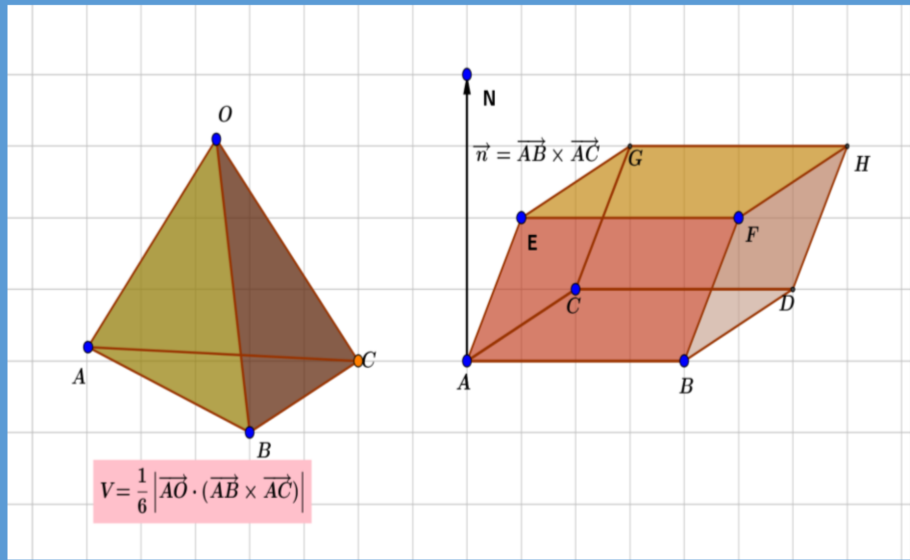
ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ



សម្រាប់: - សិស្សថ្នាក់ទី ១១ និង ១២

- ការប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
- ការប្រឡងប្រជែងនានា

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មីរបស់ក្រសួងអប់រំ

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០១៦

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

វិចទ័រក្នុងលំហ

កិច្ចការស្រាវជ្រាវរបស់គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១

មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យា គរុនិស្សិតជំនាន់ទី២១

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ: លោក ចាន គនហេង

គរុនិស្សិត

១. បួក សុខណាន	២. នួន វាសនា
៣. បឹង បូរីដា	៤. ឈាង កុម្ភៈ
៥. ឈាង សោភ័ទ្ធ	៦. អ៊ុយ ភិរម្យ

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥-២០១៦

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា ដែលជាគរុនិស្សិត នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំជំនាន់ទី២១ សូមគោរព ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ៖

លោកឪពុក អ្នកម្តាយជាអ្នកមានគុណដ៏ធំធេង ដែលបានផ្តល់កំណើតនិង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាដល់ពួកយើងខ្ញុំ។ លោកទាំងពីរបាន តស៊ូគ្រប់ឧបសគ្គ ដើម្បី ផ្គត់ផ្គង់ដល់ បុត្រធីតាទាំងកម្លាំងកាយ កម្លាំងចិត្ត ព្រមទាំងសម្ភារជាពិសេសគឺពួកលោក បានផ្តល់ឱកាស ឱ្យពួកយើងមានភាពជោគជ័យថ្មីនៅថ្ងៃនេះ ។

ឯកឧត្តមបណ្ឌិតនាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ *សៀង សុវណ្ណា* ដែលបាន សម្រួល ដល់ការរៀនសូត្រដល់ពួកយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា ក្នុងអំឡុងពេលសិក្សានៅទីនេះ ដើម្បីត្រៀម ខ្លួនជាធនធានគ្រូបង្រៀនថ្មី និងប្រកបដោយគុណភាពខ្ពស់ ។

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ *បាន គនហេង* ដែលជាសាស្ត្រចារ្យផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ក្នុងការផ្តល់ជាឯកសារ គំនិត និងជួយដឹកនាំគាំទ្រដល់ប្រធានបទ ស្រាវជ្រាវរបស់យើងខ្ញុំ ។

សាស្ត្រាចារ្យ **បាន គនហេង, គឹម ចំរើនវុឌ្ឍី,ស៊ឹម វិសុទ្ធ, ឃី មឿយ, ឡឹយ សុគា** ដែលបានជួយពន្យល់ណែនាំ ដល់ក្រុមយើងខ្ញុំ ។

មិត្តគរុនិស្សិតរួមជំនាន់ជាមួយគ្នា និងមិត្តរួមថ្នាក់ ដែលតែងតែផ្តល់ គំនិត យោបល់ល្អៗ ដល់យើងខ្ញុំ។

សូមលោកទាំងអស់ខាងលើទទួលបាននូវ សុខភាពល្អ ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងជួបប្រទះតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។

ស្រាវជ្រាវ និង រៀបរៀងដោយ :

១. គរុនិស្សិត ប្អូក សុខណាន សៀមរាប

២. គរុនិស្សិត នួន វ៉ាសនា សៀមរាប

៣. គរុនិស្សិត បឹង បូរីដា សៀមរាប

៤. គរុនិស្សិត ឈាង កុម្ភៈ សៀមរាប

៥. គរុនិស្សិត ឈាង សោភ័ទ្ទ កំពង់ចាម

៦. គរុនិស្សិត អ៊ុយ ភិរម្យ បន្ទាយមានជ័យ

រចនាទំព័រ និងក្របដោយ :

ក្រុមស្រាវជ្រាវ គណិតវិទ្យា ក្រុម៣

វាយអត្ថបទដោយ :

ក្រុមស្រាវជ្រាវ គណិតវិទ្យា ក្រុម៣

ណែនាំ ត្រួតពិនិត្យ និង កែលម្អដោយ :

លោក **ចាន គនហេង** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា នៃ **វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ**

ហាមថតចម្លងសៀវភៅនេះ

បានបោះពុម្ពលើកទី១ នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១៦

កក្កដា ២០១៦

<u>អារម្ភកថា</u>

សៀវភៅ " **វិចទ័រក្នុងលំហ** " ដែលនៅនឹងដៃ អ្នកអានទាំងអស់គ្នានេះ ជាស្នាដៃដែល រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិត ឯកទេសគណិតវិទ្យាក្រុមទី៣ ជំនាន់ទី ២១ ក្រោមការណែនាំរបស់លោក **សាស្ត្រាចារ្យ បាន គនហេង** ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យ គណិតវិទ្យានៃ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ។

សៀវភៅនេះចែកជាបីផ្នែកសំខាន់ៗគឺមេរៀនសង្ខេប រូបមន្តសំខាន់ៗលំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ រួមទាំង លំហាត់សម្រាប់អនុវត្ត ដើម្បីវាស់ស្ទង់ចំណេះដឹង នៅចុងបញ្ចប់នៃសៀវភៅ ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះជាមួយ ដែលអាចចូលរួមចំណែកធ្វើជាប្រទីប សម្រាប់ បំភ្លឺផ្លូវដល់អ្នកសិក្សានៅគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ជាក់ជាពុំខានឡើយ ។

យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នារង់ចាំ ទទួលការរិះគន់ ក្នុងន័យស្ថាបនា ដោយក្តីសោមនស្ស រីករាយ ពីសំណាក់ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សិស្សានុសិស្ស និស្សិតនិងអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែលំអសៀវភៅ ដែលបានរៀបរៀងឡើងមកនេះ ឱ្យកាន់តែមានភាពល្អប្រសើរ មួយកម្រិត ថែមទៀត ។

សូមជូនពរដល់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ អ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និង ប្អូនៗទាំងអស់ឱ្យទទួលបានជោគជ័យជាស្ថាពរក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងការប្រលងប្រជែងនានា ។

រាជធានីភ្នំពេញ , ថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១៦

ក្រុមអ្នករៀបរៀង

មាតិកា

ទំព័រទី

ផ្នែកទ្រឹស្តី

និង

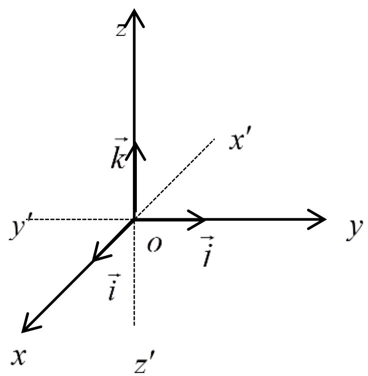
ឧទាហរណ៍

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១.តម្រុយក្នុងលំហ

➢ និយមន័យៈ គេហៅតម្រុយក្នុងលំហគឺគ្រប់ចតុធាតុ $(O,\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k})$ ដែល O ជាគល់តម្រុយ និង $\vec{i}\ ,\ \vec{j},\vec{k}$ ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

- $(x'x)$ **ហៅថាអ័ក្សអាប់ស៊ីស**
- $(y'y)$ **ហៅថាអ័ក្សអរដោនេ**
- $(z'z)$ **ហៅថាអ័ក្សកូត**
- $\vec{i}\ ,\ \vec{j}$ និង $\vec{k}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតា



២.កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

២.១.កូអរដោនេចំណុចក្នុងលំហ

- និយមន័យ៖ គេមានតម្រុយ $(o,\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k})$ មួយក្នុងលំហ ចំពោះចំណុច P មានត្រីធាតុ (x,y,z) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ត្រីធាតុ (x,y,z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P ។
- គេកំណត់សរសេរ $P(x,y,z)$ ដែល x ហៅថាអាប់ស៊ីស, y ហៅថាអរដោនេ និង z ហៅថាកូត ។

❖ ចំណាំ ៖ $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$

២.២. កូអរដោនេវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

កូអរដោនេនៃចំណុចនៅក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច M មួយនៅក្នុងលំហ N ជាចំណោលកែងនៃ M លើប្លង់ (xoy) ស្របនឹងអ័ក្ស (oz) ។ ចំណុច T ស្ថិតលើ (oz) ដែល $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{NM}$

តាមផលបូកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}$ តែ $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{NM}$

$=>\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OT}$ ហើយ $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}$

ដូច្នេះ យើងបាន $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

ទ្រឹស្តីបទ

> គេមានតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយនៅក្នុងលំហចំពោះគ្រប់ចំណុច M មានត្រីធាតុ (x,y,z) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ គេកំណត់ សរសេរ $M(x,y,z)$ ដែល x ហៅថា អាប់ស៊ីស y ហៅថា អថេរ និង z ហៅថា កូត ។

កំណត់សម្គាល់

- បើ $z=0$ គេបាន $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ បានន័យថា $M\in(xoy)$ ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ច្រាសមកវិញបើ $M\in(xoy)$ នោះគេបានគូ (x,y) នៃចំនួនពិតដែល $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

- បើ $x=y=0$ គេបាន $\overrightarrow{OM}=z\vec{k}$

លក្ខណៈ

❖ បើ $M(x,y,z)$ ហើយ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ជាពីរចំណុចក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ យើងបាន:

- $M=M_0$ សមមូល $x=x_0\ ,y=y_0\ ,z=z_0$
- $M\neq M_0$ សមមូល $x\neq x_0,\ y\neq y_0,\ z\neq z_0$
- $\overrightarrow{M_0M}$ មានកូអរដោនេ $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$
- ចំពោះកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលរបស់ $\overrightarrow{M_0M}$ គឺ $(\frac{x+x_0}{2},\frac{y+y_0}{2},\frac{z+z_0}{2})$

❖ បើ $\vec{u}(x,y,z)$ ហើយ $\overrightarrow{u_0}(x_0,y_0,z_0)$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ យើងបាន:

- $\vec{u}=\overrightarrow{u_0}$ សមមូល $x=x_0\ ,y=y_0\ ,z=z_0$
- $\vec{u}\neq\overrightarrow{u_0}$ សមមូល $x\neq x_0,\ y\neq y_0,\ z\neq z_0$
- វ៉ិចទ័រ $\vec{u}+\overrightarrow{u_0}$ មានកូអរដោនេ $(x+x_0,y+y_0,z+z_0)$
- គ្រប់ $a\in\mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $a\vec{u}$ មានកូអរដោនេ $a\vec{u}(ax,ay,az)$
- គ្រប់ $a,a_0\in\mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $a\vec{u}+a_0\overrightarrow{u_0}$ មានកូអរដោនេ $(ax+a_0x_0\ ,ay+a_0y_0\ ,az+a_0z_0)$

៣. ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

៣.១. និយមន័យ

ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta}$ ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ មិនសូន្យ , θ គឺជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

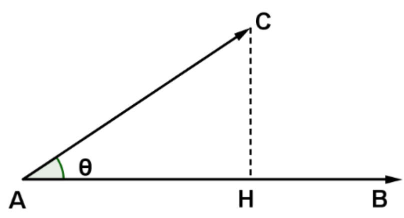
៣.២. កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(x,y,z)$ និង $\vec{v}(x',y',z')$ ក្នុងលំហគឺ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$

៣.៣. ប្រមាណវិធីនៃផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
- $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\qquad(k\in\mathbb{R})$

៣.៤. លក្ខណៈ



- ចំពោះបីចំណុច A,B,C ដែល $A\neq B$, $A\neq C$ គេបាន
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
- បើ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ AB គេបាន
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AH}\right|$

- ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z)$ គេបាន
  - $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$ ហៅថាការេស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែលកំណត់ដោយ $\boxed{\vec{u}^2=x^2+y^2+z^2}$
  - ហើយ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ហៅថាណមនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- ចំពោះគូ (A,B) គេបាន $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=AB^2$ ហើយ

$d\left(A,\mathrm{B}\right)=AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ហៅថាចំងាយពីចំណុចពី A ទៅ B

- θ ជាមុំផ្គុំឡើង ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ មិនសូន្យ

  គេបាន $Cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$
- ចំពោះគ្រប់ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ និងចំនួនពិត m មួយគេបាន
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
  - $\vec{u}\cdot(\vec{\mathrm{v}}+\vec{\mathrm{w}})=\vec{\mathrm{u}}\cdot\vec{\mathrm{v}}+\vec{\mathrm{u}}\cdot\vec{\mathrm{w}}$
  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
  - $\left(m\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=m\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
  - $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{0}$
  - $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ ហៅថា **វិសមភាពកូស៊ី**
  - $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$ ហៅថា **វិសមភាពត្រីកោណ**

៣.៥. វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(x,y,z)$ និង $\vec{v}(x',y',z')$ គេថា $\vec{u}\perp\vec{v}$ កាលណា $xx'+yy'+zz'=0$ ។

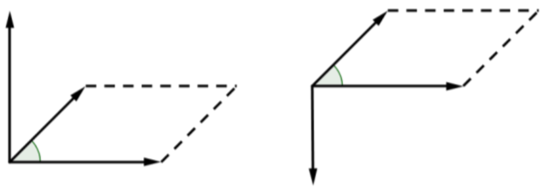
៣.៦. វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

ក្នុងតម្រុយអរតូណារម៉ាល់ ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(x,y,z)$ និង $\vec{v}(x',y',z')$ បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែគ្នា គេបាន $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$ $(x'\neq 0, y'\neq 0, z\neq z')$ ។

៤. ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ

៤.១. និយមន័យ

- ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហជាវ៉ិចទ័រថ្មីមួយដែលកែងទៅនឹង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ (គេកំណត់សរសេរ $\vec{u}\times\vec{v}$ ឬ $\vec{u}\wedge\vec{v}$) ដែលកំណត់ដោយ $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|(\sin\alpha)\vec{n}$ ដែលទិសមុំ α ត្រូវបានបញ្ជាក់ដូចរូប ខាងក្រោមដែល ៖
$(\vec{w}\perp\vec{u},\vec{w}\perp\vec{v}),\left(\vec{n}\perp\vec{u},\vec{n}\perp\vec{v}\right)$



- កន្សោមវិភាគនៃ ផលគុណ នៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ ក្នុងលំហកំណត់ដោយ

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}-\left(xz'-zx'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}$$

និយមន័យខាងលើទាំងពីរ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

លក្ខណៈ

តាមនិយមន័យ លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវិចទ័រក្នុងលំហមានដូចខាងក្រោម ៖

- $\vec{u}\times\vec{v}=-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
- $c(\vec{u}\times\vec{v})=\left(c\vec{u}\right)\times\vec{v}=\vec{u}\times\left(c\vec{v}\right)$ (c ជាចំនួនថេរ)
- $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$
- $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin\alpha \qquad (0\le\alpha\le\pi)$
- $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ ជាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលផ្គុំដោយវិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$
- $\dfrac{1}{2}\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ ជាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលផ្គុំដោយវិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

៤.២. ផលគុណចំរុះនៃបីវិចទ័រ

និយមន័យ

ផលគុណចម្រុះនៃបីវិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គឺជាផលគុណ ស្កាលែរវាងវិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}\times\vec{w}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

ទ្រឹស្តីបទ

ផលគុណចំរុះនៃបីវិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែល $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{w}(x_3,y_3,z_3)$ នោះយើងបានៈ

- $$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ z_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

ដោយ $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{w}(x_3,y_3,z_3)$

នោះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(x_1,y_1,z_1)\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\right)$

$$=>\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\left(x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\right)$$

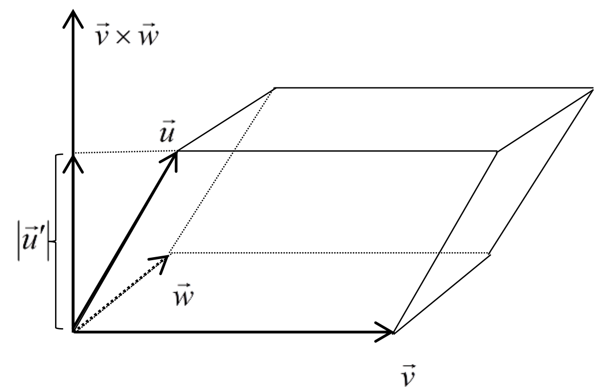
ដូច្នេះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ z_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$

