 2 - 2 = \ln 3$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

4. សង់បន្ទាត់ $(D) : y = x + 2$

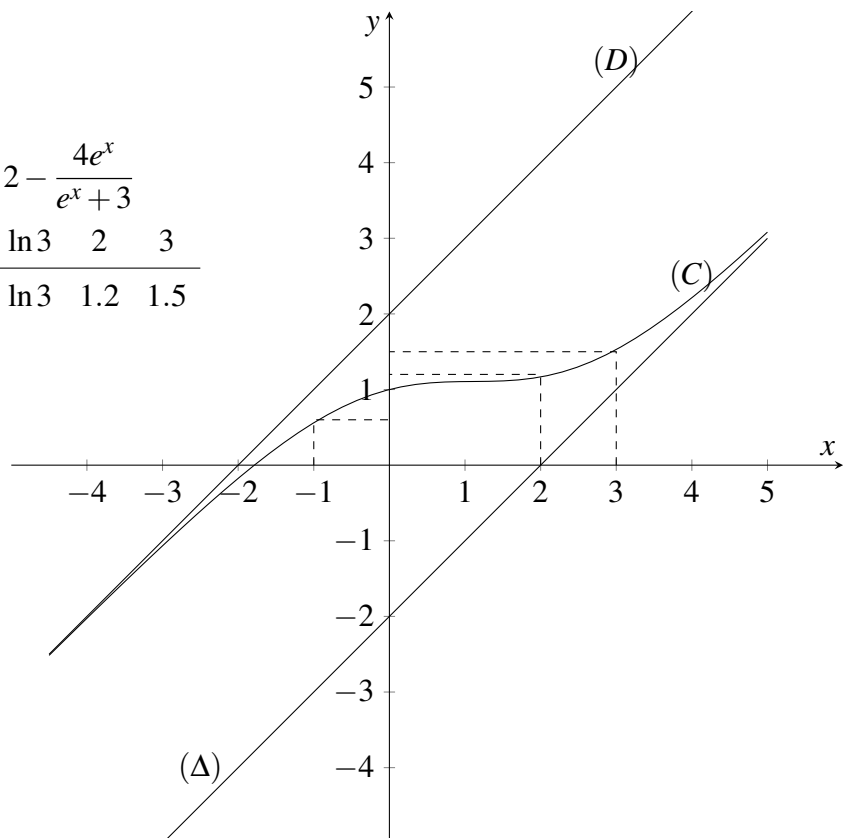
តារាងតម្លៃលេខ	x	-2	0
	y	0	2

សង់បន្ទាត់ $(\Delta) : y = x - 2$

តារាងតម្លៃលេខ	x	0	2
	y	-2	0

សង់បន្ទាត់ $(C) : f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

តារាងតម្លៃលេខ	x	-1	0	$\ln 3$	2	3
	y	0.6	1	$\ln 3$	1.2	1.5



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right)$ ខ. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ ។
 ក. កំណត់តម្លៃ a, b, c និង d ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$ ។
 ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ។
 ក. គណនា z^2 រួចសរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ ខ. ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{8}$ និង $\sin \frac{\pi}{8}$ ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហម៤ និងត្រីពណ៌ស៣ក្បាល ។ គេចាប់ត្រី២ក្បាលមកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
 A : ត្រីពណ៌ក្រហមទាំង២ក្បាល។ B : ត្រីពណ៌សទាំង២ក្បាល។ C : ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 2y' + 3y = 3x - 1$ ។
 ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 2y' + 3y = 0$ ។
 ខ. កំណត់តម្លៃ a, b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាម្លើយនៃសមីការ (E) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) ប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានកំពូល $V(1, -2)$ និងកំណុំ $F(1, 0)$ ។
 ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។ ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) នៃ (P) ។
 គ. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។
- VII. (២០ពិន្ទុ) ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-1, 0, 2), B(0, -1, 1)$ និង $C(1, 2, -1)$ ។
 ក. រកវ៉ិចទ័រ \overrightarrow{AB} និង \overrightarrow{AC} ។ ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (α) កាត់តាមចំណុច A, B និង C ។
 គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC និងមាឌតេត្រាអែត $OABC$ ។
- VIII. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x \neq 0$ ដោយ $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។
 ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។
 ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = x$ ជាអាស៊ីមតូទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ d_1 ។
 គ. បង្ហាញថាចំពោះ $x \neq 0$ គេបាន $f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}$ ។ គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។
 ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_2 : y = x - 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ d_2 ។
 ង. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \neq 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
 ច. គណនា $f(1)$ និង $f(-1)$ ។ សង់បន្ទាត់ d_1, d_2 និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) បន្ទាត់ d_1 និងបន្ទាត់ឈរមានសមីការ $x = 1$ និង $x = 2$ ។ គេឱ្យ $\frac{e}{e-1} = 1.6$ និង $\frac{1}{1-e} = -0.6$ ។

ជំនេរគ្រឹះ

I. គណនាលីមីត៖

$$ក. \lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right) = 2^2 + \cos \frac{2\pi}{4} = 4 + \cos \frac{\pi}{2} = 4$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 + \cos \frac{\pi x}{4} \right) = 4}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2x + 2}{x^2 - 1^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1) + 2(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1+2}{-1-1} = \frac{1}{-2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{6} \text{ នាំឱ្យ } x = t + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ នាំឱ្យ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \cos \left(t + \frac{\pi}{6} \right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \left(\cos t \cos \frac{\pi}{6} - \sin t \sin \frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - 2 \left(\cos t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \cdot \frac{1}{2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos t + \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sqrt{3}(1 - \cos t) + \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{3}(2 \sin^2 \frac{t}{2}) + 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x} = 2}$$

$$II. \text{ គេមាន } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

ក. កំណត់តម្លៃ a, b, c និង d

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x + 2x - 2 + 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1) + 2(x - 1) + 1}{x - 1} \\ &= x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{សមមូល } ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1} = x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1, b = -1, c = 2 \text{ និង } d = 1}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ គេបាន } I &= \int_{-1}^0 \left(x^2 - x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| \right]_{-1}^0 \\
 &= (0 - 0 + 0 + \ln 1) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 + \ln 2 \right) \\
 &= 0 - \left(\frac{-2-3-12}{6} + \ln 2 \right) = \frac{17}{6} - \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{17}{6} - \ln 2}$$

III. គេមាន $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1. គណនា z^2

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 + i^2 \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}, i^2 = -1 \\
 &= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } z^2 = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \text{ និង } z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

2. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } z &= \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2} \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\sqrt{1+\cos \frac{\pi}{4}} + i\sqrt{1-\cos \frac{\pi}{4}} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\sqrt{2\cos^2 \frac{\pi}{8}} + i\sqrt{2\sin^2 \frac{\pi}{8}} \right) = \sqrt{2} \left(\sqrt{2}\cos \frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{8} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)}$$

3. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{8}$ និង $\sin \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2\cos \frac{\pi}{8} + i2\sin \frac{\pi}{8} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ និង } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

IV. តាង S : គេចាប់ត្រីកោណមាត្រមកដាក់ក្នុងអាងប្លង់ដោយចែកជំនួញចេញពីត្រីកោណមាត្រ

$$\text{នាំឱ្យ } n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{5!6 \cdot 7}{5!2!} = 3 \cdot 7 \text{ ជម្រើស}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } A : \text{ត្រីពណ៌ក្រហមទាំង២ក្បាល} \text{ នាំឱ្យ } n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{2!3 \cdot 4}{2!2!} = 2 \cdot 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ គឺ } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } p(A) = \frac{2}{7}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } B : \text{ត្រីពណ៌សទាំង២ក្បាល} \text{ នាំឱ្យ } n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } B \text{ គឺ } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } p(B) = \frac{1}{7}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } C : \text{ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌} \text{ នាំឱ្យ } n(C) = C(4, 1)C(3, 1) = 4 \cdot 3 \text{ ជម្រើស}$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } C \text{ គឺ } p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } p(C) = \frac{4}{7}$$

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 2y' + 3y = 3x - 1$

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 2y' + 3y = 0$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់} \quad r^2 - 2r + 3 = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 + 2 = 0$$

$$(r-1)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0$$

$$(r-1-i\sqrt{2})(r-1+i\sqrt{2}) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} r-1-i\sqrt{2}=0 \\ r-1+i\sqrt{2}=0 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} r=1+i\sqrt{2} \\ r=1-i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅគឺ } y_c = (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)e^x \text{ ដែល } A, B \in \mathbb{R}$$

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

$$\text{នាំឱ្យ } y'_p = a \Rightarrow y''_p = 0 \text{ គេបាន } y''_p - 2y'_p + 3y = 3x - 1$$

$$0 - 2a + 3(ax + b) = 3x - 1$$

$$3ax + 3b - 2a = 3x - 1$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - 2a = -1 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } a = 1 \text{ និង } b = \frac{1}{3}$$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = y_c + y_p$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E) : y = x + \frac{1}{3} + (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)e^x$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

VI. គេមានកំពូល $V(1, -2)$ និងកំណុំ $F(1, 0)$

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P)

ដោយកំពូល V និងកំណុំ F មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សធ្នូ៖ ឈរ

សមីការស្តង់ដារមានរាង $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ កំពូល } & \begin{cases} V(1, -2) \\ V(h, k) \end{cases} \Rightarrow h = 1, k = -2 \\ \bullet \text{ កំណុំ } & \begin{cases} F(1, 0) \\ F(h, k + p) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} k + p &= 0 \\ -2 + p &= 0 \end{aligned} \\ & p = 2 \end{aligned}$$

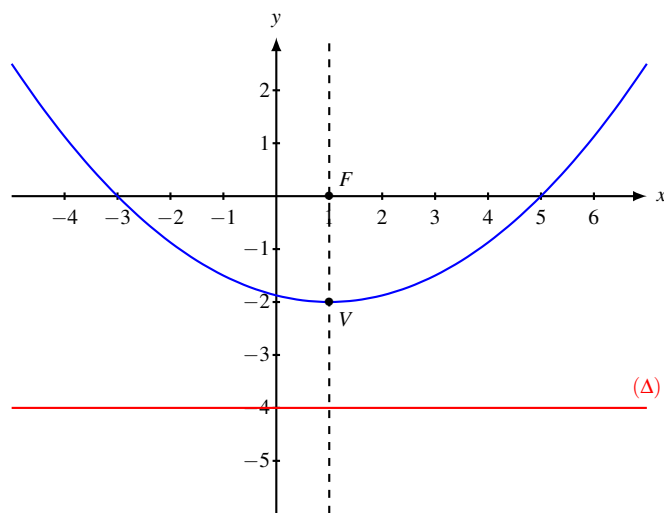
ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដារគឺ $(x - 1)^2 = 8(y + 2)$

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) នៃ (P)

គេបាន $(\Delta) : y = k - p = -2 - 2 = -4$

ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta) : y = -4$

គ. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល (P)



VII. គេមានចំណុច $A(-1, 0, 2), B(0, -1, 1)$ និង $C(1, 2, -1)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ \overrightarrow{AB} និង \overrightarrow{AC}

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (0 + 1, -1 - 0, 1 - 2) = (1, -1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (1 + 1, 2 - 0, -1 - 2) = (2, 2, -3)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -3)$

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (α) កាត់តាមចំណុច A, B និង C

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (3+2)\vec{i} - (-3+2)\vec{j} + (2+2)\vec{k} \\ &= 5\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } (\alpha) : 5(x+1) + 2(y-0) + 4(z-2) = 0$$

$$5x + 2y + 4z + 5 - 8 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការប្លង់ } (\alpha) : 5x + 2y + 4z - 3 = 0}$$

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$

រកមាឌតេត្រាអែត $OABC$

$$\text{ដោយ } \vec{AO} = (0+1, 0-0, 0-2)$$

$$= (1, 0, -2)$$

$$\text{នាំឱ្យ } (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} = (5)(1) + (2)(0) + (4)(-2)$$

$$= 5 - 8 = -3$$

$$\begin{aligned}\text{គេបានមាឌតេត្រាអែតគឺ } V_{OABC} &= \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}|}{6} \\ &= \frac{|-3|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{មាឌតេត្រាអែតគឺ } V_{OABC} = \frac{1}{2} \text{ ឯកតាមាឌ}}$$

$$\text{VIII. គេមានក្រាប } (C) : f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = +\infty \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូត

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

ខ. បង្ហាញថា $d_1 : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $d_1 : y = x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$

សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ d_1

$$\text{គេមាន } f(x) - y = -\frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{បើ } x > 0 \text{ នោះ: } e^x > 1 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \text{ គេបាន } \frac{e^x}{e^x - 1} > 0 \\ &\quad -\frac{e^x}{e^x - 1} < 0 \\ &\Rightarrow f(x) - y < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{បើ } x < 0 \text{ នោះ: } e^x < 1 &\Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \text{ គេបាន } \frac{e^x}{e^x - 1} < 0 \\ &\quad -\frac{e^x}{e^x - 1} > 0 \\ &\Rightarrow f(x) - y > 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: បើ $x > 0$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_1

បើ $x < 0$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_1

គ. បង្ហាញថាចំពោះ $x \neq 0$ គេបាន $f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= x - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 + \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1} \\ &= x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^x - 1}$$

គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ឃ. បង្ហាញថា $d_2 : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right) - (x - 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $d_2 : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ d_2

គេមាន $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1}$

បើ $x > 0$ នោះ $e^x - 1 > 0$ គេបាន $\frac{1}{e^x - 1} > 0$

$$-\frac{1}{e^x - 1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y < 0$$

បើ $x < 0$ នោះ $e^x - 1 < 0$ គេបាន $\frac{1}{e^x - 1} < 0$

$$-\frac{1}{e^x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y > 0$$

ដូចនេះ: បើ $x > 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោម d_2
បើ $x < 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើ d_2

ង. គណនា $f'(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= \left(x - 1 - \frac{1}{e^x - 1} \right)' \\ &= 1 + \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} \\ &= 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

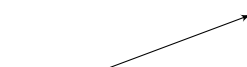

ដូចនេះ: $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

បង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \neq 0$

ដោយ $e^x > 0$ និង $(e^x - 1)^2 > 0$ នោះ $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$

ដូចនេះ: $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ 	$+\infty$	$+\infty$ 

ច. គណនា $f(1)$ និង $f(-1)$

គេបាន $f(1) = 1 - \frac{e}{e-1} = 1 - 1.6 = -0.6$

$$f(-1) = -1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1} - 1} = -1 - \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e} - 1} = -1 - \frac{1}{1 - e} = -1 + 0.6 = -0.4$$

ដូចនេះ: $f(1) = -0.6$ និង $f(-1) = -0.4$

សង់បន្ទាត់ $d_1 : y = x$

x	0	1
y	0	1

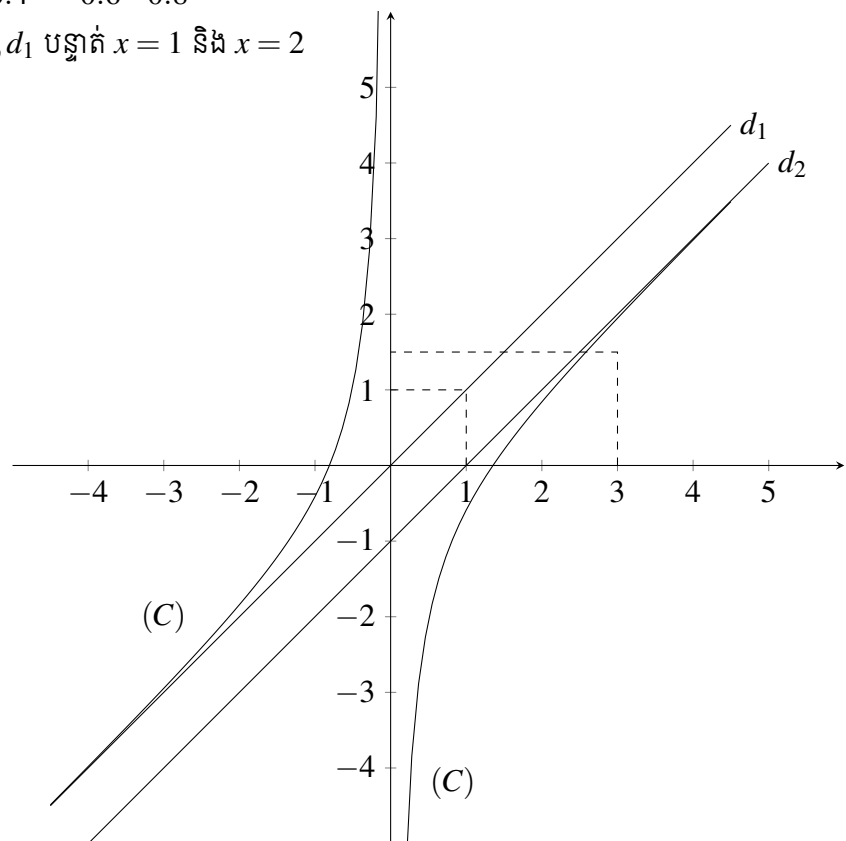
សង់បន្ទាត់ $d_2 : y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

សង់បន្ទាត់ (C) : $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$

x	-2	-1	1	2
y	-1.8	-0.4	-0.6	0.8

គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ (C), d_1 បន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 2$



$$\begin{aligned}
 \text{តាមក្រាបគេបាន } S &= \int_1^2 [y - f(x)] dx \\
 &= \int_1^2 \left[x - \left(x - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) \right] dx \\
 &= \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx \\
 &= \ln |e^x - 1|_1^2 \\
 &= \ln |e^2 - 1| - \ln |e - 1| \\
 &= \ln \left| \frac{e^2 - 1}{e - 1} \right| \\
 &= \ln |e + 1|
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $S = \ln |e + 1|$ ឯកតាផ្ទៃ

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$ ។
1. គណនា z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
 2. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z ។
 3. គណនាបូសទី 3 នៃ Z ។
- II. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E) ។ រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x = 1$ ។
- III. ប្រអប់មួយមានឃ្លីខៀវបី និងឃ្លីលឿងពីរ ។ ឃ្លីពីរត្រូវបានយកចេញពីប្រអប់ម្តងមួយៗដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបដែលឃ្លីទាំងពីរសុទ្ធតែពណ៌ខៀវក្នុងករណី៖
1. ចាប់ហើយមិនដាក់ចូលវិញ។
 2. ចាប់ហើយដាក់ចូលវិញ។
- IV. គណនាលីមីត
- ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$
 - ខ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2}(\frac{\pi}{3} - x)}$
 - គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$
- V. គេមានអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$ ។
 គណនា $I + J$; $I - J$ រួចទាញរក I និង J ។
- VI. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$ ហើយមានក្រាប C ។
1. គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x \rightarrow -\infty$ ។
 2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។ គណនា $f'(0), f(0)$ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
 3. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។
 4. គណនា $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C គេឱ្យ $(e^3 = 20)$ ។
- VII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេមានចំណុច $A(0, 0, 1); B(-1, -2, 0)$ និង $C(2, 1, -1)$ ។
- ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចបង្ហាញថា A, B, C តែមិនត្រង់ជួរ ។
 - ខ. សរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
 - គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយកែងប្លង់ ABC ។
 - ឃ. គណនា $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

ជំនេរស្រាវ

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$ ។

1. គណនា z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z^2 &= [(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i]^2 \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})i + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 i^2, i^2 = -1 \\ &= (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^2 - 2[(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2]i - (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{12} - (\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{z^2 = -8\sqrt{3} - 8i}$$

2. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាក្យម៉ង់នៃ Z ។

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z^2 &= 16 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 16 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ \text{នាំឱ្យ } z &= \sqrt{16} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } k = 0 \text{ នោះ } z &= 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ មិនយក} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } k = 1 \text{ នោះ } z &= 4 \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \\ &= 4 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{z = 4 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \text{ ម៉ូឌុល } |z| = 4 \text{ និងអាក្យម៉ង់ } \arg(z) = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

3. គណនាឫសទី 3 នៃ Z

$$\text{គេបាន } \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\frac{19\pi}{12} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{19\pi}{12} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$\text{ចំពោះ } k = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{19\pi}{36} + i \sin \frac{19\pi}{36} \right)$$

$$\text{ចំពោះ } k = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{31\pi}{36} + i \sin \frac{31\pi}{36} \right)$$

$$\text{ចំពោះ } k = 2 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{43\pi}{36} + i \sin \frac{43\pi}{36} \right)$$

II. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E) ។

$$\text{គេមានសមីការសំគាល់ } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} \lambda_1 - 1 = 0 \\ \lambda_2 - 2 = 0 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $y = Ae^x + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$

រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x = 1$

មានន័យថា $y'(1) = 0, y(1) = 1$

គេមាន $y = Ae^x + Be^{2x} \Rightarrow y(1) = Ae + Be = 1 \quad (I)$

$y' = A^x + 2Be^{2x} \Rightarrow y'(1) = Ae + 2Be = 1 \quad (II)$

យកសមីការ (II) ដក (I) គេបាន $Be = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ Ae = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{e} \end{cases}$

ដូច្នេះ: $y = \frac{1}{e}e^x = e^{x-1}$

III. 1. ចាប់ហើយមិនដាក់ចូលវិញ

រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងពីរ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ

ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងពីរមានន័យថា លើកទី១មានខៀវ និងលើកទី២មានខៀវ

ចាប់លើកទី១ គឺ $P(A) = \frac{3}{5}$ និងចាប់លើកទី២គឺ $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\text{ប្រូបាបដែលចាប់ទាំងពីរលើកគឺ } P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

2. ចាប់ហើយដាក់ចូលវិញ

រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងពីរ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ

ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងពីរមានន័យថា លើកទី១មានខៀវនិងលើកទី២មានខៀវ

ចាប់លើកទី១គឺ $P(A) = \frac{3}{5}$ និងលើកទី២គឺ $P(A) = \frac{3}{5}$

ដូចនេះ: $\text{ប្រូបាបដែលចាប់បានទាំងពីរលើកគឺ } P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

IV. គណនាលីមីត

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x^6 + x^6 - x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6(x-1) + x^5(x-1) - x^4(x-1) - x^3(x-1) - x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1)}{x^2(x-1) - 2x(x-1) - 2(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}$

$= 1$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2}(\frac{\pi}{3} - x)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$ បើ $t \rightarrow 0$ នោះ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 6(t + \frac{\pi}{3})}}{\sqrt{2}(\frac{\pi}{3} - (t + \frac{\pi}{3}))} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 6t}}{-\sqrt{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 3t}}{-\sqrt{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}|\sin 3t|}{-\sqrt{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\sin 3t|}{-t} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin 3t}{3t} \times 3 \right) = -3 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin 3t}{3t} \times 3 \right) = 3 \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \times \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \frac{2}{4(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{4(2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\text{V. គេមាន } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx \text{ និង } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{គណនា } I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^4 x + \cos^2 x \sin^4 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} \right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

គេបាន

$$I + J = \frac{\pi}{32}$$

(១២១)

$$\begin{aligned}
 \text{គណនា } I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^4 x - \cos^2 x \sin^4 x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos x)^2 \cos 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^2 d(\sin 2x) \text{ ព្រោះ } d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{(\sin 2x)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{24} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)
 \end{aligned}$$

គេបាន

$$I - J = \frac{1}{24} \quad (922)$$

យក (921) ឬក៏ (922): $2I = \frac{\pi}{32} + \frac{1}{24} \Rightarrow I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48} \Rightarrow J = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24} = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}$

ដូចនេះ: $I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$ និង $J = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}$

VI. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x}$ ហើយមានក្រាប C

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x} - (-x - 2) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1+e^x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ $y = -x - 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x \rightarrow -\infty$

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } f'(x) &= \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x} \right)' \\
 &= -1 + 4 \cdot \frac{(e^x)'(1+e^x) - (1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} \\
 &= \frac{-(1+e^x)^2 + 4e^x(1+e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} \\
 &= \frac{-1 - 2e^x - e^{2x} + 4e^x}{(1+e^x)^2} \\
 &= \frac{-[(e^x)^2 - 2e^x + 1]}{(1+e^x)^2} \\
 &= -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ ព្រោះ } (1+e^x)^2 > 0, (e^x - 1)^2 > 0
 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ: $\forall x \in \mathbb{R}$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	

$$\text{គណនា } f'(0) = \frac{-e^0 + 2e^0 - 1}{(1 + e^0)^2} = 0$$

$$f(0) = -0 - 2 + \frac{4e^0}{1 + e^0} = -2 + \frac{4}{2} = 0$$

សង្កេតតាមអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	—
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

3. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចបេតកាលណា $f''(0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f''(x) &= - \left[\frac{(e^x - 1)^2}{(1 + e^x)^2} \right]' \\ &= - \frac{[(e^x - 1)^2]'(1 + e^x)^2 - [(1 + e^x)^2]'(e^x - 1)^2}{(1 + e^x)^4} \\ &= - \frac{2(e^x - 1)'(e^x - 1)(1 + e^x)^2 - 2(e^x + 1)'(e^x + 1)(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^4} \\ &= - \frac{2e^x(e^x - 1)(1 + e^x) - 2e^x(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } f''(0) = - \frac{2e^0(e^0 - 1)(1 + e^0) - 2e^0(e^0 - 1)^2}{(e^0 + 1)^3}$$

$$f''(0) = 0$$

បង្ហាញថា 0 ជាផ្ចិតផ្គុះនៃក្រាប C

$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } \forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} \text{ គេបាន } f(-x) &= -(-x) - 2 + \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\ &= - \left[-x + 2 - \frac{\frac{4}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] \\ &= - \left[-x - 2 + 4 - \frac{4}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} \right] \\ &= - \left[-x - 2 + \frac{4(e^x + 1) - 4}{1 + e^x} \right] \\ &= - \left[-x - 2 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right] \end{aligned}$$

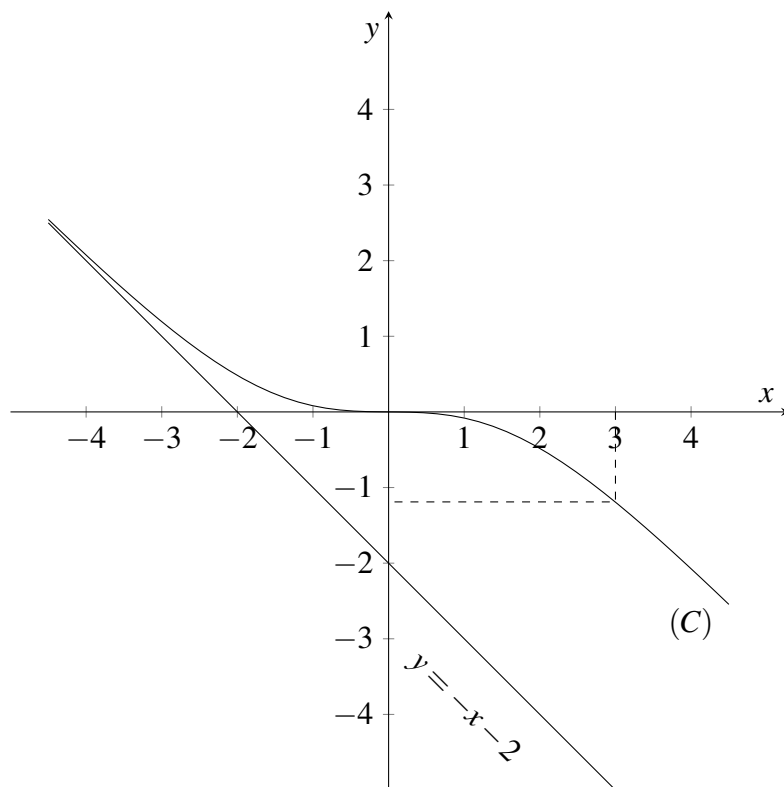
$$f(-x) = -f(x)$$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍សេសដែលមានផ្ចិតឆ្លុះ ០

4. គណនា $f(3)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } f(3) &= -3 - 2 + \frac{4e^3}{1+e^3} \\ &= -5 + \frac{4 \times 20}{1+20} \\ &= \frac{-21(5) + 80}{21} \\ &= -\frac{25}{21}\end{aligned}$$

សង់ក្រាប C



VII. នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,0,1); B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} = (-1-0, -2-0, 0-1) = (-1, -2, -1)$$

$$\vec{AC} = (2+1, 1+2, -1-0) = (3, 3, -1)$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2+3) \vec{i} - (1+3) \vec{j} + (-3+6) \vec{k} \\ &= 5 \vec{i} - 4 \vec{j} + 3 \vec{k}\end{aligned}$$

ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq 0$ នោះ A, B, C តែមិនត្រង់ជួរ ។

2. សរសេរសមីការប្លង់ ABC

$$\text{គេបាន } (ABC) : 5(x-0) - 4(y-0) + 3(z-1) = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការប្លង់ } (ABC) : 5x - 4y + 3z - 3 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S_{\triangle ABC} &= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

3. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយកែងប្លង់ ABC

នាំឱ្យ វ៉ិចទ័រប្រាប់នៃបន្ទាត់ L ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ABC នោះ $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (5, -4, 3)$

$$\text{គេបាន } L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់គឺ } (L) : \begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. គណនា $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$

ដោយ $\vec{OA} = A(0, 0, 1), \vec{OB} = B(-1, -2, 0), \vec{OC} = C(2, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 + 4 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យមានចតុមុខ } OABC \text{ គឺ } V_{OABC} &= \frac{|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|}{6} \\ &= \frac{|3|}{6} \\ &= \frac{1}{2} \text{ ឯកតាមាឌ} \end{aligned}$$

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 + i$ ។ គណនា $\cos \frac{5\pi}{12}$ និង $\sin \frac{5\pi}{12}$ ។

II. គណនាលីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$1. I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$2. J = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

$$3. K = \int \cos^3 x dx$$

IV. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូស្យែន $y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

2. បើ $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ។ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{3x+1}$ កំណត់លើ $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ ។

1. កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះ $\forall x \in [1, 5]$ ។

2. $\forall x \in [1, 5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ ។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L នៃក្រាប C ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេយក $e = 2.7$ ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងកំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត L បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 2$ ។

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច $A(-2, 1, -3), B(1, 2, 3)$ និង $C(2, -2, 1)$ ។

1. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង \vec{BC} ។

2. គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ រកសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

3. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។

ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. គេមាន $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 + i$

គណនា $\cos \frac{5\pi}{12}$ និង $\sin \frac{5\pi}{12}$

ដោយ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} &= \frac{\sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1 + i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3})}{2(1 - i^2)}, i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

ដូច្នេះ នាំឱ្យ $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ និង $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

II. គណនាលីមីត

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 8x - 16}{x^2 - 2x + 5x - 10}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 8(x - 2)}{x(x - 2) + 5(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 8)}{(x - 2)(x + 5)}$$

$$= \frac{2^2 + 2(2) + 8}{2 + 5}$$

$$= \frac{16}{7}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \frac{16}{7}$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{4 \sin^2 x - 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{4 \sin^2 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 2 \sin x + 1}{(2 \sin x)^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x(2 \sin x - 1) - (2 \sin x - 1)}{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(\sin x - 1)}{(2 \sin x + 1)(2 \sin x - 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 1}{2(\frac{1}{2}) + 1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{4 \sin^2 x - 1} = -\frac{1}{4}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{ដោយប្រើរូបមន្ត } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} [\cos 3x + \cos(-x)] \cos 3x}{x^2}, \cos(-x) = \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} (\cos 3x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \cos 3x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} [\frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 0) + \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \cos 6x - 1 - \cos 4x - \cos 2x}{4x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 2x}{4x^2}, 1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{ax}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x + 2 \sin^2 2x + 2 \sin^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \times 9 + \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \times 4 + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (9 + 4 + 1) = \frac{14}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = 7}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$1. I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

គេអាចសរសេរជា រាងកាណូនីច

$$\frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$3x^2 + 5x - 4 = A(x^2 + 2x + 1) + B(x-1) + C(x^2 - 1)$$

$$3x^2 + 5x - 4 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx - B + Cx^2 - C$$

$$3x^2 + 5x - 4 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)$$

$$\text{ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន} \begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5 \\ A-B-C=-4 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះគេបាន } I &= \int \frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} \right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } I = \int \frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + 2 \ln|x+1| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$2. J = \int \frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

គេអាចសរសេរជាភាគកាណូនិច

$$\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$3(x^2-2x+3) = A(x^2+4x+4) + B(x-1) + C(x-1)(x+2)$$

$$3x^2-6x+9 = Ax^2+4Ax+4A+Bx-B+Cx^2+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+9 = (A+C)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-B-2C)$$

$$\text{ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន} \begin{cases} A+C=3 \\ 4A+B+C=-6 \\ 4A-B-2C=9 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-11 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះគេបាន } J &= \int \frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2} dx = \int \left[\frac{2}{3(x-1)} - \frac{11}{(x+2)^2} + \frac{7}{3(x+2)} \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - 11 \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{11}{x+2} + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } J = \int \frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{11}{x+2} + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C$$

$$3. K = \int \cos^3 x dx = \int \cos x (\cos^2 x) \text{ ដោយ } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ នោះ } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{គេបាន } K = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$\text{តាង } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{គេបាន } K = \int \cos x dx - \int t^2 dt = \sin x - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\text{ដូច្នេះ: } K = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

IV. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x$

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូស្យែន $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\text{សមីការសំគាល់ } \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\text{ដូច្នេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ } y_c = Ae^x + Be^{2x} \text{ ដែល } A, B \in \mathbb{R}$$

2. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d

$$\text{បើ } g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)}$$

$$\text{នោះ } g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow g''(x) = 6ax + 2b \text{ ជំនួសចូលសមីការ (E)}$$

$$\text{គេបាន } g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 4x^3 - 2x$$

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 4x^3 - 2x$$

$$2ax^3 + (-9a + 2b)x^2 + (6a - 6b + 2c)x + (2b - 3c + 2d) = 4x^3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ -9a + 2b = 0 \\ 6a - 6b + 2c = 2 \\ 2b - 3c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = 22 \\ d = 24 \end{cases}$$

$$\text{ដូច្នេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ } y = y_c + g(x) = Ae^x + Be^{2x} + 2x^3 + 9x^2 + 22x + 24, A, B \in \mathbb{R}$$

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{3x+1}$ កំណត់លើ $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

1. កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះ $\forall x \in [1, 5]$

$$\text{ដោយ } f'(x) = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}, f'(5) = \frac{3}{2\sqrt{16}} = \frac{3}{8}$$

$$\text{ចំពោះ } \forall x \in [1, 5] \text{ និង } f'(1) > f'(5) \text{ នោះគេបាន } f'(5) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

$$\text{ដូច្នេះ: តម្លៃអមនៃ } f'(x) \text{ គឺ } \frac{3}{8} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

2. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ ចំពោះ $\forall x \in [1, 5]$

$$\text{ដោយ } \frac{3}{8} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4} \text{ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់}$$

$$\text{គេបាន } \frac{3}{8}(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{4}(x-1)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{3}{8} \leq \sqrt{3x+1} - \sqrt{3(1)+1} \leq \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{3}{8} + 2 \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \frac{3}{8}x + \frac{13}{8} \leq \sqrt{3x+1} \leq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \forall x \in [1, 5]$$

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

$$\text{ក. គណនា } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} + e\right) = +\infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0 \text{ នោះគេបាន } L: y = x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប } C$$

2. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$

$$\text{គេបាន } f'(x) = (x + e^{1-x})' = 1 + (1-x)'e^{1-x} = 1 - e^{1-x}$$

$$\text{បើ } f'(x) = 0 \text{ នោះ } 1 - e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = e^0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $1 - e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < e^0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Rightarrow x > 1$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $1 - e^{1-x} < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > e^0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

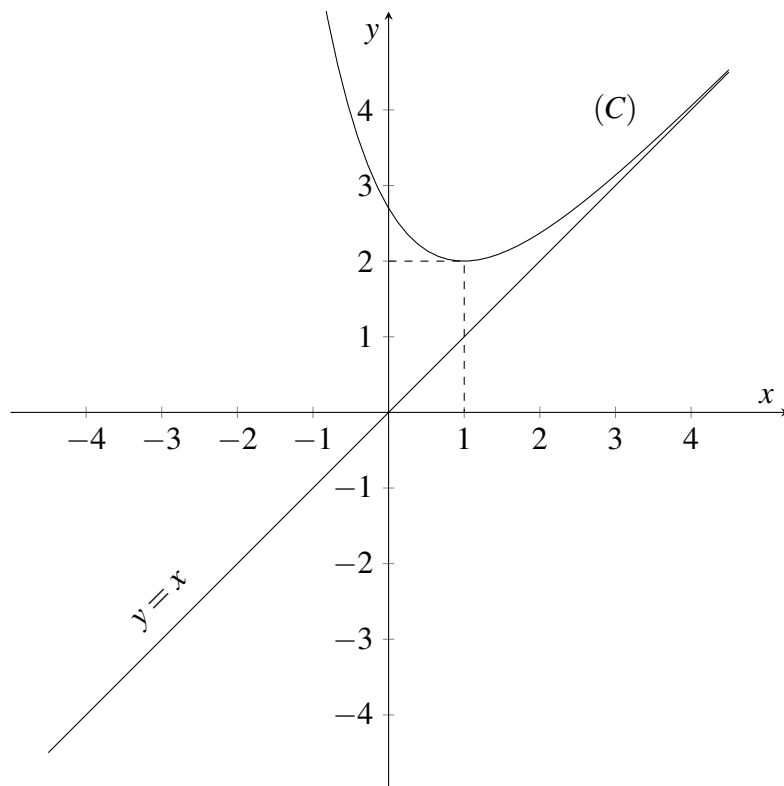
ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = 1$ នោះ f មានអតិបរមាត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 + e^0 = 2$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$-\infty$

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ គេយក $e = 2.7$

បើ $x = 0$ នោះ $y(0) = e$



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងកំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត L បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S &= \int_1^2 [f(x) - x] dx = \int_1^2 (x + e^{1-x} - x) dx = \int_1^2 e^{1-x} dx = e \int_1^2 e^{-x} dx \\ &= -e [e^{-x}]_1^2 = -e(e^{-2} - e^{-1}) = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡា } S = \frac{e-1}{e} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$$

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច $A(-2, 1, -3), B(1, 2, 3)$ និង $C(2, -2, 1)$

1. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង \vec{BC}

$$\text{នោះ } \vec{BC} = (2-1, -2-1, 1-3) = (1, -4, -2) \text{ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ } L$$

$$\text{គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } L: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} = (1+2, 2-1, 3+3) = (3, 1, 6)$$

$$\vec{AC} = (2+2, -2-1, 1+3) = (4, -3, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (4+18)\vec{i} - (12-24)\vec{j} + (-9-4)\vec{k} \\ &= 22\vec{i} + 12\vec{j} - 13\vec{k} \end{aligned}$$

រកសមីការប្លង់ ABC

$$\text{គេបាន សមីការប្លង់ } ABC: 22(x+2) + 12(y-1) - 13(z+3) = 0$$

$$22x + 44 + 12y - 12 - 13z - 39 = 0$$

$$22x + 12y - 13z - 7 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } S &= |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 12^2 + 13^2} = \sqrt{797} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

3. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$

$$\text{ដោយ } \vec{AO} = (0+2, 0-1, 0+3) = (2, -1, 3) \text{ និង } \vec{AB} \times \vec{AC} = (22, 12, -13)$$

$$\text{នាំឱ្យ } \vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = (2)(22) + (-1)(12) + (3)(-13) = -7$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន មាឌតេត្រាអែត } OABC \text{ គឺ } V &= \frac{1}{6} |\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})| \\ &= \frac{|-7|}{6} \\ &= \frac{7}{6} \text{ ឯកតាមាឌ} \end{aligned}$$

