ដេរីវេ

បណ្ឌិត មាស ឡេន

សាស្ត្រាចារ្យរង

ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា(ស.ភ.ភ.ព)

២០២៤

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ a?
3. ក្បួនដេរីវេ
4. តើដេរីវេប្រាប់យើងអំពីអ្វីខ្លះ?

សញ្ញាណសំខាន់ៗនៅក្នុងគណិតគណនា

អនុគមន៍ $y = f(x)$

លីមីត
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

ដេរីវេ
$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
(បើលីមីតមាន)

អាំងតេក្រាលកំណត់
$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
(បើលីមីតមាន)

ភាពជាប់
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
$\int f(x)dx$

សំណួរគន្លឹះ

បើគេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$

1. តើ $\lim_{x\to a} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(a)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_a^b f(x)dx$ មានឬទេ?

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x$

1. តើ $\lim_{x \to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = |x|$

1. តើ $\lim_{x \to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

លំហាត់គិតលេង

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x|x|$

1. តើ $\lim_{x\to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

ចំណោទបញ្ហាសំខាន់ៗ

1. បញ្ហាសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង(ដេរីវេ)
2. បញ្ហាល្បឿននិងសំទុះ(ដេរីវេ)
3. បញ្ហាបរមាកម្ម(ដេរីវេ)
4. បញ្ហាក្រឡាផ្ទៃនិងមាឌ(អាំងតេក្រាលកំណត់)

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ a?
3. ក្បួនដេរីវេ
4. តើដេរីវេប្រាប់យើងអំពីអ្វីខ្លះ?

អត្ថន័យនៃដេរីវេនៅត្រង់ a

1. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ a
2. អត្រាបម្រែបម្រួលនៃអនុគមន៍នៅត្រង់ a
3. ល្បឿននៅខណៈ a

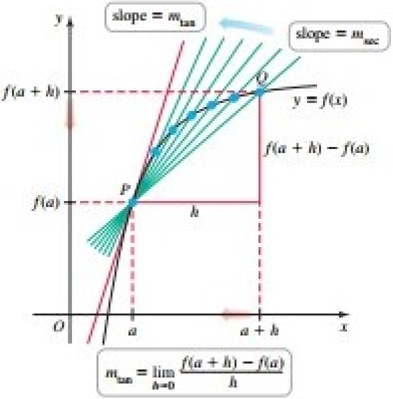
បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ពិនិត្យខ្សែកោង $y = f(x)$ និងកំណត់បន្ទាត់ប្រសព្វខ្សែកោងត្រង់ពីរចំណុច $P(a, f(a))$ និង $Q(x, f(x))$។ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម P, Q គឺ

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- នៅពេលដែល x ខិតទៅរក a បើខ្សែកោងគឺរលោងនៅត្រង់ $P(a, f(a))$ (វាមិនមានកំណូចឬ ជ្រុង) នោះបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចខិតទៅរកបន្ទាត់តែមួយគត់ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច P។
- នៅពេលដែល x ខិតទៅរក a មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច m_{sec} ខិតទៅរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ m_{tan}

$$m_{\text{tan}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$


slope = m_{tan}
slope = m_{sec}
y
$f(a+h)$
$f(a)$
Q
P
$y = f(x)$
$f(a+h) - f(a)$
h
O
a
$a+h$
x
$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

និយមន័យ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $(a, f(a))$ គឺជាសមីការដែលមានទម្រង់

$$y - f(a) = m_{\tan}(x - a)$$

ដែល

$$m_{\tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

សម្គាល់៖

- រូបមន្តផ្សេងទៀតសម្រាប់មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង f ត្រង់ចំណុច a គឺជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ f ត្រង់ចំណុច a (ហៅថាដេរីវេនៃ f ត្រង់ a)។

ដេរីវេ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ

ដេរីវេនៃ f ត្រង់ a កំណត់សរសេរដោយ $f'(a)$ គឺឱ្យដោយ

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ឬ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

បើលីមីតមាននិង a នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f។ បើ $f'(a)$ អត្ថិភាព នោះយើងនិយាយថា f មានដេរីវេត្រង់ a។

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=\frac{3}{x}$ នៅត្រង់ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$។

តាមនិយមន័យនៃមេគុណបន្ទាត់ប៉ះនិងដេរីវេ

$$\begin{aligned} m_{\tan} = f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{6-3x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{2x(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\left(-\frac{3}{2x}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=\frac{3}{x}$ នៅត្រង់ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ គឺ

$$y-\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(x-2) \text{ ឬ } y = -\frac{3}{4}x+3$$

