Chill Jegyzőkönyv

Konczer József *

2023. Július. 18.

1. Bevezető

A Gombaszögi Nyári Tábor ”Mit tud a tudomány a világról, és azt honnan tudja?” című programján, a Szoba Chill sátorban 2023. július 15-én, valamikor helyi idő szerint 17 és 18 óra között a résztvevők közreműködésével a Természet faggatására és válaszainak feljegyzésére – azaz természettudományos kísérletre – került sor.

Az eseményről jegyzőkönyv készült (amit a kedves olvasó éppen megtekint), melyben rögzítésre kerültek a mért adatok, és azokból következtetések is levonásra kerültek.

A mérés bemutatása mellett ezen dokumentum további célja a természeti jelenségek mérésekkel való fürkészésének főbb jellemzőinek bemutatása:

*https://konczer.github.io/

- Megismételhetőségre való törekvés,
- Bizonytalanságok számbavétele és számszerűsítése,
- Hipotézisek vizsgálata illetve elvetése.

2. Kísérlet leírása

A kísérlet célja egy a helyszínen választott "kődarab" szabadesésének vizsgálata volt. A kérdés, amire kerestük a választ a következő: *Hányszor esik hosszabb ideig egy kétszer olyan magasról ejtett kő?*

A kísérlet végzése során azt a fontos és általános jelenséget is megtapasztalhattuk, hogy az egyes mérések megismétlése során, sőt ugyanazon ejtési alkalom más megfigyelők által riportolt mért ideje is eltért. Szép példája ez annak, hogy ugyanazon fizikai jelenség számszerű mennyiségekbe való szorítása sokszor nem egyértelmű, és sok más "zavaró tényező" mellett "zajjal terhelt".

2.1. Kísérleti eszközök

A kísérlet főszereplője a helyszínen talált kődarab volt, aminek minden bonyolultsága ellenére csupán szabadesését dokumentáltuk számszerűsítve.

A kődarabról sajnos nem sok számszerű, konkrét adat maradt az utókorra, milyenségét csupán néhány távoli fénykép és videó felvétel örökítette meg.

1. ábra. Kísérletben használt kődarab, és a kavicsot ejtő dokumentált képe.

A zuhanási időket a közönségből önként jelentkező lelkes megfigyelők mérték, vélhetően mobiltelefonokon standard módon elérhető digitális stopperórákkal.

3. Mérés menete

A mérés egészen minimalista módon történt. A kísérletet végző (egyben a jegyzőkönyv szerzője) körülbelül áll magasságból elengedte a már bemutatott kődarabot, majd a megfigyelők lemérték a földetéréshez szükséges időt. Ilyen módon az ejtés 6-szor lett megismételve.

Az eredmények feljegyzése és kihirdetése után, székre állva a közönség iránymutatása segítségével körülbelül kétszeres magasságból is ejtések történtek, ez esetben is 6 ismétléssel.

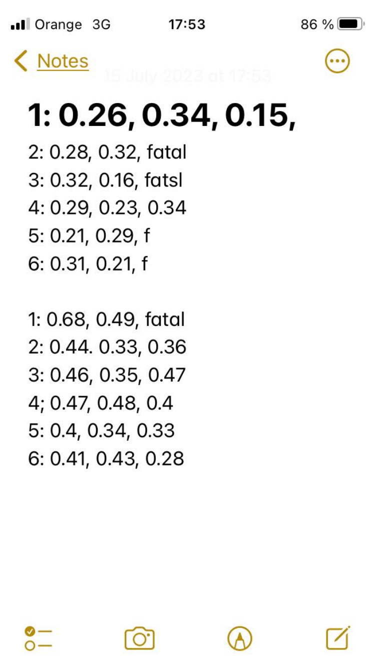
A Természet ilyen módon való aktív faggatása után az előadás folytatódott, később pedig beérkeztek a mért eredmények digitális formában.

4. Mért adatok

A kísérletezés egyik legfontosabb eleme a világ és az élményeink összetettségének számokba való egyszerűsítése.