មណ្ឌលប្រឡង _____
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន: _____

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

- I. 1. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។
 រកម៉ូឌុល និង អាក្យូយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (E) ។
 2. សរសេរ $w = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- II. គណនាលីមីត៖
 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos x}$ $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$ $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$
- III. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y'' + 3y' + y = 0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1, y'(0) = 2$ ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល
 $A = \int \frac{2x+7}{x^2-1} dx$ $B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ $C = \int x e^x dx$
- V. ក្នុងចំណោមប៊ូល ១៥ ដែលចែកជា ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន ៧ និងសរសេរលើប៊ូលទាំង ៧ ប៊ូលខៀវចំនួន ៥ និងប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន ៣ ។ គេចាប់ប៊ូលបីចេញពីក្នុងចំណោមប៊ូលទាំងនេះ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
 A: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង
 B: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ក្រហមចំនួនពីរ និងបៃតងមួយ
 C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខុសគ្នា ។
- VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ ហើយមានក្រាប C ។
 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចបង្ហាញថាជាអនុគមន៍សេស ។
 2. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ ។
 3. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍
 4. សង់តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f និងសង់ខ្សែកោង C ។ គេឱ្យ ($e = 2.7$)
 5. ដោយប្រើក្រាប (C) ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m នូវចំនួននឹងសញ្ញានៃឫសសមីការ $\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = m$ ។
- VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេឱ្យបីចំណុច $A(3, 1, 4), B(-1, 2, 5), C(5, -2, 3)$
 1. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស \vec{AB} ។
 2. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ \vec{AC} ហើយកាត់តាមចំណុច B ។ រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$ ។
 3. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
 M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (P) គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. 1. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-\sqrt{2})^2 - (1)(4) = 2 - 4 = -2 < 0$$

$$\text{គេបាន } z_1 = \frac{-(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}i}{1} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ នាំឱ្យ } z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$\text{រក } |z_1|, |z_2| \text{ និង } \arg(z_1), \arg(z_2)$$

$$\text{ដោយ } |z_1| = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{គេបាន } z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{|z_1| = |z_2| = 2, \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ដែល } k \in \mathbb{Z}}$$

2. សរសេរ $w = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{ដោយ } \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$\text{នាំឱ្យ } w = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right]^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{w = \cos \pi + i \sin \pi}$$

II. គណនាលីមីត៖

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = 16 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \times \frac{\frac{x^2}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right] = 16$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{A = 16}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } A(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} \Rightarrow A(0) = 2$$

$$\text{គេបាន } B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot A(x)}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot A(x)}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x) \sin x}{x+1-1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{A(x)}{2} \times \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{A(0)}{2} \times 1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{B = 1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2x - 2}{x^2 - x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1) + 2(x-1)}{x(x-1) + (x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{C = \frac{3}{2}}$$

III. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y'' + 3y' + y = 0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1, y'(0) = 2$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(2\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0, 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } y = Ae^{-x} + Be^{-\frac{1}{2}x}, A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow y(0) = A + B = 1 \quad (1)$$

$$y' = -Ae^{-x} - \frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow y'(0) = -A - \frac{1}{2}B = 2 \quad (2)$$

$$\text{យកសមីការ (1) + (2) គេបាន } A - A + B - \frac{1}{2}B = 1 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B = 3 \Rightarrow B = 6$$

$$\text{ជំនួសចូលសមីការ (1) នាំឱ្យ } A = 1 - B = 1 - 6 = -5$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការមានចម្លើយ } \boxed{y = -5e^{-x} + 6e^{-\frac{1}{2}x}}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$A = \int \frac{2x+7}{x^2-1} dx$$

$$\text{ដោយ } \frac{2x+7}{x^2-1} = \frac{2x+7}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{សម្រួល } 2x+7 = Ax+A+Bx-B = (A+B)x+A-B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 2 & (1) \\ A-B = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1) + (2) គេបាន } 2A = 9 \Rightarrow A = \frac{9}{2} \text{ ជំនួសចូល (1) នោះ } B = 2 - A = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{គេបាន } A = \int \left(\frac{9}{2(x-1)} - \frac{5}{2(x+1)} \right) dx = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{9}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \ln|x+1| + C$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{A = \frac{9}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \ln|x+1| + C, C \in \mathbb{R}}$$

$$B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{តាង } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{គេបាន } B = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_e^{e^2} = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = |\ln|\ln e^2|| - |\ln|e|| = \ln 2 - 1$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{B = \ln 2 - 1}$$

$$C = \int xe^x dx$$

$$\text{តាង } u = x \Rightarrow du = dx \text{ និង } dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\text{គេបាន } C = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{C = xe^x - e^x + c, c \in \mathbb{R}}$$

V. គេចាប់ប៊ូល 3 ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានបូលសរុបចំនួន 15 ដោយចៃដន្យ

$$\text{នោះករណីអាចគឺ } n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12!3!} = 450$$

រក $P(A)$

$$A: \text{ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង នាំឱ្យ } n(A) = C(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!3!} = 5 \times 7 = 35$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{450} = \frac{7}{90}$$

រក $P(B)$

B : ប៊ូលដែលចាប់បានពណ៌ក្រហមចំនួន 2 និង បៃតង 1 នាំឱ្យ $n(B) = C(3,2) \cdot C(7,1) = 3 \times 7 = 21$

$$\text{ដូច្នេះ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{21}{450} = \frac{7}{150}$$

រក $P(C)$

C : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខ្ពស់គ្នា នាំឱ្យ $n(C) = C(7,1) \cdot C(5,1) \cdot C(3,1) = 7 \times 5 \times 3 = 150$

$$\text{ដូច្នេះ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយមានក្រាប C

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\frac{x+1}{x-1} > 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$	$+$

តាមតារាងសញ្ញា ដោយ $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ដូច្នេះ ដែនកំណត់ $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, \exists -x \in \mathcal{D} \text{ គេបាន } f(-x) &= \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \ln(x-1) - \ln(x+1) \\ &= -[\ln(x+1) - \ln(x-1)] \\ &= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស

2. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$$

គេបាន $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក និង $x = -1, x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ f

3. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= \left[\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right]' = [\ln(x+1)]' - [\ln(x-1)]' = \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

ដោយ $(x-1)(x+1) > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f'(x) < 0$ នោះអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ \mathcal{D}

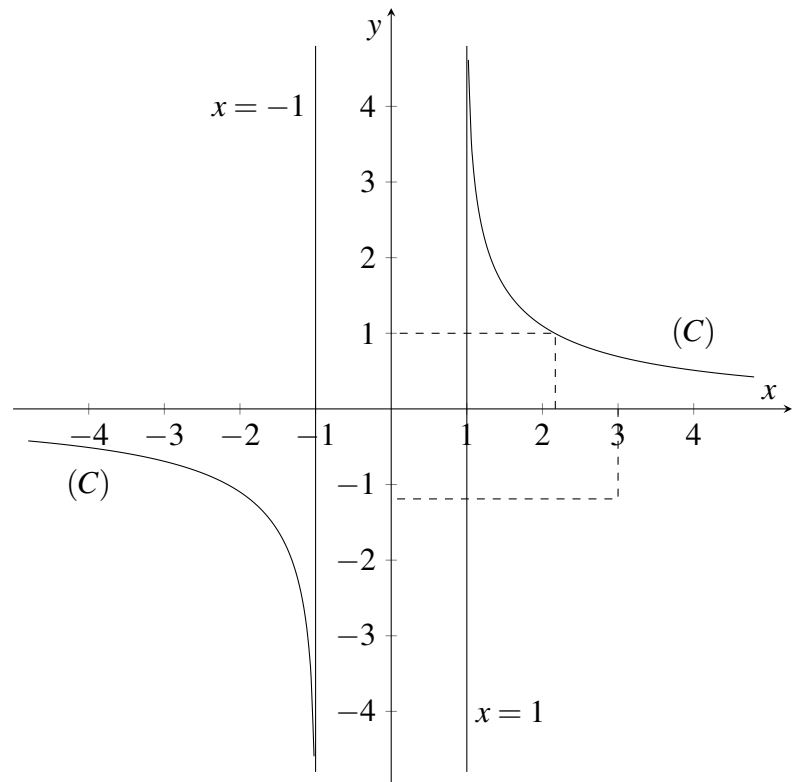
4. តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0

សង់ខ្សែកោង C

បើ $y = 1$ នោះ

$$\begin{aligned} 1 &= \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \\ \Leftrightarrow e &= \frac{x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow ex - e &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x(e-1) &= 1 + e \\ \Rightarrow x &= \frac{3.7}{1.7} = 2.17 \end{aligned}$$



5. ពិភាក្សាតម្លៃ m នៃសមីការ $\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = m$ (I)

(I) ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ $y = m$ តាមក្រាប

គេបាន $m \in (-\infty, 0)$ សមីការ (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន

$$\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = m \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^m \Rightarrow x = \frac{e^m + 1}{e^m - 1}$$

$m \in (0, +\infty)$ សមីការ (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនវិជ្ជមានគឺ $x = \frac{e^m + 1}{e^m - 1}$

$m = 0$ សមីការ (I) គ្មានឫស

VII. គេមានបីចំណុច $A(3, 1, 4), B(-1, 2, 5), C(5, -2, 3)$

1. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស \overrightarrow{AB}

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = (-1-3, 2-1, 5-4) = (-4, 1, 1)$$

$$\text{គេបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ } (D) : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{សមីការឆ្លុះនៃ } (D) : \frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

2. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រទំណេរម៉ាល់ \overrightarrow{AC} ហើយកាត់តាមចំណុច B

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AC} = (5-3, -2-1, 3-4) = (2, -3, -1)$$

$$\text{គេបាន } (P) : 2(x+1) - 3(y-2) - (z-5) = 0$$

$$2x + 2 - 3y + 6 - z + 5 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការប្លង់ } (P) : 2x - 3y - z + 13 = 0$$

រកសមីការស្វ័យ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

$$\text{ដោយ } [AB] = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ នាំឱ្យ } r = \frac{[AB]}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{និងផ្ចិត } \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{4+5}{2} \right) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$\text{គេបានសមីការស្វ័យ } S : (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} + z^2 - 9z + \frac{81}{4} = \frac{9}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 9z + \frac{45}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ សមីការស្វ័យ } S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 9z + 18 = 0$$

3. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-1+3)\vec{i} - (4-2)\vec{j} + (12-2)\vec{k}$$

$$\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\text{គេបានសមីការប្លង់ } ABC : 2(x-3) - 2(y-1) + 10(z-4) = 0$$

$$2x - 6 - 2y + 2 + 10z - 40 = 0$$

$$2x - 2y + 10z - 44 = 0$$

$$x - y + 5z - 22 = 0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$\text{គេបាន } S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{n}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 10^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4+4+100}}{2} = \frac{\sqrt{108}}{2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច $M(x, y, z)$

M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $(D) : x = 5 - 4t, y = -2 + t, z = 3 + t$ និងប្លង់ $(P); 2x - 3y - z + 13 = 0$

គេបាន $2(5 - 4t) - 3(-2 + t) - (3 + t) + 13 = 0$

$$10 - 8t + 6 - 3t - 3 - t + 13 = 0$$

$$-12t = -26 \Rightarrow t = \frac{13}{6}$$

$$\text{នាំឱ្យ } x = 5 - \frac{4(13)}{6} = \frac{30 - 52}{6} = -\frac{11}{3}, y = -2 + \frac{13}{6} = \frac{-12 + 13}{6} = \frac{1}{6}, z = 3 + \frac{13}{6} = \frac{31}{6}$$

ដូច្នេះ ចំណុចប្រសព្វ $M\left(-\frac{11}{3}, \frac{1}{6}, \frac{31}{6}\right)$

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ហ៊ុន វុទ្ធី

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$ និង $B = \frac{x + iy}{1 + i}$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត ។

1. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
2. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រកតម្លៃ x, y ដោយដឹងថា $2\bar{B} - A^2 = 0$ (\bar{B} ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B) ។

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

III. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ ដែល $x \neq 1$ ។

1. កំណត់តម្លៃ a, b, c និង d ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$ ។
2. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។

IV. 1. ដោះស្រាយសមីការ $(E) : y'' + 5y' + 6y = 0$ ។

2. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $(D) : y = x - 1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x = 0$ ។

V. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សធ្នូស្របអ័ក្សអរដោនេ ហើយក្រាបវាភាគតាមចំណុច $(-2, -3), (2, 5)$ និង $(1, 6)$ ។ កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល ។

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$ មានក្រាប (C) ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។
2. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើន ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។
3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$ ។
4. សង់ក្រាប $(T), (D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2, 0, 1), B(3, 1, 5)$ និង $C(1, 4, 4)$

1. គណនា \overrightarrow{AB} និង \overrightarrow{AC} ។
2. គណនា $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ $\triangle ABC$ ។
3. រកសមីការប្លង់ (ABC) ។ បង្ហាញថាចំណុច $D(2, 0, 2)$ មិននៅក្នុងប្លង់ (ABC) ។
4. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) រួចគណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ ។
5. សរសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$ ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. 1. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\text{គេមាន } A = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A^2 &= [(\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)]^2 \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)i + i^2(\sqrt{3} + 1)^2, i^2 = -1 \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4i - (3 + 2\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{A^2 = -4\sqrt{3} + 4i}$$

សរសេរ A^2 ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$= 8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{A^2 = 8 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}$$

2. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } B &= \frac{x + iy}{1 + i} \quad \text{ដែល } x, y \in \mathbb{R} \\ &= \frac{(x + iy)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{x - xi + iy - i^2y}{1 - i^2}, i^2 = -1 \\ &= \frac{(x + y) + (y - x)i}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{B = \frac{x + y}{2} + \frac{y - x}{2}i}$$

កេតខ្លី x, y ដោយដឹងថា $2\bar{B} - A^2 = 0$ (\bar{B} ជាកំរិតច្រើននៃ B) នោះ $\bar{B} = \frac{x + y}{2} - \frac{y - x}{2}i$

$$\text{គេបាន } 2\bar{B} - A^2 = 0$$

$$2\bar{B} = A^2$$

$$x + y - (y - x)i = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -4\sqrt{3} & (1) \\ y - x = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1) បូក (2) នោះ } 2y = -4 - 4\sqrt{3} \Rightarrow y = -2 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{ជំនួសចូល (1) នោះ } x = -4\sqrt{3} - y = -4\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} = 2 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x = 2 - 2\sqrt{3}, y = -2 - 2\sqrt{3}}$$

II. គណនាលីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3}{x^3 + x^2 + x^2 + x + 5x + 5}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x+1) - 3(x+1)}{x^2(x+1) + x(x+1) + 5(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+x+5)} \\
 &= \frac{2(-1)-3}{(-1)^2+(-1)+5}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = -1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(x+1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x+1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\
 &= 1 \times 1 + 1 \times 1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = 2$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$ បើ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ នោះ $t \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi - 2(t + \frac{\pi}{2})}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{-\sin t}$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 2 \times 1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $A(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x - 1} \Rightarrow A(2) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

និង $B(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4} \Rightarrow B(2) = 2 - 2 = 0$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1})A(x) \cdot B(x)}{(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4})B(x) \cdot A(x)}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x^2 - 1 - (2x - 1)]B(x)}{[x + 2 - (x^2 + 2x - 4)]A(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)B(x)}{-(x^2 + x - 6)A(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)B(x)}{-(x - 2)(x + 3)A(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x B(x)}{-(x + 3)A(x)} \\
 &= \frac{2 \cdot B(2)}{-5 \cdot A(2)} = \frac{2 \times 4}{-5 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}$

III. គេមាន $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ ដែល $x \neq 1$

1. កំណត់តម្លៃ a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x + 2x - 2 + 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1) + 2(x - 1) + 1}{x - 1} \\ &= x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{សមមូល } ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1} = x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1, b = -1, c = 2 \text{ និង } d = 1}$$

2. គណនា $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int_{-1}^0 \left(x^2 - x + 2 + \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x - 1| \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 + \ln|-2| \right) \\ &= 0 - \left(\frac{-2 - 3 - 12}{6} + \ln 2 \right) \\ &= \frac{17}{6} - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = -\frac{11}{6} - \ln 2}$$

IV. 1. ដោះស្រាយសមីការ (E) : $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$\text{មានសមីការសំគាល់ } \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 2) + 3(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2, x = -3$$

$$\text{គេបាន } y = Ae^{\lambda_1} + Be^{\lambda_2} = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \text{ ដែល } A, B \in \mathbb{R}}$$

2. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ (D) : $y = x - 1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x = 0$

$$\text{នោះ } y(0) = 0 - 1 = -1 \text{ និង } y' = (x - 1)' = 1 \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$\text{ដោយ } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \Rightarrow y(0) = Ae^0 + Be^0$$

$$\Leftrightarrow -1 = A + B \quad (1)$$

$$\text{និង } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \Rightarrow y' = (-2x)'Ae^{-2x} + (-3x)'Be^{-3x}$$

$$= -2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -2Ae^0 - 3Be^0$$

$$\Leftrightarrow 1 = -2A - 3B \quad (2)$$

$$\text{យក } 2(1) + (2) \text{ គេបាន } 2(-1) + 1 = 2(A + B) - 2A - 3B$$

$$-1 = 2A + 2B - 2A - 3B$$

$$-1 = -B$$

$$B = 1$$

$$\text{ជំនួសចូល (1) នោះ } -1 = A + 1 \Rightarrow A = -2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ } y = -2e^{-2x} + e^{-3x}}$$

V. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $(-2, -3)$, $(2, 5)$ និង $(1, 6)$

សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរគឺ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

កាត់តាមចំណុច $(-2, -3)$ នោះ $(-2 - h)^2 = 4p(-3 - k)$

$$4 + 4h + h^2 = -12p - 4pk$$

$$h^2 + 4pk = -12p - 4h - 4 \quad (1)$$

កាត់តាមចំណុច $(2, 5)$ នោះ $(2 - h)^2 = 4p(5 - k)$

$$4 - 4h + h^2 = 20p - 4pk$$

$$h^2 + 4pk = 20p + 4h - 4$$

$$-12p - 4h - 4 = 20p + 4h - 4$$

$$32p + 8h = 0$$

$$4p + h = 0 \quad (2)$$

កាត់តាមចំណុច $(1, 6)$ នោះ $(1 - h)^2 = 4p(6 - k)$

$$1 - 2h + h^2 = 24p - 4pk$$

$$h^2 + 4pk = 24p + 2h - 1$$

$$-12p - 4h - 4 = 24p + 2h - 1$$

$$36p + 6h = -3$$

$$12p + 2h = -1 \quad (3)$$

យក $2(1) - (2)$ គេបាន $2(4p + h) - (12p + 2h) = 0 - (-1)$

$$8p + 2h - 12p - 2h = 1$$

$$-4p = 1$$

$$p = -\frac{1}{4}$$

ជំនួសចូល (2) នោះ $h = -4p = -4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

ជំនួសចូល (1) គេបាន $4 + 4h + h^2 + 12p = -4pk$

$$4 + 4(1) + 1^2 - 3 = k$$

$$6 = k$$

ដូចនេះ រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $P: (x-1)^2 = -(y-6)$

កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

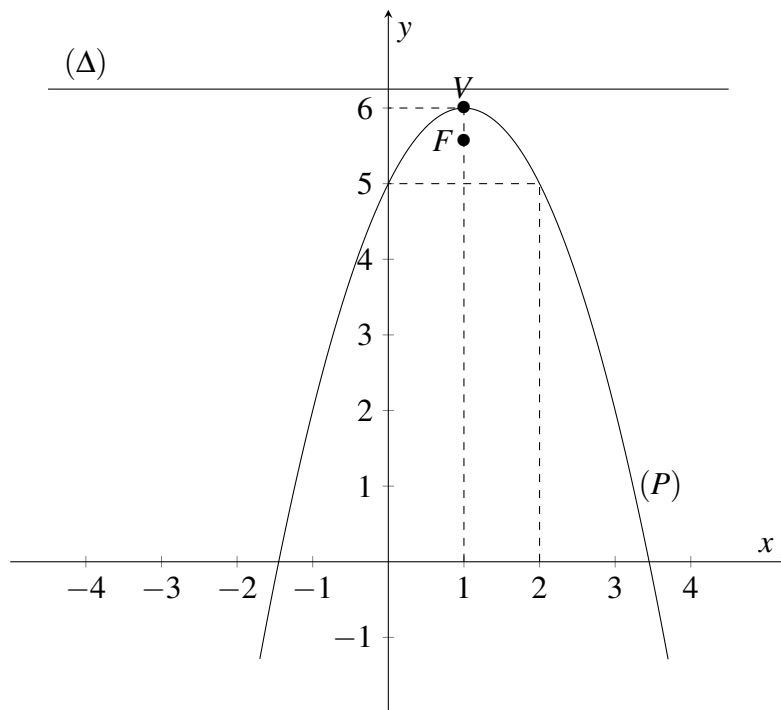
គេបាន កំពូល $V(h,k) \Rightarrow V(1,6)$

កំណុំ $F(h,k+p) \Rightarrow F\left(1, 6 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow F\left(1, \frac{23}{4}\right)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: y = k - p = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

ដូចនេះ កំពូល $V(1,6)$, កំណុំ $F\left(1, \frac{23}{4}\right)$ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: y = \frac{25}{4}$

សង់ប៉ារ៉ាបូល



VI. គេមានក្រាប $(C): g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$ កំណត់លើ \mathbb{R}

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C)

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0$ នាំឱ្យ $D: y = \frac{1}{2}x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$

ដូចនេះ $D: y = \frac{1}{2}x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$

2. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើន

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 &\Rightarrow g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(4e^{2x} - 4e^x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(2e^x - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

ដោយ $g'(x) > 0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

តារាងអថេរភាពនៃ g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$

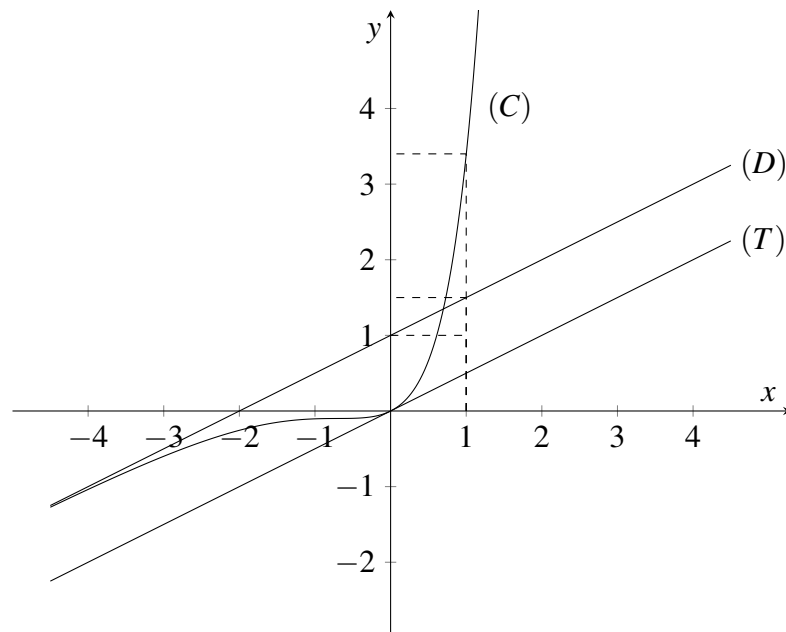
គេបាន $T : y - g(0) = g'(0)(x - x_0)$

$$\begin{aligned} y - (e^0 - 2e^0 + 0 + 1) &= \frac{1}{2}(2e^0 - 1)^2(x - 0) \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ប៉ះ $T : y = \frac{1}{2}x$

4. សង់ក្រាប (T), (D) និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ

x	$T : y = \frac{1}{2}x$	$D : y = \frac{1}{2}x + 1$	$C : y = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$
0	0	1	0
1	1.5	1.5	3.4



VII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,0,1), B(3,1,5)$ និង $C(1,4,4)$

1. គណនា \vec{AB} និង \vec{AC}

$$\text{គេបាន } \vec{AB} = (3-2, 1-0, 5-1) = (1, 1, 4)$$

$$\vec{AC} = (1-2, 4-0, 4-1) = (-1, 4, 3)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\vec{AB} = (1, 1, 4) \text{ និង } \vec{AC} = (-1, 4, 3)}$$

2. គណនា $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(3-16) - \vec{j}(3+4) + \vec{k}(4+1) \\ &= -13\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\vec{N} = (-13, -7, 5)} \text{ គណនាក្រឡាផ្ទៃ } \triangle ABC$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{N}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 7^2 + 5^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{169 + 49 + 25} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{243} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$

3. រកសមីការប្លង់ (ABC)

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } (ABC) : a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) &= 0 \\ -13(x-2) - 7(y-0) + 5(z-1) &= 0 \\ -13x + 26 - 7y + 5z - 5 &= 0 \\ -13x - 7y + 5z + 21 &= 0 \\ 13x + 7y - 5z - 21 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការប្លង់ } (ABC) : 13x + 7y - 5z - 21 = 0}$$

បង្ហាញថាចំណុច $D(2,0,2)$ មិននៅក្នុងប្លង់ (ABC) ទេ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } 13x_D + 7y_D - 5z_D - 21 &= 13(2) + 7(0) - 5(2) - 21 \\ &= 26 - 0 - 21 \\ &= 5 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចំណុច } D \text{ មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ } (ABC) \text{ ទេ}}$$

4. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d[D, (ABC)] &= \frac{|13x_D + 7y_D - 5z_D - 21|}{\sqrt{13^2 + 7^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|5|}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{27} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពី D ទៅប្លង់ (ABC) គឺ $\frac{5\sqrt{3}}{27}$ ឯកតាប្រវែង

គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន មាឌតេត្រាអែត} &= \frac{1}{3} \text{ត្រីកោណបាត} \times \text{កម្ពស់} \\ V_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} |\vec{N}| \times d[D, (ABC)] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{27} \\ &= \frac{3 \times 5}{18} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ មាឌតេត្រាអែត $V_{ABCD} = \frac{5}{6}$ ឯកតាមាឌ

5. សរសេរសមីការស្វ័យ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } [AB] \text{ ជាអង្កត់ផ្ចិតនោះ: } &I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \\ &\Rightarrow I\left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \\ &\Rightarrow I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និងមានកាំ } r &= \frac{|\vec{AB}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{18}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } S: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 3)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - 6z + 9 - \frac{18}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5x - y - 6z + 11 = 0$$

ដូចនេះ សមីការស្វ័យ (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - y - 6z + 11 = 0$

មណ្ឌលប្រឡង៖ _____
 លេខបន្ទប់៖ _____ លេខតុ៖ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន៖ _____
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន៖ _____

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ៖ ហ៊ុន វុទ្ធី

- I. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$ ។
- គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។
 - សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 - សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- II. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4} - x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{|5x|}$
- III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖
- $I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} dx$
 - $J = \int \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$
 - $K = \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5} dx$
- IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៊ូលចំនួន ១៥ គ្រាប់ ដោយបង់លេខពីលេខ ១ ដល់ លេខ១៥ ។ គេចាប់យកប៊ូលបីព្រមគ្នាចេញពីបង់ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាប៖
- A : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាលេខចែកដាច់នឹង 3 ។
 - B : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាស្ថិតនព្វន្តកើន ដែលមានផលសងរួមស្មើ 3 ។
 - C : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាស្ថិតធរណីមាត្រកើន ដែលមានផលធៀបរួមស្មើ 3 ។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ (E) : $y'' - 7y' + 12y = 0$ ។
- ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។
 - បង្ហាញថា $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។
- VI. (៣០ពិន្ទុ)
- នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវ៉ិចទ័រ គេមានចំណុច $A(-1, 2, 3), B(2, 0, -1)$ និង $C(-3, 2, -4)$ ។
 - រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុច A, B និង C ។
 - សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។
 - បើ $D(r, 1, -r)$ គឺជាចំណុចដែលធ្វើអោយ $\angle BDC$ គឺជាមុំកែង ។ រកតម្លៃនៃ r ។
 - គេមានអេលីប (E) : $4x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ ។
 - រកផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប ។
 - សង់អេលីបនេះ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ $\forall x > 0$ ដោយ $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C) ។
- គេឱ្យអនុគមន៍ g ដែល $g(x) = x^2 - 2 \ln x$ ។
 - សិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា ។
 - បង្ហាញថា $g(x) > 0$ ចំពោះ $\forall x > 0$ ។
 - គណនាលីមីត $f(x)$ ពេល x ខិតជិត 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។
 - បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
 - បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ D ។
 - សង់បន្ទាត់ D និងក្រាប C ។

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= (3 + i3\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i + 9i - 3\sqrt{3} \\ &= 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + i3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{(3 + i3\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{3 + 1} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 6i}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \times z_2 = 12i \text{ និង } \frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= 12i \\ &= 12(0 + i) \\ &= 12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 &= 3^2\left(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}\right) \\ &= 9\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 \times z_2 = 12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \text{ និង } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 &= 3^3\left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}\right) \\ &= 27\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = 27\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4} - x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$

បើ $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-t}$
 $= -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$
 $= -2$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4} - x} = -2$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}{(\sqrt{5} - \sqrt{x+5})(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\sqrt{5} + \sqrt{x+5}) \sin 5x}{5 - (x+5)}$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5x}{5x} \times 5(\sqrt{5} + \sqrt{x+5}) \right]$
 $= 2 \times 1 \times 5(2\sqrt{5})$
 $= 20\sqrt{5}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}{(\sqrt{5} - \sqrt{x+5})(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})} = 20\sqrt{5}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{|5x|}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x}{|5x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x}{-5x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 4}{-5}$
 $= \frac{0 - 4}{-5}$
 $= \frac{4}{5}$

និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x}{|5x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x}{5x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 4}{5}$
 $= \frac{0 - 4}{5}$
 $= -\frac{4}{5}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x}{|5x|} = \frac{4}{5}$ និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x}{|5x|} = -\frac{4}{5}$

III. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}\text{ក. } I &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2} dx \\ &= \int \frac{d(\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2} \quad \text{ព្រោះ } d(\sin x - 1) = \cos x dx \\ &= -\frac{1}{\sin x - 1} + c\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = -\frac{1}{\sin x - 1} + c \text{ ដែល } c \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

$$\begin{aligned}\text{ខ. } J &= \int \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx \\ &= \int \frac{(x+3) - (x+2)}{(x+2)(x+3)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \int \frac{d(x+2)}{x+2} - \int \frac{d(x+3)}{x+3} \\ &= \ln|x+2| - \ln|x+3| + c \\ &= \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + c\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + c \text{ ដែល } c \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

$$\begin{aligned}\text{គ. } K &= \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 5)}{x^2 + 2x + 5} \quad \text{ព្រោះ } d(x^2 + 2x + 5) = 2(x+1)dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + c\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } K = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + c \text{ ដែល } c \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B និង C

តាង S : ចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីប៊ូលសរុប 15

នាំឲ្យ $n(S) = C(15, 3)$

$$\begin{aligned}&= \frac{15!}{(15-3)!3!} \\ &= \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \\ &= 5 \cdot 7 \cdot 13\end{aligned}$$

A : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាលេខចែកដាច់នឹង 3

លេខដែលចែកដាច់នឹង 3 គឺ 3 មាន 3, 6, 9, 12, 15

នាំឲ្យ $n(A) = C(5, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= \frac{3!4 \cdot 5}{2!3!} \\ &= 2 \times 5 \end{aligned}$$

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 5}{5 \times 7 \times 13} = \frac{2}{91}$

B : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាស្លឹកត្រកើន ដែលមានផលសង្ខេបស្មើ 3

$$B = \{(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (4, 7, 10), (5, 8, 11), (6, 9, 12), (7, 10, 13), (8, 11, 14), (9, 12, 15)\}$$

នាំឲ្យ $n(B) = 9$

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{5 \times 7 \times 13} = \frac{9}{455}$

និង C : ចាប់បានប៊ូលទាំងបីជាស្លឹកឈើមាត្រកើន ដែលមានផលរៀបរួមស្មើ 3

$$C = \{(1, 3, 9)\} \text{ នាំឲ្យ } n(C) = 1$$

គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{455}$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{2}{91}, P(B) = \frac{9}{455} \text{ និង } P(C) = \frac{1}{455}}$$

V. គេមានសមីការ $(E) : y'' - 7y' + 12y = 0$

ក. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E)

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$(r-3)(r-4) = 0$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} r-3=0 \\ r-4=0 \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} r=3 \\ r=4 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } y = Ae^{3x} + Be^{4x} \text{ ដែល } A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

$$\text{នាំឲ្យ } f'(x) = 6e^{3x} - 20e^{4x}$$

$$f''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}$$

$$\text{គេបាន } f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x} - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x})$$

$$= e^{3x}(18 - 42 + 24) + e^{4x}(-80 + 140 - 60)$$

$$= 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x} \text{ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ } (E)}$$

VI. 1. គេមានចំណុច $A(-1, 2, 3), B(2, 0, -1)$ និង $C(-3, 2, -4)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុច A, B និង C

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = (2+1, 0-2, -1-3)$$

$$= (3, -2, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3+1, 2-2, -4-3)$$

$$= (-2, 0, -7)$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} \\ &= (14-0)\vec{i} - (-21-8)\vec{j} + (0-4)\vec{k} \\ &= (14, 29, -4) \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } 14(x+1) + 29(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$$14x + 14 + 29y - 58 - 4z + 12 = 0$$

$$14x + 29y - 4z - 32 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការប្លង់គឺ } 14x + 29y - 4z - 32 = 0}$$

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (14, 29, -4)$

$$\text{គេបាន } (L) : \begin{cases} x = 2 + 14t \\ y = 29t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

គ. រកតម្លៃនៃ r

គេមាន $D(r, 1, -r)$ គឺជាចំណុចដែលធ្វើអោយ $\angle BDC$ គឺជាមុំកែង

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{DB} = (2-r, 0-1, -1+r)$$

$$= (2-r, -1, r-1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (-3-r, 2-1, -4+r)$$

$$= (-3-r, 1, r-4)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$$

$$(2-r)(-3-r) + (-1)(1) + (r-1)(r-4) = 0$$

$$-6 - 2r + 3r + r^2 - 1 + r^2 - 4r - r + 4 = 0$$

$$2r^2 - 4r - 3 = 0$$

$$(2r+1)(2r-3) = 0$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} 2r+1=0 \\ 2r-3=0 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} r=-\frac{1}{2} \\ r=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{r = -\frac{1}{2} \text{ ឬ } r = \frac{3}{2}}$$

2. ក. រកផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប

$$\text{គេមាន } (E) : 4x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{គេបាន } 4x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$$

$$4x^2 + 8x + y^2 + 2y = -1$$

$$4(x^2 + 2x) + y^2 + 2y + 1 - 1 = -1$$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y + 1)^2 - 1 = -1$$

$$4(x + 1)^2 - 4 + (y + 1)^2 = 0$$

$$4(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$\frac{4(x + 1)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x + 1)^2}{1} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំឈរ

នាំឲ្យ $h = -1, k = -1$

$$\text{និង } a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{ហើយ } c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

គេបាន

- ផ្ចិត $I(h, k) = I(-1, -1)$

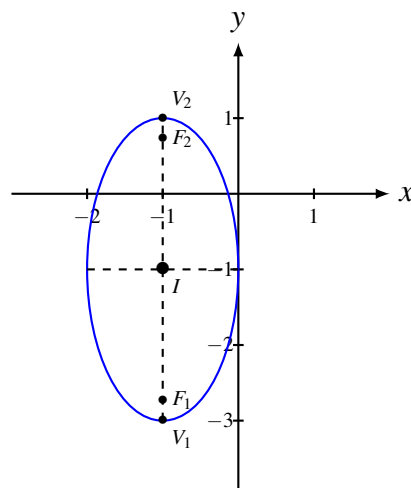
- កំពូល $\begin{cases} V_1(h, k - a) = V_1(-1, -1 - 2) = V_1(-1, -3) \\ V_2(h, k + a) = V_2(-1, -1 + 2) = V_2(-1, 1) \end{cases}$

- កំណុំ $\begin{cases} F_1(h, k - c) = F_1(-1, -1 - \sqrt{3}) \\ F_2(h, k + c) = F_2(-1, -1 + \sqrt{3}) \end{cases}$

- អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូច្នេះ ផ្ចិត $I(-1, -1)$, កំពូល $\begin{cases} V_1(-1, -3) \\ V_2(-1, 1) \end{cases}$, កំណុំ $\begin{cases} F_1(-1, -1 - \sqrt{3}) \\ F_2(-1, -1 + \sqrt{3}) \end{cases}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ខ. សង់អេលីបនេះ



VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C)

1. គេឱ្យ $g(x) = x^2 - 2\ln x$

ក. សិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$

- លីមីតចុងដែន

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

- គណនា $g'(x)$

$$\text{នាំឱ្យ } g'(x) = (x^2 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

- សិក្សាសញ្ញា $g'(x)$

ដោយ $x > 0$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $(2x^2 - 2)$

$$\text{បើ } 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = x \text{ ព្រោះ } x > 0$$

- តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

ដូចនេះ $g'(x) = 0$ កាលណា $x = 1$

$$g'(x) < 0 \text{ កាលណា } x \in (0, 1)$$

$$g'(x) > 0 \text{ កាលណា } x \in (1, +\infty)$$

- ចំណុចបរមា

ដោយ $g'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-) ត្រង់ $x = 1$ គេបានអនុគមន៍ $g(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ ហើយវាមានតម្លៃ $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

2. បង្ហាញថា $g(x) > 0$ ចំពោះ $\forall x > 0$

ចំពោះ $x > 0$ គេបាន $g(x) \geq 1$ នោះ $g(x) > 0$

ដូចនេះ $g(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

2. ក. គណនាលីមីត $f(x)$ ពេល x ខិតជិត 0 និងត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x} \right) \\ &= -\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x} \right) \\ = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

ខ. បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$

$$\text{គេបាន } f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x} \right)' \\ = \frac{1}{2} + \frac{(1 + \ln x)'x - x'(1 + \ln x)}{x^2} \\ = \frac{x^2 + 2 \left[\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x) \right]}{2x^2} \\ = \frac{x^2 + 2(1 - 1 - \ln x)}{2x^2} \\ = \frac{x^2 - 2 \ln x}{2x^2} \\ = \frac{g(x)}{2x^2} \text{ ព្រោះ } g(x) = x^2 - 2 \ln x$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}}$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ដោយ $x^2 > 0$ និង $g(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ នោះ $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$ $-\infty \nearrow$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង C

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x} \right) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} \\ = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{D : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C)}$$

សិក្សាទីតាំងជៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ D

$$\text{គេមាន } f(x) - y = \frac{1 + \ln x}{x}$$

ដោយ $x > 0$ នោះ $f(x) - y$ មានសញ្ញាតាម $1 + \ln x$

បើ $1 + \ln x = 0$ សមមូល $\ln x = -1$ នោះ $x = e^{-1}$

បើ $1 + \ln x > 0$ សមមូល $\ln x > -1$ នោះ $x > e^{-1}$

បើ $1 + \ln x < 0$ សមមូល $\ln x < -1$ នោះ $x < e^{-1}$

ដូចនេះ បើ $x = e^{-1}$ នោះក្រាប (C) ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ (D)

បើ $x < e^{-1}$ គេបាន $f(x) - y < 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (L)

បើ $x > e^{-1}$ គេបាន $f(x) - y > 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (L)

