Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Fisher-információ a kvantumelméletben

Konczer József

- Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban
- Klasszikus valószínűségszámítás és kvantummechanika fogalmai
- Két féle általánosítási lehetőség (SLD, Kubo-Mori)
- SLD tulajdonságai
- 1/2 spinű részecske Fisher-információja
- További kutatási lehetőségek

Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban

- statisztika: $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban

- statisztika: $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- $\widetilde{\theta} = t(\xi(\theta))$

Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban

- statisztika: $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- $\widetilde{\theta} = t(\xi(\theta))$
- $E[t(\xi(\theta))] = \theta$

Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban

- statisztika: $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- $\widetilde{\theta} = t(\xi(\theta))$
- $E[t(\xi(\theta))] = \theta$
- $D^2[\widetilde{\theta}]$ legyen minimális

Fisher-információ a klasszikus valószínűségszámításban

- statisztika: $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- $\widetilde{\theta} = t(\xi(\theta))$
- $E[t(\xi(\theta))] = \theta$
- $D^2[\widetilde{\theta}]$ legyen minimális
- Itt csak ún. reguláris becslési problémákkal foglalkozunk, ezek esetén:

$$\mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) = f(\underline{x}, \theta) \cdot \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) \tag{1}$$

$$f(\underline{x}, \theta) > 0, \quad \forall\ \underline{x}\text{-re}\ \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \in C^0 \tag{2}$$

Cramér-Rao egyenlőtlenség

A t statisztika torzítatlan:

$$\int t(\underline{x})\mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) = \theta \tag{3}$$

$\mu(\theta)$ a paramétertől regulárisan függ, azaz:

$$\mathrm{d}\mu(\theta) \quad = \quad f(\underline{x}, \theta) \cdot \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) \tag{4}$$

ahol $f(\underline{x}, \theta)$ egy minden $\underline{x}$-ben 0-tól nagyobb, θ szerint folytonosan deriválható függvény.

$$\int t(\underline{x}) f(\underline{x}, \theta)\mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = \theta \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int t(\underline{x}) f(\underline{x}, \theta)\mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 1 \tag{6}$$

$$\int t(\underline{x}) \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 1 \tag{7}$$

Cramér-Rao egyenlőtlenség

Mivel $\mu(\theta)$ minden θ mellett egy 1-re normált mérték:

$$\int f(\underline{x}, \theta) \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 1 \tag{8}$$

$$\int \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 0 \tag{9}$$

$$\theta \cdot \int \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 0 \tag{10}$$

$$\int \theta \cdot \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 0 \tag{11}$$

A két különböző gondolatmenettel kepott egyenleteket egymásból kivonva:

$$\int (t(\underline{x}) - \theta) \frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) \quad = \quad 1 \tag{12}$$

Cramér-Rao egyenlőtlenség

Mivel feltettük hogy minden $\underline{x}$-ben $f(\underline{x},\theta) > 0$

$$\int (t(\underline{x}) - \theta)\frac{\partial f(\underline{x},\theta)}{\partial\theta} \cdot \frac{1}{f(\underline{x},\theta)} \cdot f(\underline{x},\theta)\mathrm{d}\mu_0(\underline{x}) = 1 \qquad (13)$$

$$\int (t(\underline{x}) - \theta)\frac{\partial f(\underline{x},\theta)}{\partial\theta} \cdot \frac{1}{f(\underline{x},\theta)}\mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) = 1 \qquad (14)$$

Mivel $\langle f|g\rangle = \int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu(x)$ egy skalár szorzat a μ mérték szerint négyzetesen integrálható valós függvények halmazán, érvényes a Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz egyenlőtlenség:

$$\int (t(\underline{x}) - \theta)^2\mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) \cdot \int \left(\frac{\partial f(\underline{x},\theta)}{\partial\theta} \cdot \frac{1}{f(\underline{x},\theta)}\right)^2 \mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) \geq 1$$

$$\int (t(\underline{x}) - \theta)^2\mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) \geq \frac{1}{\int \left(\frac{\partial f(\underline{x},\theta)}{\partial\theta} \cdot \frac{1}{f(\underline{x},\theta)}\right)^2 \mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x})}$$

Cramér-Rao egyenlőtlenség

A Fisher-információ:

$$F(\theta) = \int \left(\frac{\partial f(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{f(\underline{x}, \theta)} \right)^2 \mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) \tag{15}$$

Vagy ekvivalens módon, más formában:

$$F(\theta) = -\int \frac{\partial^2 \log(f(\underline{x}, \theta))}{\partial \theta^2} \mathrm{d}\mu(\theta)(\underline{x}) \tag{16}$$