ល្បឿនខណៈ

ល្បឿនមធ្យម

ឧបមាថាយើងចង់គណនាល្បឿនមធ្យមនៅពេលដែលយើងធ្វើដំណើរតាមបណ្ដោយវិថីត្រង់មួយ។ បើយើងឆ្លងកាត់បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 100 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ 12 : 00 P.M. បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 130 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ 12 : 30 P.M.។ យើងធ្វើដំណើរបាន $30km$ ក្នុងរយៈពេលកន្លះម៉ោង ដូចនេះល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះម៉ោងនេះគឺ $(30\,km)/(0.5\,h) = 60\,km/h$។ ទោះបីជាល្បឿនមធ្យមគឺ $60\,km/h$ ល្បឿនខណៈដែលបង្ហាញដោយកុងទ័រល្បឿនគឺប្រែប្រួលពីខណៈមួយទៅខណៈមួយទៀត។

ឧទាហរណ៍

សន្មតថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកម្ពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះ

១ $t = 1\ s$ និង $t = 3\ s$

២ $t = 1\ s$ និង $t = 2\ s$

តាង $s(t)$ ជាចម្ងាយគិតជាម៉ែត្រដែលបានធ្លាក់បន្ទាប់ពី t វិនាទីនោះ

$$s(t) = 4.9t^2$$

ល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះពេល $[t_0, t_1]$ គឺជាបម្រែបម្រួលនៃទីតាំងចែកនឹងបម្រែបម្រួលពេលវេលា

$$v_{av} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ដូច្នេះ ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,3]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{44.1-4.9}{3-1} = 19.6\,m/s$$

ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,2]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(2)-s(1)}{2-1} = \frac{19.6-4.9}{2-1} = 14.7\,m/s$$

សម្គាល់៖ ល្បឿនមធ្យមគឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម $(t_0, s(t_0))$ និង $(t_1, s(t_1))$ មានន័យថា

$$v_{av} = m = \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$$

ល្បឿនខណៈ

ដើម្បីគណនាល្បឿនមធ្យមយើងប្រើទីតាំងពីរខុសគ្នានៅពេលខុសគ្នា។ តើយើងគណនាល្បឿននៅខណៈណាមួយយ៉ាងដូចម្តេច? ល្បឿននៅខណៈ $t = t_0$ គឺត្រូវបានកំណត់ដោយការគណនាល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះ $[t_0, t_1]$ ដោយបន្ថយប្រវែងរបស់វា។ នៅពេលដែល t_1 ខិតទៅរក t_0 នោះល្បឿនមធ្យមគឺខិតទៅរកតម្លៃតែមួយគត់ដែលជាល្បឿនខណៈ។

ឧទាហរណ៍

សន្មតថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកម្ពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿននៃបាល់នៅខណៈ $t = 5\ s$

យើងមាន

$$s(t) = 4.9t^2$$

យើងចាប់អារម្មណ៍ទៅលើល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ នោះយើងគណនាល្បឿនមធ្យមលើចន្លោះខ្លីទៅៗ $[5, t]$ ដោយប្រើរូបមន្ត

$$v_{av} = \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$$

ចន្លោះពេល	ល្បឿនមធ្យម (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

យើងសង្កេតឃើញថានៅពេលដែលចន្លោះពេលត្រូវបានបន្ថយឱ្យខ្លី ល្បឿនមធ្យមកាន់តែខិតទៅជិត $49\, m/s$។

ល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺត្រូវបានកំណត់ជាតម្លៃលីមីតនៃល្បឿនមធ្យមទាំងនេះនៅលើចន្លោះកាន់តែខ្លីទៅៗចាប់ផ្តើមនៅ $t = 5$ ។ ដូច្នេះល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺ

$$v = 49\,m/s$$

សម្គាល់៖

- យើងនឹងទទួលបានល្បឿនខណៈដូចគ្នានៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងឆ្វេង (ដែល $t < 5$) និងនៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងស្តាំ (ដែល $t > 5$)
- យើងនិយាយថាលីមីតនៃ v_{av} ពេល t ខិតទៅរក 5 ស្មើនឹងល្បឿនខណៈ $v_{inst} = 49\,m/s$។ យើងកំណត់សរសេរ

$$v_{inst} = \lim_{t\to5} v_{av} = \lim_{t\to5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 49\,m/s$$

យើងបានគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ឬមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុចជាក់លាក់ណាមួយ។ បើចំណុចនេះប្រែប្រួលតាមខ្សែកោងនោះបន្ទាត់ប៉ះក៏ប្រែប្រួលដែរ។ ចំពោះហេតុផលនេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៃអនុគមន៍ f ក៏ជាអនុគមន៍ដែរដែលហៅថាដេរីវេនៃ f ។

និយមន័យ

ដេរីវេនៃ f គឺជាអនុគមន៍

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

បើលីមីតមាននិង x នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f។ បើ $f'(x)$ អត្ថិភាព នោះយើងនិយាយថា f មានដេរីវេត្រង់ x។ បើ f មានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះបើក I យើងនិយាយថា f មានដេរីវេលើ I។

ទ្រឹស្តីបទ

បើ f មានដេរីវេត្រង់ a នោះ f ជាប់ត្រង់ a

សម្គាល់៖

- ភាពជាប់យើងត្រូវការលក្ខខណ្ឌ

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$$

- ភាពមានដេរីវេយើងត្រូវការលក្ខខណ្ឌ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ មានលីមីត}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយសារ f មានដេរីវេត្រង់ a យើងដឹងថា $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ មានលីមីត ដើម្បីបង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ a យើងត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$។ យើងមាន

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a), \;\; x \neq a$$

នោះ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)\right) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{f'(a)} \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} \\
&= f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a)
\end{aligned}$$

សម្គាល់

- បើ f មិនជាប់ត្រង់ a នោះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ a
- f ជាប់ត្រង់ a មិននាំឱ្យ f មានដេរីវេត្រង់ a ជាទូទៅនោះទេ។

ឧទាហរណ៍៖ អនុគមន៍ $f(x) = |x|$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 0 ព្រោះ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

ប៉ុន្តែមិនមានដេរីវេត្រង់ 0 ព្រោះ

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

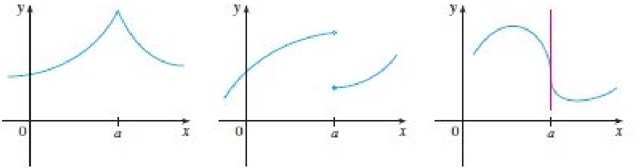
យើងគណនាលីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំ

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-1) = -1$$

ដោយសារលីមីតទាំងពីរខុសគ្នានោះ $f'(0)$ មិនមាន។ ដូច្នេះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ 0 ទេ។

តើនៅពេលណាដែលអនុគមន៍មិនមានដេរីវេត្រង់ចំណុចណាមួយ?
អនុគមន៍ f មិនមានដេរីវេនៅត្រង់ a បើយ៉ាងហោចណាស់លក្ខខណ្ឌមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

1. f មានជ្រុងត្រង់ a
2. f មិនជាប់ត្រង់ a
3. f មានបន្ទាត់ប៉ះឈរត្រង់ a



ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ ឬទេ?

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 1$។ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ លុះត្រាតែ $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ អត្ថិភាព។ យើងមាន

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{4 - x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} \\ &= -\lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= -\lim_{x \to 1^-} (x + 1) = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

ដោយសារ

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

នោះ

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

មិនមានលីមីត។ ដូចនេះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ ឬទេ?

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$។ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ អត្ថិភាព។ យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

ដូចនេះ

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

មានន័យថា f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

លំហាត់

1. គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

   1. ចំពោះ $x < 0$ តើ $f'(x)$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?
   2. ចំពោះ $x > 0$ តើ $f'(x)$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?
   3. តើ f មានដេរីវេត្រង់ 0 ឬទេ?

2. តើ $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ មានដេរីវេត្រង់ $x = 2$?

