《理科高等代数》习题解析与补充练习

孔博傲

2023 年 9 月

目录

Chapter 1

线性方程组

1.1 习题解析

习题 1.1.1. 求包含 $\sqrt[3]{2}$ 的（在集合的包含顺序意义下）最小的数域。

【解法一：直接运用提示进行分母有理化】. 设所求最小数域为 $\mathbb{K}$，则由上一问结论，必有 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{K}$，由乘法封闭性，可知 $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\in P$。于是由加法和除法封闭性，$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in\mathbb{K}$ 对 $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}$ 成立。

记 $P=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}|a,b,c\in\mathbb{Q}\}$，则由 $P\subset\mathbb{K}$，下证 P 为数域，进而所求最小数域 $\mathbb{K}=P$。显然 $0,1\in P$，加法、减法、乘法封闭性亦可直接验证**【注：这部分实际证明时不可忽略】**，下证除法封闭性。

注意到

$$\frac{a_1+a_2\sqrt[3]{2}+a_3\sqrt[3]{4}}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}=(a_1+a_2\sqrt[3]{2}+a_3\sqrt[3]{4})\frac{1}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}$$

因此只需证明 $\dfrac{1}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}\in P$，应用 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}&=\frac{(b_1^2+b_2^2\sqrt[3]{4}+2b_3^2\sqrt[3]{2}-b_1b_2\sqrt[3]{2}-b_1b_3\sqrt[3]{4}-2b_2b_3)}{(b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4})(b_1^2+b_2^2\sqrt[3]{4}+2b_3^2\sqrt[3]{2}-b_1b_2\sqrt[3]{2}-b_1b_3\sqrt[3]{4}-2b_2b_3)}\\&=\frac{(b_1^2-2b_2b_3)+(2b_3^2-b_1b_2)\sqrt[3]{2}+(b_2^2-b_1b_3)\sqrt[3]{4}}{b_1^3+2b_2^3+4b_3^3}\in P\end{aligned}$$

进而除法封闭性得证。进而命题成立。 □

下面针对除法封闭性给出另外的三种做法：

【解法二：假设成立并直接求解系数】. 若 $\dfrac{1}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}\in P$，我们设 $\dfrac{1}{b_1+b_2\sqrt[3]{2}+b_3\sqrt[3]{4}}=c_1+c_2\sqrt[3]{2}+c_3\sqrt[3]{4}$，从而有

$$(b_1c_1+2b_3c_2+2b_2c_3)+(b_2c_1+b_1c_2+2b_3c_3)\sqrt[3]{2}+(b_3c_1+2b_2c_2+b_1c_3)\sqrt[3]{4}=1,$$

比较系数可以得到

$$\begin{cases} b_1c_1 + 2b_3c_2 + 2b_2c_3 &= 1 \\ b_2c_1 + b_1c_2 + 2b_3c_3 &= 0 \\ b_3c_1 + 2b_2c_2 + b_1c_3 &= 0 \end{cases}$$

验证有解即可得到除法封闭性。**【提示：验证有解时，要利用 b_1, b_2, b_3 不全为 0，分别进行讨论。并注意运用增广矩阵初等行变换和线性方程组解的判定定理】** □

【解法三：分步进行有理化】. 由于

$$\frac{1}{b_1 + b_2\sqrt[3]{2} + b_3\sqrt[3]{4}} = \frac{-b_2 + b_3\sqrt[3]{2}}{(b_1 + b_2\sqrt[3]{2} + b_3\sqrt[3]{4})(-b_2 + c_2\sqrt[3]{2})} = \frac{-b_2 + b_3\sqrt[3]{2}}{-b_1b_2 + 2b_3^2 + (b_1b_3 - b_2^2)\sqrt[3]{2}}$$

记 $u_1 = -b_1b_2 + 2b_3^2, u_2 = b_1b_3 - b_2^2$，则：

$$\begin{aligned} \frac{-b_2 + b_3\sqrt[3]{2}}{u_1 + u_2\sqrt[3]{2}} &= \frac{(-b_2 + b_3\sqrt[3]{2})(u_1^2 - u_1u_2\sqrt[3]{2} + u_2^2\sqrt[3]{4})}{(u_1 + u_2\sqrt[3]{2})(u_1^2 - u_1u_2\sqrt[3]{2} + u_2^2\sqrt[3]{4})} \\ &= \frac{(-b_2 + b_3\sqrt[3]{2})(u_1^2 - u_1u_2\sqrt[3]{2} + u_2^2\sqrt[3]{4})}{u_1^3 + 2u_2^3} \in P \end{aligned}$$

从而得到除法封闭性。 □

【解法四：利用多项式带余除法】. 由于 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数多项式 $m(x) = x^3 - 2$ 的根，我们有定理：对于互素的有理系数多项式 $g(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$，其可以与 $m(x) = x^3 - 2$ 可以经过辗转相除法得到有理系数多项式 $u(x)$、$v(x)$，满足条件 $u(x)g(x) + v(x)m(x) = 1$，将 $x = \sqrt[3]{2}$ 代入，并注意到 $m(\sqrt[3]{2}) = 0$，就得到 $u(\sqrt[3]{2})g(\sqrt[3]{2}) = 1$，进而

$$\frac{1}{b_1 + b_2\sqrt[3]{2} + b_3\sqrt[3]{4}} = g^{-1}(\sqrt[3]{2}) = u(\sqrt[3]{2}) \in P$$

进而我们再度实现了分母的有理化，从而得到除法封闭性。

(对于上述定理的证明方法，可以参考教材第五章，或者李尚志《线性代数学习指导》中的相关内容。) □

注. 本题的证明可分为两部分，一是P 是一个数域，二是任意一个含有 $\sqrt[3]{2}$ 的数域必然包含 P 中所有元素。因此不能找到比 P 还小的数域，从而完成本题的证明。而上述两部分缺一不可，希望大家认真体会。

另外，很多人会混用属于符号“$\in$”和包含于符号“$\subset$”。这里强调一下：当考虑的是元素与集合中的关系时用“$\in$”，当考虑两个集合之间的关系时用“$\subset$”。当然，这里的“集合”与“元素”是相对的。

例如：$1 \in \{1,2,3\}$，但是 $\{1\} \subset \{1,2,3\}$。因为 1 相对于 $\{1,2,3\}$ 是一个元素，但 $\{1\}$ 则是一个集合，且是大集合 $\{1,2,3\}$ 的子集。

$\{1,2,3\} \in \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$，但是 $\{\{4,5\},\{6,7\}\} \in \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$。因为 $\{1,2,3\}$ 虽然本身是集合，但它只是 $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$ 中的一个元素。

习题 1.1.2. 证明任意一个数域 $\mathbb{F}$ 上的方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ 有解 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ 的充要条件是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$。

【证明】. 先证必要性。由 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = 0 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$，于是 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = 0$，同理 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = 0$。

由于 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$，因此 x_1, x_2 不全为 0，这迫使 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$。

再证充分性。对于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$，若 $a_{11} = 0$，则 $a_{12}a_{21} = 0$，即 a_{12}, a_{21} 至少有一个为 0。当 $a_{12} = 0$ 时，则 $(x_1, x_2) = \begin{cases} (a_{22}, -a_{21}), a_{21}, a_{22}\text{不全为零} \\ (1,1), a_{21} = a_{22} = 0 \end{cases}$ 是方程的一个非零解。当 $a_{21} = 0$ 时，则 $(x_1, x_2) = (1,0)$ 是方程的一个非零解。

而若 $a_{11} \neq 0$，则有 $a_{22} = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}$，代入原方程可知 $(x_1, x_2) = (a_{12}, -a_{11})$ 为原方程一组非零解。充分性得证。 □

注. 这一题大家的问题比较分散，但殊途同归，都是忽略了对 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 中一项或多项为 0 时的讨论。这四项完全有可能取 0，但很多人依旧会**未经讨论是否为 0 就将某项作为分母**。而规避分母为 0 的情况可以说是本题最为关键的一部分，这点需要大家注意。

此外，有些人的解答中出现了"对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ **初等变换得到** $\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = 0 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$"这样的错误叙述。而这一错误本质原因一样，第二类初等变换中所乘的系数 λ 必须是非零的。

习题 1.1.3. 讨论在 $\mathbb{R}$ 内，当 λ 去什么值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解。当方程组有解时求出解来，并讨论 λ 取什么值时方程组有唯一解，以及有无穷多组解。

【解答】. 上述方程组的增广矩阵为 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right)$，对其进行初等行变换，有：

$$\overline{A} \xrightarrow{(1,3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 3 & \lambda \\ \lambda & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\lambda(1)+(3)]{-1(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 3-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 3-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 3-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 3-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda+3) & (\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{array}\right)$$

当 $\lambda = 1$ 时，增广矩阵初等变换后可得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由此可得解集为 $(x_1,x_2,x_3)^T=(1,0,0)^T+t(1,-1,0)^T,t\in\mathbb{R}$。

当 $\lambda=2,-3$ 时，增广矩阵已为最简阶梯型，此时系数矩阵非零行数小于增广矩阵非零行数，于是方程无解。

当 $\lambda\neq 1,2,-3$ 时，方程组有唯一解：

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\lambda^2+\lambda-\frac{(\lambda+1)^2(\lambda^2-3)}{(\lambda-2)(\lambda+3)},\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-3)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}-\lambda,\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}\right)$$

□

注. 下面看一种典型错误：

$$\overline{A}\xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-\lambda(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1-\lambda^2 & 3-3\lambda & 1-\lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 3-\lambda & \lambda-\lambda^2\end{array}\right)$$

而这份解答中，“$(1)-\lambda(2)$”的意思应该是如下两步变换的复合：首先将第二行乘以 $-\lambda$ 倍，再将第一行的 1 倍加到第二行。通过第三类初等变换，而不是直接将第二行的 $-\lambda$ 倍加到第一行上。

但此时我们并不能保证 λ 一定不为 0，而第二类初等行变换要求所乘的系数非零，所以上述初等变换是错误的。

此外，仍有同学在行变换过程中，出现了 λ 做分母的情况，虽然这些同学都记得对 $\lambda=0$ 的情况进行了讨论，但是这种情况确实是可以规避的。

而事实上，我们一定要时刻提防并尽可能规避【**所乘的系数带有未知参数**】或【**分母中出现未知参数**】的情况，如迫不得已必须这么做，一定要讨论是否为 0。本期周报后文将会对这一问题再做进一步探讨，也请大家仔细揣摩。

1.2 补充练习

例 1.2.1. 计算：（1）$(\vec{i}+\vec{k}+\vec{k})\times(\vec{i}+2\vec{k}+\vec{k})$；（2）$(a+b-c)\times(a-b+c)$。

例 1.2.2. 设 a,b,c 为空间中不共面的三个向量，若以 a,b,c 为同一顶点的三条棱的平行六面体体积为 2，求以 $a+b,b+c,c+a$ 为同一顶点的三条棱的平行六面体体积。

例 1.2.3. 求下列条件确定的平面方程：

（1）经过点 $A(1,0,-1)$ 且平行于向量 $a=(2,1,1)$ 和 $b=(1,-1,0)$；

（2）过两点 $A(-1,1,-1),B(0,2,-1)$ 且平行于向量 $a=(0,-3,1)$；

（3）通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$；

（4）经过点 $B(3,-1,2)$ 且过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$；

（5）经过点 $A(2,0,-3)$ 与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\ 3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直；

（6）经过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{4}$ 且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$。

例 1.2.4. 用参数式方程和对称式方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$。

例 1.2.5. 设直线 l_1 通过点 $M_1(1,1,2)$，与 $\pi: 3x-y+2z=0$ 平行，且与直线 $l_2: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{3}$ 相交，求直线 l_1 所满足的方程。

例 1.2.6. (1) 求同时包含 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 的最小数域，并由此说明，即使 $\mathbb{K}$ 与 $\mathbb{L}$ 均是数域，$\mathbb{K} \cup \mathbb{L}$ 也不一定是数域；

(2) 求包含 $1+i$ 的最小数域

例 1.2.7. 证明任意一个数域 $\mathbb{F}$ 上的方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ 有解 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ 的充要条件是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$。

例 1.2.8. 讨论在 $\mathbb{R}$ 内，当 λ 取什么值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解。并讨论 λ 取什么值时方程组有唯一解，以及有无穷多组解。

例 1.2.9. a, b 在 $\mathbb{Q}$ 内取什么值时，下面的方程组有解，并求出其解：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = -3 \\ x_3 + bx_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

例 1.2.10. 试讨论，对实数 a, b 的不同取值，方程

$$\begin{cases} x + 2y + 3az = 2 \\ 2x + 3y + (a+1)z = b \\ 7x + 9y + az = 2b-6 \end{cases}$$

在有理数域上解的情况，及其在空间直角坐标系中所确定的图像形状。

1.3 要点与结论

1.3.1 关于向量叉积

在向量叉积的性质中，初学者最最容易出现错误的一项可能是：

$$a \times b = -b \times a$$

事实上，相比于之前学过的数之间的加法、乘法和向量之间的点积而言，向量叉积**并不满足交换律**。因此在使用的过程中一定要格外小心才行。

一般而言，向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 可以认为是 $\mathbb{R}^3$ 中的自然基向量（即 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$），因此它们满足运算法则

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

而字母 a,b,c 则只能**指代普通向量**，没有上述的良好运算性质，只得利用**向量叉乘的运算性质**求解。

1.3.2 关于投影向量的定义

课本中，对于从一点到另一点的投影向量的定义为：**设 $M_1=(x_1,y_1,z_1),M_2=(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点，则以 M_1 为起点，M_2 为终点的投影向量定义为**

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

而一个向量 b 在另一个向量 a 上投影的定义为：$\dfrac{a\cdot b}{|a|}$。

上述两个定义，前者讨论对象是**空间上两个点**，后者讨论的是**空间上两个向量**。而在 P7 Ex1 中投影向量的定义是前一个。可以得到 A 点坐标为 $(2,-3,0)$。

而第二问要求平行于 $\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$ 的单位向量。而课本中向量平行的等价定义为：**向量 a 与非零向量 b 平行的充要条件是存在唯一实数 λ 使得 $a=\lambda b$。**

而根据上述定义，可知 $\pm\left(\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9},\dfrac{7}{9}\right)$ 是符合要求的单位向量。

很多同学只求出来了一个向量 $\overrightarrow{AB}^0=\left(\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9},\dfrac{7}{9}\right)$，但请注意，$\overrightarrow{AB}^0$ 表示的是**与向量 $\vec{AB}$ 同向的单位向量**，请注意“平行”与“同向”之间的区别，并注意符号使用的准确性。

1.3.3 空间直线的确定方式与描述

一般而言，我们可以用如下方式确定一条直线：

（1）给出直线上**互不相同**两点的位置坐标 $M_1=(x_1,y_1,z_1),M_2=(x_2,y_2,z_2)$；

（2）给出直线上一点的位置坐标 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和方向向量 $s=(m,n,p)$（其中 m,n,p 不全为 0）；

（3）空间中两个互不相交平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 的交线。

对于第（1）种情况，我们可以直接写出直线的**两点式方程**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

对于第（2）种情况，我们可以写出直线的**向量式方程** $(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=t(m,n,p)$，上述方程可以改写成**参数式方程** $\begin{cases}x=x_1+tm\\ y=y_1+tn\\ z=z_1+tp\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$。同样的，也可以写出直线的**对称式方程**：

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

值得一提的是，对称式方程和两点式方程具有相同的形式（“三个比例式相等”）。特别地，m, n, p 有一个或两个为 0 时，可以直接在分母处写 0（因为这只是一个形式上的表达，所以暂时**不必计较 0 不能做分母的事实**），$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ 有一个或两个为 0 时处理方式相同。

对于第（3）种情况，则可以直接写出直线的一般式方程：$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$。

注意两个平面的法向量为 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$，而直线同时落在两个平面上，因此**其方向向量与两个平面的法向量垂直**，利用此条性质，可以求出方向向量，进而化归成其他情况的表达式。

1.3.4 空间平面的确定方式与描述

一般而言，我们常用如下方式确定一条直线：

(1)给出直线上**不共线的**三点的位置坐标 $M_1 = (x_1, y_1, z_1), M_2 = (x_2, y_2, z_2), M_3 = (x_3, y_3, z_3)$;

（2）给出直线上一点的位置坐标 $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 和法向量 $\vec{n} = (u, v, w)$;

（3）给出直线上一点的位置坐标 $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 和平面上一条不过 M_1 的直线方程 $\dfrac{x - x_2}{m} = \dfrac{y - y_2}{n} = \dfrac{z - z_2}{p}$。

对于第（1）种情况，我们可以直接设平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$，代入三点坐标求解系数，得到平面方程；

对于第（2）种情况，我们可以直接将平面表示为 $u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0$;

对于第（3）种情况，我们可以直接设平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$，由于直线不过 M_1，因此对任意 $t_0 \neq 0$，我们有 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_2 + mt_0, y_2 + mt_0, z_2 + mt_0)$ 为平面上不共线三点，用（1）的方式解方程，可得平面方程。

【注：在实际求解时，可根据运算量对 t_0 灵活取非零特殊值，如 1，-1 等进行求解即可】

1.3.5 关于数域的等价描述

课本对于数域 $\mathbb{F}$ 的定义中，第一条是 $0, 1 \in \mathbb{F}$，那么大家可以思考一下，在其他条件不变的情况下，这条性质能否替换成 $\mathbb{F}$ 中存在一个非零元 a？并且尝试证明。

【注：证明时，需要证明两方面。一方面是数域都满足替换后的条件，另一方面是满足替换后条件的集合是数域。只有同时完成这两方面的证明，才可以说明结论成立。】（**事实上就是部分地区高中所学过的“充分必要条件”**）

1.3.6 求解方程组时带入检验的必要性

解方程组这类问题并不同于数学分析中求导数等问题，是可以直接**通过将所得结果代入原始方程进行检验**的。而且其检验的代价也不像一些微分方程一样那么复杂。所以大家在做完题目之后，还是要注意检查的。

如果代入检验后发现不满足方程，则说明**你的结果一定是错误的**，这时候好进行修稿。在考试时，求解方程组的题目一定要保证严格正确！

1.3.7 有关方程组初等变换的使用以及未定参数的讨论

我们说线性方程组有三种初等变换，第一种是两个方程交换位置，第二种是某一个方程的等号两边同乘一个**非 0 的数** λ, 第三种是将某一个方程的 λ 倍加到另一个方程上。这里需要特别注意的是，第二种要求这个 λ 是一个非零的数，而第三种对 λ 的取值没有要求，可以为 0 也可以不为 0。一定要区分清楚。

当我们在对线性方程组的系数矩阵或者增广矩阵进行初等行变换的时候，对于第 i 行和第 j 行 $(i \neq j)$：$\lambda(i) + (j)$ 这个式子表示把第 i 行的 λ 倍加到第 j 行上，这个对于 λ 的取值没有要求，换句话说，**这步变换是"安全"的**。而 $(i) + \lambda(j)$ 这个写法，实际上这个式子是**两步初等变换的复合**，首先是第 j 行乘以 λ，然后第 i 行加上去，因此如果说这一步是同解变形必须声明 λ 不为 0 才能继续进行初等行变换，而对于 λ 为 0 的情况必须**单独讨论**。同时，在讨论未定参数下解的情况时，大家如果直接用一个含有未知系数 a 的式子直接除方程的某行，那么一定要注意上述式子为 0 的情况，并予以特殊讨论。否则很可能会导致最后的求解出现偏差，这点需要特别注意。或者也可以严格遵循初等变换方法，直接进行乘法运算。总之大家一定要注意讨论的严谨性，养成严密的思维方式。

Chapter 2

线性空间

2.1 习题解析

习题 2.1.1. 已知 $\beta=(1.3.2)^T,\alpha_1=(1+k,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+k,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+k)^T$。当 k 满足什么条件时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出。

【解答】. 根据题意，若 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出，则存在唯一的 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{F}$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$，写成分量形式，即关于 k_1,k_2,k_3 的方程组

$$\begin{cases}(1+k)x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=1\\ x_1 &+& (1+k)x_2 &+& x_3 &=3\\ x_1 &+& x_2 &+& (1+k)x_3 &=2\end{cases}$$

存在唯一解。

上述方程组的增广矩阵为 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1+k&1&1&1\\1&1+k&1&3\\1&1&1+k&2\end{array}\right)$，对其进行初等行变换化成阶梯形，有：

$$\overline{A}\xrightarrow{(1,3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1+k&2\\1&1+k&1&3\\1+k&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[-(1+k)(1)+(3)]{-1(1)+(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1+k&2\\0&k&-k&1\\0&-k&-k^2-2k&-1-2k\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1+k&2\\0&k&-k&1\\0&0&-k^2-3k&-2k\end{array}\right)$$

当 $k\neq 0,-3$ 时，系数矩阵非零行数与增广矩阵非零行数均为 3，此时方程有唯一解。而 $k=0,-3$ 时，方程无解。因此当 $k\neq 0,-3$ 时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出。 □

注. 本题最终可归结于含参方程解的讨论问题，而这一问题无论是在第 3 期周报、习题课还是丁学长在课程群里发布的 pdf 文件中，都已经讲的很详细了，因此大家一定要掌握。归根结底，此类问题一定要将**系数矩阵试图化成阶梯形**而后进行讨论。

特别注意，大家一定要用现在讲过的知识进行解题，不排除期中考试之前讲不到 Cramer 法则的情况，此时Cramer 法则禁用！因此掌握初等变换方法非常重要，一招鲜吃遍天。

习题 2.1.2. 判断下列向量组的线性相关性：$(1,2,1,4)^T,(1,1,1,1)^T,(3,2,3,0)^T$。

【解答】. 考虑关于 k_1,k_2,k_3 的齐次线性方程组：

$$k_1(1,2,1,4)^T+k_2(1,1,1,1)^T+k_3(3,2,3,0)^T=0$$

通过初等行变换，化系数矩阵为阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&2\\1&1&3\\4&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

进而，原方程存在非零解，进而存在一组非零的 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1(1,2,1,4)^T+k_2(1,1,1,1)^T+k_3(3,2,3,0)^T=0$$

因此题述向量组线性相关。 □

注. 这道题大家出现的问题比较分散，现一一解释：

首先，很多人直接写出矩阵并进行一系列初等变换，而**并没有对初等变换的动机进行介绍**。而本题的解题逻辑在于：**为了找一组不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使得等式成立，并将等式按分量化成齐次线性方程组，之后用初等变换讨论是否有非零解**。而上述思路需要体现在你的证明当中，因此如上面解答（或 52 页例 4）中的文字说明是不可或缺的。

其次，一些人还是愿意用增广矩阵讨论齐次线性方程组的解的情况。但此时增广矩阵**最后一列全为 0**，因此无论如何初等变换，也依然为 0。在此之下，可以**只讨论系数矩阵**。但是，如果矩阵某一行被消成 0，也不能**直接省略不写**。

之后，很多人直接**将系数构造了出来**，这样虽然可以，但上述初等变换的方法也一定要掌握。

习题 2.1.3. 证明：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{F}^n$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ 线性无关。

【证明】. 用反证法，若 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_r(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)=0$$

上式亦即

$$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_r)\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

而由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，因此必有：

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0\\k_2+\cdots+k_r=0\\\quad\vdots\\k_r=0\end{cases}$$

这迫使 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$，与 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为零矛盾，原命题得证。 □

注. 对于向量组线性相关性的有关证明，最有利的工具往往是线性相关的定义：存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$，而在这条定义中，最为关键的部分便是"不全为零"。因此在证明线性相关时，一定要说明向量前面的系数是不全为零的，否则你的证明便是无效的。

另外，一些同学的证明过程思路对但是很隐晦，这部分同学建议再度研读上面的答案，体会此类问题的证明方式。

习题 2.1.4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，试问向量组 $m\alpha_2 - \alpha_1$、$p\alpha_3 - \alpha_2$、$\alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关需要 m,p 满足什么条件？

【解答】. 若 $m\alpha_2 - \alpha_1$、$p\alpha_3 - \alpha_2$、$\alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{F}$，使得 $l_1(m\alpha_2 - \alpha_1) + l_2(p\alpha_3 - \alpha_2) + l_3(\alpha_1 - \alpha_3) = 0$，即

$$(l_3 - l_1)\alpha_1 + (ml_1 - l_2)\alpha_2 + (pl_2 - l_3)\alpha_3 = 0$$

而由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，对于 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{F}$，$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3 = 0$ 当且仅当 $t_1 = t_2 = t_3 = 0$，从而有

$$\begin{cases} l_3 - l_1 = 0 \\ ml_1 - l_2 = 0 \\ pl_2 - l_3 = 0 \end{cases}$$

此时必有 $l_1 = l_3$，若 $l_1 = l_3 = 0$，则 $l_2 = ml_1 = 0$，这与 l_1, l_2, l_3 不全为零矛盾。于是上式等价于 $l_1 = l_3 = pl_2 = mpl_1 \neq 0$，故 $mp = 1$。 □

注. 对于本题，首先很多同学对于**线性相关和线性无关的等价表述**还是会出现问题，这里依旧建议**严格按照课本定义写法**（答案中也正是如此）。

此外，一些同学忽略了 $l_1 = l_3 = 0$ 之情形的讨论，或者讨论出现偏差。大家一定要记住线性相关向量组前面的系数是不全为零的。并且在解题过程中时刻提防"诡计多端的 0"，这样才能保证正确率。

习题 2.1.5. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关，而其中任意 $p-1$ 个向量组成的向量组都线性无关，证明：存在 p 个**全不为零**的数 $k_1, k_2, \cdots, k_p$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = 0$。

【证明】. 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关，故存在 p 个**不全为零**的数 $k_1, k_2, \cdots, k_p$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = 0$$

而如若存在 $1 \le s \le p$，使得 $k_s = 0$，则由 $k_1, k_2, \cdots, \alpha_p$ 不全为零知 $k_1, \cdots, k_{s-1}, k_{s+1}, \cdots, k_p$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_p\alpha_p = 0$$

因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_p$ 这 $p-1$ 个向量线性相关，这与题设相矛盾，故 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 全不为 0，结论得证。 □

注. 相比之下本题的完成度还算不错，但值得注意的是，很多人在使用反证法的时候，出现了诸如"不妨设 $k_1 = 0$"之类的说法。虽然在本题中 $k_1, \cdots, k_p$ 地位相同，因此可以做出上述不妨假设。但上面答案中的"任意"也有效地规避了"不妨设"的出现，大家可以感受一下。

另外，有些同学没有提及"不妨设"而直接说 $k_1 = 0$，这就是完全的错误了。毕竟"不妨设"的意思是："肯定有一个为 0，但哪个为 0 不清楚，为了方便我就当 k_1 为 0 了"。但去掉不妨设，就变成了强制 $k_1 = 0$，二者含义不同。

最后，进一步追问：上述 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 是否是唯一的？大家可以根据证明过程和题目条件进一步思考。

习题 2.1.6. 求 $\alpha_1 = (1,0,0); \alpha_2 = (0, \cos\theta, -r\sin\theta); \alpha_3 = (0, \sin\theta, -r\cos\theta)$ 的一个极大线性无关组，$r, \theta \in \mathbb{R}$，$r > 0$。

【解答】. 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 写成矩阵形式，有 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}$。

当 $\cos\theta = 0$ 时，$\sin\theta = \pm 1$，于是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp r \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$，再由 $r > 0$，知此时向量组的秩为 3，一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。

当 $\cos\theta \neq 0$ 时，对 A 进行初等行变换，有

$$A \xrightarrow{\cos\theta \cdot (3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \cos\theta\sin\theta & -r\cos^2\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{-\sin\theta(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & 0 & -r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

此时矩阵已为阶梯形。若 $r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \neq 0$，即 $\cos^2\theta - \sin^2\theta \neq 0$，则向量组的秩为 3，一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。

若 $r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$，即 $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$，则向量组的秩为 2，一个极大线性无关组为 α_1, α_2。

综上，若 $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$，则向量组的秩为 2，一个极大线性无关组为 α_1, α_2；否则，向量组的秩为 3，一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ □

注. 本题的本意是运用初等行变换，根据 r, θ 的不同取值对向量组的秩进行讨论。很多人不理解题意，在此说明。

在初等变换的过程中，为了消去第 3 行第 2 列的 $\sin\theta$，要进行第二类初等变换"$\cos\theta \cdot (3)$"或第三类初等变换"$-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}(2) + (3)$"。而这两种变换都必须要求 $\cos\theta \neq 0$，很多同学依旧忘记讨论，这里提起注意。

习题 2.1.7. 设秩为 r 的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的每一个向量均可由其部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出，证明：$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的一个极大线性无关组。

【证明】. 用反证法，若 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，则设其极大线性无关组为 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_s}$，且有 $s < r$. 则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 可被 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_s}$ 线性表出。而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可被其部分组

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可被 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_s}$ 线性表出。从而原向量组的秩小于 r，矛盾。

故 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 向量组的每一个向量均可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，从而 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是的一个极大线性无关组。 □

注. 这道题而言，我们要证明极大线性无关组，根据书中的相关概念，我们只需要进行两个部分的证明：（1）**证明向量组线性无关**；（2）**证明其他任意向量能够被这个部分组线性表出**。而题目已经告诉我们 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 能够将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出。因此我们只需要证明 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 的线性无关性即可。同时考虑到原向量组的秩为 r，从而不难由此入手证明线性无关性。但是很多同学花费大量篇幅证明了 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 能够将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，但对线性无关性并没有进行非常到位的证明，似乎和题目的实际情况有些许背道而驰。

习题 2.1.8. 已知两个向量组有相同的秩，其中一个可以被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价

【证法一：直接利用向量组秩的关系】. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的每个向量能够被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 中的每个向量表示，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组能够将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，进而有

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leq\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),$$

再由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个部分组，得到

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\geq\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),$$

于是

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),$$

进一步，结合等式 $\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，有

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),$$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的部分组，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个部分组，进一步结合上述秩的关系，知这一部分组为极大无关组。从而其能将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，进而能够将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出。综上，即得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价。 □

【证法二：反证法】. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的每个向量能够被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 中的每个向量表示，由于二者秩相等，不妨设其极大线性无关组分别为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 和 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$，则题目仅需证明 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 能被 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。(想一想为什么？)

若存在 $1\leq l\leq r$，使得 β_{i_l} 不能被 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，若存在不全为零的 $k,k_1,\cdots,k_r$ 使得

$$k\beta_{i_s}+k_1\alpha_{i_1}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}=0$$

则必有 $k\neq0$（否则 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为 0，这与 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关矛盾）。此时

$$\beta_{i_s}=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r$$

这与 β_{i_l} 不能被 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出矛盾，因此 $\beta_{i_l},\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关，这一向量组的秩为 $r+1$。

而其能被 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性表出，而 $\operatorname{rank}(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r})=r<r+1$，矛盾，因此原结论成立。 □

注. 向量组之间的线性表出关系往往蕴含**秩的不等式**，而其在证明过程中也具有相当的意义（尤其是**能有力地解决仅用定义无法解决的问题**），因此在目前，除了熟练运用基本定义以外，还需要大家灵活变通，选择更适宜的方式。

当然，后面会涉及到很多关于秩的不等关系讨论的题目，课本第 63 页中给出的秩不等式是最基本的，后续还需要我们取积累。

而在本题的证明中，一些同学由秩相等直接推出线性表出、一些同学围绕题目条件做描述，但是却对整个证明过程并不会起到实质性的进展，也有一些同学采取了和答案相同的思路，却产生了**关键步的跳步**。事实上**考虑两个向量组的并**是证明这一类问题的一个较为巧妙的方法，在后续的学习或考试中也会用到，所以大家还是有掌握的必要性的，也希望没有做出的同学对照答案好好学习整理一下。

此外，很多同学犯了一个比较严重的错误：已经证出 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j$ 能够将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，就直接说明 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组。但是极大线性无关组的定义**要求 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j$ 必须是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的子集**，这一点在这些同学的证明过程中是**不一定能做到的**，从而不能妄下上述论断。

习题 2.1.9. 已知 $\mathbb{F}^5$ 中的向量 $X_1=(1,2,3,4,5),X_2=(1,-1,1,-1,1),X_3=(1,2,4,8,16)$。求一个齐次线性方程组，使得 X_1,X_2,X_3 组成这个方程组的基础解系。

【解答】. 设 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4+a_{i5}x_5=0$ 是所求方程组 $AX=0$ 中的任何一个方程，将 X_1,X_2,X_3 的坐标代入得

$$\begin{cases} a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+4a_{i4}+5a_{i5}=0 \\ a_{i1}-a_{i2}+a_{i3}-a_{i4}+a_{i5}=0 \\ a_{i1}+2a_{i2}+4a_{i3}+8a_{i4}+16a_{i5}=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

将 $(*)$ 视为以 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5}$ 为未知数的齐次线性方程组，则此时方程组的系数矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$，对其作初等行变换得阶梯形：

$$B\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

可知方程组 $BX=0$ 的一组基础解系为 $(6,1,-4,1,0),(16,6,-11,0,1)$。

此时考虑方程组

$$\begin{cases} 6x_1+x_2-4x_3+x_4=0 \\ 16x_1+6x_2-11x_3+x_5=0 \end{cases}$$

其系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}6&1&-4&1&0\\16&6&-11&0&1\end{pmatrix}$，此时有 $\mathrm{rank}A=2$，因此方程 $AX=0$ 的解空间维数为 3，而注意到 X_1,X_2,X_3 为方程的一组线性无关解，因此其以 X_1,X_2,X_3 为基础解系。 □

注. 当给出一个线性方程组时，我们能够有方法求出其解，而倘若我们知道某一个线性方程组的解，则也可以通过待定系数法将方程组还原回来。而这也是本题的主要意义。

需要特别注意的是，求出基础解系后，**对系数矩阵 A 的秩进行讨论的过程是必要的**。毕竟，仔细品读证明过程，我们发现$a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5}$ **是方程 $BX=0$ 的解只是必要条件**，而通过将系数矩阵的秩限定为 2，才能保证X_1,X_2,X_3 **成为原方程解空间的极大线性无关组**，希望大家能对这一点有清楚的认知。

此外，很多人仿照课本例 5 的方式，照猫画虎地给出了本题的解答，因此我对大家是否真正掌握本题存疑。大家可以尝试解决一下 21 级期中模拟考试的第四题，其为上例的进阶版本。

习题 2.1.10. 设 S、T 是向量组，证明：S、T 等价当且仅当 $\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}(S\cup T)=\mathrm{rank}T$

【证明】. 先证明必要性，若 S、T 等价，则 T 中任一向量能够被 S 线性表出。取 S 的一个极大线性无关组为 S_1，则 T 中任一向量能够被 S_1 线性表出。故 $S\cup T$ 的任一向量能够被 S_1 线性表出，从而有 $\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}(S\cup T)$，同理 $\mathrm{rank}T=\mathrm{rank}(S\cup T)$。因而我们可以得到 $\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}(S\cup T)=\mathrm{rank}T$，必要性得证。

再证明充分性，若 $\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}(S\cup T)=\mathrm{rank}T$，取 S 的一个极大线性无关组 S_1，因为 S_1 为 $S\cup T$ 的子集，结合秩的关系，知 S_1 也是 $S\cup T$ 的极大线性无关组。进而 T 中元素能够被 S_1 线性表出，即能够被 S 线性表出。同理可证明 S 中的元素能够被 T 线性表出。从而二者等价。 □

注. 这道题刻画了两个等价向量组的一个常用的性质，在一些综合性较强题目的解决过程中也能够带来一些**强有力的启发**，因此熟练掌握这道题目的证明是非常有必要的。

习题 2.1.11. 设向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的两组基分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，求证：$\exists 1\le j\le n$，使得用 α_j 替换 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n$ 中的 β_n 所得到的向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j$ 也是的基。

【证明】. 由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基，故对 $\forall 1\le i\le n$，存在 $k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\in\mathbb{F}$，使得

$$\alpha_i=k_{i1}\beta_1+k_{i2}\beta_2+\cdots+k_{in}\beta_n$$

若 $\forall 1\le i\le n$，都有 $k_{in}=0$，则有 $\alpha_i\in\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1})$，结合 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基，于是

$$\mathbb{F}^n=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\subset\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1})$$

考虑维数，有：

$$n=\dim\mathbb{F}^n=\dim\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\le\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1})=n-1$$

矛盾！因此必存在 α_j 使得 $k_{jn}\ne 0$。此时有

$$\beta_n=-\frac{k_{j1}}{k_{jn}}\beta_1-\cdots-\frac{k_{j,n-1}}{k_{jn}}\beta_{n-1}+\frac{1}{k_{jn}}\alpha_j$$

于是 β_n 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j$ 线性表出，进而 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n$ 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j$ 线性表出，进而

$$\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_n)\le \mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j)$$

此时 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j)=n$，于是 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\alpha_j$ 线性无关，其为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。 □

习题 2.1.12. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$ 为向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上给定的向量组。记 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，其中 $\forall 1\le i\le m$，$c_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}$，$D=\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_m+b_m\}$。

证明：$\mathrm{rank}C\ge\mathrm{rank}D$。

【证明】. 记 $\mathrm{rank}C=r_c$，设 C 的一个极大线性无关组为 $\{c_1,c_2,\cdots,c_{r_c}\}$，则 $\forall 1\le w\le n$，有：

$$\begin{pmatrix}a_w\\b_w\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_{r_c}\begin{pmatrix}a_{r_c}\\b_{r_c}\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}a_w=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_{r_c}a_{r_c}\\ b_w=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_{r_c}b_{r_c}\end{cases}$，因此可以得到

$$(a_w+b_w)=\lambda_1(a_1+b_1)+\lambda_2(a_2+b_2)+\cdots+\lambda_{r_c}(a_{r_c}+b_{r_c})$$

因此由 w 的任意性，知 D 中的向量可由 $\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_{r_c}+b_{r_c}\}$ 线性表出，因此 $\mathrm{rank}D\le\mathrm{rank}C$。 □