Fisher-információ és entrópia

Teljesen diszkrét vagy teljesen folytonos eloszlások esetén a Fisher-információ az eloszlás entrópiájával is kapcsolatban van:
Ha diszkrét esetben linearizáljuk az eloszlás paraméter függését θ_0-pontban:

$$\underline{p}(\theta) \approx \underline{p}(\theta_0) + \underline{a}(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) \tag{17}$$

ahol

$$\underline{a}(\theta_0) = \frac{\partial \underline{p}(\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}, \tag{18}$$

akkor formailag érvényes az alábbi összefüggés:

$$F(\theta_0) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S(\underline{p}(\theta_0) + \underline{a}(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0))\bigg|_{\theta=\theta_0}. \tag{19}$$

Klasszikus és kvantumos valószínűségszámítás

Klasszikus	Kvantumos
$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	$(I, \mathcal{M}, D)$
$E \in \mathcal{F}$	$P \in \mathcal{M}$ [1]
$t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$	$T \in B(\mathcal{H})$ [2]
$\int_\Omega f \cdot g \mathrm{d}\mu(x)$	$\mathrm{Tr}\, DAB$

[1] $P = P^2 = P^*$
[2] $T = T^*$

Kvantumos Cramér-Rao szerű egyenlőtlenég

T torzítatlan:

$$\mathrm{Tr}\, D(\theta) T = \theta \tag{20}$$

$D(\theta)$ sűrűségmátrix:

$$\mathrm{Tr}\, D(\theta) = 1 \tag{21}$$

Analóg módon következik, hogy:

$$\mathrm{Tr} \left(\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 D^{-1} \cdot \mathrm{Tr}\, D \left(T - \theta \cdot I \right)^2 \geq 1 \tag{22}$$

A levezetés általánosítása

A Hilbert-Shmidt skalár szorzat helyett vezessünk be egy általánosított skalár szorzatot:

$$\varphi[A, B] = \mathrm{Tr}\, \mathbb{J}_D(A)B \tag{23}$$

Tekintsünk az alábbi kifejezésre mint lineáris funkcionálra:

$$X \mapsto \mathrm{Tr}\, \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} X \tag{24}$$

$$\exists L \in B(\mathcal{H}) \quad \forall X \in B(\mathcal{H}) \quad \mathrm{Tr}\, \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} X = \varphi[L, X] \tag{25}$$

$$\varphi[L, T - \theta\, I] = 1 \tag{26}$$

A levezetés általánosítása

CBS alapján:

$$\varphi[L, L] \cdot \varphi[T - \theta\, I, T - \theta\, I] \geq 1 \tag{27}$$

$$\varphi[T - \theta\, I, T - \theta\, I] \geq \frac{1}{\varphi[L, L]} \tag{28}$$

Az egyenlőség pedig megint abban az esetben áll fent, ha T és L lineárisan összefüggenek.

A levezetés általánosítása

$$\mathbb{J}_D(X) = \frac{DX + XD}{2} \tag{29}$$

$$L = \mathbb{J}_D^{-1}\left(\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta}\right) \tag{30}$$

$$\mathbb{J}_D^{-1}(A) = \int_0^\infty e^{-t\cdot\frac{D}{2}} \cdot A \cdot e^{-t\cdot\frac{D}{2}} \mathrm{d}t \tag{31}$$

SLD Fisher-információ

Az így bevezetett mennyiséget symmetric logarithmic derivative (SLD) Fisher-információnak nevezzük:

$$F^C(\theta) = \mathrm{Tr}\, A(\theta)\mathbb{J}_{D(\theta)}^{-1}(A(\theta)) \tag{32}$$

Ahol $D(\theta)$ és $A(\theta)$ a θ-beli sűrűségmátrix, ill. annak paramétet szerinti deriváltja. $\mathbb{J}_D^{-1}(A)$ pedig:

$$\mathbb{J}_D^{-1}(A) = \int_0^\infty e^{-t\cdot\frac{D}{2}} \cdot A \cdot e^{-t\cdot\frac{D}{2}} \mathrm{d}t \tag{33}$$

SLD Fisher-információ

Egy rendszer SLD Fisher-információja a rajta elvégezhető POVM mérések Fisher-információjának szuprémuma.

$$F^C(\theta) = \sup \left\{ F(D) \,\middle|\, \text{POVM mérésekre} \right\} \tag{34}$$

POVM: $E_i \geq 0, \sum E_i = I, E_i E_j = \delta_{ij} E_i$

Kubo-Mori Fisher-információ

$$F^K(\theta_0) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} S(D(\theta_0) + A(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0))\Big|_{\theta=\theta_0} \tag{35}$$

$$F^K = \mathrm{Tr}\, A \cdot \int_0^\infty (t \cdot I + D)^{-1} A (t \cdot I + D)^{-1} \mathrm{d}t \tag{36}$$

Így a Kubo-Mori-féle Fisher-információ az előzőleg definiált SLD Fisher-információhoz alakilag hasonlatosan is definiálható:

$$F^K(\theta) = \mathrm{Tr}\, A(\theta) \mathbb{K}_{D(\theta)}^{-1}(A(\theta)) \tag{37}$$