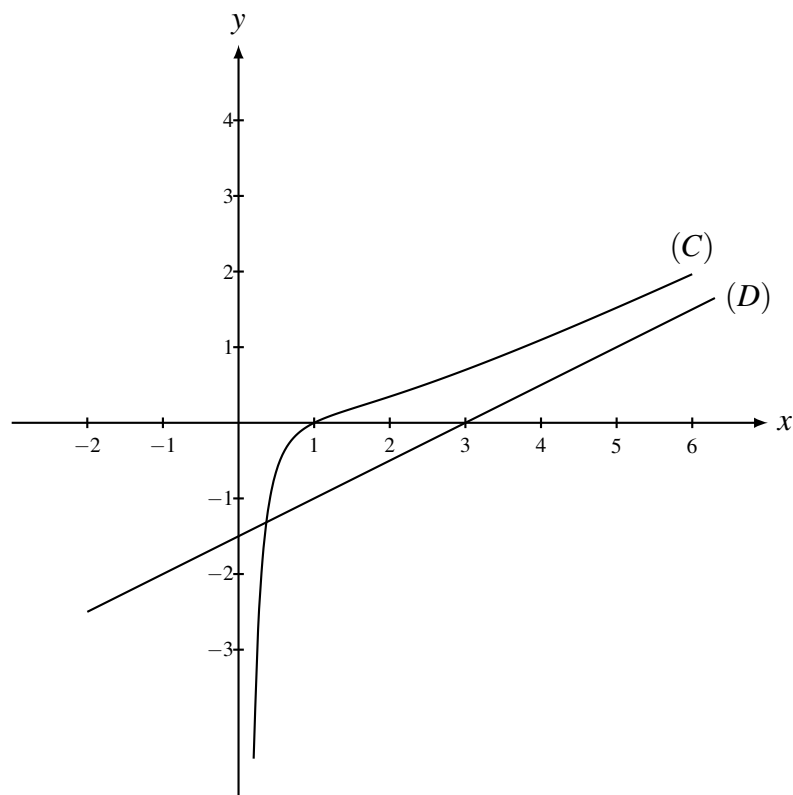
ឃ. សង់បន្ទាត់ D និងក្រាប C

$$\text{សង់បន្ទាត់ } D: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

តារាងតម្លៃលេខ	x	-1	1
	y	-2	-1

$$\text{សង់ក្រាប } C: f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$$

តារាងតម្លៃលេខ	x	e^{-1}	1	2	3	4
	y	-1.3	0	0.3	0.7	1.1



មណ្ឌលប្រឡង : _____
 លេខបន្ទប់ : _____ លេខតុ : _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន : _____
 ឈ្មោះសាលាបង្រៀន : _____

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ : អៀន សំណាង

- I. គណនា លីមីត ខាងក្រោម ៖
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)$
- II. 1. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $(3 + 2i)a + (2 - i)b = 4 + 5i$ ។
 2. គេមាន α និង β ជា ឫសនៃ សមីការ $x^2 - 2x + 3 = 0$ ។
 ចូរសរសេរ $z = 1 + \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 + i(\beta^3 - \beta^2 + \beta + 5)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- III. គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖
- $\int_{-1}^1 (1 - 6x + 3x^2) dx$
 - $\int_0^3 (2e^{2x} + e^x - 1) dx$
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx$
 - $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx$
- IV. គេមាន សមីការ $(E) : 2y'' - y' - 3y = 0$ ។
 ក. ដោះស្រាយ សមីការ (E) ។
 ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $y = 2$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់ $(L) : \frac{1}{2}x + 3$ ។
- V. រកកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$ រួចសង់ក្រាប។
- VI. ក្នុងចង់មួយមានបីចក្រហម 5 ដើម បីចខៀវ 8 ដើម និង បីចខ្មៅ 7 ដើម ។ គេចាប់យកបីច 4 ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីចង់ ។ គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ ខាងក្រោម ៖
- A : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម ។
 - B : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម ។
 - C : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម ។
 - D : ចាប់បានបីចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 គូ ។
- VII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0, 4, -1); B(-2, 4, -5); C(1, 1, -5); D(1, 0, -4)$ និង $E(2, 2, -1)$ ។
- គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចបង្ហាញថា បីចំណុច $A; B; C$ កំណត់បានប្លង់មួយ ព្រមទាំងសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។
 - សរសេរ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់ (d) កាត់តាម C ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $(DE) : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 4}{3}$ ។
 - រក កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M នៃបន្ទាត់ (DE) និង ប្លង់ (ABC) ។
 - បង្ហាញថា ចំណុច $I(-1, 2, -3)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ ដែលស្វ៊ែរនោះ កាត់តាមចំណុច $A; B; C; D$ រួចសរសេរសមីការស្វ៊ែរនោះ។
- VIII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$ មានក្រាប តំណាង (C) ។
- រកដែនកំណត់នៃ អនុគមន៍ ព្រមទាំងគណនា លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតបើមាន ។
 - បង្ហាញថា $I(0, -1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ ខ្សែកោង ។
 - បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(d_1); y = x - 2$ និង $(d_2); y = x$ ជា អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ ក្រាប (C) រួចសិក្សាទីតាំងជៀបនៃ (d_1) (d_2) ជៀបនឹង (C) ។
 - បង្ហាញថា f ជា អនុគមន៍ម៉ូណូតូន គ្រប់ $x \neq 0$ និង សង់តាងអថេរភាព នៃ f ។
 - សង់ អាស៊ីមតូតទាំង អស់ និង ក្រាប (c) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
 - គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក ប្លង់ ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d_1) និង បន្ទាត់ $x = 2; x = 4$ ។

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនា លីមីត ៖

1. គេមាន $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x - x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[2x(x-1) - (x-1)](\sqrt{x+3} + 2)}{\sqrt{(x+3)^2 - 2^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)(\sqrt{x+3} + 2) \\ &= (2 \times 1 - 1)(\sqrt{1+3} + 2) = 4 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} = 4}$

2. គេមាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(1+x)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{1+x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1+x} \right) \\ &= 2 \times 1 \times \frac{1}{1+0} + 1 \times \frac{1}{1+0} = 3 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^x - 1}{x + x^2} = 3}$

3. គេមាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)$ រាងមិនកំណត់ $(+\infty - \infty)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{(4x^2 + 3)^2} - (2x)^2]}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2|x| \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 2x} ; \text{ ពេល } x \rightarrow +\infty \text{ នោះ } |x| = x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 1 \right)} \\ &= 0 \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4x^2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) = 0}$

II. 1. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ៖

$$\text{គេមាន } (3+2i)a + (2-i)b = 4+5i$$

$$\Leftrightarrow 3+2ai+2b-bi=4+5i$$

$$\Leftrightarrow (3a+2b)+(2a-b)=4+5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=4 \\ 2a-b=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=2 \text{ និង } b=-1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{a=2 \text{ និង } b=-1}$$

2. សរសេរ z ជា ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

$$\text{គេមាន } \alpha \text{ និង } \beta \text{ ជាឫសនៃ សមីការ } x^2-2x+3=0$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \alpha^2-2\alpha+3=0 \\ \beta^2-2\beta+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2=2\alpha-3 \\ \beta^2=2\beta-3 \end{cases}$$

$$\text{ដោយ } z=1+\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-2+i(\beta^3-\beta^2+\beta+5)$$

$$=1+\alpha \times \alpha^2-3\alpha^2+5\alpha-2+i(\beta \times \beta^2-\beta^2+\beta+5)$$

$$=1+\alpha(2\alpha-3)-3(2\alpha-3)+5\alpha-2+i[\beta(2\beta-3)-(2\beta-3)+\beta+5]$$

$$=1+2\alpha^2-3\alpha-6\alpha+9+5\alpha-2+i(2\beta^2-3\beta-2\beta+3+\beta+5)$$

$$=8-4\alpha+2(2\alpha-3)+i[2(2\beta-3)-4\beta+8]$$

$$=2+2i$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

III. គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖

1. គណនា $\int_{-1}^1 (1-6x+3x^2)dx$

$$\text{គេមាន } \int_{-1}^1 (1-6x+3x^2)dx = (x-3x^2+x^3)\Big|_{-1}^1$$

$$= [1-3(1)^2+1^3] - [-1-3(-1)^2+(-1)^3]$$

$$= 4$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_{-1}^1 (1-6x+3x^2)dx = 4}$$

2. គណនា $\int_0^3 (2e^{2x}+e^x-1)dx$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \int_0^3 (2e^{2x} + e^x - 1) dx &= (e^{2x} + e^x - x) \Big|_0^3 \\ &= (e^{2 \times 3} + e^3 - 3) - (e^{2 \times 0} + e^0 - 0) \\ &= e^6 + e^3 - 5\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^3 (2e^{2x} + e^x - x) dx = e^6 + e^3 - 5}$$

3. គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx$

តាង $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx &= - \int_1^0 u^4 du \quad ; \text{សម្គាល់ } \boxed{\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx} \\ &= \int_0^1 u^4 du = \left(\frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x) dx = \frac{1}{5}}$$

4. គណនា $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{7}{4(2x + 3)} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{7}{8} \ln(2x + 3) \right] \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{8} \ln 5 \right) - \left(\frac{7}{8} \ln 3 \right) \\ &= \frac{7}{8} \ln \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} dx = \frac{7}{8} \ln \frac{5}{3}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & 2x + 3 \\ \hline -x^2 + \frac{3}{2}x & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \hline \frac{x}{2} + 1 & \\ -\frac{x}{2} - \frac{3}{4} & \\ \hline \frac{7}{4} & \end{array}$$

IV. 1. ដោះស្រាយសមីការ (E) :

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

គេបាន $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\text{យើងបាន } y = Ae^{-x} + Be^{\frac{3}{2}x} ; A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$$

2. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

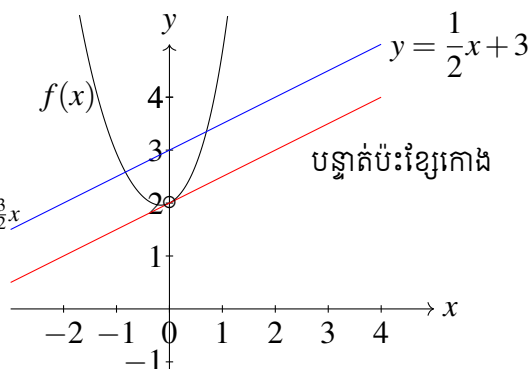
គេមាន $y = Ae^{-x} + Be^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow y' = -Ae^{-x} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}$

ដោយដឹងថា ក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស (y' ឬ y)

ត្រង់ $y = 2$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះ

ក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់ (L) : $y = \frac{1}{2}x + 3$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -A + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = B = 1$$



ដូច្នេះ $y = e^{-x} + e^{\frac{3}{2}x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

V. រកកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង អ័ក្សឆ្លុះ របស់ ប៉ារ៉ាបូល ៖

$$\text{គេមាន } x^2 - 4x + 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = -4y - 12 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -4(y+2) \quad \text{គេបានប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = -4(y+2) \\ (x-h)^2 = 4p(y-k) \end{cases} \Leftrightarrow h=2; k=-2; 4p=-4 \Rightarrow p=-1$$

■ កំពូល $V(h, k) = V(2, -2)$

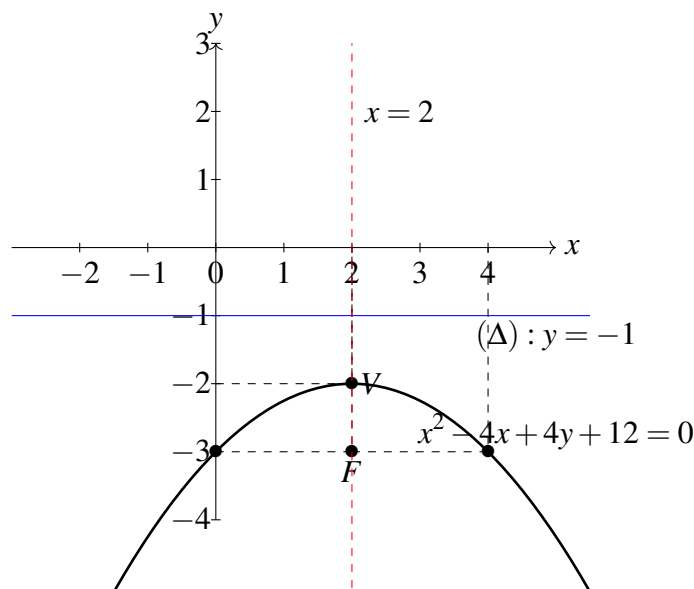
■ កំណុំ $F(h, k+p) = F(2, -2-1)$
 $= F(2, -3)$

■ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta) : y = k - p$
 $= -2 - (-1)$
 $= -1$

■ អ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $x = h = 2$

■ ក្រាបនៃ អនុគមន៍ $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$

យក $y = -3 \Leftrightarrow x = 0; x = 4 \Leftrightarrow y = -3$



VI. រកប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តិការណ៍ ខាងក្រោម ៖

1. A = ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម

$$\text{ដោយ } n(S) = C(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!}{16!4!} = 15 \times 19 \times 17 = 4845$$

$$\text{តាមរូបមន្ត : } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{C(5,2) \times C(8,1) \times C(7,1) + C(5,1) \times C(8,2) \times C(7,1) + C(5,1) \times C(8,1) \times C(7,2)}{C(20,4)}$$

$$= \frac{28}{57}$$

ដូច្នេះ: $P(A) = \frac{112}{969}$

2. B = ចាប់បានបិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម

តាមរូបមន្ត : $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{C(5,3) \times C(15,1) + C(8,3) \times C(12,1) + C(7,3) \times C(13,1)}{C(20,4)}$

$$= \frac{1277}{4845}$$

ដូច្នេះ: $P(B) = \frac{1277}{4845}$

3. C = ចាប់បានបិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម

តាមរូបមន្ត : $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{C(5,4) + C(8,4) + C(7,4)}{C(20,4)}$

$$= \frac{22}{969}$$

ដូច្នេះ: $P(C) = \frac{22}{969}$

4. D : ចាប់បានបិចមានពណ៌ដូចគ្នា 2 គូ

ដោយព្រឹត្តិការណ៍នៃការចាប់បានបិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 គូ គឺមានន័យថា ចាប់បានបិចមានពណ៌ដូចគ្នា 4 ដើម

ដូច្នេះ: $P(D) = P(C) = \frac{22}{969}$

VII. 1. គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមាន $A(0, 4, -1)$; $B(-2, 4, -5)$; $C(1, 1, -5)$

+ តាមរូបមន្ត $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-2 - 0, 4 - 4, -5 - (-1)) = (-2, 0, -4)$

+ តាមរូបមន្ត $\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (1 - 0, 1 - 4, -5 - (-1)) = (1, -3, -4)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= [0(-4) - (-3)(-4)]\vec{i} - [(-2)(-4) - 1(-4)]\vec{j} + [(-2)(-3) - 1(0)]\vec{k} \\ &= -12\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\vec{AB} \times \vec{AC} = -12\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$

+ ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$ នោះគេបានចំណុចទាំងបីគឺមិនត្រូវជុំវិញគ្នា (ABC) មួយ។

+ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ (ABC) : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

• វ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់(ABC) : $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-12, -12, 6)$

• យក $A(0, 4, -1)$ ជាចំណុចកាត់របស់ប្លង់(ABC) គេបាន $x_0 = 0$; $y_0 = 4$; $z_0 = -1$

$$\text{គេបាន (ABC) : } -12(x - 0) - 12(y - 4) + 6(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - z - 9 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ: } (ABC) : 2x + 2y - z - 9 = 0$$

2. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់ (d)

$$\text{តាមរូបមន្ត: } (d) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

+បម្រាប់: (d) កាត់តាម $C(1, 1, -5)$ គេបាន $x_0 = 1 ; y_0 = 1 ; z_0 = -5$

+ (d) ស្របនឹង $(DE) : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{3}$ គេបាន $\vec{u}_d = \vec{u}_{(DE)} = (1, 2, 3)$

$$\text{ដូច្នេះ: } (d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

3. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $M(x_M, y_M, z_M)$ នៃ បន្ទាត់ (DE) និង ប្លង់ (ABC)

យើងមានសមីការប្លង់ $(ABC) : 2x + 2y - z - 9 = 0$

$$\text{សមីការផ្ទៃ: } (DE) : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ} (DE) : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$$

$$+ M \in (DE) \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 + t' \\ y_M = 2t' \\ z_M = -4 + 3t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$$

$$+ M \in (ABC) \Leftrightarrow 2x_M + 2y_M - z_M - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + t') + 2(2t') - (-4 + 3t') - 9 = 0 \Rightarrow t' = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 1 = 2 \\ y_M = 2(1) = 2 \\ z_M = -4 + 3(1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \text{កូអរដោនេនៃ} M \text{ គឺ } M(2, 2, -1)$$

4. បង្ហាញថាចំណុច $I(-1, 2, -3)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ

ដោយស្វ៊ែរកាត់តាម $A ; B ; C$ និង D នោះដើម្បីបញ្ជាក់ថា I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ យើងត្រូវតែ $IA = IB = IC = ID$

$$+ IA = \sqrt{(0+1)^2 + (4-2)^2 + (-1+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ IB = \sqrt{(-2+1)^2 + (4-2)^2 + (-5+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2 + (-5+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$+ \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (-4+3)^2} = 3 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដោយ $IA = IB = IC = ID$

$$\text{ដូច្នេះ: } \text{ចំណុច } I(-1, 2, -3) \text{ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ}$$

+សរសេរសមីការស្វ៊ែរ (S)

$$\text{តាមរូបមន្ត} (S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

- បម្រាប់: $I(a, b, c) = I(-1, 2, -3)$ $r = IA = 3$

ដូច្នេះ: $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$

VIII. 1. + $f(x)$ មានន័យកាលណា $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

ដូច្នេះ: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

+ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = \boxed{-\infty}$ ព្រោះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2e^x}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = \boxed{+\infty}$ ព្រោះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = \boxed{-\infty}$ ព្រោះ: $\frac{2}{0^+} = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = \boxed{+\infty}$ ព្រោះ: $\frac{2}{0^-} = -\infty$

+ បញ្ជាក់អាស៊ីមតូត

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ នោះគេបានបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ ខ្សែកោង ។

2. បង្ហាញថា $I(0, -1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

តាមរូបមន្ត: $f(2a - x) + f(x) = 2b$; $I(0, -1) \Leftrightarrow a = 0$; $b = -1$

+ មាន $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \Rightarrow f(2 \times 0 - x) = f(-x) = -x - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -x - \frac{2}{1 - e^x}$

គេបាន $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times (-1) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = -2$

$\Leftrightarrow -x - \frac{2}{1 - e^x} + x - \frac{2e^x}{e^x - 1} = -\frac{2}{1 - e^x} + \frac{2e^x}{1 - e^x} = -2 \left(\frac{1 - e^x}{1 - e^x} \right) = -2$

ពិត

3. + បង្ហាញថា $(d_1) : y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

គេមាន $(C) : f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$; $(d_1) : y = x - 2$

យក $f(x) - y = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} - x + 2 = \frac{-2e^x + 2e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{2}{1 - e^x}$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - e^x} = 0$

ដូច្នេះ: បន្ទាត់ $(d_1) : y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $x \rightarrow +\infty$

+ បង្ហាញថា $(d_2) : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

យក $f(x) - y = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} - x = \frac{2e^x}{1 - e^x}$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{1 - e^x} = \frac{2 \times 0}{1 - 0} = 0$

ដូច្នេះ: បន្ទាត់ $(d_2) : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $x \rightarrow -\infty$

+ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (d_1) ; (d_2)

- សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (d_1)

មាន $f(x) - y = \frac{2}{1 - e^x}$ ដោយ $2 > 0$ នោះ: $\frac{2}{1 - e^x}$ មានសញ្ញាតាម $1 - e^x$

$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-

+ ចំពោះ $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) - y > 0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ (d_1)

+ ចំពោះ $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) - y < 0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម (d_1)

- សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាង (C)នឹង (d_2)

មាន $f(x) - y = \frac{2e^x}{1 - e^x}$ ដោយ $2e^x > 0$ នោះ $\frac{2}{1 - e^x}$ មានសញ្ញាតាម $1 - e^x$
 $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-

+ ចំពោះ $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) - y > 0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ (d_2)

+ ចំពោះ $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) - y < 0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម (d_2)

- បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន ចំពោះ $x \neq 0$

មាន $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 \left[\frac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2} > 0 ; \forall x \neq 0$

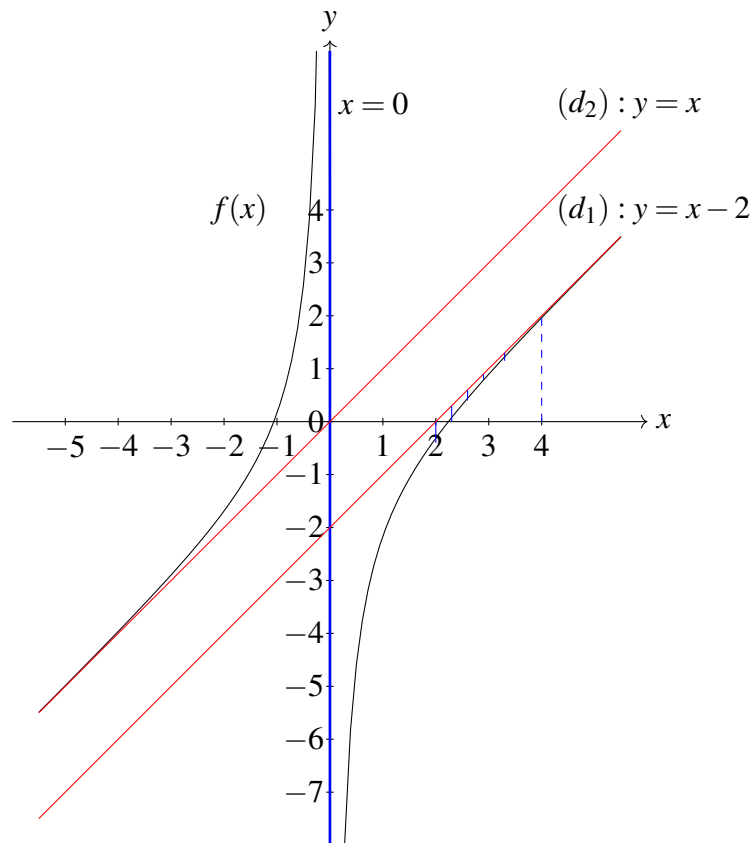
ដោយ $f'(x) > 0$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- សង់ក្រាប និង គ្រប់អាស៊ីមតូតទាំងអស់

$$+ (d_1) : y = x - 2 ; \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & -2 & -1 \end{array} \quad ; (d_2) : y = x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$



6. គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក ប្លង់ ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d_1) និង បន្ទាត់ $x = 2 ; x = 4$ ។

យើងដឹងហើយថា $x \in (0, +\infty)$ បន្ទាត់ $(d_1) : y = x - 2$ នៅលើខ្សែកោង (C) នោះ

គេបាន $x \in [2, 4]$ បន្ទាត់ (d_1) ក៏នៅលើខ្សែកោង (C) ដែរ

$$\text{គេបាន } S = \int_2^4 \left[x - 2 - x + \frac{2e^x}{e^x - 1} \right] dx = \int_2^4 \left(\frac{2e^x}{e^x - 1} - 2 \right) dx = [2\ln(e^x - 1) - 2x]_2^4$$

$$= 2\ln(e^4 - 1) - 8 - 2\ln(e^2 - 1) + 4$$

$$= 2\ln\left(\frac{e^4 - 1}{e^2 - 1}\right) - 4$$

$$\text{ដូច្នេះ: } S = 2\ln\left(\frac{e^4 - 1}{e^2 - 1}\right) - 4 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: អ៊ុយ ប៊ុនថន

- I. នៅក្នុងទូទឹកកកមួយមានកេសដូរពីរប្រភេទគឺ ខាវ ១២ កំប៉ុង និងបាកាស ៨ កំប៉ុង ។ បុរសម្នាក់បានយកកេសដូរពីកំប៉ុងចេញពីទូទឹកកក ដោយចៃដន្យ។
1. រកប្រូបាបដែលបានបាកាសទាំងពីរកំប៉ុង។
 2. រកប្រូបាបដែលបានខាវយ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង។
- II. 1. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$ ។
2. រកចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|Z| + Z = 3 + 4i$ ។
3. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ \mathbb{C} នូវសមីការ $Z^2 + \sqrt{3}Z + 1 = 0$ រួចសរសេរប្លេសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- III. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x > 0$ ដោយ $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x - 6}$ ។
1. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2}$ ។
 2. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$
- IV. គេឲ្យសមីការប៉ារ៉ាបូល $P: y^2 - 2y + 6x - 5 = 0$ ។
1. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល ។
 2. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល។
- V. f ជាអនុគមន៍កំណត់គ្រប់ $x > 0$ ដោយ $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x$ និងមានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
1. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 ។
 ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ចំពោះ $x > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x) = x^2 g(x)$ ។ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។
 2. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាព ។ គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ ។ (គេយក $\ln 2 = 0.7$)
 3. ក. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
 ខ. តើសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយឬទេ ? ចូរបកស្រាយ ។
- VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅអវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេឲ្យចំណុច $A(1, 2, -3), B(0, 5, -1)$ និង $C(3, 0, 1)$ ។
1. ចូរសង់ចំណុច A, B និង C ។
 2. គណនាប្រវែង AB, AC និង BC រួចទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។
 3. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។
 4. គណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

ជំនួយសម្រាប់

I. 1. រកប្រូបាបដែលបានបាត់បង់ទាំងបីកំប៉ុង

ក្នុងទូទឹកកកមានបាត់បង់ 8 កំប៉ុង និងខាតបង់ 12 កំប៉ុង

បុរសម្នាក់បានយកកេសផ្ទះបីកំប៉ុងដោយចៃដន្យ

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ចំនួនករណីអាច } n(S) &= C(20, 3) = \frac{20!}{17!3!} \\ &= \frac{17! \times 18 \times 19 \times 20}{17! \times 6} \\ &= 19 \times 20 \times 3 \\ &= 1140 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

តាង A : “បានបាត់បង់ទាំងបីកំប៉ុង”

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ចំនួនករណីស្រប } n(A) &= C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} \\ &= \frac{5! \times 6 \times 7 \times 8}{5! \times 6} \\ &= 7 \times 8 = 56 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{គេបានប្រូបាប } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{14}{285}}$$

2. រកប្រូបាបដែលបានខាតបង់យ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង

តាង B : “បានខាតបង់យ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង”

ដោយ B និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } P(B) &= 1 - P(A) \text{ នោះ } P(B) = 1 - \frac{14}{285} \\ &= \frac{285 - 14}{285} \\ &= \frac{271}{285} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{271}{285}}$$

II. 1. កំណត់ចំនួនពិត x និង y

$$\text{គេមាន } (1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$$

$$x - 2xi + y + 2yi = 1 + i$$

$$(x + y) + (-2x + 2y)i = 1 + i$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & (i) \\ -x + y = \frac{1}{2} & (ii) \end{cases}$$

$$\text{បូក } (i) \text{ និង } (ii) \text{ គេបាន } 2y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$\text{តាម } (i) : x = 1 - y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}}$$

2. រកចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|Z| + Z = 3 + 4i$

$$\text{តាង } Z = a + bi \text{ នោះ } |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{គេបាន } |Z| + Z = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{ចំពោះ } b = 4 \text{ នោះ } \sqrt{a^2 + 4^2} + a = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} + a = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} = 3 - a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + 16})^2 = (3 - a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 16 = 9 - 6a + a^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = 9 - 6a$$

$$\Leftrightarrow 6a = -7$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{7}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{Z = -\frac{7}{6} + 4i}$$

3. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 + \sqrt{3}Z + 1 = 0$

$$\text{តាម } \Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(1) = 3 - 4 = -1 = (i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, Z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

- សរសេរប្លូស៊ីនីយ៍ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{Z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}}$$

$$Z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

III. 1. កំណត់តម្លៃ a, b និង c

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x+3)(x-2) + b(x-2) + c(x+3)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{a(x^2+x-6) + b(x-2) + c(x+3)}{x^2+x-6} \\ &= \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a-2b+3c)}{x^2+x-6} \end{aligned}$$

$$\text{តែ } f(x) = \frac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} a=3 \\ a+b+c=4 \\ -6a-2b+3c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+c=1 \\ -2b+3c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } a=3, b=2, c=-1$$

2. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int f(x)dx = \int \left(a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} \right) dx \\ &= \int \left(3 + \frac{2}{x+3} + \frac{-1}{x-2} \right) dx \\ &= 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + k, (x > 2) \\ &= 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k, (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k, (k \in \mathbb{R})$$

IV. 1. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមាន } P: y^2 - 2y + 6x - 5 = 0$$

$$\text{គេបាន } y^2 - 2y = -6x + 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = -6x + 6$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = -6(x-1) \text{ ជាសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានបន្ទាត់}$$

ប្រាប់ទិសស្របនឹងអ័ក្ស Ox

$$\text{ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារគឺ } P: (y-1)^2 = -6(x-1)$$

2. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$\text{ដោយសមីការ } (y-1)^2 = -6(x-1) \text{ មានទម្រង់ } (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

គេទាញបាន $h = 1, k = 1, 4p = -6 \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$

កំពូល $V(h, k) = V(1, 1)$

កំណុំ $F(h + p, k) = F(1 - \frac{3}{2}, 1) = F(-\frac{1}{2}, 1)$

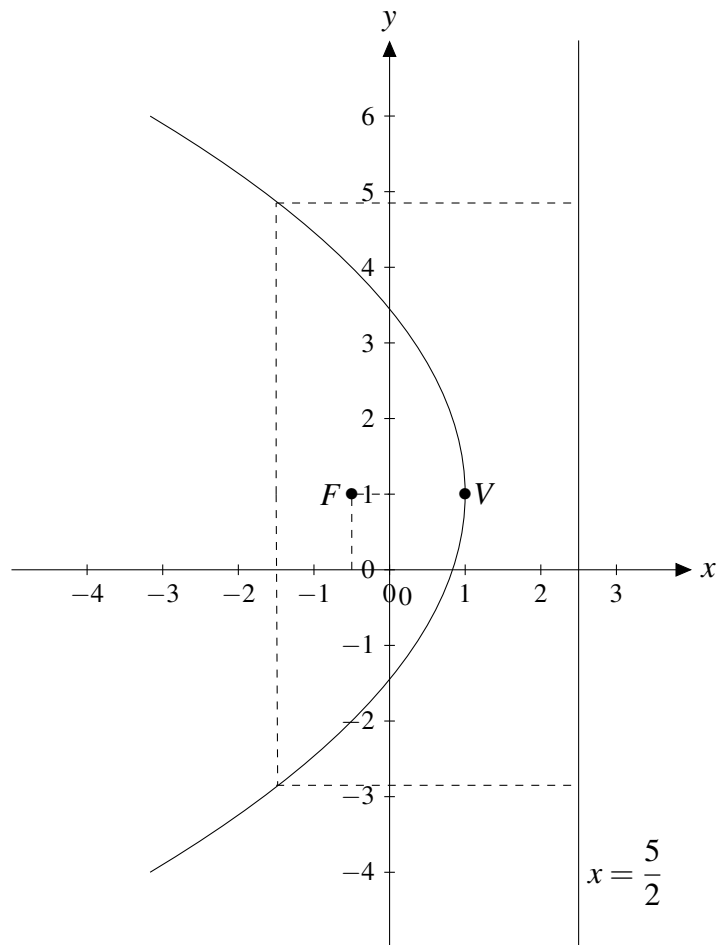
បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

ដូចនេះ: $V(1, 1), F(-\frac{1}{2}, 1), x = \frac{5}{2}$

- សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល

បើ $x = -1.5$ នោះ $y = 4.8$ និង $y = -2.8$

បើ $x = 0$ នោះ $y = 1 \pm \sqrt{6}$



V. គេមាន $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x$ ដែល $x > 0$

1. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x) = +\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

2. កំណត់អនុគមន៍ g ចំពោះ $x > 0$

គេមាន $f(x) = x^2 g(x)$ គេបាន $x^2 + \frac{1}{2} - 3\ln x = x^2 g(x)$

$$\text{នាំឲ្យ } g(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2} - 3 \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g(x) = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{x^2}}, (x > 0)$$

- គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{x^2} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. សិក្សាអំពីលក្ខណៈនៃ f

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 3 \ln x \text{ ដែល } x > 0$$

$$\text{ដេរីវេ } f'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x}$$

$$\text{ដោយ } x > 0 \text{ នោះ } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } 2x^2 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$$\text{តម្លៃអប្បបរមាត្រង់ } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ គឺ } f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1.39$$

- គូសតារាងអំពីលក្ខណៈ

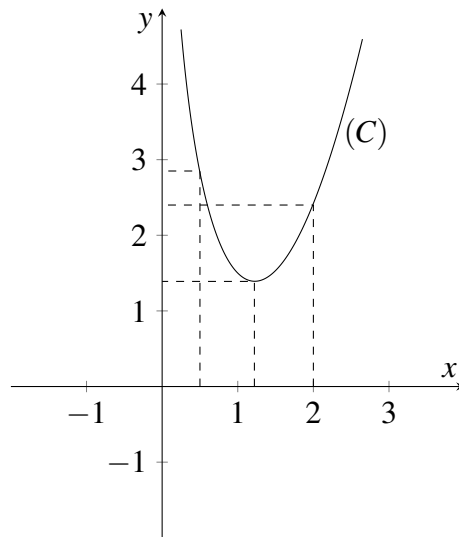
x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1.39	$+\infty$

- គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 \ln \frac{1}{2} = 0.75 + 2.1 = 2.85$$

$$f(2) = 4 + \frac{1}{2} - 3 \ln 2 = 4.5 - 2.1 = 2.4$$

3. ក. សង់ក្រាប C



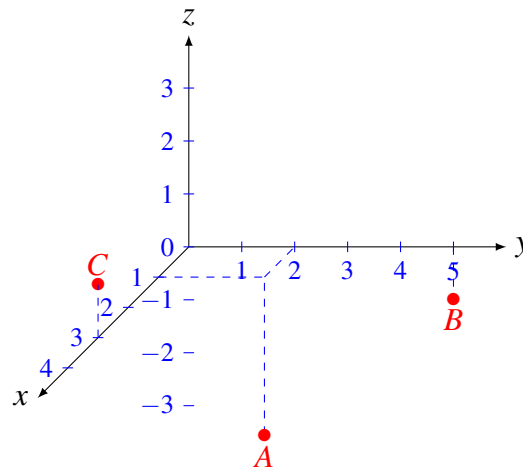
ខ. តើសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយ ឬទេ?