មាតិកា

ក្បួនដេរីវេ

1. បើ c ជាចំនួនពិតនោះ $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. បើ n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាននោះ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
3. បើ f មានដេរីវេត្រង់ x និង c ជាចំនួនថេរនោះ

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

4. បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x នោះ

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

៥. បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x នោះ

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

៦. បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x, $g(x) \neq 0$ នោះដេរីវេនៃ f/g អត្ថិភាពនិង

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

សម្គាល់

- បើ n ជាចំនួនពិតនោះ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍
$$f(x) = \frac{4xe^x}{x^2+1}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(4xe^x) - (4xe^x)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(x^2+1)(4e^x+4xe^x) - (4xe^x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{4e^x(x^3-x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y = \frac{e^x}{1+x^2}$ នៅត្រង់ចំណុច $\left(1, \frac{e}{2}\right)$។

យើងមាន

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}e^x - e^x\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)e^x - e^x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ គឺ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$
ដូចនេះបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងគឺ $y = \frac{e}{2}$

លំហាត់

1. បើ $f(5)=1, f'(5)=6, g(5)=-3$ និង $g'(5)=2$។ រក
   1. $(fg)'(5)$
   2. $(f/g)'(5)$
   3. $(g/f)'(5)$
2. គណនាដេរីវេនៃ
$$f(x)=\frac{2e^x-1}{2e^x+1}$$
3. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=2+xe^x$ នៅត្រង់ $(0,2)$
4. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=\frac{e^x}{x}$ នៅត្រង់ $(1,e)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេ $\frac{dy}{dx}$

១ $y = e^x \cos x$
២ $y = \sin x - x\cos x$
៣ $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$
៤ $y = \tan x$

១

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

២

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) - \frac{d}{dx}(x\cos x) = \cos x - (1 \cdot \cos x + x(-\sin x)) = x\sin x$$

៣

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$
$$= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \sin x \cos x}{(1-\sin x)^2}$$
$$= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

៤

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

លំហាត់

1. គណនាដេរីវេនៃ
   - $$y = e^{-x}\sin x$$
   - $$y = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y = e^x \cos x$ ត្រង់ $(0, 1)$

វិធានច្រវាក់

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា $y = f(u)$ មានដេរីវេត្រង់ $u = g(x)$ និង $u = g(x)$ មានដេរីវេត្រង់ x។ អនុគមន៍បណ្តាក់ $y = f(g(x))$ មានដេរីវេ x និងដេរីវេរបស់វាគឺ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ឬ

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

សម្គាល់៖ ដេរីវេនៃ $y = f(g(x))$ គឺដេរីវេនៃ f ត្រង់ $g(x)$ គុណនឹងដេរីវេនៃ g ត្រង់ x

ការប្រើប្រាស់វិធានច្រវាក់

សន្មតថាគេឱ្យអនុគមន៍មានដេរីវេ $y = f(g(x))$

1. កំណត់អនុគមន៍ក្រៅ f និងអនុគមន៍ក្នុង g និងតាង $u = g(x)$
2. ជំនួស $g(x)$ ដោយ u ដើម្បីសរសេរ y អាស្រ័យនឹង u

$$y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) \Rightarrow y = f(u)$$

3. គណនាផលគុណ $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$
4. ជំនួស u ដោយ $g(x)$ ក្នុង $\frac{dy}{dx}$ ដើម្បីទទួលបាន $\frac{dy}{dx}$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃ

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

យើងតាង $u = x^2 + 1$ និង $y = \sqrt{u}$។ ដោយសារ

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

ឬយើងអាចសរសេរ $y = f(g(x))$ ដែល $f(u) = \sqrt{u}$ និង $g(x) = x^2 + 1$។
ដោយសារ
$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

បើ $y = [g(x)]^n$ នោះយើងអាចសរសេរ $y = u^n$ ដែល $u = g(x)$ ។ តាមវិធានច្រវាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

បើ n ជាចំនួនពិតនិង $u = g(x)$ មានដេរីវេនោះ

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ឬ

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

បើ $y = \sin u$ ដែល u មានដេរីវេត្រង់ x នោះតាមវិធានច្រវាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

ដូចនេះ

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

បើ $y = e^u$ ដែល u មានដេរីវេត្រង់ x នោះតាមវិធានច្រវាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

ដូចនេះ

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

បើ $y = a^x, (a > 0)$ នោះយើងអាចសរសេរ

$$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

តាមវិធានច្រវាក់យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x = e^{(\ln a)x}\ln a = a^x \ln a$$