4.1. "Nyers" adatok

Jó szokás a méréssel kapcsolatos legközvetlenebb dokumentumok megtartása, mert az esetlegesen további elemzés során napvilágra kerülő rejtélyek, anomáliák könnyebben felgöngyölíthetőek.



2. ábra. Mérési adatok, ahogy azok először beérkeztek

4.2. Táblázatosított adatok

Természetesen a ”nyers” adatokat ezek után olyan formátumokban kell tárolni, amik standardizáltak, és könnyen felhasználhatóak. Ennek egy ősi módszere a táblázatosítás, amit így a mi adatainkkal is megtettem:

i	$t_{i,1}$/s	$t_{i,2}$/s	$t_{i,3}$/s
1	0.26	0.34	0.15
2	0.28	0.32	
3	0.32	0.16	
4	0.29	0.23	0.34
5	0.21	0.29	
6	0.31	0.21	

1. táblázat. Alacsonyabbról mért zuhanási idők (t_k)

i	$T_{i,1}$/s	$T_{i,2}$/s	$T_{i,3}$/s
1	0.68	0.49	
2	0.44	0.33	0.36
3	0.46	0.35	0.47
4	0.47	0.48	0.40
5	0.40	0.34	0.33
6	0.41	0.43	0.28

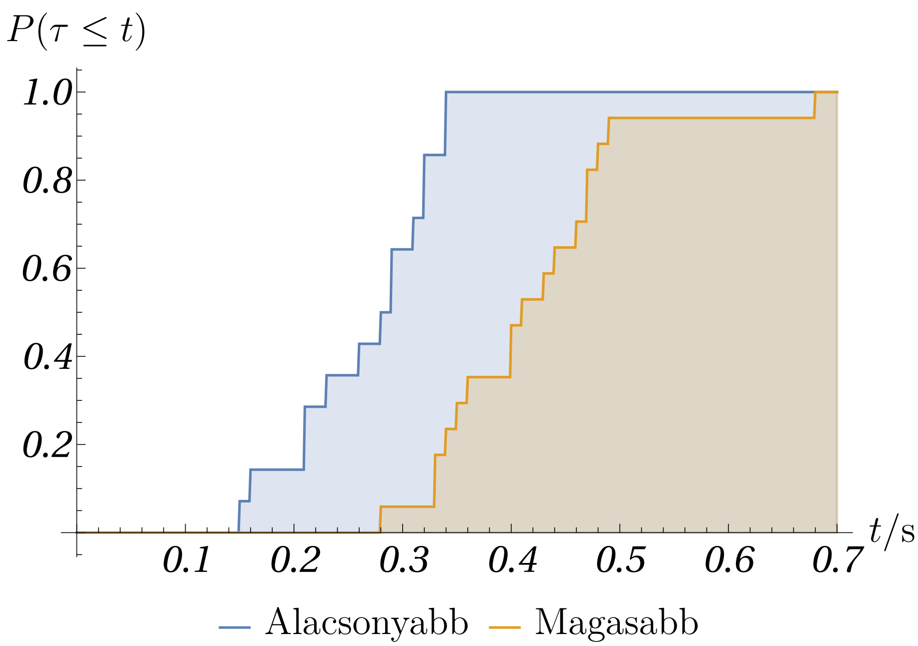
2. táblázat. Magasabbról mért zuhanási idők (T_k)

Az első oszlopban az ejtés indexe (i) szerepel, majd a következő 3 oszlopban a 3 különböző megfigyelő által beküldött zuhanási adatok szerepelnek, másodpercekben kifejezve. Általában t_k-val jelöltem az alacsonyabbról ejtett mérések eredményeit, és T_k-val a körülbelül kétszeres, magasabbról pottyanó kövek zuhanási idejét.

5. Adatok kiértékelése

Most, hogy fáradságos munkával elvégeztük a méréseket és begyűjtöttük az adatokat, kísérletet tehetünk azok értelmezésére.