លក្ខណៈ $\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}}$

កំណត់សម្គាល់៖

- មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ ដែល $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
- មាឌពីរ៉ាមីតដែលមានបាតជាប្រលេឡូក្រាម $=\frac{1}{3}$ នៃមាឌប្រលេពីប៉ែត
- មាឌចតុមុខ $=\frac{1}{6}$ នៃមាឌប្រលេពីប៉ែត (ចតុមុខ ពីរ៉ាមីតនិយ័ត តេត្រាអែត)

ចំណាំ៖ បើ $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\neq 0$ នោះគេថាបួនចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។



សមីការបន្ទាត់ និង សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

១.សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ក.សមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុចហើយស្គាល់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

ទ្រឹស្តីបទ៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

❖ គេមានបន្ទាត់ (L) មួយស្របទៅនឹង វ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$ ហើយកាត់តាម ចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ នោះ**សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់** (L) គឺ

$x=x_A+at, y=y_A+bt, z=z_A+ct$ ឬ $(L):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt, t\in\mathbb{R}\\ z=z_A+ct\end{cases}$ បើ

$a,b,c\neq 0$ នោះ**សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់** (L) គឺ: $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$

ខ.សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចក្នុងលំហ

បើ $A(x_A,y_A,z_A), B(x_B,y_B,z_B)$ ជាពីរចំណុចដែលស្ថិតនៅក្នុងលំហ

នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ

$$(AB):\begin{cases}x=x_A+(x_B-x_A)t\\ y=y_A+(y_B-y_A)t \qquad ,t\in\mathbb{R}\\ z=z_A+(z_B-z_A)t\end{cases}$$

ហើយ**សមីការបន្ទាត់ឬសមីការឆ្លុះនៃ** (AB) គឺ

$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ ដែល $x_A\neq x_B, y_A\neq y_B, z_A\neq z_B$

គ.សមីការបន្ទាត់ដែលកំណត់ដោយប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា

គេឱ្យសមីការប្លង់ $(P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ និង សមីការប្លង់ $(Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ដែលមាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\overrightarrow{n_1}(a_1,b_1,c_1)$ និង $\overrightarrow{n_2}(a_2,b_2,c_2)$ ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់កំណត់ដោយប្លង់ទាំងពីរខាងលើប្រសព្វគ្នា ។

បើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នាទេ នោះប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានបន្ទាត់ (L) មួយ។

ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ (L) គេត្រូវ

- យក $z=t$ (ឬយក x,y)ជំនួសក្នុងសមីការ (P_1) និង (P_2)
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1t+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2t+d_2=0 \end{cases}$
- រកទំនាក់ទំនងគ្មាន t រវាង $x;y;z$ នោះគេទទួលបាន សមីការឆ្លុះរបស់បន្ទាត់ (L)
- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ ។

ឃ.សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចមួយហើយកែងទៅនឹងប្លង់មួយ

សន្មត់ថាគេមានប្លង់ $(P): ax+by+cz+d=0$ និងចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។ រកសមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

- ដោយបន្ទាត់ $(L)\perp(P)$ នោះ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស របស់បន្ទាត់ (L) ។
- បើ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (L) នោះគេបាន $\vec{u}=(a,b,c)$
- បន្ទាប់មកប្រើរូបមន្ត : $(L): \dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$

២. សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

ក.សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចមួយ និង ស្គាល់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

គេឲ្យប្លង់ (α) មួយ និងចំណុច $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ នៃប្លង់នេះ ហើយ (α) កែង នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\left(a,b,c\right)$ ដែល ខុសពី វ៉ិចទ័រសូន្យ ។

វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ នេះ ហៅថា វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) ។

គ្រប់ចំណុច $Q(x,y,z)$ នៃប្លង់ (α) គេបាន $\overrightarrow{PQ}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{n}$ ។

គេបានផលគុណស្កាលែរវាង $\overrightarrow{PQ}$ និង $\vec{n}$ គឺ $:\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

នាំឲ្យគេបាន $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ទ្រឹស្តីបទ: ប្លង់ (α) មួយដែលកាត់ តាមចំណុច $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ និង មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\left(a,b,c\right)$ មាន ៖

- សមីការស្តង់ដារ៖ $(\alpha):a(x-x_0)+\mathrm{b}(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)+c(z-z_0)=0$
- សមីការទូទៅ ៖ $(\alpha):ax+b\,\mathrm{y}+cz+d=0$
  ដែល $d=-(ax_0+b\,\mathrm{y}_0+cz_0)$

ឧទាហរណ៍៖ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $N(-2,1,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,3,2)$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u>

កំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច N

តាមរូបមន្ត $(P):a\left(x-x_N\right)+b\left(y-y_N\right)+c\left(z-z_N\right)=0$

ដោយ $N\left(-2,1,3\right)$ និង $\vec{n}=\left(1,3,2\right)$

នោះគេបាន៖ $(P):\left(x+2\right)+3\left(y-1\right)+2\left(z-3\right)=0$

$\Rightarrow x+3y+2z+2-3-6=0$

$\Rightarrow x+3y+2z-7=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): x+3y+2z-7=0}$

ខ.<u>សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចមួយ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់មួយ</u>

គេមានបន្ទាត់ $(L): \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ និង ចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$

ដោយ $(P)\perp(L)$ នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់ (L) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេបាន៖ $\vec{n}_p=\vec{n}_l=(a,b,c)$

នោះសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $\boldsymbol{A}$ ហើយកែងនិងបន្ទាត់ (L) អាចកំណត់រកបាន

តាមរូបមន្ត៖ $\boxed{(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0}$

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យបន្ទាត់ $(L): \dfrac{x+3}{-4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{7}$ ។

ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $A(-3,1,0)$ ហើយកែងបន្ទាត់ (L) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $A(-3,1,0)$

ដោយ $(P)\perp(L)$ នោះ $\vec{n}_P=\vec{n}_l=(-4,3,7)$

គេបានសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $\boldsymbol{A}$ កំណត់ដោយ៖

$(P): -4(x+3)+3(y-1)+7z=0$

$(P): -4x+3y+7z-12-3=0$

$(P): -4x+3y+7z-15=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): -4x+3y+7z-15=0}$

គ. សមីការប្លង់កាត់បីចំនុចរត់មិនត្រង់គ្នា

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

គេមានបីចំណុច $A\left(x_A,y_A,z_A\right),B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ និង $C\left(x_c,y_c,z_c\right)$

គេបាន៖

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right),\overrightarrow{AC}=\left(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A\right)$$

នោះនាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}y_B-y_A & z_B-z_A\\ y_C-y_A & z_C-z_A\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_B-x_A & z_B-z_A\\ x_C-x_A & z_C-z_A\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_B-x_A & y_B-y_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}\vec{k}$$

ឧបមា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(a,b,c\right)$ បើ a,b,c មិនសូន្យព្រមគ្នានោះ A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា ដែលបង្កើតបាន ប្លង់ $\left(ABC\right)$ ដែលមាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(a,b,c\right)$ ។

គេបានសមីការប្លង់ $\boxed{\left(ABC\right):a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)+c\left(z-z_A\right)=0}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យបីចំណុច $A\left(2,1,-1\right),B\left(-1,3,2\right)$ និង $C\left(5,2,2\right)$ ។

ចូររកសមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$

គេមាន $A\left(2,1,-1\right),B\left(-1,3,2\right),C\left(5,2,2\right)$

នោះគេបាន៖ $\overrightarrow{AB}=\left(-1-2,3-1,2+1\right)=\left(-3,2,3\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(5-2,2-1,2+1\right)=\left(3,1,3\right)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(6-3)\vec{i}-(-9-9)\vec{j}+(-3-6)\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+18\vec{j}-9\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3,18,-9)$$

នោះសមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរបាន៖

$$(ABC):3(x-2)+18(y-1)-9(z+1)=0$$

$$(ABC):3x+18y-9z-6-18-9=0$$

$$(ABC):3x+18y-9z-33=0$$

ដូចនេះ $(ABC):3x+18y-9z-33=0$

ឃ.សមីការប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់មួយទៀត

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការរៀងគ្នា

$(L_1):\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ និង $(L_2):\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$

(L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នាគឺ $\vec{u}_1(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{u}_2(a_2,b_2,c_2)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2)

គេបាន៖ $\vec{n}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(a,b,c)$

យក $A\in(L_1)$ នោះ $A(x_1,y_1,z_1)$ គេបាន $A\in(P)$

នោះសមីការប្លង់ $\boxed{(\text{P}):a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0}$

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរមានសមីការ $(L_1):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{-2}$ និង $(L_2):\dfrac{x+2}{4}=y-2=\dfrac{z+3}{-3}$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ (L_1) ហើយស្របនិងបន្ទាត់ (L_2) ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

កំណត់សមីការប្លង់ (P)

គេមាន៖ $(L_1):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{-2}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(2,-3,-2)$

$(L_2):\dfrac{x+2}{4}=y-2=\dfrac{z+3}{-3}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(4,1,-3)$

នោះគេបានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ គឺ

$$\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -2\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(9+2)\vec{i}-(-6+8)\vec{j}+(2+12)\vec{k}$$

$$=11\vec{i}-2\vec{j}+14\vec{k}$$

យើងមាន $A\in(L_1)$ នោះ $A=(3,-1,2)$

យើងបានសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A កំណត់ដោយ៖

$(P):11(x-3)-2(y+1)+14(z-2)=0$

$(P):11x-2y+14z-33-2-28=0$

$(P):11x-2y+14z-63=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):11x-2y+14z-63=0}$

សំគាល់ ចំពោះសមីការប្លង់ ដែលកំណត់ដោយ បន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា គឺ គេស្រាយដូច សមីការប្លង់ ដែលកាត់តាមបន្ទាត់មួយហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយទៀតដែរ ដោយគ្រាន់តែរកចំណុចដែលប្លង់កាត់ ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ $(L_1):\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$ និង $(L_2):\frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{6}=-z+3$ ។

ក. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាង (L_1) និង (L_2)

គេមាន $(L_1):\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$ និង $(L_2):\frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{6}=-z+3$

ចំពោះ $A\in(L_1):\frac{x_A-1}{-1}=\frac{y_A-2}{3}=\frac{z_A+1}{5}=t_1$

នោះគេទាញបាន៖ $\begin{cases} x_A-1=-t_1 \\ y_A-2=3t_1 \\ z_A+1=5t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=1-t_1 \\ y_A=2+3t_1 \quad (1) \\ z_A=-1+5t_1 \end{cases}$

ចំពោះ $A\in(L_2):\frac{x_A+6}{-2}=\frac{y_A-4}{6}=-z_A+3=t_2$

នោះគេទាញបាន៖ $\begin{cases} x_A+6=-2t_2 \\ y_A-4=6t_2 \\ -z_A+3=t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-6-2t_2 \\ y_A=4+6t_2 \quad (2) \\ z_A=3-t_2 \end{cases}$

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន៖ $\begin{cases} 1-t_1=-6-2t_2 \\ 2+3t_1=4+6t_2 \\ -1+5t_1=3-t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t_1+2t_2=-7(*) \\ 3t_1-6t_2=2(**) \\ 5t_1+t_2=4(***) \end{cases}$

តាម $(**)$ និង $(***)$ គេទាញបាន៖ $\dfrac{+\begin{cases} 3t_1-6t_2=2 \\ 5t_1+\ t_2=4 \ (\times 6) \end{cases}}{33t_1=26}$

$$\Leftrightarrow t_1=\frac{26}{33} \Rightarrow t_2=4-5\cdot\frac{26}{33}=\frac{2}{33}$$

នោះគេបាន $\begin{cases} x_A=1-\dfrac{26}{33}=\dfrac{7}{33} \\ y_A=2+3\cdot\dfrac{26}{33}=\dfrac{48}{11} \\ z_A=-1+5\cdot\dfrac{26}{33}=\dfrac{97}{33} \end{cases}$ នោះ $A=\left(\dfrac{7}{33},\dfrac{48}{11},\dfrac{97}{33}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{A=\left(\dfrac{7}{33},\dfrac{48}{11},\dfrac{97}{33}\right)}$

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ប្រសព្វគ្នា

យើងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(-1,3,5)$, $\vec{u}_2=(-2,6,-1)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}3 & 5\\6 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 5\\-2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 3\\-2 & 6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-3-30)\vec{i}-(1+10)\vec{j}+(-6+6)\vec{k}$$

$$=-33\vec{i}-11\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=(-33,-11,0)$$

សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ គឺ៖

$$(P):-33\left(x-\frac{7}{33}\right)-11\left(y-\frac{48}{11}\right)=0$$

$$(P):-33x-11y+7+48=0$$

$$(P):-33x-11y+55=0$$

ដូចនេះ $\boxed{(P):-33x-11y+55=0}$

ង. សមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាក្នុងប្លង់តែមួយ

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា (L_1) និង (L_2) ដែលមានសមីការ

$(L_1):\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ និង $(L_2):\dfrac{x-x_2}{a}=\dfrac{y-y_2}{b}=\dfrac{z-z_2}{c}$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $\vec{u}(a,b,c)$

យក $A=(x_1,y_1,z_1)\in(L_1)$ និង $B=(x_2,y_2,z_2)\in(L_2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) នោះគេបាន៖

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$

ដោយ $A \in (P)$ នោះសមីការប្លង់ (P) កំណត់សរសេរដោយៈ

$$\boxed{(P): \alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0}$$

ឧទាហរណ៍ៈ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាគឺបន្ទាត់ $(L_1): \dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$ និង $(L_2): \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+6}{2}$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (1, -3, 2)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ទាំងពីរ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ទាំងពីរ

យក $A = (-4, 1, 2) \in (L_1)$ និង $B = (3, -2, -6) \in (L_2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3+4, -2-1, -6-2) = (7, -3, -8)$$

គេបានៈ $\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -3 & -8 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (24+6)\vec{i} - (-8-14)\vec{j} + (-3+21)\vec{k}$$

$$= 30\vec{i} + 22\vec{j} + 18\vec{k}$$

នោះសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ កំណត់ដោយៈ

$$(P): 30(x+4) + 22(y-1) + 18(z-2) = 0$$

$$(P): 30x + 22y + 18z + 120 - 22 - 36 = 0$$

$$(P): 30x + 22y + 18z + 62 = 0$$

$$\boxed{(P): 30x + 22y + 18z + 62 = 0}$$

សមីការស្វ៊ែរ

១.ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ

គេឱ្យពីចំណុច $P(x_1,y_1,z_1)$ និង $Q(x_2,y_2,z_2)$ នៃលំហរនោះ យើងបានចម្ងាយ d រវាងពីរចំណុច P និង Q កំណត់ដោយ៖

$$d = PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យចំណុចពីរ $P(2,-1,3)$ និង $Q(1,0,-2)$ នៅក្នុងលំហ ។ គណនាចម្ងាយរវាងចំណុច P និង Q

ចម្លើយ: គណនាចម្ងាយរវាងចំណុច P និង Q

$$d = PQ = \sqrt{(1-2)^2+(0+1)^2+(-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$ ឯកតាប្រវែង ។

២.សមីការស្វ៊ែរ

ក. និយមន័យ

ស្វ៊ែរគឺជាសំណុំចំណុច $P(x,y,z)$ នៃលំហដែលមានចម្ងាយថេរ r ពីចំណុចនោះទៅចំណុចនឹង C មួយដែលចំណុចនឹងនោះហៅថាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ ហើយចម្ងាយថេរពីផ្ចិតទៅចំណុចនៅលើស្វ៊ែរហៅថា កាំស្វ៊ែរ ។

សមីការនៃស្វ៊ែរ (S) ដែលមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ r គឺ

- $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ ជាសមីការស្តង់ដា
- $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ជាសមីការទូទៅ ដែល $d = a^2+b^2+c^2-r^2$

ករណីពិសេសៈ បើស្វ៊ែរ (S) មានគល់ O ជាផ្ចិតឬ $I=(0,0,0)$ និងកាំ r

គេបានសមីការ $x^2+y^2+z^2=r^2$

ឧទាហរណ៍១៖ រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែរដែលមានចំណុច $A(5,-2,3)$ និង $B(0,4,-3)$ ជាចំណុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយ $A(5,-2,3)$ និង $B(0,4,-3)$ ជាចំណុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត

តាមរូបមន្តកូអរដោនេចំណុចកណ្តាល នោះគេបានកូអរដោនេផ្ចិត I នៃស្វ៊ែរគឺ៖

$$I=\left(\frac{5+0}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{3-3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},1,0\right)$$

តាមរូបមន្តចំងាយរវាងពីរចំណុច នោះគេបានកាំ r ស្វ៊ែរគឺ៖

$$r=\sqrt{\left(0-\frac{5}{2}\right)^2+(4-1)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{\frac{97}{4}}=\frac{\sqrt{97}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែរ (S) គឺ

$$(S):\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=\frac{97}{4}$$

ឧទាហរណ៍២៖ រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែរ រួចរកកូរដោនេនៃផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែរ (S) ដែលមានសមីការទូទៅ $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយ $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1=0$

យើងបាន

$$(S):\left(x^2-2x+1\right)-1+\left(y^2+6y+9\right)-9+\left(z^2+8z+16\right)-16+1=0$$

$(S):\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)+\left(z^2+8z+16\right)=25$

$(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=5^2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែរគឺ $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=5^2$

គេបានកូអរដោនេផ្ចិត $I(1,-3,-4)$ និងកាំ $r=5$

ខ. សំណុំចំណុចក្នុងស្វ៊ែរ និង សំណុំចំណុចក្រៅស្វ៊ែរ

- ចំណុច $P(x,y,z)$ ជាសំណុំចំណុចដែលនៅក្នុងស្វ៊ែរ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$ ។
- ចំណុច $P(x,y,z)$ ជាសំណុំចំណុចដែលនៅក្រៅស្វ៊ែរ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2$ ។

៣. ទីតាំងស្វ៊ែរ (S) និង ប្លង់ (P)