习题 2.1.13. 证明：设向量组 S 的秩为 r，则 S 中任意 r 个向量组成的线性无关组必为 S 的一个极大无关组。

【证明】. 对于 S 中任意 r 个线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，若其不是极大无关组，则必存在 $\alpha_0\in S$，使得 α_0 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。

下证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_0$ 线性无关，若不然，存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_0$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_0\alpha_0=0$$

若 $k_0\ne0$，则 $\alpha_0=-\dfrac{k_1}{k_0}\alpha_1-\cdots-\dfrac{k_r}{k_0}\alpha_r$，这与 α_0 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出矛盾，于是 $k_0=0$，故 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 且 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，而这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾，因此必有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_0$ 线性无关。

于是此时 $\mathrm{rank}S\ge\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_0)=n+1$，矛盾。因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 必为极大无关组。 □

习题 2.1.14. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta\ne0$，且 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。证明：存在唯一的 $1\le j\le m$，使得 α_j 可由 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出。

【证明】. 先证存在性。由 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，知存在不全为 0 的 $k_0,k_1,\cdots,k_m$，使得

$$k_0\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

若 $k_0=0$，则 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为 0，且 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾。于是 $k_0\ne0$。

此外，若 $k_1 = \cdots = k_m = 0$，则有 $k_0\beta_0 = 0$，这与 $\beta \neq 0$ 矛盾。**【注：这段表述是必要的，它蕴含了后续证明中 j_0 的存在性】**

取 $j_0 = \max\{j|k_j \neq 0\}$，则此时有 $k_0\beta + k_1\alpha_1 + \cdots + k_{j_0}\alpha_{j_0} = 0$。令 $l_s = -\dfrac{k_s}{k_{j_0}}(0 \leq s \leq j_0 - 1)$，进而

$$\alpha_{j_0} = l_0\beta + l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j_0-1}\alpha_{j_0-1} \tag{$*$}$$

进而 α_{j_0} 可由 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_{j_0-1}$ 线性表出，存在性得证。

再证唯一性。若存在 $j_1 \neq j_0$，使得 α_{j_1} 可由 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_{j_1-1}$ 线性表出，则存在 $s_0, s_1, \cdots, s_{j_1-1}$，使得

$$\alpha_{j_1} = s_0\beta + s_1\alpha_1 + \cdots + s_{j_1-1}\alpha_{j_1-1} \tag{$**$}$$

易知此时 $s_0 \neq 0$，于是由 $(*)$ 与 $(**)$ 得

$$\beta = -\frac{l_1}{l_0}\alpha_1 - \cdots - \frac{l_{j_0-1}}{l_0}\alpha_{j_0-1} + \frac{1}{l_0}\alpha_{j_0} = -\frac{s_1}{s_0}\alpha_1 - \cdots - \frac{s_{j_1-1}}{s_0}\alpha_{j_1-1} + \frac{1}{s_0}\alpha_{j_1}$$

而不难看出上式与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关矛盾**【考试时需要补充这一部分的详细证明】**。因此唯一性得证。 □

注. 在题目涉及到“存在唯一”时，我们需要同时证明“存在性”和“唯一性”，才能说明问题。这种证明方式需要大家进一步习惯。

另外，这种通过讨论系数是否为 0 进行线性相关和线性表出互推的题目已经出现过多次，其重要性不言而喻，因此大家应该进一步重视。

习题 2.1.15. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，证明：表法唯一当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关。

【证明】. 设有

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$
$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r$$

两式相减，有

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r - l_r)\alpha_r = 0 \tag{$*$}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，则 $(*)$ 等价于 $k_j = l_j, \forall 1 \leq j \leq r$，此时表法唯一。

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，则存在不全为 0 的 $s_1, s_2, \cdots, s_r$ 使得 $s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_r\alpha_r = 0$，此时取 $l_1 = k_1 + s_1, l_2 = k_2 + s_2, \cdots, l_r = k_r + s_r$，则知表出方式不唯一。 □

注. 对于此类“表法唯一性”有关的探讨也是一种比较经典的题型，而本题也是第 2 次习题课中例 7 的进阶形态，而习题课中的例题能为本题的证明带来启发。

习题 2.1.16. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta, \gamma$ 线性相关。证明：若向量组（I）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 与（II）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma$ 不等价，则 β 与 γ 中有且仅有一个可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出

【证明】. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关，可知存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l_1,l_2$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta+l_2\gamma=0$$

注意到，若 $l_1=l_2=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零且 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾。于是 l_1,l_2 不全为零。

若 $l_2\neq 0$，则

$$\gamma=-\frac{k_1}{l_2}\alpha_1-\cdots-\frac{k_m}{l_2}\alpha_m-\frac{l_1}{l_2}\beta$$

进而 γ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出，即（II）可被（I）线性表出。

而由条件，（I）必不可被（II）线性表出。进而 β 不可能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 线性表出，而这迫使 $l_1=0$。

因此

$$\gamma=-\frac{k_1}{l_2}\alpha_1-\cdots-\frac{k_m}{l_2}\alpha_m$$

此时 γ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，进而由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性无关性，可知其为（II）的极大线性无关组，于是 β 不可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，即得所证结论。

若 $l_1\neq 0$，同理可证。由此可知结论成立。 □

注. 本题看似难以入手，但当我们按照之前所强调的内容，写出线性相关的定义，结合**部分组线性无关的条件**得到**隐含的系数条件**，后续证明便水到渠成。因此，敢于**对题目条件进行翻译**能帮助我们带来思路上的启发。

习题 2.1.17. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关。证明：若向量组（I）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与（II）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 不等价，则 β 与 γ 中有且仅有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出。

【证明】. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关，可知存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l_1,l_2$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta+l_2\gamma=0$$

注意到，若 $l_1=l_2=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零且 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾。于是 l_1,l_2 不全为零。

若 $l_2\neq 0$，则

$$\gamma=-\frac{k_1}{l_2}\alpha_1-\cdots-\frac{k_m}{l_2}\alpha_m-\frac{l_1}{l_2}\beta$$

进而 γ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出，即（II）可被（I）线性表出。

而由条件，（I）必不可被（II）线性表出。进而 β 不可能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 线性表出，而这迫使 $l_1=0$。

因此

$$\gamma=-\frac{k_1}{l_2}\alpha_1-\cdots-\frac{k_m}{l_2}\alpha_m$$

此时 γ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，进而由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性无关性，可知其为（II）的极大线性无关组，于是 β 不可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，即得所证结论。

若 $l_1\neq 0$，同理可证。由此可知结论成立。 □

注. 本题看似难以入手，但当我们按照之前所强调的内容，写出线性相关的定义，结合部分组线性无关的条件得到隐含的系数条件，后续证明便水到渠成。因此，敢于**对题目条件进行翻译**能帮助我们带来思路上的启发。

习题 2.1.18. 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$（其中 $m \geq 2$），对 $\forall 1 \leq i \leq m$，记 $\beta_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} \alpha_k$，证明：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 有相同的秩。

【证明】. 由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的定义，可知其能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出。

另一方面，注意到

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1,k\neq i}^{m} \alpha_k \right) = (m-1) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

与此同时：

$$\beta_i + \alpha_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} \alpha_k + \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \beta_i$$

因此 $\alpha_i = \dfrac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \beta_i$，这说明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 能被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出，因此两个向量组等价，进而有相同的秩。 □

注. 证明秩相等时，当然可以直接用定义讨论极大线性无关组的向量个数，但本题直接证明十分复杂。因此这时我们可以转向**向量组的等价关系**（当然，等价的本质也是线性表出向量组间秩的不等关系）。

总之在证明问题时，一定要灵活，当定义用不通时考虑转向利用线性表出和秩的关系。

习题 2.1.19. 考虑向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$（其中 $m \geq 2$），有 $\alpha_m \neq 0$，证明：$\forall k_1, k_2, \cdots, k_{m-1} \in \mathbb{F}$，向量组 $\beta_i = \alpha_i + k_i \alpha_m (1 \leq i \leq m-1)$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

【证明】. ($\Rightarrow$)：假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，使得 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m = 0$。

若 $l_1 = l_2 = \cdots = l_{m-1} = 0$，则 $l_m \neq 0$ 且 $l_m\alpha_m = 0$，这迫使 $\alpha_m = 0$，矛盾，故 $l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}$ 不全为零。不妨设 $l_i \neq 0$，则此时

$$l_1(\alpha_1 + 0\alpha_m) + \cdots + l_i \left(\alpha_i + \frac{l_m}{l_i} \alpha_m \right) + \cdots + l_{m-1}(\alpha_{m-1} + 0\alpha_m) = 0$$

因此 $\alpha_1 + 0\alpha_m, \cdots, \left(\alpha_i + \dfrac{l_m}{l_i} \alpha_m \right), \cdots, \alpha_{m-1} + 0\alpha_m$ 线性相关，与条件矛盾，因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

($\Leftarrow$)：$\forall k_1, k_2, \cdots, k_{m-1} \in \mathbb{F}$，若存在不全为零的 $s_1, \cdots, s_{m-1}$ 使得

$$s_1(\alpha_1 + k_1\alpha_m) + \cdots + s_{m-1}(\alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m) = 0$$

则有：

$$s_1\alpha_1 + \cdots + s_{m-1}\alpha_{m-1} + (s_1k_1 + \cdots + s_{m-1}k_{m-1})\alpha_m = 0$$

而由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，可知 $s_1 = s_2 = \cdots = s_{m-1} = 0$，矛盾，因此 $\beta_i = \alpha_i + k_i\alpha_m$ 线性无关，结论得证。 □

习题 2.1.20. 已知 5 元线性方程组的系数矩阵的秩为 3,且以下向量是它的解:$X_1=(1,1,1,1,1)^T$,$X_2=(1,2,3,4,5)^T$,$X_3=(1,0,-3,-2,-3)^T$。

（1）求方程组通解;

（2）判断 $X_1+X_2+X_3$ 是否为方程的解;

（3）判断 $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是否为方程的解。

【解答】.（1）设上述方程组为 $AX=B$，则 $\text{rank}A=3$，进而方程组 $AX=0$ 解空间的维数为 2。而可验证 X_1,X_2,X_3 线性无关，进而 $\text{rank}\{X_1,X_2,X_3\}=3$。**【注：在考试时，对秩的求解和讨论需要计算过程，请大家补充这一部分的验证过程!!】**因此 $B\neq 0$，即原方程为非齐次线性方程组。

由于 $AX_i=B$ 对 $i=1,2,3$ 成立，故 $A(X_1-X_2)=A(X_2-X_3)=0$，而 $X_1-X_2=(0,-1,-2,-3,-4)^T$ 和 $X_2-X_3=(0,1,4,3,4)^T$ 线性无关，故二者可构成 $AX=0$ 的一组基础解系。

综上，上述方程组的通解可表示为 $X=X_1+t_1(X_1-X_2)+t_2(X_2-X_3)$（其中 $t_1,t_2\in\mathbb{F}$）, 即

$$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\3\\4\end{pmatrix}\qquad t_1,t_2\in\mathbb{F}$$

（2）由于 $AX_i=B$ 对 $i=1,2,3$ 成立，故 $A(X_1+X_2+X_3)=AX_1+AX_2+AX_3=3B$，而 $B\neq O$，因此 $X_1+X_2+X_3$ 不是原方程的解

（3）$A\left(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\right)=\frac{1}{3}AX_1+\frac{1}{3}AX_2+\frac{1}{3}AX_3=B$，从而 $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是原方程的解 □

注. 本题并没有说明所考虑的方程组到底是齐次线性方程组还是非齐次线性方程组，因此我们在一开始需要先对其进行讨论:

如果方程组是齐次的，考虑到解空间维数为 2，因此不可能存在三个线性无关的解。而倘若其为非齐次线性方程组，则根据线性方程组解的结构定理，其解集表示为 $X=\gamma_0+t_1X_1+t_2X_2$，其中 $t_1,t_2\in\mathbb{F}$，γ_0 为一个特解，X_1,X_2 为导出组的一个基础解系。而且我们可以验证γ_0,X_1,X_2 是线性无关的，因此可以存在三个线性无关的解向量。

因此为了确定方程组到底是齐次的还是非齐次的，对 X_1,X_2,X_3 的秩进行讨论是必要的!

而对于本题第（2）（3）问，个别同学利用解集表达式代入验证得到结果，这一方法值得肯定，但一些人写法过于简陋，应该注意过程书写的全面性和严谨性。

习题 2.1.21. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是 $\mathbb{F}$ 上某个非齐次线性方程组的线性无关解,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{F}$。求 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k$ 是方程组的解的充分必要条件

【解法一】. 设上述方程组为 $AX=B$，则 $AX_i=B$ 对 $i=1,2,\cdots,k$ 成立。注意到

$$\begin{aligned}A(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k)&=\lambda_1AX_1+\lambda_2AX_2+\cdots+\lambda_kAX_k\\&=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)B\end{aligned}$$

而 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k$ 是方程组的解等价于 $A(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k)=B$ 成立，因此我们可以得到所满足的充分必要条件为 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$ □

【解法二】. 设上述方程组为 $AX=B$，由于 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是 $AX=B$ 的一组线性无关解，从而向量 $X_1-X_k,X_2-X_k,\cdots,X_{k-1}-X_k$ 是其导出组 $AX=0$ 的解，同时 X_k 是方程 $AX=B$ 的一个特解，此外，可证明 $X_1-X_k,X_2-X_k,\cdots,X_{k-1}-X_k$ 线性无关**【注：这部分证明需要补充细节】**。我们设 $X_1-X_k,X_2-X_k,\cdots,X_{k-1}-X_k,Y_1,\cdots,Y_s$ 是 $AX=0$ 的一组基础解系，则方程 $AX=B$ 的解均可以表示成

$$X_k+m_1(X_1-X_k)+m_2(X_2-X_k)+\cdots+m_{k-1}(X_{k-1}-X_k)+n_1Y_1+\cdots+n_sY_s$$

的形式,从而,若 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k$ 是方程组的解,则必存在 $m_1,m_2,\cdots,m_{k-1},n_1,\cdots,n_s$，使得

$$X_k+m_1(X_1-X_k)+\cdots+m_{k-1}(X_{k-1}-X_k)+n_1Y_1+\cdots+n_sY_s=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-1\right)X_k=\left(\sum_{j=1}^{k-1}(m_j-\lambda_j)(X_j-X_k)\right)+n_1Y_1+\cdots+n_sY_s$$

由于 $\left(\sum_{j=1}^{k-1}(m_j-\lambda_j)(X_j-X_k)\right)+n_1Y_1+\cdots+n_sY_s$ 是 $AX=0$ 的解，而 X_k 是非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解，结合 $B\neq 0$，从而上式成立当且仅当 $(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k-1)X_k=0$，而结合 X_k 非零，可知，从而所求充要条件是 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$ □

注. 对于答案的第二种方法，即对方程组的解进行表示之后带入比对，由于题目只说明了 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是一组线性无关解，这导致 $X_1-X_k,X_2-X_k,\cdots,X_{k-1}-X_k$仅仅是导出组的一组线性无关解，但不一定是基础解系，题目中对 $AX=0$ 的解空间维数未做要求或给出暗示，所以维数可能大于 $k-1$。

当然对于解法一而言，直接对于向量进行加法和数乘运算，相比之下会更加简洁。

习题 2.1.22. 已知数域 $\mathbb{F}$ 上某个非齐次线性方程组的解生成 $\mathbb{F}^n$，求方程组的系数矩阵的秩。

【证法一：从 $\mathbb{F}^n$ 出发逆推】. 设上述方程组为 $AX=B$，由于上述方程组的解生成 $\mathbb{F}^n$，从而存在 $\mathbb{F}^n$ 的一组基向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足 $AX_i=B$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 成立。从而 $X_1-X_2,\cdots,X_1-X_n$ 是 $AX=0$ 的解。而且，若上述向量线性相关，则存在不全为 0 的 $k_2,k_3,\cdots,k_n$ 使得 $k_2(X_1-X_2)+\cdots+k_n(X_1-X_n)$ 成立。

即 $(k_2,k_3,\cdots,k_n)X_1-k_2X_2-\cdots-k_nX_n=0$，而由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关，故可以得到 $k_2=k_3=\cdots=k_n=0$，矛盾，因而 $X_1-X_2,\cdots,X_1-X_n$ 线性无关。

设 V_A 为 $AX=0$ 的解空间，则 V_A 至少含 $n-1$ 个线性无关向量。$\mathrm{dim}V_A\leq n-1$，从而 $\mathrm{rank}A\geq 1$，而若 $\mathrm{rank}A=0$，则 $A=0$，而 $B\neq 0$，从而 $AX=B$ 无解。因而 $\mathrm{rank}A=1$。 □

【证法二：从方程组的解的结构入手】. 对于非齐次线性方程组 $AX=B$，设其一个特解为 γ_0，并记 $\mathrm{rank}A=r$，则导出组 $AX=0$ 的解空间 V_A 维数为 $n-r$。设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 为导出组的基础解系，下面给出断言：$\gamma_0,X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 为 $AX=B$ 解集的一组基。

断言的证明：则根据非齐次线性方程组接的结构定理，$AX = B$ 的解集可以表示为 $X = \gamma_0 + t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_{n-r}X_{n-r}$，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{F}$。于是此时 $AX = B$ 的解可由 $\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性表出。

再证明 $\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关，若不然，则存在不全为零的 $l_0, l_1, \cdots, l_{n-r}$，使得

$$l_0\gamma_0 + l_1X_1 + \cdots + l_{n-r}X_{n-r} = 0$$

因此 $l_0\gamma_0 + l_1X_1 + \cdots + l_{n-r}X_{n-r}$ 为 $AX = 0$ 的解，因此

$$A\left(l_0\gamma_0 + l_1X_1 + \cdots + l_{n-r}X_{n-r}\right) = l_0A\gamma_0 = l_0B = 0$$

这迫使 $l_0 = 0$，于是 $l_1, \cdots, l_{n-r}$ 不全为零且 $l_1X_1 + \cdots + l_{n-r}X_{n-r} = 0$，与 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关矛盾，因此 $\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关。综合上述两点，可知断言成立。

回到原题，此时 $AX = B$ 解集生成的子空间即为 $\operatorname{span}(\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}) = \mathbb{F}^n$，因此必有

$$\operatorname{rank}\{\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}\} = n$$

进而可知 $r = 1$，即方程组系数矩阵的秩为 1。 □

注. 一些同学采用了证法二的方式，但并没有对 $\gamma_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关性进行论证。而参看课本可以发现，课本里没有任何一条定理和结论能直接说明这点，因此在考试时一定要对这一部分额外证明一遍！而在解答中，这一部分的论证直接被整理成为一条断言，希望大家不只能记住结论，还要理解这一结论的证明过程。

另外，证法一中，证明 $X_1 - X_2, \cdots, X_1 - X_n$ 线性无关会在一些题目中被频繁应用，所以建议积累一下。

习题 2.1.23. 在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 中，以下子集合是否构成子空间：

（1）对给定的正整数 n，次数小于 n 的实系数多项式的全体；

（2）对给定的正整数 n，次数大于 n 的实系数多项式的全体；

（3）对给定的实数 a，满足条件 $f(a) = 0$ 的实系数多项式 $f(x)$ 的全体；

（4）对给定的实数 a，满足条件 $f(a) \neq 0$ 的实系数多项式 $f(x)$ 的全体；

（5）满足条件 $f(x) = f(-x)$ 的实系数多项式 $f(x)$ 的全体。

【解答】. (1) $\forall f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 \in \mathbb{R}[x]$，则

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0 + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 \\ &= (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

为次数小于 n 的多项式，故加法封闭性成立。

对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= \lambda(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \\ &= (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \in \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

为次数小于 n 的多项式，故数乘封闭性成立。

因此其构成 $\mathbb{R}[x]$ 的子空间。同时维数为 n，一组基为 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$。

（2）题述所示集合可以表示成

$$W_2=\left\{f(x)=a_{n+k}x^{n+k}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x]\middle|k\geq 0,a_{n+k}\neq 0\right\}$$

因此可知 $x^n,-x^n\in W_2$，而 $(x^n)+(-x^n)=0\notin W_2$，因此加法封闭性不成立。进而不为子空间。

此外，对 $f(x)\in W_2$，取 $\lambda=0$，则 $0f(x)=0\notin W_2$，因此数乘封闭性也不满足。**【上面的论述足够说明不是子空间，但希望大家能明白如何通过推翻数乘封闭性验证某个集合不为子空间】**

（3）设题述所示集合为 W_3，考虑任意两个满足 $f(a)=g(a)=0$ 的 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$，则有 $f(a)+g(a)=0$，进而 $f(x)+g(x)\in W_3$，加法封闭性成立。

对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\lambda f(a)=0$，进而 $\lambda f(x)\in W_3$，数乘封闭性成立。

因此其构成子空间。可以验证其为无穷维的，一组基为 $\left\{(x-a),(x-a)^2,\cdots\right\}$。**【考试时需要证明】**

（4）对某个固定的 a，考虑 $f(x)=1\in\mathbb{R}[x]$，则 $f(a)=1\neq 0$ 且 $-f(a)=-1\neq 0$。于是 $f(a)+(-f(a))=0$，因此加法封闭性不成立，其不为子空间。**【从数乘封闭性切入亦可】**

（5）设题述所示集合为 W_5，考虑任意两个满足 $f(x)=f(-x),g(x)=g(-x)$ 的 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$，则有 $f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)$，进而 $f(x)+g(x)\in W_5$，加法封闭性成立。

对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\lambda f(x)=\lambda f(-x)$，进而 $\lambda f(x)\in W_5$，数乘封闭性成立。

因此其构成子空间。可以验证其为无穷维的，一组基为 $\left\{1,x^2,x^4,\cdots\right\}$。**【考试时需要证明】**

□

注. 对于类似于本题的子空间验证的问题，请大家一定要**像上面解答一样给出详细的论证过程，包括取值、计算、验证等全流程，而不要跳步！！**很多人可能认为加法和数乘运算对他们而言太简单，但这道题**就是想让大家干这件事！**所以千万要注意细节。

另外，多项式次数的定义是**次数最高的非零项所对应的次数**，因此（2）中的集合可以写成 W_2 的形式，也就是说，次数大于 n 的多项式可以出现次数小于等于 n 的项，请大家注意。

习题 2.1.24. 设整数 $k\geq 2$，数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关，证明：存在不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{F}$，$\forall\alpha_{k+1}\in V$，$\{\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}\}$ 线性相关。

【证明】. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关，因此，存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_k\in\mathbb{F}$，使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k=0$

由于 $k\geq 2$，因此 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k=0$ 有非零解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\neq(0,0,\cdots,0)$，对任何 α_{k+1}，有

$$\begin{aligned}&c_1(\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1})+c_2(\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1})+\cdots+c_k(\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1})\\=&c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k+(c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\cdots+c_k\lambda_k)\alpha_{k+1}=0\end{aligned}$$

而 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 不全为 0，这说明 $\{\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}\}$ 线性相关

□

注. 本题需要注意的是 α_{k+1} 是具有任意性的，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 可以看作是给定的。当然很多人因为没有搞清楚各个变量的关系，同时没有利用好 $k\geq 2$，导致证明出现偏差，还是需要这些同学在进行更进一步的理解。

习题 2.1.25. 设 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，对复数 λ 的不同取值，求向量组 $[\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\lambda\alpha_1]$ 的秩。

【解答】. 设 W 为由线性无关子集 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 生成的子空间，则 S 为 W 的一组基，向量组 $[\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\lambda\alpha_1]$ 在这组基下的各个向量坐标分别为

$$(1,\lambda,0,\cdots,0),(0,1,\lambda,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1,\lambda),(\lambda,0,\cdots,0,1)$$

将这些坐标写成列向量的形式，排成矩阵 A，则 A 的列向量组的秩就是 M 的秩。从上到下依次将 A 的第 i 行 $(1\leq i\leq n-1)$ 的 $-\lambda$ 倍加到第 $i+1$ 行，将 A 化为阶梯型矩阵 T：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\lambda\\ \lambda&1&0&\cdots&0\\ 0&\lambda&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&1&0\\ 0&\cdots&0&\lambda&1\end{pmatrix}\to T=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\lambda\\ 0&1&0&\cdots&-\lambda^2\\ 0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&1&-(-\lambda)^{n-1}\\ 0&\cdots&0&0&1-(-\lambda)^n\end{pmatrix}$$

当 $1-(-\lambda)^n=0$，即 $\lambda=-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ 时（其中 $0\leq k\leq n-1$），有 $\mathrm{rank}M=\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}T=n-1$。否则，$1-(-\lambda)^n\neq 0$，此时 $\mathrm{rank}M=\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}T=n$。 □

注. 方程 $x^n=1$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 有 n 个不同解 $\omega^k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$（其中 $0\leq k\leq n-1$），这称为 n **次单位根**。这点在考试时是**默认大家掌握的**（因为能通过复数乘法法则很快推出），不熟悉的同学可以先参考课本 198 页的相关介绍。

习题 2.1.26. 设 $\mathbb{R}_+$ 是所有的正实数组成的集合，对任意 $a,b\in\mathbb{R}$，定义加法 $a\oplus b=ab$；对任意 $a\in\mathbb{R}_+$ 与 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义数乘 $\lambda\odot a=a^\lambda$。

而 $\mathbb{R}$ 可通过通常方式定义加法和数乘看成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。证明这个通常的线性空间 $\mathbb{R}$ 与按上述方式定义的线性空间 $\mathbb{R}_+$ 同构，并给出这两个线性空间之间的全部同构映射。

【解答】. 设 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 为同构映射，则其将 $\mathbb{R}$ 中的零元映到 $\mathbb{R}_+$ 中的零元，于是 $\sigma(0)=1$。而设 $\sigma(1)=a$，其中由于 σ 为一一映射，a 满足 $a>0$ 且 $a\neq 1$。

则 $\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$\sigma(x)=\sigma(x\cdot 1)=x\odot\sigma(1)=a^x$$

因此所求的映射只可能为 $\begin{aligned}\sigma:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}_+\\ a&\mapsto a^x\end{aligned}$ （其中 $a>0,a\neq 1$），下证其为同构映射。

首先，试 σ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，则其值域为 $\mathbb{R}_+$，因此 σ 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的一一映射。

其次，$\forall x,y\in\mathbb{R}$，有 $\sigma(x+y)=a^{x+y}=a^x\cdot a^y=\sigma(x)\oplus\sigma(y)$。$\forall x\in\mathbb{R},\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\sigma(\lambda x)=a^{\lambda x}=(a^x)^\lambda=\lambda\odot a^x=\lambda\odot\sigma(x)$。因此 σ 保持线性运算，进而为同构。

综上，$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}_+\\ a&\mapsto a^x\end{aligned}$ （其中 $a>0,a\neq 1$）给出了全部同构映射。 □

注. 验证某个映射为同构可分为两部分：（1）**证明既为单射又为满射，从而为一一映射**；（2）**证明保持加法和数乘运算**。在考试时，上述两部分的证明**请均给出完善细致的证明，不能写“易证”“显然”（即使你觉得显然，但实际上也并不显然）**，只有如此，才算完成了证明。

另外，还有许多人**到现在为止都不会验证线性空间，令人扼腕。**

习题 2.1.27. 设 V 是复数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，将它看成实数域 $\mathbb{R}$ 的线性空间 V_R，对任意 $\alpha,\beta \in V_R$ 按复线性空间 V 中的加法定义 $\alpha+\beta$，对 $\alpha \in V_R$ 及实数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 按 V 中向量与 $\mathbb{F}$（看作复数）的乘法定义 $\lambda\alpha$，求实线性空间 V_R 的维数，并由复线性空间 V 的一组基求出 V_R 的一组基。

【证明】. 取 V 在复数域上的一组基 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，则每个向量 $\alpha \in V$ 都可以写成 S 在复数域上的线性组合 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n$，其中每个 $\lambda_k=a_k+b_ki, a_k, b_k \in \mathbb{R}$。于是

$$\alpha=(a_1+b_1i)\alpha_1+\cdots+(a_n+b_ni)\alpha_n=a_1\alpha_1+b_1i\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n+b_ni\alpha_n$$

这说明每个向量 $\alpha \in V_R$ 是 $2n$ 个向量 $\alpha_1, i\alpha_1, \alpha_2, i\alpha_2, \cdots, \alpha_n, i\alpha_n$ 的实系数线性组合。

再证明线性无关性，设

$$x_1\alpha_1+y_1i\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n+y_ni\alpha_n=0$$

其中 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n \in \mathbb{F}$，即

$$(x_1+y_1i)\alpha_1+\cdots+(x_n+y_ni)\alpha_n=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 在 $\mathbb{F}$ 上线性无关可知等式中的复系数 $(x_1+y_1i),\cdots,(x_n+y_ni)$ 全部为 0，从而其实部和虚部 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 全为 0，因此这 $2n$ 个向量线性无关，构成 V_R 上的一组基 M，可见 $\dim V_R=2n$。一般的，由复数域上线性空间 V 的任意一组基 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 添加各个向量 α_k 的 i 倍得到 V_R 的一组基 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,i\alpha_1,i\alpha_2,\cdots,i\alpha_n\}$。 □

注. 我们知道，数域 $\mathbb{F}$ 上的全体 n 维数组向量**关于 $\mathbb{F}$ 上的加法和数乘运算**可构成 n 维线性空间，此时数组向量所处的数域和线性运算所处的数域保持一致。

而倘若**定义线性运算的数域发生变化**，则线性空间的结构可能发生改变，甚至不构成线性空间。而这个题便给出了这样的一个例子。

习题 2.1.28. 设 $\mathbb{F}[x]$ 是系数在数域 $\mathbb{F}$ 中，以 x 为未定元的全体一元多项式 $f(x)$ 组成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，求证：

（1）$S=\{f(x)\in\mathbb{F}[x]|f(-x)=f(x)\}$ 和 $K=\{f(x)\in\mathbb{F}[x]|f(-x)=-f(x)\}$ 都是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间；

（2）$\mathbb{F}[x]=S\oplus K$

【证明】.（1）设 $f_1(x),f_2(x)\in S,\lambda\in\mathbb{F}$，则 $f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)$，进而 $f_1(x)+f_2(x)\in S$。同时 $\lambda f_1(-x)=\lambda f_1(x)$，于是 $\lambda f_1(x)\in S$。这证明了 S 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间。

设 $f_1(x),f_2(x)\in K,\lambda\in\mathbb{F}$，则 $f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)-f_2(x)=-(f_1(x)+f_2(x))$，进而 $f_1(x)+f_2(x)\in K$。同时 $\lambda f_1(-x)=\lambda(-f_1(x))=-\lambda f_1(x)$，于是 $\lambda f_1(x)\in K$。这证明了 K 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间。

（2）设 $f(x) \in S \cap K$，则对任意 $x \in \mathbb{F}$，由 $f(x) \in S$ 知 $f(-x) = f(x)$，由 $f(x) \in K$ 知 $f(-x) = -f(x)$。因此 $f(-x) = f(x) = -f(x)$，于是 $f(x) = 0$，这证明了 $S + K = S \oplus K$。

每个 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 可以写成 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，其中 $f_1(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \in S$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in K$，因此 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \in S + K$。这证明了 $\mathbb{F}[x] = S + K = S \oplus K$。 □

注. 根据定义，我们证明分解的唯一性（或零向量的唯一性）能证明“**是直和**”，即 $S + K = S \oplus K$，但不足以证明 $\mathbb{F}[x] = S \oplus K$，而只有通过证明 $\mathbb{F}[x] = S + K$ 之后才能证明结论成立。

2.2 补充练习

例 2.2.1. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$，其中 $\alpha_1 \neq 0$，并且每个 $\alpha_i (2 \le i \le p)$ 都不能由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出，证明：$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 线性无关。

例 2.2.2. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，证明：当且仅当 m 为奇数时，向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-1} + \alpha_m, \alpha_m + \alpha_1$ 也线性无关。

例 2.2.3 (“线性相关”与“线性表出”的区别与联系：“**诡计多端的 0**”). 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中一组线性无关的向量，$\beta \in \mathbb{F}^n$，证明：或者 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关，或者 β 能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表出。

例 2.2.4 (抽象向量的线性相关性). 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示：

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_3 \end{cases}$$

问：$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是否线性无关？

例 2.2.5 (上题的进阶形态). 设线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。求由向量 $i\alpha_i + j\beta_j$（其中 $1 \le i, j \le 3$）所组成的向量组的秩。

例 2.2.6 (基变换与坐标变换). 设三维线性空间 V 有两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$，且

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_3 = \alpha_1 \end{cases}$$

求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

例 2.2.7 (表出唯一性). 设向量 β 能被向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，问 β 的表出方式是否唯一？

例 2.2.8 (一个简单但很好的结论). 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r_1，向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的秩为 r_2，向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 的秩为 r_3，则 $\max\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2$

例 2.2.9 (上题的变种). 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是秩为 r 的向量组,设向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}(1\le i_1,\cdots,i_m\le n, m\le n)$ 的秩为 s，证明 $r+m-n\le s\le r$。

例 2.2.10. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且可由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出，证明这两个向量组等价，从而 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关。

例 2.2.11 (极大线性无关组的个数). 一般来说，一个向量组的极大线性无关组是不唯一的。那什么向量组的极大线性无关组是唯一的呢？给出你的答案并证明它。

例 2.2.12. 给定数域 $\mathbb{K}$ 上的两个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\qquad \begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0\\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sn}x_n=0\end{cases}$$

试给出二者具有公共非零解的充分必要条件，并证明。

例 2.2.13. 在向量空间 $\mathbb{F}^n(n\ge 3)$ 中，令 $W_k=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n\,\middle|\, x_1+x_2+\cdots+x_k=0\right\}$，其中 $k=1,2,\cdots,n$。

（1）证明 W_k 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间；

（2）对于 $1\le k\le n$，求 $W_k\cap W_n$ 的维数与一组基。

例 2.2.14. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$，其中 $M_n(\mathbb{R})$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上所有的 $n\times n$ 方阵组成的集合。记 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，即 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T$。若对任意的 $i=1,2,\cdots,n$，都有：

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|$$

证明齐次线性方程组 $AX=0$ 只有平凡解。

例 2.2.15 (用解空间重构方程组). 已知向量空间 $\mathbb{F}^5$ 中的向量 $X_1=(1,2,3,4,5),X_2=(1,3,2,1,2)$，求一个齐次线性方程组，使得 X_1,X_2 组成这个方程组的基础解系。

例 2.2.16 (上例的进阶版本). 对于齐次线性方程组 $AX=0$，设其系数矩阵 A 的列向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，且其解空间的一组基为 $(2,1,7,7,0)^T,(5,6,4,7,2)^T$，则：

（1）求 A 的列向量组的一个极大线性无关组，并用这一极大线性无关组将其他列向量线性表出；

（2）试求由 A 的行向量所生成的线性空间 V 的一组基，判断当实数 a 取到何值时，$\beta=\left(1,0,a,3,2a+\dfrac{1}{7}\right)$ 落在 V 中，并将 β 用所求出的基线性表出。

例 2.2.17. 判断题：

1. 线性空间 V 的维数与数域 $\mathbb{F}$ 无关

2. 非齐次线性方程组 $AX = B$ 的系数矩阵 A 为 $m \times n$ 阵，若 A 的行向量组线性无关，则该方程组一定有解

3. 设 A 为 $m \times n$ 阵，若非齐次线性方程组 $AX = B$ 的解不唯一，则 A 的秩小于 m

4. 条件同 3，则有 $m < n$ 成立

5. 设某个线性方程组系数矩阵 A 有 n 列，解集生成的子空间维数为 s，则有 $s + \mathrm{rank}A = n$

例 2.2.18. 下列集合有几个是 $\mathbb{R}^n$（$\mathbb{R}$ 为实数集，$n = 2m$ 为偶数）的子空间。

$$w_1 = \{\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\};$$

$$w_2 = \{\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\};$$

$$w_3 = \{\alpha = (a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m) | a_i \in \mathbb{R}^+, b_i \in \mathbb{R}^-\};(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^- \text{分别为正、负实数集})$$

$$w_4 = \{\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{Z}\};(\mathbb{Z}\text{为整数集})$$

例 2.2.19. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间且 $\dim V = 5$。若 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，β_1, β_2 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 线性相关，则以下命题中正确的有几个

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性无关；

（2）β_2 能够被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性表出；

（3）存在不全为 0 的数 $l_1, l_2 \in \mathbb{K}$，使得 $l_1\beta_1 + l_2\beta_2$ 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出；

（4）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的秩为 4

例 2.2.20. （1）求非齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 21 \end{cases}$$

（2）求上述方程组解集生成子空间的维数和一组基。

例 2.2.21. 给定数域 $\mathbb{K}$ 上的两个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

试给出二者具有公共非零解的充分必要条件，并证明。

例 2.2.22. 设有非齐次线性方程组（I）：

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = b \\ 8x_1 - 9x_2 + ax_3 = 7 \end{cases}$$

又已知方程组（II）的通解为：

$$(1,1,0,0)^T + t_1(1,0,-1,0)^T + t_2(2,3,0,1)^T(t_1, t_2 \in \mathbb{F})$$

若这两个方程有无穷多组公共解，求 a, b 的值并求出公共解。

例 2.2.23 (基础且常用，总之必须要会！). 设数域 $\mathbb{K}$ 上的非齐次线性方程组 $AX=B$（含 n 个未定元，$B\neq 0$）的系数矩阵 A 的秩为 $r-s$，其中 $s\geq 1$。已知 γ_0 是 $AX=B$ 的 1 个特解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是导出组 $AX=0$ 的基础解系，证明：

（1）$\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_s$ 是 $AX=B$ 的 $s+1$ 个线性无关解；