Ahol $D(\theta)$ és $A(\theta)$ a θ-beli sűrűségmátrix, ill. annak paraméter szerinti deriváltja. $\mathbb{K}_D^{-1}(A)$ pedig:

$$\mathbb{K}_D^{-1}(A) = \int_0^\infty (t \cdot I + D)^{-1} A (t \cdot I + D)^{-1} \mathrm{d}t \tag{38}$$

$1/2$ spinű részecske Fisher-információja

$$D = \frac{1}{2} \cdot (I + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) \quad \text{ha} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \tag{39}$$

Ahol σ_i az i. Pauli mátrix:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

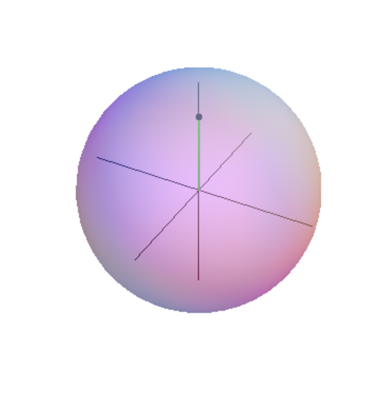
Legyen:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{41}$$

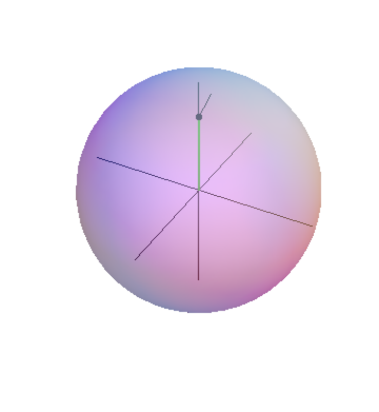
$$X = \frac{x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3}{r} \tag{42}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot (I + rX) \tag{43}$$

1/2 spinű részecske Fisher-információja



1/2 spinű részecske Fisher-információja



1/2 spinű részecske Fisher-információja

$$X^2 = I, \tag{44}$$

ezáltal:

$$X^{2k} = I \quad X^{2k+1} = X \quad k \in \mathbb{Z} \tag{45}$$

$$e^{sX} = ch(s)I + sh(s)X \tag{46}$$

1/2 spinű részecske Fisher-információja

$$F^C = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-r^2} + 1) \right) + \left(\frac{1}{1-r^2} - 1) \right) \cdot \mathrm{Tr}\,(AX)^2 \qquad (47)$$

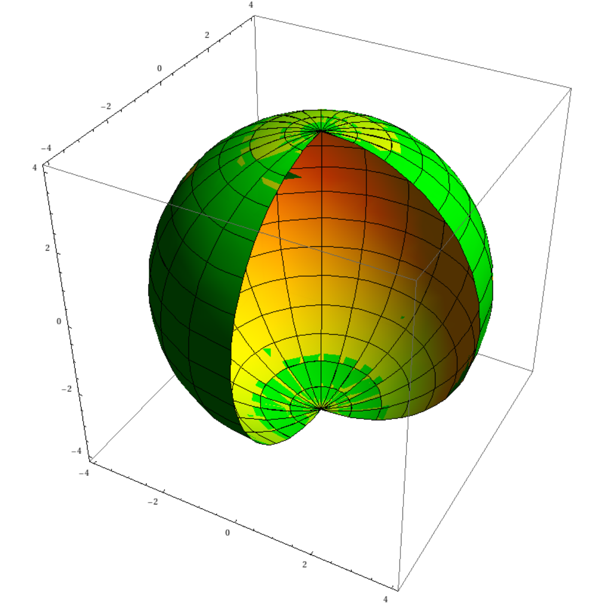
$$\begin{aligned} F^K \quad = \quad & \left(\frac{2}{1-r^2} + \frac{1}{r} \cdot \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1-r^2} - \frac{1}{r} \cdot \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right) \mathrm{Tr}\,(AX)^2 \end{aligned} \qquad (48)$$

1/2 spinű részecske Fisher-információja

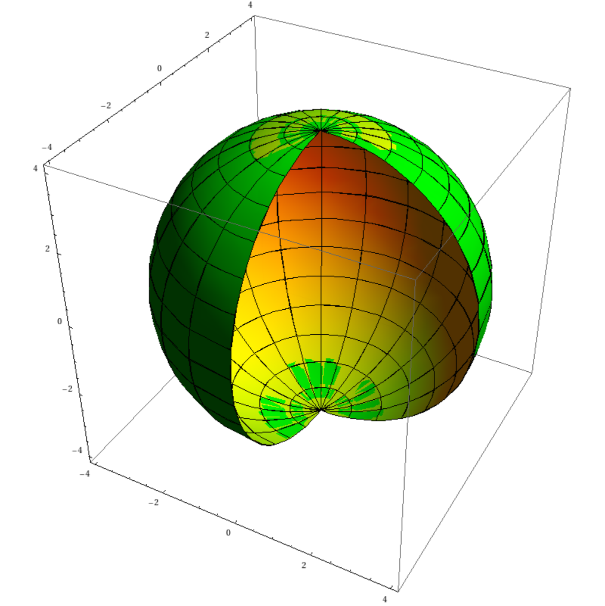
$$F^C(r,\vartheta) = 4 \cdot \left(\left(\frac{1}{1-r^2} - 1 \right) \cdot cos^2(\vartheta) + 1 \right)$$

$$F^K = \left(\frac{4}{1-r^2} - \frac{2}{r} \cdot \log\left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right) \cdot cos^2(\vartheta) + \frac{2}{r} \cdot \log\left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

