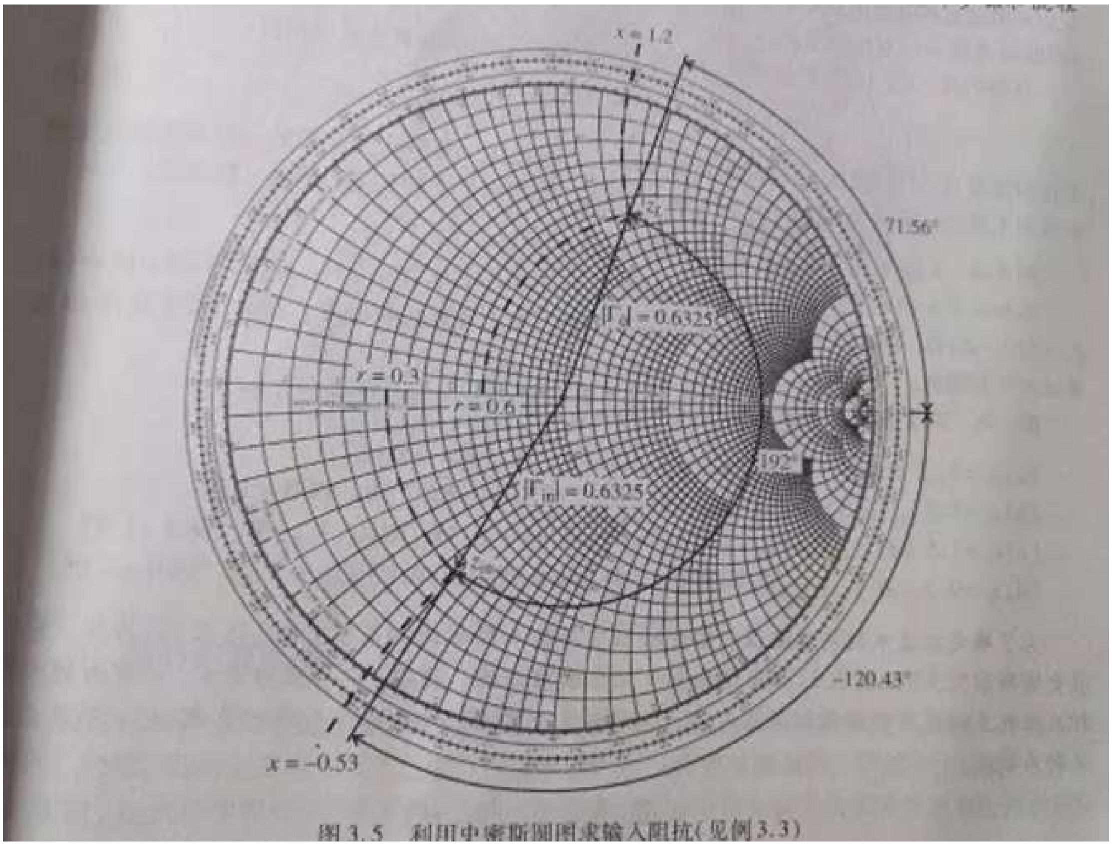
从容面对"史密斯圆图"，不再懵逼

——转自 硬件十万个为什么 论坛

作者：z00143104

不管多么经典的射频教程，为什么都做成黑白的呢？让想理解史密斯原图的同学一脸懵逼。



这是什么东东？

今天解答三个问题：
1、是什么？
2、为什么？
3、干什么？

1、是什么？
该图表是由菲利普·史密斯(Phillip Smith)于 1939 年发明的，当时他在美国的 RCA 公司工作。史密斯曾说过，"在我能够使用计算尺的时候，我对以图表方式来表达数学上的关联很有兴趣"。
史密斯图表的基本在于以下的算式。

当中的 Γ 代表其线路的反射系数(reflection coefficient)
即 S 参数（S-parameter）里的 S11，ZL 是归一负载值，即 ZL / Z0。当中，ZL 是线路本身的负载值，Z0 是传输线的特征阻抗（本征阻抗）值，通常会使用 50Ω。
简单的说：就是类似于数学用表一样，通过查找，知道反射系数的数值。

