Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

V. Liguine

Liste des travaux sur les ovales de Descartes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 40-49.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_40_1>

MÉLANGES.

LISTE DES TRAVAUX SUR LES OVALES DE DESCARTES;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Interrompu, par des circonstances particulières, dans la préparation d'une monographie sur les ovales de Descartes, j'ai cru qu'il y aurait un certain intérêt à publier séparément cette liste, assez complète, je l'espère, des Ouvrages et Mémoires concernant ces courbes, liste que j'ai été conduit à dresser en étudiant l'historique de la question. Outre les travaux d'une certaine étendue, il y avait lieu de citer beaucoup de questions, proposées sur les ovales dans divers journaux, principalement dans l'*Educational Times;* à ces citations j'ai ajouté les énoncés mêmes des théorèmes à démontrer, afin d'épargner aux lecteurs de pénibles recherches et de présenter en même temps une suite de propriétés relativement moins connues des ovales.

1637. *Descartes.* — La Géométrie. Livre II.

1687. *Newton.* — Philosophiæ naturalis principia mathematica. T. I : De motus corporum, lib. I, propositio 97, problema 47 et cor. 1-2.

1690. *Huygens.* — Traité de la lumière. Chap. VI.

1693. *Roberval.* — De geometrica planarum æquationum resolutione (Mémoires de l'Académie royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699. T. VI, p. 157-194).

1799. *Montucla.* — Histoire des Mathématiques. T. II, p. 129-130.

1823. *Quetelet.* — Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques soit par réflexion soit par réfraction (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles, t. III, p. 89-140).

1824. *Sturm.* — Recherches sur les caustiques (Annales de Gergonne. T. XV, p. 205-218).

1827. *Quetelet.* — Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques (Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles, t. IV).

1829. *Quetelet.* — Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires (*Ibid.*, t. V).

Quetelet. — Des surfaces réfléchissantes ou dirimantes qui ont deux foyers conjugués (Correspondance mathématique et physique, publiée par Quetelet. T. V, p. 1-6).

Quetelet. — Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués (*Ibid.*, p. 109-116).

Chasles. — Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués (*Ibid.*, p. 116-120).

Chasles. — Sur les lignes aplanétiques (*Ibid.*, p. 188-190).

Quetelet. — Sur les lignes aplanétiques (*Ibid.*, p. 190-193).

1830. *Plana.* — Mémoire sur les caustiques (*Ibid.*, t. VII, p. 110).

1832. *Chasles.* — Sur les propriétés des coniques qui ont des foyers communs (*Ibid.*, p. 295-297).

1833. *Quetelet.* — Analogie entre la théorie des caustiques et celle des développantes et des développées (Traité de la lumière par Herschel. T. II, Supplément 6, p. 380-407).

1837. *Chasles.* — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. 4e époque, § 18, et Note 21.

1850. *Roberts (William).* — Théorème sur les arcs des lignes aplanétiques (Journal de Liouville, Ire série, t. XV, p. 194-196).

1850. *Cayley.* — Addition au Mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes (*Ibid.*, p. 351-356).

1856. *Cayley.* — A Memoir upon Caustics (Philos. Transactions of the Royal Society of London. T. CXLVII, p. 273-312).

1857. *Cayley.* — On the Ovals of Descartes (The Quarterly Journal of Mathem. T. I, p. 320-328).

L'auteur, ayant en vue d'exposer plusieurs détails concernant l'histoire des recherches sur les ovales de Descartes, destine ce premier article à la reproduction textuelle du passage de la *Géométrie* de Descartes relatif aux ovales.

1858. *Mannheim.* — Constructions du centre de courbure de la courbe, lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant (Annali di Matemat. pubblic. da Tortolini. T. I, p. 364-369).

1860. *Mannheim.* — Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques (Nouvelles Annales de Mathématiques, I^re^ série, t. XX, p. 220-222).

1862. *Mannheim.* — Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles (Journal de Liouville, 2^e^ série, t. VII, p. 121-135).

1864. *Darboux.* — Sur les sections du tore (Nouv. Ann. de Math., 2^e^ série, t. III, p. 156-165).

Darboux. — Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (*Ibid.*, p. 199-202).

1864. *Darboux.* — Remarque sur la théorie des surfaces orthogonales (Comptes rendus de l'Académie, t. LIX, p. 240-242).

Genocchi. — Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie (Annali di Matem. pubblic. da Tortolini. T. VI, p. 97-123).

De Trenquelléon. — Sur l'intersection de deux cônes (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e^ Série, t. III, p. 539).

