第三章 离散傅里叶变换

（Discrete Fourier Transform）

主要内容：

§3.1 引言

§3.2 离散傅里叶级数及其性质

§3.3 离散傅里叶变换及其性质

§3.4 利用循环卷积计算线性卷积

§3.5 频率取样

§3.6 快速傅里叶变换

§3.7 FFT应用

§ 3.1 引言(Introduction)

3.1.1 四种傅里叶变换

时间函数	频域函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_p)	非周期和离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_p}$)
离散(T)和非周期	周期($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$)和连续
离散(T)和周期	周期($\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$)和离散

① 连续傅里叶变换(FT)：连续时间,连续频率的傅里叶变换；

② 傅里叶级数(FS)：连续时间,离散频率的傅里叶变换；

③ 序列的傅里叶变换(DTFT):离散时间,连续频率的傅里叶变换;

④ 离散傅里叶变换(DFT):离散时间,离散频率的傅里叶变换。

3.1.2　傅里叶变换回顾

《信号与线性系统》：连续时间信号的傅里叶变换(FT)和傅里叶级数(FS)；本教材第二章：离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)。共同的缺点：前三种变换总有一个域不是离散的，计算机不能直接计算；希望的变换：不仅在时间域上离散，在频率域上也离散。

3.1.3 连续时间信号的傅里叶级数

任意周期为 T_0 的信号 $x_a(t)$ 均可表示为：

$$x_a(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

其中：$x_k=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x_a(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$

$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$为基波角频率，$f_0=\frac{1}{T_0}$为基频，$f_k=kf_0$是 k 次谐波（离散非周期性频谱）

其中：$\alpha=0$ 或 $\alpha=-\frac{T_0}{2}$

§ 3.2 离散傅立叶级数及其性质

（Discrete Fourier Series）

3.2.1 离散傅里叶级数（DFS）

周期序列：

① $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$

② $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

③ $\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n - rN)$

其中：k、r—任意整数，N—周期；其ZT不收敛，不能进ZT。对周期为N的复指数序列或正弦序列：

$e_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ ——基波

$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = e_{k+mN}(n)$ ——k次谐波。

在《信号与线性系统》中，用傅里叶级数表示连续时间周期信号。

对应地，可用离散傅里叶级数表示离散周期序列，即用周期为N的复指数序列来表示：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \ldots(3.2.1a)$$

两边$\times e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$并从n=0～N-1求和得：

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}]$$（交换右边求和次序）

$$=\tilde{X}(r)$$

式中：$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\begin{cases}1, k=r\\0, k\neq r\end{cases}$

用k置换r得： $\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ …(3.2.1b)

注：① $\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\frac{1-a^N}{1-a}$

② $$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j0}=N, & k=r\\ \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}}=\frac{1-e^{j2\pi(k-r)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}}=0, & k\neq r\end{cases}$$

设 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$(旋转因子)，可得周期序列的傅里叶级数变换对：

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn},-\infty<n<+\infty$$ …(3.2.1c)

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn},-\infty<k<+\infty$$ …(3.2.1d)

注：

①**n**、**k**均为离散变量，**n**当作时间，**k**当作频率；上式为频域<->时域之间的变换。

②从上两式可知：离散周期序列既可用$\tilde{x}(n)$表示，也可用 $\tilde{X}(k)$ 表示。

③周期性时间信号的频谱是离散的，离散时间信号的频谱是周期性的；周期性离散时间信号的频谱为离散周期性的。

注:

①$\tilde{x}(n)$，$\tilde{X}(k)$都是离散和周期性的，

且周期均为N;

②DFS只取k次谐波分量中N个谐波分量;

③n为离散时间变量，理解为nT；k是离散频率

变量，理解为$\Delta\omega k$ ；

④DFS、IDFS具有唯一性。

3.2.2　离散傅里叶级数的性质

（The Properties of the Discrete Fourier Series）

1.　线性：

设周期序列$\tilde{x}_1(n)$和 $\tilde{x}_2(n)$ 的周期均为N，且：

$$\tilde{X}_1(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)]\ ，\tilde{X}_2(k)=DFS[\tilde{x}_2(n)]\quad ；$$

如果：$\tilde{x}_3(n)=a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)$（a, b均为常数）

则有：

$$\tilde{X}_3(n)=DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

2. 周期序列的移位：

设 $DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$，

则： $$DFS[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk}\tilde{X}(k),$$

$$IDFS[\tilde{X}(k-l)] = W_N^{-nl}\tilde{x}(n),$$ （**m,l**为常数）。

备注:

上面性质的推导请同学参考教材自己推导。

3. 周期卷积（Periodic Convolution）：

设 $\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$都为周期序列，周期都为N，且：

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{km},$$

$$\tilde{X}_2(k)=\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}_2(r)W_N^{kr},$$

$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$，则：

$$\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

证明：

$$\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}_2(r)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m-r)}]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m+lN)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m-r)} = \begin{cases}1, r=(n-m)+lN \\ 0, r\neq(n-m)+lN\end{cases}, l:\text{int}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)$$

结论：

①周期卷积的操作步骤与非周期序列的线性卷积相同，不同的是周期卷积仅在一个周期内求和；

②周期卷积中 $\tilde{x}_1(m),\tilde{x}_2(n-m)$ 对**m**是周期性的，周期为**N**；$\tilde{y}(n)$的周期为**N**；

③周期卷积满足交换律。

同理可得：

如果： $\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

则有： $\tilde{Y}(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)=\frac{1}{N}\tilde{X}_1(k)*\tilde{X}_2(k)$

§3.3 离散傅立叶变换及其性质
(DFT and it's Properties)

3.2.1 离散Fourier变换

有限长序列的**Fourier**变换称为离散**Fourier**变换（**DFT**）。定义方法：由**DFS**导出**DFT**。

1. 将有限长序列$x(n)$延拓成周期序列$\tilde{x}(n)$;
2. 求周期序列$\tilde{x}(n)$的**DFS**得$\tilde{X}(k)$；
3. 取出$\tilde{X}(k)$的一个周期作为$x(n)$的**DFT,**。

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

因此，由**DFS**可得出有限长序列的**DFT**为：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, 0 \le n \le N-1 \\ 0, others \end{cases}$$

. . . (3.3.1a)

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1 \\ 0, others \end{cases}$$

. . . (3.3.1b)

注意:**DFT**运算中，符号 $((n))_N$ 表示**n**对模**N**的余数，若以整数**k**代表商，n_0 代表余数，

即：$n = kN + n_0$，其中**k**为整数。

§3.3 离散傅立叶变换及其性质

(DFT and it's Properties)

3.2.1 离散Fourier变换

有限长序列的**Fourier**变换称为离散**Fourier**变换（**DFT**）。

定义方法：由**DFS**导出**DFT**。

1. 将有限长序列$x(n)$延拓成周期序列$\tilde{x}(n)$；
2. 求周期序列$\tilde{x}(n)$的**DFS**得$\tilde{X}(k)$；
3. 取出$\tilde{X}(k)$的一个周期作为$x(n)$的**DFT**,。

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

因此，由**DFS**可得出有限长序列的**DFT**为：

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},0\le n\le N-1\\ 0,others\end{cases}$$

. . . (3.3.1a)

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},0\le k\le N-1\\ 0,others\end{cases}$$

. . . (3.3.1b)

注意:**DFT**运算中，符号 $((n))_N$ 表示**n**对模**N**的余数，

若以整数**k**代表商，n_0 代表余数，

即：$n=kN+n_0$，其中**k**为整数。

注：

① $x(n), X(k)$均为有限长，长度一样，取值范围均为**0,1,…,N-1**（有限长序列的**DFT**仍为有限长序列）；

② **n**为离散时间变量，理解为**nT**，**k**为离散频率变量，理解为$\Delta\omega k$；

③ **DFT**与**DFS**无本质区别，**DFT**是**DFS**的主值，**DFT**隐含周期性；

④ **DFT**具有唯一性；

⑤一般情况下，$X(k)$是一个复变量，可表示为：

$$X(k)=X_R(k)+jX_I(k)\ \text{或}\ X(k)=|X(k)|e^{j\theta(k)}$$

其中： $$|X(k)|=\sqrt{X_R^2(k)+X_I^2(k)}$$

$$\theta(k)=arctg\frac{X_I(k)}{X_R(k)}$$

⑥旋转因子的性质：

a．对称性：$(W_N^k)^*=W_N^{N-k}$ ；

b．周期性：$W_N^{k+mN}=W_N^k$ ；

c．换底：

$$W_N^k = W_{mN}^{mk} = W_{N/2}^{k/2}，\ k/2,\ N/2\text{为整数；}$$

d．几个特殊值：

$$W_N^{kN}=1,\ W_N^{N/2}=-1,\ W_N^{3N/4}=j,\ W_N^{N/4}=-j。$$

⑦ $\frac{N}{2},\frac{N}{4}$ 点的DFT为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_{N/2}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/2-1$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/4-1}x(n)W_{N/4}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/4-1$$

⑧**DFT与ZT的关系：**

有限长序列**x(n)**的**DFT**系数**X(k)**可看作其**ZT**在单位圆上等角距取样的样本值，即：$X(k)=X(z)|_{z=W_N^{-k}}$