（2）$AX=B$ 的每个解均可由 $\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_s$ 线性表出。

例 2.2.24. 对于固定的正整数 n，设数域 $\mathbb{F}$ 上的线性方程组 $AX=B$ 的系数矩阵为 n 列，且 A 与 B 行数相同，则其至多有多少个线性无关的解。

例 2.2.25. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，V_0 是 V 的子空间。对于任意的 $\alpha\in V$，记 $\alpha+V_0=\{\alpha+\beta|\beta\in V_0\}$，其中 α 与 β 之间的加法为线性空间中的加法。记 $V/V_0=\{\alpha+V_0|\alpha\in V\}$，证明如下命题：

（1）对任意 $\alpha+V_0,\beta+V_0\in V/V_0$，$\alpha+V_0=\beta+V_0$ 当且仅当 $\alpha+(-\beta)\in V_0$；

（2）定义 V/V_0 上的加法和数乘分别为

$$(\alpha+V_0)+(\beta+V_0)=(\alpha+\beta)+V_0,\lambda(\alpha+V_0)=(\lambda\alpha)+V_0$$

其中 $\alpha+V_0,\beta+V_0\in V/V_0$，$\lambda\in\mathbb{F}$。证明：$V/V_0$ 在上述两种运算下可看成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。(注：可以验证，如此定义的加法和数乘确是良定义的。这点在作答时无需验证)

例 2.2.26. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的 4 维向量空间 $\mathbb{C}^4$ 中, 定义子集如下：

$$W_1=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^T\in\mathbb{C}^4\middle||z_1-z_2|^2+|z_3+z_4|^2=0\right\}$$

$$W_2=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^T\in\mathbb{C}^4\middle|z_1=\overline{z_2},z_3=\overline{z_4}\right\}$$

试判断 W_1,W_2 是否为 $\mathbb{C}^4$ 的子空间，并给出证明。如果 W_1 或 W_2 是子空间, 求它的一组基。

例 2.2.27. 设 V 是复数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，将它看成实数域 $\mathbb{R}$ 的线性空间 V_R，对任意 $\alpha,\beta\in V_R$ 按复线性空间 V 中的加法定义 $\alpha+\beta$，对 $\alpha\in V_R$ 及实数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 按 V 中向量与 $\mathbb{F}$（看作复数）的乘法定义 $\lambda\alpha$，求实线性空间 V_R 的维数，并由复线性空间 V 的一组基求出 V_R 的一组基。

例 2.2.28. 设 V 为给定实数域，$F=\mathbb{Q}$ 为有理数域，V 按照实数域上的加法和有理数域上的数乘运算作为加法和数乘构成 F 上的线性空间 V_F。W 是包含 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最小数域，其在上述运算下可看成 V_F 上的子空间，求 W 维数与一组基。

例 2.2.29 (*). 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，任意给定不小于 n 的自然数 m。证明：存在 m 个 V 中的向量，使得其中任意 n 个向量线性无关。

例 2.2.30. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为 $\mathbb{F}$ 上非齐次线性方程组 $AX=B$ 的线性无关解，其中系数矩阵 A 为 m 行 n 列，则下列说法正确的是：

（1）$X_1+9X_2+5X_3+2X_4$ 也是方程组的解；

（2）方程组通解为 $X_1+k_1(X_2-X_1)+k_2(X_3-X_2)+k_3(X_4-X_3)$，其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{F}$；

（3）$\mathrm{rank}A\leq n-3$；

（4）$X_1,X_2-X_1,X_3-X_2,X_4-X_3$ 可能线性相关。

例 2.2.31. 设 γ 为非齐次线性方程组（I）的一个解，α,β 为对应导出组（II）的两个解，则下列论断错误的是：

（1）$5\alpha-7\beta$ 是（II）的解；

（2）$\gamma-(2\alpha-6\beta)$ 为（II）的解；

（3）$2\gamma-(2\alpha+2\beta)$ 是（I）的解；

（4）$3\beta-2\alpha$ 为（II）的解。

例 2.2.32. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一组向量，则下列说法正确的是：

（1）若 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+2$，则 β_1,β_2 线性无关；

（2）若 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+1$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关；

（3）若 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 β_1 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

（4）若 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+1$，则 β_2 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

例 2.2.33. 以下说法中正确的有几个

（1）n 维向量空间 V 的任意 n 个线性无关的向量都可构成 V 的一个基；

（2）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量空间 V 中的 n 个向量，且 V 中的每个向量都可由之线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基；

（3）设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是向量空间 V 的一个基，如果 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 与 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 等价，则 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 也是 V 的一个基；

（4）n 维向量空间 V 的任意 $n+1$ 个向量线性相关。

例 2.2.34. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间且 $\dim V=5$。若 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1,β_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性相关，则以下命题中正确的有几个：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关；

（2）β_2 能够被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性表出；

（3）存在不全为 0 的数 $l_1,l_2\in\mathbb{K}$，使得 $l_1\beta_1+l_2\beta_2$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

（4）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的秩为 4。

2.3 要点与结论

2.3.1 定理 2.1.2 充分性的行列式证法

在课本中，定理 2.1.2 充分性证明的行列式方法没有给出，而对此提出疑问的同学比较多，下面给一个证明：

【证明】. 若存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1a+k_2b+k_3c=0$，不妨设 $k_3\neq0$，则有

$$c=-\frac{k_1}{k_3}a-\frac{k_2}{k_3}b$$

考虑向量 a,b,c 之间的混合积：

$$(a,b,c)=\left(a,b,-\frac{k_1}{k_3}a-\frac{k_2}{k_3}b\right)=-\frac{k_1}{k_3}(a,b,a)-\frac{k_2}{k_3}(a,b,b)=0$$

因此以 a,b,c 为棱的平行六面体体积为 0。进而三个向量共面。证毕。 □

2.3.2 空间中两个平面的位置关系与线性方程组

值得肯定的是，有同学完成了 2.4 节习题第 9 题的讨论，虽然很是辛苦，但有待进一步简洁。因此下面尝试用线性方程组理论讨论空间中两个平面的位置关系。

设平面 π_1 与 π_2 的方程为：

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

于是我们有如下的定理：

定理 2.3.1. 已知 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两张平面 π_1 与 π_2。

（1）π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$；

（2）π_1 与 π_2 平行但不重合 $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$，且 $A_1 : B_1 : C_1 : D_1 \neq A_2 : B_2 : C_2 : D_2$；

（3）π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 : D_1 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2$。

【证明】. 考虑方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

可知方程 $(*)$ 存在只有一个自由未知量的解当且仅当两平面相交出一条直线，无解当且仅当两平面平行但不重合，存在两组自由未知量的解当且仅当两平面重合。

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$$

则 A, B 分别为 $(*)$ 的系数矩阵和增广矩阵。

此时，$(*)$ 存在只有一个自由未知量的解当且仅当 $\text{rank}A = \text{rank}B = 2$，即 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$。

$(*)$ 无解当且仅当 $\text{rank}A = 1$ 而 $\text{rank}B = 2$，即 $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$，且 $A_1 : B_1 : C_1 : D_1 \neq A_2 : B_2 : C_2 : D_2$。

$(*)$ 存在两组自由未知量的解当且仅当 $\text{rank}A = \text{rank}B = 1$，即 $A_1 : B_1 : C_1 : D_1 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2$。证毕。 □

2.3.3 关于验证线性空间与子空间的证明方法

相比于向量空间，线性空间继承了其加法和数乘运算，而在集合层面做了进一步的扩展。但由于失去了 $\mathbb{F}^n$ 中的良好结构，同时加法和数乘的定义也不尽相同，所以验证线性空间并不是一个简单的过程。

验证线性空间主要分两步：（1）**验证加法和数乘封闭性，**（2）**验证八条运算律成立**。**八条运算律提供了加法和数乘运算的合理性**，因此封闭性需要独立证明。

证明子空间只需要一步：（1）**验证加法和数乘封闭性**。因为子空间继承了原有线性空间的加法和数乘，因此其合理性能保证，无需验证八条运算律。

关于子空间的验证，前面已有例题，下面是一个验证线性空间的例子：

例 2.3.1. 以 $\mathbb{C}$ 为向量集合，复数的加法作为向量的加法，并以 $\mathbb{R}$ 作为标量集合，即按实数与复数的乘法定义纯量与向量间的数乘，证明此时 $\mathbb{C}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

【证明】. 先证明加法和数乘封闭性：$\forall a_1+b_1i, a_2+b_2i \in \mathbb{C}$，其中 $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{R}$，有 $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \in \mathbb{C}$，因此加法封闭性得证。

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，有 $\lambda(a_1+b_1i)=(\lambda a_1)+(\lambda b_1)i \in \mathbb{C}$，因此数乘封闭性得证。

下面验证八条运算律成立，为了方便，记 $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i, z_3=a_3+b_3i$ 为 $\mathbb{C}$ 中任意三个元素，其中 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathbb{R}$，$k,l$ 为 $\mathbb{R}$ 中任意常数。

（1）加法交换律：$z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)=z_2+z_1$，成立**【注：这三个等号每个等号都必不可少，其中第一个等号和第三个等号是纯粹的代换，而第二个等号则由于复数的加法法则，其他条的验证亦是如此，步骤都不能省略】**；

（2）加法结合律：$(z_1+z_2)+z_3=((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i))+(a_3+b_3i)=(a_1+b_1i)+((a_2+b_2i)+(a_3+b_3i))=z_1+(z_2+z_3)$，成立；

（3）存在零元素：考虑 $0 \in \mathbb{C}$，则 $0+z_1=0+a_1+b_1i=a_1+b_1i=z_1$，成立；

（4）存在负元素：对于 $z_1=a_1+b_1i$，考虑 $z_0=-a_1-b_1i$，则 $z_1+z_0=(a_1+b_1i)+(-a_1-b_1i)=0$，同时 $z_0+z_1=(-a_1-b_1i)+(a_1+b_1i)=0$。于是 $z_0=-z_1$，成立；

（5）数乘对向量加法的分配律：$k(z_1+z_2)=k((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i))=k(a_1+b_1i)+k(a_2+b_2i)=kz_1+kz_2$，成立；

（6）数乘对标量加法的分配律：$(k+l)z_1=(k+l)(a_1+b_1i)=k(a_1+b_1i)+l(a_1+b_1i)=kz_1+lz_1$，成立；

（7）标量乘法与向量数乘的“结合律”：$k(lz_1)=k(l(a_1+b_1i))=(kl)(a_1+b_1i)=(kl)z_1$，成立；

（8）标量单位元与向量的数乘单位律:$1\cdot z_1=1\cdot(a_1+b_1i)=a_1+b_1i=z_1$，成立。

由此，即证！ □

Chapter 3

行列式

3.1 习题解析

习题 3.1.1. 利用行列式的定义证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

【证明】. 设行列式的值为 Δ，则根据定义，有

$$\Delta = \sum_{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3} d_{i_4} e_{i_5}$$

由于 $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ 为 12345 的一个排列，因此 i_3, i_4, i_5 中至少有一个元素取 3,4,5 中的一个元素，而由于 $c_k = d_k = e_k = 0 (k = 3,4,5)$，因此 $a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3} d_{i_4} e_{i_5}$ 必然为 0，于是 $\Delta = 0$。 □

注. 本题主要是结合定义进行说明，需要注意的是论证的准确性和严密性。

值得注意的是，一些同学说：5 阶行列式是由来自不同行不同列的元素乘积后求和得到，这种说法是错误的，因为还需要考虑 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)}$ 这一部分。相比之下，直接写成解答中的求和式形式更为清晰明白。

习题 3.1.2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$。

【解法一：注意到各行之和为定值】. 设行列式的值为 Δ，则将除第一列外其余各列加到第一列上，再将第一行的 -1 倍加到其余各行上，可得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & d & c & b \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & b & a & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ 0 & d-b & 0 & b-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix}$$

进一步提取公因子，并结合 3.1 节例 4 的结论，得

$$\Delta = -(a+b+c+d)(a-c)(b-d)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

□

【解法二：通过初等变换“得到更多的 0”】. 设行列式的值为 Δ，将其第二行的-1 倍加到第三行上；第一行的-1 倍加到第四行上，得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c-a & 0 & a-c & 0 \\ c-a & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix}$$

再将第一列加到第三列上，并将一三两行、二四两行分别调换位置，可得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & a+c & d \\ a & d & a+c & b \\ c-a & 0 & 0 & 0 \\ c-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & 0 & 0 & 0 \\ c-a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a+c & d \\ a & d & a+c & b \end{vmatrix} = 0$$

□

注. 本题的两种解法中，解法一试图利用各行之和为定值，解法二则直接初等变换以出现大量的 0 便于使用定义。但无论如何，**行列式中为 0 的元素越多，往往越容易我们计算**，而这需要我们去仔细体会。

习题 3.1.3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$。

【解答】. 设行列式的值为 Δ，当 $n \geq 2$ 时，将第一行的-1 倍加到其余各行，并提取公因子，有：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1) \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

若 $n \geq 3$，**则将第 2 行的 -1 倍加到第 3 行到第 n 行**（这点 $n=2$ 时做不到，所以要讨论），有：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

若 $n=2$，则 $\Delta=(a_2-a_1)(b_1-b_2)$，而若 $n=1$，则 $\Delta=a_1+b_1$。 □

注. 本题这种初等变换的方法本身不难，但受制于计算过程中，行列式的书写具有的一定迷惑性，绝大多数同学忽略讨论了 $n=1,2$ 的情况，这应予以注意。

此外，一些同学试图运用拆分法，拆分成：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

而这种拆分方式是错误的（正确的拆分方式见书），这点需要注意！

习题 3.1.4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$。

【解答】. 将 D_n 除第一列以外其余所有列加到第一列上，之后将最后一行的 -1 倍加到其余所有行上，最后按第一列展开，可得：

$$D_n=\begin{vmatrix} (n-1)a+b & a & \cdots & a & b \\ (n-1)a+b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (n-1)a+b & b & \cdots & a & a \\ (n-1)a+b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 0 \\ (n-1)a+b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}((n-1)a+b)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b-a \\ 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b-a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{1+n}((n-1)a+b)(b-a)^{n-1}(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$$

$$=(-1)^{(n-1)n/2}((n-1)a+b)(b-a)^{n-1}$$

□

注. 在得到上式第二个等号的对应式子后，也可以直接应用**行列式的定义**处理。可知行列式定义中，求和式唯一一个可能非零的元素为副对角线对应项相乘所对应项，因此可以直接得到 $D_n=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,2,1)}((n-1)a+b)(b-a)^{n-1}$。此外，逆序数的计算同样需要小心。

此外，我们化简行列式的一条准绳便是出现尽可能多的 0，而在将其余各列加到第一列之后，

一些人可能首先会尝试将**将第一行的-1 倍加到其余各行中**，但这样会得到

$$\begin{vmatrix} (n-1)a+b & a & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & a-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & a-b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

相比于答案的方法，可能上式在进一步化简时会更为困难，也更容易出错。

习题 3.1.5. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$。

【解答】. 将 D_n 的第一列提取公因子 a_1，之后将第 1 列的 $-a_k$ 倍加到第 k 列上（其中 $2 \le k \le n$），可得：

$$D_n = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & \cdots & a_1b_n-a_nb_1 \\ b_2 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & a_2b_n-a_nb_2 \\ b_3 & 0 & 0 & \cdots & a_3b_n-a_nb_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

再按最后一行展开，得

$$\begin{aligned} D_n &= a_1(-1)^{n+1}b_n \begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & \cdots & a_1b_n-a_nb_1 \\ 0 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & a_2b_n-a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1}a_1b_n\prod_{k=1}^{n-1}(a_kb_n-a_nb_k) \end{aligned}$$

□

注. 本题因为第一列中公因子 a_1 的存在而显得难以下手，而个人认为将 a_1 提出来也是技巧性最强的一步。而这也提醒我们，遇到某行或某列有公因子时，**一定要考虑将其提出来**，或许提出来后便能发现大概的做法。

习题 3.1.6. λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda-3)x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (\lambda-2)x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

【解答】. 由于方程是 3 个方程 3 个未知数的齐次线性方程组，因此其有非零解当且仅当其系数矩阵的行列式为 0。而注意到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ 4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} &= (\lambda-3)(\lambda-2)(1-\lambda)-4+4(\lambda-2)+2(\lambda-3)\\ &= -\lambda^3+6\lambda^2-5\lambda-12 = -(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-4)\end{aligned}$$

解得 $\lambda=-1,3,4$，此时方程组有非零解。 □

注. 克莱姆法则终于可以用了!!! 克莱姆法则非常适合判断齐次线性方程组有无非零解！另外，设某个 λ 对应的非零解向量为 $X_0\in\mathbb{R}^{3\times1}$，大家可以计算一下 AX_0，其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$。并思考一下这是否蕴含着一些更深层的意义。

习题 3.1.7. 设 t 是一个参数，$A(t)=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}$，证明：$A(t)=A(0)+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$，其中 A_{ij} 为 $A(0)$ 的代数余子式。

【解答】. 当 n=1 时，结论显然，下设 $n\geq 2$，此时将行列式按第一列拆开：

$$A(t)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}$$

再将右边一个行列式第一列的 -1 被加到其余各列，有

$$\begin{vmatrix}t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=t(A_{11}+\cdots+A_{1n})$$

再对另一个行列式第二列做类似拆分，不断进行下去，即得结论。 □

注. 本题讲稿中丢了一个系数 t，特此说明。

习题 3.1.8. 证明：若某个至少二阶方阵各个元素均为 1 或-1，则其行列式必为偶数。

【解答】. 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$，此时，对于 D 的第 k 行而言（其中 $2\leq k\leq n$），

若 $a_{k1}=1$，则将第 1 行的 -1 倍加到第 k 行；若 $a_{k1}=-1$，则将第 1 行加到第 k 行。此时有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}(2\le i,j\le n)$ 的可能取值为 2,0,-2，因此 $\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 必为偶数。从而 D 为偶数。□

注. 本题在讲稿中缺少条件“至少二阶”，事实上，因为解答中的操作是对 $2\le k\le n$ 做的，所以阶数不能为 1。

此外，本题也可以用按行按列展开 + 归纳法的方法做，具体细节请大家补充。

3.2 补充练习

例 3.2.1 (初等变换：无论如何都要会的老本行).

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

例 3.2.2.

计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$。

例 3.2.3 (递推法—常见模型).

计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x+y \end{vmatrix}$。

例 3.2.4 (递推法—上例的一种变式).

求证：n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \cos nx$。

例 3.2.5 (递推法与数学归纳法).

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1-x_1 & x_2 & & & & \\ -1 & 1-x_2 & x_3 & & & \\ & -1 & 1-x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & x_{n-1} & \\ & & & -1 & 1-x_{n-1} & x_n \\ & & & & -1 & 1-x_n \end{vmatrix}$。

例 3.2.6 (箭头形).

计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$。

例 3.2.7 (“尽可能贴近上三角形或下三角形”).

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$。

例 3.2.8. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 2 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 4 & 3 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix}$，其中 $n \geq 5$。

例 3.2.9 (提取因子法).

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$。

例 3.2.10 (多种方法的综合运用).

用至少两种方法计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$。

例 3.2.11. 求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数。

例 3.2.12. 设行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix}$，其代数余子式 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$，求 $|A|$。

例 3.2.13. （1）设

$$D = \left|(a_{ij})_{2277\times 2277}\right| = \begin{vmatrix} 11^{20} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 11^{20} & 2 & 4 & \cdots & 2^{2276} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 11^{20} & 2277 & 2277^2 & \cdots & 2277^{2276} \end{vmatrix}$$

$$D' = \left|(b_{ij})_{2277\times 2277}\right| = A_{1,2277} + A_{2,2277} + \cdots + A_{2277,2277}$$

试求有理系数齐次线性方程组 $(b_{ij})(x_1, x_2, \cdots, x_{2277})^T = 0$ 的解空间的最小维数；

（2）是否存在一个数列，通项公式为不超过 99 次的多项式 $u_n = c_0 + c_1 n + \cdots + c_{99} n^{99}$，使得它的前 99 项分别为 1,2,$\cdots$,99，而第 100 项为 2277。请说明理由。

例 3.2.14. 设 $f_k(x)(1 \le k \le n)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式，证明：对任意 n 个数 $x_1, \cdots, x_n$，有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

例 3.2.15. 证明: 奇数阶反对称矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$。

例 3.2.16. 设 n 阶方阵 A 满足：每行元素之和为 c，并且 $|A| = d \neq 0$，试求 A 的所有代数余子式之和。

例 3.2.17. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = \left((-1)^{i+j} a_{ij}\right)_{n\times n}$，若 $|A| = c$，求 $|B|$。

例 3.2.18 (补充：升阶法解行列式). 计算下列行列式：

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n\times n}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\neq 0$；

（2）$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$。

3.3 要点与结论

3.3.1 关于递推数列的求解

在本节习题中，我们有的时候会求出来相应行列式关于阶数的递推公式，但是很多同学看到这一步之后就无从下手，考虑到递推公式的求解可能高中阶段不涉及，所以在这里为大家提供几个思路，希望大家都能了解并掌握。当然就考试而言，大家**至少掌握前两种计算方法并做到灵活应用**：

1. 猜结果 + 归纳法

   一般而言，如果递归公式较为简单，我们其实可以通过前面有限项的求解判断出结果的大致结构，从而猜到答案。为了保证答案的严谨性，我们需要运用数学归纳法进行验证，如果能够验证相符，那么猜出的结果往往就会具有较高的可靠性。

   在进行归纳时，一定要严格按照数学归纳法的标准写法进行叙述。

2. 特征根法

   对一个二阶线性递归数列,若满足递归关系:$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$,考虑方程 $\lambda^2-p\lambda-q=0$，其为上述数列的特征方程。

   若 $p^2+4q>0$，解之得到两个特征根 $\lambda_1=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2},\lambda_2=\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$，因此可以得到其通项公式满足 $a_n=A\lambda_1^n+B\lambda_2^n$，从而根据数列的前两项，便可以通过待定系数法确定 A,B 的取值，从而得到通项公式。

   若 $p^2+4q=0$，则 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{p}{2}$，此时数列通项公式满足 $a_n=A\lambda^n+Bn\lambda_2^n$，从而根据数列的前两项，便可以通过待定系数法确定 A,B 的取值，从而得到通项公式。

   注意：如遇三阶或三阶以上的递推公式，则特征根法往往是最有效的。

3. 配凑等比数列法

   这一点李尚志《线性代数学习指导》中已经做了详尽的描述，大家可以学习一下。

4. 子空间法

   习题 2.6 的第 3 题为大家提供了一种利用线性空间理论研究斐波那契数列并求解其通项的方法，对于一般的递归数列，我们也可以仿照上述方式进行讨论。即确定全体满足递归关系数列构成的子空间 $\to$ 找到一组基，使得基中所有元素全为等比数列 $\to$ 根据初值，找到所求解向量在这组基下的坐标，进而得到所满足要求的数列

下面给出一个例子：

例 3.3.1. *计算 n 阶行列式* $D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{vmatrix}$。

【解法一：归纳法】. 将行列式按第一行展开，有：

$$D_n = (-1)^{1+1}(-2)D_{n-1} + (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & -2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

下面用数学归纳法证明 $D_n = (-1)^n(n+1)$。注意到 $D_1 = -2, D_2 = 3$，均满足要求。设 $k \le n$（$n \ge 2$）时均有 $D_k = (-1)^k(k+1)$，则

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= -2D_n - D_{n-1} = -2(-1)^n(n+1) - (-1)^{n-1}n = (-1)^{n+1}(2n+2-n) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2) \end{aligned}$$

因此结论在 $n+1$ 时也成立，由数学归纳法原理，$D_n = (-1)^n(n+1)$ 成立。

综上，$D_n = (-1)^n(n+1)$。 □

【解法二：特征根法】. 将行列式按第一行展开，有 $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$，因此有特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$，解得两个相同特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$。因此存在 A, B 使得 $D_n = A(-1)^n + Bn(-1)^n$。

注意到 $D_1 = -2, D_2 = 3$，于是 $\begin{cases} -2 = -A - B \\ 3 = A + 2B \end{cases}$，于是 $A = B = 1$，从而 $D_n = (n+1)(-1)^n$。 □

3.3.2 行列式的 Laplace 展开

注：以下补充资料仅仅是作为知识补充使用，考试的必做题大概率不会涉及，因此请各位在作业或者考试中谨慎使用上述定理，以免造成错误！！但希望学有余力的同学能仔细阅读并理解体会，以达到扩充知识，增强理解的作用。

食用指南：如果想要了解一下，但是感觉给出的思维过程比较难于理解的话可以只记住结论，不过最好还是掌握这种立足于定义并由特殊逐步推进到一般的考虑问题的模式。

Step1 记号的引入

对于 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，我们引入记号 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$，来表示 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的一个排列；同时，我们引入符号函数 $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，并且我们可以记 $\operatorname{sgn}(j_1j_2\cdots j_n) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$

另外，对于行列式 $A = |a_{ij}|_{n\times n}$ 而言，我们记 $A\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 为 A 的第 $k_1, \cdots, k_r$ 行和第 $j_1, \cdots, j_r$ 列交叉处的元素组成的 $r\times r$ 阶子式。

Step2 行列式按某一行或某一列展开的另一种解读

对行列式 $\Delta = |a_{ij}|_{n\times n}$ 按照某一行或一列展开，实际上是将 Δ 看做**以这一行（列）的个元素为自变量的函数**，并将其余元看做**常数**，合并同类项得到的结果。下面以 Δ 按照第一行展开举例，我们有

$$\Delta = |a_{ij}|_{n\times n} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1j_1}A_{1j_1} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 a_{1j_1} 项的“系数”为：

$$A_{1j_1} = \sum_{\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $k_2 < \cdots < k_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 中去掉后剩下的数从小到大进行排列的结果。

考察从标准排列 $(12\cdots n)$ 变换到 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 的过程，可以分为如下两步：先将 j_1 同前面的数互换位置得到 $(j_1k_2\cdots k_n)$，再对 $(k_2\cdots k_n)$ 调换位置得到 $(j_2\cdots j_n)$，因此我们有

$$\operatorname{sgn}(j_1j_2\cdots j_n) = \operatorname{sgn}(j_1k_2\cdots k_n)\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-1}\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

于是我们有

$$A_{1j_1} = (-1)^{j_1-1}\sum_{\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

而我们知道 $\sum_{\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_2 & \cdots & k_n \\ j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = M_{1j_1}$ 为 a_{1j_1} 在 Δ 中的余子式，从而 $A_{1j_1} = (-1)^{1+j_1} = M_{1j_1}$ 即为 a_{1j_1} 在 Δ 中的代数余子式，这样我们就完成了**行列式按第一**

行展开的解读。当然对于其他行或列的展开形式，我们可以得到类似的结果。

Step3 对上述解读模式的推广

现在我们将对 Δ 的讨论推广到前 r 行 $(r<n)$。将 Δ 看成以它前 r 行的元为自变量的函数，后面 $n-r$ 行的元都看成常数，对行列式 Δ 的展开合并同类项，得到

$$\Delta=\sum_{(j_1j_2\cdots j_r)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}c_{j_1j_2\cdots j_r}=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n}\sum_{\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r}c_{j_1j_2\cdots j_r}$$

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 由 $1,2,\cdots,n$ 中任意取 r 个数并随机排列得到。从而 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r}$ 的系数

$$c_{j_1j_2\cdots j_r}=\sum_{\begin{pmatrix}k_{r+1}&\cdots&k_n\\j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)}a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $k_{r+1},\cdots,k_n$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 中去掉 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 后剩下 $n-r$ 个数据**从小到大排列得到**，而 $j_{r+1},\cdots,j_n$ 为其任意一个排列。

由标准列 $(12\cdots n)$ 变为排列 $(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)$ 一共可以分为以下三步实现:先将 $1,2,\cdots,n$ 中从小到大的 r 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 分别依次与它前面 $k_1-1,k_2-2,\cdots,k_r-r$ 个数互换位置，将 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 提到前 r 个位置上，剩下 $n-r$ 个数按照原来顺序排在后 $n-r$ 个位置上；将 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 排成 $j_1,j_2,\cdots,j_r$；将 $j_1\cdots j_r$ 排成 $j_{r+1}\cdots j_n$。因此 $(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)$ 的符号等于这三步符号之积，即

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)=&(-1)^{\tau(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)}\\=&\operatorname{sgn}(k_1\cdots k_rk_{r+1}\cdots k_n)\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}k_{r+1}&\cdots&k_n\\j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{sgn}(k_1\cdots k_rk_{r+1}\cdots k_n)=(-1)^{(k_1-1)+(k_2-2)+\cdots+(k_r-r)}=(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r-(1+2+\cdots+r)}$，因而

$$\begin{aligned}c_{j_1j_2\cdots j_r}=&(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)}\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}\\&\sum_{\begin{pmatrix}k_{r+1}&\cdots&k_n\\j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}k_{r+1}&\cdots&k_n\\j_{r+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}\\=&(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)}\cdot\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}r+1&\cdots&n\\k_{r+1}&\cdots&k_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 $A\begin{pmatrix}r+1&\cdots&n\\k_{r+1}&\cdots&k_n\end{pmatrix}$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 排列顺序无关，因此系数 $c_{j_1j_2\cdots j_r}$ 中含有公共因子 $(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)}A\begin{pmatrix}r+1&\cdots&n\\k_{r+1}&\cdots&k_n\end{pmatrix}$，于是，我们可以计算 Δ 为

$$\Delta = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n}\left(\sum_{\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r}\right)$$

$$(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)} A\begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)} A\begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

$M = A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}$ 是 $|A|$ 中第 $1,2,\cdots,r$ 行和 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 列交叉处的元所组成的子式，$A\begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ 是 $|A|$ 将 M 所在的 r 行 r 列全部删去后剩下的元按照原来的顺序所排成的子式，成为 M 的**余子式**，M 的余子式同 $(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)}$ 的乘积称为 M 的**代数余子式**。从而我们可以得到下述引理：

定理 3.3.1. 对任意正整数 $r<n$，n 阶行列式 $|A|$ 的值，等于它的前 r 行组成的所有 r 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和，即

$$|A| = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r+(1+2+\cdots+r)} A\begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}.$$

Step4 结论的进一步一般化与定理的得出

接下来，我们将上一部分得到的结论再进行一般化，得到有关行列式按照任意 r 行（或列）的展开定理。

我们对于 $|A|$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行分别依次与它前面的 $i_1-1,i_2-2,\cdots,i_r-r$ 行互换位置，将其换到第 $1,2,\cdots,r$ 行，其余部分按照原有顺序排列在第 $r+1,\cdots,n$ 行，得到 $|B|$，再对 $|B|$ 应用定理 1，有

$$\begin{aligned}|A| &= (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_r-r)}|B| \\ &= (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_r-r)} \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} B\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}(-1)^{k_1+\cdots+k_r+(1+\cdots+r)} B\begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_r+k_1+\cdots+k_r} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \cdots & i_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

将 $|A|$ 的转置 $|A^T|$ 按照第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行展开，就得到 $|A|$ 按照第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 列展开的结果。于是我们有行列式的 Laplace 展开定理：

定理 3.3.2 (Laplace 展开定理). 设 $|A|$ 是 n 阶行列式。对任意的正整数 $r<n$，对于任意取定的 r 个指标 $1\le i_1<\cdots<i_r\le n$，$|A|$ 的值等于它的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行（或列）组成的所有的

r 阶子式分别与它的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_r+k_1+\cdots+k_r} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \cdots & i_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ i_1 & \cdots & i_r\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_r+k_1+\cdots+k_r} A\begin{pmatrix} k_{r+1} & \cdots & k_n \\ i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中，第一个等式称为行列式按第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行的 Laplace 展开式，第二个等式称为行列式按第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 列的 Laplace 展开式。

3.3.3 用分块矩阵对矩阵乘积行（列）向量线性相关性的解读

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$ 分别为数域 $\mathbb{F}$ 中的 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵，则二者之间可进行乘法运算，且有

$$AB=\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s}b_{s1} & \sum_{s=1}^n a_{1s}b_{s2} & \cdots & \sum_{s=1}^n a_{1s}b_{sp} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s}b_{s1} & \sum_{s=1}^n a_{2s}b_{s2} & \cdots & \sum_{s=1}^n a_{2s}b_{sp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms}b_{s1} & \sum_{s=1}^n a_{ms}b_{s2} & \cdots & \sum_{s=1}^n a_{ms}b_{sp}\end{pmatrix}$$

此时将 A 写成按列分块的形式，即 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n\end{pmatrix}$，其中对任意的 $1\le s\le n$，有 $A_s=(a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ms})^T\in\mathbb{F}^{m\times 1}$ 为 A 的第 s 列。进而

$$AB=\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n A_s b_{s1} & \sum_{s=1}^n A_s b_{s2} & \cdots & \sum_{s=1}^n A_s b_{sp}\end{pmatrix}$$

因此AB 的第 k 列能由 A 中的列向量线性表出，且表出系数依次为 B 中第 k 列中的各个元素。

同样，再将 B 写成按行分块的形式，即 $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n\end{pmatrix}$，其中对任意的 $1\le s\le n$，有 $B_s=(b_{s1},b_{s2},\cdots,b_{sp})\in\mathbb{F}^{1\times p}$ 为 B 的第 s 行。进而

$$AB=\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s}B_s \\ \sum_{s=1}^n a_{2s}B_s \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms}B_s\end{pmatrix}$$

因此AB 的第 l 行能由 B 中的行向量线性表出，且表出系数依次为 A 中第 l 行中的各个元素。

此时，上面叙述中的两处红字给出了矩阵乘法的两种等价定义，这在李尚志老师的教材中有着进一步地介绍。同时借助上述论述和向量组秩的不等关系，可知$\mathrm{rank}AB\le\mathrm{rank}A$与$\mathrm{rank}AB\le\mathrm{rank}B$。而更多的性质会在随后的作业题与习题课中进行介绍。

Chapter 4

矩阵

4.1 习题解析

习题 4.1.1. （1）求与 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵；

（2）设 A 是一个对角形矩阵，其主对角线上的元素两两不同，证明：凡与 A 可交换的矩阵一定是对角形矩阵；

（3）思考与所有同阶方阵可交换的方阵的特点。

【解答】.（1）设 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$，注意到

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

比较元素有 $b_{11} = b_{22} = b_{33}$，$b_{12} = b_{23} = b_{31}$，$b_{13} = b_{21} = b_{32}$，因此与 A 可交换的矩阵形如 $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$，其中 $x, y, z \in \mathbb{F}$。

（2）设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$，注意到

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix} \quad BA=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

比较元素可知，对 $\forall 1\le i,j\le n$，有 $a_ib_{ij}=a_jb_{ij}$，而由于当 $i\ne j$ 时 $a_i\ne a_j$，于是此时 $b_{ij}=0$，由此可知 B 为对角形矩阵。

（3）设矩阵 A 可与所有同阶矩阵可交换，则由上一问的讨论，A 必为对角阵。故设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$。若 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 满足各个分量均不为零，由 $AB=BA$，结合上问结果可知对 $\forall 1\le i,j\le n$，有 $a_ib_{ij}=a_jb_{ij}$，此时必有 $a_i=a_j,\forall 1\le i,j\le n$，即 A 对角元素相等，此时 A 为数量阵。

而数量阵与全体同阶方阵可交换，因此方阵与所有同阶矩阵可交换当且仅当该方阵为数量阵。 □

注. 首先，讨论矩阵交换性时，最为纯朴的方法便是将**将矩阵设出来并直接做乘法运算比较系数**。大家可以体会下这个方法。

其次，（2）（3）两问结论本身很重要，所以大家需要**积累这两条结论和相应证明方法**。

习题 4.1.2. 试证：

（1）任一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和；

（2）如果 A 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则 $AB+BA$ 是反对称矩阵。

【证明】.（1）设 A 为 n 阶方阵，令 $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$，$C=\frac{1}{2}(A-A^T)$，于是 $B^T=\frac{1}{2}(A+A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T+A)=B$，$C^T=\frac{1}{2}(A-A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T-A)=-C$。于是 B 为对称矩阵，C 为反对称矩阵，且 $A=B+C$，即证。

（2）由于 A 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，于是 $A=A^T$，$B=-B^T$，而

$$(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=(-B)A+A(-B)=-(BA+AB)$$

因此 $AB+BA$ 为反对称矩阵。 □

注. 虽然将矩阵设出来直接进行运算是有利的，但结合**矩阵转置运算的性质**，本题在过程上可以大大简化。大家要学会适应这种写法。

习题 4.1.3. 设 A,B 均为 n 阶方阵且 $AB=BA$，求 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n$。

【证明】. 注意到

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & AB \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & BA \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}$ 乘法可交换。且 $\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}^2 = O_{2n}$，于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n &= \left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}^{n-k} \\ &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

注. 本题常见方法是找规律 + 数学归纳法。采用上述方法的同学一定要注意**严格落实数学归纳法的证明流程，不要遗漏要点**，否则可能会导致失分。

而上面的解答给出另外一种做法，上述做法需要**严格依赖 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}$ 乘法可交换的性质**，而这一部分的证明不可或缺。关于其具体论述，详见后文“要点与结论”。

习题 4.1.4. 求解矩阵方程 $A^*X = A^{-1} + 2X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

【解答】. 根据条件，有 $(A^* - 2I)X = A^{-1}$，因此 $X = (A^* - 2I)^{-1}A^{-1} = (AA^* - 2A)^{-1} = (|A|I - 2A)^{-1}$。

注意到 $|A| = 4$，故 $|A|I - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$。进一步可求得 $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$。 □

注. 本题错误率比较高，而上面的解答是一种计算比较简单的方法。而大家在计算时一定要注意行列式和矩阵在计算上的差异性，并且时刻小心。

习题 4.1.5. 证明：$(A^*)^T = (A^T)^*$，并且若矩阵 A 可逆，则 A^* 也可逆。

【证明】. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 为 A 的代数余子式，则 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$。

