设 A,B,C,D 是任意集合，证明：

$$(A \quad B)\times(C \quad D)=(A\times C) \quad (B\times D)$$

证明：设 <x,y>是任意元素

$\langle x,y\rangle \in (A \quad B)\times(C \quad D)$

$\Leftrightarrow x\in(A \quad B)\wedge y\in(C \quad D)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times C)\wedge\langle x,y\rangle\in(B\times D)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times C) \quad (B\times D)$

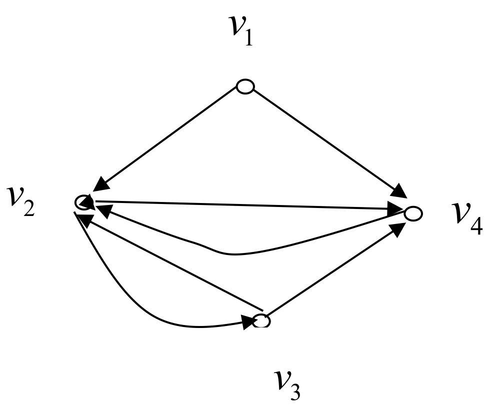
故而$(A \quad B)\times(C \quad D)=(A\times C) \quad (B\times D)$

对于下面有向图。

(1) 求它的邻接矩阵 A.

(2) 求 $A^{(2)}$ 和 $A^{(3)}$，说明从 v_1 到 v_4 长度为 2 和 3 的路径有几条？

（3）求 A^TA，并解释其中第（2,3）个元素和（2,2）个元素的意义



解：$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$； $A^{(2)}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&2&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&2&1&2\\0&1&2&2\\0&2&1&2\\0&2&0&1\end{bmatrix}$

从 v_1 到 v_4 长度为 2 的路径有 1 条，长度为 3 的路径有 2 条。

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

第（2,3）个元素是 0，说明没有节点引出的边同时终止于v_2和v_3（2,2）个元素是 3，说明v_2的引入次数为 3.

设$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$上的整除关系

$R=\{\langle a_1,a_2\rangle | a_1,a_2 \in A, a_1\text{整除}a_2\}$

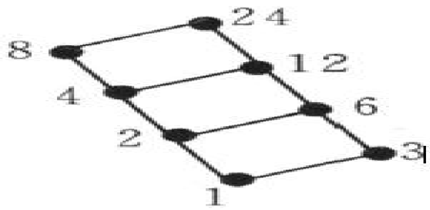
R 是否为 A 上的偏序关系？若是，则：

(1)、画出的哈斯图；

(2)、求它的极小元，最大元，极大元，最大元。

解答:（1）R 是 A 上的偏序关系。

（2）极小元、最小元是 1,极大元、 最大元是 24。



求下式的主析取范式和主合取范式

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$$

解答：

作真值表：

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

主吸取范式为：

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

主合取范式为

$P \vee Q$

设 f,g,h∈R^R，且 f(x) =x^2−2，g(x) =x＋4，h(x) =x^3−1

(1) 试求 g　f 和 f　g

(2) g　f 和 f　g 是单射？满射？双射？

(3) f,g,h 中哪些有反函数？若有，求出反函数。

解：(1) g　f(x)= x^2+2

f　g(x)=x^2+8x+14

(2) g　f 不是单射，不是满射，不是双射。

f　g 不是单射，不是满射，不是双射。

(3) f 不是单射，不是满射，不是双射。无反函数。

g 是单射，是满射，是双射。有反函数。g^{-1}(x)= x−4

h 是单射，是满射，是双射。有反函数。h^{-1}(x)=$\sqrt[3]{x+1}$

用逻辑推理证明：

所有的舞蹈者都很有风度，王华是个学生且是个舞蹈者。因此有些学生很有风度。

证明：设 P(x)：x 是个舞蹈者； Q(x) ：x 很有风度； S(x)：x 是个学生； a：王华

上述句子符号化为：

前提：$\forall x(P(x) \to Q(x))$ 、$S(a) \wedge P(a)$ 结论：$\exists x(S(x) \wedge Q(x))$

①	$S(a) \wedge P(a)$	P
②	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P
③	$P(a) \to Q(a)$	US②
④	$P(a)$	T①I
⑤	$Q(a).$	T③④I