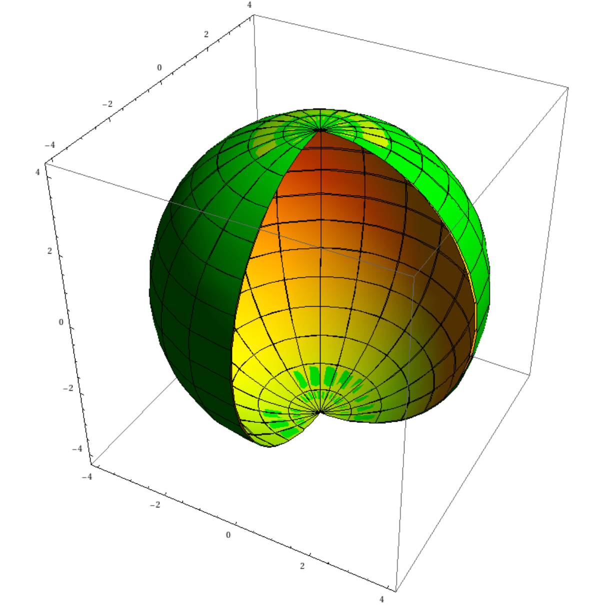
$r = 0.01$



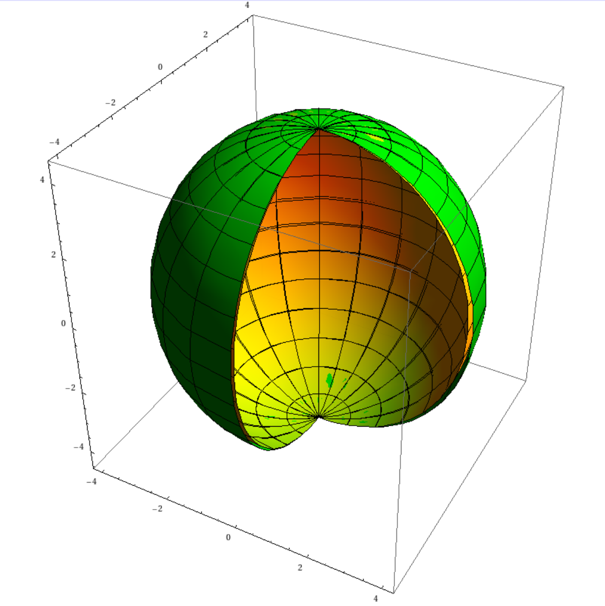
$r = 0.1$



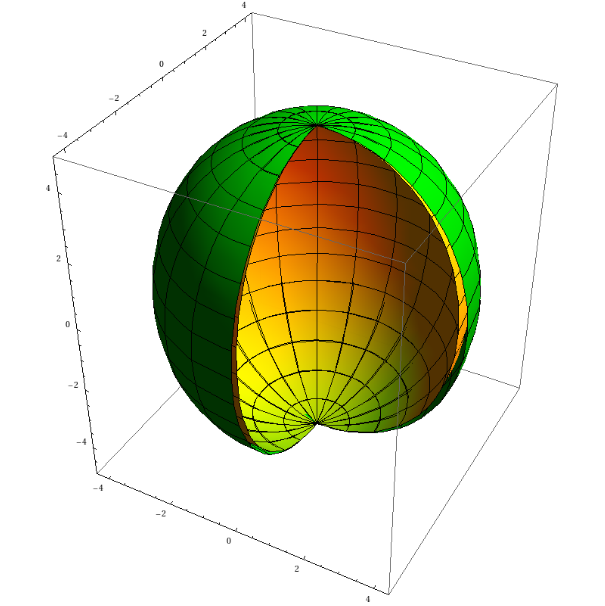
$r = 0.2$



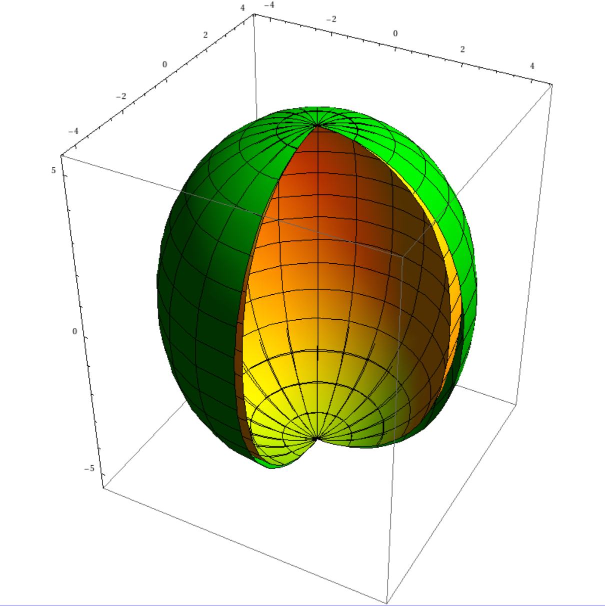
$r = 0.3$



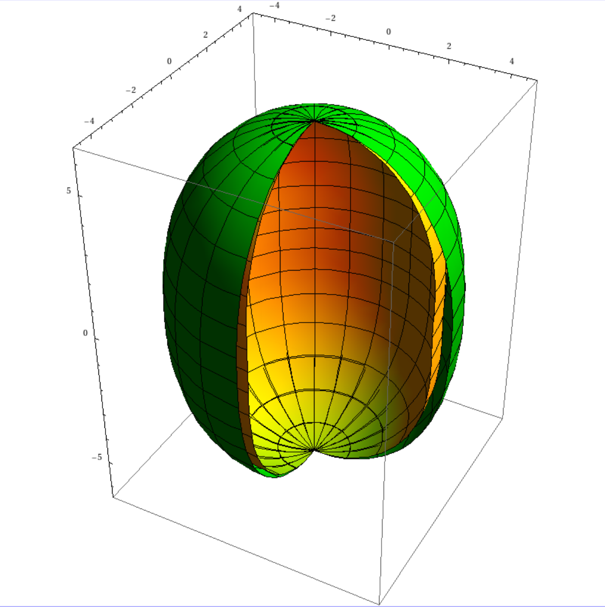
$r = 0.4$