លំហាត់

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

១
$$y = e^{\sqrt{x}}$$

២
$$y = \sin(e^{\cos x})$$

៣
$$y = x^2\sqrt{x^2+1}$$

៤
$$y = \sin(\sin(e^x))$$

៥
$$y = \sin^2(e^{3x+1})$$

ដេរីវេអាំព្លីស៊ីត

យើងបានគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់ $y = f(x)$ ដែល y ត្រូវបានកំណត់អ៊ិចភ្លីស៊ីតជាអនុគមន៍នៃ x។ ប៉ុន្តែទំនាក់ទំនងនៃអថេរអាចត្រូវបានកំណត់ជាទម្រង់អាំព្លីស៊ីត ជាឧទាហរណ៍ $x^2 + y^2 = 25$ ឬ $x^3 + y^3 = 6xy$។ នៅក្នុងករណីខ្លះយើងអាចដោះស្រាយរក y ជាអនុគមន៍នៃ x ដូចជាឧទាហរណ៍ទីមួយបើយើងដោះស្រាយរក y យើងទទួលបាន $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ ប៉ុន្តែវាមិនងាយស្រួលនោះទេបើយើងដោះស្រាយរក y ជាអនុគមន៍នៃ x សម្រាប់ឧទាហរណ៍ទីពីរ។

តើនៅក្នុងករណីនេះយើងរកដេរីវេនៃ y យ៉ាងដូចម្តេច?

ដេរីវេអាំព្លីស៊ីត

វិធីសាស្ត្រនេះគឺយើងគណនាដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការធៀបនឹង x រួចដោះស្រាយរក y' (ដោយសន្មតថាសមីការដែលឱ្យកំណត់ y អាំព្លីស៊ីតជាអនុគមន៍មានដេរីវេនៃ x)

ឧទាហរណ៍

1. រក $\frac{dy}{dx}$ បើ $x^2 + y^2 = 25$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2 + y^2 = 25$ ត្រង់ $(3, 4)$

1. ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការ $x^2 + y^2 = 5$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

ដោយសារ y ជាអនុគមន៍នៃ x និងតាមវិធានច្រវាក់យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

ដូច្នេះ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ដោះស្រាយសមីការនេះសម្រាប់ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

② នៅត្រង់ចំណុច $(3,4)$ យើងមាន $x = 3$ និង $y = 4$ នោះ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2 + y^2 = 25$ ត្រង់ $(3,4)$ គឺ

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \text{ ឬ } 3x + 4y = 25$$

ឧទាហរណ៍

1. រក y' បើ $x^3 + y^3 = 6xy$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 = 6xy$ ត្រង់ $(3, 3)$

1. ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x^3 + y^3 = 6xy$ ធៀបនឹង x ដោយចាត់ទុក y ជាអនុគមន៍នៃ x យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2y' &= 6xy' + 6y \\ x^2 + y^2y' &= 2xy' + 2y \end{aligned}$$

ដោះស្រាយរក y'

$$\begin{aligned} y^2y' - 2xy' &= 2y - x^2 \\ (y^2 - 2x)y' &= 2y - x^2 \\ y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \end{aligned}$$

2. ពេល $x = y = 3$ នោះ

$$y' = \frac{2\cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2\cdot 3} = -1$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 = 6xy$ ត្រង់ $(3,3)$ គឺ

$$y - 3 = -1(x-3) \text{ ឬ } x + y = 6$$

លំហាត់

1. រក y' បើ $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2 + xy - y^3 = 7$ ត្រង់ $(3,2)$
3. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^4 + y^4 = 2$ ត្រង់ $(1,-1)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីត

ដើម្បីរកដេរីវេនៃ $y = \ln x$ យើងប្រើដេរីវេអាំព្លីស៊ីតនិងវិធានច្រវាក់។ យើងមាន

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x = e^y$ ធៀបនឹង x យើងបាន

$$\begin{aligned} x &= e^y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(e^y) \\ 1 &= e^y.\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $\ln|x|$ ដែលកំណត់គ្រប់ $x \neq 0$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ចំពោះ $x > 0$ យើងទាញបាន

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

ចំពោះ $x < 0$ វិធានច្រវាក់ផ្តល់នូវ

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

ទ្រឹស្តីបទ

- $$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$
- $$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
- បើ u មានដេរីវេត្រង់ x និង $u(x) \neq 0$ នោះ
$$\frac{d}{dx}(\ln |u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ឧទាហរណ៍

រក $\frac{dy}{dx}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

១
$$y = \ln 4x$$

២
$$y = x \ln x$$

៣
$$y = \ln|\sec x|$$

៤
$$y = \frac{\ln x^2}{x^2}$$

១

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln 4x) = \frac{1}{4x}(4) = \frac{1}{x}$$