1866. *Crofton.* — On certain properties of the Cartesian Ovals, treated by the method of vectorial coordinates (Proceedings of the London Mathem. Society. T. I).

Crofton. — Question 1924 (Mathem. Questions from the « Educational Times », edited by Miller. T. VI, p. XVI).

L'arc d'un ovale de Descartes en un point quelconque P fait des angles égaux avec la droite tirée de P vers un foyer quelconque et la circonférence passant par P et par les deux autres foyers (pour la solution de cette question, *voir* le même Recueil, t. XXV, p. 17, question 4795).

Sylvester. — Question 1990 (*Ibid.*, p. 35, 70, 88; *voir* aussi *Ibid.*, t. VIII, p. 69).

I. Les trois points où une cubique circulaire est rencontrée par une transversale quelconque sont les foyers d'un ovale de Descartes passant par les quatre foyers de la cubique. II. Lorsqu'une circonférence et une droite rencontrent une transversale quelconque en trois points, ces points sont les foyers d'un ovale de Descartes appartenant à un système de ces ovales ayant entre eux double contact en deux points fixes. (Le second théorème est dû à M. Crofton).

1867. *Burnside.* — Question 1874 (*Ibid.* T. VII, p. 69).

Appliquer la théorie de Plücker à la détermination des foyers des ovales de D.

Sylvester. — Question 2332 (*Ibid.*, p. 74).

Démontrer que l'on ne peut construire que deux ovales de Descartes ayant un axe donné et passant par quatre points donnés, et faire voir conséquemment, à l'aide de la proposition I de la question 1990 (*voir* plus haut), que tous les ovales que l'on peut mener par quatre points donnés situés sur une même circonférence consistent exclusivement de deux *tribus* (familles de familles) dont les foyers se trouvent respectivement sur les deux cubiques circulaires ayant les quatre points donnés pour foyers.

Crofton. — Question 2280 (*Ibid.*, t. VIII, p. 66).

Un ovale de Descartes ou une ellipse sont rencontrés par une circonférence, dont un diamètre coïncide avec l'axe, en deux points dont les coordonnées bipolaires relatives à deux des foyers sont (r, r') et (s, s'). Cela posé, si l'on mène une circonférence concentrique à la première et tangente à la courbe, les coordonnées bipolaires de chaque point de contact seront

$$\left[\frac{1}{2}(r+s),\ \frac{1}{2}(r'+s')\right].$$

1867. *Crofton.* — On various properties of bicircular quartics (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. II, p. 33-44).

1868. *Cayley.* — Question 2573 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. IX, p. 73).

L'enveloppe d'un cercle variable ayant pour diamètre la double ordonnée d'une cubique rectangulaire est un ovale de Descartes. (L'expression « cubique rectangulaire » est employée pour désigner une cubique à trois asymptotes réelles, ayant un diamètre formant un angle droit avec l'une des asymptotes et un angle de 45° avec chacune des deux autres, c'est-à-dire une cubique ayant pour équation $xy^2 = x^3 + bx^2 + cx + d$.)

Darboux. — Note sur une classe de courbes du quatrième degré et sur l'addition des fonctions elliptiques (Annales de l'École Normale, 1re Série, t. IV).

Panton. — Question 2562 (*Ibid.*, p. 85).

L'équation d'un ovale de Descartes, le foyer triple étant pris pour origine, est

$$[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]^2 + 4\alpha\beta\gamma[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] = 0,$$

où α, β, γ expriment les distances des trois foyers simples au foyer triple.

1869. *Panton.* — Question 2622 (*Ibid.*, t. XI, p. 56).

L'équation qui relie les distances (r_1, r_2, r_3) d'un point quelconque pris sur un ovale de Descartes aux foyers est

$$(\beta - \gamma)\alpha^{\frac{1}{2}} r_1 + (\gamma - \alpha)\beta^{\frac{1}{2}} r_2 + (\alpha - \beta)\gamma^{\frac{1}{2}} r_3 = 0,$$

α, β, γ désignant les distances des foyers au foyer triple.

Roberts (Samuel). — Question 2888 (*Ibid.*, t. XII, p. 94).

Lorsqu'un ovale de Descartes a deux foyers axiaux imaginaires et par conséquent deux foyers extra-axiaux réels, la tangente en un point quelconque est la bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle formé par le rayon vecteur mené du foyer axial réel et le rayon d'un cercle passant par les foyers extra-axiaux et le point de contact, le rayon étant mené à ce dernier point. Propriété correspondante pour une conique.