而考虑 $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其 (i, j) 元处对应的代数余子式为 $(-1)^{i+j}$ 与 A^T 去掉第 i 行第 j 列后行列式的值，将行列式取转置，即等于 A 去掉第 j 行第 i 列后行列式的值，因此所求代数余子式为 A_{ji}。

进而 $(A^T)^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A^*)^T$。

而若 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 且 $A^* = |A|A^{-1}$，于是 $A^* \cdot \dfrac{1}{|A|}A = I$，进而 A^* 可逆，其逆矩阵为 $\dfrac{1}{|A|}A$。 □

注. 本文中，有很多同学上来直接使用 $A^* = |A|A^{-1}$，但这一公式直接默认了 A 是可逆矩阵，而 A 的可逆性条件是在后续追加的，因此此时要对一般的矩阵 $|A|$ 做考虑。而本题过程叙述上需要格外注意，需要大家重点关注一下。

当然 $AA^* = |A|I$ 这一点能够直接使用。也希望大家借此思考一下 4.3 节习题第 9 题。

习题 4.1.6. 设 $n(n \geq 3)$ 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 $n-1$，求 a。

【解答】. 根据第三章的相关内容（请自行补充过程），可知 $|A| = (1+(n-1)a)(1-a)^{n-1}$。而若 $\text{rank}A = n-1$，则首先必有 $|A| = 0$，因此 $a = 1$ 或 $a = \dfrac{1}{1-n}$。

若 $a = 1$，则 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 1，矛盾。

若 $a = \dfrac{1}{1-n}$，则考虑 $|A|$ 的主子式 $M_{nn} = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (1+(n-2)a)(1-a)^{n-2} \neq 0$，因此其存在 $n-1$ 阶非零主子式，故 $\text{rank}A \geq n-1$。结合 $|A| = 0$ 知 $\text{rank}A \leq n-1$，因此 $\text{rank}A = n-1$。

于是 $a = \dfrac{1}{1-n}$ 即为所求。 □

注. 利用 4.5 节学过的矩阵的秩的第二种定义，我们可以将对秩的讨论与行列式联系起来，在一些场合下确实是有力的工具，所以对此不熟的同学需要加紧回顾。

另外，在否定了 $a = 1$ 不满足要求时没法直接得到 $a = \dfrac{1}{1-n}$，检验的步骤是必不可少的。

习题 4.1.7. 设 A 为 n 阶方阵，证明：

$$\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{rank}A = n \\ 1, & \text{rank}A = n-1 \\ 0, & \text{rank}A < n-1 \end{cases}$$

【证明】.（1）若 $\text{rank}A=n$，即 A 可逆，则 $|A|\neq 0$，进而 $A^*=|A|A^{-1}$ 为可逆矩阵，进而 $\text{rank}(A^*)=n$。

（2）若 $\text{rank}A=n-1$，则 $AA^*=|A|I=O$，因此 A^* 中每个列向量均在 $AX=0$ 的解空间中。而 $AX=0$ 解空间维数为 1，因此 $\text{rank}A^*\leq 1$。而由 $\text{rank}A=n-1$ 知其存在非零 $n-1$ 阶子式，因此 A^* 中存在非零元，进而 $\text{rank}A^*\geq 1$，于是必有 $\text{rank}A^*=1$。

（3）若 $\text{rank}A<n-1$，则 A 的每个 $n-1$ 阶子式都为 0，于是 A^* 中各个元素均为 0，故 $\text{rank}A^*=0$。 □

注. 对于本题，首先还是需要注意的是 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$ 这一结论的适用条件是 A **可逆**。但是对于 $\text{rank}(A)=n-1$ 时候的证明，我们仍然有 $AA^*=|A|I=O$，因此我们可以得到的是 $\text{rank}(A)+\text{rank}(A^*)\leq n$，这里需要特别注意**上式不能严格取等**，这一点从期中考试之前就在强调，有些人还是没有予以注意。而事实上说明 $\text{rank}(A^*)=1$ 还是出于 A 有 $n-1$ 阶非零子式。

4.2 补充练习

例 4.2.1 (基本计算：求解逆矩阵或求解矩阵方程). （1）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&2&0\\1&0&-2&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\-1&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使得 $AX=B$；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$，求 A^{-1}；

（3）已知 A 和 D 是可逆阵，求分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\O&D\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

例 4.2.2 (基本计算：矩阵的相抵标准型). 用初等行列变换将矩阵 A 化为相抵标准型 S，并求出使得 $PAQ=S$ 的可逆矩阵 P 和 Q，这里 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2&2\\2&1&3&4\\-1&1&-2&4\end{pmatrix}$。

例 4.2.3 (比较基本的计算：代数余子式与伴随矩阵). 回答如下问题：

（1）已知 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求 A^*；

（2）已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&2&\cdots&2\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，求 $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$。

（3）设 n 阶方阵 A 满足：每行元素之和为 c，并且 $|A|=d\neq 0$，试求 A 的所有代数余子式之和。

例 4.2.4 (基础矩阵). n **阶基础矩阵**是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\}$。这里 E_{ij} 可以看成是一个 n 阶矩阵，它的 (i,j) 元为 1，其余为 0。据此，回答如下问题

（1）若 $j\neq k$，则 $E_{ij}E_{kl}=O$；若 $j=k$，则 $E_{ij}E_{kl}=E_{il}$；

（2）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，则 $E_{ij}A$ 将 A 的第 j 行变为第 i 行，将其余元素变为 0；AE_{ij} 将 A 的第 j 列变为第 i 列，将其他元素变为 0；

（3）证明：$\{E_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\}$ 可以看成 n 阶矩阵全体所组成的线性空间的一组基，对于 $A=(a_{ij})$，试将其利用这组基线性表出；

（4）证明：n 阶矩阵 A 是反对称矩阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 α，均有 $\alpha^TA\alpha=0$；

（5）证明：设 A 是上三角矩阵且主对角线元素为 0，证明：$A^n=O$（提示：运用第 3 问结论，并借助前两问研究 A^k 的非零项满足什么条件）；

（6）借助基础矩阵证明：和所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵必为数量阵 kI_n。

例 4.2.5 (置换矩阵与循环矩阵). 回答如下问题：

（1）设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，求证：$A^k=\begin{pmatrix}O&I_{n-k}\\I_k&O\end{pmatrix}$ $(k=1,2,\cdots,n)$；

（2）下列形状的矩阵称为循环矩阵：

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}$$

证明：同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵。

例 4.2.6 (旋转矩阵). 回答如下问题：

（1）计算 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n$；

（2）是否存在实二阶方阵 A 使得 $A^2=-I$？如果存在，请给出。

例 4.2.7 (Jordan 形矩阵). 回答如下问题：

（1）计算 $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$；

（2）记 $J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$。对于 $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_k>0$ 与任意的正整数 m，计算 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}J_{n_1}(0)&&&\\&J_{n_2}(0)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{n_k}(0)\end{pmatrix}^m$。

（3）是否存在 5 阶方阵 A 使得 $A^3=O$ 但 $A^2\neq O$？若存在，请给出构造。

处理矩阵的常用方法

例 4.2.8 (矩阵的秩一分解). 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 1，求证：

（1）存在列向量 α、β 使得 $A=\alpha\beta^T$；

（2）（从本问到第四问，假设 A 为方阵）$A^2=(\mathrm{tr}A)A$，此处 $\mathrm{tr}A$ 为 A 的各个对角元之和，称为 A 的迹；

（3）求 $\begin{pmatrix}1&11&40\\-4&-44&-160\\3&33&120\end{pmatrix}^{2278}$；

（4）若存在 $k\geq 2$ 使得 $A^k=O$，证明：$A^2=O$；

（5）证明：秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和，但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和。

例 4.2.9 (矩阵的满秩分解). 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，且 $\mathrm{rank}A=r>0$，证明：存在 $B\in\mathbb{F}^{m\times r}$ 和 $C\in\mathbb{F}^{r\times n}$，且二者满足 $\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}C=r$，使得 $A=BC$。

例 4.2.10 (矩阵的迹). 回答如下问题：

（1）设 A,B 都是 n 阶方阵，则 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，且 $\forall s,t\in\mathbb{F},\mathrm{tr}(sA+tB)=s\mathrm{tr}(A)+t\mathrm{tr}(B)$；

（2）证明：不存在 n 阶矩阵 A,B，使得 $AB-BA=kI$，其中 $k\neq 0$；

（3）证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，证明：$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2=\mathrm{tr}(A^TA)$；

（4）设 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 n 阶实对称矩阵且 $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2=O$，证明：每个 $A_i=O$。

例 4.2.11 (伴随矩阵的相关讨论). 回答如下问题：

（1）设 A 是 n 阶方阵，$|A|=a\neq 0$，求 $(A^*)^*$ 和 $|(A^*)^*|$；

（2）已知 $A^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求 A；

（3）设 A,B 分别为 m,n 阶方阵，求分块对角矩阵 $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵。

例 4.2.12. 若 $A^2 = B^2 = I$，且 $|A| + |B| = 0$，证明：$A + B$ 必是可逆矩阵。

例 4.2.13 (用行列式研究矩阵). 回答如下问题：

（1）设 A, B 分别为 n, m 阶方阵，C 为 $m \times n$ 方阵，试探究 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}$ 与 $|A|$ 和 $|B|$ 的关系；

（2）设 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 以及 A、D 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的方阵，求证：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} |A||D - CA^{-1}B|, \text{当}A\text{可逆} \\ |D||A - BD^{-1}C|, \text{当}D\text{可逆} \end{cases}$$

同时，请自行探究 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 以及 B、C 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的方阵情况的类似结果。

例 4.2.14. 回答如下问题：

（1）设 A, B 是 n 阶矩阵，求证：$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = |A + B||A - B|$；

（2）设 A, B 是 n 阶矩阵且 $AB = BA$，求证：$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |A^2 + B^2|$。

例 4.2.15 (关于 $|I \pm AB|$ 型行列式). 回答如下问题：

（1）设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 阶矩阵，证明：$|I \pm AB| = |I \pm BA|$；

（2）计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & & 1 + a_nb_n \end{vmatrix}$；

（3）设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 阶矩阵，$I_n + AB$ 可逆，求证：$I_n + BA$ 也可逆；

（4）* 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ 证明：$\lambda^m |\lambda I_n \pm AB| = \lambda^n |\lambda I_m \pm BA|$；

（5）设 α、β 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列向量，$A = I + \alpha\beta^T$，其中 I 为 n 阶单位阵，β^T 为 β 的转置，试计算矩阵 A 的秩 $\operatorname{rank} A$；

（6）设 $\alpha = (1, 2, \cdots, 2277)^T$，$A = I + \alpha\alpha^T$，其中 I 为 2277 阶单位阵，求 $|A|$。

例 4.2.16 (矩阵的秩：常用结论). 回答如下问题：

（1）证明：$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$；

（2）证明：$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$；

（3）证明：$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$。

例 4.2.17 (几个常见的秩不等式及其应用). 回答如下问题：

（1）$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A + B)$；

（2）$\operatorname{rank}(A - B) \geq |\operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)|$；

（3）设 A 是 n 阶矩阵，证明：$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n + A) \geq n$。

例 4.2.18 (Sylvester 不等式). 回答如下问题：

（1）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times t$ 矩阵，求证：$\operatorname{rank}(AB)\geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$；

（2）设 A,B 是 n 阶方阵，证明：$|\operatorname{rank}(AB)-\operatorname{rank}(BA)|\leq \dfrac{n}{2}$。

例 4.2.19 (对合矩阵及其变种). 回答如下问题：

（1）设 $\mathbb{F}$ 是数域,I 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中的单位矩阵。又设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2=I$。定义 $\mathbb{F}^n$ 中的子空间 V_1,V_2 如下：$V_1=\{X\in\mathbb{F}^n|(A-I)X=0\}$,$V_2=\{X\in\mathbb{F}^n|(A+I)X=0\}$。证明: $V_1\oplus V_2=\mathbb{F}^n$；

（2）条件承上，证明: $\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A+I)=n$；

（3）设 a,b,c,d 是复数，A 是 n 阶方阵且 $ac\neq 0$，$ad\neq bc$，若 $(aA+bE)(cA+dE)=0$，证明：$\operatorname{rank}(aA+bE)+\operatorname{rank}(cA+dE)=n$。

例 4.2.20 (矩阵幂次的秩). 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，证明：

（1）存在 $m\in\mathbb{N}$，使得 $\operatorname{rank}(A^m)=\operatorname{rank}(A^{m+1})$；

（2）若 $\operatorname{rank}(A^m)=\operatorname{rank}(A^{m+1})$ 对某个正整数 m 成立，则 $\operatorname{rank}(A^m)=\operatorname{rank}(A^{m+k})$ 对任意正整数 k 成立；

（3）$\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+k}),\forall k\in\mathbb{N}$；

（4）若 $\operatorname{rank}(A^m)=\operatorname{rank}(A^{m+1})$ 对某个正整数 m 成立，则存在 n 阶方阵 B 使得 $A^m=BA^{m+1}$。

例 4.2.21 (多种方法解题). 回答如下问题：

（1）试通过矩阵的初等变换、线性方程组解空间理论和线性相关理论三种方法，证明不等式：$\operatorname{rank}(A+B)\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(AB)$，其中 A,B 均为 n 阶方阵；

（2）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，证明：$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leq\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$。

例 4.2.22 (刻画“同解”). 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times k$ 矩阵，证明方程组 $ABx=0$ 和方程组 $Bx=0$ 同解的充要条件是 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$。

例 4.2.23 (摄动法). 回答如下问题：

（1）设 A 是一个 n 阶方阵，求证：存在一个正数 a，使得对任意的 $0<t<a$，矩阵 tI_n+A 都是可逆阵。借助这一命题，我们知道，在一些问题的求解过程中，如果需要处理不可逆矩阵，我们可以利用摄动法划归到可逆矩阵情形，之后通过取极限得到不可逆情况结论成立，这就是**摄动法**的基本思想。下面是一些利用摄动法处理问题的例子；

（2）设 A,B 为 n 阶矩阵且 $AB=BA$，请先利用初等变换方法，证明：$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}=|A^2+B^2|$；

（3）设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵且 $AC=CA$，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$；

（4）设 A,B 为 n 阶方阵，证明：$(AB)^*=B^*A^*$；

（5）设 A,B,C 分别是 $n\times n,1\times n,n\times 1$ 矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：$\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & A \end{vmatrix}=-BA^*C$。

例 4.2.24. 判断题：

1. 若矩阵 A,B 的乘积 $AB=I_n$，其中 I_n 为 n 阶单位矩阵，那么 A,B 互为逆矩阵；

2. 奇数阶反对称矩阵不可逆；

3. 任一可逆矩阵必与初等矩阵乘法可交换；

4. 若干个初等矩阵的积必是可逆矩阵；

5. 两个初等矩阵的积仍是初等矩阵；

6. 两个同阶不可逆矩阵之积必是不可逆矩阵；

7. 两个同阶不可逆矩阵之和必是不可逆矩阵；

8. 设 A 经由一系列初等变换变为 B，则 $|A|=|B|$；

9. 存在两个秩为 2 的三阶方阵 A,B，使得 $AB=O$；

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关，A 与 X_i 可乘（$i=1,2,\cdots,n$），则 $AX_1,AX_2,\cdots,AX_n$ 可能线性相关。

例 4.2.25. 回答如下问题：

（1）设 $\mathbb{F}$ 是数域,I 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中的单位矩阵。又设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2=I$。证明: $\mathrm{rank}(A-I)+\mathrm{rank}(A+I)=n$；

（2）设 a,b,c,d 是复数，A 是 n 阶方阵且 $ac\neq 0$，$ad\neq bc$，若 $(aA+bE)(cA+dE)=0$，证明：$\mathrm{rank}(aA+bE)+\mathrm{rank}(cA+dE)=n$。

例 4.2.26. 设 $\mathbb{F}$ 是数域,在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中,令 E 为单位矩阵,并令 $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$,$K=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$。

（1）证明：E,I,J,K 为 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基；

（2）求 I^2,IK,JK 在基 E,I,J,K 下的坐标。

例 4.2.27. 设 A,B 为 n 阶方阵，证明：

（1）若 $AB=O$，则 $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\leq n$；

（2）若 $|A+B|\neq 0$，则 $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\geq n$。

例 4.2.28. 回答如下问题：

（1）设 V 是 $\mathbb{F}$ 上所有 4 阶反对称矩阵所构成的集合。若将 V 看作 $\mathbb{F}^{4\times 4}$ 的子空间，求 $\dim V$；

（2）考虑数域 $\mathbb{F}$ 上的非齐次线性方程组 $AX=B$，其中 A 为 4×6 矩阵，B 为 $\mathbb{F}^4$ 中的非零向量。已知 $\mathrm{rank}A=3$，求该线性方程组的解集生成的子空间的维数；

（3）考虑数域 $\mathbb{F}$ 上的非齐次线性方程组 $AX=B$，其中 A 为 4×6 矩阵，$X\in\mathbb{F}^6,B\in\mathbb{F}^4$ 为给定向量，且 X 非零。求所有满足条件的 A 所生成 $\mathbb{F}^{4\times 6}$ 的子空间的维数。

例 4.2.29. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times(n+1)}$，其中 $\mathbb{F}$ 是数域。已知 A 每一行元素之和等于 0，且 $\mathrm{rank}A=n$。证明：A 的所有 n 阶子式都不为 0。

4.3 要点与结论

4.3.1 矩阵乘法的交换性与二项式定理

矩阵是我们在数学学习中所接触到第一个**不满足乘法交换律**的代数对象（如果不来数院的话，很可能是唯一一个），因此在进行乘法和加法的混合运算时需要格外小心，例如 A,B 为同阶方阵，则

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

而事实上，若想让最后一个等号成立的话，需要满足 $AB=BA$，即 A,B **乘法可交换**。

而同样的，**当且仅当 A,B 乘法可交换时**，才有如下的**矩阵乘法的二项式定理**：

$$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-i}$$

大家可以找一找 A,B 为乘法不可交换的同阶方阵时的反例。

4.3.2 逆矩阵的求解策略

当我们求解一个矩阵的逆矩阵的时候，往往可以使用求解伴随矩阵和采用逆阵算法两种方式，如果采用求伴随矩阵的方式的话，一定要**注意各个代数余子式的正负性**，很多人因为没有考虑正负号招致错误；而采用逆阵算法的话，**在初等变换过程中建议把过程写的详细一些**，一来自己能够方便验算，二来出问题的时候也容易检查出毛病。这里特别强调一下出问题这件事，因为一般而言让你求一个逆矩阵的阶数往往不会太高，所以**把求得的逆矩阵和原矩阵乘一下验证验证往往没坏处**。同样的，不同情况下两种做法会有不同的优越性，例如伴随矩阵法在阶数较高的时候可能会面临极大的运算量。下面以习题 4.3 第一题的第 2 小题为例展示一下两种做法，大家注意比对计算量和运算方式，选择自己合适的做法。

【采用求伴随矩阵的求法】对矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{vmatrix}=2$，再考察代数余子式，我们有 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&-2\\-4&1\end{vmatrix}=-4$；$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-2\\5&1\end{vmatrix}=-13$；$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&4\\5&-4\end{vmatrix}=-32$；$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&-1\\-4&1\end{vmatrix}=2$；$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\5&1\end{vmatrix}=6$；$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\5&-4\end{vmatrix}=14$；$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix}=0$；$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\3&-2\end{vmatrix}=-1$；$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$；于是有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-\dfrac{13}{2}&3&-\dfrac{1}{2}\\-16&7&-1\end{pmatrix}$$

【采用逆矩阵的初等行变换算法】记 $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & & \\ 3 & 4 & -2 & & 1 & \\ 5 & -4 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$，对其做初等变换，我们有：$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & & \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & \\ 0 & -14 & 6 & -5 & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & & \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -15 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$，于是可以得到所求矩阵的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

当然了，对于第 4 小问，其采用逆矩阵算法效率会更高一点，答案为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}$。

4.3.3 广义逆与方程组求解

下面给出广义逆矩阵的一个应用，可以用我们之前学过的内容完全解决，希望大家有时间予以了结或掌握，选读内容可能作为附加题考察！

考虑 $m \times n$ 矩阵 A 的弱广义逆矩阵 A^-，其为矩阵方程 $AXA = A$ 的解，则有下列定理：

定理 4.3.1 (弱广义逆矩阵的存在性). 矩阵方程 $AXA = A$ 恒有解。具体而言，设 $\operatorname{rank} A = r$，而且 $A = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q$，其中 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，并且是取定的。则上述矩阵方程的解为

$$X = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n\times m} P^{-1}$$

其中 $B \in \mathbb{F}^{r\times(m-r)}, C \in \mathbb{F}^{(n-r)\times r}, D \in \mathbb{F}^{(n-r)\times(m-r)}$ 是任意的。

下面给出广义逆矩阵在线性方程组求解上的应用。

定理 4.3.2 (非齐次线性方程组的相容性定理). 方程 $AX = b$ 有解的充要条件是 $b = AA^-b$，其中 A 是 $m \times n$ 矩阵，b 是 $m \times 1$ 矩阵，X 是 $n \times 1$ 矩阵。

【证明】. 设方程 $AX = b$ 有解 X_0，则 $b = AX_0$，因此

$$AA^-b = AA^-(AX_0) = (AA^-A)X_0 = AX_0 = b$$

另一方面，设 $b = AA^-b$ 成立，则 $X_0 = A^-b$ 为 $AX = b$ 的解。 □

定理 4.3.3 (非齐次线性方程组解的结构定理). 设方程 $AX = b$ 有解，则它的通解为

$$X = A^-b + (I_n - A^-A)z$$

其中 A^- 是 A 的某个取定的弱广义逆矩阵，z 是 $n\times 1$ 矩阵。

【证明】. 因为 $AX=b$ 有解，则对某个取定的弱广义逆矩阵 A^-，有 $AA^-b=b$。取 $X=A^-b+(I_n-A^-A)z$，则

$$AX=AA^-b+A(I_n-A^-A)z=b+(A-AA^-A)z=b$$

即 $X=A^-b+(I_n-A^-A)z$ 时方程 $AX=b$ 的解。

反过来，设 X 满足 $AX=b$，取 $z=X$，则

$$A^-b+(I_n-A^-A)X=A^-AX+X-A^-AX=X$$

因此 $AX=b$ 的每个解均可表示为所说的形式，这就证明 $X=A^-b+(I_n-A^-A)z$ 是 $AX=b$ 的通解。 □

Chapter 5

多项式

5.1 习题解析

习题 5.1.1. 求多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)(x-1)^2+v(x)(x+1)^3=1$。

【解答】. 对 $(x-1)^2,(x+1)^3$ 做辗转相除法，有：

$$\begin{aligned}(x+1)^3&=(x+5)(x-1)^2+(12x-4)\\(x-1)^2&=\left(\frac{1}{12}x-\frac{5}{36}\right)(12x-4)+\frac{4}{9}\\12x-4&=\left(27x-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{4}{9}\end{aligned}$$

因此可知 $((x-1)^2,(x+1)^3)=1$。同时有

$$\begin{aligned}1&=\frac{9}{4}\left((x-1)^2-\left(\frac{1}{12}x-\frac{5}{36}\right)(12x-4)\right)\\&=\frac{9}{4}\left((x-1)^2-\left(\frac{1}{12}x-\frac{5}{36}\right)\left((x+1)^3-(x+5)(x-1)^2\right)\right)\\&=\left(\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{11}{16}\right)(x-1)^2+\left(-\frac{3}{16}x+\frac{5}{16}\right)(x+1)^3\end{aligned}$$

因此 $u(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{11}{16},v(x)=-\frac{3}{16}x+\frac{5}{16}$。 □

注. 本题需要大家利用辗转相除法去进行求解。一些人通过次数关系待定系数讨论，但这一方法有一些过程上的漏洞，用辗转相除法还是不会存在上述问题的。

习题 5.1.2. 设 $a\neq b$，证明多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+f(a)-a\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

【证明】. 设 $f(x)=q(x)(x-a)(x-b)+r(x)$，其中 $\deg r(x)<\deg(x-a)(x-b)$，因此 $\deg r(x)$ 只能取 0 或 1。

设 $r(x)=kx+m$。由于 $f(a)=r(a),f(b)=r(b)$，代入可得 $k=\frac{f(a)-f(b)}{a-b},m=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$，于是

$$r(x)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+f(a)-a\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

$\square$

注. 很多人直接设 $r(x) = kx + m$ 而未经任何说明，而这一点的依据是 $\deg r(x) < \deg (x-a)(x-b)$，需要补充说明。

习题 5.1.3. 设非零的实系数多项式 $f(x)$ 满足条件 $f(f(x)) = (f(x))^k$，其中 k 是给定的正整数，求 $f(x)$。

【解法一】. 若 $f(x)$ 为常数，则可得 $f(x) = 1$，否则设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，$d(x) = f(x) - x^k$。则 $d(f(x)) = f(f(x)) - (f(x))^k = 0$。我们证明 $d(x) = 0$ 从而 $f(x) = x^k$。

若不然，设 $d(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$，其中 $b_m \neq 0$，则

$$\begin{aligned} d(f(x)) =& b_m (f(x))^m + \cdots + b_1 f(x) + b_0 \\ =& b_m (a_n x^n + \cdots) + \cdots = b_m a_n^m x^{nm} \end{aligned}$$

有最高次项 $= b_m a_n^m x^{nm} \neq 0$，与 $d(f(x)) = f(f(x)) - x^k = 0$ 矛盾。

这就证明了 $d(x) = 0$，进而 $f(x) = x^k$ 或 $f(x) = 1$。 $\square$

【解法二】. 若 $f(x)$ 为常数，则可得 $f(x) = 1$，否则设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，则由 $f(f(x)) = (f(x))^k$，得 $a_n(a_n x^n + \cdots)^n + \cdots = (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)^k$。比较首项，左侧为 $a_n^{n+1} x^{n^2}$，右侧为 $a_n^k x^{nk}$。因此有 $\begin{cases} a_n^{n+1} = a_n^k \\ n^2 = nk \end{cases}$，从而得 $\begin{cases} a_n = 1 \\ n = k \end{cases}$。

于是 $f(x)$ 可写成 $f(x) = x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，根据条件，我们有 $(f(x))^k + a_{k-1}(f(x))^{k-1} + \cdots + a_1(f(x)) + a_0 = (f(x))^k$，即 $a_{k-1}(f(x))^{k-1} + \cdots + a_1(f(x)) + a_0 = 0$。左侧最高次项为 $a_{k-1} x^{k(k-1)}$，故系数 $a_{k-1} = 0$，以此类推，可得 $a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_0 = 0$。于是我们有 $f(x) = x^k$ 或 $f(x) = 1$。 $\square$

【解法三】. 前面做法类同于解法一，我们可以得到 $d(f(x)) = 0$，即 $d(y) = 0$ 对所有的 $y = f(x)$ 成立。

如果存在无穷多个 y，使得 $d(y) = 0$，则 $d(x) = 0$ 有无穷多个根，必然为零多项式。而事实上，因为 $f(x)$ 不为常数，可知其必存在不为零的最高次项系数。进而令 $x \to \infty$，则可得 $y \to \infty$，因此我们必然能找到无穷个 y，进而可以得到 $d(x) = 0$，从而 $f(x) = x^k$。 $\square$

注. 本题并没有留做作业，但方法上还是比较重要的。这道题而言，首先一个问题是常数多项式的处理。在李尚志《线性代数学习指导》中的解答予以忽略，但是很多同学注意到讨论，这点很不错。但是，我们需要注意，当 $f(x) = -1$ 时，$f(f(x)) = f(-1) = -1$，而并非等于 1，这一问题在个别同学的作业中有所出现，还是需要注意的。

另外，一些同学可能会采用解法三或类似做法，却仅仅在得到 $d(y) = 0$ 时直接以 x 代 y 得到结果。而并没有意识到y 的取值其实是受到 $f(x)$ 所限制的，对于值域外的点是不一定有类似结论的。所以解法三才会对这种情况进行进一步地说明，这点请大家注意。

习题 5.1.4. 设 $\mathbb{F}[x]$ 中的两个次数大于 0 的多项式 $f(x), g(x)$ 互素，求证：存在唯一一组 $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$，使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$，且 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$。

【证明】. 由 $(f(x),g(x))=1$，知存在 $\mathbb{F}[x]$ 中的多项式 $h(x),w(x)$，使得

$$h(x)f(x)+w(x)g(x)=1$$

设 $h(x)$ 被 $g(x)$ 除的商为 $q(x)$，余式为 $u(x)$，则将上式同 $q(x)g(x)f(x)-q(x)g(x)f(x)=0$ 相减，得到

$$(h(x)-q(x)g(x))f(x)+(w(x)+q(x)f(x))g(x)=1$$

将 $u(x)=h(x)-q(x)g(x)$ 代入，并记 $v(x)=w(x)+q(x)f(x)$，得到

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

其中 $u(x)$ 的次数 $\deg u(x)<\deg g(x)$，且由 $v(x)g(x)=1-u(x)f(x)$ 知

$$\deg v(x)+\deg g(x)=\deg v(x)g(x)=\deg u(x)f(x)=\deg u(x)+\deg f(x)<\deg g(x)+\deg f(x)$$

于是 $\deg v(x)<\deg f(x)$，存在性即证。

如果还有 $u_1(x),v_1(x)$ 满足条件 $\deg u_1(x)<\deg g(x),\deg v_1(x)<\deg f(x)$ 及 $u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$，则有

$$(u(x)-u_1(x))f(x)=(v_1(x)-v(x))g(x)$$

此时 $g(x)|(u(x)-u_1(x))f(x)$，再由 $f(x),g(x)$ 互素得到 $g(x)|(u(x)-u_1(x))$，由于 $u(x)$，$u_1(x)$ 的次数都低于 $g(x)$ 的次数，故它们的差 $u(x)-u_1(x)$ 不为 0 时次数必然低于 $g(x)$，不可能被其整除，因此必有 $u(x)-u_1(x)=0$，进而 $u(x)=u_1(x)$，$v(x)=v_1(x)$，唯一性即证。 □

注. 这道题需要分为两个步骤，一是证明存在性，二是证明唯一性。当然唯一性的证明方法比较简单，如果大家实在想不出存在性的证明过程的时候也一定要把相对简单的唯一性部分写下来，这样会帮助你在考试中拿到更多的给分点。

此外，对于存在性，证明方法有很多种，有些同学通过**辗转相除法**的过程进行证明，有些同学同时对 h 和 w 同时进行带余除法并带入，这些思路当然也是行的通的，但具体细节还是非常复杂的，而很多人给出的证明是不完全的。

另外，这一结论还有在初等数论中的版本，大家可以自行探究。

习题 5.1.5. 设多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$ 的最大公因式等于 1，$A\in\mathbb{F}^{n\times n},X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$。求证：若 $f_i(A)X=O$ 对 $1\le i\le k$ 成立，则 $X=O$。

【证明】. 由于 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$ 的最大公因式等于 1,则存在 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x)$，使得

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_k(x)f_k(x)=1$$

于是有

$$I=u_1(A)f_1(A)+\cdots+u_k(A)f_k(A)$$

两边右乘 X，并结合条件，得

$$X=u_1(A)f_1(A)X+\cdots+u_k(A)f_k(A)X=O$$

由此，即证。 □

注. 这种多项式和矩阵相结合的题目是考试的一个重点，请大家一定要予以重视。

习题 5.1.6. 用因式分解定理证明 x^4-10x^2+1 在有理数域上不可约。

【证明】. 我们先将多项式 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 在复数域上分解，得到

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4-10x^2+25)-24=(x^2-5)^2-(2\sqrt{6})^2 \\ &= (x^2-5-2\sqrt{6})(x^2-5-2\sqrt{6}) \\ &= (x^2-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x^2-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x^2+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

此时 $f(x)$ 被分解成为了 4 个一次因式的乘积，而如若 $f(x)$ 在有理数域上可约，则其可以分解为有理数域上两个至少 1 次多项式 $f_1(x),f_2(x)$ 的乘积。不妨设 $1\le \deg f_1(x)\le \deg f_2(x)$，则由 $\deg f_1(x)+\deg f_2(x)=4$ 知 $\deg f_1(x)$ 只能取 1 或 2。

由实数域上因式分解的唯一性知，对 $f_1(x),f_2(x)$ 在实数域上分解，可以得到上述 4 个因式的乘积。因此 $f_1(x),f_2(x)$ 均是某些一次因式的乘积。

而由于 $f(x)$ 的每个根都是无理数，因此 $f_1(x)$ 不可能为 1 次，只能是 2 次，其等于某两个 $x-\alpha_i,x-\alpha_j$ 的乘积（其中 $\alpha_i,\alpha_j\in\{\pm(\sqrt{2}\pm\sqrt{3})\}$），此时必有

$$f_1(x)=x^2-(\alpha_i+\alpha_j)x+\alpha_i\alpha_j$$

其系数 $-(\alpha_i+\alpha_j)$ 和 $\alpha_i\alpha_j$ 均为有理数，但 4 个根中能够使得 $-(\alpha_i+\alpha_j)$ 为有理数的 α_i,α_j 必满足 $\alpha_i+\alpha_j=0$，此时 $\alpha_i\alpha_j=5\pm2\sqrt{6}$，并不为有理数。这就证明了 $f(x)$ 在有理数域上不可约。 □

注. 本题最关键的问题是**因式分解唯一性定理的使用**。很多同学并不能利用好这一分解定理，而是做一些没有因果关系的说明甚至试图以之跳过证明步骤。事实上，因式分解唯一性和所考察的数域有着很大的关系。一些同学中的解答出现了**由因式分解唯一性定理知，该分解式（指在 $\mathbb{R}$ 上的分解）式是唯一的，而 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$，故其在 $\mathbb{Q}$ 上的分解式是唯一的**。事实上，虽然唯一性能够保证，但是其在 $\mathbb{Q}$ 上分解式出现了若干无理数是不是比较奇怪？总之这部分有错误被圈出来的同学建议回去好好回顾一下定理。

当然事实上，如果大家跳出因式分解定理这一指示，其实很容易能想到将这个 4 次因式强行分解并任意做组合进行讨论，这也是上述解答的处理方式。因式分解定理仅仅是保证这种分解的唯一性，从而避免了**出现另外一种分解甚至导致在这种分解下能组合出有理系数多项式来**的情况，仅限于此。

习题 5.1.7. 证明：如果 $(x-1)|f(x^n)$，则 $(x^n-1)|f(x^n)$。

【证明】. 由于 $(x-1)|f(x^n)$，故存在 $h(x)$ 使得 $f(x^n)=h(x)(x-1)$，令 $x=1$，有 $f(1)=0$，于是存在 $g(x)$ 使得 $f(x)=(x-1)g(x)$，进而 $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)$，于是 $(x^n-1)|f(x^n)$。 □

习题 5.1.8. 证明：（1）$1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。

（2）如果 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\sqrt[3]{2}\omega$ 和 $\sqrt[3]{2}\omega^2$ 也为 $f(x)$ 的根，其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

【证明】.（1）若 $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上线性相关，则存在不全为零的 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ 使得 $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \sqrt[3]{2} + \lambda_2 \sqrt[3]{4} = 0$，从而 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数非零多项式 $g(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0$ 的根。

另一方面，$\sqrt[3]{2}$ 是 $m(x) = x^3 - 2$ 的根，因此是 $m(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根，进而是二者的最大公因式 $d(x)$ 的根。此时 $d(x)$ 是有理系数多项式，次数不大于 2。

若 $\deg d(x) = 1$，其唯一的有理根必为有理数，$\sqrt[3]{2}$ 不可能为其根，矛盾。若 $\deg d(x) = 2$，则 $d(x)$ 除 $x^3 - 2$ 的 $q(x)$ 是有理系数一次多项式，有唯一的有理根 α，此时 α 为 $x^3 - 2$ 的根，矛盾。

综上，$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。

（2）对 $f(x)$ 关于 $x^3 - 2$ 做带余除法，设 $r(x) = f(x) - q(x)(x^3 - 2)$，其中 $\deg r(x) < \deg(x^3 - 2)$，进而 $\deg r(x) \leq 2$。由于 $\sqrt[3]{2}$ 是 $f(x)$ 和 $m(x) = x^3 - 2$ 的公共根，因此有 $r(\sqrt[3]{2}) = 0$，而由（1）知必有 $r(x) = 0$，于是 $x^3 - 2 | f(x)$，进而 $x^3 - 2$ 的根均为 $f(x)$ 的根，从而 $\sqrt[3]{2}\omega$ 和 $\sqrt[3]{2}\omega^2$ 也为 $f(x)$ 的根。 □

注. 在本题中，$x^3 - 2$ 作为“以 $\sqrt[3]{2}$ 为根的‘最小’的多项式”，发挥了重要的作用。而这也为我们提供了一种处理含有非有理数根的有理系数多项式的解决方案。

习题 5.1.9. 整系数多项式 $f(x)$ 是否能同时满足 $f(10) = 10, f(20) = 20, f(30) = 40$。

【解答】. 整系数多项式不能满足这一条件，下面对这一断言进行证明：

对于 $f(x)$ 而言，我们有如下的**余数定理**

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)$$

亦即 $f(x) - f(a) = q(x)(x - a)$ 对于任意的 $b \in \mathbb{Z}$，我们有 $f(b) - f(a) = q(b)(b - a)$，即 $(b - a) | f(b) - f(a)$

若有整系数多项式满足上述条件，则 $f(30) - f(10) = 30$ 应该被 20 整除，这就导致矛盾，因此不存在这样的整系数多项式。 □

注. 一些同学在这道题中采用了有理根存在定理进行证明，这一方法是能够做出的，但是一定要注意**论证的严谨性**，很多同学列出相应不定方程仅仅通过作图甚至直接说明结论是远远不够的，还需要进行进一步说明。

而这里还是想要为大家强调一下余数定理的重要性和优越性。其在代数学、密码学等方向都有一些至关重要的应用。而且结合我个人的学习经验来看这个定理也非常容易被大家忽略，所以特地把这个解答拉出来，为大家强调一下。

5.2 补充练习

例 5.2.1. 给定正整数 $k \geq 2$，求非零的实系数多项式 $f(x)$ 满足条件 $f(x^k) = (f(x))^k$。

例 5.2.2. 证明：如果 $f(x), g(x)$ 不全为零，且

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$$

那么 $(u(x), v(x)) = 1$。

例 5.2.3. 证明：$(f(x),g(x))=1$ 的充分必要条件是对任意正整数 m,n，有 $(f(x)^m,g(x)^n)=1$。

例 5.2.4. 设 $\mathbb{F}[x]$ 中的两个次数大于 0 的多项式 $f(x),g(x)$ 互素，求证：存在唯一一组 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，且 $\deg u(x)<\deg g(x),\deg v(x)<\deg f(x)$。

例 5.2.5. 求次数最低的多项式 $f(x)$，使得它被 x^3 除的余式为 x^2+2x+3，被 $(x-3)^2$ 除的余式为 $3x-7$。

例 5.2.6. 设多项式 $f_1(x),\cdots,f_k(x)$ 的最大公因式等于 1，$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，$X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$，求证：如果 $f_i(A)X=O$ 对 $1\le i\le k$ 成立，则 $X=O$。

例 5.2.7. 设 $f(x),g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式，A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，证明：$f(A)g(A)=O$ 的充要条件是 $\operatorname{rank}(f(A))+\operatorname{rank}(g(A))=n$。

例 5.2.8. 证明：x^4-10x^2+1 在有理数域上不可约。

例 5.2.9. 设 $f(x)=x^5+x^4+x+1$，$g(x)=x^3-x$，求 $(f(x),g(x))$，并求一组 $u(x),v(x)\in\mathbb{R}[x]$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

例 5.2.10 (多项式在不同数域下的因式分解). 求 $f(x)=x^{12}+1$ 在实数域、复数域、有理数域上的标准分解式。

例 5.2.11 (有理根定理的应用). 求多项式 $4x^4-7x^2-5x-1$ 的所有有理根。

例 5.2.12 (关于重根的探讨). 设多项式 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根，求 t。

例 5.2.13 (艾森斯坦判别法的应用). 证明：多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 5.2.14. 设 $m<n$ 且均为正整数，证明：$(x^m-1)|(x^n-1)$ 的充分必要条件是 $m|n$。

例 5.2.15 (导数与重根). 设 $f(x)$ 是 3 次实多项式，满足 $(x-1)^2|f(x)+1$，$(x+1)^2|f(x)-1$，求 $f(x)$。

例 5.2.16. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的非零多项式，且 $f(x)g(x)+f(x)+g(x)$ 不可约，求 $(f(x),g(x))$。

例 5.2.17 (多项式与矩阵). 设 $f(x),g(x)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式，$A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 满足 $f(A)g(A)=0$。设 V_1,V_2 分别为 $f(A)X=0$ 和 $g(A)X=0$ 的解空间，证明：$\mathbb{K}^n=V_1\oplus V_2$。

例 5.2.18. 设 $f_k(x)(1\le k\le n)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式，证明：对任意 n 个数 $x_1,\cdots,x_n$，有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1)\\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}=0$$

5.3 要点与结论

5.3.1 算术基本定理的叙述

下面给出算术基本定理的叙述，习题 5.3 第 3 题有涉及算术基本定理的内容，可能考察。希望大家至少记住第一条结论!!