តាមក្រាប C ខាងលើ សមីការ $f(x) = 0$ គ្មានចម្លើយទេ

(ព្រោះ $f(x) \geq 1.39$ គ្រប់ $x \in D$) ។

VI. គេមានចំណុច $A(1, 2, -3), B(0, 5, -1)$ និង $C(3, 0, 1)$

1. សង់ចំណុច A, B និង C



2. គណនាប្រវែង AB, AC និង BC

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 5 - 2, -1 + 3) = (-1, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 1, 0 - 2, 1 + 3) = (2, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - 0, 0 - 5, 1 + 1) = (3, -5, 2)$$

$$\text{គេបាន } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{AB = \sqrt{14}, AC = \sqrt{24}, BC = \sqrt{38}}$$

• ទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

$$\text{គេបាន } AB^2 = (\sqrt{14})^2 = 14$$

$$AC^2 = (\sqrt{24})^2 = 24$$

$$BC^2 = (\sqrt{38})^2 = 38$$

ដោយ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ច្បាប់ពីស៊ីរ៉ា)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

3. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (12 + 4)\vec{i} - (-4 - 4)\vec{j} + (2 - 6)\vec{k} = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\vec{AB} \times \vec{AC} = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}}$$

• គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\text{ដោយ } \vec{AB} \times \vec{AC} = (16, 8, -4) = 4(4, 2, -1)$$

$$\text{គេបាន } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{16 + 4 + 1} = 2\sqrt{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{21} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$$

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $C(3, 0, 1)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (16, 8, -4) \text{ គេបាន:}$$

$$(ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$16(x - 3) + 8(y - 0) - 4(z - 1) = 0$$

$$16x - 48 + 8y - 4z + 4 = 0$$

$$16x + 8y - 4z - 44 = 0$$

$$4x + 2y - z - 11 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(ABC) : 4x + 2y - z - 11 = 0}$$

4. គណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC)

$$\text{គេមាន } (ABC) : 4x + 2y - z - 11 = 0 \text{ និងចំណុច } O(0, 0, 0)$$

ចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned} D &= \frac{|4(0) + 2(0) - (0) - 11|}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{16 + 4 + 1}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{21}} = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{D = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$$

មណ្ឌលប្រឡង៖

លេខបន្ទប់៖ លេខគុ

ឈ្មោះបេក្ខជន៖

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន៖

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របង្រៀនសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ៖ អ៊ី ចាន់ថា

- I. គណនាលីមីត
- ក. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x}$
- II. ក្នុងចំណោមមូលក្រហម 4 មូលខ្មៅ 3 និងមូលស 1 ។ គេយកមូល 3 ចេញពីក្នុងចំណោមមូលដោយ ចៃដន្យ។ រកប្រូបាបដែលគេយកបាន៖
- ក. មូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច។ ខ. មូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា។ គ. មូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា។
- III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ។
- ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- គ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖
- ក. $I = \int_1^2 (3+x-x^2)dx$ ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$ គ. $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$
- V. 1. គេមានចំណុច៖ $A(-2, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$ ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។
- ក. រកវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$ រួចគណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD, CD ។
- ខ. ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABD និង ACD កែងគ្នា។
2. គេមានប៉ារ៉ាបូល (P) មួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0, 0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។
- ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P) បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2, 6)$
- ខ. រកតម្លៃនៃ x_1 បើ $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតលើប៉ារ៉ាបូល (P) រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។
- VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 2y = x^2$ ។
- ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានដេរីវេជាចម្លើយនៃ (E) ។
- ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f - g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E') : y' + 2y = 0$ ។ ដោះស្រាយសមីការ $(E') : y' + 2y = 0$ ។
- VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$ មានខ្សែកោង C ។
1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $(d_1) : y = x - 2$ ។
2. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ \mathbb{R} គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ។
- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ \mathbb{R} ។
3. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។
- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹង បន្ទាត់ d_2 ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា។

ជំនេរស្រាវ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)(\sqrt{5+x}+2)}{(\sqrt{5+x}-2)(\sqrt{5+x}+2)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2+x-1)(\sqrt{5+x}+2)}{(5+x-4)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{2+x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{2-1}+1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2} = 2}$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-x^2+x^2-2x+1}{x^{50}-x^2+x^2-2x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x^{98}-1)+(x-1)^2}{x^2(x^{48}-1)+(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)^2}{x^2(x-1)(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x^2(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)]}{(x-1)[x^2(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\dots+x+1)+(x-1)}{x^2(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\dots+x+1)+(x-1)} \\ &= \frac{1^2(1+1+1+\dots+1+1)+0}{1^2(1+1+1+\dots+1+1)+0} \\ &= \frac{98}{48} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \frac{49}{24}}$ ។

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right)}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin 3x} \end{aligned}$$

$$\text{តាង } t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = \pi + 3t$$

$$\text{ពេល } x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin 3x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sin (\pi + 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-\sin 3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{2 \frac{\sin t}{t}}{3 \frac{\sin 3t}{3t}} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} = -\frac{2}{3}} \quad \text{។}$$

II. រកប្រូបាបដែលគេយកបាន:

ក. ប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

តាង A: ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

ដោយគេយកប៊ូល 3 ព្រមគ្នា ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានប៊ូល 8 ដោយចៃដន្យ

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(8, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \\ &= 56 \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត គេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច នោះគេអាចយកបានប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលក្រហម 3

គេបាន ចំនួនករណីសរុប $n(A) = C(4, 2) \times C(4, 1) + C(4, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \times 3}{2} \times 4 + 4 \\ &= 6 \times 4 + 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{2}} \text{ ។}$$

ខ. ប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលខ្មៅ 2 ឬប៊ូលក្រហមទាំងបី ឬប៊ូលខ្មៅទាំងបី

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ចំនួនករណីស្រប } n(B) &= C(4, 2) \times C(4, 1) + C(3, 2) \times C(5, 1) + C(4, 3) + C(3, 3) \\ &= 6 \times 4 + 3 \times 5 + 4 + 1 \\ &= 24 + 15 + 5 \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{44}{56} = \frac{11}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{11}{14}} \text{ ។}$$

គ. ប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 1 និងប៊ូលខ្មៅ 1 និងប៊ូលស 1

$$\begin{aligned} \text{គេបាន ចំនួនករណីស្រប } n(C) &= C(4, 1) \times C(3, 1) \times C(1, 1) \\ &= 4 \times 3 \times 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{3}{14}} \text{ ។}$$

III. ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{ម៉ូឌុល } r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

អាកុយម៉ង់

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right| \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \text{ ។}$$

ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\text{គេមាន } z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{និង } z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$\text{គេបាន } z_1 \times z_2 = (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + 3i\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$$

$$= 3(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 \times z_2 = 3(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3i(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \quad \text{។}$$

គ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{គេបាន } z_1 \times z_2 = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] \left[6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 2 \times 6 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{z_1 \times z_2 = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)} \quad \text{។}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$\text{ក. } I = \int_1^2 (3 + x - x^2) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \int_1^2 (3 + x - x^2) dx$$

$$= \left[3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \left(3 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - \left(3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 6 + 2 - \frac{8}{3} - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= 5 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3}$$

$$= \frac{30 - 3 - 14}{6} = \frac{13}{6}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{13}{6}$ ។

ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$

គេបាន $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x \sin x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot d(\sin x)$
 $= [x + \sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= \frac{\pi}{2} + 1$

ដូចនេះ: $J = 1 + \frac{\pi}{2}$ ។

គ. $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

គេបាន $K = \int_0^2 \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$
 $= \int_0^2 \frac{x^2 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$
 $= \int_0^2 \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$
 $= \int_0^2 \left(2 + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) dx$
 $= \int_0^2 2 dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1}$
 $= [2x]_0^2 + \int_0^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx - [\arctan x]_0^2$
 $= [2x]_0^2 + [\ln |x^2+1|]_0^2 - [\arctan x]_0^2$
 $= [2x + \ln |x^2+1| - \arctan x]_0^2$
 $= (4 + \ln 5 - \arctan 2) - (0 + \ln 1 - \arctan 0)$
 $= 4 + \ln 5 - \arctan 2$

ដូចនេះ: $K = 4 + \ln 5 - \arctan 2$ ។

V. 1. ក. កេរ្តិ៍បំប៉ន $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ រួចគណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD, CD

គេមានចំណុច: $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$

គេបាន:

- $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 2) \Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

- $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4) \Rightarrow AD = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{BD} = (0, 2, -5) \Rightarrow BD = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$
- $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6) \Rightarrow CD = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$

ខ. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$ និង $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (2 \times 2) + (0 \times 2) + [1 \times (-4)]$
 $= 4 + 0 - 4$
 $= 0$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ ABD ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់ A (ពិត)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 2)$ និង $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4)$

គេបាន $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (3 \times 2) + (1 \times 2) + [2 \times (-4)]$
 $= 6 + 2 - 8$
 $= 0$

ដោយ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ ACD ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់ A (ពិត)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

2. ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P)

ដោយប៉ារ៉ាបូល P មានកំពូល $V(0, 0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

នោះប៉ារ៉ាបូលមាន អ័ក្សឆ្លុះ ស្ថិតលើអ័ក្សអរដោនេ

គេបានសមីការស្តង់ដារមានរាង : $(x - 0)^2 = 4P(y - 0)$

តែប៉ារ៉ាបូល P កាត់តាម $A(2, 6)$

គេបាន $2^2 = 4P \times 6$

$4 = 24P$

$\Rightarrow P = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារគឺ $(P) : (x - 0)^2 = \frac{2}{3}(y - 0)$ ។

ខ. \triangleright រកតម្លៃនៃ x_1

គេមាន $(P) : x^2 = \frac{4}{6}y$

ដោយ $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតលើ (P)

គេបាន $x_1^2 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

$x_1^2 = 1$

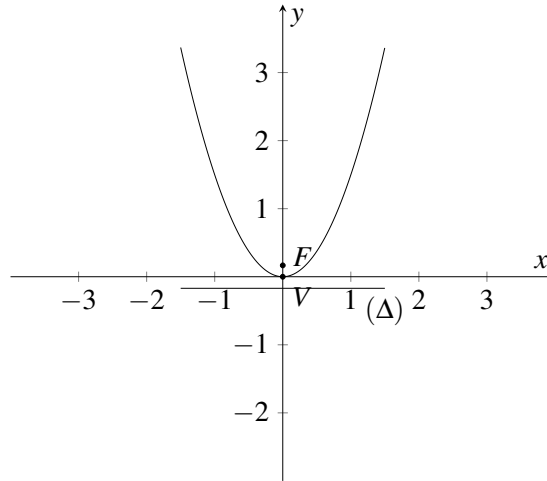
$\Rightarrow x_1 = \pm 1$

ដូចនេះ $x_1 = \pm 1$ ។

▷ សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) :

ប៉ារ៉ាបូល (P) មាន :

- កំពូល $V(0,0)$
- កំណុំ $F(0,0+P)$ នោះ $F\left(0,\frac{1}{6}\right)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) : $y=0-P$ នោះ (Δ) : $y=-\frac{1}{6}$



VI. ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានដឺក្រេទីពីរជាចម្លើយនៃ (E)

តាង $g(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយនៃ (E)

គេបាន $g'(x) = 2ax + b$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ g ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

គេបាន $g'(x) + 2g(x) = x^2$

$$2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

គេបាន $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$ ។

ខ. ▷ បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f - g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y' + 2y = 0$

- បើអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f - g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y' + 2y = 0$

គេមាន (E) : $y' + 2y = x^2$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f'(x) + 2f(x) = x^2$ (1)

តែ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $g'(x) + 2g(x) = x^2$ (2)

យក (1) ដក (2)

$$\text{គេបាន } (f'(x) + 2f(x)) - (g'(x) + 2g(x)) = x^2 - x^2$$

$$(f'(x) - g'(x)) + 2(f(x) - g(x)) = 0$$

$$(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0 \quad \text{ជាចម្លើយនៃ } (E') : y' + 2y = 0 \quad (\text{ពិត}) \quad \forall$$

- បើ $f - g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E') : y' + 2y = 0$ នោះ អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ $(E) : y' + 2y = x^2$

$$\text{ដោយ } f - g \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការ } (E') : y' + 2y = 0$$

$$\text{គេបាន } (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$$

$$f'(x) - g'(x) + 2f(x) - 2g(x) = 0$$

$$f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$$

$$\text{តែ } g \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E) \text{ នោះ } g'(x) + 2g(x) = x^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } f'(x) + 2f(x) = x^2 \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E) \quad (\text{ពិត}) \quad \forall$$

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ

$$f - g \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការ } (E') : y' + 2y = 0 \quad \forall$$

$$\triangleright \text{ដោះស្រាយសមីការ } (E') : y' + 2y = 0$$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$\text{គេបានចម្លើយនៃសមីការ } (E') \text{ គឺ } y = Ae^{-2x} \text{ ដែល } A \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ } (E') \text{ គឺ } \boxed{y = Ae^{-2x} \text{ ដែល } A \in \mathbb{R}} \quad \forall$$

VII. 1. • គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\text{គេមានអនុគមន៍ } f \text{ កំណត់ដោយ } f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = -\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty} \quad \forall$$

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $(d_1) : y = x - 2$

$$\text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \text{ និង } (d_1) : y = x - 2$$

$$\text{តាង } g(x) = f(x) - (d_1)$$

$$= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - (x - 2)$$

$$= \frac{4}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើនៃបន្ទាត់ (d_1) គ្រប់តម្លៃ x ។

- ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ \mathbb{R} គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{គេមាន } f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} &\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \text{ ពិត}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ នៅលើ \mathbb{R} គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ។

- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ \mathbb{R}

$$\text{ដោយ } f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ បើ } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 = 0 \\
 &\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0, \quad e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\
 &e^x = 1 \\
 &e^x = e^0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ បើ } f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 > 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

$$- f(0) = 0 - 2 + \frac{4}{e^0 + 1} = 0$$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ដូចនេះ

- ចំពោះ $x \in (-\infty, 0)$ អនុគមន៍ f កើនពី $-\infty$ ទៅ 0
- ចំពោះ $x = 0$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃស្មើ 0
- ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$ អនុគមន៍ f កើនពី 0 ទៅ $+\infty$ ។

3. • បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \text{គេមាន } f(x) &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= x + 2 - 4 + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= x + 2 + \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} \\
 &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1} \\
 &= x + 2 - \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) = 0$$

នាំឱ្យ បន្ទាត់ $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹង បន្ទាត់ d_2

តាង $h(x) = f(x) - (d_2)$

$$\begin{aligned}
 &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 2) \\
 &= x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 2 \\
 &= \frac{4}{e^x + 1} - 4 \\
 &= \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} \\
 &= -\frac{4e^x}{e^x + 1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមនៃបន្ទាត់ (d_2) គ្រប់តម្លៃ x ។

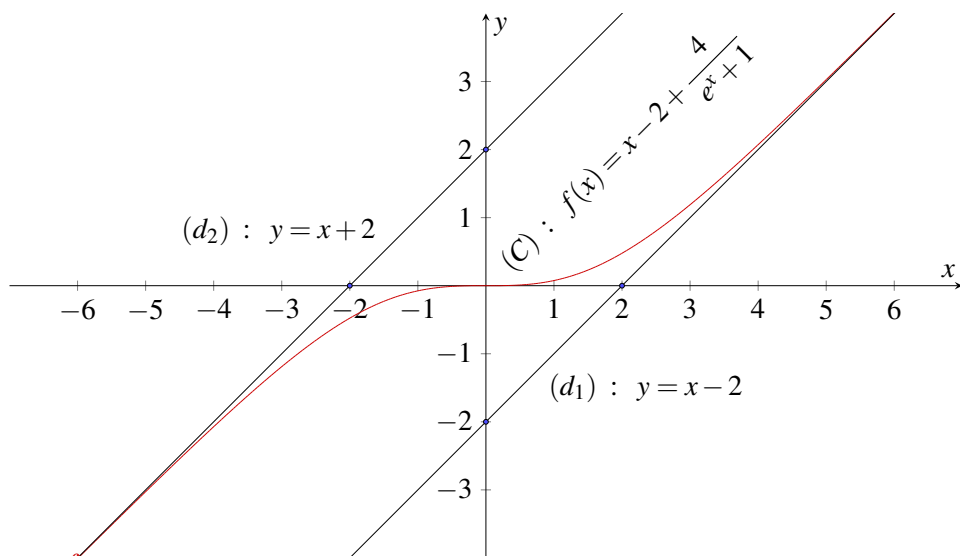
- សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា

▷ $(d_1) : y = x - 2$

x	0	2
y	-2	0

x	0	-2
y	2	0

▷ $(d_2) : y = x + 2$



មណ្ឌលប្រឡង.....

លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន:.....

ឋានៈលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ជា ឃ្លៀន

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ និង $Z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ ។

1. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

2. គណនា $Z_3 = Z_1 \times Z_2$ និង $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$ រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

3. គណនាតម្លៃ $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$ ។

II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x}$

III. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$; ($x \neq 0; x \neq 1$) ។

1. កំណត់តម្លៃ M, N និង P ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2}$ ។

2. គណនា $\int_2^3 f(x)dx$ ។

IV. 1. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + \sin x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \ln(a-1) & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

2. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x}$

ក. គណនាដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ ។

V. រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និង អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់ក្រាបដែលមានសមីការទូទៅ $y^2 + 3x^2 + 4y - 6x - 2 = 0$ ។

VI. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ ។

1. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បី $g(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

2. បង្ហាញថា $k(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(k-g)(x)$ ជាចម្លើយនៃ $(E') : y'' + 2y' + y = 0$ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$ មានក្រាប (C) ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

2. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$ ។

4. សង់ក្រាប $(T), (D)$ និង (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VIII. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2, 0, 1), B(3, 1, 5)$ និង $C(1, 4, 4)$

1. គណនា \vec{AB} និង \vec{AC} ។

2. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

3. រកសមីការប្លង់ (ABC) ។ បង្ហាញថាចំណុច $D(2, 0, 2)$ មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (ABC) ។

4. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) រួចគណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ ។

5. សរសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. 1. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } Z_1 &= -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{6} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{6} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{6} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_1 = \sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } Z_2 &= \sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= \sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_2 = \sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2. គណនា $Z_3 = Z_1 \times Z_2$ និង $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$ រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } Z_1 = \sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \text{ និង } Z_2 = \sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } Z_3 &= Z_1 \times Z_2 \\ &= \left[\sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right] \left[\sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 6 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ Z_3 &= 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_3 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } Z_4 &= \frac{Z_1}{Z_2} \\ &= \frac{\sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}{\sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{ដូចនេះ: } Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

3. គណនាតម្លៃ $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

គេមាន $Z_4 = (\cos \pi + i \sin \pi)$ នឹង

$$\begin{aligned}\text{ចំពោះ } \frac{1+i}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} &= (\cos \pi + i \sin \pi)^{2015} - \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{2016} \\ &= (\cos 2015\pi + i \sin 2015\pi) - (\cos 504\pi + i \sin 504\pi) \\ &= -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $Z_4^{2015} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = -2$

II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(x-2)(x+1)]^{20}}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \\ &= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{10}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x\sqrt{x} - a\sqrt{a})(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}{(x^2 - a^2)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{(x^2 - a^2)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{(x+a)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})} \\ &= \frac{a^2 + a^2 + a^2}{(a+a)(a\sqrt{a} + a\sqrt{a})} \\ &= \frac{3a^2}{2a^2\sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{2a}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2} = \frac{3\sqrt{a}}{2a}$

$$\begin{aligned}
 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\
 \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2019x} - 1) - \sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2019x} - 1}{x} - \frac{\sin 3x}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(e^{2019x} - 1)}{2019x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \\
 &= 2019 - 3 \\
 &= 2016
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2019x} - \sin 3x - 1}{x} = 2016}$$

III. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}, (x \neq 0; x \neq 1)$

$$1. \text{ កំណត់តម្លៃ } M, N \text{ និង } P \text{ ដើម្បីឲ្យ } f(x) = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{គេមាន } f(x) &= \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{M(x-1)^2}{x(x-1)^2} + \frac{Nx(x-1)}{x(x-1)^2} + \frac{Px}{x(x-1)^2} \\
 &= \frac{Mx^2 - 2Mx + M + Nx^2 - Nx + Px}{x(x-1)^2} \\
 &= \frac{(M+N)x^2 + (-2M+N+P)x + M}{x(x-1)^2} \text{ តែ } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} \\
 &= \frac{(M+N)x^2 + (-2M+N+P)x + M}{x(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} M+N=1 \\ -2M+N+P=-2 \\ M=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=-1 \\ P=3 \\ M=2 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ គណនា } I &= \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_2^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \right) dx \\
 &= 2 \int_2^3 \frac{dx}{x} - \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1} + 3 \int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \left(2 \ln |x| - \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} \right) \Big|_2^3 \\
 &= \left(2 \ln |3| - \ln |3-1| - \frac{3}{3-1} \right) - \left(2 \ln |2| - \ln |2-1| - \frac{3}{2-1} \right) \\
 &= 2 \ln 3 - \ln 2 - \frac{3}{2} - 2 \ln 2 - \ln 1 + 3 \\
 &= 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = 2\ln 3 - 3\ln 2 + \frac{3}{2}$$

IV. 1. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់គ្រង $x = 0$

$$\text{គេមាន } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + \sin x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \ln(a-1) & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់គ្រង $x = 0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) + \sin x}{x} &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1) + \sin x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right] &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 &= \ln(a-1) \\ \Leftrightarrow e^{\ln(a-1)} &= e^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow a &= 1 + e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } a = 1 + e^{\frac{3}{2}}$$

2. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x}$

ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x} \text{ ប្រើរូបមន្ត } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (u^n)' = nu^{n-1} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(1 - \sin^2 x)'(2 - \cos^2 x) - (2 - \cos^2 x)'(1 - \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2} \\ &= \frac{-2 \sin x \cos x (2 - \cos^2 x) - 2 \sin x \cos x (1 - \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x (-2 + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x)}{(2 - \cos^2 x)^2} \\ &= -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2}$$

ខ. បង្ហាញថា $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

គេមាន $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 - \cos^2 x}$ និង $f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(2 - \cos^2 x)^2}$

គេបាន $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}}{2 - \cos^2 \frac{\pi}{4}} + 12 \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(2 - \cos^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} \right] = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 12 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left[2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + 12 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{4}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+8}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3}$

V. រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និង អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់ក្រាបដែលមានសមីការទូទៅ $y^2 + 3x^2 + 4y - 6x - 2 = 0$

គេមាន $y^2 + 3x^2 + 4y - 6x - 2 = 0$

$$3(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) - 3 + (y^2 + 2y \times 2 + 2^2) - 4 - 2 = 0$$

$$3(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{9}{3}} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

សមីការអេលីបនេះមានរាង $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ដោយ $(a > b > 0)$

នោះវាមាន អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

គេបាន $h = 1$, $k = -2$, $a = 3$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = \sqrt{9 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$

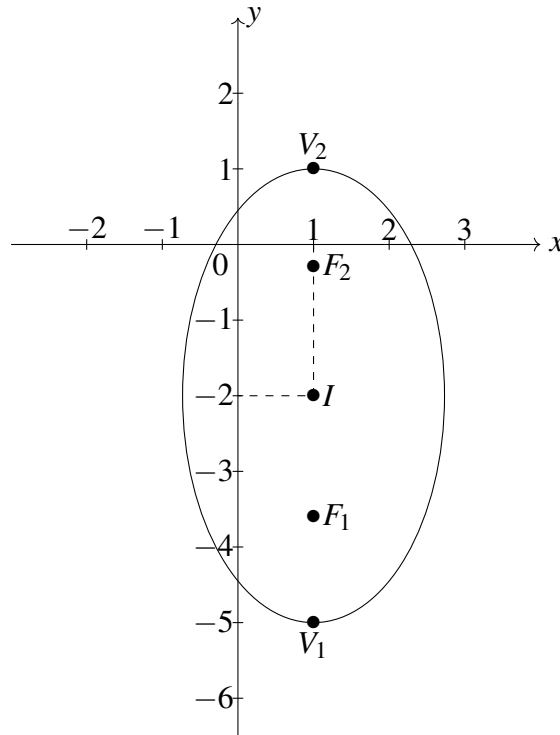
- ផ្ចិត $I(h, k) \Rightarrow I(1, -2)$

- កំពូល $\begin{cases} V_1(h, k-a) \\ V_2(h, k+a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(1, -5) \\ V_2(1, 1) \end{cases}$

$$\bullet \text{ កំណត់ } \begin{cases} F_1(h, k-c) \\ F_2(h, k+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1\left(1, -2 - \frac{\sqrt{26}}{3}\right) \\ F_2\left(1, -2 + \frac{\sqrt{26}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

• សង់ក្រាប



VI. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ ។

1. កំណត់តម្លៃ a, b និង c

$$\text{គេមាន } g(x) = a^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow g''(x) = 2a$$

$$\text{ដោយ } g(x) = ax^2 + bx + c \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E)$$

$$\text{គេបាន } g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x + 3$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + 2b = 2 \\ 2a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g(x) = x^2 - x + 3}$$

2. បង្ហាញថា $k(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(k - g)(x)$ ជាចម្លើយនៃ $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

$$\text{គេមាន } (k - g)(x) \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E') : y'' + 2y' + y = 0$$

$$\text{គេបាន } [(k-g)(x)]'' + 2[(k-g)(x)]' + [(k-g)(x)] = 0$$

$$[k(x) - g(x)]'' + 2[k(x) - g(x)]' + [k(x) - g(x)] = 0$$

$$k''(x) - g''(x) + 2k'(x) - 2g'(x) + k(x) - g(x) = 0$$

$$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) \text{ តែ } g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = x^2 + 2x + 3$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា $k(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

ដូចនេះ: ដើម្បីឲ្យ $k(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(k-g)(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E') : $y'' + 2y' + y = 0$

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$ មានក្រាប (C) ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1) \text{ រាងមិនកំណត់ } (\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

+ រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C)

$$\text{គេមាន } C : f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \text{ និង } D : y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } D : y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C)$$

2. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

$$\text{គេបាន } f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \right)' \\ &= 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2} \\ &= 2e^x(e^x - 1) + \frac{1}{2} > 0 \text{ ព្រោះ } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដោយ $f'(x) > 0$ គេបាន f ជាអនុគមន៍កើន

+ សង្កេតរាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \rightarrow +\infty$	

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) មានរាង (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

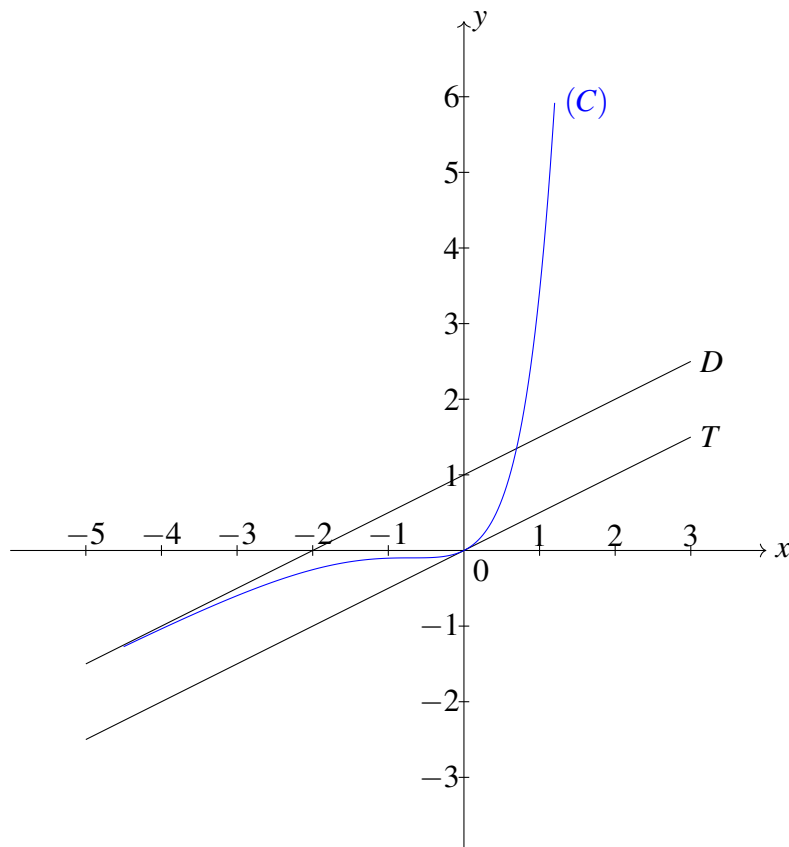
គេមាន $f(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f(0) = e^0 - 2e^0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = 0$

$f'(x) = 2e^x(e^x - 1) + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = 2e^0(e^0 - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

គេបាន (T) : $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0 = \frac{1}{2}x$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ (T) មានសមីការគឺ (T) : $y = \frac{1}{2}x$

4. សង់ក្រាប (T), (D) និង (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ



VIII. គេមានចំណុច $A(2, 0, 1), B(3, 1, 5)$ និង $C(1, 4, 4)$

1. គណនា \vec{AB} និង \vec{AC}

$$\text{គេបាន } \vec{AB} = (3 - 2, 1 - 0, 5 - 1)$$

$$= (1, 1, 4)$$

$$\vec{AC} = (1 - 2, 4, 0, 4 - 1)$$

$$= (-1, 4, 3)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\vec{AB} = (1, 1, 4) \text{ និង } \vec{AC} = (-1, 4, 3)}$$

2. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\text{គេមានវ៉ិចទ័រ } \vec{AB} = (1, 1, 4) \text{ និង } \vec{AC} = (-1, 4, 3)$$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (3 - 16) \vec{i} - (3 + 4) \vec{j} + (4 + 1) \vec{k} \\ &= -13 \vec{i} - 7 \vec{j} + 5 \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = -13 \vec{i} - 7 \vec{j} + 5 \vec{k}}$$

+ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-13)^2 + (-7)^2 + 5^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{169 + 49 + 25} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{243} \\ &= \frac{9}{2} \sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ } ABC \text{ គឺ } \frac{9}{2} \sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$

3. រកសមីការប្លង់ (ABC)

$$\text{សមីការប្លង់មានរាង } (ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

• (ABC) មានកាត់តាមចំណុច $A(2, 0, 1)$

• (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (-13, -7, 5)$

$$\text{គេបាន } (ABC) : -13(x - 2) - 7(y - 0) + 5(z - 1) = 0$$

$$-13x + 26 - 7y + 5z - 1 = 0$$

$$-13x - 7y + 5z + 25 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការប្លង់ } (ABC) : -13x - 7y + 5z + 25 = 0}$

+ បង្ហាញថាចំណុច $D(2, 0, 2)$ មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (ABC)

គេមាន $(ABC) : -13x - 7y + 5z + 25 = 0$

គេបាន $-13 \times 2 - 7 \times 0 + 5 \times 2 + 25 = 0$

$$-26 + 10 + 25 = 0$$

$$9 = 0 \quad \text{មិនពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } D \text{ មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ } (ABC) \text{ ទេ}}$

4. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)

គេមានចំណុច $D(2, 0, 2)$ និង ប្លង់ $(ABC) : -13x - 7y + 5z + 25 = 0$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d[D, (ABC)] &= \frac{|-13x_D - 7y_D + 5z_D + 25|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|-13 \times 2 - 7 \times 0 + 5 \times 2 + 25|}{\sqrt{(-13)^2 + (-7)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|-26 + 10 + 25|}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{9}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$d[D, (ABC)] = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដូចនេះ $\boxed{d[D, (ABC)] = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}}$

+ រួចគណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } V_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times h \text{ ដែល } h = d[D, (ABC)] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$V_{ABCD} = \frac{3}{2} \text{ ឯកតាមាឌ}$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{ABCD} = \frac{3}{2} \text{ ឯកតាមាឌ}}$

5. សរសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$

សមីការស្វ៊ែរដាច់នៃស្វ៊ែរ (S) គឺ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$$\bullet (S) \text{ មានផ្ចិត } I = \frac{AB}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\bullet (S) \text{ មានកាំ } r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{គេបាន } (S) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{(S) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

មណ្ឌលប្រឡង.....

លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន:.....

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របង្រៀនបណ្ឌិតវិទ្យា

វិញ្ញាបនបត្រ : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: សុខណាត

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរកំណត់ដោយ $x = \frac{1+2i}{3-4i}$ និង $y = \frac{2-i}{5i}$ ។

ក. ចូរសរសេរ x និង y ជាទម្រង់ពិជគណិត។

ខ. បង្ហាញថា $x+y$ ជាចំនួនពិត។

II. 1. អ្នកគ្រូម្នាក់បានលើកទឹកចិត្តសិស្សៗក្នុងថ្នាក់ម្នាក់ដោយការផ្តល់ជូននូវសៀវភៅ 2 ក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតវិទ្យា 6 ក្បាល វិទ្យាសាស្ត្រ 7 ក្បាល និងសេដ្ឋកិច្ច 4 ក្បាល។ ចូរគណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ

បើសិស្សនោះ៖

ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា?

ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា?

2. អំណោយចំនួន 7 នឹងត្រូវបានចែកជូនសិស្សក្រីក្រចំនួន 10 នាក់។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការចែកនេះ បើគ្មាននរណាម្នាក់បានលើស ពី 1 ឡើយ?

III. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$

IV. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x}$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x \neq 0$ ។

ក. ចូរកំណត់តម្លៃ A, B និង C ដើម្បីអោយ $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ $\int_1^2 f(x) dx$ ។

V. គេមានម៉ាទ្រីសចំនួនបីគឺ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ។

ក. ចូរគណនា $A+B$ និង $A-B$ ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស C បើ $C = A \times B$

VI. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលទូទៅមួយកំណត់ដោយ $P: y^2 - 6y - 12x - 27 = 0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល P ជាសមីការស្តង់ដារ។

ខ. ចូរកំណត់ កំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ P នេះ។

គ. ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ។ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍នេះ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ។

ឃ. គូសក្រាបតារាងអនុគមន៍នេះ ។ (យក $\sqrt{3} = 1.73$)

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. ក. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } x &= \frac{1+2i}{3-4i} \\ &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2-(4i)^2} \\ &= \frac{3-8+10i}{9+16} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ \text{និង } y &= \frac{2-i}{5i} \\ &= \frac{(2-i)(5i)}{(5i)^2} \\ &= \frac{5+10i}{-25} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\ i^2 &= -1\end{aligned}$$

ដូចនេះ ទម្រង់ពិជគណិតនៃ x និង y គឺ

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ y &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

ខ. បង្ហាញថា $x+y$ ជាចំនួនពិត

តាមសំណួរ (ក) ខាងលើ

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } x+y &= \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) \\ &= \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)i \\ &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $x+y$ ជាចំនួនពិត ។

II. 1. គណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ បើសិស្សនោះ៖

ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតវិទ្យាដូចគ្នា៖ វាជាបន្សំនៃការរើស 2 ធាតុ ចេញពីធាតុសរុប 6

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ ករណី}$$

- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រដូចគ្នា៖ វាជាបន្សំនៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 7

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ ករណី}$$

- ករណីសៀវភៅសេដ្ឋកិច្ចដូចគ្នា៖ ដូចគ្នាដែរ វាជាបន្សំ នៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 4

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ ករណី}$$

គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការរើសបានសៀវភៅជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា គឺ

$$15 + 21 + 6 = 42 \text{ របៀប}$$

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នាសរុបគឺ 42 ករណី ។

ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាល៖ យើងអាចគិតយ៉ាងដូច្នេះថា ការរើសយកសៀវភៅគណិតមួយក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតសរុប 6 ក្បាលមាន 6 របៀប និង ការរើសយកសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលពីក្នុងចំណោម 7 ក្បាលគឺ 7 របៀប ។ ហេតុនេះ គេបាន $6 \times 7 = 42$ របៀប
- យ៉ាងខ្លីតាមគោលការណ៍ផលគុណនៃបន្សំនេះគឺ $C_6^1 \times C_7^1 = \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{7!}{1! \times 6!} = 6 \times 7 = 42$ របៀប
- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេបាន $C_6^1 \times C_4^1 = 6 \times 6 = 24$ របៀប
- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ ដូចគ្នានឹងករណីខាងលើដែរ គឺតាមគោលការណ៍ផលគុណ $C_7^1 \times C_4^1 = 7 \times 4 = 28$ ករណី គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលខុសមុខវិជ្ជាគឺ $42 + 24 + 28 = 94$ របៀប ដូចនេះ ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នាសរុប 94 របៀប ។

2. គណនាលីមីត៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2} & \text{ រាង } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x} & \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 4x) + \cos x \cos 4x(1 - \cos 7x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \cos 4x)}{x^2} + \frac{\cos x \cos 4x(1 - \cos 7x)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\cos x(2 \sin^2 2x)}{x^2} + \frac{\cos x \cos 4x(2 \sin^2 \frac{7x}{2})}{x^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \times 2^2 + 2 \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \times \left(\frac{7}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + 8 + \frac{49}{2} \\ &= 33 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 4x \cos 7x}{x^2} = 33}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1} & \text{ រាង } \frac{0}{0} \\ \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt[2021]{x^{2020}} + \sqrt[2021]{x^{2019}} + \sqrt[2021]{x^{2018}} + \dots + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[2021]{x^{2020}} + \sqrt[2021]{x^{2019}} + \dots + 1} \\ &= \frac{1}{2021} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2021]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2021}}$$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$ រក 1^∞

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 1} [(1 + 4 \tan^2 x)^{\frac{1}{4 \tan^2 x}}]^{4 \tan^2 x \times \cot^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 4 \tan^2 x)^{\frac{1}{4 \tan^2 x}}]^4$
 $= e^4$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = e^4$

3. ក. កំណត់តម្លៃ A, B និង C

យើងមាន $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$
 $= \frac{4x^2 - 4x + 1}{x}$
 $\Rightarrow f(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$

តែ $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x}$

គេបាន $Ax + B + \frac{C}{x} = 4x - 4 + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -4 \\ C = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ: $A = 4, B = -4$ និង $C = 1$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលនៃ $\int_1^2 f(x) dx$

តាមរយៈសំណួរ (ក) ខាងលើ ៖ $f(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$

គេបាន $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(4x - 4 + \frac{1}{x} \right) dx$
 $= [2x^2 - 4x + \ln|x|]_1^2$
 $= (8 - 8 + \ln 2) - (2 - 4 + \ln 1)$
 $= 2 + \ln 2$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

ដូចនេះ: $\int_1^2 f(x) dx = 2 + \ln 2$

4. ក. គណនា $A+B$ និង $A-B$

យើងមាន $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $A+B = \begin{pmatrix} 3+0 & 4+(-1) \\ -1+3 & 3+1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{និង } A - B &= \begin{pmatrix} 3-0 & 4-(-1) \\ -1-3 & 3-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ និង } A - B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ខ. គណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស C

$$\text{យើងមាន } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ និង } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } A \times B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 \times 0) + (4 \times 3) & 3(-1) + (4 \times 1) \\ (1 \times 0) + (3 \times 3) & 1(-1) + (3 \times 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } C = A \times B \text{ យើងបានម៉ាទ្រីស } C = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ដូចនេះ: តម្លៃនៃម៉ាទ្រីស } C = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

5. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល P ជាសមីការស្តង់ដារ

$$\text{យើងមាន } P: y^2 - 6y - 12x - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow P: y^2 - 6y + 9 = 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល } P \text{ គឺ } P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

ខ. កំណត់ កំណុំ កំពូល និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ P

$$\text{យើងមានសមីការស្តង់ដារ } P: (y - 3)^2 = 12(x + 3)$$

$$\text{នោះ } h = -3, k = 3, 4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

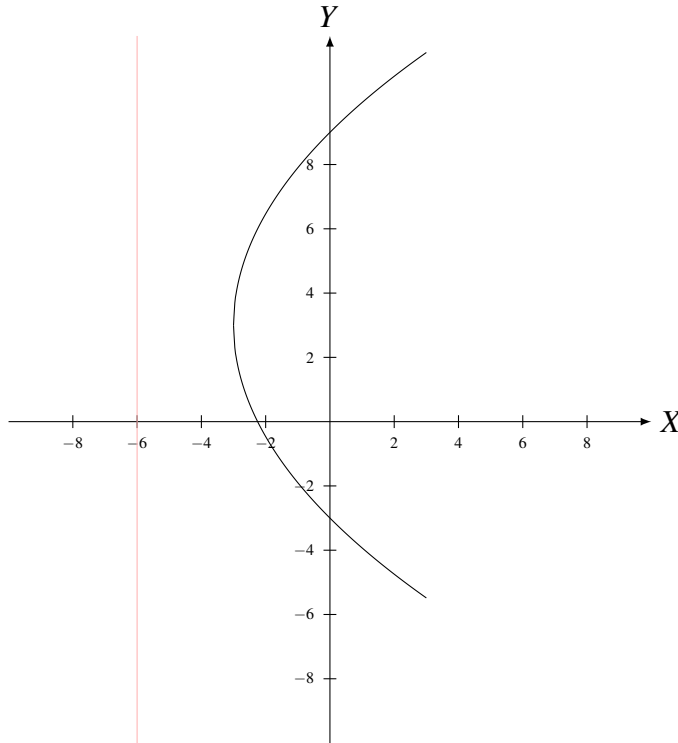
$$\text{គេបាន កំពូល } (h, k) = (-3, 3)$$

$$\text{កំណុំ } (h + p, k) = (0, 3)$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } \Delta: x = h - p = -6$$

ដូចនេះ កំពូល $V = (-3, 3)$
 កំណុំ $F = (0, 3)$
 សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = -6$

គ. សំណង់ប៉ារ៉ាបូល P



6. ក. រកដែនកំណត់ ដេរីវេទី១ និង ចំណុចបរមាណៃអនុគមន៍ f

- ដែនកំណត់

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$$(x - 1)(x - 3) \neq 0$$

- ដេរីវេទី១

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(2x + 4)(x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 4x + 3)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12) - (2x^3 + 4x^2 - 10x - 12)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

- រកចំណុចបរមាណៃ

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$\forall x \in D_f, (x^2 - 4x + 3)^2 > 0$$

$$\text{នោះ } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } -8x^2 + 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

★ ត្រង់ $x = -\sqrt{3}, f'(x)$ ផ្លូវសញ្ញាពី - ទៅ + នោះ f មានចំណុចអប្បបរមាជឿបគឺ

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{3}) &= \frac{(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3}) + 3}{(-\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3}) + 3} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{36 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} + 4^2 \cdot 3}{36 - 4^2 \cdot 3} \\ &= \frac{84 - 48\sqrt{3}}{-12} \end{aligned}$$

$$\approx 0.08$$

★ ត្រង់ $x = \sqrt{3}, f'(x)$ ផ្លូវសញ្ញាពី + ទៅ - នោះ f មានចំណុចអតិបរមាជឿបគឺ

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{3}) + 3}{(\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) + 3} \\ &= \frac{84 + 48\sqrt{3}}{-12} \end{aligned}$$

$$\approx -13.93$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានចំណុចបរមាពីរគឺ

ត្រង់ $x = -\sqrt{3}$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាជឿប 0.08 និង
ត្រង់ $x = \sqrt{3}$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាជឿប -13.93

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{1^2 + 4 \cdot 1 + 3}{1^2 - 4 \cdot 1 + 3} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3^2 + 4 \cdot 3 + 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

រួចទាញរកអាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃអនុគមន៍ f

ហើយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

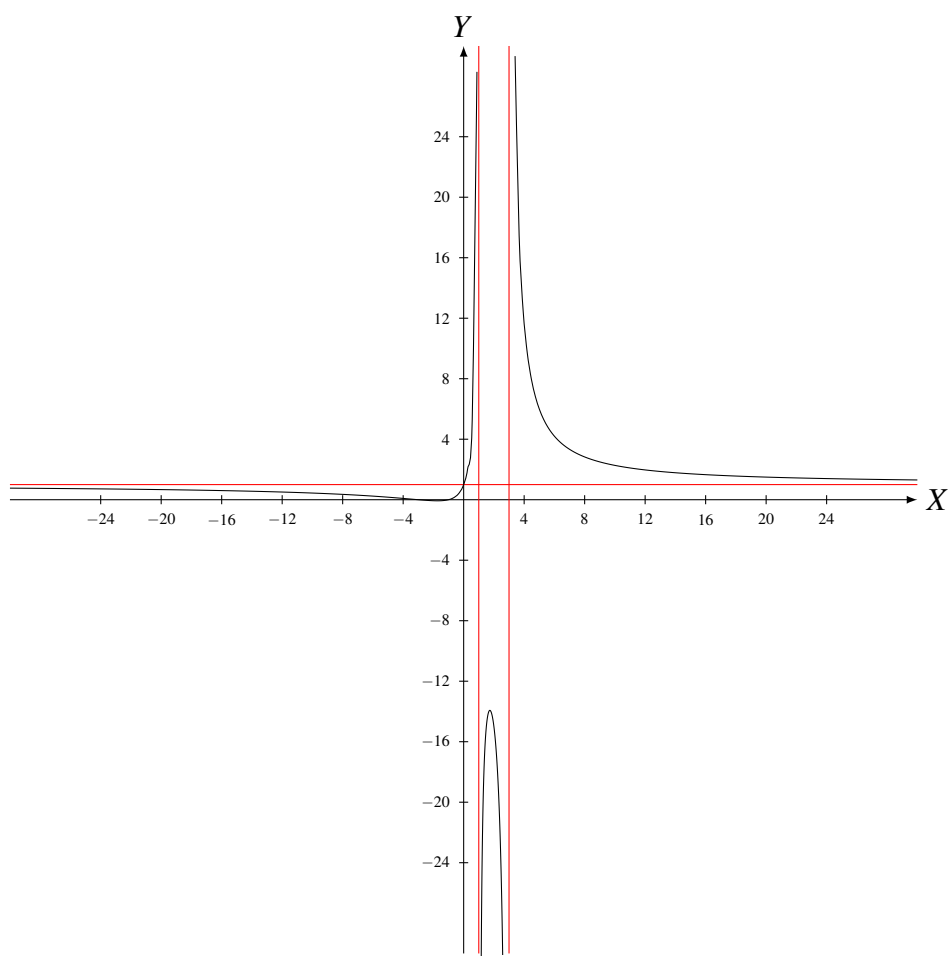
និង $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ f