Az első fontos lépés az adatok ábrázolása és szemrevételezése. A mért adatokból készítettünk egy úgynevezett empirikus eloszlásfüggvényt, amelyet a 3 ábrán láthatunk.



3. ábra. Empirikus eloszlásfüggvény az alacsonyabbról és magasabbról ejtett mérések esetén.

5.1. Mért adatok statisztikái

Mikor az adatról statisztikákat készítünk, akkor tulajdonképpen a gyűjtött adatokat valamilyen más, kevesebb számértékkel próbáljuk leírni. Ez nagyon hasznos tud lenni, de rejtett feltételezéseket és torzításokat is juttathatunk így a mért adatainkba. Érdemes ezért az ilyen feltételezéseinket valami módon ellenőrizni.

A két legfontosabb jellemzője egy adatsornak az átlaga, és (empirikus-) „varianciája” vagy „szórásnégyzete”:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \tag{1}$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2}{N}} \tag{2}$$

Az alacsonyabbról és a magasabbról ejtett adatok esetén is kiszámolhatjuk ezeket az értékeket:

Alacsonyabb:

$$\begin{aligned} N_t &= 14 \\ \bar{t} &= 0.265 \text{ s} \\ \hat{\sigma}_t &= 0.061 \text{ s} \end{aligned} \tag{3}$$

Magasabb:

$$\begin{aligned} N_T &= 17 \\ \overline{T} &= 0.419 \text{ s} \\ \hat{\sigma}_T &= 0.089 \text{ s} \end{aligned} \tag{4}$$

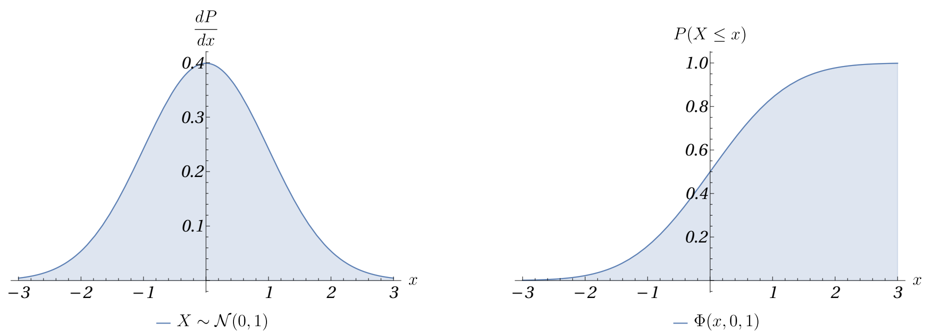
Egy nagyon általános statisztikai megfigyelés, hogy a mért adatok a nagymintájú átlagtól való ingadozása általában úgynevezett Normális, vagy Gauss-eloszlást követ. [1]

4. ábra. 10 német márka Gauss portréval és Gauss-eloszlással. Forrás: link

Ezek sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \Phi(x, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(x, \mu, \sigma) dx \tag{5}$$

[1] Ennek egy precízebb és álatlánosabb körülmények között is hejtállóbb változata, hogy a nagyobb mintás átlagok írhatóak le jól Gauss-eloszlással. Ezt konkrét matematikai tételként a Centrális határeloszlás-tétel mondja ki (mely tétel az ehhez szükséges feltételekről is számot ad). Megjegyezném, hogy vannak kivételek amik nem ezt a mintázatot követik, de ezekre itt és most nem térek ki.