定理 5.3.1 (算术基本定理). 设 N 为大于 1 的正整数，则存在唯一的一组素数 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ 和 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 1$，使得 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$。此时上式称为 N 的标准分解式。

下面我们将这一结论向整环（无零因子的交换幺环）上推广。

设 R 为整环，对 $a, b \in R$，若存在 $c \in R$ 使得 $a = bc$，则 b 为 a 的一个因子，记为 $b|a$。若 $b|a$ 且 $a|b$，则称 a 和 b相伴，记为 $a \sim b$。

设 $a \in R$ 不是零或可逆元，若 $a = bc$ 可推出 $b \sim a$ 或 $b \sim 1$，则称 a 是一个不可约元（此时 a 的因子必为可逆元或可逆元同 a 的积）；设 $a \in R$ 不是零或可逆元，若 $a|bc$ 可推出 $a|b$ 或 $a|c$，则称 a 是一个素元。

若对于 R 上的任一因子降链：$a_1, a_2, \cdots$，其中 $a_{n+1}|a_n, \forall n = 1, 2 \cdots$，均存在一个正整数 m 使得

$$a_m \sim a_{m+1} \sim a_{m+2} \sim \cdots$$

则称 R 满足因子链条件。

下面给出唯一因子分解整环的定义：

定义 5.3.1 (唯一因子分解整环). 设 R 是一个整环，若 R 满足下列两条件，则 R 叫做一个唯一因子分解整环。

（1）R 的每个非零不可逆元 a 恒可谢伟有限多个不可约元的乘积 $a = p_1 p_2 \cdots p_r$；

（2）上述分解在相伴意义下是唯一的，即若元素 a 有两种分解 $a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$，则 $r = s$ 且适当改变 q_i 的下标可使得 $p_i \sim q_i, i = 1, 2, \cdots, r$。

而下面一个定理给出了一个唯一因子分解整环的必要条件，且较为常用：

定理 5.3.2 (非齐次线性方程组的相容性定理). 设整环 R 满足条件：（1）因子链条件；（2）每个不可约元为素元。则 R 是一个唯一因子分解整环。

Chapter 6

线性变换

6.1 习题解析

习题 6.1.1. 设 V 是 n 维线性空间，σ 是 V 的线性变换，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的基。证明：σ 是可逆线性变换 $\Leftrightarrow\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 是 V 的基。

【证法一：直接对 V 中的向量进行操作】. 先证必要性：若存在 $k_1,\cdots,k_n$ 使得 $k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)=0$，则有 $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n)=0$。由于 σ 可逆，故两边同时作用 σ^{-1}，得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\sigma^{-1}(\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n))=0$$

再由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基知其线性无关，于是必有 $k_1=\cdots=k_n$ 线性无关，于是 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 线性无关，为 n 维线性空间 V 的一组基。

再证充分性：由于 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 是 V 的基，故 $\forall\alpha\in V$，存在唯一的 $l_1,\cdots,l_n$，使得 $\alpha=l_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+l_n\sigma(\alpha_n)$。此时定义 $\tau(\alpha)=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$，则其为 V 到自身的映射，同时保持线性运算**【这两点考试时需要大家自行验证】**。最后验证 $\forall\alpha\in V$，$\sigma\tau(\alpha)=\alpha$，因此 σ 为可逆线性映射，τ 为其逆映射。 □

【证法二：借助坐标表示转化到数组向量空间讨论】. 先证必要性：由于 σ 为可逆线性映射，则其在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的矩阵 A 为可逆矩阵。此时 $\forall 1\le k\le n$，$\sigma(\alpha_k)$ 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标即为 A 的第 k 列 A_k。由 A 可逆知 $A_1,\cdots,A_n$ 线性无关。

再注意到V 中向量在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标表示可视为 V 到 n 维数组向量空间的同构映射，因此 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 线性无关，为 n 维线性空间 V 的一组基。

再证必要性：设 A 为 σ 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的矩阵，则有

$$(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

此时 A 的第 k 列 A_k 为 $\sigma(\alpha_k)$ 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标。由于 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}$ 线性无关，因此其在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标 $A_1,\cdots,A_n$ 也线性无关。于是 A 为可逆矩阵，进而 σ 为可逆映射。 □

注. 在处理线性映射或线性变换时，你可以在原有的抽象线性空间上进行操作，也可以借助坐标表示将问题转化到数组向量空间中去。

但需要注意的是语言的规范型，在原有的线性空间中，我们需要“对向量作用映射”，而转化到数组向量空间后，我们需要“对坐标左乘矩阵”。在解决问题时大家一定要注意自己是在哪里进行的讨论，从而采用更严谨的叙述方式。

习题 6.1.2. 设三维向量空间 V 上线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$。求 σ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵。

【解答】. 注意到：

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon_3)=a_{13}\varepsilon_1+a_{23}\varepsilon_2+a_{33}\varepsilon_3 \\ \sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+a_{32}\varepsilon_3 \\ \sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+a_{31}\varepsilon_3 \end{cases}$$

因此在形式上，有如下的矩阵表示

$$(\sigma(\varepsilon_3),\sigma(\varepsilon_2)\sigma(\varepsilon_1))=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

因此其在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$。 □

注. 对于基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 而言，线性变换 σ 在这组基下的矩阵有表示：

$$(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

其中，左侧的 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 和右侧的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$顺序是彼此对应的。而本题出错的同学便是因为没有严格把握这种对应关系。

习题 6.1.3 (P201 Ex1). 已知 $\mathbb{R}^3$ 上的两组基 $M_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$M_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$；$\beta_1=(1,1,2),\beta_2=(2,1,3),\beta_3=(4,3,8)$

（1）求基 M_1 到 M_2 的过渡矩阵；

（2）分别求向量 $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2-4\alpha_3$ 在基 M_1 和 M_2 下的坐标；

（3）$\mathbb{R}^3$ 的线性变换 σ 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别映到 β_1,β_2,β_3，分别求 σ 在两组基下的矩阵。

【解答】.（1）根据过渡矩阵定义，有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，将其中的向量 α_i,β_i 分别写成坐标形式，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}P$$

解得

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{7}{3} \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

（2）$\alpha=\alpha_1+3\alpha_2-4\alpha_3$ 在 M_1 下的坐标 $X=(1,3,-4)^T$，在 M_2 下的坐标 Y 满足坐标变换公式 $X=PY$，从而 $Y=P^{-1}X=(17,3,-5)^T$。

（3）在基 M_1 下，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标分别为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，而由 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$ 知 β_1,β_2,β_3 在 M_1 的坐标为 P 的各列（看成矩阵乘法，找 β_i 在 α_i 下的系数）。设 σ 在基 M_1 下的矩阵为 A，则有 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，于是

$$A=P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}&-1&-\frac{7}{3}\\1&3&6\end{pmatrix}$$

同样，在基 M_2 下，β_1,β_2,β_3 的坐标分别为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，而由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}$ 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在 M_2 的坐标为 P^{-1} 的各列。设 σ 在基 M_2 下的矩阵为 B，则有 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，于是

$$P^{-1}B=I\Rightarrow B=P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}&-1&-\frac{7}{3}\\1&3&6\end{pmatrix}$$

□

注. 但实际上第（3）问的过程完全就是严格按照线性变换在基下的矩阵进行处理的。只是在寻找不同向量在基下的坐标的时候，直接利用过渡矩阵去进行研究和说明的。大家可以再做进一步体会，从而加深对问题的理解。

这里还需要强调的是，在表达向量被线性变换作用的时候。线性变换和向量是一体的，而在基取定时，线性变换在相应基下的矩阵和向量在基下的坐标是一体的。线性变换 σ 只能作用于向量 α，而不能作用于一个坐标。坐标只能被对应矩阵左乘或者右乘，这点一些同学可能引起了一些混淆，还需要进行进一步的体会。

习题 6.1.4 (P205 Ex1). 设线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&9&-6\\2&-6&4\end{pmatrix}$。

（1）求 $\mathrm{Ker}\sigma$ 和 $\mathrm{Im}\sigma$；

（2）将 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基扩充为 V 的一组基 M_1，求 σ 在 M_1 下的矩阵。

【解答】.（1）注意到方程 $AX=0$ 的解空间为 $\{(3c_1-2c_2,c_1,c_2)|c_1,c_2\in\mathbb{F}\}$，因此 $\mathrm{Ker}\sigma$ 中的向量在基 M 下的坐标均具有上述形式，于是有

$$\mathrm{Ker}\sigma=\{(3c_1-2c_2)\alpha_1+c_1\alpha_2+c_2\alpha_3|c_1,c_2\in\mathbb{F}\}$$

A 的第 1 列 $(1,-3,2)^T$ 构成列向量组的极大无关组，其生成列向量空间。而 $\mathrm{Im}\sigma$ 在 M 下的坐标均落入这一列向量空间中，因此

$$\mathrm{Im}\sigma=\{c\alpha_1-3c\alpha_2+2c\alpha_3|c\in\mathbb{F}\}$$

（2）注意到 $\beta_1=3\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=-2\alpha_1+\alpha_2$ 为 $\mathrm{Ker}\sigma$ 一组基，扩充 $\beta_3=\alpha_1$ 为 V 的一组基 $M_1=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，则 M 到 M_1 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\sigma$ 在 M_1 下的矩阵

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&0&2\\0&0&14\end{pmatrix}$$

□

注. 对于第（1）问，需要大家熟悉线性映射像空间、核空间与矩阵列空间、方程组解空间之间的对应关系。从而能实现线性空间抽象向量和基下的坐标表示间的联系。

而对于第（2）问，由于将 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基扩充为 V 的一组基的方法不唯一，因此所得到的矩阵也不唯一。但需要注意的是，扩充的基 M_1 中有两个向量来自 $\mathrm{Ker}\sigma$，因此 σ 在这组基下的矩阵一定有两列为零向量。

习题 6.1.5. 设 $\sigma:U\to V$ 是有限维线性空间之间的线性映射，W 是 U 的子空间，求证

$$\dim\sigma(W)\geq\dim W-\dim U+\mathrm{rank}\sigma$$

【证明】. 定义 W 到 U 的映射 $\sigma|_W:W\to U,\alpha\mapsto\sigma(\alpha)$，称为 σ 在 W 上的限制，$\sigma|_W$ 的象和核同样满足维数定理

$$\dim\mathrm{Ker}\sigma|_W=\dim W-\dim\mathrm{Im}\sigma|_W$$

其中 $\mathrm{Im}\sigma|_W=\sigma(W)$，且 $\mathrm{Ker}\sigma|_W=\mathrm{Ker}\sigma\cap W\subset\mathrm{Ker}\sigma$，因此

$$\dim\mathrm{Ker}\sigma\geq\dim\mathrm{Ker}\sigma|_W=\dim W-\dim\sigma(W)$$

代入即有 $\dim V-\mathrm{rank}\sigma\geq\dim W-\dim\sigma(W)$。整理即可得所求结论。 □

注. 线性映射在某个子空间的限制其实是将定义域局限在这个子空间当中。之后便是一些关于像与核维数定理的应用，这一手法比较常规且常用，建议大家掌握。

习题 6.1.6. 已知 V 的线性变换 σ 满足 $\sigma^2=\sigma$，证明：

（1）$V=\mathrm{Im}\sigma\oplus\mathrm{Ker}\sigma$；

（2）σ 在任何一组基下的矩阵 A 满足 $\mathrm{rank}A=\mathrm{tr}A$；

（3）在适当的基下将 V 的向量用坐标表示，可以使 σ 具有投影变换的形式

$$\sigma:(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)$$

【证明】.（1）设 $\alpha\in\mathrm{Im}\sigma\cap\mathrm{Ker}\sigma$，则由于 $\alpha\in\mathrm{Ker}\sigma$，故存在 $\beta\in V$ 使得 $\alpha=\sigma(\beta)$，再由 $\alpha\in\mathrm{Ker}\sigma$ 知 $\sigma(\alpha)=0$，于是

$$\alpha=\sigma(\beta)=\sigma^2(\beta)=\sigma(\sigma(\beta))=\sigma(\alpha)=0$$

这证明了 $\mathrm{Im}\sigma+\mathrm{Ker}\sigma=\mathrm{Im}\sigma\oplus\mathrm{Ker}\sigma$，再由 $\dim\mathrm{Im}\sigma+\dim\mathrm{Ker}\sigma=\dim V$，因此有 $V=\mathrm{Im}\sigma\oplus\mathrm{Ker}\sigma$。

（2）由 $V = \mathrm{Im}\sigma \oplus \mathrm{Ker}\sigma$ 知 $\mathrm{Im}\sigma$ 的任意一组基 $S_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ 与 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基 $S_0 = \{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 的并集 $M_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 是 V 的一组基，其中每个 β_j 满足 $\sigma(\beta_j) = 0$，且每个 α_i 都可以写成 $\alpha_i = \sigma(\gamma_i)$ 的形式，于是 $\sigma(\alpha_i) = \sigma^2(\gamma_i) = \sigma(\gamma_i) = \alpha_i$ 在基 M 下的坐标为 e_i，于是 σ 在基 M_i 下的矩阵

$$A_1 = (e_1, \cdots, e_r, 0, \cdots, 0) = \begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

满足 $\mathrm{tr}A_1 = r = \mathrm{rank}A_1$。

σ 在任意一组基 M 下的矩阵为 $A = P^{-1}A_1P$，其中可逆方阵 P 是 M_1 到 M 的过渡矩阵，我们有 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(P^{-1}A_1P) = \mathrm{rank}A_1$，因而

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}A_1P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A_1)) = \mathrm{tr}A_1 = \mathrm{rank}A_1 = \mathrm{rank}A$$

（3）按照上一问中的方式将 $\mathrm{Im}\sigma$ 的基后面添加 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的基组成 V 的基 M_1，则 σ 在这组基下的矩阵是对角阵 $A_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$。此时，坐标为 $X = (x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)^T$ 的向量被 σ 映到向量的坐标为 $AX = (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)^T$，其具有所要求的投影变换形式。 □

注. 本题对满足 $\sigma^2 = \sigma$ 的线性变换 σ 做了具体的讨论。其中前两问的手法是常用的，而第三问结论本身比较有趣，可以从几何直观上帮助大家理解这一类型的变换。

需要注意的是，第（2）问需要证明对任意一组基，σ 在其下的矩阵都满足 $\mathrm{rank}A = \mathrm{tr}A$，很多人仅证明了存在一组基使得在这组基下的矩阵满足这一性质。

习题 6.1.7. 回答如下问题：

（1）求证：

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

可以写成关于 $A = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ 的多项式形式。

（2）利用 A 的对角化将 B 相似于对角矩阵 D。

（3）利用 D 的行列式求 B 的行列式。

【解答】.（1）根据数学归纳法，可证明 $\forall 1 \le k \le n-1$，有 $A^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$，于是：

$$B = a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + \cdots + a_n A^{n-1}$$

即令 $f(\lambda) = a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_n\lambda^{n-1}$，则 $B = f(A)$。

（2）注意到 A 的特征多项式为：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n - 1$$

其有 n 个不同的根 $\omega^k(0 \le k \le n-1)$，其中 $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。此时 $P_i = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \cdots, \omega^{(n-1)k})^T$ 是属于特征值 ω^k 的特征向量。

取 $P = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})$，则 $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1})$ 为对角阵。此时

$$P^{-1}BP = P^{-1}f(A)P = f(D) = \mathrm{diag}(f(1), f(\omega), f(\omega^2), \cdots, f(\omega^{n-1}))$$

为对角阵，f 的定义在第（1）问中已给出。

（3）注意到

$$\begin{aligned} |B| &= |P^{-1}f(D)P| = |f(D)| = f(1)f(\omega)f(\omega^2)\cdots f(\omega^{n-1}) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2\omega + \cdots + a_n\omega^{n-1})\cdots(a_1 + a_2\omega^{n-1} + \cdots + a_n\omega^{(n-1)^2}) \end{aligned}$$

□

注. 题述类型的矩阵已经在上学期详细研究过，所以大家处理本题时如果感觉生疏，很有可能是前面的知识已经忘却，需要尽快复习。此外，本题需要在复数域上求特征根，用到了单位根的相关知识。没有掌握的同学也需要抓紧复习。

本题结论比较重要且考试爱考，所以还是希望各位重视起来！

习题 6.1.8. 设 A 是可逆矩阵，证明：

（1）A 的特征值一定不为 0；

（2）若 λ 是 A 的特征值，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，且 A 与 A^{-1} 的特征向量相同。

【证明】.（1）若 A 有特征值 0，设其关于特征是 0 的一个特征向量为 X，则有 $AX = 0$，且 $X \neq 0$，这与 A 可逆矛盾，因此特征值一定不为 0。

（2）设 X 为 A 关于特征值 λ 的一个特征向量，则有 $AX = \lambda X$，进而有 $X = \lambda A^{-1}X$，注意到 λ 不为 0，于是 $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$，因此 X 为 A^{-1} 关于特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量。

由上述证明，可知 A 的特征向量均为 A^{-1} 的特征向量，同理可证 A^{-1} 的特征向量均为 A 的特征向量，由此可知，结论成立。 □

习题 6.1.9. 设 $f(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k$，证明：若 λ_0 是 A 的特征值，则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值；如 X 是 A 属于 λ_0 的特征向量，则 X 是 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量，即 $f(A)X = f(\lambda_0)X$。

【证明】. 对任意 $k = 0, 1, \cdots, n$，有 $A^kX = A^{k-1}(AX) = A^{k-1}(\lambda X) = \lambda A^{k-1}X = \cdots = \lambda^kX$。

于是 $f(A)X = \sum_{k=0}^n a_kA^kX = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^kX = f(\lambda_0)X$，即证。 □

习题 6.1.10. 已知 n 阶方阵 A 的秩为 1，证明 $A^2 \neq O$ 时 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} c & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$（其中 $c \neq 0$）；$A^2 = O$ 时 A 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$。

【证法一】. 由于 $\mathrm{rank}A = 1$，则 $AX = 0$ 的解空间 V_A 维数为 $n-1$，设 V_A 的一组基为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\}$，添加向量 β 后，我们可以得到 $\mathbb{F}^n$ 中的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta\}$。

由于 $A\beta \neq 0$，设 $A\beta = c\beta + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1}$。

若 $A^2 = O$，则有

$$A^2\beta = A(c\beta + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1}) = c^2\beta + x_1c\alpha_1 + x_2c\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}c\alpha_{n-1} = 0$$

于是必有 $c = 0$，此时 $A\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1}$，我们取 $M_1 = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1}, \beta, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\}$，定义线性变换 $\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, X \mapsto AX$，那么 σ 在自然基下的矩阵为 A，在基 M_1 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$。$A$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 是同一线性变换 σ 在不同基下的矩阵，二者必然相似。

若 $A^2 \neq 0$，此时必有 $c \neq 0$，若不然，我们由上面的讨论，可类似得到 $A^2\beta = 0$，再结合 $A\alpha_i = 0$ 对任意 $1 \leq i \leq n$ 成立，故此时必有 $A^2 = O$。

此时取 $M_2 = \left\{\beta + \dfrac{x_1}{c}\alpha_1 + \dfrac{x_2}{c}\alpha_2 + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{c}\alpha_{n-1}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\right\}$，则对于上述的 σ，其在 M_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} c & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，因此其同 A 相似。

综合上述两点，可知结论成立。 □

注. 上述做法其实是基于线性变换在不同基下的矩阵相似这一点进行处理。即强行构造出一组基使得 σ 在这组基下的矩阵为上述性状。因为 A 的秩为 1，所以 $AX = 0$ 的解空间较大，其被 A 作用后会被消去，这为我们构造出一组基来提供了一定的便利，再根据 A^2 是否为零矩阵，便能讨论出相应结果。这种直接构造的方法在技巧性上并没有其他解法那么强，因此在平时练习时，如果遇到题目没有思路，可以采用类似的处理方式，或许有帮助。

【证法二】. 存在可逆方阵 P_1, Q_1 将秩 1 方阵 A 相抵到标准型 $D_1 = P_1AQ_1 = \mathrm{diag}(1, 0, \cdots, 0)$。因此 A 相似于

$$A_1 = P_1AP_1^{-1} = D_1(Q_1^{-1}P_1^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & O \end{pmatrix}$$

其中 (a,β) 是 $Q_1^{-1}P_1^{-1}$ 的第 1 行，β 为 $n-1$ 维行向量。

当 $a\neq 0$ 时 $A_1^2\neq O$，此时 $A^2\neq O$。取

$$P_2=\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}\beta\\ 0 & I\end{pmatrix}, D=A_1P_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}\beta\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\beta\\ 0 & O\end{pmatrix}$$

则 $D=P_2^{-1}D=P_2^{-1}A_1P_2$ 与 A_1 相似从而与 A 相似。

当 $a=0$ 时 $A_1^2=O$，此时 $A^2=O$，且由 $A_1\neq 0$ 知 $\beta\neq O$，此时存在 $n-1$ 阶可逆方阵 Q_2 将非零行向量 β 送到 $\beta Q_2=(1,0,\cdots,0)$。取 $P_3=\mathrm{diag}(1,Q_2)$，则

$$N=A_1P_3=\begin{pmatrix}0 & \beta Q_2\\ 0 & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

且 $N=P_3^{-1}N=P_3^{-1}A_1P_3$ 与 A_1 相似从而与 A 相似。

这就证明了 A 相似于所要求的矩阵。 □

注. 上述做法出自李尚志《线性代数学习指导》。这个做法说明的是，**相似其实是相抵的一种特殊形式**，有的时候我们在这一部分题目做多了之后可能会忘记相抵这一概念，但是有的时候还是有一些帮助的。当然，解法一和解法二在本质上是相同的，大家可以进行一下比对。

习题 6.1.11. 设 $n\geq 2$，$V=\mathbb{F}^{n\times n}$，V 的线性变换 $\tau: X\mapsto X^T$ 将 V 中每个方阵 X 变换到它的转置 X^T，求 τ 的特征值和特征向量。同时 τ 是否可对角化。

【解答】. 对任意 $X\in V$ 我们有 $\tau^2(X)=(X^T)^T=X$，于是 τ^2 是 V 上的恒等变换，τ 上的每个特征值 λ 对特征向量 $X\neq 0$ 满足 $\tau X=\lambda X$，从而 $X=\tau^2X=\lambda^2X$，这证明了 $\lambda^2=1$，从而 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$。

若 X 为 τ 属于特征值 1 的特征向量，则 $X\neq O$ 且 $X^T=X$，从而 X 是非零对称方阵，此时 $\left\{E_{ii},\dfrac{1}{2}(E_{kj}+E_{jk})\middle|1\leq i\leq n,1\leq k<j\leq n\right\}$ 为相应特征子空间的基。

若 X 为 τ 属于特征值 -1 的特征向量，则 $X\neq O$ 且 $X^T=-X$，从而 X 是非零反对称方阵，此时 $\left\{\dfrac{1}{2}(E_{kj}-E_{jk})\middle|1\leq k<j\leq n\right\}$ 为相应特征子空间的基。

于是 V 中存在一组由特征向量组成的基

$$\left\{E_{ii},\frac{1}{2}(E_{kj}+E_{jk}),\frac{1}{2}(E_{kj}-E_{jk})\middle|1\leq i\leq n,1\leq k<j\leq n\right\}$$

此时 τ 在这组基下的矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}\left(I_{\frac{n(n+1)}{2}},-I_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$。 □

习题 6.1.12. 设 λ_1,λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个不同的特征值，X_1,X_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：X_1+X_2 不是 A 的特征向量。

【证明】. 由于 X_1,X_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，且 A 关于特征值 λ_1,λ_2 的特征子空间之和为直和，因此必然有 X_1,X_2 线性无关。

若 X_1+X_2 是 A 关于特征值 λ_0 的特征向量，则有 $A(X_1+X_2)=\lambda_0(X_1+X_2)=\lambda_0X_1+\lambda_0X_2$。而与此同时，$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$。于是有 $(\lambda_1-\lambda_0)X_1+(\lambda_2-\lambda_0)X_2=0$，这导致 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2$，与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾。 □

注. 对于本题，很多人都没有对X_1, X_2 的线性无关性做详细说明。而说明这一点可以采取两种方法，一是习题课上讲过的直接利用反证法（但是一定要说一下 X_1, X_2 非零，不能没法直接设 $X_1 = cX_2$），一种是利用特征子空间相互直和的性质，如上面的解答。这点要注意。

习题 6.1.13. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$，证明：A 可对角化。

【证法一：运用复方阵可对角化的充分必要条件】. 由于 $A^2 = A$，因此 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 是 A 的一个零化多项式。因此 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 必为 $\varphi(\lambda)$ 的因式，因此只可能为 λ 或 $\lambda - 1$ 或 $\lambda^2 - \lambda$。而这三种情况中，A 的最小多项式均没有重因式，因此必然可对角化。 □

【证法二：直接找出 n 个线性无关的特征向量】. 设 λ 是 A 的一个特征值，X 是 A 属于特征值 λ 的一个特征向量，于是 $AX = \lambda X$。进而 $\lambda^2 X = A^2 X = AX = \lambda X$，结合 X 非零，必有 $\lambda^2 = \lambda$，因此 λ 只能取 0 或 1。

设 A 关于特征值 $0, 1$ 的特征子空间分别为 V_0, V_1，则 V_0 和 V_1 分别为 $AX = 0$ 与 $(A - I)X = 0$ 的解空间。

注意到 $A(A - I) = 0$，于是 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A - I) \leq n$，而

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A - I) \geq \mathrm{rank}(A - (A - I)) = \mathrm{rank}I = n$$

于是 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A - I) = n$。进而

$$\dim V_0 + \dim V_1 = (n - \mathrm{rank}A) + (n - \mathrm{rank}(A - I)) = n$$

结合 $V_0 + V_1 = V_0 \oplus V_1$，因此 $V_0 \oplus V_1 = \mathbb{F}^n$。

取 V_0 的一组基和 V_1 的一组基，并将其合并，记为 $M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，则 $\forall 1 \leq i \leq n$，可知 α_i 为 A 的特征向量，再由直和关系，可知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，因此 A 存在 n 个线性无关的特征向量，必然可对角化。 □

注. 对于本题，方法一是简洁的，但更多的人采用的是方法二。而若采用方法二的话，问题本质是“找出 n 个线性无关的特征向量”，因此引入关于矩阵秩的讨论。采用这种证法的话需要注意语言表述，一些人出现诸如“$AX = 0$ 与 $(I - A)X = 0$ 的基础解系含有 n 个向量”之类容易引起歧义的表述，甚至出现“A 含有 n 个特征向量”之类的错误表述，因此需要大家品读如上的证明，体会表达的严谨性。

习题 6.1.14. 设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 V 中所有的非零向量都是 σ 的特征向量，求证：σ 是标量变换。

【证明】. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基，则对 $\forall 1 \leq i \leq n$，存在 λ_i 使得 $\sigma(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$。取 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$，其中 $k_1, \cdots, k_n$全不为零，则 α 也为 σ 的特征向量，于是存在 λ_0，使得

$$\sigma(\alpha) = \sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) = k_1\lambda_0(\alpha_1) + \cdots + k_n\lambda_0(\alpha_n)$$

与此同时，有

$$\sigma\alpha = \sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) = k_1\sigma\alpha_1 + \cdots + k_n\sigma\alpha_n = k_1\lambda_1(\alpha_1) + \cdots + k_n\lambda_n(\alpha_n)$$

于是

$$k_1(\lambda_1-\lambda_0)\alpha_1+\cdots+k_n(\lambda_n-\lambda_0)\alpha_n=0$$

由于 $k_1,\cdots,k_n$ 全不为零，因此有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda_0$。此时 $\forall\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$，有

$$\sigma(\beta)=\sigma(l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n)=l_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+l_n\sigma(\alpha_n)=\lambda_0(l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n)=\lambda_0\beta$$

即 $\sigma(\beta)=\lambda_0\beta$ 对任意 β 均成立，于是 σ 为数乘变换。 □

注. 本题采用上述证法的同学，在设出 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$ 后，往往会说 $k_1,\cdots,k_n$不全为零，然而在此前提下，受制于可能有 k_i 为零，因此没法说 $\lambda_i=\lambda_0$ 成立。而如果设成全不为 0，就能很方便地推出结论。

另外，一些同学也采用反证法，即假设存在多于一个特征值，之后找出两个属于不同特征值的特征向量，验证其和不是特征向量。但是这种说法一定要注意论证的严谨性，避免产生歧义。

习题 6.1.15. 设 A 相似于上三角形矩阵 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\O&B_{22}\end{pmatrix}$，其中 B_{11} 的对角元全等于 λ_1，B_{22} 的对角元全等于 λ_2，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$。设 $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)=O$。求证：

（1）B_{11},B_{22} 都是数量矩阵；

（2）存在 $P=\begin{pmatrix}I&S\\O&I\end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_1I&O\\O&\lambda_2I\end{pmatrix}$，从而 A 相似于对角矩阵；

（3）将以上推理加以推广，证明如果 A 的最小多项式没有重根，则 A 可对角化。

【证明】.（1）由于 A,B 两个方阵相似，因此有 $(B-\lambda_1I)(B-\lambda_2I)=O$，即

$$\begin{aligned}(B-\lambda_1I)(B-\lambda_2I)&=\begin{pmatrix}B_{11}-\lambda_1I&B_{12}\\O&B_{22}-\lambda_1I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}-\lambda_2I&B_{12}\\O&B_{22}-\lambda_2I\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(B_{11}-\lambda_1I)(B_{11}-\lambda_2I)&*\\O&(B_{22}-\lambda_1I)(B_{22}-\lambda_2I)\end{pmatrix}=O\end{aligned}$$

于是 $(B_{11}-\lambda_1I)(B_{11}-\lambda_2I)=O$ 且 $(B_{22}-\lambda_1I)(B_{22}-\lambda_2I)=O$。而注意到

$$B_{11}-\lambda_2I=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&*&\cdots&*\\&\lambda_1-\lambda_2&\cdots&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix},B_{22}-\lambda_1I=\begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1&*&\cdots&*\\&\lambda_2-\lambda_1&\cdots&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&\lambda_2-\lambda_1\end{pmatrix}$$

其均为上三角阵，且对角元非零，因此为可逆阵。于是必有 $B_{11}-\lambda_1I=O$ 且 $B_{22}-\lambda_2I=O$，即 $B_{11}=\lambda_1I$ 且 $B_{22}=\lambda_2I$ 为数量矩阵。

（2）若 $P=\begin{pmatrix}I&S\\O&I\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}I&-S\\O&I\end{pmatrix}$，此时

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}I&-S\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1I&B_{12}\\O&\lambda_2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&S\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1I&B_{12}+(\lambda_1-\lambda_2)S\\O&\lambda_2I\end{pmatrix}$$

于是取 $S=(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}S$，可使得 $P^{-1}BP$ 为对角阵。 □

注. 本题前两问思路是比较清晰的，当然利用 $B_{11}-\lambda_2$ 和 $B_{22}-\lambda_1$ 可逆这一性质比较巧妙。一些同学利用最小多项式得到 B_{11} 与 B_{22} 可对角化得到，也很巧妙。

至于第 3 问，需要反复利用前两问结论，并运用数学归纳法，大家可以再思考思考。

习题 6.1.16. 在复数域上将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ 相似到上三角形或者对角形矩阵 $P^{-1}AP$，并求出过渡矩阵 P 和 A 的最小多项式。

【解答】. 注意到 A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\1&\lambda-2&-2\\-1&1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$

于是 A 仅有一个特征值 1，并得到一个线性无关的特征向量 $X_1=(1,-1,1)^T$，添加 $e_2=(0,1,0)^T$，$e_3=(0,0,1)^T$ 构成 $\mathbb{C}^3$ 一组基，得到可逆方阵 $P_1=(X_1,e_2,e_3)$ 将 A 相似到准上三角阵

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},A_1=P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&3\\0&-3&-2\end{pmatrix}$$

A_1 为分块准上三角阵，其右下角的 2 阶方阵的特征值仍然只有 1，算出特征向量 $\widetilde{X_2}=(1,-1)^T$，再添加 $\tilde{e_2}=(0,1)^T$ 可得到可逆方阵 $\tilde{P_2}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$。于是令 $P_2=\begin{pmatrix}1&O\\O&\tilde{P_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，则 $T=P_2^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为上三角阵。

于是 $T=P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=P^{-1}AP$ 为上三角阵，相应的过渡矩阵

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

而由于 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$，可知 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)$ 有因子 $\lambda-1$ 且被 $\varphi_A(\lambda)$ 整除，因此只可能为 $\lambda-1$，$(\lambda-1)^2$ 或 $(\lambda-1)^3$。而 $A-I$ 与 $(A-I)^2$ 均不为零矩阵，因此最小多项式为 $d_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$。 □

注. 矩阵的上三角化算法是本节的一系列证明过程中所引出的一个算法，其在整节甚至整个课程体系中具有较强的隐蔽性，所以可以稍作关注，但后续的 Jordan 标准型算法更重要且更具有一般性。

此外，当求解最小多项式时，可借助P225 “推论 1”给出一些初步讨论，之后通过代入检验是否为零化多项式即可解决。

习题 6.1.17. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$，求 A 的最小多项式，并求 A^{-1}。

【解答】. 注意到 A 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0 & -1\\ -1 & \lambda & 0 & -2\\ 0 & -1 & \lambda & -3\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -2\\ -1 & \lambda & -3\\ 0 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}-1$$

$$=\lambda^4-4\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda-1$$

此时 $\varphi_A'(\lambda)=4\lambda^3-12\lambda^2-6\lambda-2$，可得 $(\varphi_A(\lambda),\varphi_A'(\lambda))=1$，于是 $\varphi_A(\lambda)$ 无重根。

此时存在互不相同的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{C}$，使得 $\varphi_A(\lambda)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$，因此 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)=\varphi_A(\lambda)$，于是最小多项式 $d_A(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda-1$。

此时，$A^4-4A^3-3A^2-2A-I=O$，于是 $A(A^3-4A^2-3A-2I)=I$，进而

$$A^{-1}=A^3-4A^2-3A-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

注. 除去一些直接计算特征值的计算题，可能会遇到特征多项式没有相对简单的根的情形，但此时此刻，借助重根判定定理，若能证出特征多项式无重根，则可说明其特征多项式等于最小多项式，同时最小多项式无重根。