2、为什么？
我们现在也不知道，史密斯先生是怎么想到"史密斯圆图"表示方法的灵感，是怎么来的。
很多同学看史密斯原图，屎记硬背，不得要领，其实没有揣摩，史密斯老先生的创作意图。

我个人揣测：是不是受到黎曼几何的启发，把一个平面的坐标系，给**"掰弯"**了。
我在表述这个"掰弯"的过程，你就理解，这个图的含义了。（坐标系可以掰弯、人尽量不要"弯"；如果已经弯了，本人表示祝福）

现在，我就掰弯给你看。
世界地图，其实是一个用平面表示球体的过程，这个过程是一个"掰直"。

史密斯原图，巧妙之处，在于用一个圆形表示一个无穷大的平面。

2.1、首先，我们先理解"无穷大"的平面。
首先的首先，我们复习一下理想的电阻、电容、电感的阻抗。

在具有电阻、电感和电容的电路里，对电路中的电流所起的阻碍作用叫做阻抗。阻抗常用 Z 表示，是一个复数，实际称为电阻，虚称为电抗，其中电容在电路中对交流电所起的阻碍作用称为容抗 ,电感在电路中对交流电所起的阻碍作用称为感抗，电容和电感在电路中对交流电引起的阻碍作用总称为电抗。 阻抗的单位是欧姆。

R，电阻：在同一电路中，通过某一导体的电流跟这段导体两端的电压成正比，跟这段导体的电阻成反比,这就是欧姆定律。
标准式： 。（理想的电阻就是 实数，不涉及复数的概念）。

如果引入数学中复数的概念，就可以将电阻、电感、电容用相同的形式复阻抗来表示。
既：电阻仍然是实数 R（复阻抗的实部），电容、电感用虚数表示，分别为：

$$Z=\frac{1}{j\omega C}\cdot\cdot\cdot\text{公式 (1)}$$

电容的阻抗表示方法

$$Z=j\omega L\cdot\cdot\cdot\text{公式 (2)}$$

电感的阻抗表示方法

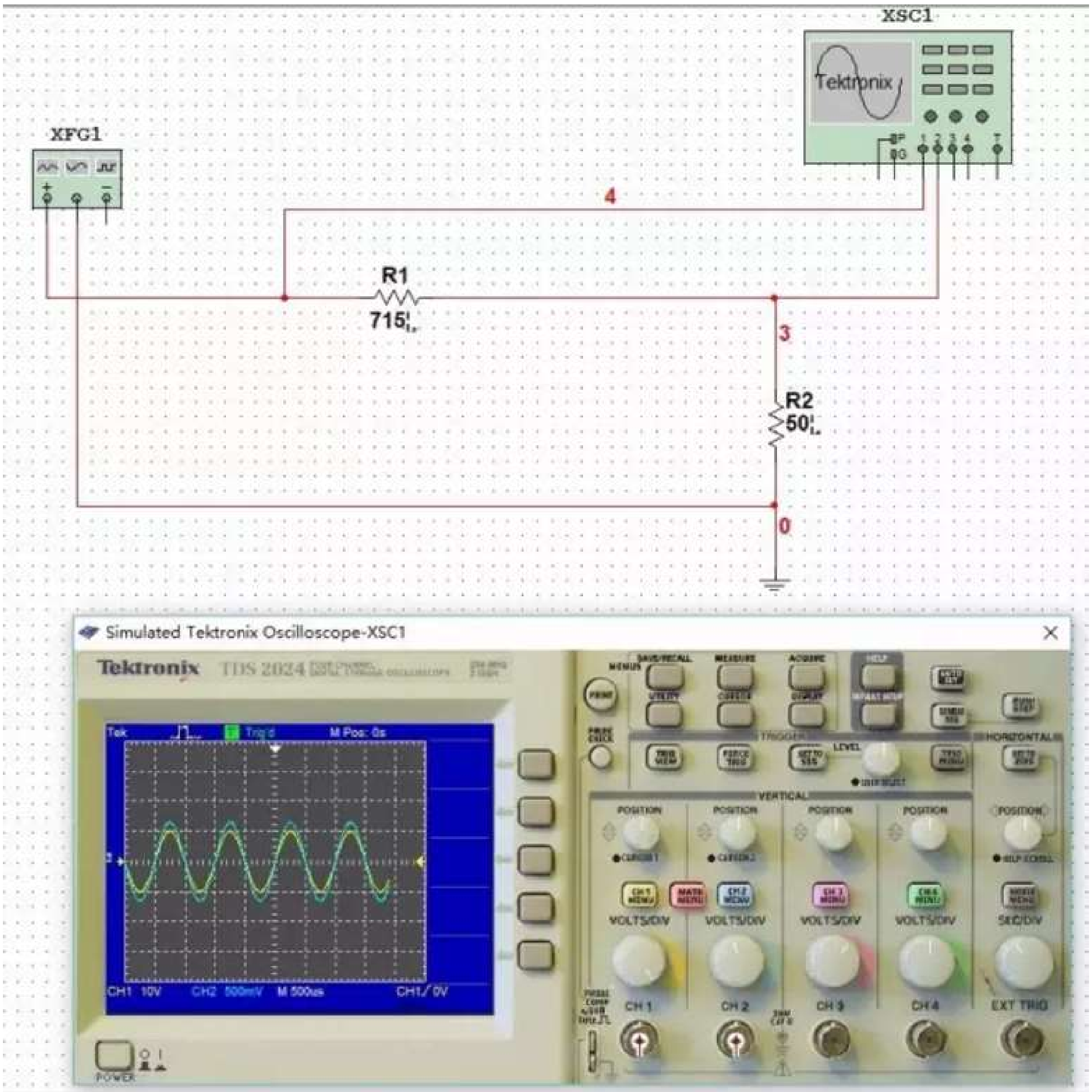
Z= R+i(ωL–1/（ωC）)