$x(n)$的**ZT**：$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$ ；

$x(n)$的**DFT**：$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$ 。

DFT与**FT**的关系：有限长序列**x(n)**的**DFT**系数**X(k)**可看作其**FT**在一个周期(2π)中等间距取样的样本值，取样间隔$\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$，即：$X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$

⑨均可进行计算机处理。

例3.3.1：已知序列： $x(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2\\ 0, others\end{cases}$ **；求其9点DFT?**

解：由DFT的定义，有：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{8}x(n)W_9^{nk}=\sum_{n=0}^{2}W_9^{nk}$$

$$=\frac{1-W_9^{3k}}{1-W_9^{k}}=\frac{1-e^{-j\frac{6\pi}{9}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{9}k}}=\frac{e^{-j\frac{3\pi}{9}k}(e^{j\frac{3\pi}{9}k}-e^{-j\frac{3\pi}{9}k})}{e^{-j\frac{\pi}{9}k}(e^{j\frac{\pi}{9}k}-e^{-j\frac{\pi}{9}k})}=e^{-j\frac{2\pi}{9}k}\frac{2j\sin(\frac{\pi}{3}k)}{2j\sin(\frac{\pi}{9}k)}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}k)}{\sin(\frac{\pi}{9}k)}e^{-j\frac{2\pi}{9}k},\qquad k=0,1,2,\ldots 8$$

例3.3.2：已知 $X(k)=\begin{cases}5, & k=0\\ 2, & 1\le k\le 8\end{cases}$**，求** $X(k)$ **的9点DFT逆变换。**

解：由IDFT的定义，有：

$$x(n)=\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{8}X(k)W_9^{-nk}=\frac{1}{9}[3+2\sum_{k=0}^{8}W_9^{-nk}]$$

$$=\frac{1}{3}+2\delta(n),\qquad n=0,1,\ldots,8$$

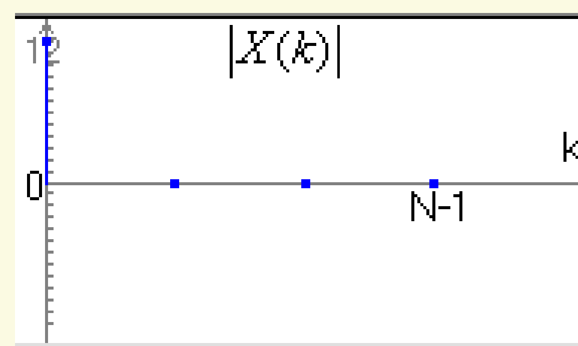
注： $\sum_{k=0}^{8}W_9^{-nk}=\begin{cases}9, & n=0\\ 0, & n=1,\ldots 8\end{cases}$

例3.3.3：已知序列：$x(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 3\\ 0, others\end{cases}$；求其4点DFT，8点DFT，16点DFT？并画出 $|X(k)|\sim k$ 的曲线图。

解：$x(n)$的FT为：$X(e^{j\omega})=\dfrac{\sin(2\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$

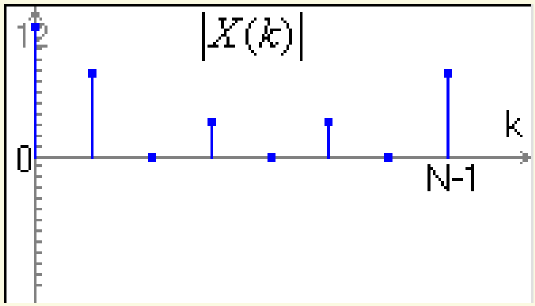
4点DFT: $X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k}=\dfrac{\sin(\pi k)}{\sin(\frac{\pi}{4}k)}e^{-j\frac{3}{4}\pi k}$

4点序列及DFT图形如下：



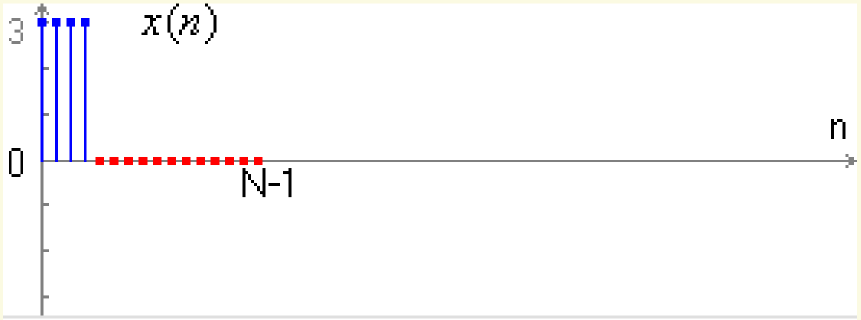
8点DFT: $X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)}e^{-j\frac{3}{8}\pi k}$

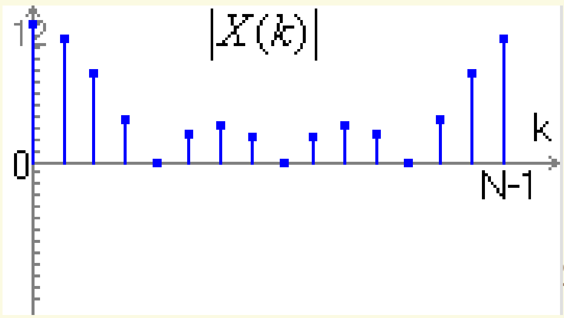
8点序列及DFT图形如下:



16点DFT: $X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k}=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)}e^{-j\frac{3}{16}\pi k}$

16点序列及DFT图形如下:





3.3.2 离散傅立叶变换的性质

设$x_1(n)$和$x_2(n)$的长度均为N，且它们对应的DFT为：

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

1. 线性：设 $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，a,b均为常数，则：

$$X_3(k) = DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

2. 复共轭序列的DFT

设$x^*(n)$是$x(n)$ 的复共轭序列，长度为N，其DFT

变换为：$X(k) = DFT[x(n)]$

则：$DFT[x^*(n)] = X^*(N-k), 0 \le k \le N-1$

且：$X(N) = X(0)$

证明：

$$X^*(N-k)=[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(N-k)n}]^*$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-(N-k)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}$$

$$=DFT[x^*(n)]$$

又由于$X(k)$隐含周期性，有：

$$DFT[x^*(N-n)]=X^*(k)$$

当$x(n)$ 为实序列时，则有：

$$X^*(N-k)=X(k)$$

3.　对称性

A.　定义

有限长共轭对称序列$x_{ep}(n)=x_{ep}^{*}(N-n)$,也可称为圆周共轭对称序列。

有限长共轭反对称序列 $x_{op}(n)=-x_{op}^{*}(N-n)$

注：①变换区间：$0\le n\le N-1$

②以 $n=N/2$ 为对称点

③频域定义：

共轭对称序列　$X_{ep}(k)=X_{ep}^{*}(N-k)$

共轭反对称序列 $X_{op}(k)=-X_{op}^{*}(N-k)$

B. 序列分解

① $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$ **(长度均为N)**

其中：

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

② $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

其中：

$$x_i(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)]$$

$$x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$$

③频域：

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

$$X(k)=X_R(k)+jX_I(k)$$

C. DFT的共轭对称性

① $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)\quad X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$

其中：$DFT[jx_i(n)]=X_{op}(k)\quad DFT[x_r(n)]=X_{ep}(k)$

② $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)\quad X(k)=X_R(k)+jX_I(k)$

其中：$DFT[x_{ep}(n)]=X_R(k)\quad DFT[x_{op}(n)]=jX_I(k)$

例：$x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$

$$DFT[x_r(n)]=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$=X_{ep}(k)$$

③当$x(n)$为实序列（长度为**N**），且$X(k)=DFT[x(n)]$

则有：

a. $X(k)$共轭对称，即：$X(k)=X^*(N-k), 0\le k\le N-1$

b.如 $x(n)$为实偶对称序列，则 $X(k)$为实偶对称序列，

即：$X(k)=X(N-k)$

c.如 $x(n)$ 为实奇对称序列，则 $X(k)$ 为纯虚奇对称序列，即：

$$x(n)=-x(N-n)$$

$$X(k)=-X(N-k)$$

d．如 $x(n)$ 为实序列，则 $X(k)$ 的计算量减半，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,2,\ldots\frac{N}{2}-1$$

$$X(N-k)=X^*(k),k=0,1,2,\ldots\frac{N}{2}-1 \qquad x_i(n)=0$$

推导这些结论时注意：

实序列：$x_i(n)=0$

实偶序列：$x_i(n)=0 \quad x_o(n)=0 \quad x_{op}(n)=0$

实奇序列：$x_i(n)=0 \quad x_e(n)=0 \quad x_{ep}(n)=0$

因果序列：$x(n)=0,n<0$

附：序列及其DFT的奇偶虚实关系对应表如下：

时域 $x(n)$ 或频域 $X(k)$	频域 $X(k)$ 或时域 $x(n)$
偶	偶
奇	奇
实	实部为偶,虚部为奇 (即圆周共轭对称序列)
虚	实部为奇,虚部为偶奇 (即圆周共轭反对称序列)
实、偶	实、偶
实、奇	虚、奇
虚、偶	虚、偶
虚、奇	实、奇