២

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

៣

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln|\sec x|) = \frac{1}{\sec x}\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{\sec x}(\sec x \tan x) = \tan x$$

៤

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x^2}{x^2}\right) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}.2x\right) - (\ln x^2)2x}{(x^2)^2} = \frac{2x - 2x\ln x^2}{x^4} = \frac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$$

លំហាត់

គណនា

១
$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)$$

២
$$\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$$

៣
$$\frac{d}{dx}(\ln(xe^x))$$

៤
$$\frac{d}{dx}(\ln|\sin x|)$$

៥
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln x+1}\right)$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

ដេរីវេ $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

យើងមាន

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y, \frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

យើងរកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = \sin^{-1} x$ ដោយធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x = \sin y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \sin y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\sin y) \\ 1 &= (\cos y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \end{aligned}$$

យើងមាន $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ នោះ

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ដោយសារ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos y \geq 0$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ដេរីវេនៃ $y = \cos^{-1} x = \arccos x$

យើងមាន

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \cos y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \cos y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cos y) \\ 1 &= -(\sin y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y} \end{aligned}$$

យើងមាន $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ នោះ

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

ដោយសារ $0 \leq y \leq \pi$ នោះ $\sin y \geq 0$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ដេរីវេនៃ $y = \tan^{-1} x = \arctan x$

យើងមាន

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \tan y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \tan y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\tan y) \\ 1 &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \end{aligned}$$

យើងមាន $1 + \tan^2 y = \sec^2 y$ នោះ $\sec^2 y = 1 + x^2$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

ដេរីវេនៃ $y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$

យើងមាន

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y, 0 < y < \pi$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \cot y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \cot y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cot y) \\ 1 &= -\csc^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\csc^2 y} \end{aligned}$$

យើងមាន $1+\cot^2 y = \csc^2 y$ នោះ $\csc^2 y = 1 + x^2$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ a?
3. ក្បួនដេរីវេ
4. តើដេរីវេប្រាប់យើងអំពីអ្វីខ្លះ?

តើដេរីវេប្រាប់យើងអំពីអ្វីខ្លះ?

ដេរីវេប្រាប់យើងថាតើពេលណាអនុគមន៍កើនឬចុះ

និយមន័យ

សន្មតថាអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ I។ យើងនិយាយថា

- f ជាអនុគមន៍កើនលើ I បើ $f(x_2) > f(x_1)$ នៅពេលដែល x_1 និង x_2 នៅក្នុង I និង $x_2 > x_1$។
- f ជាអនុគមន៍ចុះលើ I បើ $f(x_2) < f(x_1)$ នៅពេលដែល x_1 និង x_2 នៅក្នុង I និង $x_2 > x_1$។

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ I និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុចក្នុងនៃ I

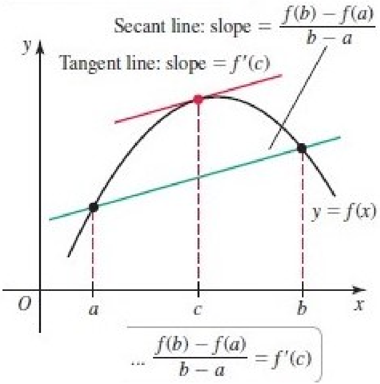
- បើ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំណុចក្នុងនៃ I នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ I
- បើ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ចំណុចក្នុងនៃ I នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ I

សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទនេះផ្អែកលើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ (a, b) នោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំណុច $c \in (a, b)$ ដែល

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$


Secant line: slope = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Tangent line: slope = $f'(c)$
y
$y=f(x)$
O
a
c
b
x
... $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

ស្ថានភាពខាងក្រោមផ្តល់ការពន្យល់មួយនៃទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម៖ ឧបមាថា យើងបើកបររយៈពេល 2 ម៉ោងទៅកាន់ទីក្រុងមួយដែលចម្ងាយ 100 គីឡូម៉ែត្រ។ ល្បឿនមធ្យមនៃការបើកបរគឺ $100\,km/2\,h = 50\,km/h$ រីឯល្បឿនខណៈ(ដែលវាស់ដោយកុងទ័រល្បឿន) គឺប្រែប្រួលពីខណៈមួយទៅខណៈមួយទៀត។ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមប្រាប់យើងថានៅខណៈណាមួយពេលកំពុងធ្វើដំណើរល្បឿនខណៈស្មើនឹងល្បឿនមធ្យមគឺស្មើនឹង $50\,km/h$។