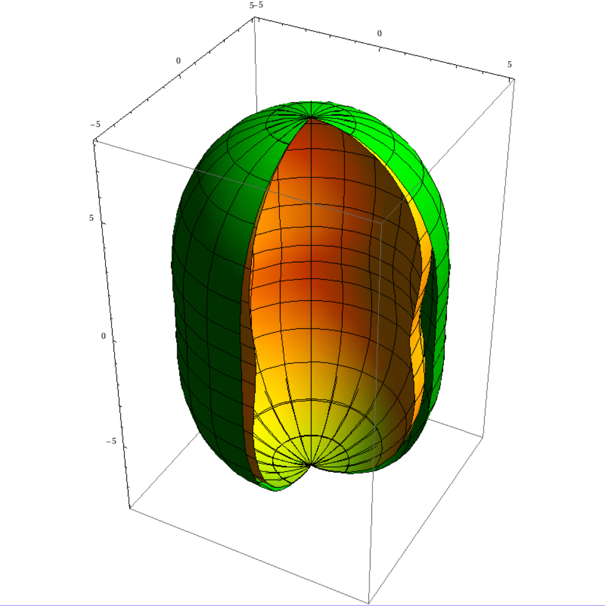
$r = 0.5$



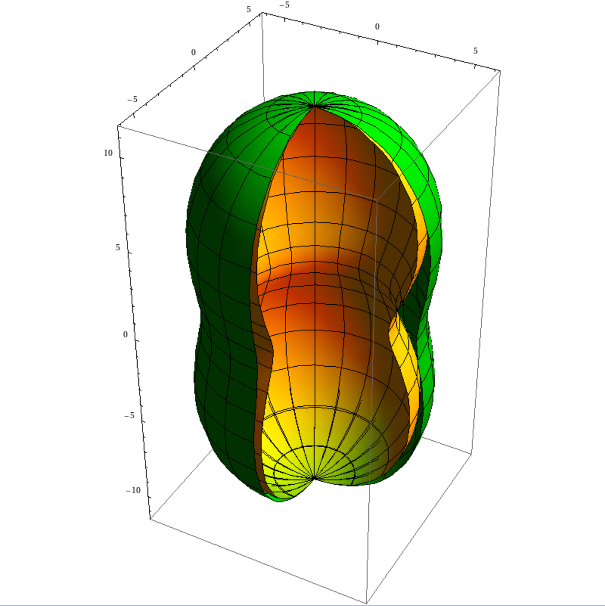
$r = 0.6$



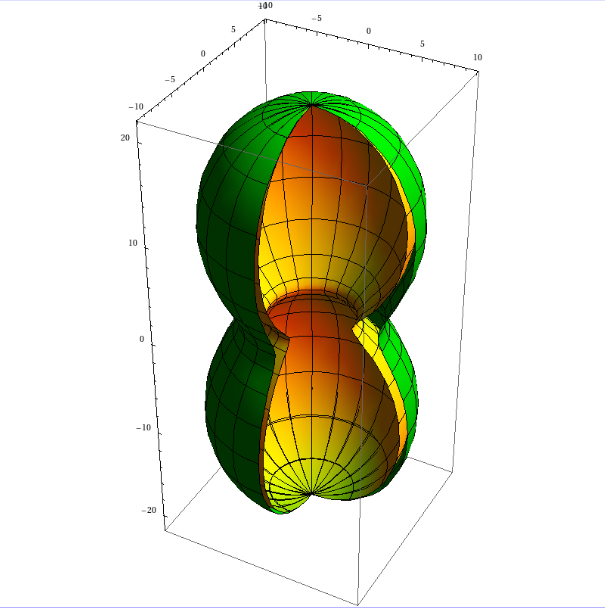
$r = 0.7$



$r = 0.8$



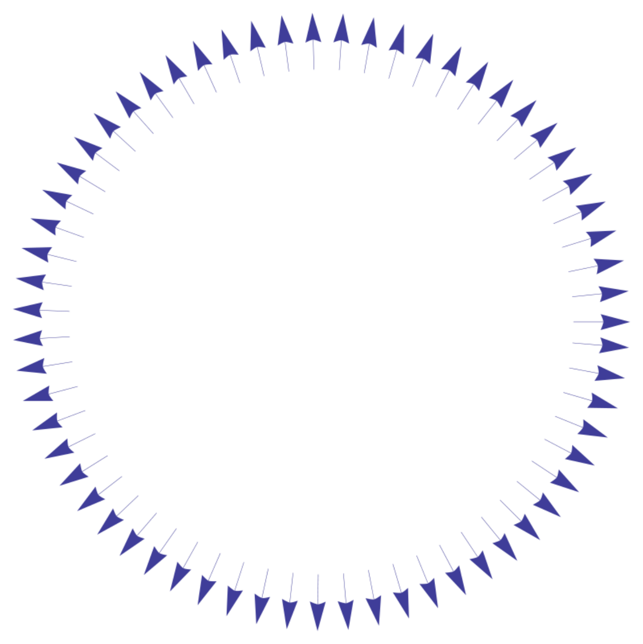
$r = 0.9$



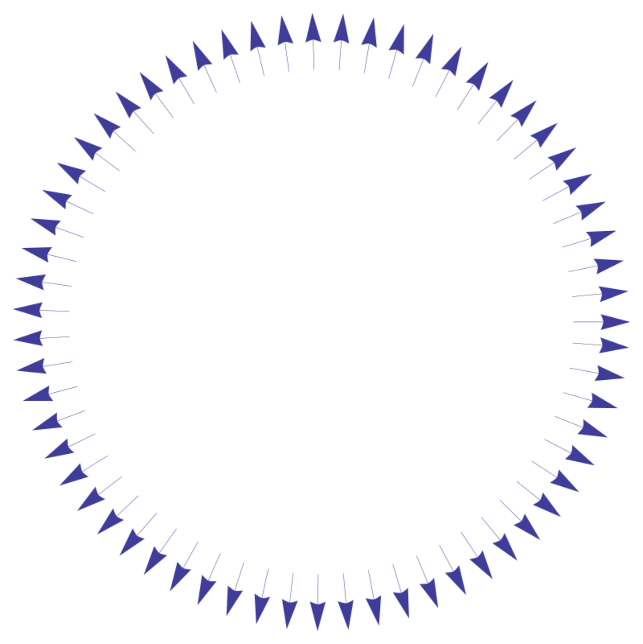