យើងសន្មត់ថា d ជាចម្ងាយពីផ្ចិត $I(a,b,c)$ នៃស្វ៊ែរ (S) ដែលមានកាំ r ទៅប្លង់ (P) គេបាន៖

- បើ $d>r$ នោះប្លង់ (P) មិនកាត់ស្វ៊ែរ (S)
- បើ $d=r$ នោះប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុចមួយ
- បើ $d<r$ នោះប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែរ (S) បានរង្វង់មួយ

៤. ទីតាំងរវាងស្វ៊ែរពីរមានកាំ r និង r'

យើងសន្មត់ថា d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ (S) និង (S') ដែលមានកាំ r និង r' រៀងគ្នាគេបាន៖

- បើ $d<|r-r'|$ នោះស្វ៊ែរ (S) និង (S') នៅក្នុងគ្នា
- បើ $d>r+r'$ នោះស្វ៊ែរ (S) និង (S') នៅក្រៅគ្នា
- បើ $d=|r-r'|$ នោះស្វ៊ែរ (S) និង (S') ប៉ះគ្នាខាងក្នុង
- បើ $d=r+r'$ នោះស្វ៊ែរ (S) និង (S') ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ
- បើ $|r-r'|<d<|r+r'|$ នោះស្វ៊ែរ (S) និង (S') កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ

៥. ទីតាំងរវាងស្វ៊ែរ និង បន្ទាត់៖

(l) ជាបន្ទាត់មួយ និងស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ r នោះគេបាន៖

- បើស្វ៊ែរ (S) ប៉ះបន្ទាត់ (l) លុះត្រាតែ $d(I;(l))=r$
- បើស្វ៊ែរ (S) កាត់តាមបន្ទាត់ (l) លុះត្រាតែ $d(I;(l))<r$
- បើស្វ៊ែរ (S) មិនប៉ះ ឬមិនកាត់បន្ទាត់ (l) លុះត្រាតែ $d(I;(l))>r$

ចម្ងាយក្នុងលំហ

១.ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅក្នុងលំហ

គេឱ្យពីរចំនុច $A(x_A, y_A, z_A)$ និង $B(x_B, y_B, z_B)$ នៅក្នុងលំហ។
ដូច្នេះគេបានចម្ងាយពីចំណុច A ទៅចំនុច B កំណត់ដោយ៖

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យពីរចំណុច $A(3,2,1)$ និង $B(-1,0,1)$ នៅក្នុងលំហ។
គណនាចម្ងាយពី A ទៅ B ។

ចម្លើយ៖ គណនា AB

តាមរូបមន្ត $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

យើងមាន $A(3,2,1)$ និង $B(-1,0,1)$ នោះយើងបាន

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{21}$$ ឯកតាប្រវែង

ដូច្នេះ $AB = \sqrt{21}$ ឯកតាប្រវែង។

២.ចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់

ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (l) កំណត់ដោយ

$$d\left[A,(l)\right] = \frac{\left|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

ដែល $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (l) និង $M_0 \in (l)$ ។

ឧទាហរណ៍: គេមានចំណុចមួយ $A(1,2,3)$ ក្នុងលំហ និងបន្ទាត់ $(l):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{1-z}{2}$ ។ គណនាចម្ងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (l) ។

ចម្លើយ: គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (l)

យើងមាន $A(1,2,3)$ និង $(l):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{1-z}{2}$ យើងបាន (l) កាត់តាមចំណុច $M_0(1,-2,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,-1,-2)$

យើងបាន $\overrightarrow{AM_0}(0,-4,2)$ នោះ

$$\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=(8+2)\vec{i}-(0-2)\vec{j}+(0+4)\vec{k}$$

$$=10\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$$

ដូច្នេះចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (l) គឺ

$$d\left[A,(l)\right]=\frac{\left|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{10^2+2^2+4^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{6}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \text{ ឯ.}$$

៣.ចម្ងាយពីបន្ទាត់ទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ

គេឱ្យបន្ទាត់ (d_1) និងបន្ទាត់ (d_2) ដែលកាត់តាម M_1 និង M_2 ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_1}$ និង $\overrightarrow{u_2}$ រៀងគ្នា។ដូច្នេះយើងបានចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ

$$d\left[(d_1),(d_2)\right]=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}.(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2})\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right|}$$

ឧទាហរណ៍៖ គេឲ្យបន្ទាត់ $(l): \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z+2}{3}$ និង $(m): \dfrac{x-3}{9} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-2}{-1}$ ។ គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

<u>ចម្លើយ</u>

គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ

តាមរូបមន្ត $d\left[(l),(m)\right] = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}.(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2})\right|}{\left|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}\right|}$

យើងមាន $(l): \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z+2}{3}$ កាត់តាមចំណុច $M_1(-2,6,-2)$

ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_1} = (-3,4,3)$ ។

ហើយ $(n): \dfrac{x-3}{9} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-2}{-1}$ កាត់តាមចំណុច $M_2(3,-5,2)$ ដែលមាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_2} = (9,4,-1)$ ។

យើងបាន៖ $\overrightarrow{M_1M_2}(5,-11,4)$ ហើយ

$$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-4-12)\vec{i} - (3-27)\vec{j} + (-12-36)\vec{k}$$

$$= 16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k}$$

យើងបាន

$$d\left[(l),(m)\right] = \frac{\left|(5)(16)+(24)(-11)+(4)(-48)\right|}{\sqrt{16^2+(24)^2+(-48)^2}}$$

$$= \frac{\left|80-264-192\right|}{\sqrt{256+576+2304}} = \frac{\left|-376\right|}{\sqrt{3136}} = \frac{376}{56}$$

ដូចនេះ $d\left[(l),(m)\right]=\dfrac{376}{56}$ ឯកតាប្រវែង

៤.ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ

> ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ ទៅប្លង់
> $(P): ax+by+cz+d=0$ កំនត់ដោយៈ
> $$d\left[A,(P)\right]=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យចំណុច $A(1,2,3)$ នៅក្នុងលំហ ហើយគេមានប្លង់ $(P): x+y+z-1=0$ ។ គណនាចម្ងាយពីចំនុច A ទៅប្លង់ (P) ។

<u>**ចម្លើយ**</u>

គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) ៖

តាមរូបមន្ត $d\left[A,(P)\right]=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

យើងមាន $A=(1,2,3)$ និង (P) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(1,1,1)$

គេបាន $d\left[A,(P)\right]=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\left|(1)(1)+(2)(1)+(3)(1)-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$

$$=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះចម្ងាយពីចំនុច A ទៅប្លង់ (P) គឺ $d\left[A,(P)\right]=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ ឯកតាប្រវែង

៥.ចម្ងាយរវាងប្លង់និងប្លង់

យើងមាន $(P_1): ax+by+cz+d_1=0$ និង $(P_2): ax+by+cz+d_2=0$

នោះចម្ងាយរវាង (P_1) និង (P_2) កំណត់ដោយៈ

$$d\left[(P_1),(P_2)\right]=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យ $(P_1): x+y+z+1=0$ និង $(P_2): x+y+z-1=0$ ។

គណនាចម្ងាយរវាង (P_1) និង (P_2) ។

ចម្លើយ:

គណនាចម្ងាយរវាង (P_1) និង (P_2)

$$d\left[(P_1),(P_2)\right]=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ឯកតាប្រវែង

ផ្នែកលំហាត់

និង

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១៖

ក្នុងលំហកូអរដោនេ $(oxyz)$ គេឲ្យប្លង់ (P) មានសមីការទូទៅ: $2x-y-z-6=0$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់(P)។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់កាត់តាមគម្រុយហើយកែងនឹងប្លង់(P)។

គ. គណនាចំងាយពីគល់តម្រុយទៅប្លង់(P)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរសមីការប្លង់ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់ (P)

គេមាន $(P): 2x-y-z-6=0 \ (*)$

ជ្រើស $x=t_1, y=t_2$ ធ្វើជាប៉ារ៉ាម៉ែត

នោះ $(*) \Leftrightarrow 2t_1+t_2-z-6=0 \Rightarrow z=2t_1+t_2-6$

ដូច្នេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់ (P) គឺ $\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \\ z=2t_1+t_2-6 \end{cases} \quad (t_1,t_2 \in R)$

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់កាត់តាមតម្រុយហើយកែងនឹងប្លង់

យើងមាន៖ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n}=(2,1,-1)$

ដោយបន្ទាត់ដែលត្រូវរកកែងនឹងប្លង់ (P) នោះវាយកវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(2,1,-1)$

ធ្វើជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស។

បន្ទាត់កាត់តាមគល់តំរុយ O ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}$

នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតគឺ $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = -t \end{cases}$

គ.គណនាចំងាយពីគល់តម្រុយទៅប្លង់ (P)

គេបាន $d(0,p) = \dfrac{|2.0+0-0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{6}$

ដូច្នេះ $d(0,p) = \sqrt{6}$ ឯកតាប្រវែង

<u>លំហាត់ទី២៖</u>

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេមានបន្ទាត់ $\Delta : \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$

និងប្លង់ (α) មានសមីការ : $2x-y+3z-7=0$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ Δ និងកូរអដោនេចំណុចប្រសព្វនៃ Δ ជាមួយប្លង់ (α) ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (β) កាត់តាម Δ ហើយកែងនឹងប្លង់ (α) ។

ដូច្នេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ Δ គឺ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4-2t \quad\quad (t \in \Re) \;\; (*) \\ z = 13-4t \end{cases}$

ជំនួស x, y, z នៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត Δ ចូលក្នុងប្លង់ (α) :

$$2t-(4-2t)+3(13-4t)=0$$

$$\Leftrightarrow 2t+2t-12t-4+39-7=0$$

$$\Leftrightarrow -8t+28=0 \Rightarrow t = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

ជំនួស $t = \dfrac{7}{2}$ ចូលក្នុង $(*)$ គេបាន $x = \dfrac{7}{2}, y = -3,\; z = -1$

ដូច្នេះ ចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ Δ និង (α) គឺ $A(\frac{7}{2},-3,-1)$

ខ.សរសេរសមីការប្លង់ Δ កាត់តាម Δ ហើយកែងនឹងប្លង់ (α)

ប្លង់ (β) កាត់តាម Δ នោះកាត់តាមចំនុច $M_0(0,4,13)\in\Delta$ ហើយយកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ Δ ធ្វើជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសទី១ $\vec{n}_\Delta=(1,-2,-4)$ ។

ប្លង់ (β) កែងប្លង់ (α) នោះវាយកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) ធ្វើជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសទី២ $\vec{n}_\alpha=(2,-1,3)$ ។

គេបានវ៉ិចទ័រណម៉ាល់នៃប្លង់ (β) គឺ

$$\vec{n}_\beta=\vec{n}_\Delta\times\vec{n}_\alpha=\left(\begin{vmatrix}-2 & -4\\ -1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{n}_\beta=\vec{n}_\Delta\times\vec{n}_\alpha=(-10,-11,3)$$

នោះសមីការប្លង់ (β) គឺ $-10(x-0)-11(y-4)+3(z-13)=0$

$$\Leftrightarrow -10x-11y+3z+5=0$$

$$\Leftrightarrow 10x+11y-3z-5=0$$

ដូច្នេះសមីការប្លង់ (β) គឺ $10x+11y-3z-5=0$

<u>លំហាត់ទី៣៖</u>

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេមានគ្រួសារប្លង់ P_m មានសមីការ

$x+y+z-1+m(x+y+z+1)=0$, m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ $\forall m$, ប្លង់ P_m កាត់តាមបន្ទាត់នឹង (d) មួយជានិច្ច។

ខ. រក m ដើម្បីឱ្យប្លង់ P_m កែងនឹងប្លង់ P_0 មានសមីការ $x+y+z-1=0$ ។

រួចគណនាចំងាយពីគល់តម្រុយទៅបន្ទាត់ (d) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ $\forall m$, ប្លង់ P_m កាត់តាមបន្ទាត់នឹង P_0 មួយជានិច្ច

គេមាន $P_m : 2x+y+z-1+m(x+y+z+1)=0$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall m$ កាលណា $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$

ដូច្នេះ ប្លង់ P_m កាត់តាមបន្ទាត់នឹង (d) មួយជានិច្ចចំពោះគ្រប់ m ដែលមានសមីការ

$$(d) : \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$$

ខ. រក m ដើម្បីឱ្យប្លង់ $(P_m) \perp (P_0)$

(P_m) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2+m,1+m,1+m)$

(P_0) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_0=(2,1,1)$

$(P_m)\perp(P_0) \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n}_0 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow 2(2+m)+1(1+m)+1(1+m)=0$

$\Leftrightarrow 4m+6=0 \Rightarrow m=-\dfrac{3}{2}$

ដូច្នេះ $(P_m)\perp(P_0)$ កាលណា $m=-\dfrac{3}{2}$

+ គណនាចម្ងាយពីគល់តម្រុយទៅបន្ទាត់ (d)

ប្លង់ (α) កាត់តាម $O(0,0,0)$ ហើយកែងនឹង (d) ត្រង់ H

$(\alpha)\perp(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ យកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (α) ធ្វើជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់។

គេមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (d) គឺ

$$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right)=(0,-1,1)$$

ប្លង់ (α) កាត់តាម $O(0,0,0)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(0,-1,1)$ មានសមីការៈ

$0(x-0)-1(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow z-y=0$

+ កូអរដោនេនៃ H

កូអរដោនេនៃ H គឺជាឫសនៃប្រព័ន្ធដែលផ្គុំដោយសមីការនៃ (d) និងដែលមាន

$$(\alpha):\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \\ z-y=0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះ គេបាន : $H\left(2,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

នោះ $OH=\sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$

ដូច្នេះ ចំងាយពីគល់តម្រុយទៅបន្ទាត់ (d) គឺ $OH=\sqrt{\frac{17}{2}}$ ឯកតាប្រវែង

លំហាត់ទី៤៖

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-1,0,2), B(3,1,0)\ C(-1,-4,0)$

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) មានសមីការ

$x=5t; y=-4t+2, z=8t-4$

ខ. M ជាចំណុចមួយលើបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានអាប់ស៊ីស 5 ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $MABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ)

បន្ទាត់ (Δ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{a}=(5,-4,8)$

ប្លង់ (ABC) មានលំដាប់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ $\overrightarrow{AB}(4,1,-2)$ និង $\overrightarrow{AC}(0,-4,-2)$ ។

ដើម្បីបង្ហាញថា (ABC) កែងនឹង (Δ) យើងគ្រាន់តែបង្ហាញឱ្យលំដាប់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (ABC) កែងនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (Δ) ។

គេមាន

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=20-4-16=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{a}=0+16-16=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{a}\\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{a}\end{cases}\Rightarrow(ABC)\perp(\Delta)$$

ដូច្នេះប្លង់ (ABC) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ)

ខ. គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $MABC$

គេមាន $M\in(\Delta)$ មានអាប់ស៊ីសស្មើ $5\Rightarrow M(5,-2,4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}1&-2\\-4&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&4\\-2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\0&-4\end{vmatrix}\right)=(-10,8,-16)$$

$$\overrightarrow{AM}=(6,-2,2)\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=-60-16-32=-108$$

$$\Rightarrow V_{MABC}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{6}\cdot108=18$$ ឯកតាមាឌ

ដូចនេះ មាឌនៃពីរ៉ាមីត $MABC$ គឺ $V_{MABC}=18$ ឯកតាមាឌ

<u>លំហាត់ទី៥៖</u>

ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មាន $A(3,0,4),B(1,2,3),C(9,6,4)$ ។

ក. រកកូអរដោនេកំពូល D

ខ. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ B

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. រកកូអរដោនេកំពូល B

គេមាន $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow (-2,2,-1) = (9 - x_D, 6 - y_D, 4 - z_D)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x_D = -2 \\ 6 - y_D = 2 \\ 4 - z_D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 11 \\ y_D = 4 \\ z_D = 5 \end{cases}$$

ដូច្នេះកូអរដោនេកំពូល B គឺ $D(11,4,5)$

ខ. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ B

គេមាន $\cos B = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

ដែល $\overrightarrow{BA} = (2,-2,1)$, $\overrightarrow{BC} = (8,4,1)$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{\left|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{|16 - 8 + 11|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{81}} = \frac{3}{\sqrt{81}} = \frac{1}{3}$$

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

$S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$ ដែល $\overrightarrow{AB} = (-2,2,1)$; $\overrightarrow{AC} = (6,6,0)$

$$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \right) = (-6, 6, -24)$$

$$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 24^2} = 18\sqrt{2}$$

ដូច្នេះ $S_{ABCD} = 18\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

លំហាត់ទី៦៖

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឱ្យបីចំនុច $A(0,0,1), B(-1,-2,0), C(2,1,-1)$

ក. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាម A,B,C ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត នៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម ទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ.កំនត់ជើងកំពស់ ដែលទាញចេញពី A ធៀបនឹងបន្ទាត់ BC ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាម ABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(5,-4,3)$$

ប្លង់ (P) កាត់តាម $A(0,0,1)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(5,-4,3)$ មានសមីការ

$$5(x-0)-4(y-0)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 5x-4y+3z-3=0$$

ដូចនេះសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាម ABC គឺ $5x-4y+3z-3=0$

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

ដោយ G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔABC គេបាន

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)=\frac{1}{3}$$

$$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=-\frac{1}{3}$$

$$z_G=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=0$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0\right)$$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n}=(5,-4,3)\Rightarrow\vec{n}=(5,-4,3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស នៃបន្ទាត់ ដែលត្រូវរក(ព្រោះបន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ (P))។

បន្ទាត់ដែលកាត់តាម $G\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0\right)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(5,-4,3)$ មាន ស

មីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+5t \\ y=-\frac{1}{3}-4t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$

គ.កំនត់ជើងកំពស់ ដែលទាញចេញពី BC ធៀបនឹងបន្ទាត់ BC

គេមាន $\overrightarrow{BC}=(3,3,-1)$ នោះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ BC គឺ $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-2+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$

