A tabela abaixo apresenta valores observados de uma grandeza $N(t)$ em função do tempo $t$:

| $t$ | $N(t)$ |
|---|---|
| 0 | 21,5 |
| 3 | 19,8 |
| 6 | 20,0 |
| 9 | 22,2 |
| 12 | 24,8 |
| 15 | 25,8 |

Observando o comportamento dos dados, percebemos que eles apresentam uma variação suave e aproximadamente parabólica. Assim, podemos tentar aproximá-los utilizando transformações do gráfico da função básica $f(x) = x^2$. Aplicando uma translação horizontal e vertical, obtemos a função

$$f_1(x) = (x-3)^2 + 19,8,$$

que desloca o gráfico de $f(x) = x^2$ três unidades para a direita e 19,8 unidades para cima.

Podemos também, usando expansões de funções, construir um modelo mais elaborado da forma

$$N(t) \approx f_2(t) = \frac{1}{c}(t-3)^2 + 19,8.$$

Substituímos em $N(15) = 25,8$ e isolamos $1/c$:

$$25,8 = f_2(15) = \frac{1}{c}(15-3)^2 + 19,8,$$

$$\frac{1}{c} \cdot 12^2 = 25,8 - 19,8 - f_2(15) = 6,0 - 0,0892857143 = 5,9107142857,$$

$$\frac{1}{c} = \frac{5,9107142857}{144} \approx 0,0410468.$$

Logo,

$$c \approx \frac{1}{0,0410468} \approx 24,37,$$

e assim, produzimos $f_2(x)$.

**EXERCÍCIO 1: EXPLICITE $f_2(x)$.**

—

Além disso, podemos buscar uma aproximação parabólica mais geral tomando

$$f_3(t) = at^2 + bt + c.$$

Como o ponto $t = 0$ fornece $f_3(0) = 21{,}5$, concluímos que

$$c = 21{,}5.$$

Utilizando os demais cinco pontos da tabela, obtemos o seguinte sistema para determinar $a$ e $b$:

$$\begin{cases} 9a + 3b = -1{,}7, \\ 36a + 6b = -1{,}5, \\ 81a + 9b = 0{,}7, \\ 144a + 12b = 3{,}3, \\ 225a + 15b = 4{,}3. \end{cases}$$

Podemos escrever esse sistema de forma matricial como

$$X\beta = Y,$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 36 & 6 \\ 81 & 9 \\ 144 & 12 \\ 225 & 15 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1,7 \\ -1,5 \\ 0,7 \\ 3,3 \\ 4,3 \end{pmatrix}.$$

Podemos isolar $\beta$ e gerar a seguinte expressão

$$\boxed{\beta = (X^\top X)^{-1} X^\top Y}$$

**EXERCÍCIO 2: EXPLICITE $X^\top$, EM SEGUIDA CALCULE $X^\top X$, $(X^\top X)^{-1}$, $X^\top Y$ E POR FIM $(X^\top X)^{-1} X^\top Y$.**

**EXERCÍCIO 3: A PARTIR DOS CÁLCULOS ANTERIORES, ENCONTRE $\beta$ E EXPLICITE $f_3(x)$.**

—

Podemos agora buscar uma aproximação parabólica completamente geral tomando

$$f_4(t) = at^2 + bt + c,$$

mas desta vez **sem impor previamente o valor de** $c$. Assim, todos os pontos da tabela entram no sistema.

Usando os seis pontos disponíveis, obtemos o seguinte sistema para determinar $a$, $b$ e $c$:

$$\begin{cases} 0a + 0b + 1c = 21{,}5, \\ 9a + 3b + 1c = 19{,}8, \\ 36a + 6b + 1c = 20{,}0, \\ 81a + 9b + 1c = 22{,}2, \\ 144a + 12b + 1c = 24{,}8, \\ 225a + 15b + 1c = 25{,}8. \end{cases}$$

Podemos escrever esse sistema de forma matricial como

$$\tilde{X}\tilde{\beta} = \tilde{Y},$$

onde

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \\ 225 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 21,5 \\ 19,8 \\ 20,0 \\ 22,2 \\ 24,8 \\ 25,8 \end{pmatrix}.$$

Podemos isolar $\tilde{\beta}$ e gerar a seguinte expressçao

$$\boxed{\tilde{\beta} = (\tilde{X}^\top \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^\top \tilde{Y}}$$

**EXERCÍCIO 4: EXPLICITE $\tilde{X}^\top$, EM SEGUIDA CALCULE $\tilde{X}^\top \tilde{X}$, $(\tilde{X}^\top \tilde{X})^{-1}$, $\tilde{X}^\top \tilde{Y}$ E POR FIM $(\tilde{X}^\top \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^\top \tilde{Y}$.**

**EXERCÍCIO 5: A PARTIR DOS CÁLCULOS ANTERIORES, ENCONTRE $\tilde{\beta}$ E EXPLICITE $f_4(x)$.**

—

**EXERCÍCIO 6: Comparação das aproximações**

Utilizando as funções $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ e $f_4(t)$ obtidas nos exercícios anteriores, faça o seguinte:

1. Para cada ponto de tempo $t = 0, 3, 6, 9, 12, 15$, **calcule o valor de cada função** $f_i(t)$.

2. Para cada função e para cada tempo, **calcule o erro absoluto** definido como

$$\text{Erro absoluto} = |N(t) - f_i(t)|,$$

   onde $N(t)$ é o valor observado da grandeza.

3. Para cada função e para cada tempo, **calcule o erro relativo** definido como

$$\text{Erro relativo} = \frac{|N(t) - f_i(t)|}{N(t)} \times 100\%.$$

4. **Some os erros absolutos** de todos os pontos para cada função, obtendo o **erro total absoluto**, e some os erros relativos para obter o **erro total relativo**.

5. Com base nos erros totais, **indique qual das quatro funções fornece a melhor aproximação para os dados** $N(t)$.

**Observação:** O **erro absoluto** mede a diferença direta entre o valor observado e o valor aproximado. O **erro relativo** mede essa diferença em porcentagem do valor observado, permitindo avaliar a precisão relativa da aproximação.