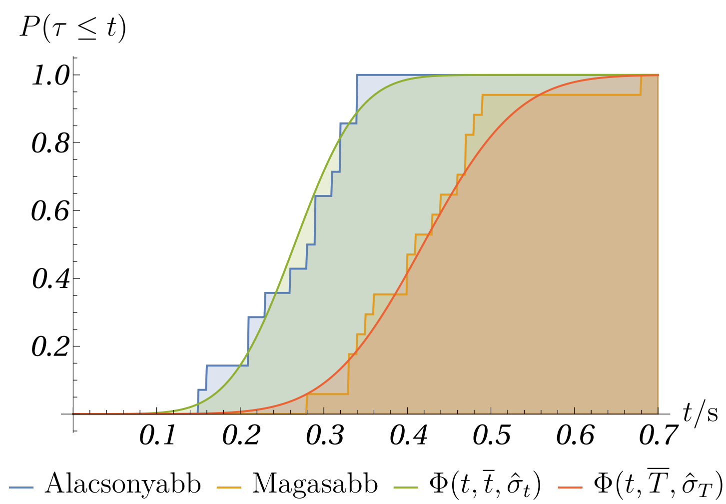


(a) Sűrűségfüggvény (b) Eloszlásfüggvény

5. ábra. Standard Normális vagy Gauss-eloszlás.

Nézzük, hogy az általunk mért adatokat is jól jellemzi-e a várható értékkel (amit a számolt átlaggal helyettesítünk) és szórással jellemzett normális eloszlás.

A tényleges adatokat és az „illesztett” eloszlást a 6 ábrán vetettük össze.



6. ábra. Empirikus eloszlásfüggvény az alacsonyabbról illetve magasabbról ejtett mérések esetén.

Talán nem merészség kijelenteni, hogy a folytonos illesztett eloszlások szépen közelítik a szögletes ténylegesen mért adatokból számolt empirikus eloszlást.

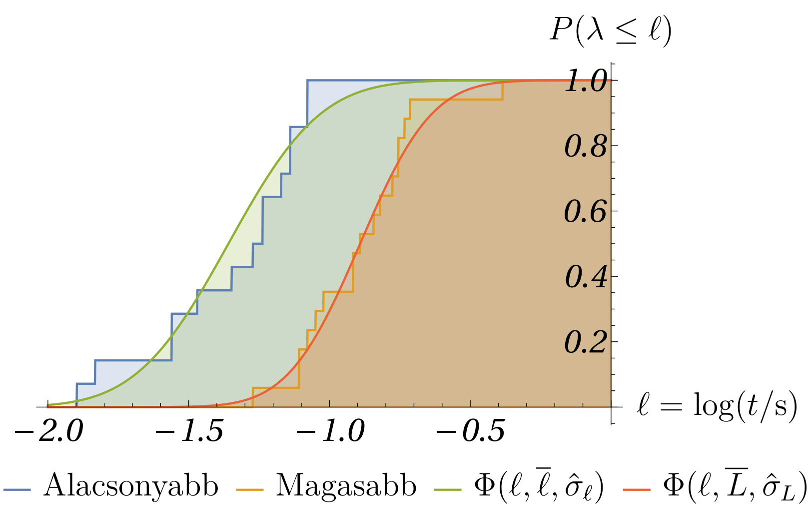
5.2. Természetes paraméterezés

Főleg kis mintaszámok esetén fontos a megfelelő paraméterezés megválasztása. Ez részben mesterségbeli jártasságot és szerencsét igényel, az adat önmagában nem mindig szolgál ezzel kapcsolatban iránymutatással.[2]

Én a földrengések és a hangerősség nagyságának mérésére használt mennyiségek mintájára az idők abszolút értéke helyett (t) azok nagyságrandját, azaz logaritmusát fogom az adatok természetes paraméterezésének választani (ℓ). Ezt teszem egyrészt intuícióból, másrészt mert így az illesztett eloszlásaink sosem fognak időben negatív értékekeket felvenni (mégiscsak furcsa lenne, ha bárki a jövőben negatív idő alatt pottyanó követ riprtolna), valamint mivel így a kérdéses arány is könnyen számolható majd.[3]

$$\ell = \log(t) \tag{6}$$

$$\ell_k = \log(t_k), \quad L_k = \log(T_k) \tag{7}$$



7. ábra. Empirikus eloszlásfüggvény az alacsonyabbról illetve magasabbról ejtett mérések esetén.

[2] Támpontokat azért adhat, pl. az ún. Kolmogorov–Smirnov teszttel ellenőrizhetjük, hogy mondjuk milyen paraméterezésben „normálisabb” az eloszlás.