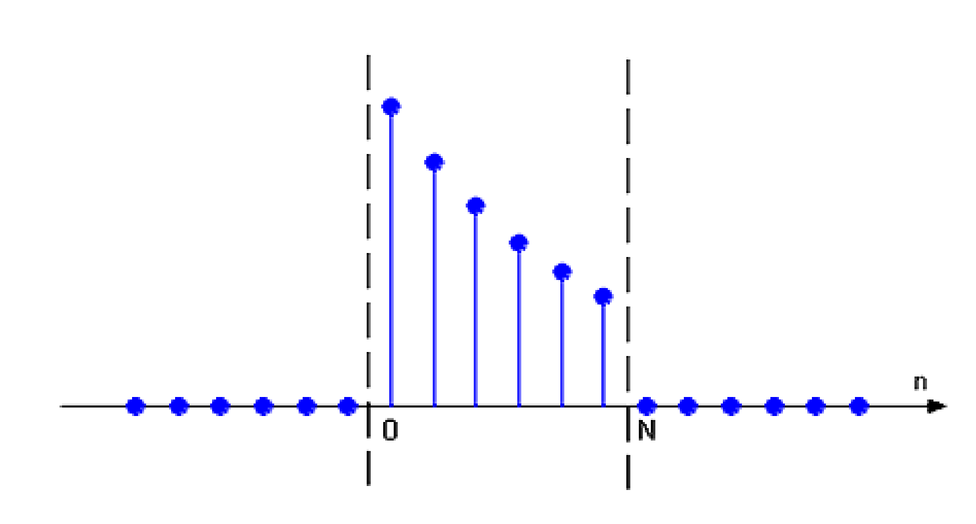
4. 序列的循环移位：

一个长度为N的序列 $x(n)$ 的循环移位定义为：

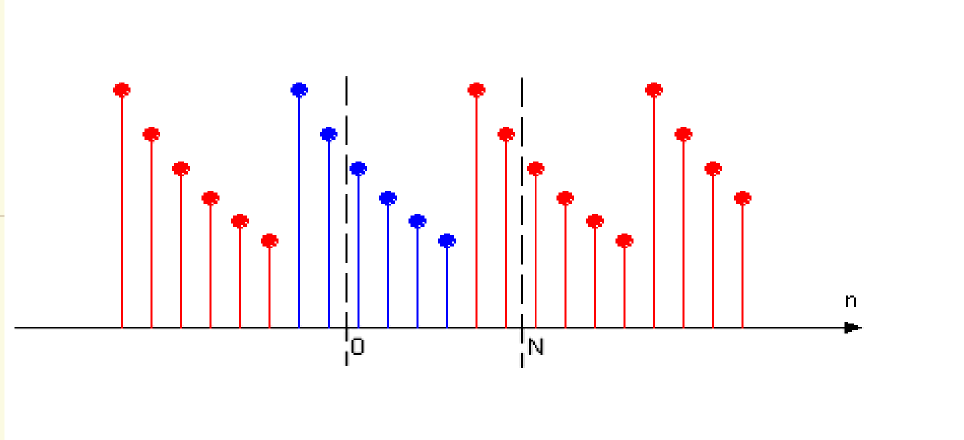
$$y(n)=x((n+m))_N\cdot R_N(n)$$

例3.3.4：一个N＝6点序列 $x(n)=e^{-\frac{n}{5}}R_6(n)$，其循环移位 $x((n+2))_6R_6(n)$如下：

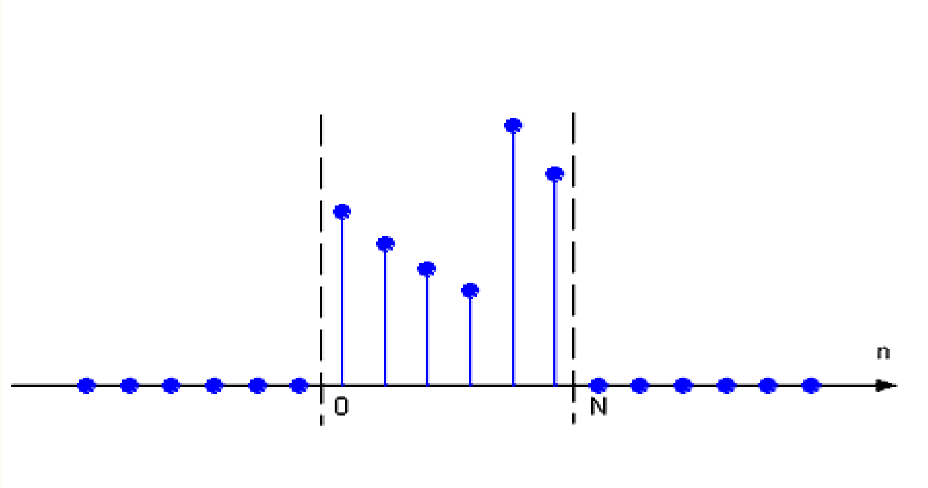
$$x(n)=e^{-\frac{n}{5}}R_6(n)$$



$x((n+2))_6$



$x((n+2))_6 R_6(n)$



序列循环移位后DFT为：

$$Y(k) = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-km} X(k)$$

证明：

由周期序列的周期移位性质得：

$$DFS[x((n+m))_N] = DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-km}\tilde{X}(k)$$

$\because x((n+m))_N R_N(n)$是 $\tilde{x}(n+m)$的主值序列，

其**DFT**是 $\tilde{x}(n+m)$ 的**DFS**的主值。即：

$$DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] = W_N^{-km}\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$= W_N^{-km}X(k)$$

由时域和频域的对偶关系，$X(k)$ 作循环移位时有：

设 $\quad Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$

则： $\quad y(n) = IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl}x(n)$

附：几种变换的时移性质汇总：

① $x(t-t_0)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$

② $x(t-t_0)\overset{LT}{\leftrightarrow}X(s)e^{-st_0}$

③ $x(n-m)\overset{ZT}{\leftrightarrow}X(z)z^{-m}$

④ $x(n-m)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})e^{-jm\omega}$

⑤ $x(n-m)\overset{DFT}{\leftrightarrow}X(k)W_N^{km}$

5. 循环卷积（Circular Convolution）：

对于两个长度均为N的序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$ ，

设 $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$，则：

$$
\begin{aligned}
y(n) &= IDFT[X_1(k)X_2(k)] \\
&= [\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)]R_N(n) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n) \\
&= x_1(n) \text{ (N) } x_2(n)
\end{aligned}
$$

证明：

对上式两边求DFT得：$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)]W_N^{nk}$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n=0}^{N-1}x_2((n-m))_N W_N^{nk}$$

令 $n-m=n'$，则有：

$$Y(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)}=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{km}\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{kn'}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{km}\sum_{n'=0}^{N-1}x_2(n')W_N^{kn'}=X_1(k)\cdot X_2(k)$$

注：式中 $x_2((n'))_N W_N^{kn'}$ 是以N为周期的，故对其在任意一个周期上求和的结果不变。

特点：

①循环卷积的过程与周期卷积一样，只取周期卷积的主值；

②循环卷积隐含周期性；

③循环卷积在主值区间内进行，参与卷积的两个序列的长度和结果序列的长度均相等；

④线性卷积与循环卷积计算步骤比较：

线性卷积：反折、平移、相乘、积分(或相加)；

循环卷积：反折、周期化、平移、相乘、相加。

例3.3.5：已知两个4点序列： $x_1(n)=\begin{cases}1,1,1,0 & n=0,1,2,3\\ 0\quad, & others\end{cases}$

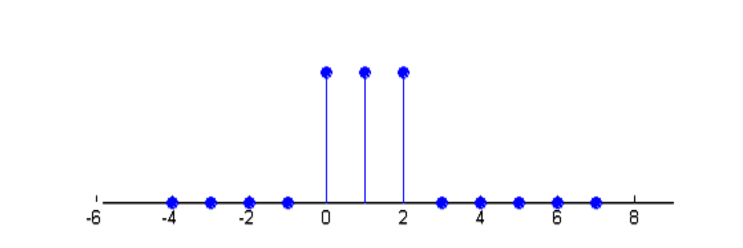
$x_2(n)=\begin{cases}1,1.5,2,2.5 & n=0,1,2,3\\ 0\quad, & others\end{cases}$ **，求：** $x_1(n)$④ $x_2(n)$ **。**