យើងដៅចំណុច $H(-1+3t,-2+3t,-t)\in BC$

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC នោះ $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow 3(1-3t)+3(2-3t)-1(1+t)=0$

$\Leftrightarrow 19t=8\Rightarrow t=\frac{8}{19}$

ដូច្នេះ $H\left(\frac{5}{19},-\frac{14}{19},-\frac{8}{19}\right)$

លំហាត់ទី៧៖

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឱ្យចំណុច $A(1,2,-1)$ បន្ទាត់ (D) មានសមីការ $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$ និងប្លង់ (P) មានសមីការ $2x+y-z+1=0$ ។

ក. រកចំណុច B ឆ្លុះនឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។

ខ.សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់តាម A កាត់តាមបន្ទាត់ (D) ហើយស្របនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំណុច B ឆ្លុះនឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (Δ)

+ជាដំបូងយើងរកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹង (P)

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (d) ។

ដោយបន្ទាត់ (d) កាត់តាម $A(1,2,-1)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(2,1,-1)$

គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) គឺ: $(d):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1-t \end{cases}$

+ រកចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P)

តាង H ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P) ។

ជំនួស x,y,z នៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត (d) ចូលប្លង់ (P) យើងបាន

$$2(1+2t)+2+t-(-1-t)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1$$

ជំនួស $t=-1$ ចូលសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត (d) យើងបានចំនុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P) គឺ

$H\left(-1,1,0\right)$ ។

ដោយចំនុច B ឆ្លុះនឹង A ធៀបនឹងប្លង់ $\left(P\right)$ យើងបាន៖ $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}$

$$\Leftrightarrow\left(x_H-x_A,y_H-y_A,z_H-z_A\right)=\left(x_B-x_H,y_B-y_H,z_B-z_H\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_H-x_A=x_B-x_H\\ y_H-y_A=y_B-y_H\\ z_H-z_A=z_B-z_H\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=2x_H-x_A=-3\\ y_B=2y_H-y_A=0\\ z_B=2z_H-z_A=1\end{cases}\Rightarrow B\left(-3,0,1\right)$$

ដូច្នេះ $B\left(-3,0,1\right)$

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ A ដែលកាត់តាម (D) កាត់តាមបន្ទាត់ $\left(P\right)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ $\left(P\right)$

យើងមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\left(D\right)$ គឺ $\begin{cases}x=2+t\\ y=3t\\ z=-2+2t\end{cases}\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$

តាង I ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $\left(D\right)$ និងបន្ទាត់ $\left(\Delta\right)$

$$\Rightarrow I\left(2+t,3t-2,-2+2t\right)$$

យើងបាន $\overrightarrow{AI}=\left(1+t,3t-2,-1+2t\right)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $\left(\Delta\right)$ ។

ដោយ $\left(\Delta\right)\|\left(P\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}\cdot\vec{n}=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(1+t\right)+\left(3t-2\right)-1\left(-1+2t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3t+1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\left(\frac{2}{3},-3,-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(2,-9,-5\right)$$

ដូច្នេះសមីការនៃបន្ទាត់ $\left(\Delta\right)$ គឺ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-9}=\dfrac{z+1}{-5}$

<u>លំហាត់ទី៨៖</u> ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឲ្យចំនុច $A(-1,3,2)$ និងបន្ទាត់ពីរ៖

$$(d_1)\ :\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}\ ;\qquad (d_2)\ :\begin{cases}x=1+t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម A កាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ខ. គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃ (Δ) ជាមួយ (d_1) និង (d_2) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម A កាត់ (d_1) និង (d_1)

ពីសមីការឆ្លុះនៃ (d_1) គេបានបន្ទាត់ (d_1) កាត់តាម $B(1,1,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{a}_1=(2,-1,1)$ ។

+ (α) ជាប្លង់ ដែលកាត់តាម A ហើយមានបន្ទាត់ (d_1)

គេបានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) គឺ

$$\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}\times\vec{a}_1=\left(\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}\times\vec{a}_1=(-4,-6,2)=-2(2,3,-1)$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ (α) គឺ

$$2(x+1)+3(y-3)-(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+3y-z-5=0$$

+ (β) ជាប្លង់ ដែលកាត់តាម A ហើយមានបន្ទាត់ (d_2)

គេបានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (β) គឺ

$$\vec{n}_\beta=\overrightarrow{AC}\times\vec{a}_2=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$=(-1,-3,2)=-(1,3,-2)$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ (β) គឺ

$1(x+1)+3(y-3)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+3y-2z-4=0$

បន្ទាត់ (Δ) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β) មានសមីការ

$$(\Delta)\ :\begin{cases}2x+3y-z-5=0\\ x+3y-2z-4=0\end{cases}$$

ខ. គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃ (d_2) ជាមួយ (d_1) និង (d_2)

-តាង M ជាចំនុចប្រសព្វនៃ (Δ) និង (d_1)

គេបានប្រព័ន្ធដែលផ្គុំដោយ (Δ) និង (d_1) មានឫស:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y-z-5=0\\ x+3y-2z-4=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=0\end{cases}$$

ដូច្នេះ $M(1,1,0)$

-តាង N ជាចំនុចប្រសព្វនៃ (Δ) និង (d_2)

គេបានប្រព័ន្ធដែលផ្គុំដោយ (Δ) និង (d_2) មានឫស

$$\begin{cases}2x+3y-z-5=0\\ x+3y-2z-4=0\\ x=1+t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=2\\ z=1\end{cases}$$

ដូច្នេះ $N(0,2,1)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃ (d_2) ជាមួយ (d_1) និង (d_2) គឺ $M(1,1,0)$ និង $N(0,2,1)$

លំហាត់ទី៩៖

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឲ្យ $\vec{a}=(2,3,4)$។ ហៅ α,β,γ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\vec{a}$ ជាមួយ $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ($\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ជាវ៉ិចទ័រគោល)។

ក. រក $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$

ខ.ឧបមាថា $\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រណាមួយ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

ដំណោះស្រាយ

ក. រក $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$

តាមសម្មតិកម្ម $\alpha=\left(\vec{e}_1,\vec{a}\right)$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{e}_1\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_1|\cdot|\vec{a}|}=\frac{1\times2+0\times3+0\times4}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\times\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

ដូច្នេះ $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$

- $\beta=\left(\vec{e}_2,\vec{a}\right)\Rightarrow\cos\beta=\frac{\vec{e}_2\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_2|\cdot|\vec{a}|}=\frac{3}{\sqrt{29}}$

- $\gamma=\left(\vec{e}_3,\vec{a}\right)\Rightarrow\cos\gamma=\frac{\vec{e}_3\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_3|\cdot|\vec{a}|}=\frac{4}{\sqrt{29}}$

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

គេមាន $\vec{a}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\vec{a}_1^{\,2}+\vec{a}_2^{\,2}+\vec{a}_3^{\,2}$

គេបាន $\cos\alpha=\frac{\vec{e}_1\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_1|\cdot|\vec{a}|}=\frac{a_1}{|\vec{a}|}\quad\left(\alpha=\left(\vec{e}_1,\vec{a}\right)\right)$

$$\cos\beta=\frac{\vec{e}_2\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_2|\cdot|\vec{a}|}=\frac{a_2}{|\vec{a}|}\quad\left(\beta=\left(\vec{e}_2,\vec{a}\right)\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{a}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{a}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \quad \left(\gamma = \left(\vec{e}_3, \vec{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2{}_1}{|\vec{a}|^2} + \frac{a^2{}_2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a^2{}_3}{|\vec{a}|^2} = \frac{a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3}{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3}{a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3} = 1$$

ដូច្នេះ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

<u>លំហាត់ទី១០៖</u>

សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាម $A(0,1,1)$ កែងនឹងបន្ទាត់:

$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ ហើយកាត់បន្ទាត់

$(d_2): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

របៀបដោះស្រាយ

- រកប្លង់ $(\alpha) \ni A$ កែងនឹង (d_1)
- រកប្លង់ $(\beta) \ni A$ កែងនឹង (d_2)
- បន្ទាត់ដែលត្រូវរក មានសមីការជាបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β)

ក.សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាម $(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$

-សមីការប្លង់ (α) កាត់តាម $A(0,1,1)$ ហើយកែងនឹង (d_1) :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$$

ប្លង់ (α) មានរាង $: Ax+By+Cz+d=0 \quad (*)$

ហើយ (d_1) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{a}=(3,1,1)$

ប្លង់ $(\alpha)\perp(d_1)\Leftrightarrow \vec{a}=(3,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α)

$\Rightarrow A=3,\ B=1,\ C=1$

$\Leftrightarrow 3x+y+z+D=0 \qquad (1)$

ប្លង់ $(\alpha)\ni A(0,1,1)\Leftrightarrow(1)$ ក្លាយជា $D=-2$

ដូច្នេះ $(1)\Leftrightarrow 3x+y+z-2=0 \quad (2)$

គេបានសមីការនៃប្លង់ $(\alpha)\Leftrightarrow 3x+y+z-2=0 \quad (2)$

-សមីការនៃប្លង់ (β)

+ប្លង់ $(\beta)\ni(d_2)$ នោះប្លង់ (β) ជាបាច់ប្លង់ដែលកាត់តាម (d_2) ។

សមីការប្លង់ (β) :

$$x+y-z+2+m(x+1)=0 \qquad (m\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow(1+m)x+y-z+m+2=0 \quad (3)$$

+ប្លង់ $(\beta)\ni A(0,1,1)\Leftrightarrow(1+m)\cdot 0+1-1+m+2=0$

$$\Leftrightarrow m=-2$$

ជំនួស $m=-2$ ចូលក្នុង (3)

គេបានសមីការនៃប្លង់ (β) : $x-y+z=0 \qquad (4)$

+សមីការនៃ (d) បន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និងប្លង់ (β)

មានពីរសមីការគឺ (2) និង (4)

យើងបាន (d) : $\begin{cases}3x+y+z-2=0\\ x-y+z=0\end{cases}$

យើងឃើញថា : (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស :

$$\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(2,-2,-4)$$ និង

(d_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស :

$$\vec{a}_2=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(0,-1,-1)$$

$(\vec{a})$ និង $(\vec{a}_2)$ មិនស្របគ្នា

ដូច្នេះ (d) កាត់ (d_2) និង (d) កែងនឹង (d_1) ។

<u>លំហាត់ទី១១៖</u>

កំនត់មុំស្រួចដែលផ្គុំឡើងដោយបន្ទាត់ $(d):\begin{cases}x+4y-2z+7=0\\ 3x+7y-2z=0\end{cases}$

និងប្លង់ $(P):3x+y-z+1=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

របៀបដោះស្រាយ

- រកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (d) តាងដោយ $\vec{a}$
- រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយនៃប្លង់ (P) តាងដោយ $\vec{n}$
- ប្រើរូបមន្ត $\sin\alpha=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$

កំណត់មុំស្រួច

តាង α ជាមុំស្រួច ដែលផ្គុំឡើងដោយ (d) និងប្លង់ (P) , $\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (d) ; $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P) ។

គេបានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស (d) គឺ

$$\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}4 & -2\\ 7 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}\right)=(6,-4,-5)$$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $:\vec{n}=(3,1,-1)$

តាមរូបមន្ត

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{|3\cdot 6-4\cdot 1+5\cdot 1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-5)^2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{19}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{77}}=\frac{19}{11\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\arcsin\frac{19}{11\sqrt{7}}$$

ដូច្នេះមុំស្រួចដែលផ្គុំឡើងដោយ (d) និង (P) គឺ $\alpha=\arcsin\dfrac{19}{11\sqrt{7}}$

<u>លំហាត់ទី១២៖</u>

នៅលើអ័ក្ស oy រកចំនុចដែលមានចំងាយស្មើប្លង់ពីរ៖

ប្លង់ $(\alpha_1):x+y-z+1=0$ ប្លង់ $(\alpha_2)\ :x-y+z-5=0$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកចំណុចដែលមានចំងាយស្មើប្លង់ពីរ

ចំណុច $M\in oy\Leftrightarrow M(0,y,0)$

ចំងាយ h_1 ពី M ទៅប្លង់ $(\alpha_1):h_1=\dfrac{|0+y-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}}$ (1)

ចម្ងាយ h_2 ពី M ទៅប្លង់ $(\alpha_2):h_2=\dfrac{|0-y-0-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{|y+5|}{\sqrt{3}}$ (2)

M ស្មើចំងាយនៃប្លង់ (α_1) និង $(\alpha_2) \Leftrightarrow h_1 = h_2$

$$\Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|y+5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |y+1| = |y+5| \Leftrightarrow |y+1| = \pm|y+5|$$

$$\Rightarrow y = -3$$

ដូច្នេះ $M(0,-3,0)$

<u>លំហាត់ទី១៣៖</u>

ក្នុងលំហ $oxyz$ គេឲ្យ $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $C(0,0,c)$ ដែល $a,b,c>0$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ខ. កំនត់កូអរដោនេចំនុច H ដែលជាចំណោលកែងនៃគល់ O លើប្លង់ (ABC)

គណនាប្រវែងអង្កត់ OH

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃ ΔABC

ឃ. ឧបមាថា a,b,c ប្រែប្រួលផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចនូវលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=k^2$ ចំពោះ $k>0$ អោយមុន។ ពេលណាទើប ΔABC មានក្រលាផ្ទៃធំបំផុត។ បង្ហាញថា ពេលនោះអង្កត់ OH ក៏ធំបំផុតដែរ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-a,b,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-a,0,c)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right) = (bc, ac, ab)$$

ប្លង់ (ABC) កាត់ $A(a,0,0)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (bc,ac,ab)$ មាន

សមីការ $bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0$

$\Leftrightarrow bcx+acy+abz-abc=0$

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃ H

ដោយ H ជាចំណោលកែងត្រង់ O លើប្លង់ (ABC) គេបាន

$OH\perp(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{OH}\parallel\vec{n}$ ដែល $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)

ដូច្នេះ បន្ទាត់ OH កាត់តាម $O(0,0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(bc,ac,ab)$

មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត៖

$$\begin{cases} x=bct \\ y=act \\ z=abt \end{cases}$$

ដោយ $H\in(ABC)\Leftrightarrow bcx_H+acy_H+abz_H-abc=0$

$\Leftrightarrow\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)t=abc$

$$\Leftrightarrow t=\frac{abc}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow H \text{ មានកូអរដោនេ } \begin{cases} x=\dfrac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2} \\ y=\dfrac{bc^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2} \\ z=\dfrac{ca^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2} \end{cases}$$

- ប្រវែង OH

គេមាន $OH^2=x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2b^4c^4+b^2c^4a^4+c^2a^4b^4}{\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)^2}$

ដូច្នេះ $OH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃ ΔABC

V ជាមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ នោះ

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot OH$$

តែ $V = \dfrac{1}{3}S_{OAB} \cdot OC = \dfrac{1}{6}abc$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot OH$$

$S_{ABC} = \dfrac{abc}{2 \cdot OH} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ឃ. ពេលណាទើបក្រលាផ្ទៃ ΔABC ធំបំផុត

គេមាន $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$\Leftrightarrow \left(S_{ABC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

តែតាមវិសមភាព $Bunhia\,Copski$ គេបាន

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le \sqrt{a^4+b^4+c^4} \cdot \sqrt{b^4+c^4+a^4}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le a^4+b^4+c^4$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \le a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \le \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le \frac{k^4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(S_{ABC}\right)^2 \le \frac{k^4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(S_{ABC}\right)^2 \le \frac{k^4}{12} \Leftrightarrow S_{ABC} \le \frac{k^2}{2\sqrt{3}} = \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$$

សមភាពកើតមាននៅពេល : $a=b=c$

- បង្ហាញថាពេលនោះ OH ក៏ធំបំផុតដែរ

គេមាន $OH^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព *Cauchy* : $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \ge 9$

$$\Leftrightarrow k^2\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}\right) \ge 9 \text{ (ព្រោះ } a^2+b^2+c^2=k^2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}\right) \le \frac{k^2}{9}$$

$\Leftrightarrow OH^2 \le \dfrac{k^2}{9}$ សមភាពកើតមាននៅពេល $a=b=c$

ដូច្នេះបើ S_{ABC} ធំបំផុតនោះ តំលៃអង្កត់ OH គឺ $OH = \dfrac{k}{3}$

<u>លំហាត់ទី១៤</u>: ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(x,y,2\right)$ និង $\vec{v}\left(6,-6,x+y\right)$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត។ ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ និង $\left\|\vec{u}\right\| = \dfrac{1}{3}\left\|\vec{v}\right\|$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តម្លៃ x និង y

ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ លុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

គេទាញ $6x-6y+2(x+y)=0$ ឬ $y=2x$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+4}$ និង

$\|\vec{v}\|=\sqrt{6^2+6^2+(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy+72}$

ដោយ $\|\vec{u}\|=\frac{1}{3}\|\vec{v}\|$ គេទាញ $\sqrt{x^2+y^2+4}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2+2xy+72}$

សមមូល $9x^2+9y^2+36=x^2+y^2+2xy+72$

សមមូល $4x^2+4y^2-xy-18=0(2)$

យកសមីការ (1) ទៅជំនួសក្នុង (2) គេបាន៖

$$4x^2+16x^2-2x^2-18=0$$

$$18x^2-18=0$$

$$18(x-1)(x+1)=0$$

គេទាញឫស $x_1=-1, x_2=1$

ដូចនេះ $(x,y)=(-1,-2);(1,2)$ ។

<u>លំហាត់ទី១៥</u>: ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(x,y,2\right)$ និង $\vec{v}\left(y,2x+2,-4\right)$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត។ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តម្លៃ x និង y

ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា លុះត្រាតែ: $\frac{x_u}{x_v}=\frac{y_u}{y_v}=\frac{z_u}{z_v}$