[3] Megvizsgálható a mért adatok „normalitása” is a régi és az új paraméterezés után is. Az alacsonyabbról ejtett mérések rosszabbul, a magasabbról ejtettek jobban közelíthetőek Normális eloszlással az új paraméterezésben. Mivel így az adatok nem nyilatkoznak egyértelműen a kérdésben, az adatok kiértékelőjének kell vállalnia a döntést annak minden következményével.

6. Jóslatok

A természettudományos kísérletek és mérések egyik fő motivációja, hogy jóslatokat tudjunk tenni még el nem végzett kísérletek lehetséges eredményeire. Használható jóslatokhoz persze körültekintően kell eljárni.

A jövendőmondásnak két fő célja szokott lenni:

- Jövőbeli azonos mérések eredményének becslése,
- Paraméterek becslése, amik sokszor tekinthetőek nagymintás átlagok találgatásának.

Ezekhez persze feltételezésekre lesz majd szükségünk, a valószínűség számítás mágiájára, de eredményeink remélhetőek a józan ész szerint is értelmezhetőek lesznek.

8. ábra. Püthia a Delphoi jósda papnője.

6.1. További ismétlések várható eredményei

A továbbiakban az említett „természetes paraméterezésben” is elvégeztem az adataink statisztikai kiértékelését (átlagot és varianciát számoltam).

Viszont van egy említésre méltó apró részlet, ami megkülönbözteti a jóslást az adatok tömör leírásától.

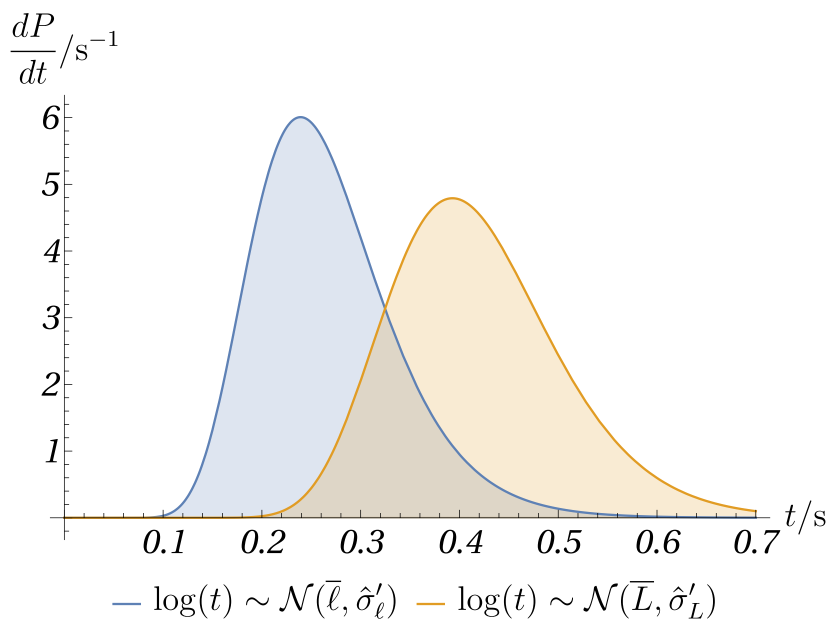
Gondoljunk bele, hogy ha az adataink tényleg Normális eloszlásúak lennének, és mi abból véges sok mintát vennénk, akkor nagyobb eséllyel lenne a minta varianciája kisebb, mint nagyobb az eredetihez képest. (Ez persze matematikailag precízen is kimondható és bizonyítható, a kimondást meg is tesszük majd.) Talán úgy magyaráznám a helyzetet, hogy véges minta esetén a minta átlaga nem mindig az „igazi” várható érték lesz, és mindig olyan irányba moccan el, hogy az adatok varianciája minél kisebb lehessen. Ez okozza, hogy az empirikus szórásnégyzet várható értéke kisebb lesz az „igazi” szórásnégyzettől.