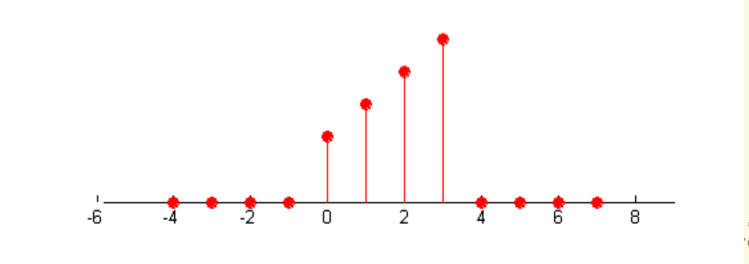
解：由循环卷积的公式：

$$x_1(n) \text{ ④ } x_2(n)=\sum_{m=0}^{3}x_1(m)x_2((n-m))_4R_4(n)$$

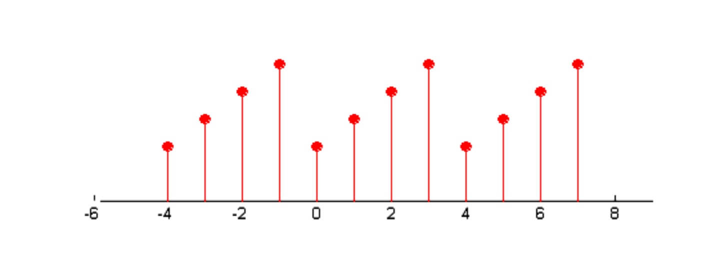
卷积过程如下：

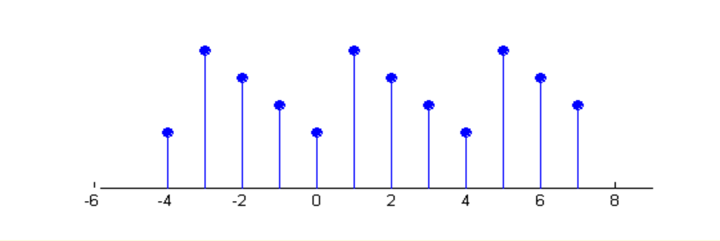
$x_1(m)$**和** $x_2(m)$ **的图形如下：**



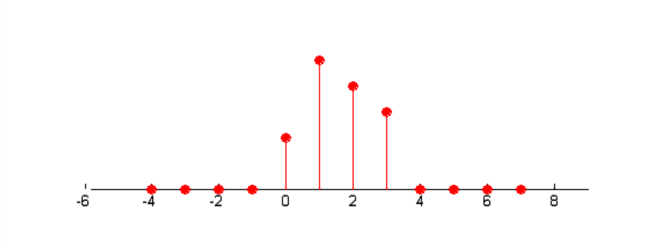


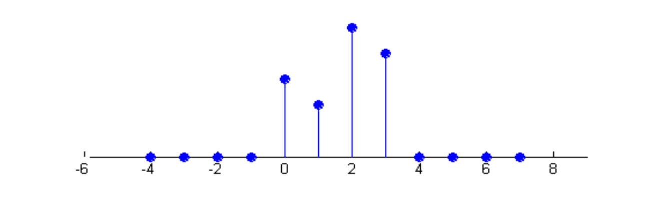
$x_2((m))_4$和 $x_2((-m))_4$ 的图形如下：





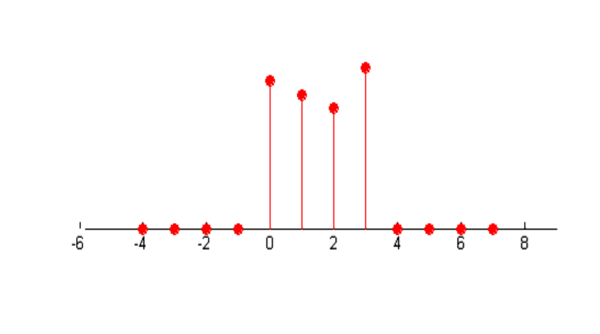
$x_2((0-m))_4 R_4(m)$ 和 $x_2((1-m))_4 R_4(m)$ 的图形如下：





$x_1(n)$ ④ $x_2(n)$的结果如下：

$$x_1(n) ④ x_2(n) = \begin{cases} 5.5, 5, 4.5, 6 & n = 0,1,2,3 \\ 0 & , \quad others \end{cases}$$



§3.4 利用循环卷积计算线性卷积

(To Compute Linear Convolution Using Circular Convolution)

3.4.1 循环卷积与线性卷积

循环卷积是周期卷积的主值，其计算是在主值区间中进行的，而线性卷积不受这个限制。

两个长度均为N的因果序列循环卷积的结果仍是一个长度为N的序列，而它们的线性卷积却是一个长度为2N-1的序列。两者之间的关系如下：

圆周卷积	线性卷积
1 是针对DFT引出的一种表示方法	1 信号通过线性系统时，信号输出等于输入与系统单位冲激响应的卷积
2 两序列长度必须相等 不等时按要求补足零值点	2 两序列长度可相等，也可不等 如：$x_1(n)$为N_1点，$x_2(n)$为N_2点
3 卷积结果长度与两信号长度相等 皆为N	3 卷积结果长度 $N=N_1+N_2-1$

3.4.2　由循环卷积求线性卷积

假设 $x(n)$和 $h(n)$ 都是有限长序列，长度分别为M和N，它们的线性卷积和循环卷积分别为：

$$y_l(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$$

$$y_c(n)=h(n)\ \text{Ⓛ}\ x(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

其中 $L\geq\max[N,M]$，$x((n))_L=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x(n+qL)$，所以

$$y_c(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x(n-m+qL)R_L(n)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)R_L(n)$$

$$\because \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n+qL-m) = y_l(n+qL)$$

$$\therefore\ y_c(n) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y_l(n+qL)R_L(n)$$

结论：

①$y_c(n)$等于$y_l(n)$以L为周期的周期延拓序列的主值序列；

②当$L < N + M - 1$时，其循环卷积的结果与线性卷积不相等，但满足一定关系；

③两个长度为M，N的序列的线性卷积可用长度均为L的循环卷积来代替。其中L应足：$L \geq M + N - 1$。

例3.4.1：已知序列： $x_1(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 14\\ 0, others\end{cases}$ $x_2(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0, others\end{cases}$

1.求 $x_1(n)$**和**$x_2(n)$**的15点循环卷积** $y_1(n)$**，画出其略图；**

2.求$x_1(n)$**和**$x_2(n)$**的19点循环卷积** $y_2(n)$**，画出其略图。**

解：

1. $y_1(n)=\begin{cases}5, 0\le n\le 14\\ 0, others\end{cases}$

2. $y_2(n)=x_1(n)\ \text{⑲}\ x_2(n)=x_1(n)*x_2(n)$

$$=\begin{cases}1,2,\ldots,5,\ldots,5,4,3,\ldots,1, & n=0,1,\ldots,4,\ldots,14,15,16,\ldots 18\\ 0, & others\end{cases}$$

注：本题中 $y_1(n)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty} y_2(n+15q)R_{15}(n)$

例3.4.2：已知： $x_1(n)=\begin{cases}1,2,3,2,1, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$ $x_2(n)=\begin{cases}3,2,1,2,3, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$

$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n) \qquad y_2(n)=x_1(n) \textcircled{7} x_2(n)$

请问序列 $y_1(n)$ 中的那些值与序列 $y_2(n)$ 的值相同？

$$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n)$$
$$=\begin{cases}3,8,14,16,17,16,14,8,3 & n=0,1,2,3,4,5,6,7,8\\ 0 & others\end{cases},$$

$$y_2(n)=x_1(n) \textcircled{7} x_2(n)$$
$$=\begin{cases}11,11,14,16,17,16,14 & n=0,1,2,3,4,5,6\\ 0 & others\end{cases},$$

比较的结果得：

当 $n=2,3,4,5,6$ **时，** $y_1(n)=y_2(n)$

§3.5 频率取样(Frequency Sampling)

3.5.1　序列的几种变换的关系

① ZT与FT：$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$

单位圆上的ZT等于序列的FT；

② LT与ZT：$X(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{X}_a(s)$

S平面到Z平面的映射关系：S平面上宽度为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带映射成整个Z平面，左半带映射成单位圆内，右半带映射成单位圆外，长为 $\frac{2\pi}{T}$ 的虚轴映射成单位圆；

③ DFT与ZT：$X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$

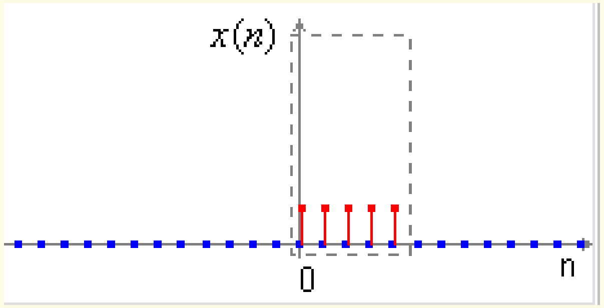
DFT是ZT在单位圆上等角距($\frac{2\pi}{N}$)取样的样本值；

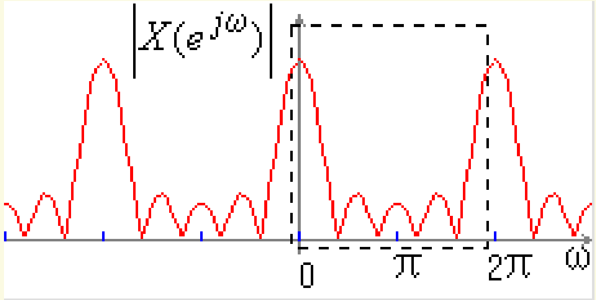
④ DFT与FT：$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$

DFT是FT在一个周期内(2π)等间距取样值，取样间隔 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

3.5.2 从N个取样值恢复 $x(n)$

频域取样是指对时域已是离散，频域仍是连续信号。现在频域上进行抽样处理，使其频域也离散化，如下图所示。





设任意长序列 $x(n)$绝对可和，其ZT为：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$，

如果在单位圆上对$X(z)$进行等角距取样，取样点数为M，

则： $X(k)=X(z)|_{z=W_M^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)W_M^{kn}$ …(3.5.2a)