គេបាន $\frac{x}{y}=\frac{y}{2x+2}=\frac{2}{-4}$

គេទាញ $\begin{cases} y=-2x \\ y=-x-1 \end{cases}$ សមមូល $-2x=-x-1$ នាំឱ្យ $x=1, y=-2$

ដូចនេះ $x=1, y=-2$ ។

លំហាត់ទី១៦: ក្នុងលំហតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបីចំណុច $A(-2,1,-4)$ $B(4,7,-1)$ និង $C(2,-7,4)$ ។

ក.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ ។

ខ.បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

គ.គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

យើងមាន $\overrightarrow{BA}(-6,-6,-3);\overrightarrow{BC}(-2,-14,5)$

$\overrightarrow{CA}(-4,8,-8);\overrightarrow{CB}(2,14,-5)$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែសរសេរៈ

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-6)(-2)+(-6)(-14)+(-3)(5)=12+84-15=81$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-4)(2)+(8)(14)+(-8)(-5)=-8+112+40=144$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=81$ និង $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=144$ ។

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

យើងមាន $\overrightarrow{AB}(6,6,3),\overrightarrow{AC}(4,-8,8)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6)(4)+(6)(-8)+(3)(8)=24-48+24=0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

គ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC

យើងបាន

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{6^2+6^2+3^2}=9$

$AC=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{4^2+(-8)^2+(-8)^2}=12$

និង $BC^2=AB^2+AC^2=9^2+12^2=225$ នាំឱ្យ $BC=15$ ។

ដូចនេះ $AB = 9, AC = 12, BC = 15$ ។

<u>លំហាត់ទី១៧</u>៖ ក្នុងលំហាតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេមានពីរចំណុច $A\left(t, t+1, 3t-1\right)$ និង $B\left(2t, 2t+1, t-5\right)$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ។

ក.កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ OAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់គល់ O ។

ខ.កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឱ្យចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B អប្បបរមា។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក.កំណត់តម្លៃ t

ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ OAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ O

លុះត្រាតែ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ឬ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{OA}\left(t, t+1, 3t-1\right), \overrightarrow{OB}\left(2t, 2t+1, t-5\right)$

គេបាន $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2t^2 + (t+1)(2t+1) + (3t-1)(t-5) = 0$

$$2t^2 + 2t^2 + t + 2t + 1 + 3t^2 - 15t - t + 5 = 0$$

$$7t^2 - 13t + 6 = 0$$

ដោយ $a + b + c = 0$ គេទាញបានឬស $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{7}$

ដូចនេះ $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{6}{7}$ ។

ខ.កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឱ្យចម្ងាយរវាងពីរចំណុច B និង B អប្បបរមា

តាមរូបមន្ត

$$d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(2t-t)^2 + (2t+1-t-1)^2 + (t-5-3t+1)^2}$$

$$= \sqrt{t^2 + t^2 + (-2t-4)^2} = \sqrt{2t^2 + 4t^2 + 16t + 16}$$

$$= \sqrt{6t^2 + 16t + 16} = \sqrt{6}\sqrt{t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{8}{3}} = \sqrt{6}\sqrt{\left(t + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}}$$

ដើម្បីឱ្យ $d(AB)=\sqrt{6}\sqrt{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $t=-\frac{4}{3}$

ហើយតម្លៃអប្បរមាននោះគឺ $d(AB)_{\min}=\sqrt{6}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ។

<u>**លំហាត់ទី១៨៖**</u> ក្នុងលំហតម្រុយអរតេណរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $M_o\left(1,9,4\right)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ ។

ក.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\left(L\right)$ ដែលកាត់តាមចំណុច M_o ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច O លើបន្ទាត់ $\left(L\right)$ ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ?រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅបន្ទាត់ $\left(L\right)$ ខាងលើ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\left(L\right)$

តាមរូបមន្តគេបាន $(L)\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ នាំឱ្យ $(L):\begin{cases}x=1+3t\\y=9+6t\\z=4-2t,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ខ.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$ ដោយ $H\in(L)$ នាំឱ្យ $\begin{cases}x_H=1+3t\\y_H=9+6t\,(1)\\z_H=4-2t\end{cases}$

ដោយ $\left(OH\right)\perp(L)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{OH}\perp\vec{U}$ សមមូល $\overrightarrow{OH}.\vec{U}=0$

ដោយ $\overrightarrow{OH}(1+3t,9+6t,4-2t)$ និង $\vec{U}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ ។

គេបាន $3(1+3t)+6(9+6t)-2(4-2t)=0$ នាំឱ្យ $t=-1$ ។

ដូចនេះ $H(-2,3,6)$ ។

-ចម្ងាយពីគល់ O ទៅ (L) គឺ $d(O,(L)) = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$ ។

<u>លំហាត់ទី១៩</u>៖ ក្នុងលំហតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានពីរចំណុច $A(-1,4,1)$ និង $B(5,-2,4)$ ។

ក.សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

ខ.គេគូសបន្ទាត់ (OH) កែងទៅនឹងបន្ទាត់ត្រង់ចំណុច H ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ។ រួចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (OH) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក.សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB)

គេមាន $(AB): \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

ដូចនេះ $(AB): \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z-1}{3}$

ខ.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (OH)

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ដោយ $H \in (L)$ នោះគេបាន៖

$\dfrac{x_H+1}{6} = \dfrac{y_H-4}{-6} = \dfrac{z_H-1}{3} = t$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_H = 6t-1 \\ y_H = -6t+4 \\ z_H = 3t+1 \end{cases}$

ដោយ $(OH) \perp (AB) \Rightarrow \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0$

តែ $\overrightarrow{OH}\left(6t-1,-6t+4,3t+1\right)$ និង $\overrightarrow{AB}(6,-6,3)$

គេបាន $6(6t-1)-6(-6t+4)+3(3t+1)=0$ នាំឱ្យ $t = \dfrac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ $H(1,2,2)$ និង $(OH): x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$ ។

លំហាត់ទី២០៖ ក្នុងលំហតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A\left(5,5,-4\right)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}\left(-2,-3,6\right)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់នៃ $\left(P\right)$ កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច O លើបន្ទាត់ $\left(P\right)$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃ ចំណុច H រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅបន្ទាត់ $\left(P\right)$ ខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីការប្លង់នៃ $\left(P\right)$

តាមរូបមន្តគេបាន $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$(P): -2(x-5)-3(y-5)+6(z+4)=0$$

ដូចនេះ $(P): -2x-3y+6z+49=0$ ។

ខ.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ៖

តាងកូអរដោនេនៃ H ដោយ $H(x_H, y_H, z_H)$

ដោយ $H\in(P)$ នោះ $-2x_H-3y_H+6z_H+49=0\ (1)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{OH}\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{OH}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=t.\vec{n}$

គេបាន៖ $\begin{cases} x_H=-2t \\ y_H=-3t\,(2) \\ z_H=6t \end{cases} \Leftrightarrow -2(-2t)-3(-3t)+6(6t)+49=0\Rightarrow t=-1$

ដូចនេះ $H(2,3,-6)$ ។

+រកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅបន្ទាត់ $\left(P\right)$

គេបាន $d(O,(P))=\left\|\overrightarrow{OH}\right\|$

នាំឱ្យ $d(O,(P))=\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}=\sqrt{4+9+36}=7$ ។

ដូចនេះ $d(O(P))=7$ ។

លំហាត់ទី២១៖ក្នុងលំហាតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបន្ទាត់ (L) គូសចេញពីចំណុច $M_o(3,1,-3)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(2,-1,-6)$ ។

ក. សរសេរសំណុំសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ។

ខ. ពីចំណុច $A(-4,1,2)$ គេគូសបន្ទាត់ (AH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំណុច H គណនាកូអរដោនេចំណុច H រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសំណុំសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L)

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម $M_0(3,1,-3)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(2,-1,-6\right)$ អាចសរសេរបានតាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x=3+2t \\ y=1-t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-3-6t \end{cases}$

+សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្តៈ

$$(L):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

ដូចនេះ $(L):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{-6}$ ។

ខ.គណនាកូអរដោនេចំណុច A

យើងតាង $H(x_H,y_H,z_H)$

ដោយ $H\in(L)$ នោះកូអរដោនេនៃចំណុច H ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (L)

គេបាន $\begin{cases} x_H = 3+2t \\ y_H = 1-t \quad (1) \\ z_H = -3-6t \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp (L) \\ \vec{U} \parallel (L) \end{cases}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{U}$ សមមូល $\overrightarrow{AH}.\vec{U} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{AH}(4+2t, -3-t, -5-6t)$ និង $\vec{u}(2,-1,-6)$

គេបាន $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 2(4+2t) - 1(-3-t) - 6(-5-6t) = 0$

$$8 + 4t + 3 + t + 30 + 36t = 0$$

$41t + 41 = 0$ នាំឱ្យ $t = -1$

យកតម្លៃ $t = -1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} x_H = 3-2 = 1 \\ y_H = 1+1 = 2 \\ z_H = -3+6 = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,2,3)$ ។

+រកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

$$d(A,(L)) = \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$$

$$= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(1+1)^2 + (2-4)^2 + (3-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

ដូចនេះ $d(A,(L)) = 3$ ឯកតាប្រវែង។

លំហាត់ទី២២៖ ក្នុងលំហតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបីចំណុច $A\left(-2,-3,7\right),B\left(2,-1,5\right)$ និង $C\left(4,-2,3\right)$។ ចូរសរសេរ សមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}(4,2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC}(6,1,-4)$

គេបាន

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & -2\\ 6 & 1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{n}=(-8+2)\vec{i}-(-16+12)\vec{j}+(4-12)\vec{k}$$

$$\vec{n}=-6\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}$$

តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ:

$$(ABC):a(x-x_A)+b(y-y_B)+c(z-z_C)=0$$

$$(ABC):-6(x+2)+4(y+3)-8(z-7)=0$$

$$(ABC):-6x-12+4y+12-8z+56=0$$

$$(ABC):-6x+4y-8z+56=0$$

ដូចនេះ $(ABC):-3x+2y-4z+28=0$ ។

<u>លំហាត់ទី២៣</u>៖ គេឱ្យបីចំណុច $A(1,-2,3)$, $B(3,-1,3)$ និង $C(5,1,4)$ ។

ក.កំណត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំណត់តម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំ រវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរ។

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ.គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

ឃ.កំណត់សមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$ ។

ង.គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ $\left(ABC\right)$ ខាងលើ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក.កំណត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(1,-2,3); B(3,-1,3); C(5,1,4)$

គេបាន

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A\right)=(2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A\right)=(4,3,1)$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}=(2,1,0), \overrightarrow{AC}=(4,3,1)$

+កំណត់តម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរ

តាមរូបមន្ត $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

$$\cos\theta=\frac{8+3+0}{\sqrt{5}.\sqrt{26}}=\frac{11}{\sqrt{130}}=\frac{11\sqrt{130}}{130}$$

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា

នាំឱ្យ A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ.គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}=\frac{3}{2}=1.5\text{ ឯកតាផ្ទៃ។}$$

ឃ.កំណត់សមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(1,-2,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$1(x-1)-2(y+2)+2(z-3)=0$$

$$x-2y+2z-11=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x-2y+2z-11=0$ ។

ង.គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $A(1,-2,3); D(2,1,1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AD}(1,3,-2)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(1,-2,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|1-6-4\right|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1.5$ ឯកតាមាឌ។

+ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ $\left(ABC\right)$

តាង h ជាកម្ពស់របស់តេត្រាអែត $ABCD$ ដែលគូសចេញពីកំពូល D ទៅប្លង់បាតនាំឱ្យ $h=d\left(D,(ABC)\right)$ ជាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}S_{ABC}\times d\left(D,(ABC)\right)$

នាំឱ្យ $d\left(D,(ABC)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{3\times1.5}{1.5}=3$ ឯកតាប្រវែង។

<u>លំហាត់ទី២៤</u>:ក្នុងតម្រុយអតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៅលើអ័ក្ស ។ គេឱ្យពីរចំណុច $A(2,-3,1),B(4,1,5)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ និងកូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ ។

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (AB) ។

គ.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (P) នៃអង្កត់ $\left[AB\right]$។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}(2,-3,1),\overrightarrow{OB}(4,1,5)$

គេបាន $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2)(4)+(-3)(1)+(1)(5)=8-3+5=10$

ដូចនេះ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$

+កូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$

តាមនិយមន័យ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\cos\left(AOB\right)$

នាំឱ្យ $\cos\left(AOB\right)=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}$

ដោយ $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}$

គេបាន $\cos\left(AOB\right)=\frac{10}{\sqrt{14}.\sqrt{42}}=\frac{10}{14\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{21}$

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\left(AB\right)$

តាមរូបមន្ត $\left(AB\right):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt,t\in\mathbb{R}\\ z=z_A+ct\end{cases}$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $\left(AB\right)$ គឺ $\overrightarrow{AB}(2,4,4)$ ។

ដូចនេះ $\left(AB\right):\begin{cases}x=2+2t\\ y=-3+4t,t\in\mathbb{R}\\ z=1+4t\end{cases}$ ។

គ.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ $[AB]$ នៃអង្កត់ $\left[AB\right]$

គេមាន $A(2,-3,1),B(4,1,5)$

យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $\left[AB\right]$ គេបាន

$I\left(\frac{2+4}{2},\frac{-3+1}{2},\frac{1+5}{2}\right)=\left(3,-1,3\right)$ ។

ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $\left[AB\right]$ គឺជាប្លង់កាត់តាមចំណុច I ហើយកែងនឹង $\overrightarrow{AB}$ ។

តាមរូបមន្តសមីការប្លង់គេសរសេរ

$$(P):a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$
$$(P):2(x-3)+4(y+1)+4(z-3)=0$$
$$(p):2x+4y+4z-14=0$$
$$(P):x+2y+2z-7=0$$

លំហាត់ទី២៥:នៅក្នុងតំរុយណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។គេឱ្យ ពីរចំណុច $A(0,-2,0);B(1,-2,1)$ និង (P) ជាប្លង់មានសមីការ $2x+2y+z+4=0$ ។ ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំណុច A និង B ហើយផ្គុំជាមួយប្លង់ (P) បានមុំ ស្រួចមួយមានតម្លៃ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការប្លង់ (Q)

តាង $(Q): ax+by+cz+d=0$ ជាសមីការដែលត្រូវរក។

ដោយប្លង់ (Q) កាត់តាមចំណុច A និង B នោះកូអរដោនេចំណុច A និង B ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការប្លង់ (Q) ។

គេបាន $\begin{cases} a(0)+b(-2)+c(0)+d=0 \\ a(1)+b(-2)+c(1)+d=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -2b+d=0 \\ a-2b+c+d=0 \end{cases}$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\begin{cases} b=\dfrac{d}{2}(1) \\ a=-c(2) \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតបើយើងតាង θ ជាមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}}{\left\|\overrightarrow{n_P}\right\|.\left\|\overrightarrow{n_Q}\right\|}$

ដោយ $\overrightarrow{n_P}(2,2,1)$ និង $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) និង (Q)

គេបាន៖ $\cos\theta=\dfrac{2a+2b+c}{\sqrt{2^2+2^2+1}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{2a+2b+c}{3.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ គេទាញ $\dfrac{2a+2b+c}{3.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $2(2a+2b+c)^2=9(a^2+b^2+c^2)(3)$

យកសមីការ (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន:

$$2(-2c+d+c)^2=9(c^2+\frac{d^2}{4}+c^2)$$

$$2(-c+d)^2=9\left(2c^2+\frac{d^2}{4}\right)$$

$$2(c^2-2cd+d^2)=18c^2+\frac{9}{4}d^2$$

$$2c^2-4cd+2d^2-18c^2-\frac{9}{4}d^2=0$$

$$-16c^2-4cd-\frac{d^2}{4}=0$$

$$16c^2+4cd+\frac{d^2}{4}=0$$

$$\left(4c+\frac{d}{2}\right)^2=0$$

នាំឱ្យ $c=-\frac{d}{8}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញ $b=\frac{d}{2}, a=\frac{d}{8}$ ។

យកតម្លៃ $a=\frac{d}{8}, b=\frac{d}{2}$ និង $c=-\frac{d}{8}$ ជំនួសក្នុងសមីការប្លង់ (Q) គេបានៈ

$(Q): \frac{d}{8}x+\frac{d}{2}y-\frac{d}{8}z+d=0$ សមមូល $(Q): x+4y-z+8=0$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ (Q) ដែលត្រូវរកគឺៈ $(Q): x+4y-z+8=0$ ។

លំហាត់ទី២៦: នៅក្នុងតំរុយណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\vec{u}(x,y,2)$ ។
គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា

$$(L_1):\frac{x+5}{9}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{-1},(L_2):\frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z+1}{-3}$$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2) ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1) ។

គ. គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (Q) ហើយស្របនឹង (L_2)

ដោយ $(L_1):\frac{x+5}{9}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{-1}$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-5,-4,3)$

ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{u_1}(9,4,-1)$

និង $(L_2):\frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z+1}{-3}$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម $B(-1,7,-1)$

ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{u_2}(3,-4,-3)$

តាង $\overrightarrow{n_P}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (Q) ហើយស្របតាម (L_2)

គេបាន $$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & 4 & -1\\ 3 & -4 & -3\end{vmatrix}=-16\vec{i}+24\vec{j}-48\vec{k}$$

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (Q) ហើយស្របតាម (L_2) អាចសរសេរៈ

$(P):a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(P):-16(x+5)+24(y+4)-48(z-3)=0$

ដូចនេះ $(P):2x-3y+6z-20=0$ ។

ខ.សរសេរសមីការប្លង់ (L_2) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

តាង $\overrightarrow{n_Q}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របតាម (L_1)

គេបាន $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k}$

សមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របតាម (L_1) អាចសរសេរ:

$$(Q): a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$(Q): -16(x+1) + 24(y-7) - 48(z+1) = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x - 3y + 6z + 29 = 0$ ។