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{N-1}{N}\sigma^2 \tag{8}$$

Ezt a torzítást úgy próbálhatjuk orvosolni, hogy a jósláshoz egy módosított szórást használunk:

$$\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2} \tag{9}$$

Ezek után minden standard eszköz rendelkezésünkre áll arra, hogy jóslatokat tegyünk arra, hogy milyen számszerű új adatokat várhatnánk, ha hasonló elrendezésben újabb ejtési kísérleteket végeznénk alacsonyabbról és magasabbról:



9. ábra. Újabb alacsonyabbról és magasabbról végzett ejtési idő adatok lehetséges értékeinek jósolt eloszlása.

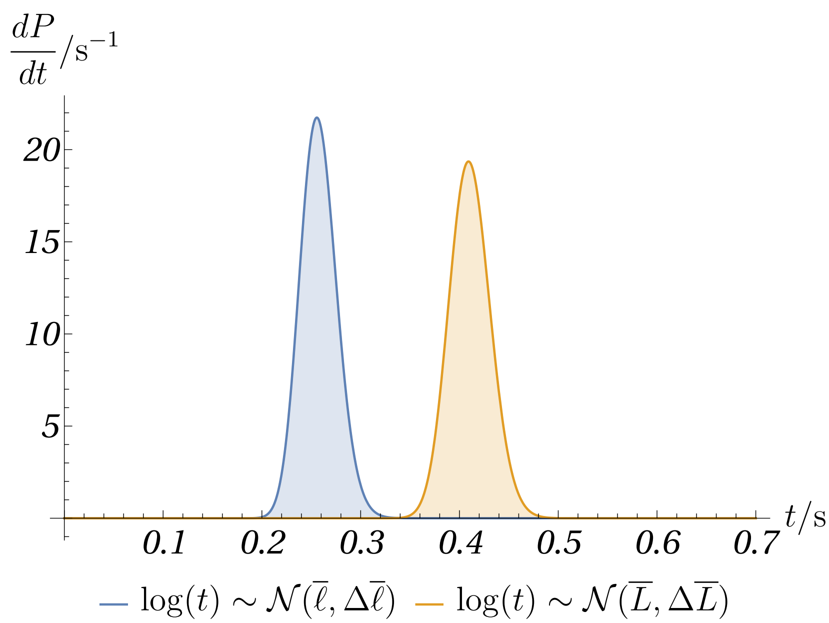
6.2. Paraméter becslés

Egy hasonló, de jellegében mégis más kérdés, hogy vajon ha nagyon sokszor mérnénk, akkor mi lenne az érték, ami körül az átlag mozogna. Pontosabban fogalmazva, mit mondhatunk az eloszlás tényleges várható értékéről?

Erről azt mondhatjuk, hogy ha tényleg egy adott várható értékű és szórású Normális eloszlású valószínűségi változóból vennénk véges sok mintát, akkor meg tudnánk mondani, hogy az átlag és a szórás becslése milyen eloszlású az „igazi" paraméterek függvényében. Ha tudjuk, hogy az így kapott átlag hogyan ingadozik a „valódi" értékhez képest, akkor arról is lehet fogalmunk, hogy a „valódi" paraméter hogyan ingadozik az átlaghoz képest. Kis kézlegyingetés és pár logikai bukfenc után a következő formulához juthatunk az átlag szórására [4]:

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{\sigma}' \tag{10}$$

Ez a következő jóslatokat adja az alacsonyról és magasról ejtett mérések hosszútávú nagymintás átlagára:



10. ábra. Alacsonyról és magasról ejtett mérések hosszútávú nagymintás átlagára tett jóslatok.

[4] egy kicsit több számolás és gondolkodás után az ún. Student t-eloszláshoz is el lehet jutni, ami szerintem egy fokkal közelebb áll ahhoz, amit az adatok valóban mondanak, de ezen kiértékelés keretein belül ebbe a bugyorba nem kalauzolom el a kedves olvasót.