由DFT定义，对 $X(k)$ 求IDFT得：

$$x_p(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(k)W_M^{-kn} \quad \text{…(3.5.2b)}$$

将（3.5.2a）代入（3.5.3b）得：

$$x_p(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)W_M^{km}]W_M^{-kn}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}W_M^{k(m-n)}]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rM)$$

$$=x((n))_M$$

注: r为整数，且 $\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}W_M^{k(m-n)}=\begin{cases}1, m=n+rM\\0, m\neq n+rM\end{cases}$

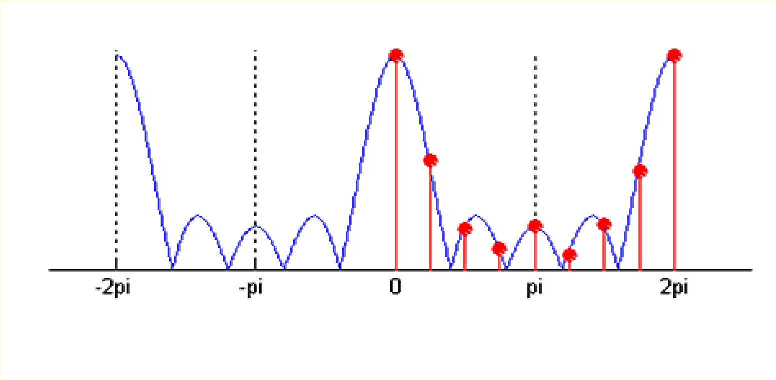
在Z平面的单位圆上对序列的ZT进行等角距取样，将导致时间序列的周期延拓。$x_p(n)$**是一个周期序列，其主值为：**

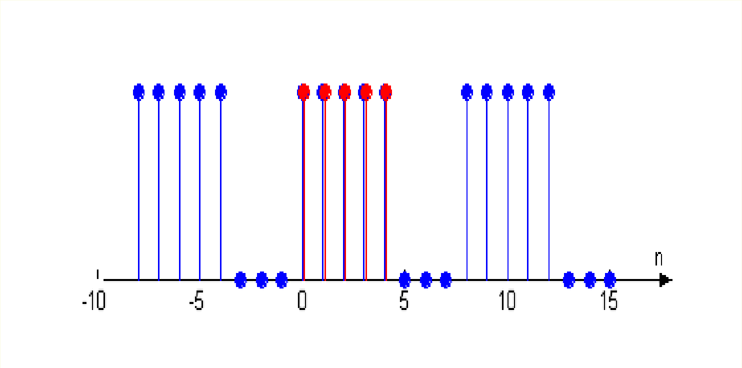
$$x_N(n)=x_p(n)\cdot R_N(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rM)]R_N(n)$$

结论：

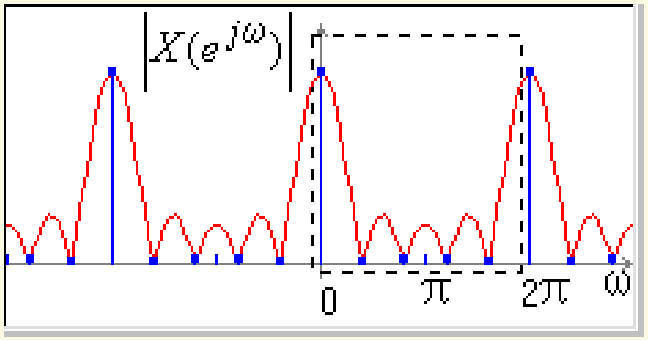
①对于长度为N的有限长序列，ZT取样即频率取样不失真的条件是取样点数M应等于或大于原序列的长度N，即：$M \geq N$。

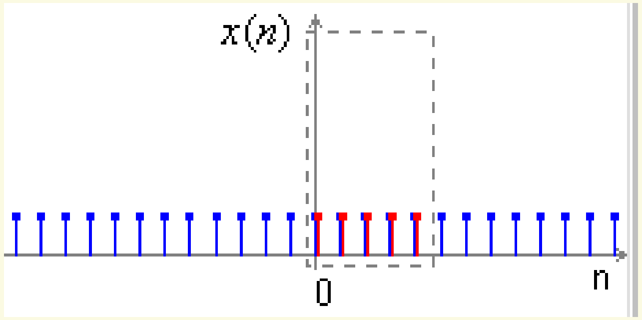
②当N=5，M=8时，时域延拓无混叠现象，此时原序列可以完全恢复，如下图所示：



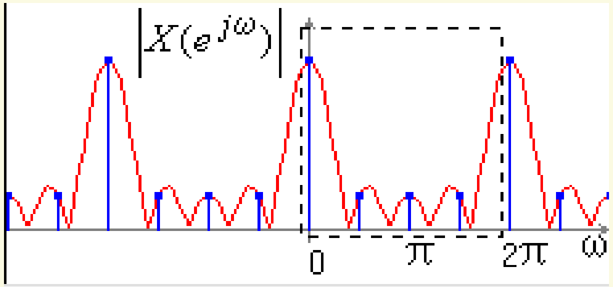


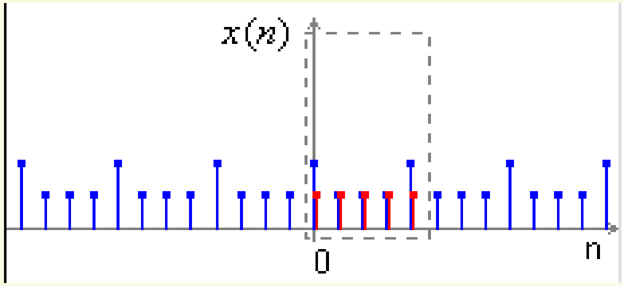
③当N=5，M=5时，时域延拓恰好无混叠现象，此时原序列可以完全恢复，如下图所示；





④ 当N=5，M=4时，时域延拓存在混叠现象，此时原序列不能完全恢复，如下图所示。





注：原信号为红色，延拓取主值区间后的恢复信号为蓝色。

例3.5.1：已知因果序列 $x(n)=\{1,2,3,2,1,0,-3,-2\}$ ，

设： $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$

$$X(e^{j\omega_k})=X(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k},\omega_k=\frac{2\pi}{5}k,k=0,1,2,3,4$$

$$y(n)=IDFT[X(e^{j\omega_k})],\quad n,k=0,1,2,3,4$$

试写出$x(n)$与$y(n)$之间的关系式，并画出$y(n)$的波形图。

解： $y(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+5r)]R_5(n)$

$$=\begin{cases}1,-1,1,2,1, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$$

例3.5.2：已知序列： $x(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 5\\ 0, others\end{cases}$ **，若** $X(z)$ **为** $x(n)$

的ZT，如果对 $X(z)$ **在** $z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}$ **处采样后得到：**

$X(k)=X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}}, k=0,1,2,3$**，画出由** $X(k)$ **的IDFT所得到**

的序列 $x_1(n)$ **的略图。**

解：由频率取样理论可知：

$$x_1(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+4r)]R_4(n)$$

$$=\begin{cases}2,2,1,1, n=0,1,2,3\\ 0, \qquad others\end{cases}$$

3.5.3 从N个取样值恢复 $X(z)$或 $X(e^{j\omega})$

设原序列长度为N，其ZT为：$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$…(3.5.3a)

由IDFT得：$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$ …(3.5.3b)

将式（3.5.3b）代入（3.5.3a）得：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-kn}z^{-n}]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-kN}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \qquad （W_N^{-kN}=1）$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(z) \qquad \text{…(3.5.3c)}$$

其中：$\Phi(z)=\dfrac{1-z^{-N}}{N(1-W_N^{-k}z^{-1})}$ ……内插函数

$\therefore$长度为N的序列 $x(n)$ 的ZT $X(z)$ 可用其单位圆上的N个取样值 $X(k)$ 来恢复。

令 $z=e^{j\omega}$,代入式(3.5.3c)得FT的内插公式：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(e^{j\omega})$$

其中：
$$\Phi(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N(1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\omega})}$$
$$=\frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin\left[\dfrac{(\omega-\dfrac{2\pi k}{N})}{2}\right]}e^{-j(\frac{N\nu\omega}{2}-\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N})}$$

注：$1-e^{-j\omega N}=\sin(\dfrac{\omega N}{2})e^{-j\frac{\omega N}{2}}$

$$\phi(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$ ……内插函数

$$\therefore X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi(\omega-k\frac{2\pi}{N})$$

长度为N的序列$x(n)$ 的FT$X(e^{j\omega})$可通过Z平面单位圆上的N个取样值 $X(k)$，即N个频域取样值来恢复。

结论：

对于长度为N的序列 $x(n)$，其N个频域取样值$X(k)$就可以不失真地代表它；且这N个取样值$X(k)$也能完全表示整个$X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$。频率取样理论是用频率取样法设计FIR数字滤波器（DF）的理论基础。

§ 3.6 快速傅立叶变换
（Fast Fourier Transform－FFT）

3.6.1 引言（Introduction）

DFT变换：

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, 0\le k\le N-1 \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

将DFT计算写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0.0} & W_N^{0.1} & \cdots & W_N^{0.(N-1)} \\ W_N^{1.0} & W_N^{1.1} & \cdots & W_N^{1.(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1).0} & W_N^{(N-1).1} & \cdots & W_N^{(N-1).(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