假定 $A \neq \varnothing$ 和 $A \quad B = A \quad C$，说明这不能得出 $B = C$，假设中增加 $A \quad B = A \quad C$，能得出 $B = C$ 吗？试证明。

证明：反例 $A = \{1,2\}, B = \{2\}, C = \{1\}$ 则 $A \quad B = A \quad C$ 但 $B \neq C$

$$
\begin{aligned}
B &= A \quad B-(A-(A \quad B)) \\
&= A \quad C-(A-(A \quad C)) \\
&= C
\end{aligned}
$$

设集合 A＝{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}，R 为整除关系。

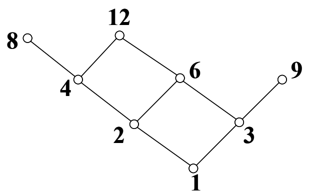
(1) 画出半序集(A,R)的哈斯图；

(2) 写出 A 的子集 B = {3,6,9,12}的上界，下界，最小上界，最大下界；

(3) 写出 A 的最大元，最小元，极大元，极小元。

解：

(1)



(2) B 无上界，也无最小上界。下界 1, 3; 最大下界是 3.

(3) A 无最大元，最小元是 1，极大元 8, 12, 9; 极小元是 1.

用 CP 规则证明下题

$A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$

证明：

① A	P（附加前提）
② $A \vee B$	T①I
③ $A \vee B \to C \wedge D$	P
④ $C \wedge D$	T②③I
⑤ D	T④I
⑥ $D \vee E$	T⑤I
⑦ $D \vee E \to F$	P
⑧ F	T⑥⑦I

叙述并证明苏格拉底三段论。

解：所有人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

符号化：F（x）：x 是一个人。G（x）：x 要死的。A：苏格拉底。

命题符号化为$\forall x$（F（x）$\rightarrow$G（x）），F（a）$\Rightarrow$G（a）

证明：

（1）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$　　P

（2）$F(a)\rightarrow G(a)$　　T(1)，US

（3）$F(a)$　　P

（4）$G(a)$　　T(2)(3)，I

求命题公式$(P\vee(Q\wedge R))\rightarrow(P\wedge Q\wedge R)$的主析取范式和主合取范式。

证明：$(P\vee(Q\wedge R))\rightarrow(P\wedge Q\wedge R)\Leftrightarrow\neg(P\vee(Q\wedge R))\vee(P\wedge Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R))\vee(P\wedge Q\wedge R)$

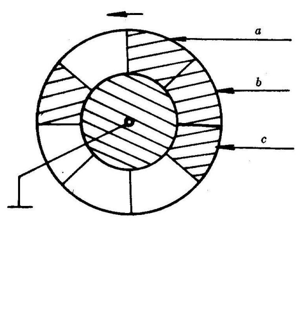
$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R))\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R))\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge Q\wedge R)$

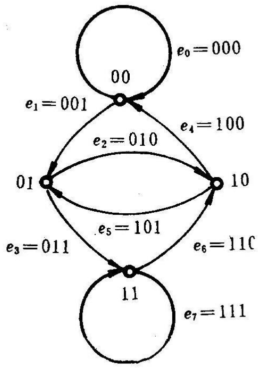
$\Leftrightarrow m0\vee m1\vee m2\vee m7$

$\Leftrightarrow M3\vee M4\vee M5\vee M6$

旋转鼓的表面分成 8 块扇形,如图所示。图中阴影区表示用导电材料制成,空白区用绝缘材料制成,终端 a、b 和 c 是接地或不是接地分别用二进制信号 0 或 1 表示。因此,鼓的位置可用二进制信号表示。试问应如何选取这 8 个扇形的材料使每转过一个扇形都得到一个不同的二进制信号,即每转一周,能得到 000 到 111 的 8 个数。



解：这个问题可以这样来考虑:如图用 4 个结点分别表示 00~11 的 4 个二进码,若结点 u 的二进码的第二位和结点 v 的第一位相同，则(u,v)是有向图的一条边,这条边对应于 3 位的二进码，通过这种办法可以构造出一个有 4 个结点 8 条边的有向图,问题中找 000 到 111 的 8 个数就是在图中找一条有向欧拉回路,由回路中每条边对应码构成的循环序列就是所求结果.



,由此得到对应的 8 个 0 或 1 的排列方式 00011101