6.2 补充练习

例 6.2.1. 求 $\mathbb{R}_3$ 中关于平面 $\pi: Ax+By+Cz=0,(A^2+B^2+C^2=0)$ 的平面反射公式。

例 6.2.2. 设 $V=\mathbb{F}^{2\times2}$，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times2}$。取 V 的基 $M=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$，其中

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

（1）定义 A 的右乘变换 $\mathcal{A}_R: V\to V, X\mapsto XA$。求 $\mathcal{A}_R$ 在基 M 下的矩阵。

（2）定义 V 的线性变换 $\mathcal{B}: X\mapsto AX-XA$。证明：$\mathcal{B}$ 不可逆。

（3）对任意 2 阶方阵 A,B，在 $V=\mathbb{F}^{2\times2}$ 中定义线性变换 $\mathcal{A}_L: X\mapsto AX$，$\mathcal{B}_R: X\mapsto XB$。求证：纵使 $AB\neq BA$，也有 $\mathcal{A}_L\mathcal{B}_R=\mathcal{B}_R\mathcal{A}_L$，记 $A=(a_{ij})_{2\times2},B=(b_{ij})_{2\times2}$，求 $\mathcal{A}_L\mathcal{B}_R$ 在基 M 下的矩阵。但 $\mathcal{A}_L\mathcal{B}_L=\mathcal{B}_L\mathcal{A}_L$ 不一定成立。

例 6.2.3. 设三维向量空间 V 上线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$。

（1）求 σ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵；

（2）求 σ 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵，其中 $k \neq 0$；

（3）求 σ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵。

例 6.2.4. 设 σ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明下列命题相互等价：

（1）σ 是可逆变换。

（2）对 V 内任意非零向量 α，有 $\sigma\alpha \neq 0$。

（3）若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基，则 $\sigma\varepsilon_1, \cdots, \sigma\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基。

（4）如果 V 分解为子空间 M, N 的直和：$V = M \oplus N$，那么有 $V = \sigma(M) \oplus \sigma(N)$。

例 6.2.5. 回答如下问题：

（1）设 σ 是线性空间 U 上的线性变换。证明：若存在 U 上的变换 τ 使 $\sigma\tau = \sigma\tau = 1$，则 τ 为 σ 的逆变换；

（2）设 σ 是有限维线性空间 U 上的线性变换。证明：若存在 U 上的变换 τ 使 $\sigma\tau = 1$，则 τ 为 σ 的逆变换；

(3) 设 $\mathbb{F}[x]$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上全体多项式所组成的线性空间。在 $\mathbb{F}[x]$ 上定义变换 $\mathcal{D}$ 满足 $\mathcal{D}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$。再定义 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换 int 满足 $\mathrm{int}f(x) = \int_0^x f(t)dt$。则 $\mathcal{D}$ 与 int 均为线性变换,$\mathcal{D} \circ \mathrm{int} = 1$ 但 $\mathrm{int} \circ \mathcal{D} \neq 1$，由此证明（2）的结论在无穷维情形下不成立。

例 6.2.6. 对于复数域 $\mathbb{C}$，在其上定义加法运算为复数域上的加法运算，数乘运算为复数与复数上的相乘，则其构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 $V_{\mathbb{C}}$。再在其上定义加法运算为复数域上的加法运算，数乘运算为实数与复数上的相乘，则其构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $V_{\mathbb{R}}$。$\forall \xi \in \mathbb{C}$，定义 $\sigma(\xi) = \overline{\xi}$，则 σ 可视为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的线性变换，但不可视为 $V_{\mathbb{C}}$ 上的线性变换。

例 6.2.7. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，则线性映射 $f: V \to F$ 称为 V 上的**线性函数**，证明下列结论：

（1）在 $\mathbb{R}[x]_n$ 中，对常数 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\sigma(f(x)) = f(x_0)$ 可看成是线性函数。

（2）对任一方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，定义

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

为 A 全体对角元之和，称为 A 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}A$，证明：$\mathrm{tr}A$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性函数。且满足 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$。

（3）设 f 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性函数，且 $f(AB) = f(BA)$ 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 成立。证明：存在常数 $c \in \mathbb{F}$，使得 $f = c\mathrm{tr}$。

例 6.2.8. 已知 $\mathbb{R}^3$ 上的两组基 $M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，其中 $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (2,1,0), \alpha_3 = (1,0,0)$；$\beta_1 = (1,1,2), \beta_2 = (2,1,3), \beta_3 = (4,3,8)$

（1）求基 M_1 到 M_2 的过渡矩阵；

（2）分别求向量 $\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3$ 在基 M_1 和 M_2 下的坐标；

（3）$\mathbb{R}^3$ 的线性变换 σ 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别映到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$，分别求 σ 在两组基下的矩阵。

例 6.2.9. 设 $\sigma: U \to V$ 是有限维线性空间之间的线性映射，W 是 U 的子空间，求证

$$\dim\sigma(W) \geq \dim W - \dim U + \mathrm{rank}\sigma$$

例 6.2.10 ($\sigma^2=\sigma$ 型). 已知 V 的线性变换 σ 满足 $\sigma^2=\sigma$，求证：

（1）$V=\mathrm{Im}\sigma\oplus\mathrm{Ker}\sigma$；

（2）在任何一组基下的矩阵 A 满足条件 $\mathrm{rank}A=\mathrm{tr}A$；

（3）再适当的基下将 V 的向量用坐标表示，可以使得 σ 具有投影变换的形式, 即

$$\sigma:(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)$$

例 6.2.11 ($\sigma^2=0$ 型). 已知 σ 为 V 上的线性变换，设 $r=\mathrm{rank}\sigma$，求证：以下命题都是 $\sigma^2=0$ 的充分必要条件：

（1）$\mathrm{Im}\sigma\subset\mathrm{Ker}\sigma$；

（2）σ 在适当的基下的矩阵具有形式 $\begin{pmatrix}O_{(r)} & N\\ O & O\end{pmatrix}$，其中 $\mathrm{rank}N=r$；

（3）σ 在适当的基下的矩阵具有形式 $\begin{pmatrix}O & I_{(r)} & *\\ & O & \\ & & O\end{pmatrix}$。

例 6.2.12 (幂零变换). n 维线性空间中，设有线性变换 σ 与向量 ξ，使得对某个 $1\le k\le n$，$\sigma^{k-1}\xi\neq0$，但 $\sigma^k\xi=0$。求证：

（1）$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{k-1}\xi$ 线性无关；

（2）σ 在某一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}O & I_{k-1}\\ O & O\end{pmatrix}$。

例 6.2.13. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，证明：

（1）若 $\mathrm{rank}(A^m)=\mathrm{rank}(A^{m+1})$ 对某个正整数 m 成立，则 $\mathrm{rank}(A^m)=\mathrm{rank}(A^{m+k})$ 对任意正整数 k 成立；

（2）对任意的正整数 k，成立

$$\mathrm{rank}A^k-\mathrm{rank}A^{k+1}\ge\mathrm{rank}A^{k+1}-\mathrm{rank}A^{k+2}$$

例 6.2.14. 设 A 是 n 维线性空间 U 上的线性变换，证明：$\dim\mathrm{Ker}A+\dim\mathrm{Im}A=n$。

例 6.2.15. 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维空间 $V_0=\{0\},V_1,\cdots,V_n=\{0\}$，设线性映射 $\varphi_i:V_i\to V_{i+1},i=1,2,\cdots,n-1$, 且满足 $\mathrm{Ker}\varphi_{i+1}=\mathrm{Im}\varphi_i,i=0,1,\cdots,n-1$, 证明: $\sum_{i=1}^n(-1)^i\dim V_i=0$。

例 6.2.16. 求下列矩阵 A 的全部特征值和特征向量。如果 A 可对角化，求可逆方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵:

（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$；（2）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$。

例 6.2.17. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\6&x&2\\7&2&1\end{pmatrix}$ 与 $A=\begin{pmatrix}-1&-5&b\\0&2&a\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值。

例 6.2.18. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，求 A^{2023}。

例 6.2.19. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，又 $|A|=-1$，A^* 有一个特征值 λ_0，且属于 λ_0 的一个特征向量为 $(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c,λ_0 的值。

例 6.2.20. 设 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 2023\\ 2023 & 1 & \cdots & 2022\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 3 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，求 B 的行列式 $|B|$。

例 6.2.21. 设 λ_1,λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个不同的特征值，X_1,X_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：X_1+X_2 不是 A 的特征向量。

例 6.2.22. 设 $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k$，证明：若 λ_0 是 A 的特征值，则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值；如 X 是 A 属于 λ_0 的特征向量，则 X 是 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量，即 $f(A)X=f(\lambda_0)X$。

例 6.2.23. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，λ 是 A 的一个特征值，我们把 λ 作为 A 的特征多项式的根的重数称为 λ 的代数重数，把属于 λ 的特征子空间的维数称为 λ 的几何重数。

证明：相似的方阵具有相同的特征根，并且每个特征根都有相同的代数重数和几何重数。（书上已经证明了相似的方阵具有相同的特征根和代数重数，请你再证明一遍。除了这个结论外，你可以用书上的任何结论。）

例 6.2.24. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 为线性空间，σ 是 V 中的线性变换，已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\in V$ 是 σ 的 $n+1$ 个特征向量，且其中任意 n 个线性无关，问 σ 是否是数乘变换，并说明理由。

例 6.2.25 (幂零变换：续). n 维线性空间 V 中，设有线性变换 σ 与向量 ξ，使得对任意 $1\le k\le n$，$\sigma^{k-1}\xi\neq 0$，但 $\sigma^n\xi=0$。求证：

（1）$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$ 线性无关；

（2）σ 在某一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}O & I_{n-1}\\ O & O\end{pmatrix}$；

（3）对任意正整数 $m\le n$，V 中存在 m 维 σ-不变子空间。

例 6.2.26. 设 $\sigma\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$，则 σ 在某组基下的矩阵为准对角阵当且仅当 V 可分解为一系列 σ-不变子空间的直和。

例 6.2.27. 设 σ,φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 上可交换的线性变换，即 $\sigma\varphi=\varphi\sigma$。且 σ 和 φ 的所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，证明：σ 和 φ 至少有一个公共的特征向量。

例 6.2.28. 设 V 是实数域上的一个 n 维线性空间，A 是 V 内的一个线性变换。证明 A 必有一个一维或二维的不变子空间。

例 6.2.29. 设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 V 中所有非零向量都是 σ 的特征向量，证明：σ 是数乘变换。

例 6.2.30. 设 $n \geq 2$，$V = \mathbb{F}^{n\times n}$，$V$ 的线性变换 $\tau: X \mapsto X^T$ 将 V 中每个方阵 X 变换到它的转置 X^T。求 τ 的特征值和特征向量。并回答，τ 是否可对角化？

例 6.2.31. 设 W 是 V 上可逆线性变换 σ 的不变子空间，且 σ 可逆，证明 W 也是线性变换 σ^{-1} 的不变子空间。

例 6.2.32. 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{4\times 4}$ 满足 $\mathrm{tr}(A) = 7, f(A) = 0$, 其中 $f(x) = (x-1)^5(x-2)(x-9)$，问：方阵 A 是否一定可对角化？如果是，给出证明，如果不是，请说明理由。

例 6.2.33. 求证：若实矩阵 A 满足 $A^2 + A + I = O$，则 A 在实数域上不可对角化。

例 6.2.34. 设 A 为 n 阶复方阵，证明：

（1）A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 是 A 的任一个零化多项式 $\varphi(\lambda)$ 的因式；

（2）若 λ_0 为 A 的特征值，则 $d(\lambda_0) = 0$。

例 6.2.35. 判断下列命题的正误，并说明理由：

1. 对任意线性变换 σ 而言，零向量是它的一个特征向量。

2. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，W 是 $\mathbb{F}^5$ 的子空间，那么存在 $\mathbb{F}^6$ 到 $\mathbb{F}^5$ 的线性映射 φ，满足 $\varphi(\mathbb{F}^6) = W$。

3. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，那么存在 $\mathbb{F}^5$ 到 $\mathbb{F}^6$ 的线性映射 φ，满足 $\varphi(\mathbb{F}^5) = \mathbb{F}^6$。

4. 对于非零线性变换 σ 而言，若其在某组基下的矩阵均不为 0，那么 σ 必有非 0 的特征值。

5. 线性变换属于不同特征值的特征向量必线性无关。

6. 特征值（含重数）相同的矩阵一定相似。

7. 矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 可相似于对角矩阵。

8. 设 A 是 n 阶矩阵，$1 \leq k_1, k_2 \leq n$，交换 A 的第 k_1, k_2 行再交换 A 的第 k_1, k_2 列，所得矩阵为 B，则 A 和 B 的特征值完全相同。

9. 特征多项式和最小多项式相同的两个同阶方阵必然相似。

10. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，若 A 的最小多项式在 $\mathbb{F}$ 上无重根，则 A 作为 $\mathbb{C}$ 上的方阵可对角化。

11. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，若 A 的最小多项式在 $\mathbb{F}$ 上无重根，则 A 作为 $\mathbb{F}$ 上的方阵可对角化。

例 6.2.36. 设 3 阶方阵 A 和三维列向量 X 满足 X, AX, A^2X 线性无关，且 $A^3X = 3AX - 2A^2X$。

（1）记矩阵 $Q = (X, AX, A^2X)$，求 $Q^{-1}AQ$；

（2）求行列式 $|A + I|$。

例 6.2.37. 设 $V=\mathbb{R}^4$ 是实数域上次数小于 4 的全体实系数多项式构成的线性空间，定义 V 上的映射 $\mathcal{D}: f(x)\mapsto \mathcal{D}f(x)=f'(x)$，其中 $f'(x)$ 为多项式的微分。据此，回答如下问题：

（1）证明：$\mathcal{D}$ 是 V 上的线性变换；

（2）求 $\mathcal{D}$ 的特征值；

（3）判断 $\mathcal{D}$ 能否对角化并证明你的结论；

（4）求 $\mathcal{D}$ 的最小多项式。

例 6.2.38. 设 $A: X\mapsto AX-XA^T$ 是矩阵空间 $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ 上的线性变换，这里记 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$。据此，回答如下问题：

（1）求 $\mathrm{Im}A$ 的维数 r 与一组基 $Y_1,\cdots,Y_r$,并求 $X_1,\cdots,X_r\in\mathbb{Q}^{2\times 2}$,使得 $AX_1=Y_1,\cdots,AX_r=Y_r$；

（2）求 Ker 的一组基 $Z_1,\cdots,Z_s$；

（3）证明：$X_1,\cdots,X_r,Z_1,\cdots,Z_s$ 构成 $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ 的基底；

（4）求所有 $X\in\mathbb{Q}^{2\times 2}$ 使得 $AX-XA^T=A-A^T$。

例 6.2.39. 求证：方阵 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)$ 的某次幂能被特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 整除。

例 6.2.40. 设 n 阶复方阵 A 满足条件 $\det A=0$ 且 $A^2=aA$，讨论 $I-A$ 在何时可逆，若可逆，求出其逆矩阵。

例 6.2.41. 分别求与下列矩阵相似的 Jordan 形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&4&7\\0&1&3&6\\0&0&1&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&2&0&1&2&3\\0&0&2&0&1&-1\\0&0&0&2&1&2\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$

例 6.2.42. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$，求 A^{2023}。

例 6.2.43. 回答如下问题：

（1）已知 5 阶方阵 A 相似于 Jordan 形矩阵 J，且满足条件 $\mathrm{rank}A=3$，$\mathrm{rank}A^2=2$，$\mathrm{rank}(A+I)=4$，$\mathrm{rank}(A+I)^2=3$，求 J。

（2）方阵 A 的特征多项式为 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^7$,且 $\mathrm{rank}(A-2I)=5$,$\mathrm{rank}(A-2I)^2=3$，$\mathrm{rank}(A-2I)^3=2$，$\mathrm{rank}(A-2I)^4=1$，求与 A 相似的 Jordan 形矩阵 J。

（3）设 $A\in M_{10}(\mathbb{C})$，且 A 的特征多项式 $\varphi_A(x)$ 为

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3(x-\lambda_3)^5$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 两两不相同。若 A 的最小多项式 $P(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^2(x-\lambda_3)^3$，求出与 A 可能相似的 Jordan 形矩阵个数（将仅是 Jordan 块排列顺序不同的两个 Jordan 形矩阵视为同一个），并说明理由。

例 6.2.44. 设 V 为实数域上的有限维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换且满足 $\mathcal{A}^2v+v=0(\forall v\in V)$。

（1）证明：$\mathcal{A}$ 没有实特征值；

（2）分别判断 $\mathcal{A}$ 在实数域上和复数域上是否可对角化，并给出证明。

例 6.2.45. 设 A 为实矩阵，$\lambda=a+bi$（$b\neq 0$）为 A 的一个复特征值，$X=X_1+X_2i$ 为 λ 的复特征向量，X_1,X_2 分别为其实部和虚部。证明：X_1,X_2 在复数域上线性无关。

例 6.2.46. 设 n 阶矩阵 A 满足 $|A|\neq 1$ 且 $\operatorname{rank}(I-A)=1$。判断 A 是否相似于一个对角矩阵，并证明你的结论。

例 6.2.47. 已知 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)=(\lambda-a)^m$，求 $\begin{pmatrix}A & I\\ O & A\end{pmatrix}$ 的最小多项式。

6.3 要点与结论

6.3.1 要点与结论：商空间

在日常生活中，当我们要了解一个地区的全貌时，由于地域辽阔，我们往往无法一览无遗。但是我们可以画出该地区的地图，在地图上，一个大山脉或者一个城镇都被简化恒一个点，这样便能将这一地区的全貌用一张纸体现的淋漓尽致。这种方法用到线性空间上来，就是**商空间**的概念。简单来讲，其基本思想是，以线性空间 U 的某个子空间 W 为基准，把 U 的元素**划分为许多大类**，每个大类看做一个新集合中的一个元素，就好比把一个大的城镇看做地图中的一个点一样。而这个新的集合也能从总体上反映原来线性空间的全貌，就像地图能大致展现一个地区的全貌一样。

就好比说，在数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间之间的线性映射 $\mathcal{A}:U\to V$ 中，$W=\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 为 U 的子空间。若 $W\neq 0$，则对 $\alpha,\alpha_1\in U$，$\mathcal{A}(\alpha)=\mathcal{A}(\alpha_1)$ 等价于 $\alpha-\alpha_1\in W$。而假设我们只关心 U 中的向量 α 在 $\mathcal{A}$ 作用的像 $\mathcal{A}(\alpha)$，就可以将满足 $\alpha-\alpha_1\in W$ 归为一个**大类**而不加区别。具体地说，我们有如下的定义：

定义 6.3.1. 若 $\alpha,\alpha_1\in U$ 满足 $\alpha-\alpha_1\in W$，则称 α,α_1 **模** W **同余**。对每个 $\alpha_1\in U$，U 中与 α_1 模 W 同余的所有向量组成的集合 $\alpha_1+W=\{\alpha_1+\alpha_0|\alpha_0\in W\}$ 称为模 W 的一个**同余类**，记为 $\overline{\alpha_1}$，其中 α_1 称为同余类 $\overline{\alpha_1}$，即 α_1+W 的**代表元**。

当然，上述概念是**良定义**的，即同余类不依赖于代表元的选取，而此时代表元可以取 α_1+W 中的任意元素。容易证明：$\overline{\alpha_1}=\overline{\alpha_2}$ 当且仅当 $\alpha_1-\alpha_2\in W$。这样，U 就被分为模 W 的同余类的并集，每个同余类中所有的向量都两两同余，进而被 $\mathcal{A}$ 映到同一个向量；任意两个不同余的向量属于不同的同余类，被 $\mathcal{A}$ 映到不同的向量。

由 U 中的向量得到模 W 的同余类 $\overline{\alpha}$ 的全体组成的集合记作 U/W（可以想一想 U/W 中的元素是什么样的）。对 U/W 中的任意两个元素 α_1 和 α_2，可以定义它们的和 $\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}=\overline{\alpha_1+\alpha_2}$，也就是说，从同余类 α_1+W，α_2+W 中各取一个代表院相加，得到的和 $\alpha_1+\alpha_2$ 所在的同余类 $(\alpha_1+\alpha_2)+W$ 作为 $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2}$ 的和，对每一个 $\overline{\alpha_1}\in U/W$ 与每个标量 $\lambda\in F$，可以定义乘积 $\lambda\overline{\alpha_1}=\overline{\lambda\alpha_1}$。

容易验证，按上述定义的和 $\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}$ 与积 $\lambda\alpha_1$ 是合理的，与代表元的选取无关。同时在 U/W 中定义的以上加法和数乘运算满足向量空间的 8 条公理，从而成为 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间，称为 U 对 W 的一个**商空间**。当然，商空间中的 W 不必局限于线性映射的核，而可以放眼于 U **中任意的子空间**。特别地，U/W 中的零向量就是 0 所在的同余类 W。

此外，作为一个线性空间，我们可以得到如下的 U/W 中向量的线性相关性判定定理：

定理 6.3.1. 对 $\overline{u_1},\overline{u_2},\cdots,\overline{u_m}\in U/W$，以下任意一个条件都是 $\overline{u_1},\overline{u_2},\cdots,\overline{u_m}$ 线性相关（线性无关）的充分必要条件：

（1）存在（不存在）不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}$，使得 $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_mu_m\in W$；

（2）W 的任意一组基添加 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 得到的向量组线性相关（线性无关）

进一步地，作为一个线性空间，我们依旧关注 U/W 的维数情况，因此我们现在给出如下的定理：

定理 6.3.2. 设 U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，W 是 U 的一个 m 维子空间，则 $\dim U/W=n-m$

【证明】. 在 W 内取一组基 $u_1,\cdots,u_m$，扩充为 V 的一组基：$u_1,\cdots,u_m,u_{m+1},\cdots,u_n$，我们证明 $\overline{u_{m+1}},\cdots,\overline{u_n}$ 是 U/W 的一组基，进而即可证明原结论。

（1）证明 $\overline{u_{m+1}},\cdots,\overline{u_n}$ 线性无关，设有

$$k_{m+1}\overline{u_{m+1}}+\cdots+k_n\overline{u_n}=\overline{0},$$

那么

$$\overline{k_{m+1}u_{m+1}+\cdots+k_nu_n}=\overline{0}=0+W.$$

于是

$$k_{m+1}u_{m+1}+\cdots+k_nu_n\in W.$$

由此推知存在 $k_1,\cdots,k_m$，使得

$$k_{m+1}u_{m+1}+\cdots+k_nu_n=k_1u_1+\cdots+k_mu_m.$$

但是 $u_1,\cdots,u_m,u_{m+1},\cdots,u_n$ 线性无关，由上式立刻可以推出 $k_{m+1}=\cdots=k_n=0$，这表明 $\overline{u_{m+1}},\cdots,\overline{u_n}$ 在 U/W 内线性无关。

（2）对任意 $\overline{\alpha}\in V/M$，证明 $\overline{\alpha}$ 可被 $\overline{u_{m+1}},\cdots,\overline{u_n}$ 线性表示。设 $\overline{\alpha}=\alpha+M$，有

$$\alpha=k_1u_1+\cdots+k_mu_m+k_{m+1}u_{m+1}+\cdots+k_nu_n$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}&=\overline{k_1u_1+\cdots+k_mu_m+k_{m+1}u_{m+1}+\cdots+k_nu_n}\\&=k_1\overline{u_1}+\cdots+k_m\overline{u_m}+k_{m+1}\overline{u_{m+1}}+\cdots+k_n\overline{u_n}\\&=k_{m+1}\overline{u_{m+1}}+\cdots+k_n\overline{u_n}\end{aligned}$$

这里用到了 $u_i\in W(i=1,2,\cdots,m)$，故 $\overline{u_i}=\overline{0}$.

综合上述两方面，我们得到 $\overline{u_{m+1}},\cdots,\overline{u_n}$ 是 U/W 的一组基，命题得证。 □

总之，在实际应用过程中，我们还是要明确**商空间也是线性空间，依然满足线性空间的相关性质**。但同时也要时刻注意**不要陷入“商空间是子空间”**这一误区当中。下面是一些应用的例子，大家可以按照需求选做：

例 6.3.1. 令 M 为 $M_n(\mathbb{F})$ 中全体反对称矩阵所组成的子空间，试求 $M_n(\mathbb{F})/\mathbb{F}$ 的维数和一组基。

例 6.3.2. 令 W 为线性空间 U 的一个子空间，在 W 内取定一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，用两种方式扩充为 V 的基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n;$$

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n.$$

这两组基之间的过渡矩阵为 T，即

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)T,$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} I_r & * \\ 0 & T_0 \end{pmatrix}.$$

证明：U/W 内两组基

$$\overline{\varepsilon_{r+1}}=\varepsilon_{r+1}+M,\overline{\varepsilon_{r+2}}=\varepsilon_{r+2}+M,\cdots,\overline{\varepsilon_n}=\varepsilon_n+M;$$

$$\overline{\eta_{r+1}}=\eta_{r+1}+M,\overline{\eta_{r+2}}=\eta_{r+2}+M,\cdots,\overline{\eta_n}=\eta_n+M.$$

之间的过渡矩阵为

$$(\overline{\eta_{r+1}},\cdots,\overline{\eta_n})=(\overline{\varepsilon_{r+1}},\cdots,\overline{\varepsilon_n})T_0$$

6.3.2 商空间上的诱导变换

我们在商空间小专题中（见第 2 期作业周报），仅仅给出了商空间的定义和相关性质。而作为线性空间而言，我们希望对商空间上的线性变换进行一定的研究，而不变子空间的提出为我们研究这类变换提供了一个良好工具，因此我们可以对商空间上的诱导变换展开讨论。

需要注意的是，如果仅从备考角度来看的话，大家只需要记住**诱导变换的定义模式**，而后面的定理 1 不必掌握，但建议阅读体会。

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换。现设 M 是 $\mathcal{A}$ 的一个**不变子空间**，我们在商空间 V/M 上定义一个变换如下：

$$\mathcal{A}(\alpha+M)=\mathcal{A}\alpha+M.$$

首先需要指明良定义性**【因为 $\mathcal{A}$ 的定义依赖于代表元 α，因此需要证明代表元取不同值时不影响 $\mathcal{A}$ 的定义】**，设有 $\beta+M=\alpha+M$，我们需要证明 $\mathcal{A}(\beta+M)=\mathcal{A}\beta+M=\mathcal{A}\alpha+M=\mathcal{A}(\alpha+M)$. 现在 $\beta=\alpha+m,m\in M$，因为 M 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，故 $\mathcal{A}\beta=\mathcal{A}\alpha+M$. 这就是我们需要证明的结论。

定义**自然映射** $\varphi: V \to V/M$ 使得 $\varphi(\alpha) = \alpha + M = \overline{\alpha}$. 把这一记号用于上面的定义式，可得

$$\mathcal{A}(\alpha + M) = \mathcal{A}\varphi(\alpha) = \mathcal{A}\alpha + M = \varphi(\mathcal{A}\alpha)$$

这表明 φ 和上面定义的 V/M 内变换 $\mathcal{A}$ 可交换。

现在来证明 $\mathcal{A}$ 是 V/M 内的线性变换，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k\overline{\alpha} + l\overline{\beta}) &= \mathcal{A}(\overline{k\alpha + l\beta}) = \mathcal{A}\varphi(k\alpha + l\beta)\\ &= \varphi\mathcal{A}(k\alpha + l\beta) = \varphi(k\mathcal{A}\alpha + l\mathcal{A}\beta)\\ &= k\varphi(\mathcal{A}\alpha) + l\varphi(\mathcal{A}\beta) = k\mathcal{A}\varphi(\alpha) + l\mathcal{A}\varphi(\beta)\\ &= k\mathcal{A}\overline{\alpha} + l\mathcal{A}\overline{\beta}\end{aligned}$$

上面定义的 V/M 内的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为 V 内线性变换 $\mathcal{A}$ 在商空间 V/M 内的**诱导变换**，记作 $\mathcal{A}|_{V/M}$，当然在不引起混淆的情况下可以直接记为 $\mathcal{A}$.

容易看出，诱导变换的定义需要以**不变子空间**作为基石，否则无法准确定义，这点需要各位特别注意。接下来我们研究一下诱导变换的基本性质，我们有如下定理：

定理 6.3.3. *设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 内的线性变换，M 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。若 $\mathcal{A}$ 在 V 内的特征多项式为 $f(\lambda)$，$\mathcal{A}|_M$ 的特征多项式为 $g(\lambda)$，$\mathcal{A}$ 在 V/M 内中的诱导变换特征多项式为 $h(\lambda)$，则 $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$*

【证明】. 现在设 $\dim V = n$，在 M 内取出一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$，并将其扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$，则我们知道 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵具有如下分块形式：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r+2,r+1} & a_{r+2,r+2} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,r+1} & a_{n,r+2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

我们已经知道 $\overline{\varepsilon_{r+1}}, \cdots, \overline{\varepsilon_n}$ 为 V/M 的一组基，注意到 $\overline{\varepsilon_1} = \cdots = \overline{\varepsilon_r} = \overline{0}$，现在显而易见有

$$\mathcal{A}\overline{\varepsilon_{r+i}} = \overline{\mathcal{A}\varepsilon_{r+i}} = a_{r+1,r+i}\overline{\varepsilon_{r+1}} + \cdots + a_{n,r+i}\overline{\varepsilon_n}$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\overline{\varepsilon_{r+1}} &= a_{r+1,r+1}\overline{\varepsilon_{r+1}} + \cdots + a_{n,r+1}\overline{\varepsilon_n}\\ \mathcal{A}\overline{\varepsilon_{r+2}} &= a_{r+1,r+2}\overline{\varepsilon_{r+1}} + \cdots + a_{n,r+2}\overline{\varepsilon_n}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathcal{A}\overline{\varepsilon_n} &= a_{r+1,n}\overline{\varepsilon_{r+1}} + \cdots + a_{nn}\overline{\varepsilon_n}\end{aligned}$$

于是诱导变换 $\mathcal{A}$ 在 V/M 的基 $\overline{\varepsilon_{r+1}}, \cdots, \overline{\varepsilon_n}$ 下的矩阵为

$$(\mathcal{A}\overline{\varepsilon_{r+1}}, \mathcal{A}\overline{\varepsilon_{r+2}}, \cdots, \mathcal{A}\overline{\varepsilon_n}) = (\overline{\varepsilon_{r+1}}, \overline{\varepsilon_{r+2}}, \cdots, \overline{\varepsilon_n})A_{22}$$

因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda I-A| &= \begin{vmatrix} \lambda I-A_{11} & -A_{12} \\ O & \lambda I-A_{22} \end{vmatrix} \\
&= |\lambda I-A_{11}||\lambda I-A_{22}|
\end{aligned}
$$

从而有 $f(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$，即证。 □

6.3.3 关于矩阵的 Jordan 标准形

Jordan 标准型相似算法解读

Jordan 标准型是高等代数课程体系中的一块重要内容，但是即使是数学类的学生也都要在大二上学期学习这块知识（更别说非数学类学生都不会学到这块内容）。而在 6.9 节也仅仅给出了相关的算法而已，但相应算法较为晦涩，且后面我们要尝试用 Jordan 形矩阵构造一些例子进行解题，所以下面我们就先对 Jordan 形矩阵的算法进行一个简单的解读。

缩小研究范围

下面我们假设 A 能相似到它的 Jordan 标准型，并记 A 有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应的代数重数分别为 $k_1,\cdots,k_s$，于是我们设出其 Jordan 标准型为

$$
J=\begin{pmatrix}
J_{m_{11}}(\lambda_1) & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & J_{m_{1t_1}}(\lambda_1) & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & J_{m_{s1}}(\lambda_s) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & J_{m_{st_s}}(\lambda_s)
\end{pmatrix}
$$

其中 $J_{m_{1j}}(\lambda_i)$ 为关于特征值 λ_i 的阶数为 m_{ij} 的 Jordan 块，并且满足 $\sum_{j=1}^{t_i} m_{ij}=k_i$。

下面，我们先研究关于特征值 λ_1 的 Jordan 排布情况，而我们知道

$$
J-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}
J_{m_{11}}(\lambda_1)-\lambda_1 I & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & J_{m_{1t_1}}(\lambda_1)-\lambda_1 I & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & J_{m_{s1}}(\lambda_s)-\lambda_1 I & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & J_{m_{st_s}}(\lambda_s)-\lambda_1 I
\end{pmatrix}
$$

对 $i\neq 1$ 而言，Jordan 块 $J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ 对角元为 $\lambda_i\neq\lambda_1$，因此 $J_{m_{ij}}(\lambda_i)-\lambda_1 I$ 对角元非零，是可逆矩阵。因此在**对 $J-\lambda_1 I$ 进行乘幂运算时**，根据**分块矩阵运算性质**，这相当于**对每个 $J_{m_{ij}}(\lambda_i)-\lambda_1 I$**

进行乘幂运算，而此时 $J_{m_{ij}}(\lambda_i)-\lambda_1 I$ 在 $i\neq 1$ 时对角元非零，**故保持可逆**，并不会对矩阵的秩构成影响，因此在后续讨论中，我们可以仅考虑 $J_1=\begin{pmatrix} J_{m_{11}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_{1t_1}}(\lambda_1)\end{pmatrix}$ 的相应性质。

Jordan **块的拼凑**

接下来我们可以从线性变换角度上来对其进行解读和说明，我们还是考虑矩阵的左乘变换 $X\mapsto AX$，则 A 为其在自然基下的矩阵，同时存在一组基使得其在该组基下的矩阵为 J。

此时，每个 $J_{1j}(\lambda_1)(1\leq j\leq t_1)$ 都具有形状 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}$，我们观察第一列，该列仅有最上方的元素取到了 λ_1，而其他位置均为 0，哪怕将其放在 J 整体上进行观察，也仍然能得到相同的结果。因此我们发现**该列会对应一个特征向量**，因此我们知道，**每得到一个特征向量，都能够相应的对应出一个** Jordan **块**。因此方程 $(A-\lambda_1)X=O$ 的解空间维数就决定了线性无关特征向量的个数，进而决定了关于特征值 λ_1 的 Jordan 块个数。同样的，这些特征向量可以看成是对应 Jordan 块的**“起点”**，如果离了这个“起点”，Jordan 块就没办法继续往下构造。

但我们也仅仅取出了所有的相应特征向量而已，因此除了可对角化矩阵以外，我们还尚不能得到 J 的具体结构。接下来我们转向第二列，第二列第一行元素为 1，第二行元素为 λ_1，因此根据线性变换的相关知识，存在某个 Y_i，使得 $AY_i=\lambda_1 Y_i+X_i$，其中 X_i 为特征向量，因此，如果我们对于前面所得的 X_i，能够找到 Y_i 使得 $AY_i=\lambda_1 Y_i+X_i$，就能找出 Jordan 块的第二列，进一步可知 Y_i 满足 $(A-\lambda_1 I)Y_i\neq O$ 且 $(A-\lambda_1 I)^2 Y_i=O$。

再根据维数公式，可知 $\mathrm{rank}(A-\lambda_1 I)-\mathrm{rank}(A-\lambda_1 I)^2$ 为阶数不少于 2 的 Jordan 块的个数，因为这决定了 Y_i 的个数，而想要让 Jordan 块能**“继续走下去”**，就必须要有相应的 Y_i。相应的，$n-\mathrm{rank}(A-\lambda_1 I)$ 是阶数不少于 1 的 Jordan 块个数，故**二者作差，就能得到阶数恰为 1 的** Jordan **块个数，照应了课本中的证明**。

当然，在实际做题中，对于一些简单的三阶、四阶矩阵，我们完全可以利用反解方程 $(A-\lambda_1)Y_i=X_i$ 确定相应的 Y_i。

不难看出，第二列的解决方式是本质的，而如果此时所取出的 X_i 和 Y_i 个数尚不能达到相应的代数重数，那么我们进而考虑三次、四次乃至更高次，由秩不等式 $\mathrm{rank}A^k-\mathrm{rank}A^{k+1}\geq \mathrm{rank}A^{k+1}-\mathrm{rank}A^{k+2}$ 可保证有限步重复后我们能够取出来相应的矩阵（可以想一想这个秩不等式到底在整个过程中**扮演了一个什么样的作用**）。而对于其它特征值，可以同样的进行类似的操作，进而取出足够数目的线性无关的向量以相似到 Jordan 形矩阵。

课本中证明方式的解读：“掉阶”

所谓“掉阶”是我个人在学这方面知识的时候所给它起的一个绰号。而接下来，我们要对课本中的证明过程进行模拟和解读。

我们还是只考察关于特征值 λ_1 的 Jordan 块分布情况。此时，每个 $J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I$ 都形如

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ 此时，对角元出均为 0，此时对于某个向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，被该矩阵左乘后即得 $Y=(x_2,\cdots,x_n,0)^T$，也就是所有元素**整体向上平推**，最后一处用 0 补足。于是我们有

$$(J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

这相当于让右侧矩阵整体向上挪动一个位置。此时有 $\operatorname{rank}(J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I)^2-\operatorname{rank}(J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I)=1$，相当于**"掉了一阶"**。

重复上述过程，我们每左乘一个 $J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I$，整个矩阵就要被向上平推一个位置，相应的秩就会减 1，直到矩阵被推没为之。

因此我们考察 $\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)-\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)^2$，可知这就是各个 $J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I$ 总的掉阶数。而对于每个 $J_{1j}(\lambda_1)-\lambda_1 I$ 而言，若其没有被**"推成零矩阵"**，那么其在乘方过程中会**"掉了一阶"**，因此 $\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)-\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)^2$ 就是**还能"掉阶"的 Jordan 块的个数**, 也就是阶数不小于 2 的 Jordan 块个数。而对于高次情况，同样的有**秩的差等于还能"掉阶"的 Jordan 块个数**，这也就对整个证明过程做了一定的解读和照应。