复数乘法：

$$X=W\cdot x=\{\mathrm{Re}[W]\cdot \mathrm{Re}[x]-\mathrm{Im}[W]\cdot \mathrm{Im}[x]\}+j\{\mathrm{Re}[W]\cdot \mathrm{Im}[x]+\mathrm{Re}[x]\cdot \mathrm{Im}[W]\}$$

所以直接计算N点DFT，计算量为：

复数乘法次数：N^2次，复数加法次数：$N(N-1)$次；

其运算量相当于：

实数乘法次数：$4N^2$次，实数加法次数：$2N^2+2N(N-1)$

从 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},(0\le n\le N-1)$ 看，提高DFT运算速度，唯一可以利用的是 W_N 。

W_N称为旋转因子，表示为：$W_N^k=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$

注：

1. 旋转因子的性质：

a． 对称性：$(W_N^k)^* = W_N^{N-k}$ ；

b． 周期性：$W_N^{k+mN} = W_N^k$ ；

c． 换底：$W_N^k = W_{mN}^{mk} = W_{N/2}^{k/2}$ ，$k/2, N/2$ 为整数；

d． 几个特殊值：

$$W_N^{kN} = 1 \qquad W_N^{N/2} = -1$$

$$W_N^{N/4} = -j \qquad W_N^{3N/4} = j$$

2. $\frac{N}{2},\frac{N}{4}$ 点的DFT分别为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_{N/2}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/2-1$$ ；

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/4-1}x(n)W_{N/4}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/4-1$$ 。

1965年Cooley & Tukey提出了快速FFT算法，称为FFT。使DFT成为DSP的有力工具。FFT算法有很多种，这里仅介绍两种最基本的算法：

时间抽选FFT算法—Decimation-in-Time FFT；

频率抽选FFT算法—Decimation-in-Frequency FFT；

上述两种算法均假设N是2的整数幂，即以2为基的FFT算法。

3.6.2 时间抽取FFT算法

（**Decimation-In-Time FFT－DIT FFT**）

基本出发点：利用 W_N^k 的周期性和对称性，将**DFT**的计算分解成一些逐次减小的**DFT**计算；

分解规则：（**1**）对时间进行偶奇分，

（**2**）对频率进行前后分。

设 $N=2^M$（**M**：正整数），则：$M=\log_2 N$。

为讨论方便，以时间信号序列为例：

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7)\} \qquad \textbf{…(3.6.2a)}$$

由规则（**1**），将 $x(n)$ 按序号偶奇分，得：

$$\{x(0),x(2),x(4),x(6)\,|\,x(1),x(3),x(5),x(7)\}$$

即：

$$\begin{cases} g(r)=x(2r), even \\ h(r)=x(2r+1), odd \end{cases}, r=0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1 \qquad \textbf{…(3.6.2b)}$$

由DFT定义得：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=even}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=odd}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}g(r)(W_N^2)^{kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}h(r)(W_N^2)^{kr}$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}g(r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}h(r)W_{N/2}^{rk}$$

$X(k)$

$$=G(k)+W_N^kH(k),k=0,1,2...,N-1 \quad \text{…(3.6.2c)}$$

由规则（2），将$X(k)$分为前后两组：

$$X(k)=\{X(0),X(1),X(2),X(3)\,|\,X(4),X(5),X(6),X(7)\}$$

由式（3.6.2c），前4个k值的$X(k)$为：

$$X(k)=G(k)+W_N^k H(k),k=0,1,2,\dots\frac{N}{2}-1 \qquad \text{…(3.6.2d)}$$

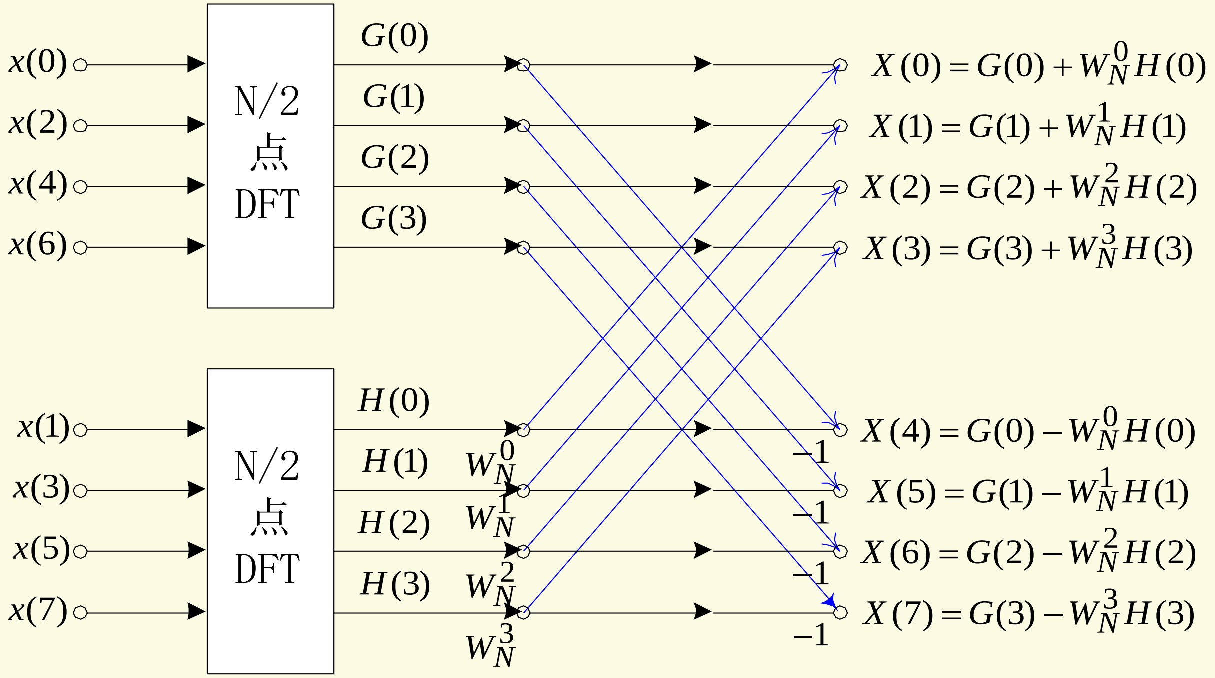
后4个k值的$X(k)$为：

$$\begin{aligned}X(k+\frac{N}{2})&=G(k+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}H(k+\frac{N}{2})\\&=G(k)-W_N^k H(k),k=0,1,2\dots,\frac{N}{2}-1\end{aligned} \qquad \text{…(3.6.2e)}$$

$$\therefore\begin{cases}X(k)=G(k)+W_N^k\cdot H(k)\\X(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^k\cdot H(k)\end{cases},k=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}$$

上式相当与把原来N点的DFT计算分解成两个$\frac{N}{2}$点的DFT计算。$G(k)$是$g(r)$原序列偶数项的$\frac{N}{2}$点DFT；$H(k)$是$h(r)$原序列偶数项的$\frac{N}{2}$点DFT。

由上式画出信号流图如下：



$\because N=2^M$， N为偶数，$\frac{N}{2}$也为偶数，将$\frac{N}{2}$点的**DFT**计算再分解成$\frac{N}{4}$点的**DFT**计算，原序号变为：

$$\{x(0),x(4)\,|\,x(2),x(6)\,|\,x(1),x(5)\,|\,x(3),x(7)\}$$

$\therefore G(k),H(k)$ 分别计算如下：

$$G(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}g(r)W_{N/2}^{rk}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}g(2l)W_{N/2}^{2lk}+\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}g(2l+1)W_{N/2}^{(2l+1)k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}g(2l)W_{N/4}^{lk}+W_N^{2k}\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}g(2l+1)W_{N/4}^{lk}$$

$$=M(k)+W_N^{2k}N(k)$$

注意：k 的取值范围；

再将$G(k)$的k值前后分，则$G(k)$的后两值为：

$$G(k+\frac{N}{4}) = M(k+\frac{N}{4}) + W_N^{2(k+\frac{N}{4})} N(k+\frac{N}{4})$$
$$= M(k) - W_N^{2k} N(k), k = 0,1,2\ldots, \frac{N}{4}-1$$

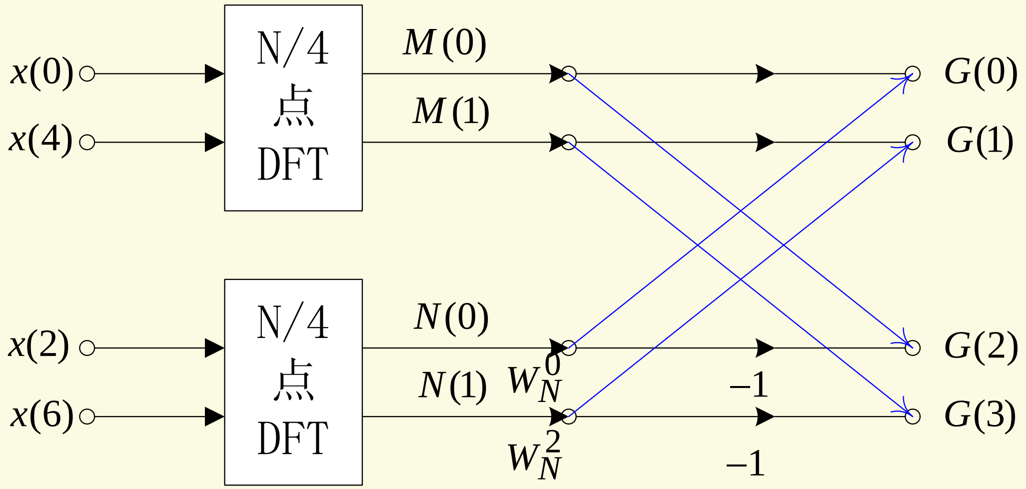
$$\therefore \begin{cases} G(k) = M(k) + W_N^{2k} N(k) \\ G(k+\frac{N}{4}) = M(k) - W_N^{2k} N(k) \end{cases}, k = 0,1,2,\ldots, \frac{N}{4}-1$$