1/2 spinű részecske Fisher-információja

Efficiens mérési irányok meghatározása SLD esetén

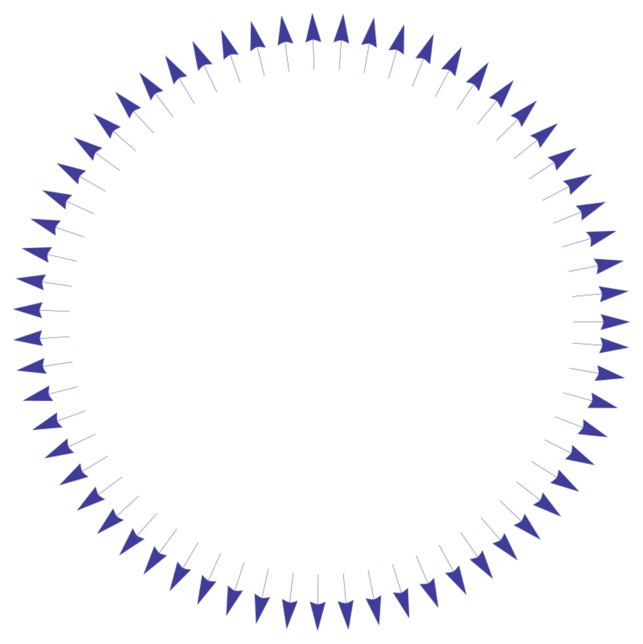
$r = 0.0$



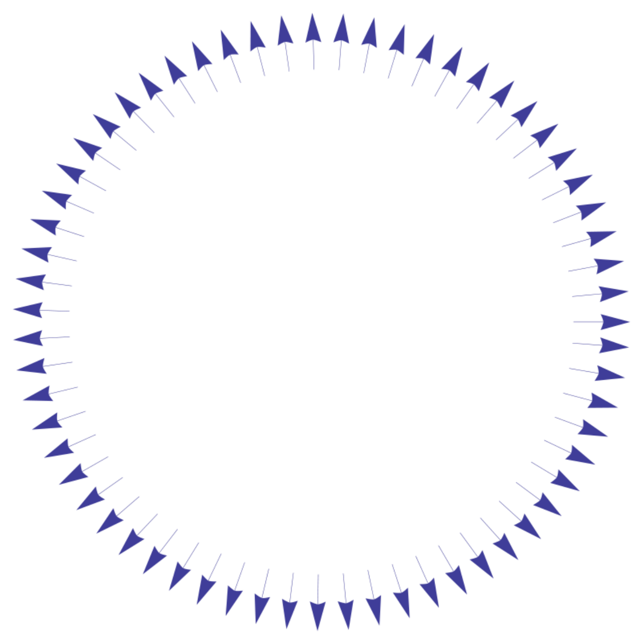
$r = 0.1$



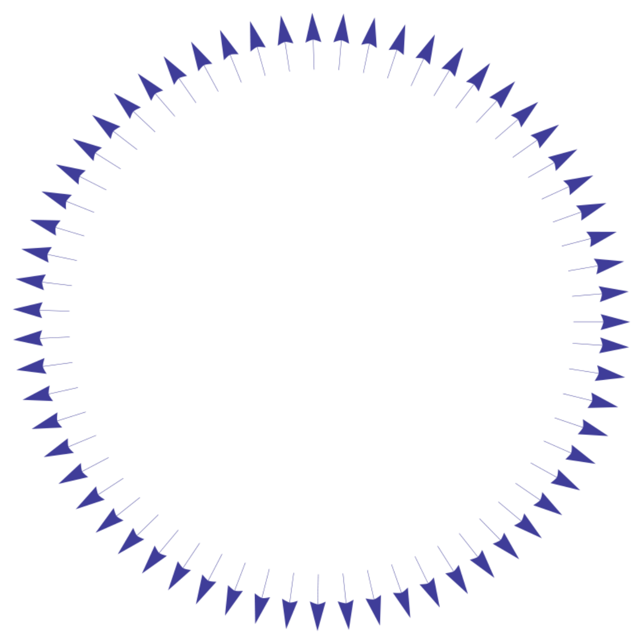
$r = 0.2$