7. Válasz az eredeti kérdésre

Végül az eredeti kérdésre is megkísérelhetünk választ adni a mért adatok alapján.

Mérésünk elején a következő kérdést tettük fel: *Hányszor esik hosszabb ideig egy kétszer olyan magasról ejtett kő?*

Jelöljük ezt az arányt r-el:

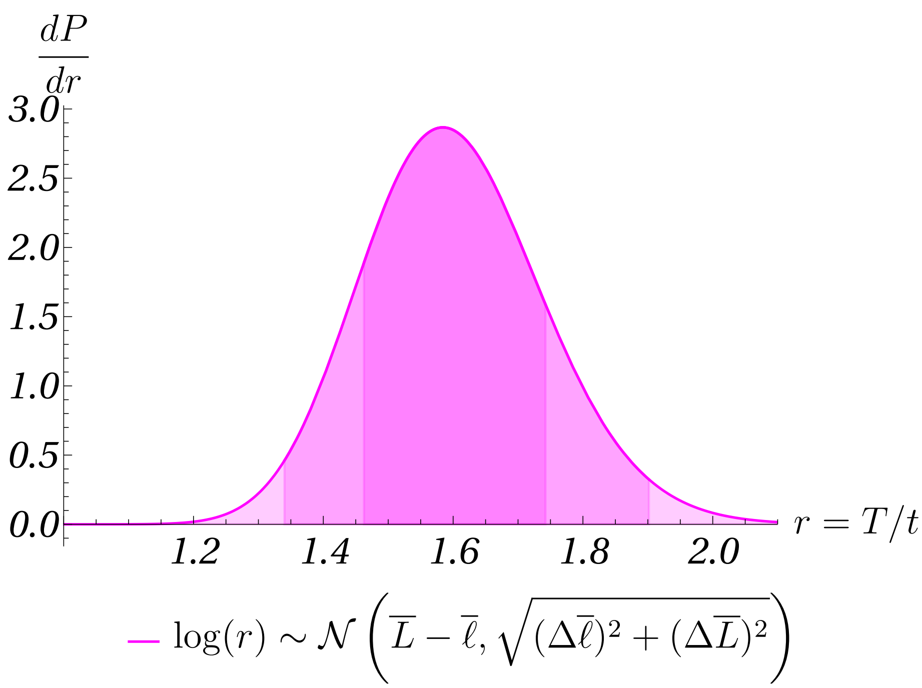
$$r = \frac{T}{t} \tag{11}$$

Ez a „természetes” logaritmikus paraméterezésben nagyban egyszerűsödik:

$$\log(r) = \log(T) - \log(t) = L - \ell \tag{12}$$

És mivel mindkét mennyiség várható értékére már adtunk jóslatokat melyek Normális eloszlásokkal írhatóak le, égy (mivel független Normális eloszlások összege és különbsége is Normális eloszlású), így ezekből könnyen megkephatjuk az arány logaritmusának eloszlását.

A 11 ábrán az így kapott eloszlás látható, bejelölve az egyszeres és kétszeres szórásnyira lévő értékeket.



11. ábra. A magasabb és alacsonyabb ejtési idő arányának eloszlásának adatok alapján kapott jóslata.

Az eloszlás „közepe”, pontosabban mediánja[5]:

$$\overline{r} = 1.60 \tag{13}$$

Egyszeres szórásnyira azaz egy 68%-os konfidencia intervallumot a következő értékek adnak:

$$r \in [1.46, 1.74] \tag{14}$$

Kétszeres szórásnyira azaz egy 95%-os konfidencia intervallumot a következő értékek adnak:

$$r \in [1.34, 1.90] \tag{15}$$

7.1. Hipotézisek a mért adatok fényében

- Elhangzott hipotézisek:
  - A magasabbról ejtett kísérletekben az esési idő kb. 0.4 s lesz. ✓
  - A magasabbról ejtett esési idők kevésbé fognak szórni ✗
- További lehetséges hipotézisek:
  - *H1* Kétszer olyan magasról kétszer olyan sokáig esik a kődarab
  - *H2* Eséskor minden test azonos g gyorsulással mozog, így kétszer olyan magasról ejtve $\sqrt{2}$-szer több ideig zuhan a kavics míg földet nem ér.