注：$M(k), N(k)$均是 $\frac{N}{4}$ 点的DFT，

即：

$$M(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} m(n) W_{N/4}^{nk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/4}^{lk}$$

计算$G(k)$ 的信号流图如下：

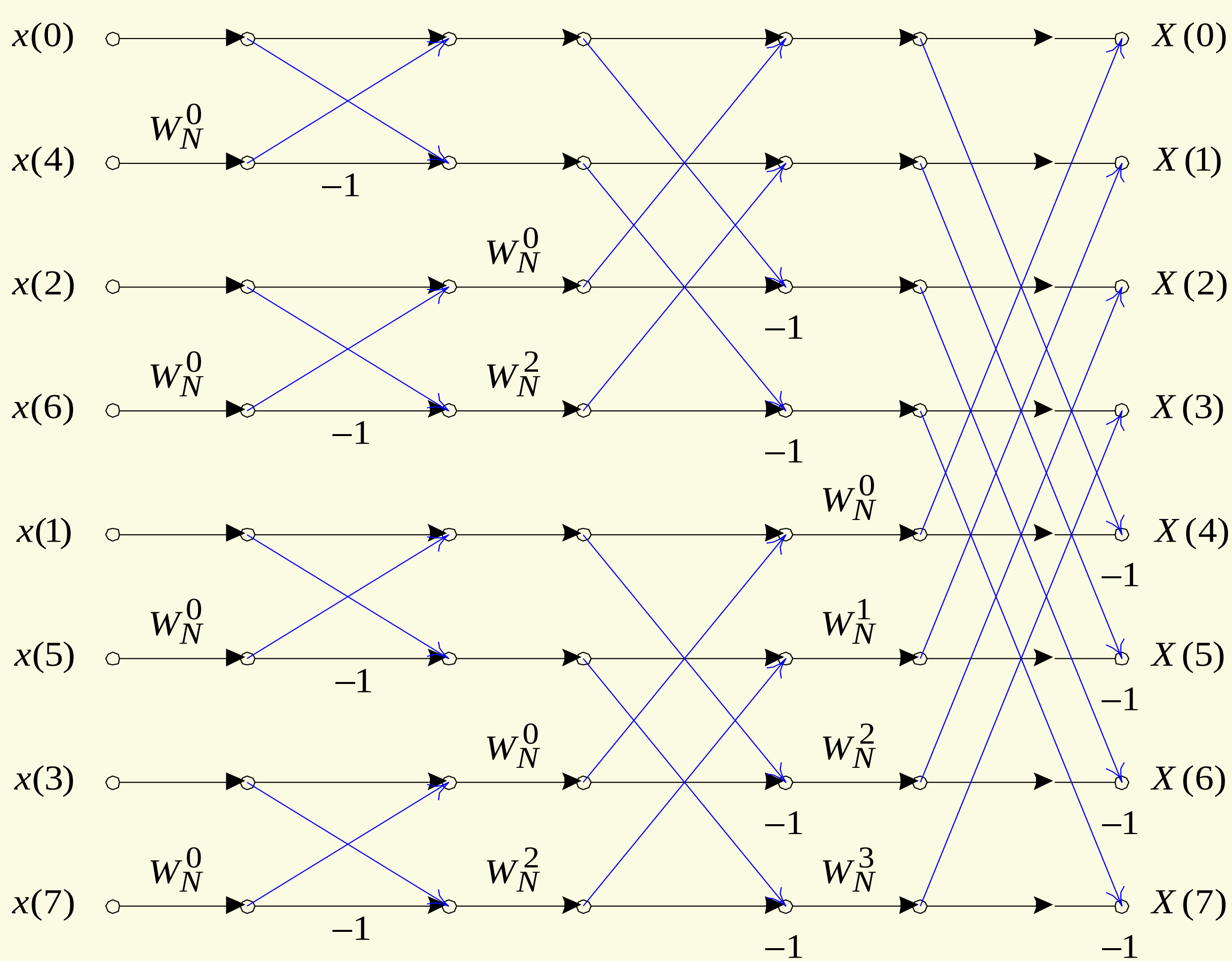


类似地，可得：

$$\therefore \begin{cases} H(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l) W_{N/4}^{lk} + W_N^{2k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1) W_{N/4}^{lk} = P(k) + W_N^{2k} Q(k) \\ H(k+\frac{N}{4}) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l) W_{N/4}^{lk} - W_N^{2k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1) W_{N/4}^{lk} = P(k) - W_N^{2k} Q(k) \end{cases}, k = 0,1,2,\dots, \frac{N}{4}-1$$

注：$P(k), Q(k)$ 均是 $\frac{N}{4}$点的**DFT**；

综合上述，8点DFT的完整FFT流图如下：



上面时间抽选FFT流图具有三个特点：

①基本计算单元为一碟形；

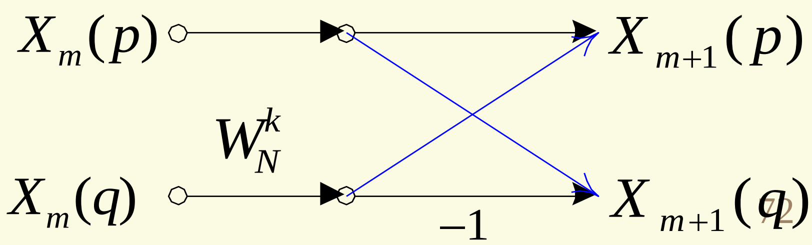
②输入为“混序”排列；输出为正序排列；

③具有“同址计算”特性。

1.蝶形计算：

对于任意$N=2^M$，总可以通过M级分解成2点DFT计算，每次由 $\frac{N}{2}$ 个蝶形计算组成。如下图所示，计算方程为：

$$\begin{cases} X_{m+1}(p)=X_m(p)+W_N^k X_m(q) \\ X_{m+1}(p)=X_m(p)-W_N^k X_m(q) \end{cases}$$



完成一个蝶形运算需**2**次复加法和**1**次复乘法。

∵完成$N=2^M$点的**DFT**计算需$\log_2 N$级迭代计算，每级$\frac{N}{2}$个蝶形；蝶形数$=\frac{N}{2}\log_2 N$，完成**N**点的时间抽选**FFT**的总计算量为：

复乘法次数：$\alpha_F=\frac{N}{2}\log_2 N$　复加法次数：$\beta_F=N\log_2 N$

直接计算**DFT**需复乘法次数$\alpha_D=N^2$，则：$\alpha_F/\alpha_D=\frac{\log_2 N}{2N}$

当$N=1024$时，

$$\begin{cases}\alpha_F=5120\\ \beta_F=10240\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_D=4N^2=4{,}194{,}304\\ \beta_D=2N^2+N(N-1)=4{,}192{,}256\end{cases}$$

$$\alpha_F/\alpha_D=\frac{\log_2 1024}{2\times 1024}\approx\frac{1}{205}$$

即：**DFT**需**205**小时，**FFT**需**1**小时。

2. 同址计算：

完成N点时间抽选FFT计算需$\log_2 N$级迭代运算，每级运算均由N/2个蝶形计算构成。蝶形计算的好处就是同址计算。设输入$\{x(0),x(4)\,|\,x(2),x(6)\,|\,x(1),x(5)\,|\,x(3),x(7)\}$分别存入存贮单元$\{Q(0),Q(1),Q(2),Q(3),Q(4),Q(5),Q(6),Q(7)\}$中，

第一级运算中：$x(0),x(4)$运算后，结果送到$Q(1),Q(2)$保存，

$x(2),x(6)$运算后，结果送到$Q(3),Q(4)$保存，

$\vdots$

第二级运算中，$Q(1),Q(3)$运算后，结果送到$Q(1),Q(3)$保存，

$Q(2),Q(4)$运算后，结果送到$Q(2),Q(4)$保存，

$\vdots$

$\vdots$

完成最后一级运算，中间不需要其它存贮器。同址运算的好处：节省存贮单元。当N越大，好处越明显。

3.　变址计算：

从FFT的流图可知，输入$\{x(0), x(4) \mid x(2), x(6) \mid x(1), x(5) \mid x(3), x(7)\}$是“混序”排列；输出

$\{X(0), X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7)\}$是正序排列。

在实际计算中，输入的“混序”是通过输入正序排列按“码位倒置”的变址处理得到的，即：

$$x(1) \rightarrow x(001) \Rightarrow x(100) \rightarrow x(4)$$

这样便可实现FFT的同址计算。

转换过程如下图：

$x(0)->000<->000->x(0)$　　$x(1)->001<->100->x(4)$

$x(2)->010<->010->x(2)$　　$x(3)->011<->110->x(6)$

$x(4)->100<->001->x(1)$　　$x(5)->101<->101->x(5)$

$x(6)->110<->011->x(3)$　　$x(7)->111<->111->x(7)$

图中**n**表示自然顺序的标号，**l**表示码位倒置的标号，从图中可知：当时$n=l$，$x(n)$与 $x(l)$不交换；当$n<l$时，$x(n)$与$x(l)$交换.