ឧទាហរណ៍

រកចន្លោះដែលអនុគមន៍កើននិងចន្លោះដែលអនុគមន៍ចុះ

$$f(x) = xe^{-x}$$

យើងមាន

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

ដោយសារ $x = 1$ ជាចំណុចតែមួយគត់ដែលធ្វើឱ្យ $f'(x) = 0$ នោះបើ f' ប្តូរសញ្ញានោះវាប្តូរនៅត្រង់ $x = 1$ និងមិនប្តូរនៅត្រង់កន្លែងផ្សេងទៀតទេ មានន័យថា f' មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ចំណុចលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និង $(1, \infty)$។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f' > 0$ នៅលើ $(-\infty, 1)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty, 1)$
- $f' < 0$ នៅលើ $(1, \infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(1, \infty)$

ឧទាហរណ៍

មន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍ម្នាក់ឃើញរថយន្តមួយបើកបរចេញពីនៅស្មៀម នៅលើផ្លូវបត់ចូលផ្លូវល្បឿនលឿន។ គាត់បានទាក់ទងតាមវិទ្យុទំនាក់ទំនង ទៅមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យម្នាក់ទៀតដែលនៅខាងមុខចម្ងាយ 30 គីឡូម៉ែត្រតាម បណ្តោយផ្លូវល្បឿនលឿន។ នៅពេលរថយន្តទៅដល់ទីតាំងនៃមន្ត្រី ត្រួតពិនិត្យទីពីរនៅរយៈពេល 28 នាទីក្រោយហើយល្បឿនរថយន្តត្រូវបាន វាស់ថា 60 km/h។ អ្នកបើកបររថយន្តត្រូវបានពិន័យពីបទបើកលើសល្បឿន កំណត់ 60 km/h។ ហេតុអ្វីបានជាមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍អាចសន្និដ្ឋានថា អ្នកបើកបរបើកលើសល្បឿនកំណត់?

ល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 28 នាទី (=28/60 h) គឺ

$$\frac{30-0}{28/60} = 64.3\ km/h$$

ដូចនេះមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យអាចសន្និដ្ឋានតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមថានៅចំនុចណាមួយល្បឿនរថយន្តបានលើសល្បឿនកំណត់។

ឧទាហរណ៍

មន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍ម្នាក់ឃើញរថយន្តមួយបើកបរចេញពីនៅស្ទៀម នៅលើផ្លូវបត់ចូលផ្លូវល្បឿនលឿន។ គាត់បានទាក់ទងតាមវិទ្យុទំនាក់ទំនង ទៅមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យម្នាក់ទៀតដែលនៅខាងមុខចម្ងាយ 30 គីឡូម៉ែត្រតាម បណ្តោយផ្លូវល្បឿនលឿន។ នៅពេលរថយន្តទៅដល់ទីតាំងនៃមន្ត្រី ត្រួតពិនិត្យទីពីរនៅរយៈពេល 30 នាទីក្រោយហើយល្បឿនរថយន្តត្រូវបាន វាស់ថា 60 km/h។ តើមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍អាចសន្និដ្ឋានថាអ្នកបើកបរ បើកលើសល្បឿនកំណត់ឬទេ?

ល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 30 នាទី (=1/2 h) គឺ

$$\frac{30-0}{1/2} = 60\ km/h$$

ប៉ុន្តែរថយន្តចាប់ផ្ដើមពីនៅស្ងៀមនោះល្បឿនមធ្យមក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មាននាទីដំបូងគឺតិចជាង 60 km/h ហើយដូច្នេះល្បឿនមធ្យមចំពោះចម្ងាយដែលនៅសល់ត្រូវតែលើស 60 km/h។ ដូចនេះមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យអាចសន្និដ្ឋានតាមទ្រឹស្ដីបទតម្លៃមធ្យមថានៅចំនុចណាមួយល្បឿនរថយន្តបានលើសល្បឿនកំណត់។

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ f ដែលមានតម្លៃសំខាន់ c ដែលមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះបើក (a,b)

- f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x) < 0$ លើ (a,c) និង $f'(x) > 0$ លើ (c,b) មានន័យថា f ចុះនៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃ c និងកើននៅផ្នែកខាងស្តាំនៃ c
- f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x) > 0$ លើ (a,c) និង $f'(x) < 0$ លើ (c,b) មានន័យថា f កើននៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃ c និងចុះនៅផ្នែកខាងស្តាំនៃ c
- f មិនមានទាំងអប្បបរមាធៀបនិងអតិបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាទាំងនៅលើ (a,c) និង (c,b)