Casey. — On bicircular quartics (Transactions of the Royal Irish Academy, t. XXIV, p. 457-569).

1870. *Roberts (S.).* — On the ovals of Descartes (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. III, p. 106-126).

1870. *Roberts* (*S.*). — Question 3151. (Math. Quest. from the Ed. Times, t. XIV, p. 21).

Dans un ovale de Descartes à nœud fini (limaçon à nœud), la différence entre les longueurs des boucles est égale à quatre fois la distance des sommets.

Crofton. — Question 2111 (*Ibid.*).

Dans un ovale de Descartes dont les deux foyers intérieurs coïncident, la différence des deux arcs interceptés par deux transversales quelconques menées du foyer extérieur est égale à une portion de droite que l'on peut déterminer.

1872. *Cayley.* — Note on the Cartesian (Quarterly Journ. of Math., t. XII, p. 16-19).

Darboux. — Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces (Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. VIII et IX, 1re Série).

1873. *Roberts* (*S.*). — Note on the expression of the length of the arc of a Cartesian by elliptic functions (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. V, p. 6-9).

Clifford. — Question 4010 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. XIX, p. 73).

Les lignes de courbure d'une surface du second degré sont projetées d'un ombilic sur un plan parallèle au plan tangent en ce point suivant une série d'ovales de Descartes confocaux.

1874. *Roberts* (*S.*). — Question 4242 (*Ibid.*, t. XXI, p. 91).

Deux ovales de Descartes conjugués rencontrent l'axe en quatre points réels A, B, C, D, dans l'ordre même de ces lettres. Les diamètres axiaux peuvent alors être groupés en trois paires (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC). Si l'on construit trois ellipses ayant leurs demi-diamètres principaux égaux aux trois paires de diamètres des ovales, la circonférence de l'ovale extérieur sera égale à la demi-somme des circonférences des ellipses construites sur (AC, BD), (AB, CD), la circonférence de l'ovale intérieur sera égale à la demi-différence des circonférences des mêmes ellipses, et les arcs des ovales compris entre l'axe et les points de contact des tangentes menées du foyer extérieur seront exprimables à l'aide d'arcs de la troisième ellipse et des circonférences des premières.

1874. *Panton.* — Question 4279 (*Ibid.*, p. 89).

La somme des aires des deux ovales de Descartes conjugués est égale au double de l'aire du cercle qui a le foyer triple pour centre et qui passe par les points de contact de la tangente double.

Catalan. — Question 27 (Nouvelle Corresp. Mathém., t. I, p. 67).

Un quadrilatère ABCD articulé en A, B, C, D a pour axe de symétrie la diagonale AC. De plus, le côté AB est fixe. Cela étant, le lieu du point de rencontre des côtés AD, BC est un ovale de Descartes (Pour la solution de cette question, *voir* le même Recueil, t. II, p. 89).

1875. *Merrifield.* — Question 4621 (Mathem. Quest. from the Educ. Times, t. XXIII, p. 64).

L'équation bipolaire d'un ovale de Descartes dont les foyers sont P et Q est

$$\frac{p}{l}+\frac{q}{m}=1.$$

Si l'on pose $PQ=c$, le troisième foyer R est déterminé par la relation

$$QR:PR=\left(1-\frac{c^2}{l^2}\right):\left(1-\frac{c^2}{m^2}\right),$$

et l'indice de réfraction est $-\frac{l}{m}$ entre P et Q, $\mp\frac{c}{l}$ entre Q et R et $\pm\frac{m}{c}$ entre R et P.

Cayley. — On the expression of the coordinates of a point of a quartic curve as functions of a parameter (Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 81-83).

Johnson. — Bipolar equations. Cartesian ovals (The Analyst, t. II, p. 106-118).

1876. *Crofton.* — Question 4795 (Mathem Quest. from the Educ. Tim., t. XXV, p. 17).

Voir la question 1924 du même Recueil, t. VI, p. XVI.

Wolstenholme. — Question 4926 (*Ibid.*, p. 51).

Si dans un ovale de Descartes on mène des cordes par le foyer triple, le lieu des milieux de ces cordes est

$$(r^2-\beta\gamma)(r^2-\gamma\alpha)(r^2-\alpha\beta)+\alpha^2\beta^2\gamma^2\sin^2\theta=0.$$

1876. *Williamson.* — Question 4901 (*Ibid.*, p. 65).