特别注意的是，矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ 的所谓**"平推性质"**是重要的，同样我们还可以构造出**"能一次性平推两个位置的矩阵"**以及**"能进行轮换的矩阵"**，建议大家做一定的积累。

利用 Jordan 进行矩阵构造的小技巧

前面我们解读了 Jordan 形矩阵的相应算法，而接下来我们可以谈一谈利用 Jordan 形矩阵是如何构造一些例子来辅助我们解题的。

首先有两点需要明确：第一，**对 $1\le i\le k$，若 A 属于特征值 λ_i 的 Jordan 块 $J_{i1},J_{i2},\cdots,J_{ik_i}$ 的阶数分别为 $m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{ik_i}$，且 $m_{i1}\ge m_{i2}\ge\cdots\ge m_{ik_i}$，则 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_{k1}}$**。第二，**两个矩阵在复数域上相似当且仅当二者相似于相同的 Jordan 标准形，而不同的 Jordan 形矩阵互不相似。**

例 6.3.3. 求三阶方阵 A，使得 A 的最小多项式是 λ^2。

【解读】. 根据 6.9 节提供的相关算法，我们知道，如果说我们找出了 A 的 Jordan 标准型，那么我们就可以直接通过相似变换确定 A。那么此时 A 的最小多项式为 λ^2，于是 A 仅有特征值 0。此时存在 X 使得 $AX \neq O$ 而 $A^2X = O$ 对任意 X 成立。

接下来我们可以根据 $AX = O$ 解空间 V_A 的维数确定 Jordan 块的个数。若维数为 1，则说明其只有一个 Jordan 块，故必形如 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，而 $J^2 \neq 0$，因此解空间维数必然为 2，此时可知 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

由此我们知道所有最小多项式为 λ^2 的矩阵的 Jordan 标准型为 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此全体与 J 相似的矩阵满足要求。

当然很多同学构造出了 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，并说明与之相似的矩阵全是符合要求的，由于其可以相似到上面求出的 J，因此能够相似到左右符合要求的矩阵。但是请注意**最小多项式相同的矩阵并不一定相似到同一个 Jordan 标准型**，比如 $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此这种做法具有一定巧合性。但鉴于截至现在都没有对 Jordan 标准型做深入的研究，因此这也是可以理解的。 □

例 6.3.4. 举出两个方阵，它们的特征多项式相等，最小多项式也相等，但是它们不相似。

【解读】. 利用开始所强调的两点性质，我们只需要取两个不同的 Jordan 形矩阵，其中，对每个特征值而言，其最大 Jordan 块阶数相等，且所有属于该特征值的阶数总和相同，即可得到所求矩阵。如令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 而 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其只有一个特征值 0，属于特征值 0 的 Jordan 块最大阶数均为 2，且属于特征值 0 的所有 Jordan 块的阶数总和为 4。因此二者特征多项式为 λ^4，最小多项式为 λ^2，但不相似。 □

例 6.3.5. 举例说明：即使 n 阶矩阵 A、B 相似，也无法推出 AB 和 BA 的秩相同。

【解读】. 我们知道，相似的矩阵的 Jordan 标准型在**不考虑排布顺序**的情况下是相同的，所以**仅仅对 Jordan 块调换顺序所得到的前后两个矩阵是相似的**，因此这为我们的距离提供了一定的启发。

我们可以取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则二者本身就为 Jordan 形矩阵，且 Jordan 块在不计较排布顺序的情况下是相同的，因此得到二者的相似关系。然而 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 而 $BA = O$，因此可以说明 AB 和 BA 的秩是不相同的。 □

Chapter 7

二次型

7.1 习题解析

习题 7.1.1. 证明：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 相合，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列。

【证明】. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 对应的二次型为 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$。

做可逆的线性替换 $\begin{cases} y_1 = x_{i_1} \\ y_2 = x_{i_2} \\ \quad\vdots \\ y_n = x_{i_n} \end{cases}$，则上式化为 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \lambda_{i_1} y_1^2 + \lambda_{i_2} y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_{i_n}^2$，其对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$，因此两个矩阵相合。 □

注. 这个题寥寥数语就能将证明完成，但实际操作起来，很多人却频频出问题，这也就是为什么有的题明明考概念，但又很多人基本得不了几分的原因。认真研读一下证明内容，还是十分重要的。

习题 7.1.2. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 且标准型中的两项系数为一正一负，或者秩等于 1。

【证明】. **先证明必要性**，设实二次型 $Q(X)=Q(x_1,\cdots,x_n)$ 能够分解为两个实线性函数 $f_1(X)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ 与 $f_2(X)=b_1x_1+\cdots+b_nx_n$ 的乘积。

若 $\alpha_1=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\alpha_2=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2$ 同 $\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关。取 $y_1=\frac{1}{2}(f_1(X)+f_2(X))=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)X$，$y_2=\frac{1}{2}(f_1(X)-f_2(X))=\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)X$，则

$$Q(X)=f_1(X)f_2(X)=y_1^2-y_2^2$$

于是将行向量 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 扩充为 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的一组基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3\cdots,\alpha_n$，于是可取可逆的线性替换 $X=PY$，其中 $P=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$，则在这组基下 $Q(X)$ 化为标准型

$$Q_2(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2-y_2^2$$

其秩为 2 且标准型两项系数一正一负。

若 α_1 与 α_2 线性相关，则由 $f_1(X),f_2(X)$ 非零，知存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $f_2(X)=cf_1(X)$，于是

$$Q(X)=f_1(X)f_2(X)=cf_1(X)^2=c(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2$$

此时 $Q(X)$ 的秩为 1。综合上述两点，必要性得证。

再证明充分性，设 $Q(X)=X^TSX$。当 Q 的秩为 2 且标准型中的两项系数为一正一负时，$\mathrm{rank}S=2$，且 S 相合于标准型 $\Lambda=\mathrm{diag}(a,-b,0,\cdots,0)(a,b>0)$，于是存在可逆方阵 P 使得 $S=P^T\Lambda P$，于是对任意 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，有

$$Q(X)=X^TSX=X^TP^T\Lambda PX=Y^T\Lambda Y=ay_1^2-by_2^2=(\sqrt{a}y_1+\sqrt{b}y_2)(\sqrt{a}y_1-\sqrt{b}y_2)$$

其中 $Y=PX=(y_1,\cdots,y_n)^T$，每个 $y_i=p_{i1}x_1+\cdots+p_{in}x_n$ 是 X 各个分量的一次齐次多项式（其中 $1\le i\le n$）。

此时 $f_1(X)=y_1+y_2,f_2(X)=y_1-y_2$ 也是 X 的线性函数，于是 $Q(X)=f_1(X)f_2(X)$ 是两个线性函数 f_1,f_2 的乘积。

当 Q 的秩为 1 时，$\mathrm{rank}S=1$，且 S 相合于标准型 $\Lambda=\mathrm{diag}(a,0,0,\cdots,0)(a\neq 0)$。存在可逆方阵 P 使得 $S=P^T\Lambda P$，取 $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T=PX$，则每个 y_i 是 X 的线性函数。于是 $Q(X)=X^TSX=X^TP^T\Lambda PX=Y^T\Lambda Y=ay_1^2=f_1(X)f_2(X)$ 是线性函数 $f_1(X)=y_1$ 与 $f_2(X)=ay_1$ 的乘积。综上，必要性得证。 □

注. 这道题看上去属于表面上比较吓人，但是实际上仔细讨论还是会有一些结果的题目。至少如果这个题作为考试题的话是不应该得 0 分的。主要就是一些基本的讨论工作以及相合变换之类。当然这个结论还是比较重要的，因为有的时候通过这种线性函数的分解，我们能提炼出一些有用的性质，并能够对问题进行简化。

但事实上,绝大多数人本题在考试时就是只能拿 0 分。比较典型的,一些人只讨论了 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,\cdots,b_n)$ 相等的情形，但这两组系数构成的向量只要线性相关就可以将二次型化为一个完全平方。还有一些人提到了可以做可逆的线性替换 $\begin{cases} y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n \\ y_2=b_1x_1+\cdots+b_nx_n \\ y_3=x_3 \\ \quad\vdots \\ y_n=x_n \end{cases}$，但这一线性替

换并不一定可逆!! 大家可以思考一下这一线性替换在什么情况下是不可逆的。而在实际证明时，只需要说这个线性替换是可逆的，并规定好 y_1, y_2 的取值即可。

习题 7.1.3. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明：若 $|A|<0$，则存在一个实 n 维列向量 X 使得 $X^TAX<0$。

【证明】. 由于 A 为 n 阶实对称矩阵，因此存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=D$，其中 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为对角阵。

注意到 $|A|<0$，于是 $|D|=|P^T||A||P|=|A||P|^2<0$，即 $d_1d_2\cdots d_n<0$。于是存在 $1\le i\le n$，使得 $d_i<0$。

此时 $e_i^TDe_i=d_i<0$，其中 e_i 为第 i 个元素为 1，其余元素为 0 的列向量。此时取 $X=Pe_i$，有

$$X^TAX=(Pe_i)^TAPe_i=e_i^TP^TAPe_i=e_i^TDe_i<0$$

由此，即证。 □

习题 7.1.4. 设 A 是实对称矩阵，证明：当实数 t 充分大后，$tI+A$ 也是正定矩阵。

【证明】. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $\forall 1\le k\le n$，$tI+A$ 的 k 阶顺序主子式为

$$J_k=\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{vmatrix}$$

这是一个关于 t 的首一 k 次多项式，因此存在 $t_k\in\mathbb{R}$，当 $t>t_k$ 时，$J_k>0$ 恒成立。

取 $T=\max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$，则当 $t>T$ 时，$\forall 1\le k\le n$，$J_k>0$，因此 $tI+A$ 各阶顺序主子式均大于 0，因此 $tI+A$ 正定。 □

注. 就本题而言，利用顺序主子式判断正定性是一种比较简单的方法，其余方法相比之下不够正统且容易出问题，所以不是很推荐。

一些人在证明过程中并没有强调 J_k 是关于 t 的**【首一】**多项式。而如果没有首一条件，就没有充分大时子式大于 0，因此一定不要忘记强调。

习题 7.1.5. 证明：实对称矩阵正定当且仅当其任意主子式大于零。

【证明】. 充分性显然，仅证明必要性。设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个正定实对称矩阵，其所对应的 n 元二次型为 $f(X)=X^TAX$。考虑 A 的一个 k 阶子矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$，其中 $1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k\le n$。因此 B 是正定矩阵。

考虑矩阵 B 所对应的 k 元二次型 $g(Y)=Y^TBY$，可知对任意 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)^T\neq 0$，有

$$g(Y)=f(0,\cdots,0,y_1,0,\cdots,0,y_k,0,\cdots,0)^T>0$$

于是可知 B 为正定矩阵，从而 $|B|>0$。由 B 的任意性，知 A 的任一主子式均大于 0。 □

注. 对于上述矩阵 B,其对应的二次型表达式应为 $\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_j i_k}x_{i_j}x_{i_k}$ 而不是 $\sum_{j=i_1}^{i_k}\sum_{t=i_1}^{i_k}a_{i_j i_k}x_{i_j}x_{i_k}$，请大家比较二者之间的区别。

另外，在处理二次型时，一定要明确【可化为】和【等于】之间的区别。不要在两个二次型之间乱画等号！注意规范性!!

习题 7.1.6. 设 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAT$ 是实二次型，若有实 n 维向量 X_1，X_2 使得 $X_1^TAX_1>0$，$X_2^TAX_2<0$，证明：必存在实 n 为向量 $X_0\neq 0$，使得 $X_0^TAX_0=0$。

【证法一：考察二次型的实规范形】. 设 Q 的正、负惯性指数分别为 p,q，于是存在可逆矩阵 P，使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix} I_{(p)} & & \\ & -I_{(q)} & \\ & & O_{(n-p-q)}\end{pmatrix}$$

接下来，我们证明 $p>0$，若不然，则 $P^TAP=\begin{pmatrix} -I_{(q)} & \\ & O_{(n-q)}\end{pmatrix}$，则此时 A 半负定，于是任意 $X\in\mathbb{R}^n$，均有 $X^TAX\leq 0$，与存在 X_1 使得 $X_1^TAX_1>0$ 相矛盾，于是 $p>0$，同理可证得 $q>0$。

我们记 e_i 为第 i 个分量为 1 其余为 0 的单位向量，并取 $X_0=P(e_1+e_{p+1})$，则

$$X_0^TAX_0=(e_1+e_{p+1})^T\begin{pmatrix} -I_{(q)} & \\ & O_{(n-q)}\end{pmatrix}(e_1+e_{p+1})=(e_1+e_{p+1})^T(e_1-e_{p+1})=0$$

由此可知结论成立。 □

【证法二：待定系数法直接求解】. 不妨设 $X_1A^TAX_1=a>0,X_2^TAX_2=b<0$。对 $\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$(X_1+\lambda X_2)^TA(X_1+\lambda X_2)=X_1A^TAX_1+\lambda(X_2^TAX_1+X_1^TAX_2)+X_2^TAX_2\lambda^2=b\lambda^2+2X_2^TAX_1\lambda+a$$

视 $b\lambda^2+2X_2^TAX_1\lambda+a=0$ 为关于 λ 的二次方程，其判别式 $\Delta=4\left(X_2^TAX_1\right)^2-4ab>0$，因此方程有两个实根 λ_1,λ_2。此时对 $i=1,2$，有 $(X_1+\lambda_iX_2)^TA(X_1+\lambda_iX_2)=0$，且 $X_1+\lambda_1X_2$ 与 $X_1+\lambda_2X_2$ 互不相同，故至少一个非零。取 X_0 为此非零向量，即证。 □

注. 证法一告诉我们，这道题依然是一个可以利用化标准形或实规范形来进行解决的问题，当然前面关于 $p>0,q>0$ 的论证并不是显然的，所以需要体现在自己的证明过程里，当然有些人根据 p,q 的大小关系对所取出的向量进行讨论，其实本质上和直接取 $X_0=P(e_1+e_{p+1})$ 是万变不离其宗的，由此可以将取出来的向量表示地更简单，并大大减少讨论量。

而证法二则更为讨巧简洁，大家可以学习并积累一下。但请用证法二的同学也掌握一下证法一，该方法比较重要。

习题 7.1.7. 设 A 是 n 阶实对称方阵，V_0 是方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=0$ 的解集，证明：V_0 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间当且仅当 A 半正定或半负定，并且此时成立 $\dim V_0=n-\operatorname{rank}A$。

【证明】. 设 A 是半正定的，则存在矩阵 B 使得 $A=B^TB$，并且 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B=r$，且 $X^TAT=X^TB^TBX=Y^TY$，其中 $Y=BX=(y_1,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$。于是

$$X^TAX=Y^TY=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$$

而 $Y\in\mathbb{R}^n$，于是上式等价于 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，即 $Y=BX=0$，从而即方程组 $X^TAX=0$ 与 $BX=0$ 同解。因此 $X^TAX=0$ 的解集为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，并且 $\dim V_0=n-\mathrm{rank}B=n-\mathrm{rank}A$。

设 A 半负定，则令 $S=-A$，则可证明 S 是半正定的，对其做类似讨论，可得相同结果。

设 A 既不半正定也不半负定，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=\Gamma=\begin{pmatrix}-I_{(q)} & \\ & O_{(n-q)}\end{pmatrix}$，且 $p>0,q>0$，于是取 $X_1=P(e_1+e_{p+1}),X_2=P(e_1-e_{p+1})$，则 $X_1^TAX_1=X_2^TAX_2=0$，而 $(X_1+X_2)^TA(X_1+X_2)=(2e_1)^T\Gamma(2e_1)=4\neq0$，由此可知 V_0 对加法运算不封闭，不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

综上，即知所证结论成立。 □

注. 这道题其实还是常规的化二次型为规范形进行求解，当然，本题的**结论异常重要！填空选择可以直接用！！也比较爱出概念题！证明过程也很经典！**所以建议各位详细掌握。

习题 7.1.8. 计算半正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n(x_i-s)^2$ 的秩、正惯性指数和规范形。其中 $s=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$。

【证明】. 注意到，f 为半正定二次型，因此 $V_0=\{X|f(X)=0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

注意到 $f=0$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，因此 $\dim V_0=1$，因此 f 的秩为 $n-1$，正惯性指数也为 $n-1$，规范形为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-1}^2$。 □

注. 本题即为上题的应用，填空题选择题可以直接用。大题的话建议熟悉上题证明，并给出证明详细过程。

7.2 补充练习

例 7.2.1. 分别求空间曲线 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴，绕 y 轴旋转所得的曲面方程。

例 7.2.2. 分别求母线平行于 x 轴和 y 轴且过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程。

例 7.2.3. 试判断，下列三维空间上的二次曲面为何种曲面：

（1）$x^2+3y^2+z^2-4xz-1=0$；

（2）$x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-4yz-3=0$；

（3）$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$。

例 7.2.4. 用矩阵的初等变换化下列实二次型为标准形和规范形，并写出相合变换的变换矩阵：

（1）$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$；

（2）$f=x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$。

例 7.2.5. 试问，当 λ 取何值时，实二次型 $f=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3x_2^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2y_2$ 是：（1）正定二次型；（2）半正定二次型；（3）负定二次型；（4）半负定二次型；（5）是实系数一次多项式的完全平方。

例 7.2.6 (几道小题). 回答如下问题：

（1）已知实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&a\\-1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&2\end{pmatrix}$ 相合，求 a,b 的取值范围；

（2）已知 $\begin{pmatrix}5&x&\\2-x&x+y&\\&&x-y^2\end{pmatrix}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ 是正定方阵，求 y 的取值范围；

（3）求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_n-x_1)^2$ 的正惯性指数。

例 7.2.7 (相合标准型的应用). 证明如下结论：

（1）秩为 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和；

（2）设 A 是秩为 r 的对称矩阵，证明：存在 r 个列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使得 $A=\beta_1\beta_1^T+\beta_2\beta_2^T+\cdots+\beta_r\beta_r^T$。

例 7.2.8. 证明：若 A 是一个半正定矩阵，则存在 n 阶矩阵 C 使得 $A=C^TC$ 且满足 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C$。

例 7.2.9. 证明：设 A 为实反对称矩阵，则 $I-A^2$ 正定。

例 7.2.10. 已知实二次型 $f=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2$ 正定，记矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$，判断 A 是可否为可逆阵，并说明理由。

例 7.2.11 (函数观点解题，结论建议积累). （1）设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：当实数 t 充分大时，$tI+A$ 是正定矩阵；

（2）设 A 是 n 阶半正定矩阵，证明：当实数 $t>0$ 时，$tI+A$ 是正定矩阵。

例 7.2.12. 如果 A,B 都是 n 阶正定矩阵，证明：$A+B$ 也正定。

例 7.2.13. 求实对称方阵在实相合下的标准型：

（1）$\begin{pmatrix}O&I_{(n)}\\I_{(n)}&I_{(n)}\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}2&1&&\\1&2&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&1&2\end{pmatrix}_{n\times n}$

例 7.2.14. 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正负惯性指数分别是 p,q，证明：

（1）存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 V 使得该二次型在 V 中取值为 0，其中 $\dim V=\min\{n-p,n-q\}$（min 代表集合中最小的数）。

（2）$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间当且仅当 $p=0$ 或者 $q=0$。

例 7.2.15 (一个综合计算). 给定实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$。

(1) 求二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的方阵 S;

(2) 求三阶实可逆方阵 P 使得 P^TSP 为标准型;

(3) 求 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数，负惯性指数和符号差。

例 7.2.16 (关于证明规范性). 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充要条件是，它的秩等于 2 且标准形中两项的系数一正一负，或者秩等于 1。

例 7.2.17 (关于证明规范性). 证明：实对称矩阵正定当且仅当其任意主子式大于零。

例 7.2.18. 设 A 为实对称 n 阶可逆方阵，A 与 A^{-1} 是否一定相合？是则证明，否则举出反例。

例 7.2.19. 设 S 是 n 阶实对称矩阵。求证：如果存在 n 维实列向量 X_1,X_2 使 $X_1^TSX_1 > 0 > X_2^TSX_2$，则存在 n 维实列向量 $X_0 \neq 0$ 使得 $X_0^TSX_0 = 0$。

例 7.2.20. 设 A 是一个 $m \times n$ 实矩阵，证明：方程组 $AX = 0$ 和方程组 $A^TAX = 0$ 是同解的。

例 7.2.21 (半正定矩阵的充分必要条件). 给定实二次型 $f = X^TAX$，其中 A 为实对称矩阵。证明：f 半正定的充分必要条件是 A 的所有主子式都为非负实数。并举例说明：若仅有 A 的所有顺序主子式都非负，f 未必是半正定的。

例 7.2.22 (n 元二次型的“根”). 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正负惯性指数分别是 p,q，证明：

(1) 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 V 使得该二次型在 V 中取值为 0，其中 $\dim V = \min\{n-p, n-q\}$ (min 代表集合中最小的数)。

(2) $W = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n | f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间当且仅当 $p = 0$ 或者 $q = 0$，即 f 是半正定或半负定的，且此时成立 $\dim W = n - \mathrm{rank} f$。

例 7.2.23 (“正定子空间”). 设 n 元满秩二次型 $Q(X)$ 的正负惯性指数分别为 $r,s \geq 1$，证明：

(1) 分别存在 $\mathbb{R}^n$ 中的 r,s 维子空间 W_1,W_2 满足 $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$，且 $Q(X)$ 限制在 W_1,W_2 上分别是正定的和负定的。

(2) 若 W 是 $\mathbb{R}^n$ 上的子空间且 $Q(X)$ 限制在 W 上是正定的，则 $\dim W \leq r$。

例 7.2.24. 已知 A 是 n 阶实对称矩阵，B 是 n 阶实方阵且 $(AB)+(AB)^T$ 是正定矩阵，证明：矩阵 A 没有零特征值。

例 7.2.25. 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶实可逆矩阵，二次型 $f(X)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & O \end{pmatrix}$。

(1) 证明：$B^TA^{-1}B$ 为正定矩阵；

(2) 求 f 的正负惯性指数。

7.3 要点与结论

7.3.1 双线性函数

在七八两章中涉及到的二次型和内积的定义中，都涉及到了**双线性**这一性质，那么下面就对双线性函数这一内容做一个简单说明，大家在学习过程中可以参考比对。

在处理二次型问题时，有时候我们会碰到一些有趣的结果，比如

$$(\alpha_1+\alpha_2)^T A\beta=\alpha_1^T A\beta+\alpha_2^T A\beta,$$

$$\alpha^T A(\beta_1+\beta_2)=\alpha^T A\beta_1+\alpha^T A\beta_2,$$

$$(k\alpha)^T A\beta=\alpha^T A(k\beta)=k(\alpha^T A\beta),$$

其中 α,β 均为列向量。那么可能我们有的时候会想，这些共性能否得以抽象出来，从而形成一个观点更高的理论体系？对上述问题而言，这是可行的，为此我们将引入**双线性函数**的概念。为此，我们先回顾一下线性函数的相关内容，先从不同于课文叙述内容的角度提出一个线性函数的定义：

定义 7.3.1. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，如果对于 V 中任意向量 α，都能够按照每个给定的法则 f 对应于 $\mathbb{F}$ 内的一个唯一确定的数，记作 $f(\alpha)$，而且满足如下条件

（1）$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)(\forall\alpha,\beta\in V)$

（2）$f(k\alpha)=kf(\alpha)(\forall\alpha\in V,k\in\mathbb{F})$

则称 f 为 V 内的一个**线性函数**。

如果把 $\mathbb{F}$ 看做它子身上的线性空间，那么 f 就是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 到 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathbb{F}$ 的一个线性映射，因此 f 适合线性映射的相关性质。下面我们将以这一概念为基础，引入双线性函数的核心概念：

定义 7.3.2. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，如果对于 V 的任意一对有序向量 (α,β) 都按照某一法则 f 对应于 $\mathbb{F}$ 内的一个唯一确定的数，记作 $f(\alpha,\beta)$，而且满足如下条件

（1）对任意 $k_1,k_2\in\mathbb{F},\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V$，有

$$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta);$$

（2）对任意 $l_1,l_2\in\mathbb{F},\alpha,\beta1,\beta_2\in V$，有

$$f(\alpha,l_1\beta_1+l_2\beta_2)=l_1f(\alpha,\beta_1)+l_2f(\alpha,\beta_2);$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内的一个**双线性函数**。

根据上述定义可知，如果 β 保持不动，则 $f(\alpha,\beta)$ 是 α 的线性函数，同样，如果 α 保持不动，则 $f(\alpha,\beta)$ 是 β 的线性函数，这也就是为什么称它为双线性函数的原因，而由此，我们也可以感受到双线性函数与线性映射之间存在一些联系，而事实上，我们有下面的类似于线性变换的两条结论：

定理 7.3.1. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，在 V 内取定一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，则有

（1）V 上一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 由它在此组基处的函数值 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 唯一确定。换句话说，如果有一个双线性函数 $g(\alpha,\beta)$ 满足 $g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$，则 $g(\alpha,\beta)\equiv f(\alpha,\beta)$

（2）任给数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} (a_{ij}\in\mathbb{F}),$$

则存在 V 上唯一的一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 使得 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$

【证明】.（1）我们设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n;$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n.$$

那么，根据定义，我们有

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= f(\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f(\varepsilon_i, \sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) \end{aligned}$$

可见，$f(\alpha,\beta)$ 由它在一组基处的函数值唯一确定，即证。

（2）我们将 α,β 改写为矩阵形式，有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X;$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y.$$

则令

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j = X^TAY$$

若

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 &= k_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X_1 + k_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X_2 \\ &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(k_1X_1+k_2X_2) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta) &= (k_1X_1+k_2X_2)^TAY \\ &= k_1X_1^TAY + k_2X_2^TAY \\ &= k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta) \end{aligned}$$

类似的，有

$$f(\alpha, l_1\beta_1+l_2\beta_2) = l_1f(\alpha,\beta_1)+l_2f(\alpha,\beta_2)$$

故 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内的双线性函数，且代入 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$，立知 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}$。 □

于是，与线性变换类似地，我们称

$$\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

为双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**矩阵**。此时，V 的每一个双线性函数都能对应于 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 阶方阵。

更进一步的，记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 利用矩阵乘法的关系，双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 可以表做

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \\ &= (x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^TAY \end{aligned}$$

在定义了双线性函数在基下的矩阵之后，我们类似于线性变换，进一步给出双线性函数在不同基下矩阵的关系，为此，我们先提出**相合**的概念

定义 7.3.3. 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的两个 n 阶方阵 A,B，若存在 $\mathbb{F}$ 上的一个可逆的 n 阶方阵 P，使得 $B=P^TAP$，则称 B 与 A 在 $\mathbb{F}$ **相合**

定理 7.3.2. 数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶方阵相合的充分必要条件是它们是 $\mathbb{F}$ 上 n 为线性空间 V 内一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在两组基下的矩阵

【证明】. 类比线性变换在不同基下矩阵的定义，自行完成。 □

紧接着，我们将双线性函数的概念一般化，使之同**二次型**建立联系，为此，我们先提出**对称双线性函数**的概念：

定义 7.3.4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 内的一个双线性函数，如果对于 $\alpha,\beta\in V$，有 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，则称 $f(\alpha,\beta)$ 是一个**对称双线性函数**。

不难看出，对称双线性函数在 V 的任意一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 n 阶对称矩阵，反正，给定数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 阶对称矩阵，按照定理 1 的方法可以类似定义一个对称双线性函数使得其称为这个双线性函数在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的矩阵，因此我们建立了一个 V 的全体 n 阶矩阵和全体对称双线性函数之间的一个一一对应关系。

现在考虑一个 V 中的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，我们定义 $Q_f(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$ 为 $f(\alpha,\beta)$ 决定的一个**二次型函数**。而当 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 时，我们有

$$Q_f(\alpha)=f(\alpha,\alpha)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

上式被称为二次型函数 $Q_f(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**解析表达式**。

这里注意的是，二次型函数的作用对象是**一个向量**，因此在给定一个对称双线性函数之后，其二次型函数 $Q_f(\alpha)$ 被唯一确定，反之，因为

$$\begin{aligned} Q_f(\alpha+\beta) &= f(\alpha+\beta,\alpha+\beta) \\ &= f(\alpha,\alpha)+2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta) \\ &= Q_f(\alpha)+2f(\alpha,\beta)+Q_f(\beta) \end{aligned}$$

于是

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(Q_f(\alpha+\beta)-Q_f(\alpha)-Q_f(\beta))$$

这说明二次型函数也唯一决定对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，因为基于这一点，如果另有 V 内对称双线性函数 $g(\alpha,\beta)$ 使得 $Q_f(\alpha)=Q_g(\alpha)$，则 $f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta)$。

这里需要特别注意的是：仅有**当一组基完全取定的时候才可以进一步建立对称双线性函数（或二次型函数）和矩阵的一一对应关系，而基不确定的时候是无法给出对称双线性函数（或二次型函数）的矩阵的。**

下面这个定理为矩阵的相合对角化提供了理论基础：

定理 7.3.3. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 内的一个对称双线性函数，则在 V 内存在一组基，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵成对角形。

因为由上述定理我们可以推得：

定理 7.3.4. 设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对称方阵，则存在 $\mathbb{F}$ 上的一个可逆方阵 P，使得 $P^TAP=D$ 为对角形。

最后我们可以定义双线性函数的秩，由于双线性函数在不同基下的矩阵相合，因此我们可以将双线性函数的秩对应到矩阵的秩上去，因此我们有如下的定义：

定义 7.3.5. 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 内的一个双线性函数，它在某一组基下的矩阵 A 的秩 $\mathrm{rank}A$ 称为 $f(\alpha,\beta)$ 的**秩**。如果 A 是满秩的，则称 $f(\alpha,\beta)$ 为**满秩双线性函数**（或**非退化双线性函数**）。

Chapter 8

欧式空间与内积

8.1 习题解析

习题 8.1.1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一组基，$\alpha,\beta\in V$，证明：

（1）$\alpha=0$ 当且仅当 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立。

（2）$\alpha=\beta$ 当且仅当 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=\langle\beta,\alpha_i\rangle$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立。

【证明】.（1）一方面，若 $\alpha=0$，根据**内积的性质**，有 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0(\forall 1\le i\le n)$。

另一方面，若 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，故存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，于是

$$\left|\alpha^2\right|=\langle\alpha,\alpha\rangle=\left\langle\alpha,\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0$$

于是可知 $\alpha=0$。

（2）根据（1），有

$$\begin{aligned}\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\langle\alpha-\beta,\alpha_i\rangle&=0(\forall 1\le i\le n)\\ \Leftrightarrow\langle\alpha,\alpha_i\rangle&=\langle\beta,\alpha_i\rangle(\forall 1\le i\le n)\end{aligned}$$

□

注. 很多人的证明思路是：设 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$**【甚至有些人在没有明确基的前提下直接写了坐标表示“$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$”，这种写法放到上学期也是相当荒唐!!】**，之后有 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=a_i$。但此时$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ **不是欧式空间中的标准正交基!!** 所以这么写的同学应予以注意并修改！

习题 8.1.2. （1）求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+3x_2+5x_3+8x_4=0\end{cases}$ 的解空间的一组标准正交基。

（2）将 $(1,1,1,1,1)$，$(2,3,5,8,0)$ 扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基。

【解答】.（1）方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+3x_2+5x_3+8x_4=0\end{cases}$ 的一组线性无关解为 $\alpha_1=(2,-3,1,0,0),\alpha_2=$

$(5,-6,0,1,0),\alpha_3=(-3,2,0,0,1)$，其构成解空间 U 的一组基，对其进行施密特正交化，有

$$\begin{aligned}\beta_1=&(2,-3,1,0,0)\\ \beta_2=&\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-2,1,0)\\ \beta_3=&\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_1,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_1,\beta_2)}\beta_1=(-11,-8,-2,7,14)\end{aligned}$$

再进行单位化，可得解空间的一组标准正交基为

$$\begin{cases}\varepsilon_3=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},0,0\right)\\ \varepsilon_4=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)\\ \varepsilon_5=\left(-\frac{11\sqrt{14}}{14\sqrt{31}},-\frac{4\sqrt{14}}{7\sqrt{31}},-\frac{\sqrt{14}}{7\sqrt{31}},\frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{31}},\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{31}}\right)\end{cases}$$

（2）注意到 $\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 都是方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ 2x_1+3x_2+5x_3+8x_4=0\end{cases}$ 的解，于是两两正交的向量 $\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 中的任意一个向量均同时与 $(1,1,1,1,1)$ 和 $(2,3,5,8,0)$ 正交。因此，我们只需要找出 $(1,1,1,1,1)$ 和 $(2,3,5,8,0)$ 生成的标准正交基，就能得到所需要的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，进而扩充得到 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$。其中

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ \varepsilon_2=\left(-\frac{8}{\sqrt{930}},-\frac{3}{\sqrt{930}},\frac{7}{\sqrt{930}},\frac{22}{\sqrt{930}},-\frac{18}{\sqrt{930}}\right)\end{cases}$$

□

注. 很多人在本题中耍小聪明，直接取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为 e_1,e_2,e_3，之后通过对 $(1,1,1,1,1)(2,3,5,8,0)$ 正交化得到 $\varepsilon_4,\varepsilon_5$。但题目说**将 $(1,1,1,1,1)$，$(2,3,5,8,0)$ 扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基**，因此**$(1,1,1,1,1)$，$(2,3,5,8,0)$ 这两个向量应该在最前**。所以这种耍小聪明的做法并不合适。

当然，我们倘若借助第一问的相关结论，其实可以在一定程度上进一步压低计算量。当然这个题如果说基向量取得不好可以导致计算量出奇之大，所以需要各位在解题之前有所权衡、有所考量。

习题 8.1.3. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 n 维欧式空间 V 的一组标准正交基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 V 的任意 k 个向量。证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 两两正交的充要条件是 $\sum_{s=1}^n(\alpha_i,e_s)(\alpha_j,e_s)=0$ 对 $\forall 1\le i<j\le k$ 成立。

【证明】. 对 $\forall 1\le i\le k$，设 $\alpha_i=a_{i1}e_1+\cdots+a_{in}e_n$，则由于 $e_1,\cdots,e_n$ 为标准正交基，故 $(\alpha_i,e_s)=a_{is}$。进而对 $\forall 1\le i<j\le k$，$\sum_{s=1}^n(\alpha_i,e_s)(\alpha_j,e_s)=\sum_{s=1}^n a_{is}a_{js}$。

与此同时，

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(a_{i1}e_1+\cdots+a_{in}e_n,a_{s1}e_1+\cdots+a_{sn}e_n)=\sum_{s=1}^n a_{is}a_{js}$$

因此 $\sum_{s=1}^n(\alpha_i,e_s)(\alpha_j,e_s)=(\alpha_i,\alpha_j)$，进而 α_i,α_j 两两正交当且仅当 $\sum_{s=1}^n(\alpha_i,e_s)(\alpha_j,e_s)=0$，再由 i,j 的任意性，可知结论成立。 □

注. 在本题中，由于已经指定了 $e_1,\cdots,e_n$ 为标准正交基，因此可以放心大胆地利用关于标准正交基的相关性质予以处理。

习题 8.1.4. 若 A 为正交矩阵，证明：

（1）A^{-1}，A^T 均为正交矩阵，并且 $|A|=1$ 或 $|A|=-1$；

（2）$(A^*)^T=(A^*)^{-1}$，此处 A^* 为 A 的伴随矩阵。

【证明】.（1）由于 A 为正交矩阵，因此 $A^{-1}=A^T$，此时 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$，因此 A^{-1} 也为正交矩阵，且 $A^T=A^{-1}$ 为正交矩阵。

由 $AA^T=I$ 知 $\left|AA^T\right|=|A|\left|A^T\right|=|A|^2=1$，于是 $|A|=\pm1$。

（2）注意到 A 可逆，于是 $A^*=|A|A^{-1}$，于是 $(A^*)^T=|A|\left(A^{-1}\right)^T=|A|A$，$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$，而由于 $|A|=\pm1$ 知 $|A|=|A|^{-1}$，因此 $(A^*)^T=(A^*)^{-1}$，即 A^* 是正交阵。 □

注. 本题证明整体上问题不大，主要是结论本身很重要，需要积累。当然个别同学有循环论证的问题，需要特别引起注意。

习题 8.1.5. 证明任何二阶正交矩阵，必取下面两种形式之一：

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix},0\le\phi<2\pi$$

且第一种有一对共轭的虚特征值 $\cos\phi\pm i\sin\phi$，第二种正交相似于 $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$。

【证明】. 设 $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ 为二阶正交矩阵，则有

$$A^TA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}=I$$

从而 $a^2+b^2=1$，从而 $|a|\le1$。

令 $\phi_1=\arccos a$，其中 $0\le\phi\le\pi$，则有 $a=\cos\phi_1$，从而 $b^2=\sin^2\phi_1$。

如果 $b\ge0$，则取 $\phi=\phi_1$，得 $a=\cos\phi,b=\sin\phi$，此时 $0\le\phi\le\pi$，

如果 $b<0$，则取 $\phi=2\pi-\phi$，得 $a=\cos\phi,b=\sin\phi$，此时 $\pi\le\phi<2\pi$。

总之有唯一的 $\phi\in[0,2\pi]$ 使得 $a=\cos\phi,b=\sin\phi$。

由于

$$AA^T=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}=I$$

知 $a^2+c^2=1$ 且 $b^2+d^2=1$，从而 $c=\pm\sin\phi$，$d=\pm\cos\phi$。

最后由 $ac+bd=0$ 得 $ac=-bd$，从而 $(c,d)=(\sin\phi,-\cos\phi)$ 或 $(-\sin\phi,\cos\phi)$。于是 $A=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$ 或 $A=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}$。