说明：负载是电阻、电感的感抗、电容的容抗三种类型的复物，复合后统称“阻抗”，写成数学公式即是：阻抗 Z= R+i(ωL–1/（ωC）)。其中 R 为电阻，ωL 为感抗，1/（ωC）为容抗。

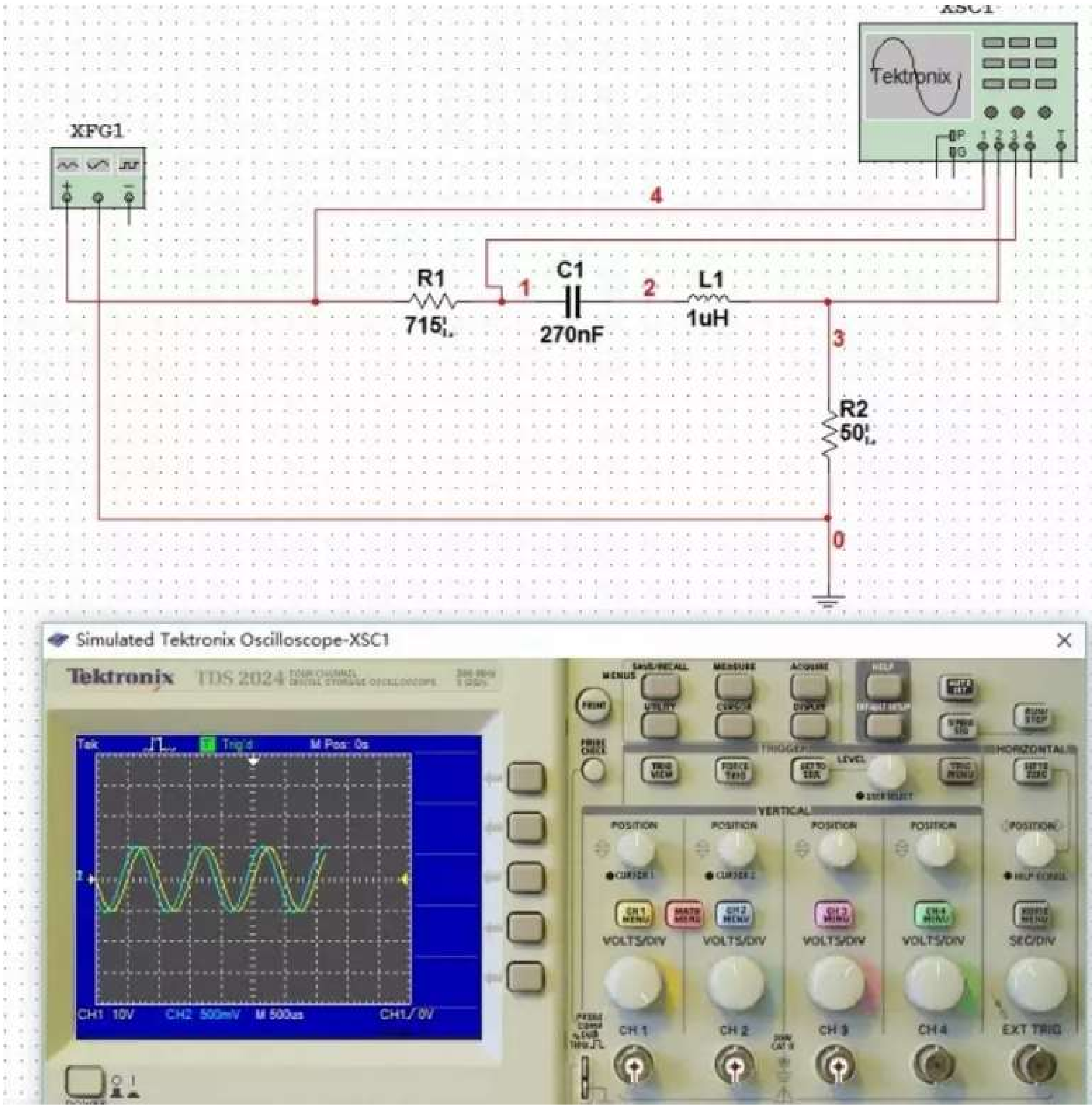
（1）如果(ωL–1/ωC) > 0，称为“感性负载”；

（2）反之，如果(ωL–1/ωC) < 0 称为“容性负载”。

我们仔细看阻抗公式，它不再是一个实数。它因为电容、电感的存在，它变成了一个复数。



电路中如果只有电阻，只影响幅度变化。



我们通过上图，我们知道，正弦波的幅度发生了变化，同时，相位也发生了变化，同时频率特性也会变化。所以我们在计算的过程中，即需要考虑实部，也需要考虑虚部。

我们可以在一个复平面里面，以实部为 x 轴、以虚部为 y 轴，表示任意一个复数。我们的阻抗，不管多少电阻、电容、电感串联、并联，之后，都可以表示在一个复平面里面。

在 RLC 串联电路中，交流电源电压 U = 220 V，频率 f = 50 Hz，R = 30 Ω，L =445 mH，C =32 mF。

(1) $X_L = 2\pi fL \approx 140\ \Omega$，$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \approx 100\ \Omega$，

则：$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 50\ \Omega$