គ.គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

គេមាន $(L_1) \subset (P)$ ហើយ $(L_2) \subset (Q)$ ដែល $(P) \parallel (Q)$ នោះគេទាញបាន:

$d\left((L_1),(L_2)\right) = d\left((P),(Q)\right) = d\left(A,(Q)\right)$ (ព្រោះ $A \in (P)$) ។

$$d\left((L_1),(L_2)\right) = \frac{|2x_A - 3y_A + 6z_A + 29|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$d\left((L_1),(L_2)\right) = \frac{|2(-5) - 3(-4) + 6(3) + 29|}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

ដូចនេះចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) គឺ $d\left((L_1),(L_2)\right) = 7$ ឯកតាប្រវែង។

<u>លំហាត់ទី២៧:</u> ក្នុងលំហគេឱ្យពីរចំណុច A និង B ដែល $AB = 8cm$ ហើយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។

ក.ចំពោះគ្រប់ចំណុច M នៃលំហចូរស្រាយថា $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

ខ.កំណត់សំណុំចំណុច M នៃលំហដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. ចំពោះគ្រប់ចំណុច M នៃលំហស្រាយថា $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

គេមាន: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ និង $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

ដោយ $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា

នាំឱ្យគេទាញ $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}$

នោះ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2$$

ដោយ $\overrightarrow{MI}^2=MI^2$ និង $\overrightarrow{IA}^2=IA^2$

ដូចនេះ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$ ។

ខ. កំណត់សំណុំចំណុច M នៃលំហដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$

គេបាន: $MI^2-IA^2=0$ នាំឱ្យ $MI=IA$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ នោះ $IA=\dfrac{AB}{2}=4cm$

គេទាញបាន $MI=4cm$ ថេរហើយ I ជាចំណុចនឹង។

ដូចនេះសំនុំចំណុច M ជាស្វ៊ែផ្ចិត I កាំ $R=IA=4cm$។

<u>លំហាត់ទី២៨:</u> គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P):2x-2y+z-1=0$ និង $(Q):-2x+2y-z-17=0$ ។

ក.បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច $A(1,2,3)$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។ ពីចំណុច A គេគូសបន្ទាត់ $(AH)\perp(Q)$ ដោយ $H\in(Q)$ ។សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក.បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) ៖

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\overrightarrow{n_P}(2,-2,1)$ និង $\overrightarrow{n_Q}(-2,2,-1)$

នោះ ទាញបាន៖ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{2}{-2}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1}$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{n_P} \parallel \overrightarrow{n_Q}$ នោះ (P) ស្រប (Q) ។

+គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ពីរ៖

យកចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(P)$ គេបាន $2x_0-2y_0+z_0-1=0 (1)$ ។ ដោយ $(P)\parallel(Q)$ គេបាន៖ $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M_0,(Q)\right)=\frac{\left|-2x_0+2y_0-z_0-17\right|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}}$

ឬ $d\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|-2x_0+2y_0-z_0-17\right|}{3}$

តាម (1) គេទាញ $-1=-2x_0+2y_0-z_0$ ហេតុនេះគេបាន:

$$d\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|-1-17\right|}{3}=\frac{18}{3}=6$$

ដូចនេះ $d\left((P),(Q)\right)=6$ ឯកតាប្រវែង

ខ. បង្ហាញថាចំណុច $A(1,2,3)$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P)

គេមាន $A(1,2,3)$ និង $(P): 2x-2y+z-1=0$

យកកូអរដោនេនៃ A ជួសក្នុង (P)

គេបាន $2(1)-2(2)+3-1=0$ ឬ $2-4+3-1=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះចំណុច A ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

+សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$

តាងចំណុច $H(x_H, y_H, z_H) \in (Q)$

គេបាន $-2x_H + 2y_H - z_H - 17 = 0(1)$

ដោយ $\overrightarrow{AH} \perp (Q)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{n_0}$ សមមូល $\overrightarrow{AH} = t.\overrightarrow{n_0}$

តែ $\overrightarrow{AH}(x_H - 1, y_H - 2, z_H - 3)$

គេទាញបាន $\begin{cases} x_H - 1 = -2t \\ y_H - 2 = 2t \\ z_H - 3 = -t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_H = -2t + 1 \\ y_H = 2t + 2 \ (2) \\ z_H = -t + 3 \end{cases}$

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$-2(2t+1) + 2(2t+2) - (-t+3) - 17 = 0$$

$$4t - 2 + 4t + 4 + t - 3 - 17 = 0$$

$$9t - 18 = 0 => t = 2$$

គេបាន $H(-3, 6, 1)$ និង $\overrightarrow{AH}(-4, 4, -2)$

យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AH]$

នាំឱ្យ $I\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ ឬ $I(-1, 4, 2)$ ។

សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$ គឺជាប្លង់កាត់តាម I ហើយកែងនឹង $\overrightarrow{AH}$

សមីការប្លង់អាចសរសេរ៖

$-4(x+1) + 4(y-4) - 2(z-2) = 0$

$-4x - 4 + 4y - 16 - 2z + 4 = 0$ ឬ $-2x + 2y - z - 8 = 0$

$-4x + 4y - 2z - 16 = 0$

ដូចនេះសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AH]$ គឺ $-2x + 2y - z - 8 = 0$ ។

លំហាត់ទី២៩៖ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានពីរវិចទ័រ $\vec{u}(x,y,2)$ និង $\vec{v}(6,-6,x+y)$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត។ ចូរកំណត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ និង $\|\vec{u}\|=\frac{1}{3}\|\vec{v}\|$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ x និង y

ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ លុះត្រាតែ $\vec{u}.\vec{v}=0$

គេទាញ $6x-6y+2(x+y)=0$ ឬ $y=2x$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+4}$ និង

$\|\vec{v}\|=\sqrt{6^2+6^2+(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy+72}$

ដោយ $\|\vec{u}\|=\frac{1}{3}\|\vec{v}\|$ គេទាញ $\sqrt{x^2+y^2+4}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2+2xy+72}$

សមមូល $9x^2+9y^2+36=x^2+y^2+2xy+72$

សមមូល $4x^2+4y^2+xy-18=0$ (2)

យកសមីការ (1)ទៅជំនួសក្នុង (2) គេបាន៖

$4x^2+16y^2+2x^2-18=0$

$18x^2-18=18(x-1)(x+1)=0$

គេទាញឬស $x_1=-1,x_2=1$

ដូចនេះ $(x,y)=(-1,-2);(1,2)$

លំហាត់ទី៣០៖ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(x,y,2)$ និង $\vec{v}(y,2x+2,-4)$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត។ ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា។

ដើម្បីឱ្យ $\vec{v}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នាលុះត្រាតែ: $\frac{x_u}{x_v}=\frac{y_u}{y_v}=\frac{z_u}{z_v}$

គេបាន $\frac{x}{y}=\frac{y}{2x+2}=\frac{2}{-4}$

គេទាញ $\begin{cases} y=-2x \\ y=-x-1 \end{cases}$ សមមូល $-2x=-x-1$ នាំឱ្យ $x=1, y=-2$

ដូចនេះ $x=1, y=-2$ ។

លំហាត់ ៣១៖ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,1,-4)$ $B(4,7,-1)$ និង $C(4,-7,4)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ។

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

គ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

យើងមាន $\overrightarrow{BA}(-6,-6,-3)$; $\overrightarrow{BC}(-2,-14,5)$ និង $\overrightarrow{CA}(-4,8,-8)$; $\overrightarrow{CB}(2,-14,5)$

តាមរយៈកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែសរសេរៈ

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-6)(-2)+(-6)(-14)+(-3)(5)=12+84-15=81$

$\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}=(-4)(2)+(8)(14)+(8)(-5)=-8+112+40=144$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}=81$ និង $\overrightarrow{CA}\,.\overrightarrow{CB}=144$ ។

ខ.បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

យើងមាន $\overrightarrow{AB}(6,6,3),\ \overrightarrow{AC}(4,-8,8)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}=(6)(4)+(6)(-8)+(3)(8)=24-48+24=0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

គ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC

យើងបាន

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{6^2+6^2+3^2}=9$$

$$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-8)^2+(-8)^2}=12$$

និង $BC^2=AB^2+AC^2=9^2+12^2=225$ នាំឲ្យ $BC=15$ ។

ដូចនេះ $AB=9, AC=12, BC=15$ ។

<u>លំហាត់ទី៣២</u>៖ ក្នុងលំហតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានពីរចំនុច $A(t,t+1,3t-1)$ និង $B(2t,2t+1,t-5)$ ដែល $t\in R$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ OAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់គល់ O ។

ខ. កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B អប្បរមា។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ t

ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ OAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់គល់ O លុះត្រាតែ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ឬ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{OA}(t, t+1, 3t-1); \overrightarrow{OB}(2t, 2t+1, t-5)$

គេបាន

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2t^2 + (t+1)(2t+1) + (3t-1)(t-5) = 0$$
$$2t^2 + 2t^2 + t + 2t + 1 + 3t^2 - 15t - t + 5 = 0$$
$$7t^2 - 13t + 6 = 0$$

ដោយ $a+b+c=o$ គេទាញឫស $t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{7}$ ។

ដូចនេះ $t_1 = 1, t_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{7}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B អប្បរមា

តាមរូបមន្ត

$$d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
$$= \sqrt{(2t-t)^2 + (2t+1-t-1)^2 + (t-5-3t+1)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + t^2 + (-2t-4)^2} = \sqrt{2t^2 + 4t^2 + 16t + 16}$$
$$= \sqrt{6t^2 + 16t + 16} = \sqrt{6}\sqrt{t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{8}{3}} = \sqrt{6}\sqrt{\left(t + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}}$$

ដើម្បីឲ្យ $d(AB) = \sqrt{6}\sqrt{\left(t + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}}$ មានតម្លៃអប្បរមាលុះត្រាតែ

$t=-\dfrac{4}{3}$ ហើយតម្លៃអប្បរមានោះគឺ $d(AB)_{\min}=\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ។

<u>លំហាត់ទី៣៣</u>៖ ក្នុងលំហាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $M_0(1,9.4)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច M_0 ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

ខ. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច O ទៅនិងបន្ទាត់ (L) ។ គណនាកូអរដោនេ នៃចំណុច H រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅបន្ទាត់ (L) ខាងលើ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ M_0 ដែលកាត់តាមចំណុច M_0 ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$

តាមរូបមន្តគេបាន $(L)\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$ នាំឲ្យ $(L)\begin{cases}x=1+3t\\ y=9+6t\\ z=4-2t\end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

ខ. គណនាកូអរដោនេចំណុច H

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$ ដោយ $H\in(L)$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x_H=1+3t\\ y_H=9+6t\\ z_H=4-2t\end{cases}\qquad(1)$

ដោយ $(OH)\perp(L)$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{OH}\perp\vec{U}$ សមមូល $\overrightarrow{OH}.\vec{U}=0$

ដោយ $\overrightarrow{OH}(1+3t,9+6t,4-2t)$ និង $\vec{U}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ ។

គេបាន $3(1+3t)+6(9+6t)-2(4-2t)=0$ នាំឲ្យ $t=1$

ដូចនេះ $H(-2,3,6)$ ។

ចម្ងាយពីគល់ O ទៅ (L) គឺ $d(O,(L)) = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \sqrt{4+9+36} = 7$ ។

<u>លំហាត់ទី៣៤</u>៖ ក្នុងលំហគម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\vec{v}(6,-6,x+y)$ គេមានពីរចំណុច $A(-1,4,1)$ និង $B(5,-2,4)$ ។

ក. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

ខ. គេគូសបន្ទាត់ (OH) កែងទៅនឹងបន្ទាត់ត្រង់ចំណុច H ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ។ រួចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (OH)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (OH)

គេមាន $(AB): \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

ដូចនេះ $(AB): \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z-1}{3}$

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (OH)

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ដោយ $H \in (L)$ នោះគេបាន៖

$\dfrac{x_H+1}{6} = \dfrac{y_H-4}{-6} = \dfrac{z_H-1}{3} = t$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x_H = 6t-1 \\ y = -6t+4 \\ z = 3t+1 \end{cases}$

ដោយ $(OH) \perp (AB) \Rightarrow \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0$

តែ $\overrightarrow{OH}(6t-1, -6t+4, 3t+1)$ និង $\overrightarrow{AB}(6,-6,3)$

គេបាន $6(6t-1) - 6(-6t+4) + 3(3t+1) = 0$ នាំឲ្យ $t = \dfrac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ $H(1,2,2)$ និង $(OH): x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ ។

<u>លំហាត់ទី៣៥៖</u> ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច $A(4,0,0), B(0,-2,0)$ និង $D(4,2,2)$ ។

ក. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រោម។

ខ. ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមចំនុច A,B និង C ។

គ. យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងប្រលេឡូក្រោម $ABCD$

ឃ. គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រោម

គេមាន $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រោម។

ខ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

តាមរូបមន្ត $(BC):\begin{cases} x=x_B+at \\ y=y_B+bt \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=z_B+ct \end{cases}$

ដូចនេះ $(BC):\begin{cases} x=0 \\ y=-2+2t \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$

កំណត់សមីការនៃប្លង់កាត់តាមចំនុច A,B និង C ៖

តាង $(P): ax+by+cz+d=0$ ជាប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P)

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4a+d=0 \\ -2b+d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-\frac{d}{4},b=\frac{d}{2},c=-\frac{d}{2}$

យក $a=-\frac{d}{4},b=\frac{d}{2},c=-\frac{d}{2}$ ជួសក្នុង (P) គេបាន៖

$-\frac{d}{4}x+\frac{d}{2}y-\frac{d}{2}z+d=0$ ឬ $(P): x-2y+2z-4=0$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងប្រលេឡូក្រោម $ABCD$ ៖

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$

ដោយ $H\in(BC)$ នោះ $\begin{cases} x_H=0 \\ y_H=-2+2t \quad (1) \\ z_H=2t \end{cases}$

គេបាន $\overrightarrow{AH}=(-4,-2+2t,2t)$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(0)(-4)+2(-2+2t)+2(2t)=0$ នោះ $t=\frac{1}{2}$

យក $t=\frac{1}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $x_H=0, y_H=-2+1=-1, z_H=1$

ដូចនេះ $H(0,-1,1)$

ហើយ $AH=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+1^2}=3\sqrt{2}$ និង $BC=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$

គេបាន $S_{ABCD}=AH.BC=(3\sqrt{2})(2\sqrt{2})=12$

ដូចនេះ $AH=3\sqrt{2}, S_{ABCD}=12$ (ឯកត្តាផ្ទៃ)។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ ៖

$\overrightarrow{SA}=(3,-6,6),\overrightarrow{AB}=(-4,-2,0),\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$

គេមាន $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}=-12+12+0=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AB}$

ហើយ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AD}=0+12+12=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AD}$

នោះគេទាញបាន $(SA)\perp(ABCD)$ ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times SA$ ដោយ $SA=\sqrt{9+36+36}=9$

ដូចនេះ $V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times 12\times 9=36$ (ឯកតាមាឌ)។

<u>លំហាត់ទី៣៦</u>៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យប្លង់ (P) មួយកាត់តាមចំនុច $A(3,2,-4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,3,6)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) ខាងលើ។

ខ. ពីចំណុច $B(2,3,4)$ គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងប្លង់ (P) $(H\in(P))$ គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (P)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(3,2,-4)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,3,6)$

សរសេរតាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$2(x-3)+3(y-2)+6(z+4)=0$$

$$2x-6+3y-6+6z+24=0$$

$$2x+3y+6z+12=0$$

ដូចនេះ $(P): 2x+3y+6z+12=0$

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ដោយ $H\in(P)$ នោះកូអរដោនេចំណុច H

ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P) ។

គេបាន $2x_H+3y_H+6z_H+12=0$ (1)

ដោយ $(BH)\perp(P)$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{BH}\parallel\overrightarrow{n_P}$

(ព្រោះ $\overrightarrow{n_P}\perp(P)$ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់)។

គេទាញ $\overrightarrow{BH}=t.\overrightarrow{n_P}$ តែ $\overrightarrow{BH}=(x_H-2, y_H-3, z_H-4)$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x_H-2=2t \\ y_H-3=3t \\ z_H-4=6t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_H=2t-2 \\ y_H=3t+3 \\ z_H=6t+4 \end{cases}$ (2)

តាម (1) និង (2)គេទាញបាន

$$2(2t+2)+3(3t+3)+4(6t+4)+12=0$$

$$4t+4+9t+9+36t+24+12=0$$
$$49t+49=0$$
$$\Rightarrow \quad t=-1$$

ដូចនេះ $H(0,0,-2)$

ទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (P)

គេបាន

$$d(B,(p))=\sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H+y_B)^2+(z_H+z_B)^2}$$
$$=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$$

ដូចនេះ $d(B,(p))=7$ ឯកត្តាប្រវែង

<u>លំហាត់ទី៣៧៖</u>

គេឲ្យ $(L):\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+5}{6}$, $(P):-2x+2y-z+1=0$

ក. បង្ហាញថា (L) ស្របនិង (P)

ខ. នៅលើបន្ទាត់ (L) គេដាក់ចំនុច A មួយមានអាប់ស៊ីស $x=-3$ រួចគេគូស AH កែងនិងប្លង់ (P) ត្រង់ H ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចទាញរកចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. បង្ហាញថា (L) ស្របនិង (P)

បន្ទាត់ (L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(2,5,6)$

និងប្លង់ (P) មានវ៉ិទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(-2,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{u_L}.\overrightarrow{n_P}=(2)(-2)+(5)(2)+(6)(-1)=0$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{u_L}\perp\overrightarrow{n_P}$ ។

ដោយ $\overrightarrow{u_L}\perp\overrightarrow{n_P}$ និង $\overrightarrow{n_P}\perp(P)$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{n_P}\,||\,(P)$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (L) ស្របនឹងប្លង់ (P) ។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំនុច H