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	0.08	$+\infty$	-13.93	$+\infty$	1

ឃ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ



ជូនពរ រៀនតាម ចេះ ចាំ និង សំណាងល្អគ្រប់ការប្រឡង

មណ្ឌលប្រឡង : _____
 លេខបន្ទប់ : _____ លេខតុ : _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន : _____
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន : _____

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ជិត ជី

- I. គណនាលីមីតខាងក្រោម :
- ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - e^{-2021x}}{\sin 2x}$
- II. ក្នុងចំណោមមានឃើញពណ៌មានឃើញពណ៌សចំនួន 2 ឃើញពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និងឃើញពណ៌ខៀវចំនួន 4 ។ គេចាប់យកឃើញចំនួន 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :
- A ឃើញទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម ។ B យ៉ាងតិចមានឃើញ 2 មានពណ៌ខៀវ ។
 C ឃើញទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា ។
- III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$ ។
- ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។ ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
- IV. គណនាអាំងតេក្រាល : $I = \int_1^2 (2 - x + 3x^2)dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x)dx$
 និង $K = \int_2^3 (3x - 2 + \frac{1}{x-1})dx$ ។
- V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E : y'' - y' + 2y = 0$ ។
 ខ. រកចម្លើយនៃ E បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានបរិមាសស្មើ 3 ត្រង់ $x = 0$ ។
- VI. 1. គេមានសមីការ $(E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ ។
 ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។
 ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ ។
2. គេមានបីចំណុច $A(-1; 1; 2); B(0; 2; 4)$ និង $C(-1; 3; 1)$ ។
 ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច $A; B$ និង C តែមិនត្រង់គ្នា
 ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។
- VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់អនុគមន៍នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
- ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។
 ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ជាប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្សអរដោនេ រួចបង្ហាញថាចំណុច A ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។
 គ. រកសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។
 ឃ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ T នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
 ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប C និងអ័ក្ស $(x'ox)$ លើចន្លោះ $[0, 1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2021x - \sin 2023x}{x}}{\frac{2020x + \sin 2025x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021 - \frac{\sin 2023x}{x}}{2020 + \frac{\sin 2025x}{x}} \\ &= \frac{2021 - 2023}{2020 + 2025} = \frac{-2}{4045} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2021x - \sin 2023x}{2020x + \sin 2025x} = -\frac{2}{4045}}$$

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x^2 - 4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3x + 2 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x+2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{3} \\ &= \frac{5(2+2)(\sqrt[3]{(6+2)^2} + 2\sqrt[3]{6+2} + 4)}{3} \\ &= \frac{20(2^2 + 2 \times 2 + 4)}{3} = \frac{20 \times 12}{3} \\ &= 20 \times 4 = 80 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 20}{\sqrt[3]{3x+2} - 2} = 80}$$

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - 1 + 1 - e^{-2021x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2021x} - 1}{2x} - \frac{e^{-2021x} - 1}{2x} \right) \\ &= \frac{2021}{2} - \frac{-2021}{2} = \frac{4042}{2} = 2021 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021} - e^{-2021x}}{2x} = 2021}$$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

បម្រាប់ : ឃ្លីស 2 ឃ្លីក្រហម 4 និងឃ្លីខៀវ 4 នោះឃ្លីសរុប = 10

ក្នុងការចាប់យកឃ្លី 3 ចេញពីថង់ គេបាន

$$\text{ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120 \text{ ករណី}$$

A ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម :

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(A) = C(4, 1) = 4 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{30}}$$

B យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 ពណ៌ខៀវ :

$$\text{តាម } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(B) = C(4, 2) \times C(6, 1) + C(4, 3) = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} + \frac{4!}{(4-3)! \times 3!}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{4}{1} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{1}{12}}$$

C ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខ្ពស់គ្នា :

$$\text{តាម } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(C) = C(2, 1) \cdot C(4, 1) \cdot C(4, 1) = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{4}{15}}$$

III. គេមាន $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

ក គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z_1 \times z_2 &= (3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i + 3i\sqrt{3}^2 - 3\sqrt{3} \\ &= 3i + 9i = 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{(3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 3i\sqrt{3}^2 + 3\sqrt{3}}{3 - 1} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 6i}{2} = 3\sqrt{3} + 3i \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= 12i \\ \frac{z_1}{z_2} &= 3\sqrt{3} + 3i \end{aligned}}$$

ក សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $z_1 \times z_2 = 12i = 12(0 + i) = 12(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$= 3(\sqrt{3} + i) = 3 \times 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$$

$$= 6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = [6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^2$$

$$= 36(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6})$$

$$= 36(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ:
$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = 12(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 36(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

ក សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = [6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^3$$

$$= 6^3(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6})$$

$$= 216(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$= 216(0 + i)$$

ដូចនេះ: $0 + 216i$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\bullet I = \int_1^2 (2 - x + 3x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right]_1$$

$$= \left[2(2) - \frac{2^2}{2} + 2^3\right] - \left[2(1) - \frac{1^2}{2} + 1^3\right]$$

$$= (4 - 2 + 8) - (2 + \frac{1}{2})$$

$$= 10 - \frac{5}{2} = \frac{20 - 5}{2} = \frac{15}{2}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{15}{2}$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x)dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1}{8} \sin \pi\right] - \left[\frac{\sin 0}{2} - \frac{1}{8} \sin 0\right] = (\frac{1}{2} - 0) - (0 - 0) = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $J = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \bullet K &= \int_2^3 \left(3x - 2 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - 2x + \ln|x-1| \right]_2^3 \\
 &= \left(\frac{3 \times 3^2}{2} - 2 \times 3 + \ln|3-1| \right) - \left(\frac{3 \times 2^2}{2} - 2 \times 2 + \ln|2-1| \right) \\
 &= \frac{27}{2} - 6 + \ln 2 - 6 + 4 + \ln 1 = \frac{27-12}{2} + \ln 2 = \frac{15}{2} + \ln 2 \\
 \text{ដូចនេះ: } &\boxed{K = \frac{15}{2} + \ln 2}
 \end{aligned}$$

V. ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមានសមីការ $E : y'' - y' + 2y = 0$

មានសមីការសម្គាល់ : $r^2 - r + 2 = 0$

$$(r-2)(r-1) = 0$$

គេបាន $r_1 = -1, r_2 = 2$

ចម្លើយទូទៅនៃ E គឺ $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $(A, B \in \mathbb{R})$

ដូចនេះ: $\boxed{y = Ae^{-x} + Be^{2x}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) , $(A, B \in \mathbb{R})$

ក រកចម្លើយនៃ (E) :

ដោយដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x = 0$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

តែ $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$

$$\Rightarrow y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$$

$$\bullet y(0) = 3 \Rightarrow A + B = 3$$

$$\Rightarrow A = 3 - B \quad (1)$$

$$\bullet y'(0) = 0 \Rightarrow -A + 2B = 0 \quad (2)$$

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$-(3 - B) + 2B = 0$$

$$-3 + B + 2B = 0$$

$$3B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{3} = 1$$

$$(1) \Rightarrow A = 3 - 1 = 2$$

ដូចនេះ: $\boxed{y = 2e^{-x} + e^{2x}}$ ជាចម្លើយនៃ E ។

VI. 1. យើងមានសមីការ $(E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$

ក បង្ហាញថាសមីការ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន} \quad (E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 &= 0 \\
 (9x^2 + 18x) + (4y^2 - 24y) &= -9 \\
 9(x^2 + 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 &= -9 \\
 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 &= 36 \\
 \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} &= 1 \\
 \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \text{ មានទម្រង់} \\
 \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \text{ អ័ក្សធំឈរ}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } (E) : \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \text{ ជាសមីការអេលីប ។}$$

ក រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ
តាមសមីការខាងលើ គេបាន

$$h = -1; k = 3$$

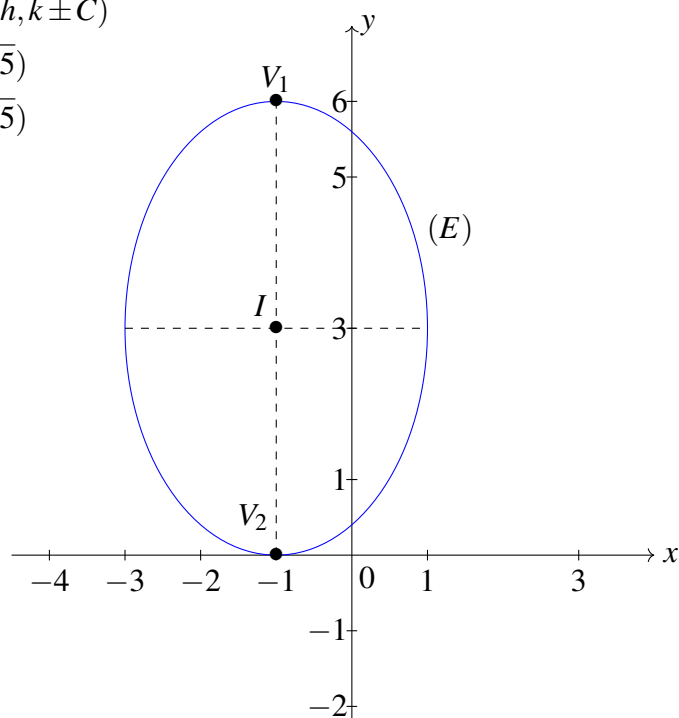
$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

គេបាន

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 3 = 6$ (ឯកតាប្រវែង)
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 2 = 4$ (ឯកតាប្រវែង)
- កូអរដោនេផ្ចិត $I = (h, k) = (-1, 3)$
- កូអរដោនេកំពូល $V = (h, k \pm a) \Rightarrow V_1 = (-1, 3 + 3) = (-1, 6)$
 $\Rightarrow V_2 = (-1, 3 - 3) = (-1, 0)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F = (h, k \pm c)$
 $\Rightarrow F_1 = (-1, 3 + \sqrt{5})$
 $\Rightarrow F_2 = (-1, 3 - \sqrt{5})$
- សង់អេលីប



2. គេមានចំណុច $A(-1;1;2)$ $B(0;2;4)$ និង $C(-1;3;1)$:

ក គណនាផលគុណ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

ដោយ $\vec{AB} = (0+1, 2-1, 4-2) = (1, 1, 2)$

$\vec{AC} = (-1+1, 3-1, 1-2) = (0, 2, -1)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= [2(2) - 1(-1)] \vec{i} - [0(2) - (1)(-1)] \vec{j} + [(0)(1) - (1)(2)] \vec{k} \\ &= 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\vec{AB} \times \vec{AC} = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

+បង្ហាញថា ចំណុច $A; B$ និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \neq 0$

ដូចនេះ: ចំណុច $A; B$ និង C រត់មិនត្រង់គ្នា។

3. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$ (ឯកតាប្រវែង)

ដូចនេះ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

VII. គេមាន $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ កំណត់លើ \mathbb{R} :

ក គណនាលីមីត និងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4(0)}{0+1} = 0$ (ព្រោះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{4}{1+0} = 4$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ នោះ: បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ C ខាង $-\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ នោះ: បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ C ខាង $+\infty$

ក សិក្សាអថេរភាពនៃ f :

គេបាន $f'(x) = 4 \left(\frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 4 \left(\frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \right) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

ដោយ $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ នោះ: $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ ជានិច្ច $\forall x \in \mathbb{R}$

នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ \mathbb{R} ។

• រកកូអរដោនេនៃ ចំណុច A

ដោយ $C \cap (y'oy)$ ត្រង់ $A(0, y)$

$$\Rightarrow f(0) = y$$

$$\frac{4e^0}{e^0 + 1} = y \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } A(0, 2)$$

- បង្ហាញថា $A(0, 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លងនៃក្រាប C :

$$\text{បើ } A(a, b) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លងនោះ } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\text{គេបាន } f(2a - x) + f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4}{1 + e^x} + \frac{4e^x}{1 + e^x} = 4 = 2b \text{ (ពិត)}$$

$$\text{ដូចនេះ: } A(0, 2) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លងនៃក្រាប } C \text{ ។}$$

ក រកសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំណុច A

សមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំណុច A គឺ

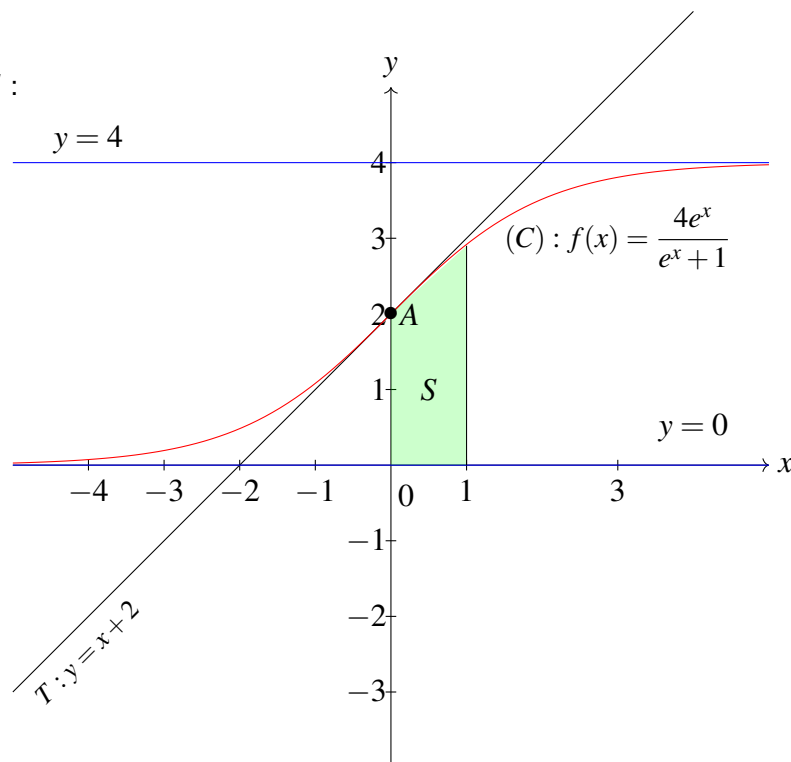
$$T : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

$$= \left(\frac{4x^0}{(e^0 + 1)^2} \right)(x - 0) + \frac{4e^0}{e^0 + 1}$$

$$= x + 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } T : y = x + 2$$

ក សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ T :



ក គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប C និងអ័ក្ស $(x'ox)$ លើចន្លោះ $[0, 1]$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាខាងលើ

$$\text{តាមក្រាបគេបាន } S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{4e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= 4 [\ln |e^x + 1|]_0^1 = 4(\ln(e + 1) - \ln(e^0 + 1))$$

$$= 4 \ln \frac{e + 1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } S = 4 \ln \frac{e + 1}{2} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$

បញ្ហាប្រឈម៖

លេខបន្ទប់៖ លេខគ្រូ

ឈ្មោះបេក្ខជន៖

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន៖

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: Kim Hun

- I. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ និង $z_2 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$ ។
 ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពិជគណិត ។ ខ. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី ២ នៃ z ដែលមាន z_1 និង z_2 ជាឫស ។
 គ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$ ។
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x)$ គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x)$
- III. 1. (៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E : g''(x) - 7g'(x) + 10g(x) = 0$ ។
 2. (៥ពិន្ទុ) កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃ E ដែល $g(0) = 5$; $g'(0) = 16$ ។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) ចង់មួយមានបាល់ក្រហម ៨ បាល់ស ៥ ។បាល់ ៣ ត្រូវបានយកចេញដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖
 ក. A : បាល់ទាំង ៣ ពណ៌ស ។ ខ. B : បាល់ទាំង ៣ ពណ៌ក្រហម ។ គ. C : បាល់ស ២ និងបាល់ក្រហម ១ ។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$; $x \neq 1, x \neq 2$ ។
 1. សរសេរ f ជារៀង $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ ដែល a, b ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។
 2. គណនា $\int_0^3 f(x)dx$
- VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = x+2+(x+1)e^{-x}$ មានក្រាបតំណាង C ។
 1. គណនាលីមីតនៃ f ខាង $+\infty$ និង $-\infty$ ។
 2. គណនា $f'(x)$ ។
 3. ដោយដឹងថា $1 - xe^{-x} > 0$ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។
 4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta : y = x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
 សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនេះ ។
 5. សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប C ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
- VII. (២៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2, 1, 4)$; $B(2, -2, 7)$
 និង ប្លង់ $P : 2x + 2y - z = 2$ ។
 1. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងប្លង់ P ។
 2. បន្ទាត់ D មួយមានសមីការ $x = 1 + 2t$; $y = -2t$; $z = 1 - t$; $(t \in \mathbb{R})$ ។
 ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង D និង P ។
 3. ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MAB ។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. ក. (៥ពិន្ទុ) សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\text{ដោយ } z_1 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{ដោយ } z_2 = 2i(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$$

ខ. (៥ពិន្ទុ) ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី ២ នៃ z ដែលមាន z_1 និង z_2 ជាឫស

$$\text{សមីការដឺក្រេទី ២ មានរាង } Z^2 - SZ + P = 0$$

$$\text{ដោយ } S = z_1 + z_2 = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$$

$$\text{ដោយ } P = z_1 \times z_2 = (-1 + \sqrt{3}i) \times (1 + \sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 3 = -4$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី ២ គឺ } Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$$

គ. (៥ពិន្ទុ) កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$

$$\text{ដោយ } z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow z_1^3 = 2^3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 8(1 + 0i) = 8$$

$$\text{ដោយ } z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow z_2^3 = 2^3(\cos \pi + i \sin \pi) = 8(-1 + 0i) = -8$$

$$\text{គេបាន } z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$8 - 8 = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$0 + 0i = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) = 0 \\ y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = -1 \text{ និង } y = 3$$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2+2}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = -2$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) \text{ រាង } \infty - \infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x \ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) \text{ រវាង } -\infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 + \frac{\ln x}{e^x} \right) = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + \ln x) = -\infty$$

III. 1. (ឥតិទ្ធី) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E : g''(x) - 7g'(x) + 10g(x) = 0$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } r^2 - 7r + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2$$

$$r = \frac{7 \pm \sqrt{3^2}}{2} = \begin{cases} r_1 = 5 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathfrak{R}$$

2. (ឥតិទ្ធី) កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃ E ដែល $g(0) = 5$; $g'(0) = 16$

$$g(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}$$

$$g'(x) = 5Ae^{5x} + 2Be^{2x}$$

$$\begin{cases} g(0) = 5 \\ g'(0) = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 5 \\ 5A + 2B = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 5 \times (-5) \\ 5A + 2B = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} 5A + 5B = 25 \\ 5A + 2B = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3B = 9 \Rightarrow B = 3 \quad \Rightarrow A = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) = 2e^{5x} + 3e^{2x}$$

IV. (ឧតិទ្ធី) គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

$$\text{រូបមន្ត ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ចំនួនករណីអាច

$$n(S) = C(13, 3) = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 286 \text{ ករណី}$$

ក. A : បាល់ទាំង 3 ពណ៌ស

ចំនួនករណីស្រប

$$n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{286} = \frac{5}{143}$$

ខ. B : បាល់ទាំង 3 ពណ៌ក្រហម

ចំនួនករណីស្រប

$$n(B) = C(8, 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{56}{286} = \frac{28}{143}$$

គ. C : បាល់ស 2 និងបាល់ក្រហម 1

$$n(C) = C(5, 2) \times C(8, 1) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \times \frac{8!}{7! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{8 \cdot 7!}{7! \cdot 1} = 10 \times 8 = 80 \text{ ករណី}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{80}{286} = \frac{40}{143}$$

V. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2} \quad ; \quad x \neq 1, x \neq 2$

1. (ឥតិទ្ធុ) សរសេរ f ជារៀង $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ ដែល a, b ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } f(x) &= \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{x+1}{x^2-3x+2} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$x+1 = a(x-2) + b(x-1)$$

$$\text{បើ } x=1 \Rightarrow 2 = -a \Rightarrow a = -2$$

$$\text{បើ } x=2 \Rightarrow 3 = b \Rightarrow b = 3$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

2. (ឥតិទ្ធុ) គណនា $\int_0^3 f(x)dx$

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^3 \left(-\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)dx \\ &= -2 \int_0^3 \frac{(x-1)'}{x-1} dx + 3 \int_0^3 \frac{(x-2)'}{x-2} dx \\ &= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| \Big|_0^3 \\ &= -2 \ln 2 + 3 \ln 1 - (-2 \ln 1 + 3 \ln 2) \\ &= -2 \ln 2 - 3 \ln 2 = -5 \ln 2 \end{aligned}$$

VI. (ឥតិទ្ធុ) $f(x) = x+2+(x+1)e^{-x}$

1. (ឥតិទ្ធុ) គណនាលីមីតនៃ f ខាង $+\infty$ និង $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x+2+(x+1)e^{-x}] = +\infty$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x+2+(x+1)e^{-x}] = -\infty$$

2. (ឥតិទ្ធុ) គណនា $f'(x)$

$$f(x) = x+2+(x+1)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1+0+(x+1)'e^{-x} + [e^{-x}]'(x+1) = 1+e^{-x} - e^{-x}(x+1) = 1+e^{-x}(1-x-1) = 1-xe^{-x}$$

3. (ឥតិទ្ធុ) សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$$\text{ដោយ } 1-xe^{-x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

$$\Rightarrow f(x) \text{ ជាអនុគមន៍កើន}$$

(ឥតិទ្ធុ) គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. (៣ពិន្ទុ) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 0$$

$\Rightarrow \Delta: y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

(៥ពិន្ទុ) សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត

$$\text{តាង } h(x) = f(x) - \Delta = (x+1)e^{-x}$$

$$\text{បើ } h(x) = 0 \iff x+1 = 0 \quad ; \quad e^{-x} > 0$$

$$\iff x = -1$$

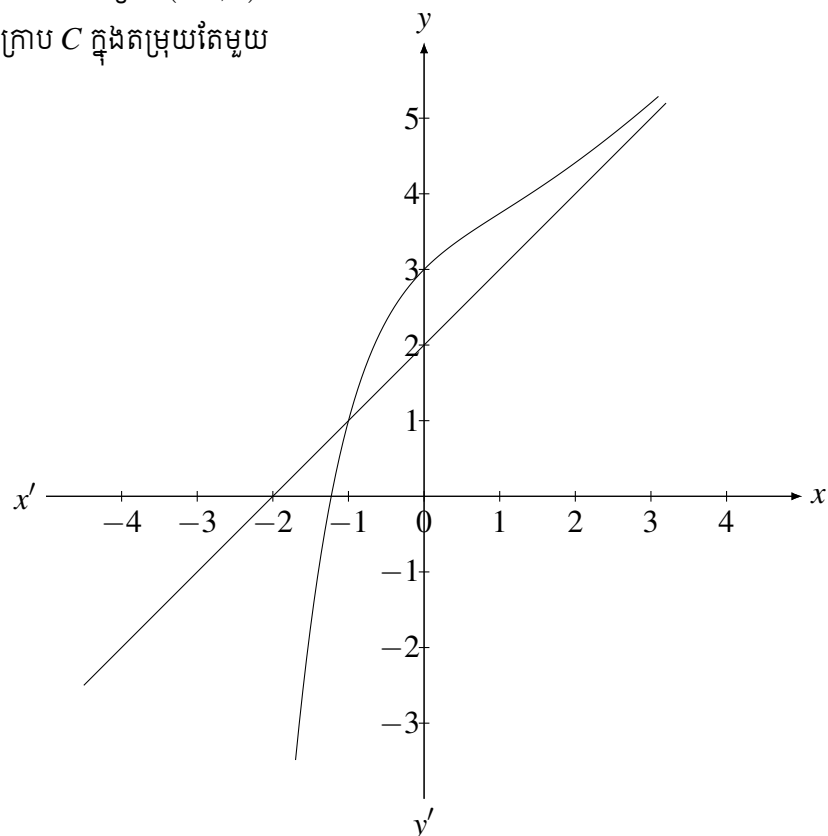
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow$ ក្រាប C នៅក្រោម Δ

$x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ ក្រាប C នៅលើ Δ

$x = -1 \Rightarrow$ ក្រាប C កាត់ Δ ត្រង់ $(-1, 1)$

5. (៨ពិន្ទុ) សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប C ក្នុងតម្រុយតែមួយ



VII. (២៥ពិន្ទុ) គេមានចំណុច $A(2, 1, 4)$; $B(2, -2, 7)$ និង ប្លង់ $P: 2x + 2y - x = 2$

1. (១០ពិន្ទុ) កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងប្លង់ P

សមីការមានរាង $L: x = x_0 + at; y = y_0 + bt; z = z_0 + ct; t \in \mathbb{R}$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} L \perp P \\ \vec{n}_p \perp P \end{cases} \Rightarrow L \parallel \vec{n}_p$$

ដោយ L កាត់តាម $B(2, -2, 7)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_p = (2, -2, -1)$

ដូចនេះ: $L: x = 2 + 2t; y = -2 + -2t; z = 7 - t; t \in \mathbb{R}$

2. (៥ពិន្ទុ) ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង D និង P

យក D ជួសក្នុង P គេបាន: $2(1 + 2t) + 2(-2t) - (1 - t) = 2$

$$2 + 4t - 4t - 1 + t = 2$$

$$t = 1$$

យក $t = 1$ ជួសក្នុង D គេបាន $x = 3; y = -2; z = 0$

ដូចនេះ: កូអរដោនេនៃ M គឺ $M(3, -2, 0)$

3. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MAB

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AM}|$$

ដោយ $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0, -3, 3)$

$\Rightarrow \vec{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A) = (1, -3, -4)$

$$\vec{AB} \times \vec{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (12 + 9)\vec{i} - (0 - 3)\vec{j} + (0 + 3)\vec{k} = 21\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{459} = \frac{3}{2} \sqrt{51} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

បញ្ហាប្រឡង៖-----

លេខបន្ទប់៖----- លេខគ្រូ៖-----

ឈ្មោះបេក្ខជន៖-----

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន៖-----

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ៖ ថា មករា

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

1. គណនា $A = x - y^2$ និង $B = x^2 + x + 1$ ។

2. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ បង្ហាញថា $C = x^{2019} + y^{2019}$ ជាចំនួនពិត ។

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{x^2 - 3}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

III. ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ 400m ។ រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត។

IV. នៅក្នុងប្រអប់មានបីចំនួន១០ដើម ដែលក្នុងនោះមានបីចំនួន៤ដើម និងបីចំនួន៦ដើម។ គេចាប់យកបីចំនួនក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A .“ចាប់បានបីចំនួនទាំងបីដើម” ។

B .“ចាប់បានបីចំនួនក្រហមមួយដើម និងខៀវពីរដើម” ។

C .“ចាប់បានបីចំនួនខៀវតែមួយដើមគត់” ។

V. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 6y' + 8y = 8x + 10$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការ $(E_1) : y'' + 6y' + 8y = 0$ ។ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E_1)

ដែល $y(0) = -1$ និង $y'(0) = 4$ ។

2. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1,0,0), B(0,1,0)$ និង $C(0,0,1)$ ។

1. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

2. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC ។

3. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,1)$ ទៅប្លង់ ABC ។

4. រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹម AC ។

5. រកសមីការប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែ S ត្រង់ C ។

VII. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប C ។

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអបិភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $D : y = 1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

4. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ L អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (គេឱ្យ $e = 2.7$,

$$\frac{2}{e} = 0.7, \ln 2 = 0.7)$$

ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. 1. គណនា $A = x - y^2$ និង $B = x^2 + x + 1$

$$\text{គេមាន } x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ និង } y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left[\frac{1}{4} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{3}{4}\right] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \text{ដូចនេះ } A &= 0 \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ហើយ } B &= x^2 + x + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \\ &= \frac{1}{4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } B = 0 \text{ ។}$$

2. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេបាន } x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ហើយ } y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \text{ និង } y = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \text{ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។}$$

+ បង្ហាញថា $C = x^{2019} + y^{2019}$ ជាចំនួនពិត

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } C &= \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)^{2019} + \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)^{2019} \\ &= \cos \frac{7\pi \times 2019}{6} + i \sin \frac{7\pi \times 2019}{6} + \cos \frac{5\pi \times 2019}{6} + i \sin \frac{5\pi \times 2019}{6} \\ &= \cos \frac{3365\pi}{6} + i \sin \frac{3365\pi}{6} + \cos \frac{4711\pi}{6} + i \sin \frac{4711\pi}{6} \\ &= \cos \left(1682\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(1682\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \left(2354\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(2354\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 + i + 0 - i = 0 \quad (\text{ពិត}) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } C = x^{2019} + y^{2019} \text{ ជាចំនួនពិត ។}$$

II. គណនាលីមីត

$$A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{x^2 - 3} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } A &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - (\sqrt{3})^3}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{x + \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + 3 + 3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ។}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3(e^{5x} - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3(e^{5x} - 1)}{5x} \times \frac{5}{2} = \frac{5e^3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } B = \frac{5e^3}{2} \text{ ។}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេបាន } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan x \cdot \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\tan x}{x} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } C = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

III. រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត
តាង x ជាទទឹង

y ជាបណ្តោយ

$$\text{លក្ខខណ្ឌ } 0 < x \leq y < 400$$

-បរិមាត្រចតុកោណកែង

$$P = 2(x + y)$$

$$x + y = \frac{P}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

$$y = 200 - x \quad (1)$$

-ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង

$$S = xy \quad (2)$$

យក(1) ជំនួស(2) គេបាន

$$S(x) = x(200 - x) = 200x - x^2$$

$$\Rightarrow S'(x) = 200 - 2x$$

$$\text{-បើ } S'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - 2x = 0 \Rightarrow x = 100$$

-តារាងអប្បិភាព

x	$-\infty$	100	$+\infty$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$S(100)$		

តាមតារាងអប្បិភាពខាងលើ គេបានផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងធំបំផុត

-បើ $x = 100$ តាម(1) គេបាន

$$y = 200 - 100 = 100$$

ដូចនេះ ប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងគឺ $x = y = 100\text{m}$ ។

IV. ដោយក្នុងប្រអប់មានបិទចំនួន ១០ ដើម ហើយគេចាប់យកបិទដើមពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ នោះចំនួនករណីអាចគឺ

$$n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 1 \times 2 \times 3} = \frac{720}{6} = 120 \text{ ករណី}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A .“ចាប់បានបិទខ្សែទាំងបីដើម”

ដោយបិទខ្សែក្នុងប្រអប់ទាំងអស់មាន៦ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$$n(A) = C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20 \text{ ករណី}$$

$$\text{តាម } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទខ្សែទាំងបីដើមគឺ $P(A) = \frac{1}{6}$ ។

B .“ចាប់បានបិទក្រហមមួយដើម និងខ្សែព័រដើម”

ដោយក្នុងប្រអប់មានបិទខ្សែទាំងអស់៦ដើម និងបិទក្រហម៤ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$$\begin{aligned} n(B) &= C(6,2) \times C(4,1) = \frac{6!}{(6-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} \\ &= \frac{30}{2} \times 4 = 60 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{តាម } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទក្រហមមួយដើម និងខ្សែព័រដើមគឺ $P(B) = \frac{1}{2}$ ។

C .“ចាប់បានបិទខ្សែតែមួយដើមគត់”

គេបាន ចំនួនករណីស្រប

$$\begin{aligned} n(C) &= C(6,1) \times C(4,2) = \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{6 \times 5!}{5!} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \\ &= 6 \times \frac{4 \times 3}{2} = 36 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{តាម } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទខ្សែតែមួយដើមគត់គឺ $P(C) = \frac{3}{10}$ ។

V. គេមាន (E) : $y'' + 6y' + 8y = 8x + 10$

1. ដោះស្រាយសមីការ $(E_1) : y'' + 6y' + 8y = 0$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y = Ae^{4x} + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y = Ae^{4x} + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$ ។

+ កំណត់ចម្លើយពិសេសនៃ (E_1)

$$\text{គេមាន } y(0) = -1, y'(0) = 4$$

$$\text{គេបាន } y' = 4Ae^{4x} + 2Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 4A + 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ 2A + B = 2 & (2) \end{cases}$$

យក(1) - (2) គេបាន

$$-A = -3 \Rightarrow A = 3 \text{ ជំនួស(1) គេបាន}$$

$$3 + B = -1 \Rightarrow B = -4$$

នោះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E_1) គឺ $y = 3e^{4x} - 4e^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E_1) គឺ $y = 3e^{4x} - 4e^{2x}$ ។

2. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $g(x) = ax + b$

$$\Rightarrow g'(x) = a$$

$$\Rightarrow g''(x) = 0$$

ដោយ g ជាចម្លើយពិសេសនៃ(E) គេបាន

$$g''(x) - 6g(x) + 8g(x) = 8x + 10$$

$$0 - 6a + 8(ax + b) = 8x + 10$$

$$8ax + 8b - 6a = 8x + 10$$

$$\begin{cases} 8a = 8 \\ 8b - 6a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 8b = 10 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃ $a = 1$ និង $b = 2$ ។

VI. 1. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ និង $C(0, 0, 1)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 - 0, 0 - 1, 1 - 0) = (0, -1, 1)$$

$$\text{នោះ } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស (ពិត)

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

2. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1 - 0) \vec{i} - (-1 - 0) \vec{j} + (0 + 1) \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

ដូចនេះ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ ។

+រកសមីការប្លង់ ABC

ដោយប្លង់ ABC កាត់តាមចំណុច $A(1, 0, 0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\text{តាម } ABC : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$: 1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$: x + y + z - 1 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ ABC គឺ $ABC : x + y + z - 1 = 0$ ។

3. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0, 1, 1)$ ទៅប្លង់ ABC

គេមាន $D(0, 1, 1)$ និង $ABC : x + y + z - 1 = 0$

$$\text{តាម } d(D, ABC) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d(D, ABC) &= \frac{|1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} \text{ ឯកតាប្រវែង} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ ABC គឺ $d(D, ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ឯកតាប្រវែង ។

4. រកសមីការស្វ៊ែរ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AC

តាង I ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AC

$$\text{តាម } I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = I\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{កាំ } r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{តាម } S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែរ } S \text{ គឺ } S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

5. រកសមីការប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែរ S ត្រង់ C

ដោយប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែរ S ត្រង់ចំណុច C នោះ P កែង \vec{IC}

$$\text{គេបាន } \vec{IC} = \left(0 - \frac{1}{2}, 0 - 0, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{តាម } P : a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } P : -\frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}(z-1) &= 0 \\ : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប្លង់ } P \text{ គឺ } P : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \text{ ។}$$

VII. គេមាន $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 1 + 2(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 1 + 2 \times 0 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ ។}$$

+ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប C

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដកនៃក្រាប C ។

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 2 \times \frac{(\ln x)'x - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} \text{ ។}$$

+សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$$\text{បើ } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$2 - 2 \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 = \ln e$$

$$\Rightarrow x = e$$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

• បើ $x \in (0, e)$ គេបាន $f'(x) > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

• បើ $x = e$ គេបាន $f'(x) = 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរ

• បើ $x \in (e, +\infty)$ គេបាន $f'(x) < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

+សង់តារាងអបិរភាព

$$\text{បើ } x = e \Rightarrow f(e) = 1 + 2 \left(\frac{\ln e}{e} \right) = 1 + \frac{2}{e} = 1.7 \text{ ជាតម្លៃអតិបរមា}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$-\infty \nearrow 1.7 \searrow 1$	

3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $D : y = 1$

$$\text{គេបាន } f(x) = y$$

$$1 + 2 \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 1$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\ln x = 0 = \ln 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $D : y = 1$ គឺ $A(1, 1)$ ។

+ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A

គេមាន $A(1, 1) \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 1$

តាម $L : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ $f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 - 2\ln 1}{1} = 2$

គេបាន $L : y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $L : y = 2x - 1$ ។

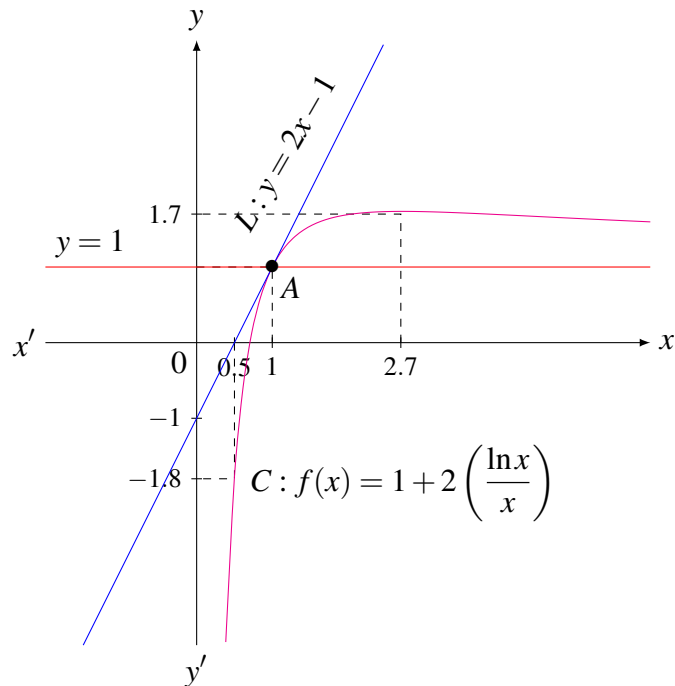
4. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$

គេបាន $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\left(\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 1 + 2(-0.7 \times 2) = 1 - 2.8 = -1.8$

ដូចនេះ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1.8$ ។

+ សង់បន្ទាត់ L អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ

តារាងតម្លៃលេខ	x	0	1
	$y = 2x - 1$	-1	1



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ម៉ី ច័ន្ទមករា

- I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i}$ ។
- ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត។
- ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{12}$ និង $\sin \frac{\pi}{12}$ ។
- II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
- ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4}$
- III. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈដើម៖ $(E) : y'' - 2y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$ ។
2. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី 2 មានមេគុណថេរដែលមានចម្លើយ $f(x) = (x+2)e^{3x}$ ។
- IV. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិកប្រភេទដូចគ្នាចំនួន 20 ដើម ដែលមានពណ៌ខៀវ 14 ដើម និងពណ៌ក្រហម 6 ដើម។ គេយកប៊ិក 5 ដើមព្រមគ្នា ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
- ក. យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម។
- ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម។
- គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច។
- V. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ និង $J = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$
- VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$ ។ (C) ជាក្រាបនៃ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, \vec{i}, \vec{j}) ។
1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចរកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។
2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 1$ ។ គណនា $f(1)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។
3. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចបេត់មួយ។ គណនាកូអរដោនេចំណុចបេត់នោះ។ (គេយក $\sqrt[3]{e} = 1.4$)
4. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា។
5. សង់ក្រាប (C)
- VII. 1. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $P : \frac{1}{4}y^2 - x - y + 3 = 0$ ។ សរសេរសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល រួចទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។
2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេឲ្យ $A(2, 3, 0), B(0, -3, 2)$ និង $C(-2, 3, 4)$ ។
- ក. ចូរសង់ត្រីកោណ ABC
- ខ. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ \vec{BA} និង \vec{BC} ។ បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត។