A *H1* hipotézis, azaz hogy a kő kétszer olyan hosszan esik kétszer olyan magasról ejtve igen valószerűtlennek tűnik az adatok fényében.

Számszerűen ez az értéke a mediántól (logaritmikus skálán)

$$z_1 = \frac{|\log(\overline{r}) - \log(2)|}{\sqrt{(\Delta\overline{\ell})^2 + (\Delta\overline{L})^2}} = 2.58 \tag{16}$$

Ami azt jelenti, hogy ez 2.58 szórásnyira van a mediántól, ami statisztikai véletlenek útján körülbelül 1.0% eséllyel jöhetne ki.

A *H2* hipotézis, azaz hogy a kő $\sqrt{2}$-szer olyan hosszan esik kétszer olyan magasról ejtve hihetőnek tűnik az adatok fényében.

$$z_2 = \frac{|\log(\overline{r}) - \log(\sqrt{2})|}{\sqrt{(\Delta\overline{\ell})^2 + (\Delta\overline{L})^2}} = 1.38 \tag{17}$$

Ami azt jelenti, hogy ez 1.38 szórásnyira van a mediántól, ami statisztikai véletlenek útján körülbelül 16.6% eséllyel jöhetne ki. Ez kísérlet minimalista kivitelezése és egyéb hibafaktorok fényében egy hihető hipotézisnek tűnik.

[5] ami a logaritmikus skálán egyben a legvalószinűbb érték és az átlag is

8. Megjegyzések

A kísérlet során a „véletlen hibák” mellett rengeteg potenciális „szisztematikus hibaforrás” is befolyásolhatta az eredményeket. Ilyenek például a magasságok nem pont kétszeres aránya, a megfigyelők reakció idejéből származó hibák, stb.

Mindezek mellett, vagy ellenére a mérésünk többé kevésbé összhangban van a Föld gravitációs terében való szabadesés elméletével, mely azt állítja, hogy a testek konstans $g = 9.81$ m/s^2 gyorsulással mozognak szabadeséskor.

Ez alapján a h magasságból ejtett kő és a zuhanás t ideje között a következő összefüggés áll fenn:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \tag{18}$$

A magasabb H magasság és az itteni T idejű zuhanás között:

$$H = \frac{1}{2} g \cdot T^2 \tag{19}$$

a két egyenletet elosztva a következő arányokra vonatkozó összefüggést kapjuk:

$$\frac{H}{h} = \frac{T^2}{t^2} \tag{20}$$

Ha feltesszük, hogy $H/h = 2$, akkor az idők aránya:

$$\frac{T}{t} = \sqrt{2} \approx 1.41 \tag{21}$$

Kellemetlen, de megemlítendő megjegyzés, hogy a számadatokból nem sikerült hihető magasság adatokra következtetni, vélhetően a nem elhanyagolható reakció időkből származó szisztematikus hibák miatt. De talán így is sikerült valamit kiderítenünk a Természetről, méghozzá fesztiváli keretek között.

9. Köszönetnyilvánítás

Konczer Attila meghívási és rendezői munkája nélkül az egész előadás, így a kísérlet sem jöhetett volna létre.

Hálás köszönettel tartozom a kísérletben megfigyelőként közreműködőknek: Hernádi Zsoltnak, Kucsora Kristófnak és Verő Anitának, valamint Katona Orsolyának aki az adatokat feljegyezte és továbbította.

A kísérletben aktívan résztvevők mellett köszönet illeti a szemtanukat is, akik türelmükkel, érdeklődésükkel és jelenlétükkel segítették a Természet titkainak ezen szerény feltárását.

A borítóképért köszönet Szvoboda Péternek, aki azt a 2016-os S.U.N. fesztiválon kapta lencsevégre.