ឧទាហរណ៍

រកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$$

យើងមាន

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$f'(x) = 0$ ពេលដែល $x = -1$ ឬ $x = 2$។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f'(x) > 0$ នៅលើចន្លោះ $(-\infty, -1)$
- $f'(x) < 0$ នៅលើចន្លោះ $(-1, 2)$
- $f'(x) > 0$ នៅលើចន្លោះ $(2, \infty)$

ដូចនេះ f អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -1$ ដែលឱ្យដោយ $f(-1) = 19$ និង អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ ដែលឱ្យដោយ $f(2) = -8$

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា f'' ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើកផ្ទុក c ដែល $f'(c) = 0$

- បើ $f''(c) > 0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ $f''(c) < 0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ $f''(c) = 0$ តេស្តនេះមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន f អាចមានអប្បបរមាធៀបឬអតិបរមាឬគ្មានទាំងពីរ។

ឧទាហរណ៍

រកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 13$$

យើងមាន

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$f''(x) = 6x + 6$$

$f'(x) = 0$ ពេលដែល $x = -3$ ឬ $x = 1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f''(-3) = -12 < 0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -3$ ដែលឱ្យដោយ $f(-3) = 14$
- $f''(1) = 12 > 0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ ដែលឱ្យដោយ $f(1) = -18$

ចំណោទបរមា

ក្រុមហ៊ុនផលិតឧបករណ៍ស្តុកទុកអាហារផលិតកំប៉ុងស៊ីឡាំងដែលមានមាឌ 500 cm^3។ តើវិមាឌ (កម្ពស់និងកាំ) ដែលធ្វើឱ្យផ្ទៃក្រឡាមុខកាត់អប្បបរមា (វត្ថុធាតុដើមត្រូវការដើម្បីផលិតអប្បបរមា)ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

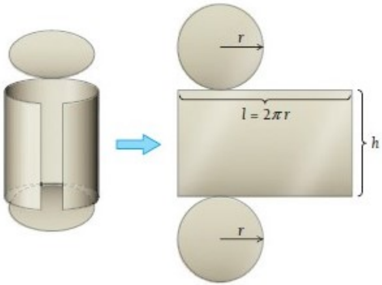
តាង h ជាកម្ពស់នៃកំប៉ុង និង r ជាកាំនៃកំប៉ុងដែលទាំងពីរគិតជាសង់ទីម៉ែត្រ។ តាមរូបមន្តមាឌស៊ីឡាំង

$$V = \pi r^2 h$$

យើងដឹងថាមាឌកំប៉ុងគឺ 500 cm^3 នោះយើងបាន

$$\pi r^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$$

កំប៉ុងមួយមានរង្វង់ពីរនៅជាយលើនិងក្រោមដែលនីមួយៗមានក្រឡាផ្ទៃស្មើនឹង πr^2 និងផ្នែកបញ្ឈរដែលនៅពេលដែលធ្វើឱ្យរាបស្មើជាចតុកោណកែងដែលមានកម្ពស់ h និងបណ្តោយជាបរិមាត្រនៃរង្វង់កាំ r ឬ $2\pi r$។ ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណកែងនេះគឺ $2\pi rh$



ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់សរុប A ស្មើនឹង

$$A = 2(\pi r^2) + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

ដេរីវេនៃ A ធៀបនឹង r

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

ឱ្យដេរីវេស្មើនឹង 0 និងដោះស្រាយរក r យើងបាន

$$4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{1000}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^3 = 1000 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1000}{4\pi} = \frac{250}{r}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3$$

តម្លៃ $r \approx 4.3$ ជាតម្លៃសំខាន់តែមួយគត់នៅលើចន្លោះ $(0, \infty)$។ ដេរីវេទី 2 នៃ A គឺ

$$A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$$

នោះយើងបាន

$$A''(4.3) = 4\pi + \frac{2000}{(4.3)^3} > 0$$

ដូចនេះ

- A មានអប្បបរមានៅត្រង់ $r \approx 4.3\,cm$
- កម្ពស់ $h = \frac{500}{\pi(4.3)^2} \approx 8.6\,cm$
- ក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់សរុបគឺ $\approx 348.73\,cm^2$