ដោយចំណុច $A\in(L)$ ហើយមានអាប់ស៊ីស $x-3$ នោះគេបាន៖

$\dfrac{-3+5}{2}=\dfrac{y_A-1}{5}=\dfrac{z_A+5}{6}$ នាំឲ្យ $y_A=6$ និង $z_A=1$

គេបាន $A(-3,6,1)$ ។

តាង $H(x_H,y_H,z_H)\in(P)$

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច H ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (P)

គេបាន $-2x_H+2y_H-z_H+1=0 \qquad (1)$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp(P)$ នាំឱ្យគេទាញបាន $\overrightarrow{AH}\parallel\overrightarrow{n_p}$ សមមូល $\overrightarrow{AH}=t.\overrightarrow{n_p}$

ដោយគេមាន $\overrightarrow{AH}=(x_H+3,y_H-6,z_H-1)$ និង $\overrightarrow{n_P}=(-2,2,-1)$

គេទាញ $\begin{cases}x_H+3=-2t\\ y_H-6=2t\\ z_H-1=-t\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_H=-2t-3\\ y_H=2t+6\\ z_H=-t+1\end{cases} \qquad (2)$

យកសមីការ (2)ជួសក្នុងសមីការ (1)គេបាន៖

$$-2(-2t-3)+2(2t+6)-(-t+1)+1=0$$
$$4t+6+4t+12+t-1+1=0$$
$$9t+18=0 \quad \Rightarrow t=-2$$

យកតម្លៃ $t=-2$ ជួសក្នុង (2)គេបាន $H(1,2,3)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(L)\parallel(P)$ ដូចនេះចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) កំណត់ដោយ៖

$d((L),(P))=d(A,(P))=AH$ ដោយ $\overrightarrow{AH}=(4,-4,2)$ គេបាន៖

$d((L),(P))=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

ដូចនេះ $d((L),(P))=6$ ឯកតាប្រវែង

<u>លំហាត់ទី៣៨៖</u> គេឲ្យចំណុច M , N , P , Q ដែលជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ $[AB],[BD],[AD]$ និង $[BC]$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់ទីតាំងនៃចំណុច A , B , C , D គេបាន:

ក. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

ខ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

តែ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD} \quad (i)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$

តែ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ (M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AC]$)

$\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ (N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BD]$)

យើងបាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN} \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

ខ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} \quad ,(iii)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PD}$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{PQ}$

តែ $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$, $\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$

នោះយើងបាន: $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{PQ} \quad (iv)$

តាម (iii) និង (iv) យើងបាន $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

លំហាត់ទី៣៩៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេឲ្យ $(L):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+8}{3}$ និង $(P):x-2y-2z-14=0$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P) ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

គ. សរសេរប្រព័ន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+8}{3} \\ x-2y-2z-14=0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការគេបាន $A(4,-3,-2)$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

យក $M(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ ជាចំណុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន $\overrightarrow{AM}(\mathrm{x}-4,\mathrm{y}+3,\mathrm{z}+2)$

តាង $\overrightarrow{n_Q}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) នោះគេបាន $\overrightarrow{n_Q}=\vec{u}\times\overrightarrow{AM}$

ដែល $\vec{u}=(2,-2,3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

គេបាន $\overrightarrow{n_Q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ x-4 & y-3 & z+2 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{n_Q}=(-2\mathrm{z}-3\mathrm{y}-13)\vec{i}-(-2\mathrm{z}-3\mathrm{x}+16)\vec{j}+(2\mathrm{y}+2\mathrm{x}+14)\vec{k}$$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(Q)\perp(\mathrm{P})$ នាំឲ្យ $\vec{n}_Q\perp\vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_P.\vec{n}_P=0$

គេបាន $1.(-2\mathrm{z}-3\mathrm{y}-13)-2(-2\mathrm{z}+3\mathrm{x}-16)-2(2\mathrm{y}+2x-2)=0$

$$-2z-3y-13+4z-6x+32-4y-4x+4=0$$

$$-10x-7y+2z+23=0$$

ដូចនេះ $(\mathrm{Q}):10x+7y-2z-23=0$ ។

គ. សរសេរប្រព័ន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាង (P) និង (Q)

បន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_d=\vec{u}_P\times\vec{u}_Q$

ដែល $\vec{n}_P=(1,-2,-2)$ និង $\vec{n}_Q=(10,7,-2)$ ។

គេបាន $\vec{u}_d=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \end{vmatrix}=18\vec{i}-18\vec{j}+27\vec{k}$ ។

យក $N_0\in(\mathrm{d})$ នាំឲ្យ $N_0\in(\mathrm{P})$ និង $N_0\in(Q)$ ។

គេបាន $\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 2z_0 - 14 = 0 \\ 10x_0 + 7y_0 - 2z_0 - 23 = 0 \end{cases}$

យកតម្លៃ $x_0 = 0$ នាំឲ្យ $y_0 = 1,\ z_0 = -8$ ។

គេបាន $N_0(0,1,-8)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) អាចសរសេរ:

$$(\mathrm{d}):\begin{cases} x = 18t \\ y = 1 - 18t \\ z = -8 + 27t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>លំហាត់ទី៤០៖</u> នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(\mathrm{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យប្លង់ពីរ: $(\mathrm{P}): \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + \mathrm{z} + 4 = 0$ និង $(\mathrm{Q}): 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 2\mathrm{z} - 13 = 0$ ។

ក. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ ហើយកែងរួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ។

គ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (R) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q)

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\vec{n}_P = (1,-2,1)$ និង $\vec{n}_Q = (2,3,-2)$ ។

តាង $\vec{u}_L$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គេបាន:

$$\vec{u}_L = \vec{u}_P \times \vec{u}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad ។$$

យក $M_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0) \in (\mathrm{L})$ នាំឲ្យ $M_0 \in (\mathrm{P})$ និង $M_0 \in (\mathrm{Q})$

គេបាន $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 + 4 = 0 \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 - 13 = 0 \end{cases}$

សន្មតយក $z_0 = 0$ នាំឲ្យគេទាញបាន $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ ។

ដូចនេះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត:

$$(\mathrm{L}): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ឬ $(\mathrm{L}): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (R)

តាង $\vec{n}_R$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ ហើយកែងរួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ។

គេមាន $(\mathrm{R}) \perp (\mathrm{P})$ និង $(R) \perp (\mathrm{Q})$

នាំឲ្យ $\vec{n}_R \perp \vec{n}_P$ និង $\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ នាំឲ្យ $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$

គេបាន $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (R) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត:

$$(\mathrm{R}): \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_A) + b(\mathrm{y} - y_A) + c(\mathrm{z} - z_A) = 0$$

$$(\mathrm{R}): 1(\mathrm{x} - 0) + 4(\mathrm{y} - 6) + 7(\mathrm{z} - 8) = 0$$

ដូចនេះ $(\mathrm{R}): x + 4y + 7z - 80 = 0$ ។

គ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (R)

កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (R) ជាចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} & (1) \\ \mathrm{x} + 4\mathrm{y} + 7\mathrm{z} - 80 = 0 & (2) \end{cases}$$

តាង $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} = t$

នាំឱ្យ $t=1$ យកជួសក្នុង (3) គេបាន $x=3,\ \ y=7,\ \ z=7$ ។
ដូចនេះ $M(3,7,7)$ ។

<u>**លំហាត់៤១៖**</u> គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ $(L_1):\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-6}{4}=\dfrac{z+2}{3}$ និង

$$(L_2):\frac{x-3}{9}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-2}{-1}$$

ក. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ខ. គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

តាង $A(x_A,y_A,z_A)\in(L_1)$ នាំឲ្យកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_1)

គេបាន $\dfrac{x_A+2}{-3}=\dfrac{y_A-6}{4}=\dfrac{z_A+2}{3}=p$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x_A=-3p-2\\ y_A=4p+6\\ z_A=3p-2\end{cases}$ (1)

តាង $B(x_B,y_B,z_B)\in(\mathrm{L}_2)$ នាំឱ្យកូអរដោនេ B ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_2) ។

គេបាន $\dfrac{x_B+6}{9}=\dfrac{y_B+5}{4}=\dfrac{z_B-2}{-1}=q$ នាំឱ្យ $\begin{cases}x_B=9q-6\\ y_B=4q-5\\ z_B=-q+2\end{cases}$ (2)

បើ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) នោះគេបាន៖

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{U_1}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{U_2}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_2}=0\end{cases}$

ដែល $\overrightarrow{U_1}$ និង $\overrightarrow{U_2}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយគេមាន $\overrightarrow{AB}(9q+3p-4,4q-4p-11,-q-3p+4)$

និង $\overrightarrow{U_1}(-3,4,3)$ $,\overrightarrow{U_2}(9,4,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_1} = -3(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$

នាំឱ្យ $-14q-34p-20=0 \quad (3)$

និង $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_2} = 9(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$

នាំឲ្យ $98q+14p-84=0 \quad (4)$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} -14q-34p-20=0 \\ 98q+14p-84=0 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} p=-1 \\ q=1 \end{cases}$

យកតម្លៃ $p=-1$ និង $q=1$ ជួសក្នុងសមីការ (1) និង (2) គេបាន៖

$A(1,2,-5)$ និង $B(3,-1,1)$ ។ សមីការបន្ទាត់ (AB) អាចសរសេរ

$(AB): \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ ឬ $(AB): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+5}{6}$

ដូចនេះ $(\triangle): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+5}{6}$ ជាបន្ទាត់កែងរួមដែលត្រូវរក។

ខ. គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយ A និង B ជាចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាង (L_1) និង (L_2)

នោះគេបាន៖

$$d((L_1),(L_2)) = d(AB) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$d((L_1),(L_2)) = \sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+(1+5)^2} = 7$$

ដូចនេះ $d((L_1),(L_2)) = 7$ (ឯកតាប្រវែង)។

លំហាត់ទី៤២៖ ក្នុងលំហមានតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (ឯកត្តា $1cm$ នៅលើអ័ក្ស)។
គេឲ្យបីចំណុច $A(-2,-3,7)$, $B(2,-1,5)$ និង $C(4,-2,3)$ ។
ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

តាង n ជាវ៉ិចទ័រណោម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គេបាន $n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(4,2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(6,1,-4)$

គេបាន៖

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & -2\\ 6 & 1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{n}=(-8+2)\vec{i}-(-16+12)\vec{j}+(4-12)\vec{k}$$

$$\vec{n}=-6\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}$$

តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ៖

$$(ABC):a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$(ABC):-6(x+2)+4(y+3)-8(z-7)=0$$

$$(ABC):-6x-12+4y+12-8z+56=0$$

$$(ABC):-6x+4y-8z+56=0$$

ដូចនេះ $(ABC):-6x+4y-8z+56=0$ ។

លំហាត់ទី៤៣៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (គេយកឯកតា $1cm$ នៅលើអ័ក្ស)។

គេឱ្យបីចំណុច $A(1,-2,3)$,$B(3,-1,3)$,$C(5,1,4)$

ក. កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តលៃកូស៊ីនុសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រនេះ

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(1,-2,3)$,$B(3,-1,3)$,$C(5,1,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,3,1)$

កំនត់តំលៃកូស៊ីនុសនៃមុំរវាងវ៉ិទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ៖

តាមរូបមន្ត៖

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{8+3+0}{\sqrt{5}.\sqrt{26}}=\frac{11}{\sqrt{130}}=\frac{11\sqrt{130}}{130}$$

ខ. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-2.\vec{j}+2.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា

នាំឲ្យ $A, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ មិនរត់ត្រង់គ្នា

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}=\frac{3}{2}=1,5$ (ឯកត្តាផ្ទៃ)។

ឃ. កំនត់សមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

តាមរូបមន្ត៖

$$(\mathrm{ABC}): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$1.(x-1)+2(y+2)+2(z-3)=0$$

$$x-2y+2z-11=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x-2y+2z-11=0$

ង. គណនាមឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$

តាមរូមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $A(1,-2,3)$,$D(2,1,1)$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{AD}=(1,3,-2)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot|1-6-4|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$ (ឯកត្តាមាឌ)

ទាញរកចំងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)

តា h ជាកំពស់របស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ដែលគូសចេញពីកំពូល D ទៅប្លង់បាត

នាំឱ្យ $h=d(D,(ABC))$ ជាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\times d(D,(ABC))$

នាំឲ្យ $d(D,(ABC))=\frac{3V_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{3.1,5}{1,5}=3$ ឯកត្តាប្រវែង

ផ្នែក
លំហាត់អនុវត្ត

លំហាត់ទី១៖ គណនាកូអរដោនេខាងក្រោម

ក. $A(1;2;5);B(5;7;1)$

ខ. $A(3;6;3);B(1;-2;7)$

គ. $A(0;1;4);B(5;3;5)$

ឃ. $A(2;0;-1);B(3;2;7)$

លំហាត់ទី២៖ រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រឯកតាខាងក្រោម៖

ក. $\vec{j}\times\vec{i}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}$

ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}$ ច. $\vec{k}\times\vec{i}$

លំហាត់ទី៖ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{u}.\vec{v}$

ក. $\vec{u}=(1;2;3);\vec{v}=(4;3;1)$

ខ. $\vec{u}=(2;3;5);\vec{v}=(5;3;1)$

គ. $\vec{u}=(2;6;2);\vec{v}=(0;-1;-2)$

ឃ. $\vec{u}=(2;3;4);\vec{v}=(2;5;7)$

លំហាត់ទី៤៖ គណនាណមនៃ $\left|\vec{u}\right|$

ក. $\vec{u}=(1;2;3)$

ខ. $\vec{u}=(2;5;8)$

គ) $\vec{u}=(3;5;1)$

ឃ. $\vec{v}=(2;1;5)$

លំហាត់ទី៥៖ រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផងនឹង $\vec{v}$ ផង ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(1,-2,1)$

ខ. $\vec{u}=(-1,1,2)$, $\vec{v}=(0,1,0)$

គ. $\vec{u}=(12,-3,0)$, $\vec{v}=(-2,5,0)$

ឃ. $\vec{u}=(-10,0,6)$, $\vec{v}=(7,0,0)$

ង. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

<u>លំហាត់ទី៦</u>៖ រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាជ្រុងជាប់ក្នុងករណីនីមួយៗ

ក. $\vec{u}=(3,2,-1)$, $\vec{v}=(1,2,3)$

ខ. $\vec{u}=(2,-1,0)$, $\vec{v}=(-1,2,0)$

គ. $\vec{u}=\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$

<u>លំហាត់ទី៧</u>៖ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុចខាងក្រោមជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡា៖

ក. $(1,1,1),(2,3,4),(6,5,2),(7,7,5)$

ខ. $(2,-1,1),(5,1,4),(0,1,1),(3,3,4)$

<u>លំហាត់ទី៨</u>៖ រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $(0,0,0),(1,2,3),(-3,0,0)$

ខ. $(2,-3,4),(0,1,2),(-1,2,0)$

គ. $(1,3,5),(3,3,0),(-2,0,5)$

ឃ. $(1,2,0),(-2,1,0),(0,0,0)$

<u>លំហាត់ទី៩</u>៖ រក $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ៖

ក. $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(2,1,0),\vec{w}=(0,0,1)$

ខ. $\vec{u}=(2,0,1),\vec{v}=(0,3,0),\vec{w}=(0,0,1)$

គ. $\vec{u}=(2,0,0),\vec{v}=(1,1,1),\vec{w}=(0,2,2)$

ឃ. $\vec{u}=\vec{i},\ \vec{v}=\vec{j},\vec{w}=\vec{k}$

លំហាត់ទី១០៖ រកមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $(0,0,0),(3,0,0),(0,5,1),(3,5,1)$

ខ. $(2,0,5),(5,0,5),(2,5,6),(5,5,6)$

គ. $(0,0,0),(1,1,0),(1,0,2),(0,1,1)$

ឃ. $(2,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(2,2,3)$

លំហាត់ទី១១៖ គេមានបីចំណុច $A(1;2;-1);B(2;5;1);C(;-1;2;5)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}$

ខ.គណនាប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\left|\overrightarrow{AB}\right|;\left|\overrightarrow{AC}\right|;\left|\overrightarrow{BC}\right|$

លំហាត់ទី១២៖ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ខាងក្រោម

ក. $A(1;3;6);B(5;3;2)$

ខ. $A(3;-2;-3);(6;4;3)$

លំហាត់ទី១៣៖ រកមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. $\vec{u}=(2;5;-4);\vec{v}=(6;0;3)$

ខ. $\vec{u}=(-4;2;4);\vec{v}=\left(2\sqrt{2};-2\sqrt{2};0\right)$

គ. $\vec{u}=(2;1;-2);\vec{v}=\left(0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

លំហាត់ទី១៤៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច $A(3;2;1);B(1;3;4)\quad C(4;6;5)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$

ខ.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង

<u>លំហាត់ទី១៥</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យចំនុច $A(2;1;2)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(3;2;4)$ ។

<u>លំហាត់ទី១៦</u>៖ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ឌែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

<u>លំហាត់ទី១៧</u>៖ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ Q ដែលមានសមីការ $2x-y+5z+3=0$ ។

<u>លំហាត់ទី១៨</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យចំនុច $A(1;2;3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2;1;3)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ឌែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

ខ. កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ Q ដែលមានសមីការ $2x+y+z-15=0$ ។

<u>លំហាត់ទី១៩</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យចំនុច $A(1;1;3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(3;1;4)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ឌែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

ខ. កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ Q ដែលមានសមីការ $2x-y+z+3=0$ ។

<u>លំហាត់ទី២០</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2;1;1)$ និង $\vec{v}=(3;2;0)$ ។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម $A(0;-1;-2)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{N}=\vec{u}\times\vec{v}$ ។