ជំនាញស្រាវជ្រាវ

I. ចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + i} \quad ; \text{ព្រោះ: } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}, \quad (i^2 = -1) \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } z &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} + i} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

+ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{12}$ និង $\sin \frac{\pi}{12}$

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

ទម្រង់ពិជគណិត $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ: $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ រាង $\left(\frac{0}{0} \right)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3-3)}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} \text{ រង } \frac{0}{0}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\text{តាង } t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\text{ដោយ } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\text{យើងបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 2$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4} \text{ រង } \frac{0}{0}$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos 2x) \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(2 \sin^2 x) \sin x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} \cdot \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 \times 2 \times 1 \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$= 2$$

III. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានលក្ខណៈដើម៖

$$(E) : y'' - 2y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\text{យើងបាន } \Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$$

$$\text{ឬស } \lambda_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha = 1, \beta = \sqrt{2})$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅ } y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} = (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) e^x, A, B \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y' = (-A\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + B\sqrt{2} \cos \sqrt{2}x) e^x + e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)$$

$$= e^x [(B - A\sqrt{2}) \sin \sqrt{2}x + (B\sqrt{2} + A) \cos \sqrt{2}x]$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{និង } \begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 0 = 2 \\ 0 + (B\sqrt{2} + A) = 0 \end{cases} \quad \text{គេបាន } \begin{cases} A = 2 \\ B = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{y = (2 \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x) e^x}$$

2. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២ មានគុណថេរ (E) : $y'' + by' + cy = 0$

$$\text{ដែលមានចម្លើយ } f(x) = (x+2)e^{3x}$$

$$\bullet f'(x) = e^{3x} + 3e^{3x}(x+2)$$

$$= e^{3x}(3x+7)$$

$$\bullet f''(x) = 3e^{3x}(3x+7) + 3e^{3x}$$

$$= e^{3x}(9x+24)$$

យក $f''(x), f'(x)$ និង $f(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$$\text{យើងបាន } e^{3x}(9x+24) + be^{3x}(3x+7) + c(x+2)e^{3x} = 0$$

$$e^{3x}(9x+24+3bx+7b+cx+2c) = 0$$

$$(9+3b+c)x + (24+7b+2c) = \frac{0}{e^{3x}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9+3b+c = 0 & (1) \\ 24+7b+2c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Rightarrow c = -9-3b \quad (3)$$

$$\bullet \text{យក (3) ជំនួសក្នុង (2)}$$

$$24+7b+18-6b=0$$

$$6+b=0$$

$$b = -6$$

$$\bullet \text{ជំនួសក្នុង (3)}$$

$$\Rightarrow c = -9-3(-6) = 9$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(E) : y'' - 6y' + 9y = 0}$$

IV. ក្នុងប្រអប់មានប៊ិកសរុប 20 ដើម ក្នុងនោះខៀវ 14 ដើម និងក្រហម 6 ដើម គេចាប់យក 5 ដើមដោយចៃដន្យ

នោះចំនួនករណីអាចគឺ $n(s) = c(20, 5) = \frac{20!}{(20-5)!5!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15540$ ករណី

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

នោះ $n(A) = C(14, 5) = \frac{14!}{(14-5)!5!} = 2002$ ករណី

យើងបាន $P(A) = \frac{2002}{15540} = 0.1291$

ដូចនេះ $P(A) = 0.1291$

ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

តាង B ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

នោះ $n(B) = C(14, 3) \times C(6, 2) = \frac{14!}{(14-3)!3!} \times \frac{6!}{(6-2)!2!} = 5460$ ករណី

យើងបាន $P(B) = \frac{5460}{15540} = 0.3521$

ដូចនេះ $P(A) = 0.3521$

គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង C ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាស់នៃព្រឹត្តិការណ៍ A

យើងបាន $P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0.1291 = 0.8709$

ដូចនេះ $P(A) = 0.8709$

V. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

តាង $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\text{យើងបាន } I = \int \frac{1 - u^2}{u^4} du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u^4} - \frac{u^2}{u^4} \right) du$$

$$= \frac{-1}{3u^3} - \frac{-1}{u} + C$$

$$= \frac{-1}{3 \sin^3 x} - \frac{-1}{\sin x} + C$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C, (C \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx \\
 &= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x \right) dx \\
 &= \int_1^e \left[\frac{1}{x} + (\ln x)' \ln x \right] dx \\
 &= \left[\ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e \\
 &= \left(\ln e + \frac{\ln^2 e}{2} \right) - \left(\ln 1 + \frac{\ln^2 1}{2} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} \right) - (0 + 0) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $J = \frac{3}{2}$

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$$\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានន័យលុះត្រាតែ } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

ដូចនេះ: $D = (0, +\infty)$

+ រកលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2} = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 + 2 \frac{\ln x}{x^2} \right)$
 $= 0 + 1 + 2 \cdot 0$
 $= 1$

+ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដកនៃក្រាប (C)

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \frac{\left(2x + \frac{2}{x}\right) \cdot x^2 - 2x(1 + x^2 + 2\ln x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x - 2x^3 - 4x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{-4x\ln x}{x^4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f'(x) = \frac{-4x\ln x}{x^4}$

+ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $(-\ln x)$

$$\bullet (-\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

$$\bullet (-\ln x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e^0 = 1$$

$$\bullet (-\ln x) < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^0 = 1$$

+ តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

ត្រង់ $x = 1$ នោះ $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)

ដូចនេះ: អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x = 1$

+ គណនា $f(1)$

$$\bullet f(1) = \frac{1 + 1 + 2\ln 1}{1} = \frac{1 + 1 + 0}{1} = 2$$

+ តារាងអថេរភាព

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	2	1

3. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចបេត់មួយ

$$\bullet \text{ដេរីវេទី១: } f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ ដេរីវេទី២: } f''(x) &= -4 \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \ln x}{x^6} \\
 &= -4 \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} \\
 &= \frac{-4x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} \\
 &= \frac{(3 \ln x - 1)}{x^4}
 \end{aligned}$$

+ សញ្ញានៃ $f''(x)$ យកតាម $(3 \ln x - 1)$

$$\bullet 3 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

$$\bullet 3 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

$$\bullet 3 \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{e}$$

តារាងសិក្សាសញ្ញា $f''(x)$

x	0	$\sqrt[3]{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

• ត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$ នោះ $f''(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$

+ រកកូអរដោនេចំណុចរបត់

$$\begin{aligned}
 \bullet f(\sqrt[3]{e}) &= \frac{1 + (\sqrt[3]{e}) + 2 \ln e^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{e})^2} \\
 &= \frac{1 + (1.4)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}}{(1.4)^2} \\
 &= 1.85
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ $I(1.4, 1.85)$

4. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក
សមីការអាប៉ូស៊ីសចំណុចប្រសព្វគឺ

$$\frac{1 + x^2 + 2 \ln x}{x^2} = 1$$

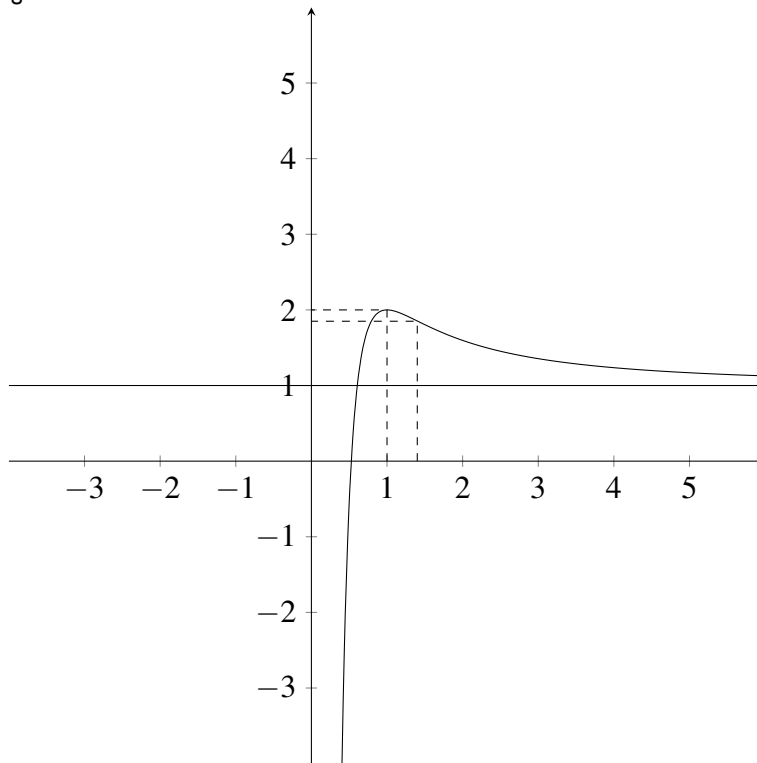
$$1 + x^2 + 2 \ln x = x^2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ $I(0.6, 1)$

5. ក្រាប



VII. 1. ប៉ារ៉ាបូល $(P) : \frac{1}{4}y^2 - x^2 - y + 3 = 0$

សរសេរសមីការស្តង់ដារ ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$P : \frac{1}{4}y^2 - x - y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x - 12$$

$$y^2 - 4y + 2^2 = 4x - 12 + 2^2$$

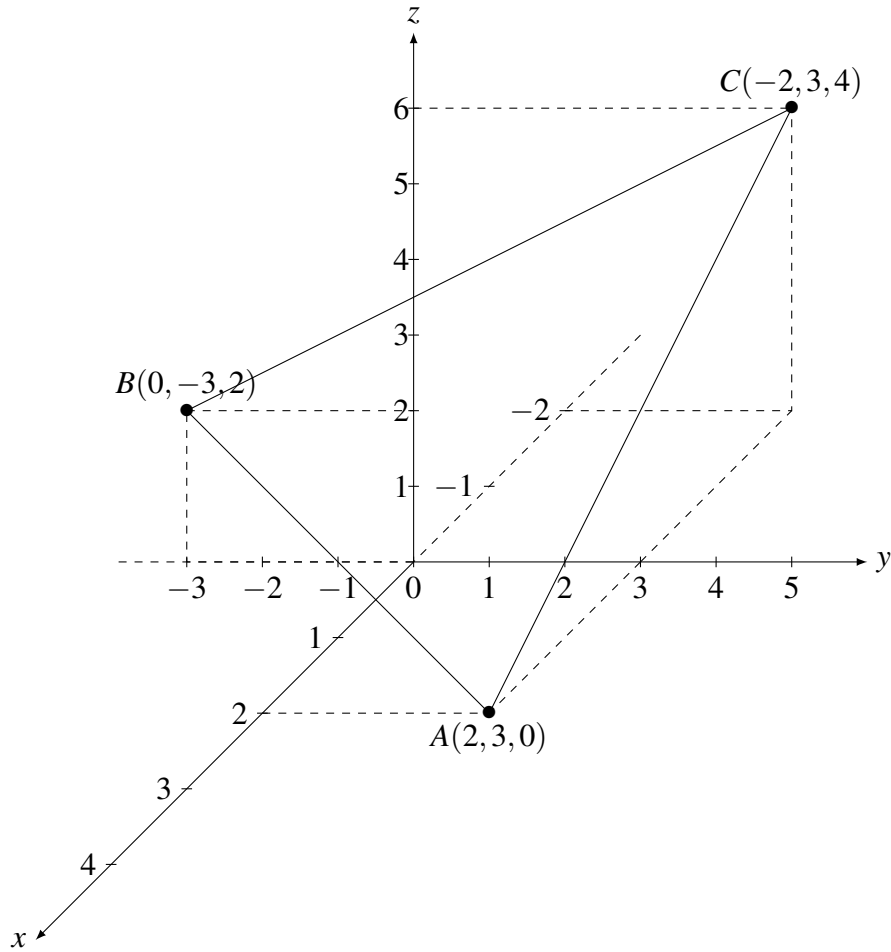
$$(y - 2)^2 = 4x - 8$$

ដូចនេះសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល $P : (y - 2)^2 = 4x - 8$ មានអ័ក្សឆ្លុះដេក

យើងទាញបាន $\begin{cases} k = 2, h = 2 \\ 4p = 4 \Rightarrow p = 1 \end{cases}$

- កំពូល $V(h, k) \Rightarrow V(2, 2)$
- កំណុំ $F(h + p, k) \Rightarrow F(3, 2)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = 1$

2. ក. សង់ត្រីកោណ ABC



ខ. កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ \vec{BA}, \vec{BC} ។ បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត

$$\vec{BA} = (2 - 0, 3 - (-3), 0 - 2) = (2, 6, -2)$$

$$\vec{BC} = (-2 - 0, 3 - (-3), 4 - 2) = (-2, 6, 2)$$

បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត

$$\bullet BA = |\vec{BA}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\bullet BC = |\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\text{យើងបាន } BA = BC = 2\sqrt{11}$$

ដូចនេះ $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាតដែលមានបាត $[AC]$ ។

មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ស៊ី ហាន

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x}$

II. នៅក្នុងចំងាយមានឃ្លីពណ៌ស ៤ គ្រាប់និងឃ្លីពណ៌ក្រហម ៥ គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី ៣ គ្រាប់ចេញពីចំងាយដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. A “យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង ៣ គ្រាប់”

ខ. B “យកបានឃ្លីពណ៌ស ២ គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម ១ គ្រាប់”

គ. C “យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស ១ គ្រាប់”

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int (x^2 + 2x - 3) dx$

ខ. $\int \frac{e^x}{1 - e^x} dx$

គ. $\int \ln x dx$

ឃ. $\int \frac{1}{\cos x} dx$

IV. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + y' - 6y = (x + 2)e^x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន $(F) : y'' + y' - 6y = 0$

ខ. រកចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $y_p = (ax + b)e^x$ ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

គ. បង្ហាញថា $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E) ដែល y_c ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន និង y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន រួចទាញរក y ។

V. គេឲ្យសមីការអេលីប៊ីប $(E) : 25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$ ។

ក. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ ។

ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស្ត៊ីតេរបស់អេលីប ។

គ. សង់អេលីប (E) ក្នុងតម្រុយ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

VI. គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1}$ មានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍ f ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណូម (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\begin{aligned}
 \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\
 \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)}{x^2 - x - 3x + 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)}{x(x-1) - 3(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)}{(x-3)} \\
 &= \frac{1^6 + 1^5 + \cdots + 1 + 1}{1-3} = -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{7}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\
 \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\
 &= (1 + 1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\
 \text{គេបាន } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - 1 + 1 - \cos 2020x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2021x} - 1}{\sin x} + \frac{1 - \cos 2020x}{\sin x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2021x} - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} + \frac{2 \sin^2 1010x}{\sin x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2021(e^{2021x} - 1)}{2021x} \times \frac{x}{\sin x} + \frac{2020 \sin 1010x}{1010x} \times \frac{x}{\sin x} \times \sin 1010x \right) \\
 &= (2021 \times 1 + 2020 \times 1 \times 1 \times 0) = 2021
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2021x} - \cos 2020x}{\sin x} = 2021}$$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. A “យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់”

* ករណីអាច

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីសរុប 9 គ្រាប់ គេចាប់យក 3 គ្រាប់ ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ

$$\begin{aligned} \text{យើងបានចំនួនករណីអាច } n(S) = C(9, 3) &= \frac{9!}{(9-3)!3!} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 3 \times 4 \times 7 = 84 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

* ករណីស្រប

A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់យើងចង់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

$$\begin{aligned} \text{យើងបានចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(5, 3) &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \\ &= 5 \times 2 = 10 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{5}{42}$$

ខ. B “យកបានឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 1 គ្រាប់”

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីសរុប 4 គ្រាប់និងឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់ ហើយយើងចង់បាន

ឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 1 គ្រាប់

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(B) = C(4, 2) \times C(5, 1) &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{4!1!} \\ &= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4!}{4! \times 1} \\ &= 6 \times 5 = 30 \quad \text{Case} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{5}{14}$$

គ. C “យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់”

ដោយព្រឹត្តិការណ៍យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយជាមួយ

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

តាមប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ $P(C) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

ដូចនេះ:
$$P(C) = \frac{37}{42}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក.
$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3)dx \\ &= \int (x^2 + 2x - 3)dx \\ &= \int x^2 dx + \int 2x dx - \int 3 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ:
$$\int (x^2 + 2x - 3)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C, C \in \mathbb{R}$$

ខ.
$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx \\ &= - \int \frac{-e^x}{1 - e^x} dx \\ &= - \int \frac{(1 - e^x)'}{1 - e^x} dx \\ &= - \ln|1 - e^x| + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ:
$$\int \frac{e^x}{1 - e^x} dx = - \ln|1 - e^x| + C, C \in \mathbb{R}$$

គ.
$$\int \ln x dx$$

 តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int u dv = uv - \int v du$
 តាង $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
 $dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x + c$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ:
$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, C \in \mathbb{R}$$

ឃ.
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx \\ \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} &= \frac{a \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{b \cos x}{(1 + \sin x)} \\
 &= \frac{a \cos x(1 + \sin x) + b \cos x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
 \cos x &= a \cos x + a \cos x \sin x + b \cos x - b \cos x \sin x \\
 \cos x &= (a + b) \cos x + (a - b) \cos x \sin x \\
 \Leftrightarrow + \begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ a - b = 0 & (2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \frac{2a + 0 = 1}{2} \\
 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} &= \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 + \sin x)} \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{\frac{1}{2} \cos x}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + C \\
 \text{ដូចនេះ: } \int \frac{1}{\cos x} dx &= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + C, C \in \mathfrak{R}
 \end{aligned}$$

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន (F) : $y'' + y' - 6y = 0$

(F) : $y'' + y' - 6y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$

$$\Delta = (1)^2 + 4 \cdot 6 = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3, \lambda_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$\text{តាម } y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

យើងបានចម្លើយនៃសមីការ F គឺ $y_c = Ae^{-3x} + Be^{2x}$ A, B is constance

ខ. រកចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $y_p = (ax + b)e^x$ ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងមាន $y_p = (ax + b)e^x$

$$y_p' = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$y_p'' = ae^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$$

ដើម្បីឲ្យ y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែនលុះត្រាតែ $y_p'' + y_p' - 6y_p = (x + 2)e^x$

$$\Leftrightarrow (ax+2a+b)e^x + (ax+a+b)e^x - 6(ax+b)e^x = (x+2)e^x$$

$$ax+2a+b+ax+a+b-6ax-6b=x+2$$

$$-4ax+3a-4b=x+2$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} -4a=1 \\ 3a-4b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$$

ដូចនេះ $a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$ និង $y_p = (-\frac{1}{4}x - \frac{11}{16})e^x$

គ. បង្ហាញថា $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

ដោយ y_c ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន $y_c'' + y_c' - 6y_c = 0$ (1)

និង y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន $y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x$ (2)

យក (1), (2) យើងបាន

$$+ \begin{cases} y_c'' + y_c' - 6y_c = 0 & (1) \\ y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x & (2) \end{cases}$$

$$y_c'' + y_p'' + y_c' + y_p' - 6y_c - 6y_p = (x+2)e^x$$

$$(y_c'' + y_p'') + (y_c' + y_p') - 6(y_c + y_p) = (x+2)e^x$$

គេបាន $y = y_c + y_p$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

Therefore $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

$$y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + Be^{2x} + (-\frac{1}{4}x - \frac{11}{16})e^x$$

ដូចនេះ: $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{16})e^x$ A, B is constance

V. ក. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ

យើងមានសមីការ

$$(E) : 25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$$

$$25x^2 - 50x + 25 + 9y^2 - 90y + 9 \times 5^2 - 9 \times 5^2 = 0$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 10y + 5^2) = 225$$

$$25(x-1)^2 + 9(y-5)^2 = 225$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1 \text{ ជាទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអេលីប}$$

ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេរបស់អេលីប

ដោយអេលីប (E) : $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ មានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអដេនេរ

$$\Rightarrow h = 1, k = 5, a = 5, b = 3$$

$$\text{and } c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{- ផ្ចិត } I(h, k) = (1, 5)$$

$$\text{- កំពូល } V_1(h, k - a) = (1, 0) \quad , \quad V_2(h, k + a) = (1, 10)$$

$$\text{- កំណុំ } F_1(h, k - c) = (1, 1) \quad , \quad F_2(h, k + c) = (1, 9)$$

$$\text{- អ៊ីចសង់ទ្រីស៊ីតេ } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

គ. សង់អេលីប (E) ក្នុងតម្រុយ (O, \vec{i}, \vec{j})

VI. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$$f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1} \text{ មានន័យកាលណា } e^x - 1 \neq 0$$

$$e^x \neq 1$$

$$e^x \neq e^0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\therefore D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍ f

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{2}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{2}{e^x - 1} \right)$$

$$= -\infty$$

○ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ដូចនេះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

○ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x - 1} = 0$ ដូចនេះបន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

○ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^x - 1} = 2$ ដូចនេះបន្ទាត់ $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$$f(x) = x - \frac{2}{e^x - 1}$$

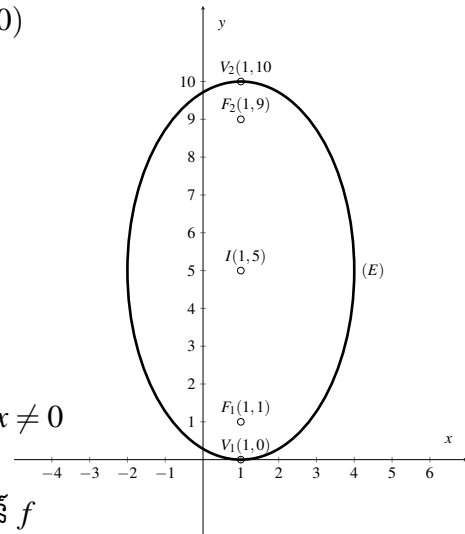
$$f'(x) = 1 - \frac{-2(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2 + 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 + 2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$$\text{ដោយ } (e^{2x} + 1), (e^x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in D$$



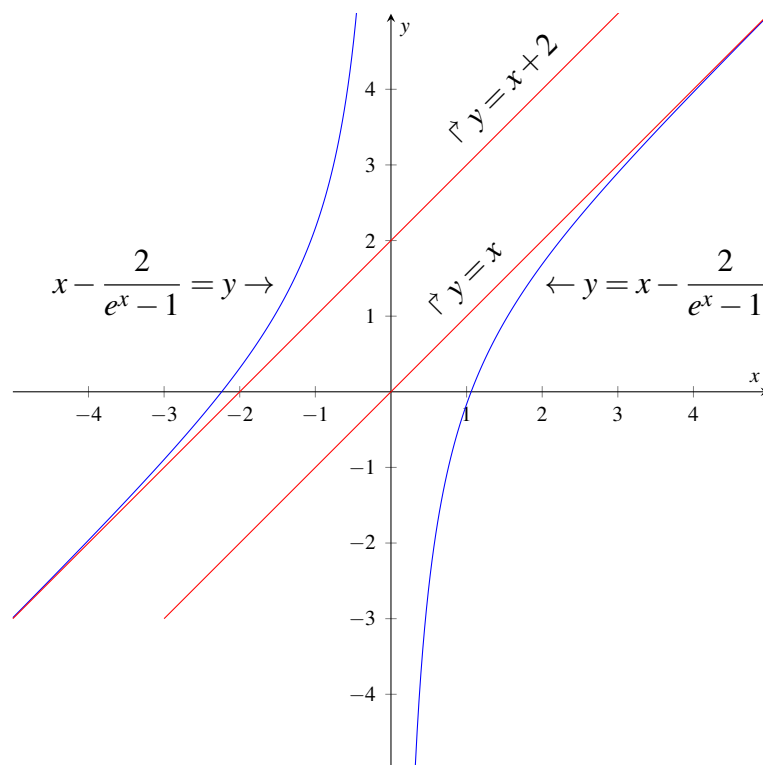
យើងបាន $f'(x) \geq \forall x \in D$

- គ្មានចំណុចបរមា

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណូមេ (O, \vec{i}, \vec{j})



មណ្ឌលប្រឡង៖ _____
 លេខបន្ទប់៖ _____ លេខតុ៖ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន៖ _____
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន៖ _____

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាបនៈ : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ៖ ផល ផាទុ

- I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \sqrt{3} + i$, $Z_2 = 1 + i$ និង $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ ។
- រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_1, Z_2 និង Z_3 ។
 - សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W = \frac{Z_3}{Z_2^2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនាបូសកាវែនៃ W ។
- II. គណនាលីមីត
- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}$
 - $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$
 - $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)(1 - \cos 2x)}{\sin^3 x}$
 - $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln \frac{2x-1}{2x})$
- III. គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ ។
- រកចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{B}{1-e^x}$ ។
 - គណនា $I(x) = \int \frac{e^x}{1-e^x} dx$ រួចទាញរក $J(x) = \int \frac{dx}{1-e^x}$ ។
- IV. នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបិទក្រហមចំនួន ៧ ដើម និងបិទខៀវចំនួន ៥ ដើម។
 គេយកបិទ ៤ ដើមព្រមគ្នាចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :
- “យកបានបិទក្រហមទាំង ៤ ដើម”
 - “យកបានបិទខៀវយ៉ាងតិច ១ ដើម”
 - “យកបានបិទក្រហមចំនួន ៣ ដើមគត់”
- V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$ ។
- ដោះស្រាយសមីការ $(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$ ។ រកចម្លើយនៃ (F) បើ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 6$ ។
 - រកចំនួនពិត n, p , និង q ដោយដឹងថា $y = 2x^2 + 3x + 1$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេឱ្យចំណុច $A(1, -2, 0), B(1, 0, 4)$ និង $C(0, 3, 3)$ ។
- ចូរសង់ត្រីកោណ ABC ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។
 - រកសមីការប្លង់ (α) ជាប្លង់មេដ្យូទ័រនៃ $[AB]$ ។
 - រកសមីការនៃស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$ ។
 - គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
 - គណនា $P = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}$ ។ ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។ រួចទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC ។
- VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $y = f(x) = (x+2)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប C ។
- គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។
 - បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -1$ ។ គណនា $f(-1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
 - បង្ហាញថាក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។
 - គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$ ដោយយក $e^{-2} = 0.13$ រួចសង់ក្រាប C ។
 - គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប C អ័ក្ស $(x'ox)$ អ័ក្ស $(y'oy)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 2$ ។
 - ដោយប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ដើម្បីឱ្យសមីការ $me^x - x - 2 = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_1 < 0 < x_2$

ជំនេរស្រាវជ្រាវ

I. គេមាន $Z_1 = \sqrt{3} + i$, $Z_2 = 1 + i$ និង $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

1. រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_1, Z_2 និង Z_3

• $Z_1 = \sqrt{3} + i$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ: $|Z_1| = 2$, $\arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• $Z_2 = 1 + i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ: $|Z_2| = \sqrt{2}$, $\arg(Z_2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ: $|Z_3| = 2$, $\arg(Z_3) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W = \frac{Z_3}{Z_2^2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $W = \frac{Z_3}{Z_2^2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 + i)^2}$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i}$$

$$= \frac{i(1 + i\sqrt{3})}{2i^2}$$

$$= \frac{i - \sqrt{3}}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ: $W = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

• $W = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$$= \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$i^2 = -1$$

$$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha)$$

ដូចនេះ:
$$W = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

• គណនាឫសការ៉េនៃ W

គេមាន $W = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$

គេបានឫសការ៉េនៃ W គឺ $W_k = \cos\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

ចំពោះ $k = 0$ គេបាន $W_0 = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

ចំពោះ $k = 1$ គេបាន $W_1 = \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)$

II. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-2x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3})}{(x+3-2x-3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3})}{(-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

ដូចនេះ: $A = \sqrt{3}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ដូចនេះ: $B = 1$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)(1 - \cos 2x)}{\sin^3 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 1 \times 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

ដូចនេះ: $C = 2$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \ln \frac{2x-1}{2x}\right)$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \ln \frac{2x(1 - \frac{1}{2x})}{2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \ln \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \right) \\
 &= 2 - \ln 1 = 2
 \end{aligned}$$

$\ln 1 = 0$

ដូចនេះ: $D = 2$

III. អនុគមន៍ $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. រកចំនួនពិត A និង B

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } f(x) &= \frac{e^x}{1 - e^x} \\
 &= \frac{e^x - 1 + 1}{1 - e^x} \\
 &= -\frac{1 - e^x}{1 - e^x} + \frac{1}{1 - e^x} \\
 &= -1 + \frac{1}{1 - e^x}
 \end{aligned}$$

តែ $f(x) = A + \frac{B}{1 - e^x}$

គេបាន $A = -1$, $B = 1$

ដូចនេះ: $A = -1$, $B = 1$

2. គណនា $I(x) = \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{ដោយ } I(x) &= \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx \\
 &= - \int \frac{(1 - e^x)'}{1 - e^x} dx \\
 &= - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $I(x) = - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

ទាញរក $J(x) = \int \frac{dx}{1 - e^x}$

ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} = -1 + \frac{1}{1 - e^x}$

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{e^x}{1 - e^x} &= \frac{1}{1 - e^x} \\
 J(x) &= \int \frac{dx}{1 - e^x} \\
 &= \int \left(1 + \frac{e^x}{1 - e^x} \right) dx
 \end{aligned}$$

$J(x) = x - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: $J(x) = x - \ln |1 - e^x| + c, c \in \mathbb{R}$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ដោយបិទសរុបមាន 12 ដើម គេចាប់យក 4 ដើមដោយចៃដន្យ

គេបានចំនួនករណីអាច $n(S) = C(12, 4) = \frac{12!}{(12-4)!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

ក. “យកបានបិទក្រហមទាំង 4 ដើម”

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{7}{99}$$

ខ. “យកបិចខៀវយ៉ាងតិច 1 ដើម”

ខៀវ	0	1	2	3	4
ក្រហម	4	3	2	1	0

$$\text{គេបាន } P(A) + P(B) = 1$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(B) = 1 - \frac{7}{99}$$

$$P(B) = \frac{92}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{92}{99}$$

គ. “យកបានបិចក្រហមចំនួន 3 ដើមគត់”

C ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានបិចក្រហម 3 ដើម និងបិចខៀវ

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = C(7,3) \times C(5,1) = \frac{7!}{4!3!} \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 5 = 35 \times 5 = 175$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{175}{495} = \frac{35}{99}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{35}{99}$$

V. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$

1. ដោះស្រាយសមីការ (F)

$$(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់: } \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times 5 = -4$$

$$\lambda = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{-4}}{1} = 1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅមានទម្រង់ (F) : } y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅ } (F) : y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x, (A, B \in \mathbb{R})$$

• រកចម្លើយនៃ (F)

$$\text{ដោយ } y(0) = 2, y'(0) = 6$$

$$(F) : y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$\Rightarrow y' = (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)e^x + (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$\text{នៅ: } y(0) = (A \cos 0 + B \sin 0)e^0$$

$$2 = A + 0$$

$$A = 2$$

$$y'(0) = (-2A \sin 0 + 2B \cos 0)e^0 + (A \cos 0 + B \sin 0)e^0$$

$$6 = 2B + A$$

$$6 = 2B + 2$$

$$B = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅ } (F) : y = (2 \cos 2x + 2 \sin 2x)e^x$$

2. រកចំនួនពិត n, p និង q

$$\text{ដោយ } y = 2x^2 + 3x + 1 \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)}$$

$$\implies y' = 4x + 3$$

$$\implies y'' = 4$$

$$\text{គេបានសមីការ (E) : } y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$$

$$4 - 2(4x + 3) + 5(2x^2 + 3x + 1) = nx^2 + px + q$$

$$4 - 8x - 6 + 10x^2 + 15x + 5 = nx^2 + px + q$$

$$10x^2 + 7x + 3 = nx^2 + px + q$$

$$\text{ដូចនេះ: } n = 10, p = 7, q = 3$$

• រកចម្លើយនៃសមីការ (E)

$$\text{ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ } y = y_c + y_p$$

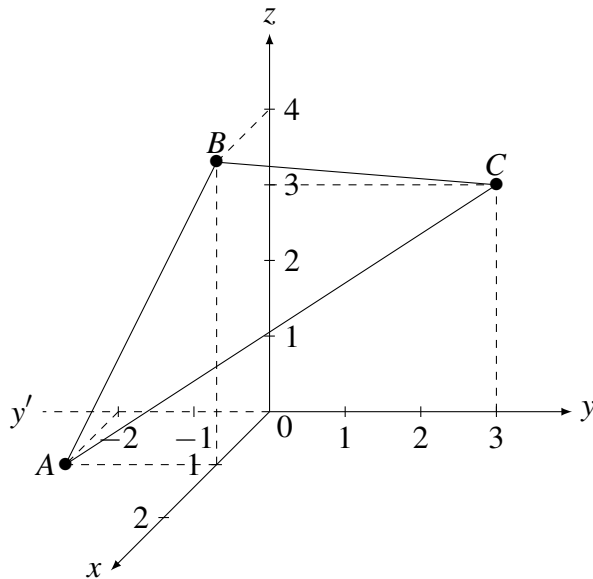
$$\text{ដោយ } y_c = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$y_p = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x + 2x^2 + 3x + 1, (A, B) \in \mathbb{R}$$

VI. គេឱ្យចំណុច $A(1, -2, 0), B(1, 0, 4)$ និង $C(0, 3, 3)$

1. សង់ត្រីកោណ ABC ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



2. រកសមីការប្លង់ (α)

សមីការប្លង់ (α) : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយប្លង់ (α) ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB] \Rightarrow (\alpha) \perp AB$ ត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 \\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \end{cases}$$

ហើយ $(\alpha) \perp \overrightarrow{AB}$ ដែល $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 4) - (-1, -2, 0) = (2, 2, 4)$

គេបានប្លង់ (α) : $0(x - 0) + 2(y + 1) + 4(z - 2) = 0$

$$0 + 2y + 2 + 4z - 8 = 0$$

$$2y + 4z - 6 = 0$$

ដូចនេះ $(\alpha) : 2y + 4z - 6 = 0$

3. រកសមីការនៃស្វ៊ី S

សមីការស្វ៊ី (S) : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

ដោយស្វ៊ី (S) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

គេបាន $I(1, -1, 2)$ ជាផ្ចិតនៅកណ្តាលនៃ $[AB]$

ហើយកាំ $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - (-1))^2 + (-1 - (-2))^2 + (2 - 0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$

គេបាន (S) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 5$

ដូចនេះ $(S) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 5$

4. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3) - (-1, -2, 0) = (4, 5, 3)$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (6 - 20)\vec{i} - (0 + 4)\vec{j} + (0 + 2)\vec{k}$$

ដូចនេះ: $\vec{n} = -14\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

- ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned}\text{តាមរូបមន្ត } S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-14)^2 + (-4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $S_{ABC} = 3\sqrt{6}$ ឯកតាផ្ទៃ

5. គណនា $P = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}$

ដោយ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-14, -4, 2)$, $\vec{OA} = -(1, -2, 0) = (-1, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } P &= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} \\ &= -14(-1) - 4(2) + 2(0) \\ &= 14 - 8\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $P = 6$

- ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO}| = \frac{1}{6} \times 6 = 1$$

ដូចនេះ: មាឌនៃតេត្រាអែត $V_{OABC} = 1$ ឯកតាមាឌ

- រួចទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(O, ABC)$$

$$\begin{aligned}d(O, ABC) &= 3 \frac{V_{OABC}}{S_{ABC}} \\ d &= \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $d(O, ABC) = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ឯកតាប្រវែង

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $y = f(x) = (x+2)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = 0$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ដូចនេះ: $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

2. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -1$

ដោយ $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= (x+2)'e^{-x} + (x+2)(e^{-x})' \\ &= e^{-x} - (x+2)e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x-1)\end{aligned}$$

ដោយ $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $(-x-1)$

$$\text{បើ } f'(x) = 0 \iff -x-1 = 0 \implies x = -1$$

• តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

ត្រង់ $x = -1 \implies f'(x) = 0$ ហើយប្លូសេញពី (+) ទៅ (-) ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -1$

• គណនា $f(-1)$

$$\text{ដោយ } f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$\implies f(-1) = (-1+2)e^1 = 2.71$$

• រូបសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	$-\infty$	2.71	0

3. បង្ហាញថាក្រាប C មានចំណុចបត់មួយ

$$f'(x) = e^{-x}(-x-1)$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= (e^{-x})'(-x-1) + e^{-x}(-x-1)' \\ &= -e^{-x}(-x-1) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(x+1-1) \\ &= xe^{-x}\end{aligned}$$

ដោយ $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{បើ } f''(x) = 0 \iff x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

ត្រង់ $x = 0 \implies f''(x) = 0$ ហើយប្លូសេញពី (-) ទៅ (+) ។

ដូចនេះ ក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = 0$

- រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(0) = (0+2)e^0 = 2$$

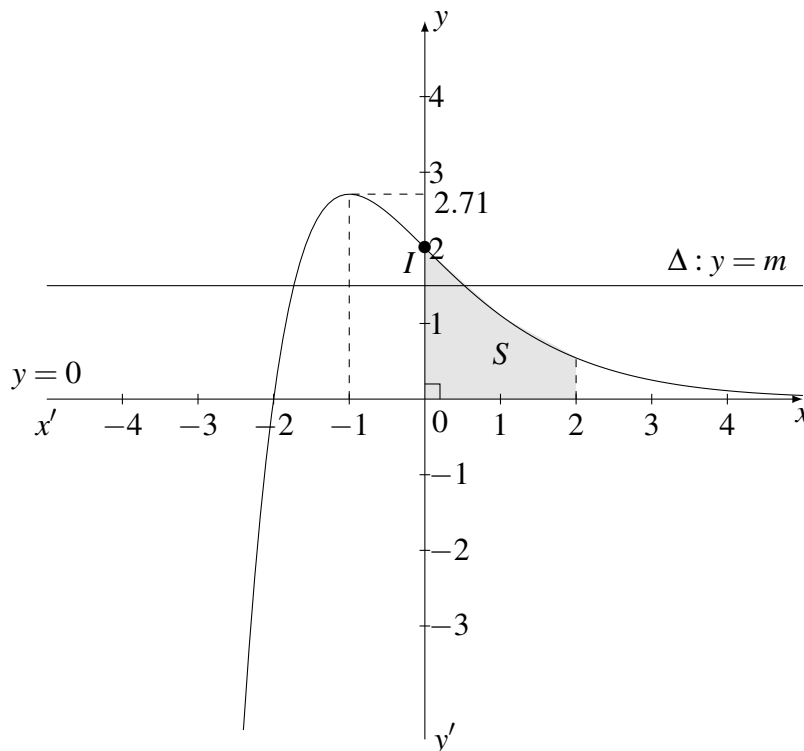
4. គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(-2) = (-2+2)e^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(2) = (2+2)e^{-2} = 4 \times 0.13 = 0.52$$

- រូបសង់ក្រាប C



5. គណនាផ្ទៃក្រឡា S

ដោយផ្ទៃក្រឡា S ខណ្ឌដោយក្រាប C អ័ក្ស $(x'ox)$ អ័ក្ស $(y'oy)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 2$

$$\text{គេបាន } S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$$

- រក $I = \int (x+2)e^{-x}dx$

$$\text{តាង } u = x+2 \Rightarrow du = dx, \quad dv = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = -e^x$$

$$\text{គេបាន } I = -e^{-x}(x+2) + \int e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}(x+2) - e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= -e^{-x}(x+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } S &= [-e^{-x}(x+3)]_0^2 \\ &= -e^{-2}(2+3) + e^0(0+3) \\ &= -0.13(5) + 3 \\ &= 2.35\end{aligned}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡា $S = 2.35$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

6. កំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដោយប្រើក្រាប C

$$\text{សមីការ } me^x - x - 2 = 0$$

$$me^x = x + 2$$

$$m = \frac{x+2}{e^x} m = (x+2)e^{-x}$$

សមីការនេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ដេក $\Delta : y = m$