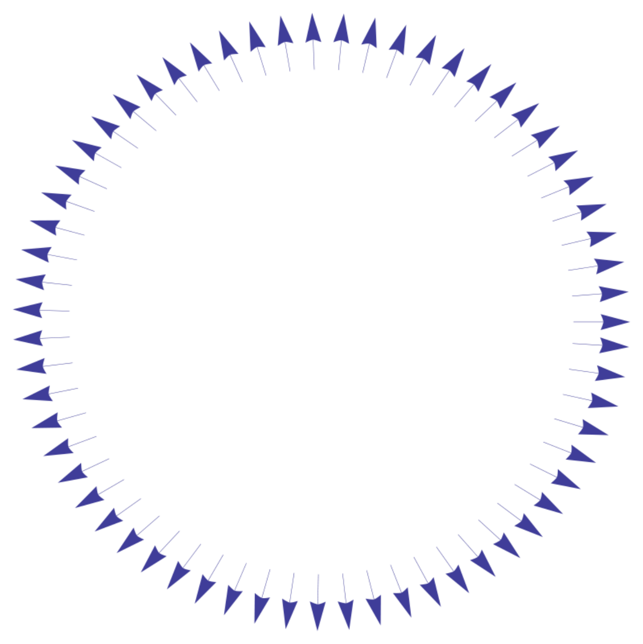
$r = 0.3$



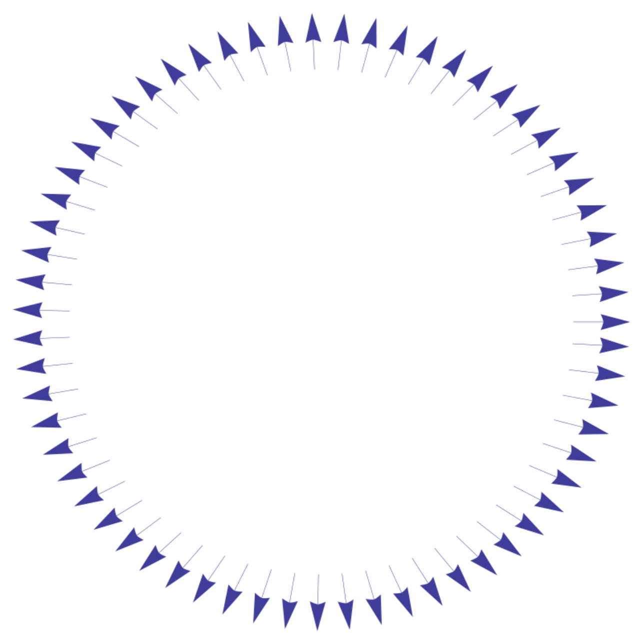
$r = 0.4$



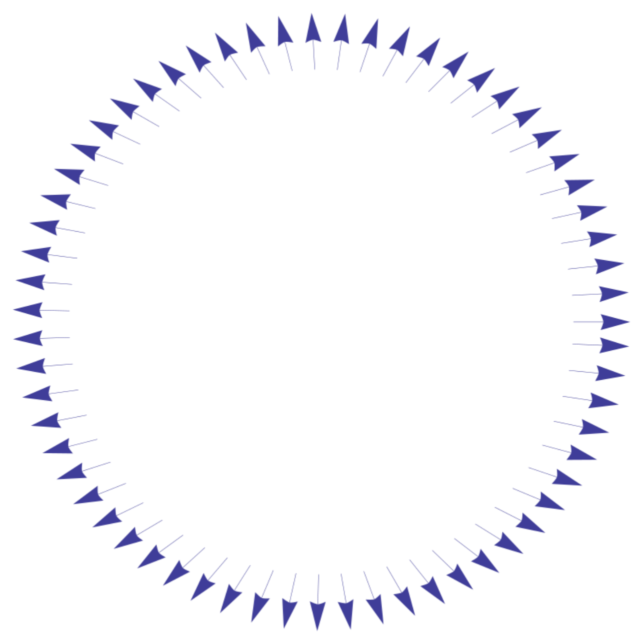
$r = 0.5$



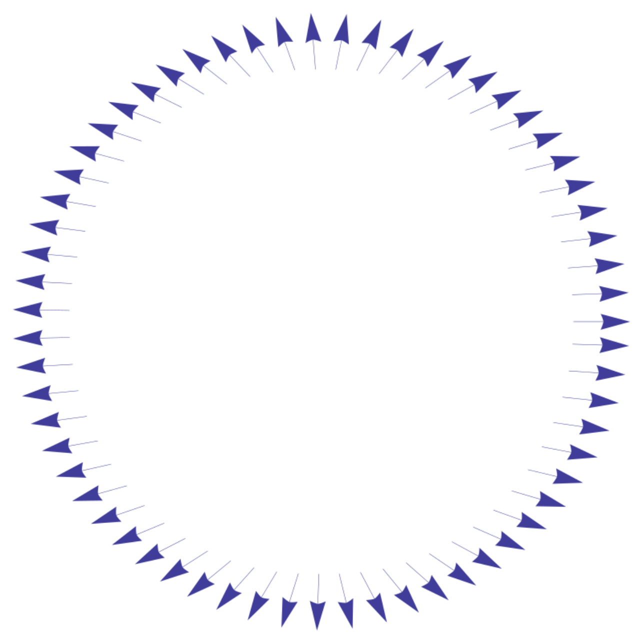
$r = 0.6$



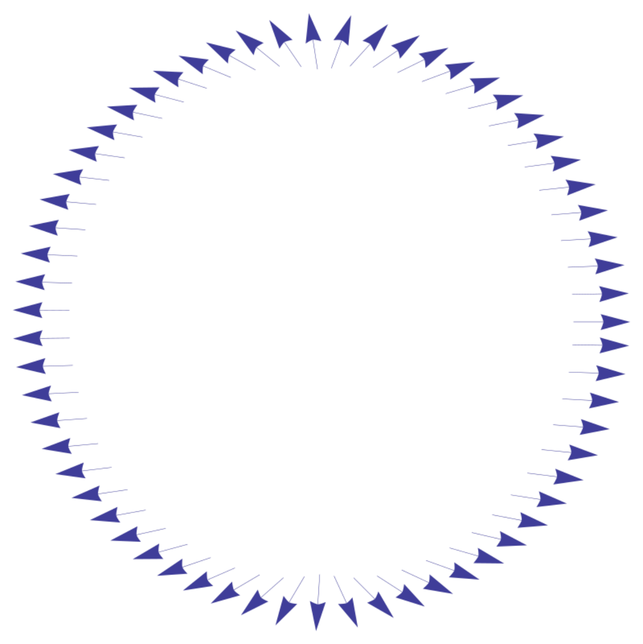
$r = 0.7$



$$r = 0.8$$



$r = 0.9$



További kutatási lehetőségek

- Több paraméter becslése

További kutatási lehetőségek

- Több paraméter becslése
- Kváziklasszikus átmenet

További kutatási lehetőségek

- Több paraméter becslése
- Kváziklasszikus átmenet
- Efficiens mérések meghatározása