3.6.3 频率抽选FFT算法

(Decimation-In-Frequency FFT－DIF FFT)

推导规则：**(1)**对时间前后分；**(2)**对频率偶奇分。推导过程与时间抽选**FFT**算法类似，请同学们可参考教材自己推导。

3.6.4 N为合数的FFT算法

如果序列的长度 $N \neq 2^M$，通常有两种处理方法：

1.用补零的办法将 $x(n)$ 延长为 2^M，再使用基**2FFT**算法。由于有限长序列补零以后，只是频谱的取样点有所增加。

2.采用以任意数为基数的**FFT**算法。

设**N**等于两个整数**p**和**q**的乘积，即 $N = p \cdot q$，则可将**N**点**DFT**分解成**p**个**q**点**DFT**或**q**个**p**点**DFT**来计算。

先 $x(n)$ 将分为**p**组，每组长为**q**，即：

$$
\text{p组}\begin{cases} x(pr) \\ x(pr+1) \\ \vdots \\ x(pr+p-1) \end{cases}, r = 0,1,\ldots,q-1 \qquad \ldots(3.6.4a)
$$

例：当$N=6=p\times q=3\times 2$时，可以将$x(n)$分成3组，每组2点。

解：　可将$x(n)$分为以下3组：

第1组：　$x(0), x(3)$　；

第2组：　$x(1), x(4)$　；

第3组：　$x(2), x(5)$　。

可以将6点的DFT分解为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^{nk}=\sum_{r=0}^{1}x(3r)W_6^{3rk}+\sum_{r=0}^{1}x(3r+1)W_6^{(3r+1)k}+\sum_{r=0}^{1}x(3r+2)W_6^{(3r+2)k}$$

即将6点的DFT分解成3个2点的DFT运算。

然后将N点DFT也分解为p组来计算，每组计算q点的DFT，即：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr)W_N^{prk}+..+\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+p-1)W_N^{(pr+p-1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr)W_N^{prk}+W_N^{k}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+1)W_N^{prk}+\ldots+W_N^{(p-1)k}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+p-1)W_N^{prk}$$

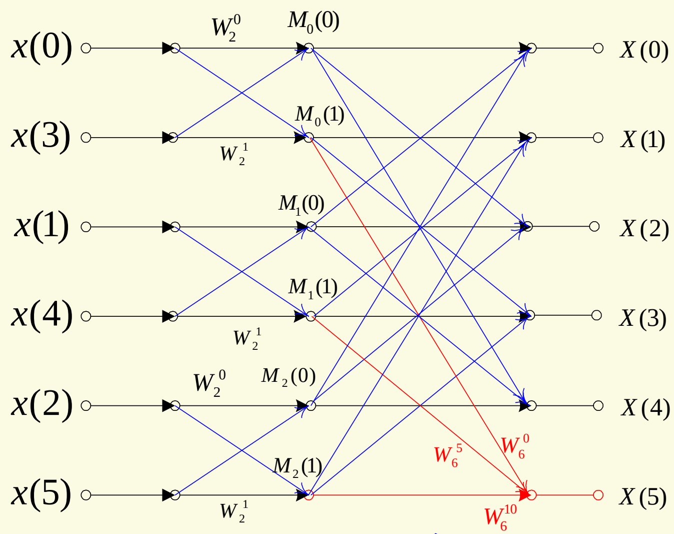
$$=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^{lk}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_N^{prk} \qquad \ldots(3.6.4b)$$

由于$W_N^{prk}=W_{N/p}^{rk}=W_q^{rk}$，因此，

$M_l(k)=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_q^{rk}$是一个q点DFT，这样N点DFT可写成：

$$X(k)=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^{lk}M_l(k) \qquad \ldots(3.6.4c)$$

一个$N=6=p\times q=3\times 2$的DFT流程图如下图所示。



例：当$N=6=p\times q=3\times 2$时，$X(5)$为：

$$X(5)=\sum_{l=0}^{2}W_6^{lk}M_l(5)=W_6^0M_0(5)+W_6^5M_1(5)+W_6^{10}M_2(5)$$

$$=W_6^0M_0(1)+W_6^5M_1(1)+W_6^{10}M_2(1)$$

如上图中红线所示。

§3.7 FFT应用（The Applications of FFT）

3.7.1 利用FFT对信号进行谱分析

所谓谱分析就是计算信号的频谱，包括振幅谱、相位谱和功率谱。设离散时间信号$x(n)$是从连续时间信号$x_a(t)$取样得到的，定义参数如下：

T 一取样周期（s）；

f_s 一取样频率（Hz），$f_s = \dfrac{1}{T}$；

f_0 —连续时间信号的最高频率（Hz）；

F 一频率分辨率：指频域取样中两相邻点间的频率间隔（Hz）；

t_p 一信号的最小记录长度（s），$t_p = \dfrac{1}{F}$ ；

N 一一个记录长度中的取样数，$t_p = NT$ 。

根据取样定理，为了避免混叠失真，要求：

$$f_s \geq 2f_0 \quad \text{或} \quad T \leq \frac{1}{2f_0} \qquad \textbf{…(3.7.1a)}$$

最小记录长度为：

$$t_p = NT = \frac{1}{F} \qquad \textbf{…(3.7.1b)}$$

取样点数N须满足条件：

$$N \geq \frac{2f_0}{F} \qquad \textbf{…(3.7.1c)}$$

3.7.2 利用FFT计算线性卷积

信号$x(n)$通过**FIR Filter**时，系统的输出为：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

设信号的长度为 N_1，**FIR**数字滤波器的单位取样响应$h(n)$的长度为 N_2。则：$x(n)$和$h(n)$线性卷积的结果$y(n)$也是一个有限长下列，其长度为

N_1+N_2-1 。

直接计算线性卷积总的计算量为：

乘法次数：$P_D=N_1\cdot N_2$ ；

加法次数：$Q_F=(N_1-1)\cdot(N_2-1)$ 。

由前面可知，两个有限长序列的线性卷积可用循环卷积来代替，其必要条件是使 $x(n)$ 和 $h(n)$ 都延长至**N**点，$N=N_1+N_2-1$，延长的部分补充零值，循环卷积可用**FFT**来计算。

因此$y(n)$的计算由下列步骤完成：

①将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 都延长到**N**点，$N=N_1+N_2-1$；

②计算 $x(n)$ 的**N**点**DFT**，即：$X(k)=DFT[x(n)]$；

③计算 $h(n)$ 的**N**点**DFT**，即：$H(k)=DFT[h(n)]$；

④计算$Y(k)=X(k)\cdot H(k)$；

⑤计算$Y(k)$的反变换，即：

$$y(n)=IDFT[X(k)\cdot H(k)]。$$

完成以上步骤的总计算量为：

乘法次数：$P_F=\dfrac{3}{2}N\log_2 N+N$；

加法次数：$Q_F=3N\log_2 N$。

3.7.3 分段卷积

当$x(n)$是一个长序列时，用循环卷积是不利的。因为 $h(n)$须补很多零值，使计算效率降低。

分段卷积就是把 $x(n)$分成长度为L的n段，L与$h(n)$的长度M相仿或略长，然后将每段与 $h(n)$卷积，最后把每段卷积结果以适当的方法拟合在一起。处理的方法有重叠相加法和重叠保留法。

重叠相加法

将 $x(n)$分成长为**L**的几个区段，每段表示为：

$$x_k(n)=\begin{cases} x(n), kL \le n \le (k+1)L-1 \\ 0, others \end{cases}, k=0,1,...$$

所以$x(n)$可表示为 $x_k(n)$之和，即：$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(n)$

则：$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(n)$

其中：$y_k(n)=x_k(n)*h(n)$，$y_k(n)$的长度为**L+M-1**。

将 $h(n)$ 与 $x_k(n)$ 均增添零值，使其长度均为**N**，**N=L+M-1**；这样，以**N**点的循环卷积实现线性卷积，即：

$$y_k(n) = x_k(n) * h(n) = x_k(n) \otimes h(n)\,|_{N=L+M-1},$$

$\because y_k(n)$ 的长度为**L+M-1**，而 $x_k(n)$ 长度为**L**；

$\therefore$ 相邻两段 $y_k(n)$ 序列必然有**M-1**点发生重叠。

最后的输出序列将重叠部分相加起来即可。

重叠相加法用FFT处理的步骤归纳如下：

①计算$h(n)$的N点DFT，N=L+M-1；

②计算$x_k(n)$的N点DFT，N=L+M-1；

③计算$Y_k(k)=X_k(k)\cdot H(k)$；

④求$y_k(n)$的反变换$Y_k(k)=IFFT[X_k(k)\cdot H(k)]$；

⑤将$Y_k(k)$的重叠部分相加起来得到输出：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y_k(n)。$$

本章结束

谢 谢!