<u>**លំហាត់ទី២១**</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ នៃលំហ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេឱ្យចំណុច $A(1;1;1);B(3;2;1)$ និង $C(-1;0;-2)$ ។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច O និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1;1;1)$ ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញថាចំណុច $A;B;C$ រត់មិនត្រង់គ្នា

គ. រកសមីការប្លង់ (ABC) ដោយយកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ង. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ L និង (ABC) ។

<u>**លំហាត់ទី២២**</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ មួយមានចំណុច $A(3;-1;1);B(0;2;2);C(3;1;0)$ និង $D(1;-2;3)$ ។

ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ.កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនិងបន្ទាត់ CD

គ.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង L និងប្លង់ P

<u>**លំហាត់ទី២៣**</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយគេមានចំណុច $A(2;-1;3);B(1;3;2)$ និង $C(1;4;-3)$ ។

ក.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}$

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។កំណត់សមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N}$ ។

លំហាត់ទី២៤៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេមានបីចំណុច $A(1;4;3);B(2;2;5);C(0;2;1)$ ។

ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយ ស្របនិង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ.គណនា $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ និង $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ ។ ប្រាប់ប្រភេទ ΔABC

គ.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ទាញថាបីចំណុច $A;B;C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។រកសមីការប្លង់ ABC ។គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ឃ.រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC)

លំហាត់ទី២៥៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេមានបីចំណុច $A(2;0;0);B(0;3;0);C(0;0;4)$ ។

ក.កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$

ខ.បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$ ។ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ។

លំហាត់ទី២៦៖ក្នុងលំហលំដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(3;2;0);K(o;-1;3)$ ។

ក.រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនិងបន្ទាត់ AK

ខ.គេឲ្យចំណុច $B(5;0;0);C(0;5;0);D(0;0;-5)$ ។ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច $B;C;D$ ជាចំណុចរបស់ប្លង់ P ។

គ.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ឃ.គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $KBCD$

លំហាត់ទី២៧៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានបីចំណុច $A(0;1;1);B(2;0;2);C(3;-1;-1)$ ។

ក. គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។រួចទាញថា $A;B;C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $A;B$ និង C

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1;1;2)$ ហើយកែងនិងប្លង់ (P) រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច M ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ L ។

លំហាត់ទី២៨៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ មួយមានចំណុច $A(2;-1;3);B(4;1;0);C(3;2;2)$ និង $D(-1;-1;3)$

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ ។គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ខ. រកសមីការប្លង់ (ABC) ។ បង្ហាញថា $D\neq(ABC)$

គ. គណនា $\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BD}$ ។ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$

លំហាត់ទី២៩៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(4;1;0);B(1;3;2)$ និង $C(3;0;3)$ ។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ដែលកាត់តាមចំណុច A មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N}$

គ. គណនា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{OA}$ ។គណនាមាឌតេត្រាអែត $OABC$

លំហាត់ទី៣០៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(1;2;-1);B(3;2;1)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។កំណត់ចម្ងាយពីគល់ O មកប្លង់ (ABC)

គ. កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលប៉ះនិងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច $A(1;2;-1)$ ។

លំហាត់ទី៣១៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(2;0;1);B(0;1;3)$ និង $C(0;3;2)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នា។ គណនា $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយស្របនិងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

គ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BC}$ ។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AC]$ ។ផ្ទៀងផ្ទាត់ $B\in S$

លំហាត់ទី៣២៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ នៃលំហគេមានចំណុច $A(1;1;1);B(2;0;3);C(-1;2;0)$ និង $D(2;4;2)$ ។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC

ខ. រកសមីការប្លង់ (ABC) ។រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនិងប្លង់ (ABC) ។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ។និង $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ ទាញថា $[DA]$ ជាកំពស់នៃតេត្រាអែត $ABCD$

លំហាត់ទី៣៣៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេមាន បីចំនុច $A(1,1,2),B(1,0,2),C(2,1,2)$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC រួចបង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

លំហាត់ទី៣៤៖ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចមួយ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(1,2,3), \vec{u} = (2,-1,4)$

ខ. $B(-1,0,3), \vec{u} = (3,-1,2)$

គ. $C(0,0,0), \vec{u} = (-2,1,2)$

ឃ. $D(1,4,3), \vec{u} = (-1,-2,4)$

ង. $E(1,2,0), \vec{u} = (1,1,0)$

លំហាត់ទី៣៥៖ សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំនុចដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(-1,-2,0), B(2,3,4)$

ខ. $A(-1,0,0), B(0,2,-1)$

គ. $A(0,-2,0), B(-1,3,2)$

ឃ. $A(0,2,-3), B(2,-1,3)$

ង. $A(-1,-2,3), B(2,1,1)$

លំហាត់ទី៣៦៖ សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកើតឡើងរវាងប្លង់ទាំងពីរដូចខាងក្រោម៖

ក. $\begin{cases} (P): 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ (Q): x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} (P): x - y + z - 1 = 0 \\ (Q): -x - y - 2z = 0 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} (P): x - 2y + z - 1 = 0 \\ (Q): -5x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

<u>លំហាត់ទី៣៧</u>៖ គេឱ្យ $(L):\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ និង $(P):x+y-z+1=0$

ក- បង្ហាញថា (L) ស្របនិង (P)

ខ- នៅលើបន្ទាត់ (L) គេដាក់ចំណុច A មួយមានអាប់ស៊ីស $x=-3$ រួចគេគូស AH កែងនិងប្លង់ (P) ត្រង់ H ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចទាញរកចម្ងាយរវាង បន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

<u>លំហាត់ទី៣៨</u>៖ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់តាម៖

ក. $Q(1,2,3)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ $(P):x+y-z=6$

ខ. $P(1,2,3)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (xoz) ។

<u>លំហាត់ទី៣៩៖</u> ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $A(-1,-1,2)$ ហើយស្របទៅនឹងប្លង់ $(x'oz)$ និងប្លង់ $(y'oz)$ ។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $B(1,2,3)$ ហើយស្របទៅនឹងប្លង់ (xoy) និងប្លង់ $(xo\ z)$ ។

<u>លំហាត់ទី៤០៖</u> សរសេរសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំនុចមួយនិងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(1,2,3)$, $\vec{u}(4,5,6)$

ខ. $B(0,2,3)$, $\vec{u}(-1,1,2)$

គ. $C(1,0,3)$, $\vec{u}(1,2,1)$

ឃ. $D(1,-2,0)$, $\vec{u}(0,1,2)$

ង. $E(3,-2,1)$, $\vec{u}(1,3,-1)$

លំហាត់ទី៤១៖ សរសេរសមីការប្លង់ដែលកាត់បីចំណុចដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(1,2,3), B(0,1,-1), C(1,0,2)$

ខ. $A(3,-2,3), B(2,0,-1), C(-3,0,2)$

គ. $A(2,-3,0), B(5,0,-1), C(0,3,-1)$

ឃ. $A(-3,4,0), B(3,-1,-1), C(2,0,4)$

ង. $A(-1,-2,5), B(1,3,-1), C(0,2,-2)$

លំហាត់ទី៤២៖ គេឱ្យសមីការបន្ទាត់ $(l): -x+1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម $A(3,0,-1)$ ហើយកែងនិងបន្ទាត់ (l) ។

លំហាត់ទី៤៣៖ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ $(l_1): \dfrac{x-6}{-1}=y-2=\dfrac{z+1}{1}$ និង $(l_2): \dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=-z+4$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម (l_1) ហើយស្របនឹង (l_2) ។

លំហាត់ទី៤៤៖ គេឱ្យបីចំណុច $A(2,-3,0), B(5,0,-1), C(0,3,-1)$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។រកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ (ABC) ។

លំហាត់ទី៤៥៖ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាគឺបន្ទាត់ $(l_1): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{-z-2}{1}$ និង $(l_2): \dfrac{x-7}{1}=\dfrac{-y-4}{1}=\dfrac{z+6}{-2}$ ។ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ស្របគ្នាពីរ។

លំហាត់ទី៤៦៖ គេមានប្លង់ពីរគឺប្លង់ $(P): x-y+3z-4=0$ និងប្លង់មួយទៀត $(Q): 2x+y-3z+2=0$ ។

ក. រកមុំដែលផ្គុំដោយប្លង់ $(P)\&(Q)$

ខ. រកសមីការប្លង់ (R) ដែលពុះមុំក្នុងផ្គុំដោយប្លង់ $(P)\&(Q)$

លំហាត់ទី៤៧៖ ចូរសសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានផ្ចិត I និងកាំ R

ក. $I(2,0,-2)$ និង $R=3$

ខ. $I(2,-1,4)$ និង $R=5$

គ. ផ្ចិតស្ថិតនៅត្រង់គល់តម្រុយនិង $R=2$

លំហាត់ទី៤៨៖ រកសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(1,0,-2)$ និង $B(2,-3,1)$

ខ. $A(-2,-1,0)$ និង $B(3,0,-1)$

គ. $A(4,0,-1)$ និង $B(2,-3,3)$

លំហាត់ទី៤៩៖ សរសេរសមីការស្វ៊ែរកាត់តាមបួនចំណុចខាងក្រោម៖

ក. $(0,0,0),(-1,3,2),(2,0,1),(3,4,-1)$

ខ. $(2,2,-1),(3,0,1),(3,-2,1),(2,0,-2)$

លំហាត់ទី៥០៖ រកផ្ចិត និង កាំរបស់ស្វ៊ែរ (S) ដែលមានសមីការដូចខាងក្រោមៈ

ក. $3x^2+3y^2+3z^2-24x+6y-12z-25=0$

ខ. $x^2+y^2+z^2-2x+6y=0$

គ. $2x^2+2y^2+2z^2+16x+12y+8z=0$

លំហាត់ទី៥១៖ ចូរសេសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) ដែលមានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងប្លង់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $I(0,0,-2)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ $(Q): 2x+3y+z+5=0$

ខ. $I(1,-2,\ 3)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ $(P): x+2y+2z+4=0$

លំហាត់ទី៥២៖

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឲ្យ ចំណុច $A(1,1,0), B(0,2,2), C(1,-2,3)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ រួចទាញនិងបញ្ជាក់ថា A,B,C មិនឋិតលើបន្ទាត់តែមួយ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C ។

ឃ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (l) ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1,-2,0)$ ហើយកែងនិងប្លង់ (P) ។រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច M ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (l) ។

ង. រកសមីការស្វ៊ែរដែលកាត់តាមបួនចំណុច A,B,C និង D ។

លំហាត់ទី៥៣៖

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(1,0,1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនិងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ. គេឲ្យចំណុច $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

និងគណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ហើយទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង $ABCD$ ។

ឃ. រកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។ ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC) ។

<u>លំហាត់ទី៥៤</u>៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(2,1,0),B(0,1,3)$ និង $C(1,2,0)$ ។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងរកផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ដែលកាត់តាម A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}$

គ. គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$ ។ គណនាមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។

<u>លំហាត់ទី៥៥</u>៖ គេឲ្យចំណុច $A(4,14),B(2,3,0)$ និង $C(0,3,2)$ ស្ថិតក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

ក.បង្ហាញថាបីចំណុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា។

ខ.បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ ΔABC ។

គ.កំណត់កូអរដោនេចំនុច D ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមនេះ។

ឃ.រកសំនុំចំណុច $M(x,y,z)$ ដែល $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$ ។

<u>លំហាត់ទី៥៦</u>៖

គេមានសមីការស្វ៊ែរ $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$

ក. កំណត់ផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែរ (S) ។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម $A(-1,-5,0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណម៉ាល់ $\vec{n}(1,2,3)$ ។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាម I ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

ឃ. រកកូអរដោនេប្រសព្វរវាង (d) ជាមួយនឹង

(i) .ស្វ៊ែរ (S) (ii) .ប្លង់ (P)

<u>លំហាត់ទី៥៧</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$។ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (l_1) និង (l_2) ដែលមានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា:

$(l_1): \dfrac{x-5}{9}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$ និង $(l_2): \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z+1}{-3}$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម (l_1) ហើយស្របនឹង (l_2) ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាម (l_2) ហើយស្របនឹង (l_1) ។

គ. គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (l_1) និង (l_2)

<u>លំហាត់ទី៥៨</u>៖ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបន្ទាត់ $(l): \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+8}{3}$ និងប្លង់ $(P): x-2y-2z-14=0$

ក. គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (l) និង (P) ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (l) ហើយកែងនិងប្លង់ (P) ។

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) ។

<u>លំហាត់ទី៥៩</u>៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(-2,1,3)$ $B(-4,-2,5), C(1,1,1)$ និងបន្ទាត់ $(d): \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់បន្ទាត់ (l) ដែលកាត់តាម A និង B

ខ. កំណត់សមីការប្លង (P) ដែលកាត់តាម C ហើយកែងនឹង (d)

គ. រកកូអរដោនេនៃចំនុច M ដែលជាចំនុចប្រសព្វរវាង (l) និងប្លង់ (P)

លំហាត់ទី៦០៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានបី

ចំណុច $A\left(-1,2,1\right)$ $B\left(1,-6,-1\right),C\left(2,2,2\right)$ ។

ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ រួចកំណត់សមីការប្លង់ $\left(P\right)$ ដែលកាត់តាម ចំណុច A,B,C ហើយមានវ៉ិចទ័រណាម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\left(d\right)$ កាត់តាម $H\left(-2,0,0\right)$ មានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស $\vec{u}\left(3,0,1\right)$ ។

ខ. គេឱ្យស្វ៊ែ $\left(S\right)$ មានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$ ។ រកកូអរ ដោនេផ្ចិត I និងកាំ r រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង $\left(S\right)$ និង $\left(d\right)$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D\left(0,1,-1\right)$ ទៅប្លង់ $\left(P\right)$ ។

លំហាត់ទី៦១៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមាន

ចំណុច $A\left(-2,3,0\right)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ ។

ក. រកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ $\left(l\right)$ ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\vec{u}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\vec{u}$ ។រកសមីការប្លង់ $\left(P\right)$ ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

គ. រកចម្ងាយពីចំណុច $B\left(1,1,1\right)$ ទៅប្លង់ $\left(P\right)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែ $\left(S\right)$ ដែល មានផ្ចិត B ហើយប៉ះនឹងប្លង់ $\left(P\right)$ ។

លំហាត់៦២៖ គេឱ្យប្លង់ពីរដែលមានសមីការ $(Q):-2x+2y-z-17=0$ និង (P) ។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (Q) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ពីរនេះ

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច A ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (Q) ។ ពីចំណុច A គេគូស បន្ទាត់ $\boldsymbol{H\in(Q)}$ ដោយ $H\in(Q)$ ។ សរសេរ សមីការប្លង់មេដ្យានទ័រ នៃអង្កត់ $\left[AH\right]$ ។

លំហាត់ទី៦៣៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមាន

ចំណុច $A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AK ។

ខ. គេឲ្យចំណុច $B(5,0,0), C(0,5,0), D(0,0,-5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា B, C, D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ (P) ។

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ BCD ។

ឃ. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌតេត្រាអែត $KBCD$ ។

លំហាត់ទី៦៤៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមាន

ចំណុច $A(1,-2,3), B(3,-1,3)$ និង $C(5,1,4)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំណត់តម្លៃកូស៊ីនុសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរ ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាចំណុច A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

ឃ. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

លំហាត់ទី៦៥៖

ក. ក្នុងតម្រុយអរតូណារម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(2,2,1), B(4,-2,0), C(3,1,1), D(1,5,2)$ ។ បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1), B(4,-2,0)$

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1), B(4,-2,0), D(1,5,2)$

លំហាត់ទី៦៦៖

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបីចំណុច $A\left(1,0,1\right),B\left(0,2,2\right),C\left(2,1,0\right)$ ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

ខ. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ ABC

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\left(d\right)$ ដែលកាត់តាមចំណុច $D\left(1,-1,3\right)$ ហើយកែងនឹង ប្លង់ ABC ត្រង់ M ។ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច M

លំហាត់ទី៦៧៖

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបីចំណុច $A\left(1,0,0\right),B\left(0,1,0\right),C\left(0,0,1\right)$ ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ $\left(ABC\right)$

គ. រកចម្ងាយពីចំណុច $D\left(0,1,1\right)$ ទៅប្លង់ $\left(ABC\right)$ ។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែ $\left(S\right)$ ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AC

ង. រកសមីការប្លង់ $\left(P\right)$ ដែលប៉ះស្វ៊ែរ $\left(S\right)$ ត្រង់ C

លំហាត់ទី៦៨៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}})$ គេឲ្យចំនុច $A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក. ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

គ.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

ឯកសារយោង

- សៀវភៅ **គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២** របស់ **ក្រសួង អប់រំ យុវជន និងកីឡា** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០០១**
- សៀវភៅ **គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១១** កម្រិតខ្ពស់ របស់ **ក្រសួង អប់រំ យុវជន និងកីឡា** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០០៩**
- សៀវភៅ **គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២** កម្រិតខ្ពស់ របស់ **ក្រសួង អប់រំ យុវជន និងកីឡា** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០១២**
- សៀវភៅ **ធរណីមាត្រវិភាគ និង វ៉ិចទ័រ** របស់គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា + រូបវិទ្យា ជំនាន់ទី **១៩** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០១៥**
- សៀវភៅ **ផលគុណស្កាលែ និង ផលគុណវ៉ិចទ័រ សម្រាប់ ថ្នាក់ទី១២** របស់ លោក **លឹម ផល្គុន** និង **សែន ពិសិទ្ធ** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០១២**
- **Calculus 5th Edition - James Stewart 2007**
- សៀវភៅ **លំហាត់ គណិតវិទ្យា សម្រាប់គ្រូ និងសិស្ស នៅមធ្យមសិក្សា " វ៉ិចទ័រ "** របស់ **អង្គការ JICA** និង **សាស្ត្រាចារ្យ គណិតវិទ្យា នៃ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ** បោះពុម្ព ឆ្នាំ **២០០៤**