Si P est un point quelconque d'un ovale de Descartes, C le centre de courbure correspondant et N le point où PC rencontre l'axe de la courbe, on a

$$\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{PC}} = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\theta},$$

α, β, γ désignant les angles formés par PC avec les trois rayons vecteurs du point P menés des foyers et θ étant l'angle entre PC et l'axe de la courbe. (Cette propriété fournit une construction géométrique du centre de courbure de l'ovale de D. en un point quelconque de cette courbe.)

Sylvester. — Question 4922 (*Ibid.*, p. 68).

En partant de la définition primitive d'un ovale de Descartes, trouver l'équation polaire de cette courbe, un foyer étant pris pour pôle et la droite qui joint les deux foyers pour axe polaire, et en déduire l'existence d'un troisième foyer sur la droite passant par les deux premiers.

Crofton. — Question 5082 (*Ibid.*, t. XXVI, p. 79).

Si θ est l'angle au sommet dans un triangle, dont la base est une ligne fixe $AB = 2c$, et si x, y sont les coordonnées du sommet, on a

$$\iint \sin\theta \, dx \, dy = 8c(a-c),$$

l'intégration étant étendue sur un ovale de Descartes quelconque, dont les foyers intérieurs sont A, B et dont l'axe est $2a$.

1877. *Roberts (R.-A.).* — Question 5069 (*Ibid.*, t. XXVII, p. 24).

Le lieu des foyers triples d'une série d'ovales de Descartes passant par cinq points fixes est une hyperbole équilatère.

Cayley. — On the construction of Cartesian (Quarterly Journ. of Math., t. XV, p. 34).

Williamson. — Note on the Cartesian Oval (An elementary Treatise on the differential Calculus. 3rd edit., p. 411-416).

1878. *Darboux.* — Sur la rectification des ovales de Descartes (Comptes rendus de l'Acad., t. LXXXVII, p. 595-597).

Darboux. — Addition à la Note sur la rectification des ovales de Descartes (*Ibid.*, p. 741).

1878. *Roberts (R.-A.).* — Question 5553 (Mathem. Quest. from the Educ. Times, t. XXIX, p. 86).

Les points de contact des tangentes parallèles menées à un ovale de Descartes sont situés sur une conique qui passe par quatre points fixes.

Miller. — Question 4856 (*Ibid.*, t. XXX, p. 20).

Étant donnés les trois foyers axiaux d'un ovale de Descartes, le lieu des points de contact de sa tangente double est la conique

$$y^2 = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta,$$

α, β, γ désignant les distances des foyers à l'origine.

1879. *Ribaucour.* — Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. (Nouv. Corresp. Math., t. V).

1880. *Dewulf.* — Extrait d'une Lettre. (Nouv. Annales de Math., 2^e^ Série, t. XIX, p. 428-429).

L'auteur propose une nouvelle construction de la tangente à un ovale de Descartes. On donne une circonférence de cercle dont le centre est le point C, et un point fixe A. On sait que le lieu géométrique des points dont les distances au point A et au cercle (C) sont dans un rapport constant est un ovale de Descartes. Soient P un point de la courbe, N le point où PC coupe le cercle (C). Si l'on élève en P une perpendiculaire à PC qui coupe AC en P′, si l'on mène par P′ une parallèle à AN qui coupe en P″ la perpendiculaire en P à AP, si, ensuite, on élève en P′ une perpendiculaire à PP′ et en P″ une perpendiculaire à PP″, ces perpendiculaires se coupent en un point Q, et la droite PQ est la tangente en P à l'ovale de Descartes.

Williamson. — Question 6177 (Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXXIII, p. 85).

Désignons par F, F_1, F_2 les trois foyers des ovales de Descartes, F_2 étant le foyer extérieur, et posons $FF_1 = c_2$, $FF_2 = c_1$, $F_1F_2 = c$; alors, si $mr + lr_1 = nc_2$ est l'équation de l'ovale intérieur rapporté à F et F_1, 1° son équation rapportée à F et F_2 est

$$nr + lr_2 = mc_1,$$

et son équation rapportée à F_1 et F_2 est $mr_2 - nr_1 = lc$; 2° pour avoir les équations correspondantes de l'ovale extérieur, il suffit de changer l en $-l$ dans les équations précédentes.

1881. *D'Ocagne.* — Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes (Nouvelles Annales de Math., 2e série, t. XX, p. 199-200).

Liguine. — Sur les aires des courbes anallagmatiques (Bulletin des Sciences Math., 2e série, t. V, p. 250-264).

1882. *Barbarin.* — Note sur les coordonnées bipolaires (Nouv. Annales de Math., 3e série, t. I, p. 15-28).