ដើម្បីឱ្យសមីការ $me^x - x - 2 = 0$ មានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 < 0 < x_2$

លុះត្រាតែ $m \in (0, 2)$

ដូចនេះ $m \in (0, 2)$ សមីការមានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 < 0 < x_2$

មណ្ឌលប្រឡង:-----

លេខបន្ទប់:----- លេខតុ:-----

ឈ្មោះបេក្ខជន:-----

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន:-----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: សារ៉ែន សុទ្ធា

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1)$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1}$ ។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = -3 - 3i\sqrt{3}$ ។

ក. សរសេរ $2z_1 + \overline{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គណនា $(2z_1 + \overline{z_2})^3$ ។ គេតាង $\overline{z_2}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_2 ។

III. ក្នុងចំណោមមានប៊ូលចំនួន 15 ដែលមានបង់លេខពី 1 ដល់ 15 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីចំណោមដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A : “គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3”

ខ. B : “គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 4”

គ. C : “គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3” ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $I = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx$

ខ. $J = \int_0^{\ln 7} (e^x - 2) dx$

គ. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^4 x \cos x \right] dx$ ។

V. 1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ និង $C(3, 4, 3)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A, B, C តែមិនត្រង់គ្នា។

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (-1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ $x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$ ។ ចូរប្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។ កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ព្រមទាំងសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 3y' - y = 2y' + 5y$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។ បង្ហាញថា $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដែល $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ និងមានក្រាបតំណាង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

ក. គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) , បន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្ស (Ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1, x = e$ ។ គេឲ្យ $e = 2.7$ និង $\frac{1}{e} = 0.4$ ។

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1) & \text{ រាងមិនកំណត់ } +\infty - \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x + 3} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x + 3} - (x-1)] [\sqrt{x^2 - x + 3} + (x-1)]}{[\sqrt{x^2 - x + 3} + (x-1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 3})^2 - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - x + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{-(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \times \frac{x}{\sin x}\right) = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \sin x}{\cos^2 x - 1} = 3$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1} & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)(\cos^2 x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{(\cos x - 1)(\cos^2 x + 1)} = \frac{2}{(\cos \pi - 1)(\cos^2 \pi + 1)} = \frac{2}{(-1 - 1)(1 + 1)} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos^4 x - 1} = -\frac{1}{2}$$

II. ក. សរសេរ $2z_1 + \bar{z}_2$ ជាទម្រង់ពីជីគណិត និងត្រីកោណមាត្រ

$$\text{គេមាន } z_2 = -3 - 3i\sqrt{3} \text{ នាំឲ្យ } \bar{z}_2 = -3 + 3i\sqrt{3}$$

$$\text{គេបាន } 2z_1 + \bar{z}_2 = 2(-3 + 3i\sqrt{3}) + (-3 + 3i\sqrt{3}) = -6 + 6i\sqrt{3} - 3 + 3i\sqrt{3} = -9 + 9i\sqrt{3}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } 2z_1 + \bar{z}_2 = -9 + 9i\sqrt{3}$$

ខ. គណនា $(2z_1 + \overline{z_2})^3$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } 2z_1 + \overline{z_2} &= -9 + 9i\sqrt{3} = 18 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 18 \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 18 \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 18 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេទាញបាន } (2z_1 + \overline{z_2})^3 &= \left[18 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^3 \\ &= 18^3 \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3} \right) = 18(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 18(1 + 0i) = 18 \end{aligned}$$

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\text{ដូច្នេះ } (2z_1 + \overline{z_2})^3 = 18$$

III. កេហ្វហ្វិចនៃព្រីត្រីកោណ៖

ក. A : “ គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3!} = 455$$

លេខដែលចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ 3, 6, 9, 12, 15

$$\text{នោះ } n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 5 \times 3}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(A) = \frac{2}{91}$$

ខ. B : “ គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 4 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

ដោយ លេខចែកមិនដាច់នឹង 4 មានលេខ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15

$$\text{នោះ } n(B) = C(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!3!} = \frac{12}{3!} = 220$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{220}{455} = \frac{44}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(B) = \frac{44}{91}$$

គ. C : “ គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3 ”

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

ដោយ លេខចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ 3, 6, 9, 12, 15

$$\text{នោះ } n(C) = C(5, 1) \times C(10, 2) = 5 \times \frac{10!}{(10-2)!2!} = 5 \times \frac{10!}{8!2!} = 5 \times \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!2!} = 5 \times \frac{10 \times 9}{2!} = 225$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

$$\text{ដូច្នេះ } P(C) = \frac{45}{91}$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} + 1 \right) - (0 - 0 + 0) = \frac{8}{15}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } I = \frac{8}{15}$$

$$\text{ខ. } J = \int_0^{\ln 7} (e^x - 2) dx = (e^x - 2x)_0^{\ln 7} = (e^{\ln 7} - 2 \ln 7) - (e^0 - 0) = 7 - 2 \ln 7 - 1 = 6 - 2 \ln 7$$

$$\text{ដូច្នេះ: } J = 6 - 2 \ln 7$$

$$e^{\ln k} = k$$

$$\text{គ. } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (\sin x)' dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\sin^5 x}{5} \right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[-\frac{1}{3} \cos \left(0 + \frac{\pi}{3} \right) \right] + \frac{\sin^5 \frac{\pi}{2}}{5} - \frac{\sin^5 0}{5}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{5} - 0$$

$$= \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11 - 5\sqrt{3}}{30}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } K = \frac{11 - 5\sqrt{3}}{30}$$

V. 1. ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC}

គេមាន

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ B(3, 2, 1) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{AB} = (3 - 1, 2 - 2, 1 - 3) = (2, 0, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ C(3, 4, 3) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{AC} = (3 - 1, 4 - 2, 3 - 3) = (2, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} B(3, 2, 1) \\ C(3, 4, 3) \end{array} \right| \Rightarrow \vec{BC} = (3 - 3, 4 - 2, 3 - 1) = (0, 2, 2)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{AB} = (2, 0, 2), \vec{AC} = (2, 2, 0) \text{ និង } \vec{BC} = (0, 2, 2)$$

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន

$$\vec{AB} = (2, 0, 2) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\vec{AC} = (2, 2, 0) \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\vec{BC} = (0, 2, 2) \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដោយ } |\vec{AB}| = |\vec{AC}| = |\vec{BC}| = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដូចនេះ: ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (0-4)\vec{i} - (0-4)\vec{j} + (4-0)\vec{k} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

ទាញថាបីចំនុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា

$$\text{ដោយ } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \neq \vec{0}$$

ដូច្នេះ: បីចំនុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (-1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

$$\text{គេមាន } \vec{n} = (-1, 1, 1)$$

$$\text{និង } \vec{AB} \times \vec{AC} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \text{ ឬ } \vec{AB} \times \vec{AC} = (-4, 4, 4)$$

$$\text{ដោយ } \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = (-1, 1, 1) \text{ កូលីនេអ៊ែរនឹង } \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\text{តែ } \vec{AB} \times \vec{AC} \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)$$

$$\text{នោះ } \vec{n} = (-1, 1, 1) \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \vec{n} = (-1, 1, 1) \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)$$

សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំនុច $A(1, 2, 3)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (-1, 1, 1)$

$$\text{គេបាន } (ABC): (-1)(x-1) + (1)(y-2) + (1)(z-3) = 0$$

$$-x + 1 + y - 2 + z - 3 = 0$$

$$-x + y + z - 4 = 0$$

$$\text{ដូច្នេះ: } (ABC) - x + y + z - 4 = 0$$

2. បម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{គេមានសមីការទូទៅ } x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$$

$$\text{គេបាន } x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = 8y + 12$$

$$x^2 - 4x + 4 = 8y + 12 + 4$$

$$(x-2)^2 = 8y + 16$$

$$(x-2)^2 = 8(y+2)$$

ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-2)^2 = 8(y+2)$

កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

គេមាន $(x-2)^2 = 8(y+2)$ មានរាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

នាំឲ្យ $h=2, k=-2$ និង $4p=8 \Rightarrow p=2$

គេទាញបាន

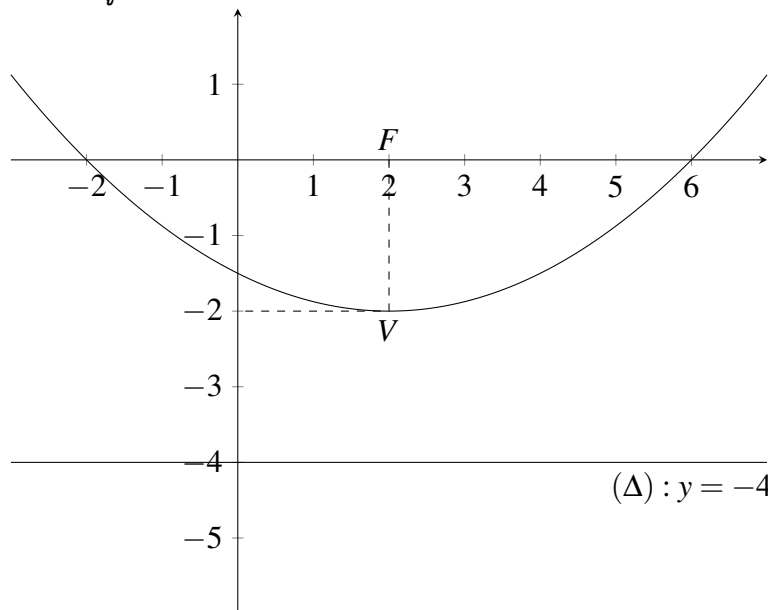
កំពូល $V(h,k) = V(2,-2)$

កំណុំ $F(h,k+p) = F(2,0)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta) : y = k - p = -2 - 2 = -4$

ដូច្នេះ កំពូល $V(2,-2)$, កំណុំ $F(2,0)$ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta) : y = -4$

សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ



VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 3y' - y = 2y' + 5y$

គេបាន $(E) : y'' + 3y' - y - 2y' - 5y = 0$

$(E) : y'' + y' - 6y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ មាន $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$

នាំឲ្យ $\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$

គេបាន អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

ដូច្នេះ $y = Ae^{-3x} + Be^{2x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

បង្ហាញថា $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$

នាំឲ្យ $y' = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

ហើយ $y'' = 8e^{2x} - 9e^{-3x}$

យក y, y' និង y'' ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$$\text{គេបាន } (8e^{2x} - 9e^{-3x}) + (4e^{2x} + 3e^{-3x}) - 6(2e^{2x} - e^{-3x}) = 0$$

$$8e^{2x} - 9e^{-3x} + 4e^{2x} + 3e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0$$

$$12e^{2x} - 6e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0$$

$$0 = 0 \text{ ពិត}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } y = 2e^{2x} - e^{-3x} \text{ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)}$$

VII. ក. គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \ln x \right) = 1 + (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបខាង $-\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ នោះបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបខាង $+\infty$

ដូចនេះ: $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= \frac{(x + \ln x)'(x) - (x)'(x + \ln x)}{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1 - x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$$\text{គេមាន } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ដោយ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1 - \ln x$

- $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- $1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$
- $1 - \ln x < 0 \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

$$\text{ដូច្នេះ: } f'(x) > 0 \text{ បើ } x < e, f'(x) < 0 \text{ បើ } x > e, f'(x) = 0 \text{ បើ } x = e$$

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គេបាន

f កើនចំពោះ $x \in (-\infty, e)$ និង f ចុះចំពោះ $x \in (e, +\infty)$

សង់តារាងប្រភេទនៃអនុគមន៍ f

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គេបាន f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = e$

$$\text{តម្លៃអតិបរមាគឺ } f(e) = \frac{e + \ln e}{e} = \frac{e + 1}{e} = 1 + \frac{1}{e} = 1 + 0.4 = 1.4$$

តារាងអប្រភេទនៃអនុគមន៍ f

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	1.4	1

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 1$

$$\text{គេមាន } x_0 = 1 \text{ នោះ } y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ

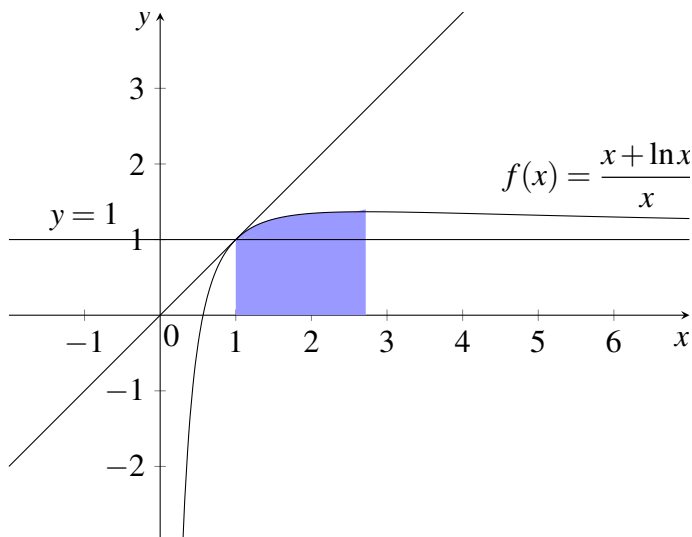
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ សមមូល } y - 1 = (1)(x - 1) \text{ សមមូល } y = x$$

ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) : $y = x$

ឃ. សង់ក្រាប (C) , បន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j})

តារាងតម្លៃលេខនៃ (T) : $y = x$

x	0	1
y	0	1



ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្ស (ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1, x = e$

តាមក្រាប គេបាន $f(x) > 0$ លើចន្លោះ $[1, e]$

$$\begin{aligned}
 \text{តាមរូបមន្ត គេបាន } S &= \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{x + \ln x}{x} dx = \int_1^e \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx \\
 &= \int_1^e [1 + \ln x(\ln x)'] dx = \left[x + \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e \\
 &= \left(e + \frac{\ln^2 e}{2}\right) - \left(1 + \frac{\ln^2 1}{2}\right) \\
 &= e + \frac{1}{2} - 1 = 2.7 + 0.5 - 1 = 2.2
 \end{aligned}$$

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡា $S = 2.2$ ឯកតាផ្ទៃ

មណ្ឌលប្រឡង
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន: _____

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: វៀង ពន្លឺ

- I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖
 ក. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 13}{9 - x^2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)(e^{2x} + e^{-2x})}{3x^2}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
- II. (១០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
 ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។
 ខ. គេតាង $z = z_1 \times z_2$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញយកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{12}$ និង $\sin \frac{\pi}{12}$ ។
 គ. គេតាង $w = (z_1 \times z_2)^2$ ។ រកម៉ូឌុល និងអាក្យម៉ង់នៃ w ។
- III. (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖
 ក. $I = \int_0^1 30(x^2 - 1)^2 dx$ ខ. $J = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx$
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមួយមានឃ្លីតណាមួយចំនួន២ ឃ្លីតណាមួយចំនួន៤ និងឃ្លីតណាមួយចំនួន៤។ គេចាប់យកឃ្លីត ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
 A : ឃ្លីតទាំង៣មានពណ៌ក្រហម។ B : យ៉ាងតិចមានឃ្លីតពីរមានពណ៌ខៀវ។ C : ឃ្លីតទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' - 3y = 2 \cos 3x$ ។
 ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E') : y' - 3y = 0$ ។
 ខ. កំណត់តម្លៃ a, b ដើម្បីឱ្យ $f(x) = a \cos 3x + b \sin 3x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(-1, 0)$ និងចំណុចកំពូលពីរមាន កូអរដោនេ $(-3, 0)$ និង $(3, 0)$ ។ សង់អេលីបនេះ ។
- VII. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេមានចំណុច $A(0, 0, 1); B(-1, -2, 0)$ និង $C(2, 1, -1)$ ។
 ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចបង្ហាញថា A, B, C តែមិនត្រង់ជួរ ។
 ខ. សរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
- VIII. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។
 ១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ (ដោយដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
 ២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ។
 ៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$ ។
 ៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។
 ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ ។ សង់ Δ និង ក្រាប C ។

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 13}{9 - x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 13}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) + (x+4)}{-(x-3)(x+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)}{-(x+3)} = \frac{3+4}{-3-3} = -\frac{7}{6}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 13}{9 - x^2} = -\frac{7}{6}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)(e^{2x} + e^{-2x})}{3x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)(e^{2x} + e^{-2x})}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \times 3(e^{2x} + e^{-2x})$
 $= 1 \times 3(e^0 + e^0) = 6$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)(e^{2x} + e^{-2x})}{3x^2} = 6$

គ. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

1. ករណី $x \rightarrow +\infty$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$
 $= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$

2. ករណី $x \rightarrow -\infty$
គេបាន $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

II. គេមាន $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

គេបាន $z_1 \times z_2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$
 $= \sqrt{12} - 2i + \sqrt{12}i + 2$
 $= (2\sqrt{3} + 2) + (2\sqrt{3} - 2)i$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{12}+2i+\sqrt{12}i-2}{\sqrt{6^2}+\sqrt{2^2}} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}-2)}{8} + \frac{(2+2\sqrt{3})}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i\end{aligned}$$

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z_1 &= \sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } z_2 &= \sqrt{6}-i\sqrt{2} \\ &= 2(\sqrt{23}-i) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{នៅ: } z &= z_1 \times z_2 \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) \times 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2(\sqrt{23}-i) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ទាញកេតន៍ប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } z &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ z &= (2\sqrt{3}+2) + (2\sqrt{3}-2)i \\ 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) &= (2\sqrt{3}+2) + (2\sqrt{3}-2)i\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ និង } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

គ. រកម៉ូឌុល និងអាក្រក់នៃ w

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } w &= (z_1 \times z_2)^2 \\ &= [4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})]^2 \\ &= (4\sqrt{2})^2 (\cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12}) \\ &= 32(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \text{ម៉ូឌុល } r = 32 \text{ និង អាក្រក់ } w = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } I &= \int_0^1 30(x^2 - 1)^2 dx \\ &= \int_0^1 30(x^4 - 2x^2 + 1) dx \\ &= \int_0^1 (30x^4 - 60x^2 + 30) dx \\ &= [\frac{30x^5}{5} - \frac{60x^3}{3} + 30x]_0^1 \\ &= [6x^5 - 20x^3 + 30x]_0^1 \\ &= (6 - 20 + 30) - (0 - 0 + 0) \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \int_0^1 30(x^2 - 1)^2 dx = 16$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } J &= \int_0^{\ln 2} (\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x}) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx \\ &= [x]_0^{\ln 2} = \ln 2 - 0 = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx$$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A

ព្រឹត្តិការណ៍ A : ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហមនាំឱ្យ $n(S) = C(10, 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{10!}{(7!3!)} \\ &= \frac{7!8 \cdot 9 \cdot 4}{7!1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \times 3 \times 10 = 120 \end{aligned}$$

$$n(A) = C(4, 3)$$

$$= \frac{4!}{(1!3!)} = 4$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{30}}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B

$$\begin{aligned} \text{ព្រឹត្តិការណ៍ } B : \text{យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរមានពណ៌ខៀវ} \quad n(B) &= C(4, 2) \times C(6, 1) + C(4, 3) \\ &= \frac{4!}{2! \times 2!} \times 6 + 4 = 40 \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{1}{3}}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C

$$\text{ព្រឹត្តិការណ៍ } C : \text{ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា} \quad n(C) = C(2, 1)C(4, 1)C(4, 1) = 2 \times 4 \times 4 = 32$$

$$\text{គេបាន ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ } P(C) \quad p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{4}{15}}$$

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' - 3y = 2 \cos 3x$

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E')

$$\text{មានសមីការ } y' - 3y = 0$$

$$\text{សមីការរាង } y' - ay = 0 \text{ ដែល } a = -3$$

$$\text{គេបានចម្លើយទូទៅ: } y = Ae^{-ax} = Ae^{3x}, A \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅគឺ } \boxed{y = Ae^{3x} \text{ ដែល } A \in \mathbb{R}}$$

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b ដើម្បីឱ្យ $f(x) = a \cos 3x + b \sin 3x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

f ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) កាលណា

$$f'(x) - 3f(x) = 2 \cos 3x$$

$$\text{ដោយ } f(x) = a \cos 3x + b \sin 3x$$

$$f'(x) = -3a \sin 3x + 3b \cos 3x$$

គេបាន

$$-3a \cos 3x + 3b \sin 3x - 3(a \cos 3x + b \sin 3x) = 2 \cos 3x$$

$$-3a \cos 3x + 3b \sin 3x - 3a \cos 3x - 3b \sin 3x = 2 \cos 3x$$

$$(-3a - 3b) \sin 3x + (-3a + 3b) \cos 3x = 2 \cos 3x$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} -3a - 3b = 0 \\ 3a + 3b = 2 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } (E) : y = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \text{ ដែល } a, b \in \mathbb{R}}$$

គ. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

គេមានកំណុំ $F_1(-1,0)$ និងកំពូល $V_1(-3,0)$ និង $V_2(3,0)$

ដោយពី V_1 ទៅ V_2 មានការប្រែប្រួលអ័ក្សអាប៉ូស៊ីសនោះអេលីបមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក

មានសមីការស្តង់ដារ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = x_{V2} - x_{V1} = 3 - (-3) = 6$ នាំឲ្យ $a = \frac{6}{2} = 3$

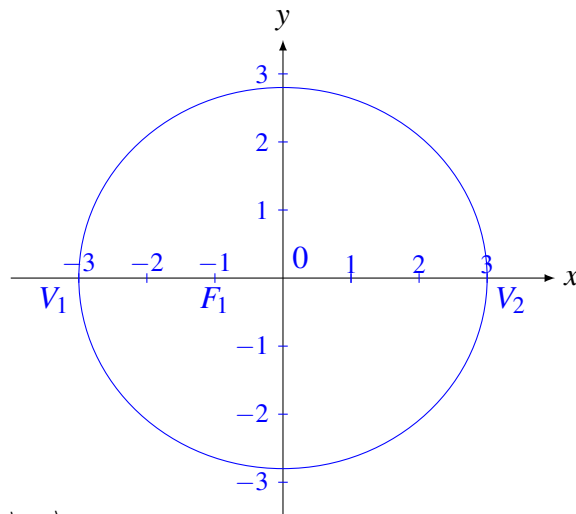
កំពូល $V_1(h-a, k)$ និង $V_1(-3,0)$ សមមូល $h-a = -3$ នាំឲ្យ $h = -3 + a = -3 + 3 = 0$ និង $k = 0$

និង កំណុំ $F_1(-1,0)$ និង $F_1(h-c, k)$ សមមូល $h-c = -1$ នាំឲ្យ $c = h+1 = 1$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2$ នាំឲ្យ $b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

សង់អេលីប



VI. នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,0,1); B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

ដោយ $\vec{AB} = (-1-0, -2-0, 0-1) = (-1, -2, -1)$

$\vec{AC} = (2+1, 1+2, -1-0) = (3, 3, -1)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2+3) \vec{i} - (1+3) \vec{j} + (-3+6) \vec{k} \\ &= 5 \vec{i} - 4 \vec{j} + 3 \vec{k} \end{aligned}$$

ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq 0$ នោះ A, B, C រត់មិនត្រង់ជួរ ។

2. សរសេរសមីការប្លង់ ABC

គេបាន $(ABC) : 5(x-0) - 4(y-0) + 3(z-1) = 0$

ដូច្នេះ សមីការប្លង់ $(ABC) : 5x - 4y + 3z - 3 = 0$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } S_{\triangle ABC} &= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}\end{aligned}$$

VII. គេមានក្រាប (C) ដែល $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (ដោយដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } f(x) &= x + 1 - \frac{\ln x}{x} \text{ នាំឲ្យ } f'(x) = 1 + 0 - \frac{(\ln x)'x - x' \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - \frac{1}{x} \cdot x + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}}$$

៣. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2 > 0$ ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $x^2 + \ln x - 1$

$$\text{ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A គេបាន } \begin{cases} f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ } x = 1 \\ f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ } x > 1 \\ f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ } 0 < x < 1 \end{cases}$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = 1$ នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1^2 + 1 - \frac{\ln 1}{1} = 2$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\Delta : y = x + 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ ដោយ $f(x) - y = -\frac{\ln x}{x}$ ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} > 0 \text{ សមមូល } \ln x < 0$$

$$\ln x < \ln 1$$

$$0 < x < 1$$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} < 0 \text{ សមមូល } \ln x > 0$$

$$\ln x > \ln 1$$

$$x > 1$$

$$\text{បើ } -\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ សមមូល } \ln x = 0$$

$$\ln x = \ln 1$$

$$x = 1 \text{ នាំឲ្យ } f(1) = 2$$

ចំពោះ $0 < x < 1$ នោះក្រាប C នៅខាងលើបន្ទាត់ Δ

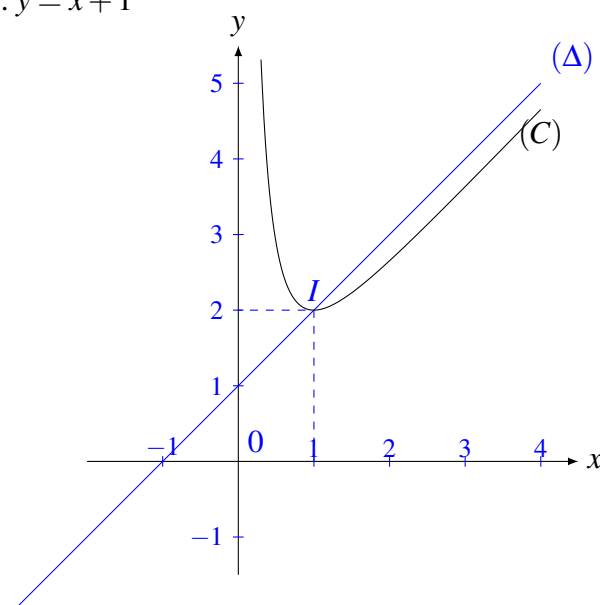
ដូចនេះ: ចំពោះ $x > 1$ នោះក្រាប C នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ Δ

ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ Δ គឺ $I(1, 2)$

សង់ Δ និង ក្រាប C

តារាងតម្លៃលេខ $(\Delta) : y = x + 1$

x	0	1
y	1	2



មណ្ឌលប្រឡង -----
 លេខបន្ទប់: ----- លេខតុ -----
 ឈ្មោះបេក្ខជន: -----
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន: -----

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ប៊ែត វ៉ានុប

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

ខ. $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^2 x + 4\cos x - 3}{2\cos x - 1}$

គ. $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^3 - x^2 \sin x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

ខ. $J = \int_0^2 |x-1| dx$

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ និង $z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ ។

ក. គណនា $z = \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ z_1 និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2 ។

ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{12}$ និង $\sin \frac{\pi}{12}$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូលពណ៌ក្រហម ៣ និងពណ៌ស ៥ ។ ក្មេងប្រុសពីរនាក់ សុខ និង សៅបានទាញយកប៊ូលមួយម្តងម្នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលសុខទាញបានប៊ូលពណ៌ក្រហមហើយសៅទាញបានប៊ូលស តាមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. សុខដាក់ប៊ូលទៅវិញមុនពេលសៅទាញយក ។

ខ. សុខមិនដាក់ប៊ូលទៅវិញមុនពេលសៅទាញយក ។

V. 1. (៤០ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 3, 2); B(3, 1, 4)$ និង $C(0, 2, 4)$ ។

ក. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ ទាញថា A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាម A ស្របនឹង \vec{AB} ។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង (d) នឹងប្លង់ $(P): x + y + z - 2 = 0$ ។

2. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃ (E) ដើម្បីឱ្យក្រាបរាងទៅនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = -3x$ ត្រង់គល់តម្រុយ ។

3. ចូរសរសេរសមីការអេលីប $(E): x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$ ជាទម្រង់ស្តង់ដាររួចរក ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និង សង់អេលីប (E) ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $(0; +\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x}$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

1. គណនា $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ទាញថា C មានអាស៊ីមតូតឈរ ។

2. បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{2+x^2-\ln x}{x^2}$ ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើគេដឹងថា $2+x^2-\ln x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0; +\infty)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. បង្ហាញថា $(\Delta): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ខាង $+\infty$ ។

4. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង C និង Δ ។ សង់ខ្សែកោង C ។

5. គណនាផ្ទៃក្រលា S ដែលខណ្ឌដោយ C និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[1; e]$

ជំនេរគ្រឹះ

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = 1 - x$ គេបាន $x = 1 - t$

បើ $x \rightarrow 1$ នោះ $t \rightarrow 0$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-t)^2}{\sin[\pi(1-t)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-2t+t^2)}{\sin(\pi - \pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2t - t^2}{\sin(\pi t)}$$

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - t^2}{\sin(\pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(2-t)}{\sin(\pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi t}{\sin(\pi t)} \times \frac{(2-t)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $A = \frac{2}{\pi}$

ខ. $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^2 x + 4\cos x - 3}{2\cos x - 1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x(2\cos x - 1) + 3(2\cos x - 1)}{2\cos x - 1}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2\cos x - 1)(2\cos x + 3)}{2\cos x - 1}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2\cos x + 3) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$$

ដូចនេះ $B = 4$

គ. $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^3 - x^2 \sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x^2 + x \sin x + \sin^2 x)}{x^2(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x \sin x + \sin^2 x)}{x^2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x \sin x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\sin x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = 1 + 1 + 1 = 3$$

ដូចនេះ $C = 3$

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

គេបាន $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = [\tan x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = (\sqrt{3} - 1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ខ. $J = \int_0^2 |x-1|xdx$

បើ $x-1=0$ នោះ $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

គេបាន $|x-1|=x-1$ បើ $x \geq 1$

$|x-1|=-(x-1)=-x+1$ បើ $x \leq 1$

$$J = \int_0^2 |x-1|xdx = \int_0^1 |x-1|xdx + \int_1^2 |x-1|xdx$$

$$J = \int_0^1 (-x+1)xdx + \int_1^2 (x-1)xdx = \int_0^1 (-x^2+x)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx$$

$$J = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$J = \frac{1}{6} + \left[\left(\frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{1}{6} \right) \right] = \frac{1+4+1}{6} = 1$$

ដូចនេះ: $J = 1$

III. ក. គណនា $z = \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ និង $z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$

$$z = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i} = \frac{2(\sqrt{3} + i) [(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})i]}{[(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i] [(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})i]}$$

$$z = \frac{2[(\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} + i)(1 - \sqrt{3})i]}{(1 + \sqrt{3})^2 - [(1 - \sqrt{3})i]^2}$$

$$z = \frac{2[(\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + i + i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{3}^2 + i - i\sqrt{3})i]}{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \frac{8 + 8i}{8} = 1 + i$$

ដូចនេះ: $z = 1 + i$

ខ. សរសេរ z_1 និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

តាម $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$\text{ដោយ } z_1 = 2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ដូចនេះ: $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) ; z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

- រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2

$$\text{គេមាន } z = \frac{z_1}{z_2} \text{ នោះ } z_2 = \frac{z_1}{z}$$

$$\text{តាម } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$\text{ដោយ } z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) ; z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{គេបាន } z_2 = \frac{z_1}{z} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{6} - \frac{3\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{6} - \frac{3\pi}{12} \right) \right]$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$\text{ដូចនេះ } z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]$$

- ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{\pi}{12}$ និង $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\text{គេមាន } z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) - i 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \text{ ហើយ } z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = (1 + \sqrt{3}) \\ -2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = (1 - \sqrt{3}) \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{(1 - \sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} ; \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

IV. រកប្រូបាបដែលសុខទាញបានប៊ូលពណ៌ក្រហមហើយសៅទាញបានប៊ូលស តាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍សុខទាញបានប៊ូលក្រហម

B ជាព្រឹត្តិការណ៍សៅទាញបានប៊ូលស

ក. សុខដាក់ប៊ូលទៅវិញមុនពេលសៅទាញយក

$$\text{តាម } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{ដោយ } P(A) = \frac{3}{8} \text{ និង } P(B) = \frac{5}{8}$$

$$\text{គេបាន } P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A \cap B) = \frac{15}{64}$$

ខ. សុខមិនដាក់ប៊ូលទៅវិញមុនពេលសៅទាញយក

$$\text{តាម } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$\text{ដោយ } P(A) = \frac{3}{8} \text{ និង } P(B/A) = \frac{5}{7}$$

$$\text{គេបាន } P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A \cap B) = \frac{15}{56}$$

V. 1. ក. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមាន $A(1,3,2)$; $B(3,1,4)$ និង $C(0,2,4)$

នោះ $\vec{AB} = (2, -2, 2)$ និង $\vec{AC} = (-1, -1, 2)$

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{n} = (-4+2)\vec{i} - (4+2)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\vec{n} = (-2, -6, -4)}$$

• ទាញថា A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

$$\text{ដោយ } \vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -6, -4) \neq 0$$

ដូចនេះ: $A ; B ; C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

• គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned} \text{តាម } S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2(1^2 + 3^2 + 2^2)} \\ &= \sqrt{14} \text{ ឯកតាផ្ទៃ} \end{aligned}$$

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

$$\text{តាម } (ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ប្លង់ (ABC) កាត់តាម $C(0,2,4)$

ហើយមាន $\vec{n} = (-2, -6, -4)$ ជារ៉ឺឌ័រទំលាក់ម៉ាស់

$$\text{គេបាន } (ABC) : -2(x - 0) - 6(y - 2) - 4(z - 4) = 0$$

$$(ABC) : -2x - 6y + 12 - 4z + 16 = 0$$

$$(ABC) : x + 3y + 2z - 14 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការប្លង់ } \boxed{(ABC) : x + 3y + 2z - 14 = 0}$$

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d)

$$\text{តាម } (d) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

បន្ទាត់ (d) កាត់តាម $A(1,3,2)$ ហើយមាន $\vec{AB} = (2, -2, 2)$ ជារ៉ឺឌ័រទំលាក់ម៉ាស់

$$\text{ដូចនេះ: } (d) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2t + 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

• រកចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P) : $x + y + z - 2 = 0$

យក (d) ជំនួស (P) គេបាន $(2t+1) + (-2t+3) + (2t+2) - 2 = 0$

$$2t+1-2t+3+2t+2-2=0$$

$$2t = -4 \text{ នោះ } t = -2$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x = 2(-2) + 1 = -3 \\ y = -2(-2) + 3 = 7 \\ z = 2(-2) + 2 = -2 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P) គឺ $(-3, 7, -2)$

2. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 0 \text{ សមីការសម្គាល់ } r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\text{មានរាង } a + b + c = 0 \text{ ព្រោះ } 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\text{គេបាន } r_1 = 1 \text{ និង } r_2 = \frac{c}{a} = 2$$

$$\text{នោះ } y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} ; A, B \in \mathbb{R} \text{ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)}$$

$$\text{ដូចនេះ } y = Ae^x + Be^{2x} ; A, B \in \mathbb{R} \text{ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)}$$

ខ. កំណត់ចម្លើយ f នៃសមីការ (E)

$$\text{បំរាប់៖ ក្រាបនៃ } f \text{ ប៉ះបន្ទាត់ } (\Delta) : y = -3x \text{ ត្រង់គល់តម្រុយ}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases} \text{ ដោយ } f(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

$$\text{គេមាន } f(0) = A + B \text{ នោះ } A + B = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} \text{ នោះ } f'(0) = A + 2B$$

$$\text{គេបាន } A + 2B = -3 \quad (2)$$

$$\text{យក } (2) - (1) \text{ គេបាន } A = 3 \text{ និង } B = -3$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = 3e^x - 3e^{2x} \text{ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)}$$

3. សរសេរសមីការអេលីប (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដា

$$\text{គេមាន } (E) : x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$(E) : x^2 + 4x + 4 + 4(y^2 - 2y) = 0$$

$$(E) : (x+2)^2 + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = 0$$

$$(E) : (x+2)^2 + 4[(y-1)^2 - 1] = 0$$

$$(E) : (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 4$$

$$(E) : \frac{(x+2)^2}{2^2} + (y-1)^2 = 1$$

• រកផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប (E)

$$(E) : \frac{(x+2)^2}{2^2} + (y-1)^2 = 1 \text{ ជាសមីការស្តង់ដាអេលីបមានអ័ក្សជ័រស្រប } (x'x)$$

$$\text{រាង } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ដែល } h = -2 ; k = 1 ; a = 2 \text{ និង } b = 1$$

$$\text{ផ្ចិត } I(h, k) = I(-2, 1)$$

$$\text{កំពូលអ័ក្សធំ } V_1(h-a, k) = V_1(-4, 1)$$

$$V_2(h+a, k) = V_2(0, 1)$$

តាមទំនាក់ទំនង $a^2 = b^2 + c^2$ នាំឱ្យ $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2$ នោះ $c = \sqrt{3}$

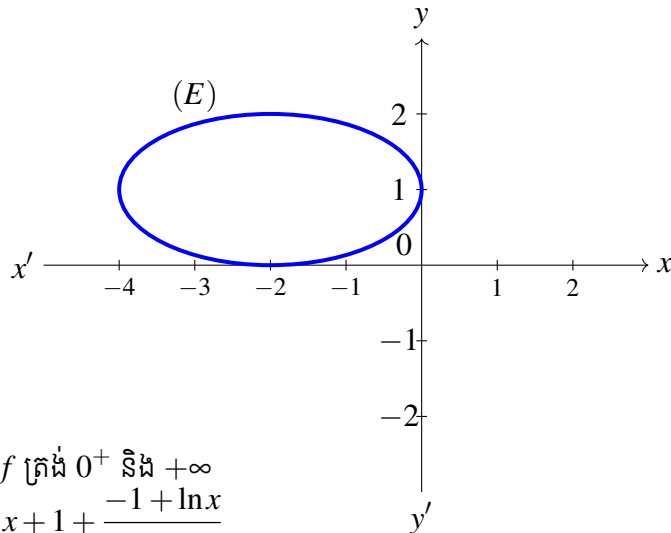
កំណុំ $F_1(h-c, k) = F_1(-2-\sqrt{3}, 1)$

$$F_2(h+c, k) = F_2(-2+\sqrt{3}, 1)$$

ដូចនេះ ផ្ចិត $I(-2, 1)$ កំពូល $V_1(-4, 1)$; $V_2(0, 1)$

កំណុំ $F_1(-2-\sqrt{3}, 1)$; $F_2(-2+\sqrt{3}, 1)$

- សង់ក្រាប



VI. 1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

គេមាន $f(x) = x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + 1 + \frac{\ln x \left(\frac{-1}{\ln x} + 1 \right)}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + 1 + \frac{\ln x}{x} \left(\frac{-1}{\ln x} + 1 \right) \right] = -\infty$$

ព្រោះ $x \rightarrow 0^+$ នោះ $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ និង $\ln x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

ព្រោះ $x \rightarrow +\infty$ នោះ $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ នោះ $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដូចនេះ: $\boxed{x = 0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

2. បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{2+x^2-\ln x}{x^2}$

គេមាន $f(x) = x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x}$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 1 + \left(\frac{-1 + \ln x}{x} \right)' = 1 + \frac{(-1 + \ln x)'x - (x)'(-1 + \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}x - (-1 + \ln x)}{x^2} = 1 + \frac{1 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = \frac{x^2 + 2 - \ln x}{x^2}}$$

- ទាញរកសញ្ញា $f'(x)$

$$\text{ដោយ } f'(x) = \frac{x^2 + 2 - \ln x}{x^2}$$

គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ គេមាន $x^2 > 0$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(2 + x^2 - \ln x)$

បម្រាប់: គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ គេដឹងថា $2 + x^2 - \ln x > 0$

នោះ $f'(x) = \frac{2 + x^2 - \ln x}{x^2} > 0$ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$

ដូចនេះ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$

- សង់តារាងអថេរភាព

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- បង្ហាញថា បន្ទាត់ $\Delta : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

បើ $\Delta : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ កាលណា $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\text{គេមាន } f(x) - y = \left(x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x} \right) - (x + 1) = \frac{-1 + \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ ពិត}$$

ព្រោះ $x \rightarrow +\infty$ នោះ $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$

ដូចនេះ $\Delta : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

- សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ Δ

គេមាន $C : f(x) = x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x}$ និង $\Delta : y = x + 1$

$$f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x}$$

$$f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x}$$

ចំពោះ $x > 0$ គេបាន $f(x) - y$ មានសញ្ញាដូច $(-1 + \ln x)$

បើ $f(x) - y = 0$ គេបាន $-1 + \ln x = 0$ នោះ $x = e$

បើ $f(x) - y > 0$ គេបាន $-1 + \ln x > 0$ នោះ $x > e$

បើ $f(x) - y < 0$ គេបាន $-1 + \ln x < 0$ នោះ $x < e$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+

ដូចនេះ ក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ Δ ចំពោះ $x \in (0, e)$

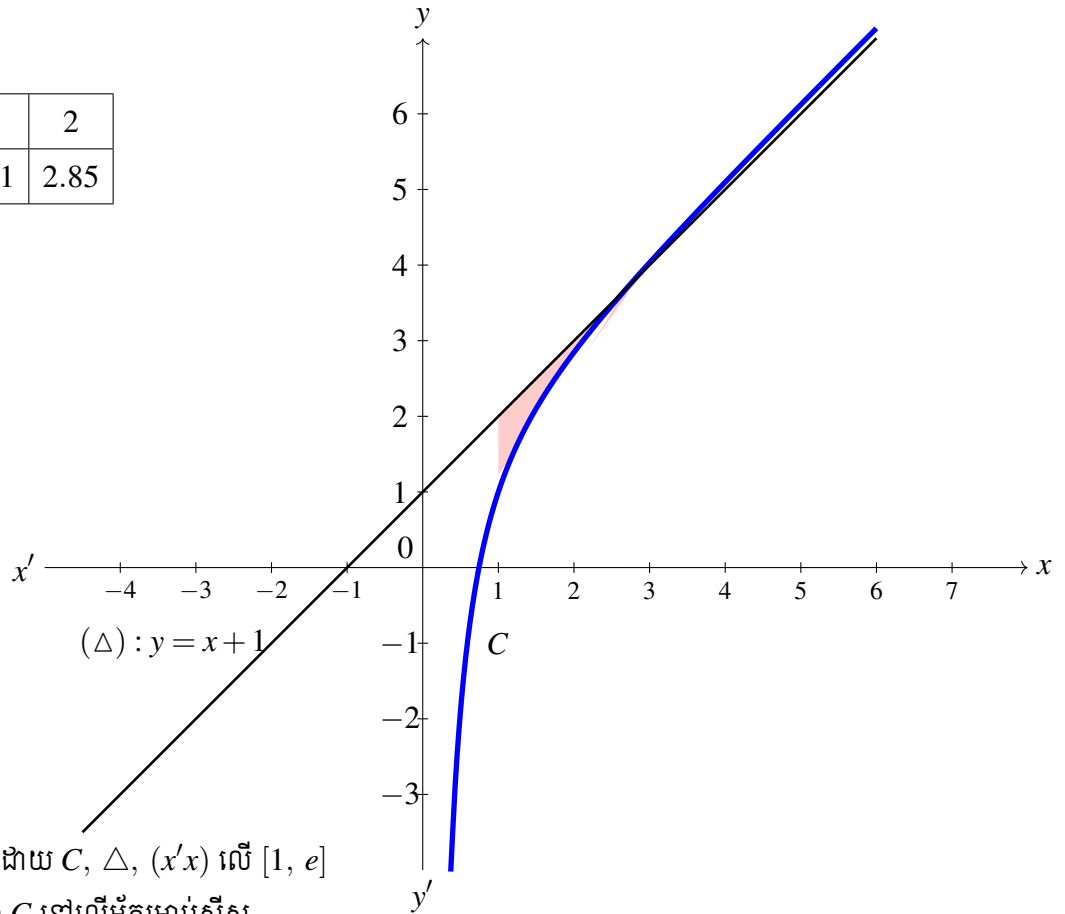
ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ Δ ត្រង់ $x = e$

ក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ Δ ចំពោះ $x \in (e, +\infty)$

- សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃ

x	1	e	2
$f(x)$	1	$e+1$	2.85



VII. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ខណ្ឌដោយ C , Δ , $(x'x)$ លើ $[1, e]$

គ្រប់ $x \in [1, e]$ ខ្សែកោង C នៅលើអ័ក្សអាប៉ូស៊ីត

$$\text{គេបាន } S = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x + 1 + \frac{-1 + \ln x}{x} \right) dx$$

$$S = \int_1^e x dx + \int_1^e dx - \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$S = \int_1^e x dx + \int_1^e dx - \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \ln x d(\ln x)$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e + [x]_1^e - [\ln |x|]_1^e + \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$S = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + (e - 1) - [\ln e - \ln 1] + \left[\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \right]$$

$$S = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + e - 1 - 1 + \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $S = \frac{e^2}{2} + e - 2$ ឯកតាផ្ទៃ

មណ្ឌលប្រឡង.....
 លេខបន្ទប់:..... លេខតុ.....
 ឈ្មោះបេក្ខជន:.....
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន:.....

វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ស៊ីង សំរេច

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតដូចខាងក្រោម
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{2x} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលដូចខាងក្រោម
- $A = \int (x^2 + 1)^2 dx$
 - $B = \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx$
 - គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$ ។ គណនា $K = \int_1^2 f(x) dx$ ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - y' - 2y' = 4x - 1$ ។
- ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - y' - 2y = 0$
 - រកចម្លើយពិសេសមួយទៀតនៃសមីការ (E) កំណត់តាងដោយ $y_p = ax + b$ ដែល a, b ជាចំនួនពិត ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលចំនួន 12 គ្រាប់ក្នុងនោះមានមូលពណ៌សចំនួន 5 ពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និងមូលពណ៌ខៀវចំនួន 3 ។ គេចាប់យកមូល 3 គ្រាប់ចេញពីចុងនោះដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍
- A : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌ក្រហម
 - B : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌ស
 - C : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខៀវយ៉ាងតិច 2
- V. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូល $(P) : (y^2 - 2y + 2) = 4x - 2$
- រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P)
 - រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) និងកូអរដោនេកំណុំ F នៃប៉ារ៉ាបូល P
 - ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0, 1, 1), B(1, 2, 2), C(0, 3, -4)$ និង $D(-2, 1, 0)$ ។ រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និងកម្រិតវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D និងរកផ្ទៃក្រឡាប្រសព្វត្រីកោណនេះ។
- VI. (៤០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \left(\frac{2}{x} \right)^2 \ln(x)$ ។ យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់ f
- គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។
 - គណនា $f'(x)$ រួចរកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ f និង សង់តាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
 - រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_0 = 1$
 - គណនា $f(2)$ និង $f(4)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
 - គណនាផ្ទៃក្រឡា S ផ្នែកនៃប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប៊ីស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 4$ ។

ជំនេរស្រាយ

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតដូចខាងក្រោម

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{2x} \right) & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \frac{1}{2} \times 3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{2x} \right) = \frac{3}{2}} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) = 0} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) & \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6} \text{ ។}$$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលដូចខាងក្រោម

$$\begin{aligned} 1. A &= \int (x^2 + 1)^2 dx \\ &= \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + c \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{A = \int (x^2 + 1)^2 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + c} \text{ ដែល } c \text{ ជាចំនួនថេរ ។}$$

$$\begin{aligned} 2. B &= \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \\ \text{តាង } t &= e^x - 1 \text{ នោះ } dt = e^x dx \\ \text{គេបាន } B &= \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \\ &= \int t dt = \frac{t^2}{2} + c \\ \text{ប៉ុន្តែ } t &\rightarrow (e^x - 1) \end{aligned}$$

$$B = \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx = \frac{(e^x - 1)^2}{2} + c$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{B = \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx = \frac{(e^x - 1)^2}{2} + c} \text{ ដែល } c \text{ ជាចំនួនថេរ ។}$$

3. គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$

របៀបទី១

បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$ ។

យើងមាន $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$

$$f(x) = \frac{2(x)(2x-1)}{4(2x-1)} + \frac{(2x-1)}{4(2x-1)} - \frac{3}{4(2x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2x(2x-1) + (2x-1) - 3}{4(2x-1)}$$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 2x - 1 - 3}{4(2x-1)}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{4(2x-1)} = \frac{x^2 - 1}{2x-1}$ ពិត ។

របៀបទី២

បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$ ។

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x-1}$

$$f(x) = \frac{2x(2x-1) + (2x-1) - 3}{4(2x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2x(2x-1)}{4(2x-1)} + \frac{(2x-1)}{4(2x-1)} - \frac{3}{4(2x-1)}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$ ពិត ។

គណនា $K = \int_1^2 f(x)dx$

យើងមាន $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$

$$K = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \ln|2x-1| \right]_1^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 5 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \ln 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \ln 5 - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{3}{8} \ln 5$$

ដូចនេះ $K = \int_1^2 f(x)dx = 1 - \frac{3}{8} \ln 5$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - y' - 2y = 4x - 1$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - y' - 2y = 0$

តាមសមីការសម្គាល់ : $r^2 - r - 2 = 0$

$$r^2 - 2r + r - 2 = 0$$

$$r(r-2) + (r-2) = 0$$

$$(r-2)(r+1) = 0 \text{ សមមូល } r_1 = -1 \text{ ឬ } r_2 = 2 \text{ ។}$$

បើសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា មានន័យថា $(r_1 \neq r_2)$ នោះចម្លើយនៃសមីការគឺ

$$y_c = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$y_c = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

ដូចនេះ $y_c = Ae^{-x} + Be^{2x}$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ ។

2. រកចម្លើយពិសេសមួយទៀតនៃសមីការ (E) កំណត់តាងដោយ $y_p = ax + b$ ដែល a, b ជាចំនួនពិត ។

$$\text{យើងមាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } (E) : y'' - y' - 2y' = 4x - 1$$

$$\text{តាង } y_p = ax + b \text{ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ } (E)$$

$$\text{នោះគេបាន } y'_p = a$$

$$y''_p = 0$$

យើងនឹងយក y_p, y'_p និង y''_p ជំនួសចូលសមីការ (E)

$$\text{គេបាន } 0 - a - 2(ax + b) = 4x - 1$$

$$-a - 2ax - 2b = 4x - 1$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} -a - 2b = -1(1) \\ -2a = 4(2) \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } y_p = ax + b = -2x + \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } y_p = -2x + \frac{3}{2} \text{ ។}$$

- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមនុស្សមានចំនួន 12 គ្រាប់ក្នុងនោះមានចំណាស់ចំនួន 5 ពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និងចំណាស់ខៀវចំនួន 3 ។

គេចាប់យកចំណាស់ 3 គ្រាប់ចេញពីចំណាស់នោះដោយចៃដន្យ ។

រកករណីអាច $n(s)$

$$n(s) = C(12, 3) = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 220 \text{ ករណី}$$

ដូចនេះ ករណីអាច $n(s) = 220$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

1. A : ចំណាស់ដែលចាប់បានមានពណ៌ក្រហម

$$\text{រកករណីស្រប } n(A) = C(4, 3) = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{តាមប្រូបាបនៃ } P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$$

$$P(A) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55} \text{ ។}$$

2. B : ចំណាស់ដែលចាប់បានមានពណ៌ស

$$\text{រកករណីស្រប } n(B) = C(5, 3) = \frac{5! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\text{តាមប្រូបាបនៃ } P(B) = \frac{n(B)}{n(s)}$$

$$P(B) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{1}{22}} \text{ ។}$$

3. C : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខៀវយ៉ាងតិច 2

$$\text{រកករណីស្រប } n(C) = C(3, 2) \times C(9, 1) + C(3, 3) \times C(9, 0)$$

$$n(C) = 3 \times 9 + 1 \times 1 = 28 \text{ ករណី}$$

$$\text{តាមប្រូបាបនៃ } P(C) = \frac{n(C)}{n(s)}$$

$$P(C) = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{7}{55}} \text{ ។}$$

V. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូល $(P) : (y^2 - 2y + 2) = 4x - 2$

1. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P)

$$\text{យើងមាន សមីការប៉ារ៉ាបូល } (P) : (y^2 - 2y + 2) = 4x - 2$$

$$(P) : y^2 - 2y + 1 = 4x - 2 - 1$$

$$(P) : (y - 1)^2 = 4x - 3$$

ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សធ្នូជាអ័ក្សដេក $(x'ox)$

$$\text{សមីការស្តង់ដាររបស់ប៉ារ៉ាបូលមានរាង } (P) : (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(P) : (y - 1)^2 = 4(x - \frac{3}{4})} \text{ ។}$$

2. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) និងកូអរដោនេកំពូល កំណុំ F នៃប៉ារ៉ាបូល P

$$\text{យើងមានសមីការប៉ារ៉ាបូល } (P) : (y - 1)^2 = 4x - 3$$

$$\text{កំពូល } V(h, k) = (\frac{3}{4}, 1)$$

$$\text{កំណុំ } F(h + p, k) = (\frac{3}{4} + 1, 1) = (\frac{7}{4}, 1)$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } (\Delta) : x = h - p$$

$$\text{នោះគេបាន } (\Delta) : y = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{V(\frac{3}{4}, 1), F(\frac{7}{4}, 1), (\Delta) : y = -\frac{1}{4}} \text{ ។}$$

ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

គេមានចំណុច $A(0, 1, 1), B(1, 2, 2), C(0, 3, -4)$ និង $D(-2, 1, 0)$ ។

រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$

$$\text{តាម } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (1 - 0, 2 - 1, 2 - 1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 - 1, 3 - 2, -4 - 2) = (-1, 1, -6)$$

$$\overrightarrow{CD} = (0 - 1, 3 - 2, -4 - 2) = (-2, -2, 4)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, -6), \overrightarrow{CD} = (-2, -2, 4)} \text{ ។}$$

រកប្រវែងវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{38} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$|\vec{DC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{6} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

បង្ហាញថាត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។

ដើម្បីបង្ហាញថា BCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D

យើងនឹងបង្ហាញថា $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = 0$

$$\text{យើងមាន } \vec{DB} = (3, 1, 2), \vec{DC} = (2, 2, -4)$$

$$\text{គេបាន } \vec{DB} \cdot \vec{DC} = (3)(2) + (1)(2) + (2)(-4) = 8 - 8 = 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ ត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |\vec{DB} \times \vec{DC}|$$

$$\text{ដោយ } |\vec{DB} \times \vec{DC}| = ?$$

$$\begin{aligned} \vec{DB} \times \vec{DC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-4 - 4)\vec{i} - (-12 - 4)\vec{j} + (6 - 2)\vec{k} \\ &= (-8, 16, 4) \end{aligned}$$

$$\text{នោះគេបាន } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |\vec{DB} \times \vec{DC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-8)^2 + (16)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{21} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

ដូចនេះ $S_{\triangle BCD} = 2\sqrt{21}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

VI. (៤០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 \ln(x)$ ។ យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់ f

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

$$\text{យើងមាន } y = f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 \ln(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{x^2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\text{ពីព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ពីព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ បើ } x > \ln x \Rightarrow x^2 > \ln x$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

បើ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ នោះគេបាន $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

បើ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ នោះគេបាន $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដកនៃក្រាប (C) ។

2. គណនា $f'(x)$ រួចរកតម្លៃបរមាណៃអនុគមន៍ f និង សង្វេគតាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $y = f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - 2x \cdot (4 \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{4x - 8x \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{4x(1 - 2 \ln x)}{x \cdot x^3}$$

$$= \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$$

ដូចនេះ: $f'(x) = \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$ ។

រកតម្លៃបរមាណៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x) = \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$

ចំពោះ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$: $x^3 > 0$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយកគឺ $4(1 - 2 \ln x)$ ។

គេអោយ $f'(x) = 0$ នាំអោយ $4(1 - 2 \ln x) = 0$

$$2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

ចំពោះ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ បើ $x > \sqrt{e} \Rightarrow f'(x) < 0$

ចំពោះ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ បើ $x = \sqrt{e} \Rightarrow f'(x) = 0$

ចំពោះ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ បើ $x < \sqrt{e} \Rightarrow f'(x) > 0$

យើងសង្កេតឃើញថា គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ f' ប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)

នោះ f មានចំណុចអតិបរមាត្រង់ $x = \sqrt{e} \Rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e}$

តារាងអថេរនៃ f

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

3. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_o = 1$

យើងមាន $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2}$ ដែល $x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$$

បើ $x_o = 1$ នោះគេបាន $f'(1) = 4$ និង $f(1) = 0$

តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) : $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

គេបាន $(T) : y = 4(x - 1) + 0$

$(T) : y = 4x - 4$

ដូចនេះ $(T) : y = 4x - 4$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0 = 1$ ។

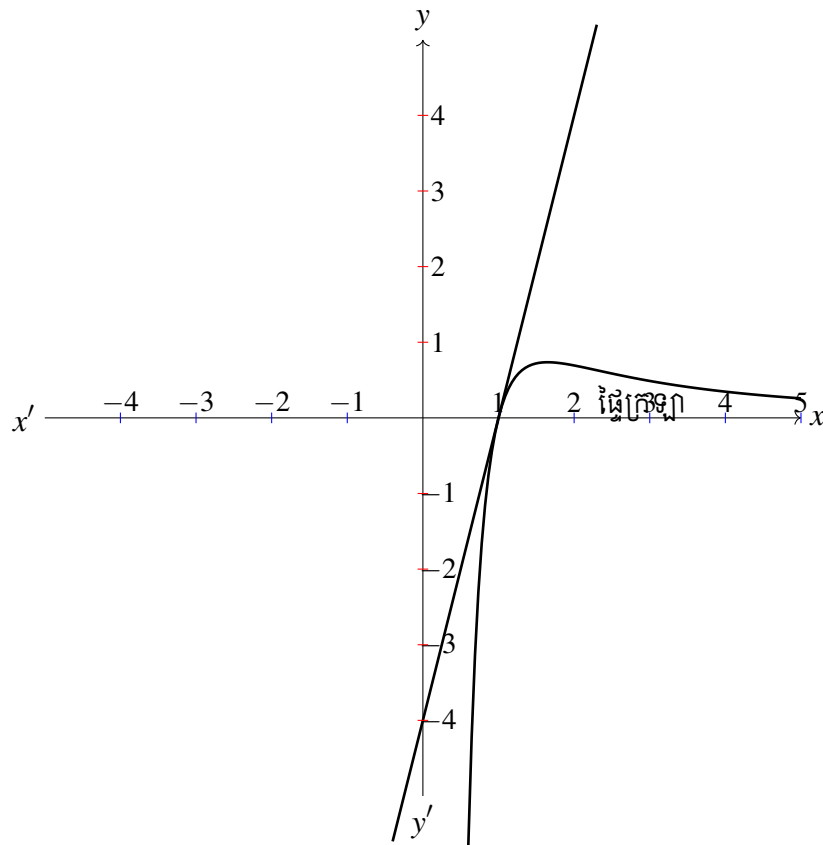
4. គណនា $f(2)$ និង $f(4)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

យើងមាន $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2}$ ដែល $x \in (0, +\infty)$

បើ $x = 2$ នោះ $f(2) = 0.7$

បើ $x = 4$ នោះ $f(4) = 0.35$

សង់ក្រាប ខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ (T)



5. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ផ្នែកនៃប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 4$

តាម $S = \int_1^4 f(x) dx$

$S = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{4 \ln x}{x^2} dx$

តាង $u = 4 \ln x$ នាំអោយ $du = \frac{4}{x} dx$, $dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int_1^4 \frac{4 \ln x}{x^2} dx$

$= \left[-\frac{4}{x} \cdot \ln x \right]_1^4 + 4 \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx$

$= -\ln 4 - 4 \left[\frac{1}{x} \right]_1^4 = -\ln 4$

ដូចនេះ $S = \int_1^4 f(x) dx = -2 \ln 2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

មណ្ឌលប្រឡង
 លេខបន្ទប់: _____ លេខតុ: _____
 ឈ្មោះបេក្ខជន: _____
 ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន: _____

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
 វិញ្ញាបន : គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)
 រយៈពេល : ១៥០នាទី
 ពិន្ទុ : ១២៥ រៀបរៀងដោយ: ល្ខើន សុល្លោក

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3}$

ខ. $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

គ. $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$

ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x} dx$

គ. $K = \int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx$

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង $z_2 = (1-i)x + (1-y)(1-i)$ ។

ក. គណនា z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងទម្រង់ពិជគណិត ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2z_1 - (z_2 + y - 1) = 0$ ។ (z_1 ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1) ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងបង់មួយមានប៊ូលក្រហម ៤ គ្រាប់ចុះលេខ ១, ២, ៣, ៤ និងប៊ូលខ្មៅ ៦ គ្រាប់ចុះលេខ ១, ២, ៣, ៤, ៥, ៦ ។ គេចាប់យកប៊ូល ២ គ្រាប់ ព្រមគ្នាចេញពីក្នុងបង់នោះដោយចៃដន្យ ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

ក. A : យកបានប៊ូលខ្មៅយ៉ាងតិច ១ គ្រាប់ ។

ខ. B : យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា។

គ. C : យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នានិងពណ៌ដូចគ្នា ។

ឃ. D : យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នានិងពណ៌ខុសគ្នា។

V. 1. (៤០ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវ៉ិចទ័រ $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(5, 5, -4)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (-2, -3, 6)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់នៃ (P) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ \vec{n} ។

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច O លើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេចំណុច H រួចទាញរក ចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P) ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 2y' = x^2 + 1$

3. ចូរសរសេរសមីការអ៊ីពែបូល $(H) : 9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$ ជាទម្រង់ស្តង់ដារ រួចរក ផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ៊ីបសង់ទ្រី ស៊ីតេ សមីការអាស៊ីមតូត និង សង់អ៊ីពែបូល (H) ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{mx^2 + 1}{x}$ ដែលមានក្រាប C_m ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = 1$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ។

គ. តើមានចំណុចនឹងដែលស្ថិតនៅលើក្រាប C_m ចំពោះ m ឬទេ ?

ឃ. ដោយប្រើក្រាប C_1 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ជំនាញគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } A &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} \\ &= \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} \\ &= \frac{-3(1) + 1 + 1}{3(-1) + 2(1) - 3} \\ &= \frac{-3 + 2}{-3 + 2 - 3} \\ &= \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $A = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 0}{2 + 0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $B = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{គ. } C &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0} \\ C &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1+0} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $C = \frac{1}{2}$

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } I &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1+3x^2)'}{1+3x^2} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln[(1+3x^2)] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \ln 4 = \frac{1}{3} \ln 2\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{1}{3} \ln 2}$$

$$\text{ខ. } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{គេបាន } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + \frac{\cos 2x + 1}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 2x}{7 + \cos 2x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos 2x)'}{7 + \cos 2x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(7 + \cos 2x)'}{7 + \cos 2x} dx \\ &= -[\ln |7 + \cos 2x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln 6 + \ln 8 = \ln \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = \ln \frac{4}{3}}$$

$$\text{គ. } K = \int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx$$

គេបាន

$$K = \int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx \text{ យើងអាចសរសេរ } \frac{x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-4} \text{ ដែល } a \text{ និង } b$$

ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់

$$\frac{x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-4}$$

$$\frac{x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{a(x-4) + b(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

ផ្អែមភាគយក គេបាន $x = a(x-4) + b(x-2)$

- យក $x = 2$ គេបាន $2 = -2a + 0$ នាំឱ្យ $a = -1$

- យក $x = 4$ គេបាន $4 = 0 + 2b$ នាំឱ្យ $b = 2$

នោះគេបាន

$$K = \int_6^8 \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-4} \right) dx = \int_6^8 \left(\frac{-(x-2)'}{x-2} + 2 \cdot \frac{(x-4)'}{x-4} \right)$$

$$= (-\ln |x-2| + 2 \ln |x-4|) \Big|_6^8$$

$$= (-\ln |6| + 2 \ln |4|) - (-\ln |4| + 2 \ln |2|)$$

$$= -\ln 6 + 3 \ln 4 - 2 \ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{K = -\ln 6 + 3 \ln 4 - 2 \ln 2}$$

III. ក. គណនា z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } z_1 &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^2}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{2 \left(\cos 2\frac{\pi}{2} + i \sin 2\frac{\pi}{2} \right)}{2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)} \\ &= \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}{\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $z_1 = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2\bar{z}_1 - (z_2 + y - 1) = 0$

$$2\bar{z}_1 = (z_2 + y - 1)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = (1 - i)x + (1 - y)(1 + i) + y - 1$$

$$\sqrt{3} + i = x + (-x - y + 1)i$$

ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែវាមានផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តស្មើគ្នា

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ -x - y + 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ: $x = \sqrt{3}$ និង $y = -\sqrt{3}$

IV. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. A : យកបានប៊ូលខ្មៅយ៉ាងតិច 1 គ្រាប់

យើងតាង A' ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកប៊ូល 2 បានប៊ូលពណ៌ក្រហមទាំង 2

នោះ A' និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ។

$$\text{គេបាន } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{n(A')}{n(S)}$$

• ចំនួនករណីអាច $n(S)$:

ប៊ូលសរុបមាន 10 ហើយចាប់យកប៊ូល 2 ព្រមគ្នានោះគេបានចំនួនករណីអាច

$$n(S) = C(10, 2) = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

• ចំនួនករណីស្រប $n(A') = C(4, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$

$$\text{នោះ } P(A) = 1 - \frac{6}{45} = \frac{39}{45} \approx 0.8667$$

ដូចនេះ $P(A) \approx 0.8667$

ខ. B : យកបានប៊ូលដែលចុះលេខខុសគ្នា ៖

យើងតាង B' ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកប៊ូល 2 បានប៊ូលចុះលេខដូចគ្នា 2

នោះ B' និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ។

យើងបាន $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{n(B')}{n(S)}$

ដោយប៊ូលចុះលេខដូចគ្នាមានតែ 4 គូនោះគេបានចំនួនករណីស្រប $n(B') = 4$

នោះ $P(B) = 1 - \frac{4}{45} = \frac{41}{45} \approx 0.9111$

ដូចនេះ $P(B) \approx 0.9111$

គ. C : យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា និងពណ៌ដូចគ្នា

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$

• ចំនួនករណីស្រប ៖

ដើម្បីចាប់យកប៊ូល 2 បានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា និងពណ៌ដូចគ្នាលុះត្រាតែប៊ូល 2 នេះចាប់យកពីក្នុងចំណោម

ប៊ូលក្រហមសុទ្ធឬប៊ូលខ្មៅសុទ្ធនោះចំនួនស្របគឺ

$n(A') = C(4, 2) + C(6, 2) = \frac{4!}{2!2!} + \frac{6!}{4!2!} = 6 + 15 = 21$

នោះ $P(C) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$

ដូចនេះ $P(C) \approx 0.4667$

ឃ. D : យកបានប៊ូលដែលចុះលេខខុសគ្នានិងពណ៌ខុសគ្នា ៖

យើងមាន D និង $(B \cup C)$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ។

គេបាន $P(D) = 1 - P(B \cup C) = 1 - P(B) - P(C) = 1 - \frac{4}{45} - \frac{21}{45} = \frac{4}{9}$

ដូចនេះ $P(D) = \frac{4}{9}$

V. 1. ក. សរសេរសមីការប្លង់នៃ (P)

តាមរូបមន្ត $(P) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

ដោយ $AB(5, 5, -4)$ និង $\vec{n} = (-2, -3, 6)$

គេបាន $(P) : -2(x - 5) - 3(y - 5) + 6(z + 4) = 0$

$: -2x - 3y + 6z + 49 = 0$

ដូចនេះ $(P) : -2x - 3y + 6z + 49 = 0$

ខ. គណនាកូអរដោណែនៃចំណុច H

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$

ដោយ $H \in (P)$ នោះ $-2x_H - 3y_H + 6z_H + 49 = 0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{OH} \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{OH} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = t \cdot \vec{n}$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_H = -2t \\ y_H = -3t \\ z_H = 6t \end{cases} \quad (2) \quad \Leftrightarrow -2(-2t) - 3(-3t) + 6(6t) + 49 = 0 \Rightarrow t = -1$$

ដូចនេះ: $H(2, 3, -6)$

• គណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P)

$$\text{គេបាន } d(O, (p)) = \|\vec{OH}\|$$

$$\text{នាំឱ្យ } d(O, (p)) = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

$$\text{ដូចនេះ: } d(O, (p)) = 7 \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 2y' = x^2 + 1$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' - 2y' = 0$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } r^2 - 2r = 0$$

$$r(r - 2) = 0$$

$$\text{គេបាន } r_1 = 0 \text{ និង } r_2 = 2$$

$$\text{នោះ } y_c = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = A + Be^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'' - 2y' = x^2 + 1$

$$\text{តាង } y_p = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y'_p = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y''_p = 6ax + 2b$$

$$y_p \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ } y'' - 2y' = x^2 + 1$$

$$\text{កាលណា } y''_p - 2y'_p = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (6ax + 2b) - 2(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -6ax^2 + (6a - 4b)x + (2b - 2c) = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2b - 2c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{6a}{4} = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2}(2b - 1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{នោះ } y_p = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{យើងបាន } y = y_c + y_p = A + Be^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ

$$y = A + Be^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x, \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

3. សរសេរសមីការអ៊ីពែបូល (H) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ

$$\text{គេមាន } (H) : 9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$$

$$: 9x^2 - 18x + 9 - 25y^2 - 100y - 100 = 316 + 9 - 100$$

$$: 9(x-1)^2 - 25(y+2)^2 = 225$$

$$: \frac{9(x-1)^2}{225} - \frac{25(y+2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$: \frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$: \frac{(x-1)^2}{5^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

• រក ផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (H)

$$\text{យើងមាន } (H) : \frac{(x-1)^2}{5^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1 \text{ មានអ័ក្សទទឹងដេក}$$

$$\text{មានទម្រង់ស្តង់ដារ: } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{។}$$

$$\text{គេបាន } h = 1, k = -2, a = 5, b = 3, c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

$$\text{នោះ: } -\text{ផ្ចិត: } I(h, k) = I(1, -2)$$

$$-\text{កំពូល: } V_1(h-a, k) = V_1(-4, -2) \text{ និង } V_2(h+a, k) = V_2(6, -2)$$

$$-\text{កំណុំ: } F_1(h-c, k) = F_1(1-\sqrt{34}, -2) \text{ និង } F_2(h+c, k) = F_2(1+\sqrt{34}, -2)$$

$$-\text{អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$-\text{សមីការអាស៊ីមតូត: } d_1 : y = k - \frac{b}{a}(x-h) = -2 - \frac{3}{5}(x-1) = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$$

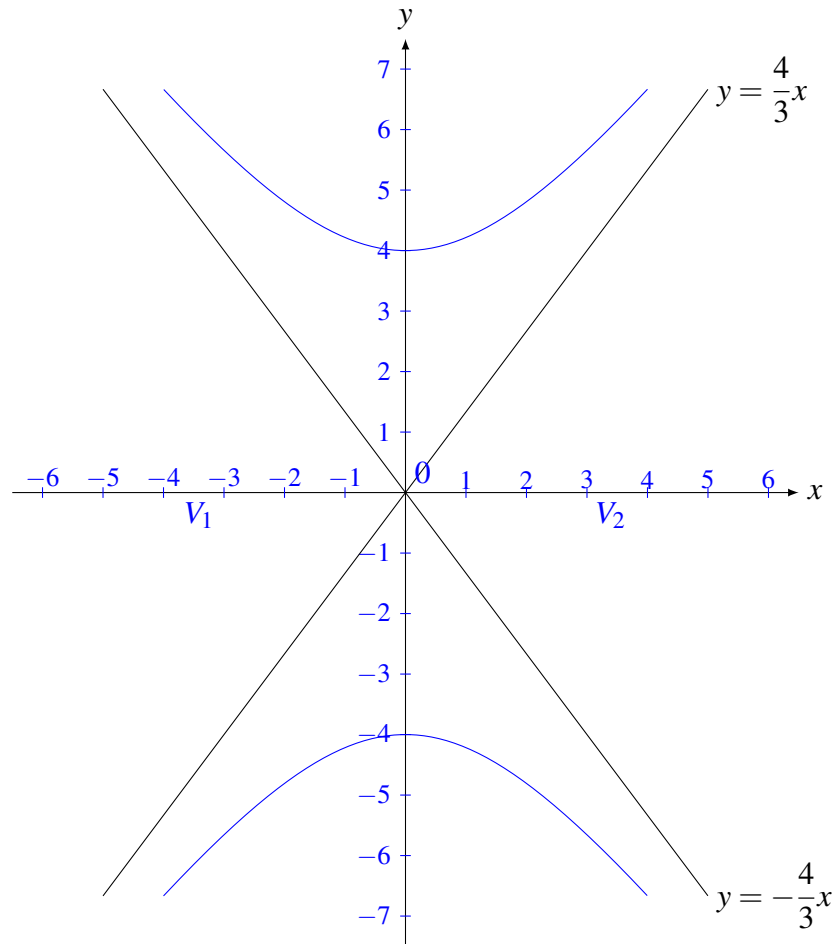
$$\text{និង } d_2 : y = k + \frac{b}{a}(x-h) = \frac{3}{5}x - \frac{13}{5}$$

$$\text{ដូចនេះ: ផ្ចិត } I(1, -2) \text{ កំពូល } V_1(-4, -2); V_2(6, -2)$$

$$\text{កំណុំ } F_1(1-\sqrt{34}, -2); F_2(1+\sqrt{34}, -2) \text{ អ៊ីបសង់ទ្រីស៊ីតេ } e = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\text{សមីការអាស៊ីមតូត: } d_1 : y = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}; d_2 : y = \frac{3}{5}x - \frac{13}{5}$$

- សង់អ៊ីប៉ូបូល (H)



VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = 1$

ចំពោះ $m = 1$ នាំឱ្យ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{ដេរីវេ } f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

$x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x-1)(x+1)$

បើ $f'(x) = 0$ នាំឱ្យ $(x-1)(x+1) \Rightarrow x = 1, x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

- ចំណុចបរមា

ចំពោះ $x = -1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(-1) = -2$

ចំពោះ $x = 1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(1) = 2$

- គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{0 + 1}{0} = \pm\infty$$

• អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

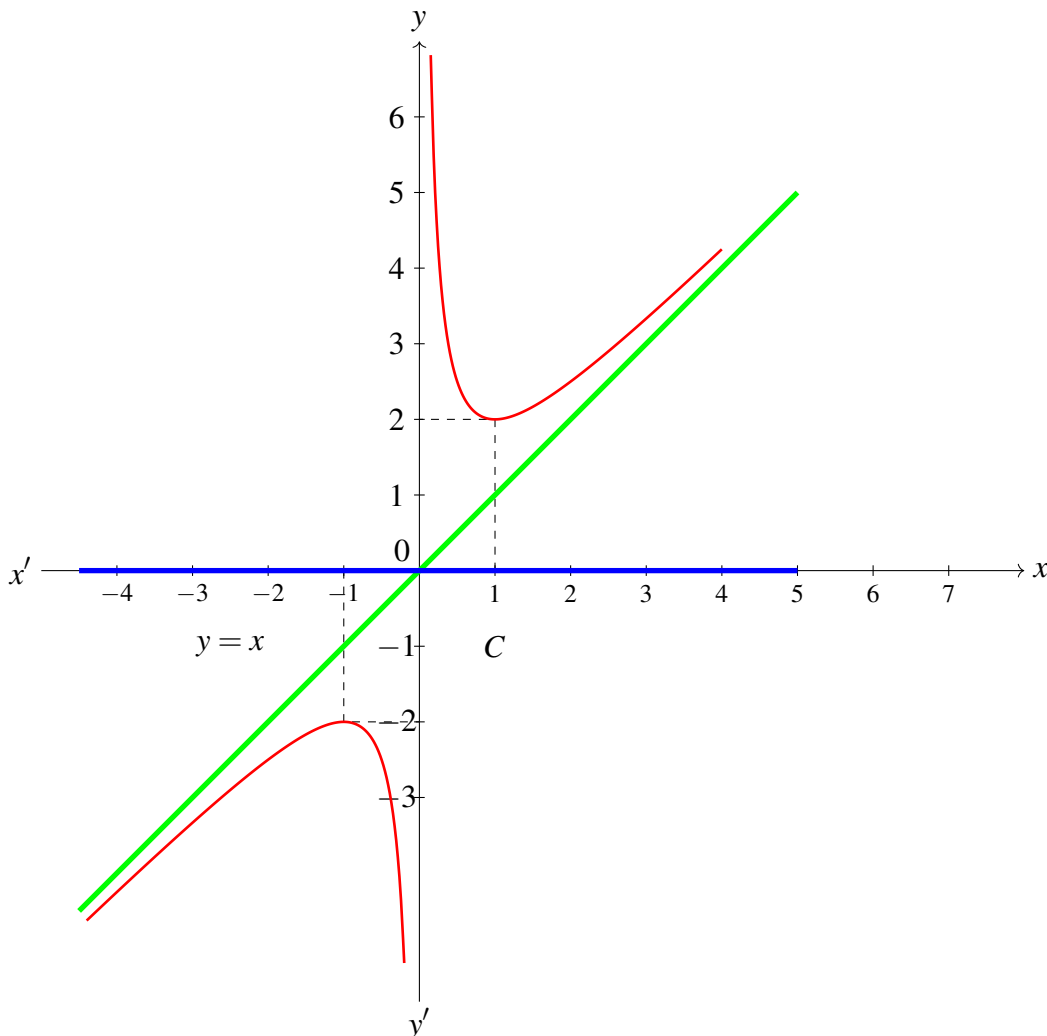
នោះ បន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	2	$+\infty$

• សង់ក្រាប C

• ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x = 0$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។



ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{2mx^2 - mx^2 - 1}{x^2} = \frac{mx^2 - 1}{x^2}$$

បើ $m \leq 0$ នោះ $f''(x) < 0$ ជាអនុគមន៍ចុះក្នុង $\mathbb{R} - 0$

បើ $m > 0$ នោះ f មានតម្លៃបរមា

$$mx^2 - 1 = 0 \text{ នាំឱ្យ } x = \sqrt{\frac{1}{m}}, x = -\sqrt{\frac{1}{m}}$$

x	$-\sqrt{1/m} \quad \sqrt{1/m}$				
$f'(x)$	+	0	-	0	+

ដើម្បីឱ្យ f កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ កាលណា $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m \geq 4$

ដូចនេះ f កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ កាលណា $m \geq 4$

គ. តើមានចំណុចនឹងដែលស្ថិតនៅលើក្រាប C_m ចំពោះគ្រប់ m ឬទេ?

តាង $A(x_A, y_A)$ ជាចំណុចដែលក្រាប C_m ទាំងអស់កាត់តាម

$$\text{គេបាន } y_A = \frac{mx_A^2 + 1}{x_A} \text{ ចំពោះ } \forall m \in \mathbb{R} \text{ និង } x_A \neq 0$$

$$\text{ឬ } x_A y_A = mx_A^2 + 1 \text{ ឬ } mx_A^2 + 1 - x_A y_A = 0$$

$$\text{បើ } C_m \text{ កាត់តាម } A(x_A, y_A) \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} x_A^2 = 0 \\ 1 - x_A y_A = 0 \end{cases} \text{ គ្មានឬស}$$

ដូចនេះ គ្មានចំណុចនឹង $A(x_A, y_A)$ ណាដែលក្រាប C_m ទាំងអស់កាត់នោះទេ ។

ឃ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

$$\text{គេមាន } x^2 - ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > ax \text{ ឬ } \frac{x^2 + 1}{x} > a, \forall x > 0$$

$$\text{តាមក្រាប } C_1 \text{ គេឃើញថា } \frac{x^2 + 1}{x} > a \text{ កាលណា } a < 2$$