对于第一种情况，其特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \lambda-\cos\phi\end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\phi\lambda+1=0$，解得 $\lambda=\cos\phi\pm i\sin\phi$。

对于第二种情况，其特征多项式为 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \lambda + \cos\phi \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$，解得 $\lambda = \pm 1$，因此正交相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$。 □

注. 本题给出了二阶正交矩阵的分类。而大家的讨论过程往往有些许瑕疵，上述讨论过程相对而言比较细致，希望大家借此理清一下本题思路，以防丢失关键步。

习题 8.1.6. 设 $A = (a_{ij})$ 为三阶正交矩阵，且 $\det A = 1$，证明：

（1）$\lambda = 1$ 必为 A 的特征值；

（2）存在正交阵 P，使得 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$；

（3）$\varphi = \cos^{-1}\dfrac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$。

【证明】. （1）注意到 $\det A = \det A^T = 1$，结合正交性，有

$$|A - I| = |A^T||A - I| = |I - A^T| = (-1)^3|A^T - I| = -|A - I|$$

于是 $|A - I| = 0$，故必有特征值 $\lambda = 1$。**【注：根据正交矩阵特征值模为 1 进行讨论亦可】**

（2）由于 A 有特征值 1，设其关于特征值 1 的一个**单位特征向量**为 X_1，其可以扩充为欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一组标准正交基 $S = \{X_1, X_2, X_3\}$。取 $P = (X_1, X_2, X_3)$，则 P 为正交阵，于是有

$$\begin{aligned} P^TAP &= \left(X_1^T, X_2^T, X_3^T\right) A\,(X_1, X_2, X_3) = \left(X_1^T, X_2^T, X_3^T\right)(AX_1, AX_2, AX_3) \\ &= \left(X_1^T, X_2^T, X_3^T\right)(X_1, AX_2, AX_3) = \begin{pmatrix} X_1^TX_1 & b_{12} & b_{13} \\ X_2^TX_1 & b_{22} & b_{23} \\ X_3^TX_1 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

而由于 A 为正交矩阵，故可知 P^TAP 为正交矩阵，从而 P^TAP 各列两两正交，由此可知 $b_{12} = b_{13} = 0$。此外，由 $\det A = 1$，可知 $\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 1$，于是可知 $\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 必然具有形式 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$。

综上，$P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$。

（3）由于 $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\left(P^TAP\right) = 1 + 2\cos\varphi$，于是 $\varphi = \cos^{-1}\dfrac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$，即证。 □

注. 正交变换其实完全可以看成欧式空间上的一种"旋转"变换，本题以三维空间为例，将正交矩阵相似到了一个大家比较熟悉的旋转矩阵，来说明这一点。因此，除了题目之外，本题的几何意义同样非常重要。

另外，本题部分同学关于对 $b_{12} = b_{13} = 0$ 的讨论存在问题，请予以关注并研读答案。

习题 8.1.7. 证明定义 8.4.4 中 W 在 V 中的正交补 $W^\perp$ 是 V 的子空间，并且满足

$$W \perp W^\perp, W \oplus W^\perp = V$$

【证明】. 【仅证明 $W \oplus W^\perp = V$，其余部分自行补充】若存在 $\alpha \in W \cap W^\perp$，则 $\alpha \in W$，而 $\alpha \in W^\perp$，于是 α 与 W 中的任一向量均正交。于是 $|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = 0$，从而 $\alpha = 0$，故 $W \cap W^\perp = \{0\}$ 故 $W + W^\perp = W \oplus W^\perp$。

进一步地，设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 为 W 的一组标准正交基，则其可以扩充为 V 的一组标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，故对 $\forall s+1 \le k \le n$，有 $(\alpha_k, \alpha_i) = 0$ 对任意 $1 \le i \le s$ 成立，因此 $\alpha_k \perp W$，即 $\alpha_k \in W^\perp$。由于 $W^\perp$ 为 V 的子空间，故 $L(\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n) \subset W^\perp$。

因此对任意 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s + a_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + a_n\alpha_n \in V$，有 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s \in W$ 且 $a_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + a_n\alpha_n \in W^\perp$，于是 $W + W^\perp \supset V$，而 $W, W^\perp$ 为 V 的子空间，因此 $W + W^\perp \subset V$，故 $W + W^\perp = V$。

综上，有 $W \oplus W^\perp = V$。 □

注. 证明两个子空间的和等于全空间的直和意味着分别证明两个子空间的和为直和以及两个子空间的和为全空间，缺一不可，很多人只证明了“是直和”，可见其对上学期知识的忘却和对作业态度的敷衍。

另外，证明两个子空间的和为全空间过程中，部分同学证明思路有问题。应先取 W 的基，再扩充为标准正交基，证明扩充部分在 $W^\perp$ 中，很多人并未按上述思路进行论证导致证明出现错误，需引起注意。

习题 8.1.8. 设 S 是 n 阶实对称方阵，求证：定义在 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 的子集 $U = \{X \in \mathbb{R}^{n\times 1} | |X| = 1\}$ 上的函数 $f(X) = X^TSX$ 的最大值和最小值分别是 S 的最大和最小特征值。

【证明】. 实对称方阵 S 的特征值 λ 都是实数，可以按从大到小的顺序排列为 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n$。存在正交方阵 P 将 S 相似到对角阵 $P^{-1}SP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。

对 $\forall X \in U$，设 $Y = P^{-1}X = (y_1, \cdots, y_n)$，于是

$$f(X) = (PY)^TS(PY) = Y^TP^TSPY = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

再注意到，有 $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = |Y|^2 = \left(P^{-1}X\right)^T\left(P^{-1}X\right) = X^TX = 1$，从而 $f(X) \le \lambda_1(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1$，且 $f(X) \ge \lambda_n(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_n$。

并且，取 $X_1 = Pe_1$，$X_n = Pe_n$，即有 $f(X_1) = e_1^T\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)e_1 = \lambda_1$，且 $f(X_n) = e_n^T\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)e_n = \lambda_n$。这就证明了 $f(X)$ 的最大值等于最大特征值 λ_1，最小值等于最小特征值 λ_n。 □

注. 对于本题，在根据正交相似对角化和对 Y 讨论得到 λ_1 和 λ_n 这两个上下界后，还不足以得出 λ_1 和 λ_n 就是最大值或最小值，因为该部分论证中的推理全是“必要的”而非“充要的”。而只有在后面取出 X_1 和 X_n 后才能完整说明，这点需要大家注意。

习题 8.1.9. 证明：A 为正定矩阵的充分必要条件是存在正定矩阵 Q，使得 $A = Q^2$。

【证明】. 先证充分性，若存在正定矩阵 Q，使得 $A = Q^2$，则对任意向量 x，有

$$x^TAx = x^TQ^2x = x^TQ^TQx = (Qx)^T(Qx) = (Qx, Qx) \ge 0$$

且等号成立当且仅当 $Qx=0$，结合 Q 的可逆性，知此时必有 $x=0$，因此可知 A 为正定矩阵。

再证必要性，由于 A 为正定矩阵，故存在正交矩阵 P，使得 $A=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，它们均为正数，故此时有

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})PP^{-1}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$$

进而令 $Q=P^{-1}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P$，有 $A=Q^2$，且 Q 的特征值全为正数，因而正定，即证。 □

习题 8.1.10. 设 A,B 均为 n 阶实对称正定矩阵，证明：如果 $A-B$ 正定，则 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定。

【证明】. 存在可逆方阵 Q 将正定矩阵 A 相合到单位阵，即 $Q^TAQ=I$，此时存在正交矩阵 R 将 Q^TBQ 正交相似到对角阵，即 $R^T(Q^TBQ)R=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵，此时 $R^T(Q^TAQ)R=R^TR=I$，故取 $P=QR$，有 $P^TAP=I$ 且 P^TBP 为对角阵。

由于 B 正定，知 $\forall 1\le i\le n$，有 $\lambda_i>0$，再由 $A-B$ 正定知 $P^T(A-B)P=\mathrm{diag}(1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n)$ 正定，于是 $\forall 1\le i\le n$，有 $\lambda_i<1$。

此时成立 $\left(P^TAP\right)^{-1}=P^{-1}A\left(P^{-1}\right)^T=I$，同时有

$$\left(P^TBP\right)^{-1}=P^{-1}B\left(P^{-1}\right)^T=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

因此 $P^{-1}\left(B^{-1}-A^{-1}\right)\left(P^{-1}\right)^T=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}-1,\frac{1}{\lambda_2}-1,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}-1\right)$，由 $0<\lambda_i<1$ 知 $\frac{1}{\lambda_i}-1>0$，因此 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定。 □

注. 这道题大家还是要注意前面证明的结论，即之前所讲过的“同时相合对角化”。

8.2 补充练习

例 8.2.1. 完成下列计算：

（1）求平面 $2x-y+z=7$ 与 $3x+2y+2z-11=0$ 的夹角；

（2）求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角；

（3）求点 $A(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离；

（4）求点 $A(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离。

例 8.2.2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，定义 $\mathbb{R}^3$ 上的内积：$(X,Y)=X^TAY$。

（1）求此内积在 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$ 下的度量矩阵；

（2）试求由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化所给出的一组标准正交基。

例 8.2.3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中（带有标准内积）用施密特正交化方法将向量 $\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,0,1)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$ 化为标准正交基。

例 8.2.4. 设 V 是一个 n 维欧式空间，α 是 V 中一个固定的非零向量。试证明：所有与 α 正交的向量构成一个子空间，并确定这个子空间的维数。

例 8.2.5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一组基，$\alpha,\beta\in V$，证明：

（1）$\alpha=0$ 当且仅当 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立。

（2）$\alpha=\beta$ 当且仅当 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=\langle\beta,\alpha_i\rangle$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立。

例 8.2.6 (如何利用“标准正交基”). 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 n 维欧式空间 V 的一组标准正交基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 V 的任意 k 个向量。证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 两两正交的充要条件是 $\sum_{s=1}^n(\alpha_i,e_s)(\alpha_j,e_s)=0$ 对 $\forall 1\le i<j\le k$ 成立。

例 8.2.7 (Bessel 不等式). 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是有限维欧式空间 V 中一组两两正交的单位向量，α 是 V 中任意向量。证明：$\sum_{i=1}^k(\alpha,\alpha_i)^2\le|\alpha|^2$。而且向量 $\beta=\alpha-\sum_{i=1}^k(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$ 与每个 α_i 都正交。

例 8.2.8 (Parseval 等式). 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维欧式空间 V 的一组向量，证明下面的命题等价：

（1）$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组标准正交基；

（2）Parseval 等式成立，即对任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n(\alpha,\alpha_i)(\beta,\alpha_i)$；

（3）对任意 $\alpha\in V$，$|\alpha|^2=\sum_{i=1}^n(\alpha,\alpha_i)^2$。

例 8.2.9. 设 V 为 n 维欧式空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 分别是 V 上的两组基。设基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的 Gram 矩阵为 G，再设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵为 C，求基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的 Gram 矩阵。

例 8.2.10. 证明：在 $\mathbb{R}^n$（取标准内积）中存在一个非零线性变换 φ，使得 $\varphi(\alpha)\perp\alpha$ 对 $\forall\alpha\in V$ 成立。

【注：在 $\mathbb{C}^n$ 中上述变换不存在，这一情形的证明需要一些关于 Jordan 标准形的深入理论，在此不作要求。】

例 8.2.11 (Risez 表示定理的一个简易版本). 设 $f(\alpha)$ 是 n 维欧式空间 V 内的一个线性函数，证明在 V 中存在一个固定向量 β，使得对一切 $\alpha\in V$，有 $f(\alpha)=(\alpha,\beta)$。

例 8.2.12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是欧式空间 V 内的一个向量组，令

$$D=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_s)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_s)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_s,\alpha_1)&(\alpha_s,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_s,\alpha_s)\end{pmatrix}$$

证明：D 为半正定阵。$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件为 D 可逆，即 D 正定。

例 8.2.13 (用正交变换将二次型化为标准形). 给出实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$，求正交矩阵 T 使得在线性替换 $X=TY$ 下，化该二次型为标准形（要求给出 T 的计算过程和标准形）。

例 8.2.14 (正交方阵的正交相似标准形). 设 $\mathbb{R}^3$（标准内积空间）某个正交变换 σ 在自然基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，求正交阵 A 的正交相似标准型 B。（不需求出使 $P^{-1}AP = P^TAP = B$ 的 P）

例 8.2.15. 设 A 为 n 阶正交矩阵，证明：

（1）若 $\det A = -1$，则 $\det(I + A) = 0$；

（2）若 n 为奇数，且 $\det A = 1$，则 $\det(I - A) = 0$。

例 8.2.16. 证明：如果 A, B 都是正交方阵，且 $\det A = -\det B$，则 $\det(A + B) = 0$。

例 8.2.17 (镜面反射). 给定 α 为 n 维欧式空间 V 中的非零向量，定义 V 中的线性变换 $\tau_\alpha : \beta \mapsto \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$，证明：

（1）τ_α 为正交变换；

（2）τ_α 在适当的标准正交基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$。

例 8.2.18. 设 A 为 n 阶实对称矩阵,证明 $f(X) = X^TAX$ 作为定义在 $U = \{X | X \in \mathbb{R}^n, |X| = 1\}$ 的实函数（$\mathbb{R}^n$ 指具有标准内积的 n 维列向量欧几里得空间），其最大值和最小值分别等于 A 的最大与最小特征值。

例 8.2.19. 设 A 为 n 阶正交矩阵，X_0, Y_0 分别为实 n 维向量，已知在 $\mathbb{R}^n$ 标准内积下，X_0 与 AY_0 的长度分别为 6 和 3。

（1）求 $A^{-1}X_0 + Y_0$ 的长度的最大值和最小值；

（2）若 $|X_0 - AY_0| = 3\sqrt{3}$，求 AX_0 和 A^2Y_0 的夹角。

例 8.2.20. 证明：A 为正定矩阵的充分必要条件是存在正定矩阵 Q，使得 $A = Q^2$。

例 8.2.21 (同时相似对角化). 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵，B 为 n 阶实对称矩阵，证明：存在实可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = I$，P^TBP 为对角形。

例 8.2.22. 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵，B 为 n 阶实对称矩阵，证明：若乘积 AB 的特征值都是正实数，则 B 为正定矩阵。

例 8.2.23. 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵，B 为 n 阶实对称半正定矩阵，证明：$|A + B| \geq |A| + |B|$。

例 8.2.24. 设 σ 是 n 维欧式空间上的对称变换，若 $\sigma^2 = 0$，证明：$\sigma = 0$。

例 8.2.25. 设三阶实矩阵 A 的特征多项式为 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$，证明：A 既不是正交矩阵也不是对称矩阵。

例 8.2.26. 证明：若 A 是 n 阶正定阵，则 $A + A^{-1} - 2I_n$ 为半正定阵，进而 $\left|A + A^{-1}\right| \geq 2^n$。

例 8.2.27. 设 A 为实对称阵，证明：A 正定当且仅当下面条件之一成立：

（1）存在实对称正定阵 S 使得 $A = S^2$；

（2）存在可逆实矩阵 B 使得 $A = BB^T$。

例 8.2.28. 设 A 和 B 均为 n 阶实对称正定矩阵，若 $A-B$ 正定，证明：$B^{-1}-A^{-1}$ 正定。

例 8.2.29. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一组基，σ 是 V 上的线性变换，且满足

$$\sigma(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)=x_n\alpha_1+x_{n-1}\alpha_2+\cdots+x_1\alpha_n$$

$\forall\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

（1）求出 σ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 A；

（2）判断 A 是否相似于一个对角矩阵，并说明你的理由；

（3）判断 σ 何时为正交变换，并说明理由。

例 8.2.30. 欧几里得空间 V 的一个保持内积不变的线性同构变换称为欧几里得空间 V 的一个同构变换。请问：欧几里得空间（含无穷维）的同构变换和正交变换是同一个概念吗？请做出判断并加以证明。

例 8.2.31. 证明 n 维欧式空间 V 的子空间 W 的正交补 $W^{\perp}$ 是 V 的子空间，并且满足 $W\oplus W^{\perp}=V$。

例 8.2.32. 欧几里得空间 V 中的线性变换 σ 称为反对称的，如果对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta))$$

证明：

（1）σ 为反对称变换的充要条件是，σ 在一组标准正交基下的矩阵为反对称矩阵；

（2）如果 W 是反对称线性变换 σ 的不变子空间，那么它的正交补空间 $W^{\perp}$ 也是。

Chapter 9

2022 级考试试卷

一、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 $\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(2,0,1,-1),\alpha_3=(3,0,3,0),\beta_1=(1,1,0,1),\beta_2=(4,1,3,1)$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，则 V_1+V_2 的维数是____________。

2. $k=$____________时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+3x_2+kx_3=3\\x_1+kx_2+3x_3=2\end{cases}$ 有无穷多解。

3. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta=\sum_{i=1}^m\alpha_i,m>1$，则向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性____________。

4. 按照多项式通常意义下的加法和数乘运算，下面的集合构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间的有____________。
   (a) 数域 $\mathbb{F}$ 上次数低于定数 n 的多项式全体及 0；
   (b) 数域 $\mathbb{F}$ 上次数等于定数 $n(n\geq1)$ 的多项式全体；
   (c) 数域 $\mathbb{F}$ 一切形如 $a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的多项式及 0；
   (d) 数域 $\mathbb{F}$ 上次数不低于定数 n 的多项式全体及 0；
   (e) 已知数域 $\mathbb{F}$ 上的一个多项式 $g(x)$，$g(x)$ 的所有倍式构成的集合。

5. 全体正实数构成的集合对于下列运算构成实数域上的线性空间，定义加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 运算为：$a\oplus b=ab,k\odot a=a^k$，则此空间的一组基为____________。

二、 选择题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 假设下面所列矩阵是线性方程组的增广矩阵，则____________矩阵代表的线性方程组有无穷多个解。

A. $\begin{pmatrix}3&-1&2&1\\0&4&8&2\\0&0&5&5\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&2&-7&-1&5\\0&0&-3&2&1\\0&0&0&4&10\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}9&8&1\\0&1&-24\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&3&-2&19\\0&0&-6&14\\0&0&0&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

2. 下面所列的 $\mathbb{R}$ 上的方程的解集，是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的共有____________个。
（1）$3x_1+5x_2-7x_3-6x_4=0$；
（2）$15x_1+8x_2-10x_4=12$；
（3）$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$；
（4）$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 都是某非齐次线性方程组的解，则下列向量中，____________是该方程组导出组的解。

A. $3X_1 - 2X_2 + 6X_3 - 2X_4$　　B. $-X_1 - 10X_2 - 4X_3 + X_4$

C. $X_1 - 5X_2 + 7X_3 - 3X_4$　　D. $2X_1 - X_3 - 4X_4$

4. 本题中所有的空间都视作 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。下列映射中，同构映射总共有____________个。

（1）$\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$；

（2）$\sigma : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2},\quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(2) & f(3) \end{pmatrix}$；

（3）$\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2,\quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$；

（4）$\sigma : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^3,\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 考虑下面 3 个 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间：

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

下列说法错误的是____________。

A. $W_1 + W_2$ 是直和

B. $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$

C. W_1 的一组基和 W_2 的一组基合起来是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基

D. $W_1 + W_2 + W_3$ 是直和

三、（10 分）

已知直线 L 过点 $(-3, 5, -9)$，且与 $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z = 5x + 10 \\ y = 4x - 7 \end{cases}$ 都相交，求 L 的方程。

四、（10 分）

λ 为实参数，解实数域上的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

并在有解时，说明该方程解集合导出组解集图像之间的关系。

五、（10 分）

已知 $\alpha_1 = (1,2,1,0), \alpha_2 = (-1,1,1,1), \beta_1 = (2,-1,0,1), \beta_2 = (1,-1,3,7)$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的基与维数。

六、（10 分）

设 γ_0 是某非齐次线性方程组的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是其导出组的一个基础解系，证明：

（1）$\gamma_0, \xi_1+\gamma_0, \cdots, \xi_r+\gamma_0$ 线性无关；

（2）该非齐次线性方程组的任一个解 γ 均可由 $\gamma_0, \xi_1+\gamma_0, \cdots, \xi_r+\gamma_0$ 线性表出。

七、（10 分）

令 $V = \mathbb{R}_+$ 是全体正实数所成集合，定义 $a \oplus b = ab, \lambda \circ a = a^\lambda, \forall a,b \in V, \lambda \in \mathbb{R}$，则 V 称为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间（不须证明这一点）。

已知同构 $\varphi: V \to \mathbb{R}$ 满足 $\varphi(2) = 1$，给出同构 $\varphi: V \to \mathbb{R}$ 的具体表达式，并由此具体表达式验证 $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(\lambda \circ a) = \lambda\varphi(a), \forall a,b \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ 成立。

八、（10 分）

设 V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 (1) 和 (2) 的解空间：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022} = 0 \tag{1}$$

$$x_1 = 2x_2 = \cdots = 2022x_{2022} \tag{2}$$

证明：$\mathbb{R}^{2022} = V_1 \oplus V_2$，并写出 $(1,2,3,\cdots,2022)$ 在 $V_1 \oplus V_2$ 中的所有可能的分解形式。

九、附加题（10 分）

（1）选择下面两个问题之一加以论证（只猜出结论不得分）：A. 矩阵三种初等行变换的独立性。B. 线性空间八条运算规律的独立性。

（2）任选一篇教材中让自己查阅的文献，说明阅读后了解到的概念、性质或结论，并做相应论述。

一、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ 的根是____________。

2. A 为 n 阶方阵 $(n>2)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^* =$____________（用 A 和 $\det A$ 表示）。

3. $f(x)=q(x)g(x)+r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$，且 $g(x)\neq 0$。设 $h(x)\neq 0$，则 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)h(x)$ 所得的商为____________，余式为____________。

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} =$____________。

5. A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $B = E_n + AB$，$C = A + CA$，那么 $B - C =$____________。

二、 选择题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 A 是 4 阶方阵,并且 $A \xrightarrow{(2,3)} B \xrightarrow{-3(4)+(1)} C \xrightarrow{\frac{1}{2}(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,则 $|A| =$____________。

   A. 3　　B. -3　　C. 12　　D. -12

2. 下列四个关于矩阵的逆的说法正确的有____________。

   (1) 可逆对称矩阵的逆还是对称矩阵；　(2) 可逆上三角矩阵的逆还是上三角矩阵；

   (3) 初等矩阵的逆还是初等矩阵；　(4) 反对称矩阵一定不可逆

   A. (1)(3)　　B. (1)(2)(3)　　C. (1)(3)(4)　　D. (1)(2)(3)(4)

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$，则下列矩阵中, 与 A 相抵的是____________

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 下列两个论断：（1）存在 3×2 矩阵 A 和 2×3 矩阵 B，使得 $AB=E_3$。（2）存在 2×3 矩阵 A 和 3×2 矩阵 B，使得 $AB=E_2$。正确的是______________。

A. 只有（1）正确　　B. 只有（2）正确

C. （1）和（2）都正确　　D. （1）和（2）都错误

5. 下列关于不可约多项式的说法，正确的一共有______________个。

（1）$x^4-3x^3+9x-21$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约；

（2）$x^4-3x^3+9x-21$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；

（3）x^3+x^2-3x+2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；

（4）设 $p(x),f(x)\in\mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}$，若 $p(x)$ 不可约且和 $f(x)$ 有公共复根，则 $p(x)|f(x)$。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、（10 分）

设 A 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}$。

（1）求 A；

（2）当 $|A|<0$ 时，求解矩阵方程 $A^{-1}XA=XA+E_3$。

四、（10 分）

已知 $f(x)=3x^3-4x+5, g(x)=x^2-2x-1$。

（1）求 $(f(x),g(x))$；

（2）求多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

五、（10 分）

设 n 为不小于 2 的自然数，A 为 n 阶方阵。证明下列论断：

（1）A 不可逆时，A 的伴随 A^* 满足 $\mathrm{rank}(A^*)\le 1$；

（2）$|A^*|=|A|^{n-1}$。

六、（10 分）

证明下列论断：

（1）设 $\mathbb{F}[x]$ 中的两个次数大于 0 的多项式 $f(x),g(x)$ 互素，则存在一组 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，且 $\deg u(x)<\deg g(x),\deg v(x)<\deg f(x)$（这个结论不须证明）。请证明这样的 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$ 是唯一的；

（2）当 $(f(x),g(x))=1$ 时证明 $(f(x)^m,g(x)^n)=1$ 对任意正整数 m,n 成立。

七、（10 分）

设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，若有正整数 k 使 $\operatorname{rank}(A^k)=\operatorname{rank}(A^{k+1})$，证明：必有 n 阶方阵 B 使得 $A^m=A^{m+1}B$。

八、（10 分）

是否存在区间 $[2022,2023]$ 上的四个实连续函数 $a_{ij}(t), i,j\in\{1,2\}$，同时满足：

（1）对任意 $t\in[2022,2023]$，$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ 可逆。

（2）$A(2022)=\begin{pmatrix} \sin 2022 & \cos 2022 \\ -\cos 2022 & \sin 2022 \end{pmatrix}$，$A(2023)=\begin{pmatrix} -\sin 2023 & \cos 2023 \\ \cos 2023 & \sin 2023 \end{pmatrix}$。

九、 附加题（10 分）

（1）选择下面两个问题之一加以论证（只猜出结论不得分）：

I）用多项式理论确定含有 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域。

II）设 A,B,C 分别是 $n\times n, 1\times n, n\times 1$ 矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & A \end{vmatrix} = -BA^*C$$

（2）任选一篇教材第 3-5 章中让自己查阅的文献，说明阅读后了解到的概念、性质或结论，并做相应论述。

一、 选择题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}^9 =$______________。

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$

2. 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$，则 $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} =$______________。

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. -4

3. 设 $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 5 \in \mathbb{Q}[x]$，如果 2 是 $f(x)$ 的二重根，则 a, b 分别等于______________。

A. $a = \dfrac{5}{4}, b = 1$　　B. $a = 4, b = -2$　　C. $a = \dfrac{5}{4}, b = -1$　　D. $a = -4, b = 2$

4. 下列关于矩阵的说法，正确的一共有______________个。

（1）设矩阵 A, B, C 满足 $AB = AC$ 且 $A \neq O$，则 $B = C$；

（2）设 A, B, C 都是 n 阶方阵，并且满足 $AB = E, CA = E$，则 $B = C$；

（3）对任何 n 阶方阵 A，都有 $AA^* = A^*A = |A|E$；

（4）每一个 n 阶方阵都可以写成一些初等矩阵的乘积。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 下列关于多项式 $x^{10} - 10x^5 + 5$ 的说法，正确的一共有______________个。

（1）$x^{10} - 10x^5 + 5$ 在实数域上不可约；

（2）$x^{10} - 10x^5 + 5$ 在有理数域上不可约；

（3）设 $g(x)$ 是有理数域上次数小于 10 的多项式，则 $x^{10} - 10x^5 + 5$ 与 $g(x)$ 互素；

（4）$x^{10} - 10x^5 + 5$ 在复数域上有重根。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$ 解空间的维数是______________。

2. 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，那么，对于任意的数 l，向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, l\beta_1 + \beta_2$ 线性______________。

3. n 阶行列式 $D = |(a_{ij})|$，n 阶行列式 $D_1 = |(b_{ij})|$，其中 $b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k \neq j} a_{ik}, i, j = 1, 2, \cdots, n$。已知行列式 $D = d$，那么行列式 D_1 的值 $=$______________。

4. A 为三阶方阵，$A^2=E$，且 $A\neq \pm E$，如果 $\mathrm{rank}(A+E)=1$，那么 $\mathrm{rank}(A-E)=$____________。

5. 多项式 $(8x^9-6x^7+4x-7)^3(2x^5-3)^7$ 的展开式中各项系数之和为____________。

三、（10 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AXA^*=2XA^*+E$，求 X。

四、（10 分）

已知 $f(x)=3x^3-4x+17, g(x)=x^2-2x+3$。

（1）求 $(f(x),g(x))$；

（2）求多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

五、（10 分）

判断并证明 $f(x)=x^6+x^3+1$ 在有理数域上是否可约。

六、（10 分）

设 A,B 为 n 阶方阵，$AB=O$ 且 $A-B$ 可逆，证明：$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)=n$。

七、（10 分）

设 A,B,C,D 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，且 $AC=CA$，求证

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$$

八、（10 分）

（1）试利用线性方程组增广矩阵的初等变换与初等矩阵的关系、方程之积与行列式之积的关系，给出 Cramer 法则中求解公式的一个不同于教材中的证明。

（2）试就教材中第 3-5 章中指定的任意一个课下阅读内容写出自己查阅资料后的小结。

一、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 写出平面 $\mathbb{R}^2$ 上下列线性变换在自然基下的矩阵：

（1）逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$：______________；

（2）关于直线 $y=2x$ 的反射：______________。

2. 考虑 $\mathbb{F}^3$ 上的线性变换 σ：$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2+x_3\\x_2-2x_3\end{pmatrix}$。$\sigma$ 在基 $e_1,2e_2,e_3$ 下的矩阵为______________。

3. 考虑 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的变换：$\sigma:\sigma(f(x))=f(x+3)$。这里，$\mathbb{F}[x]_n$ 是指数域 $\mathbb{F}$ 上所有次数小于 n 的一元多项式构成的线性空间，$n\geq 1$。

（1）σ 是否为线性变换？______________；

（2）如果上述（1）答案为“是”，写出 $\mathrm{Ker}\sigma=$______________；$\mathrm{Im}\sigma=$______________。

4. 从下列矩阵中选出所有在复数域上一定可对角化的：______________。

（1）幂等矩阵，即满足 $A^2=A$ 的矩阵；

（2）有 n 个不同特征值的 n 阶方阵；

（3）$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$。

5. 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$ 的最小多项式为______________。

二、 选择题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 σ 是有限维线性空间 U 上的线性变换，则下列说法错误的是______________。

A. σ 是 U 上的自同态映射　　B. σ 是单射当且仅当 σ 是满射

C. σ 变线性无关组为线性无关组　　D. σ 变线性相关组为线性相关组

2. 设 U，V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$\dim U=m$，$\dim V=n$，则由所有 U 到 V 的线性映射的全体构成的向量空间的维数是______________。

A. m　　B. n　　C. mn　　D. 无穷大

3. 给定方阵 A，下列关于 A 的哪些对象在相似变换上保持不变______________。

(a) 特征多项式；(b) 特征子空间；(c) 最小多项式；(d) 像空间（即 A 的列向量生成的子空间）；(e) 核空间（即以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间）

A. (a)(b)(c)　　B. (a)(c)　　C. (d)(e)　　D. (b)(d)(e)

4. 方程 $2x^2+10y^2+z^2+4xy-8yz=3$ 表示的二次曲面是______________。

A. 椭球面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$　　B. 单叶双曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right)$

C. 双叶双曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right)$　　D. 二次锥面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\right)$

5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&2&\frac{1}{2}\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形为____________。

A. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

三、（10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&6&1\end{pmatrix}$。

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）求 A^{100}。

四、（10 分）

设 $\mathbb{F}$ 为数域。

（1）证明：$\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是线性变换，且 $\sigma^n=0$；

（2）求 σ 的像与核的维数；

（3）判断 σ 是否可对角化。

五、（10 分）

设 A 相似于 B，$B=P^{-1}AP$，则 A,B 有相同的特征值。证明：

（1）对 A,B 的每个特征值 λ_0，X 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 $P^{-1}X$ 是 B 的属于特征值 λ_0 的特征向量；

（2）$\dim\mathrm{Ker}(\lambda_0 I-A)=\dim\mathrm{Ker}(\lambda_0 I-B)$。

六、（10 分）

设 σ 为 n 维线性空间 U 上的线性变换，$a\neq 0$ 是 σ 的特征值，且 σ 属于 a 的特征子空间 V_a 的维数 $t=n-\dim\mathrm{Ker}\sigma$。证明：

（1）$U=V_a\oplus\mathrm{Ker}\sigma$；

（2）σ 在适当的基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}aI_t&\\&O\end{pmatrix}$，其中 O 的阶数等于 $\dim\mathrm{Ker}\sigma$。

七、（20 分）

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 σ 的两两不同的全部特征值，V_t 是 σ 属于特征值 λ_t 的特征子空间。我们说 V 的子空间 W 是不变子空间，如果 $\sigma(W) \subset W$。

（1）说明 V_i 都是 σ 的不变子空间；

（2）设 W 是 σ 的不变子空间。证明：若 σ 可对角化，则

$$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_t)$$

（3）证明：σ 可对角化当且仅当任取 σ 的不变子空间 W，σ 在 W 上的限制 $\sigma|_W$ 都可对角化；

（4）证明：σ 可对角化当且仅当任取 σ 的不变子空间 W，都存在 σ 的不变子空间 W' 使得 $V = W \oplus W'$。

八、（10 分）

设 σ 是有限维线性空间 U 上的线性变换，且存在映射 $\tau: U \to U$ 使得 $\sigma\tau = \mathrm{Id}_U$，证明：$\tau$ 是 U 上的线性变换且 $\tau\sigma = \mathrm{Id}_U$，从而 τ 为 σ 的逆变换。

一、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 将 $M_3(\mathbb{C})$ 看作复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。定义 $M_3(\mathbb{C})$ 上的线性变换 σ 如下：任取 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in M_3(\mathbb{C})$，$\sigma(A)=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)$，这里 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 代表矩阵 A 的三列。写出 σ 的一个零化多项式______________，σ 是否可对角化？______________。

2. 设 V 是一个 3 维欧几里得空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基，已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$。用 Schmidt 正交化给出 V 的一组标准正交基：$\eta_1=$______________；$\eta_2=$______________；$\eta_3=$______________。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$。则下列矩阵中，在实数域 $\mathbb{R}$ 上与 A 相合的有______________，在复数域 $\mathbb{C}$ 上与 A 相合的有______________。

   （1）$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$；（3）$I_3$；（4）$-I_3$。

4. 下列矩阵中，一定是正交矩阵的有______________。

   （1）$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\theta\in\mathbb{R}$；

   （2）$\begin{pmatrix}\sqrt{2}&i\\i&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$，其中 i 是虚数单位；

   （3）$\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2&6&3\\3&2&-6\\6&-3&2\end{pmatrix}$；

   （4）有限维欧几里得空间上的正交变换在一组基下的矩阵。

5. 用直角坐标变换（即正交替换），将空间的二次曲面方程 $3x^2+2y^2+z^2-4xy-4yz=1$ 化为标准方程为______________。（只要求写出标准方程，不要求所做的正交替换）

二、 选择题（共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 A 和 B 是正定实对称矩阵，则下列说法正确的是______________。

   A. $A+B,AB$ 都是正定矩阵

   B. AB 是正定矩阵，$A+B$ 不是正定矩阵

   C. $A+B$ 是正定矩阵，AB 不一定是正定矩阵

   D. $A+B$ 是正定矩阵，AB 不是正定矩阵

2. 当 k 满足____________时，实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ 为负定矩阵。

A. $k<-\sqrt{2}$　　B. $k>\sqrt{2}$　　C. $k<-1$　　D. k 不存在

3. 原点到直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 的距离为____________。

A. 3　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $\sqrt{3}$

4. 设 A,B 是正交矩阵，则下列说法正确的是____________。

(a)A^{-1},A^* 是正交矩阵；

(b)A^TB 是正交矩阵；

(c)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$ 是正交矩阵；

(d)$A+B$ 是正交矩阵；

(e)$A+B$ 是不可逆矩阵。

A. (a)(c)(e)　　B. (b)(c)(d)　　C. (a)(b)(c)　　D. (a)(b)(d)

5. 设 A 为 4 阶实对称矩阵，$(A^2-A)(A^2+I)=0$。若 A 的秩为 3，则 A 相似于____________。（其中 i 是虚数单位）

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & 1 & \\ & & -i & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

三、（10 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$。

（1）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵；

（2）用正交的线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形。

四、（10 分）

设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵。

（1）求正交矩阵 P 使得 P^TAP 为对角矩阵；

（2）求正定矩阵 C 使得 $C^2=(a+3)I-A$。

五、（10 分）

设 V 是有限维欧几里得空间，σ 是 V 上的线性变换。

（1）若 σ 是 V 上的正交变换，证明：σ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵；

（2）若 σ 在 V 的某一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵，证明：σ 是 V 上的正交变换。

六、（10 分）

设 A 为实对称矩阵，且 $A-I$ 正定，证明：$I-A^{-1}$ 也是正定的。

七、（10 分）

设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 是 A 的从小到大的全体特征值。证明：

$$\lambda_n = \max_{0 \neq X \in \mathbb{R}^{n\times 1}} \frac{X^TAX}{X^TX}; \quad \lambda_1 = \min_{0 \neq X \in \mathbb{R}^{n\times 1}} \frac{X^TAX}{X^TX}$$

八、（15 分）

设 V 是 n 维欧几里得空间，$\langle x,y\rangle$ 是 V 上的内积，$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是 V 上的范数（即长度），$\sigma: V \to V$ 是 V 上的映射。

（1）若 σ 保持内积，即任取 $x,y \in V$，有 $\langle \sigma(x), \sigma(y)\rangle = \langle x,y\rangle$，判断 σ 是否是线性映射。若是给出证明，若不是给出反例；

（2）若 σ 保持范数（即长度），即任取 $x \in V$，有 $||\sigma(x)|| = ||x||$，判断 σ 是否是线性映射。若是给出证明，若不是给出反例；

（3）若 σ 保持角度，即任取 $x,y \in V\backslash\{0\}$，有 $\dfrac{\langle \sigma(x), \sigma(y)\rangle}{||\sigma(x)|| \cdot ||\sigma(y)||} = \dfrac{\langle x,y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$，判断 σ 是否是线性映射。若是给出证明，若不是给出反例。