则：$I = \frac{U}{|Z|} = 4.4\ \text{A}$

(2) $U_R = RI = 132\ \text{V}$，$U_L = X_L I = 616\ \text{V}$，$U_C = X_C I = 440\ \text{V}$。

(3) $\varphi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{40}{30} = 53.1^\circ$

即总电压比电流超前 53.1°，电路呈感性。

在上图中，我们看到通过几个矢量的叠加，最终阻抗在复平面中，落在了蓝色的圆点位置。

所以，任意一个阻抗的计算结果，我们都可以放在这个复平面的对应位置。

各种阻抗的情况，组成了这个无穷大的平面。

2.2、反射公式

信号沿传输线向前传播时，每时每刻都会感受到一个瞬态阻抗，这个阻抗可能是传输线本身的，也可能是中途或末端其他元件的。对于信号来说，它不会区分到底是什么，信号所感受到的只有阻抗。如果信号感受到的阻抗是恒定的，那么他就会正常向前传播，只要感受到的阻抗发生变化，不论是什么引起的（可能是中途遇到的电阻，电容，电感，过孔，PCB 转角，接插件），信号都会发生反射。

钱塘江大潮，就是河道的宽度变化引起了反射，这跟电路中阻抗不连续，导致信号反射，可以类比。反射聚集的能量叠加在一起，引起的过冲。也许这个比喻不恰当，但是挺形象。

那么有多少被反射回传输线的起点？衡量信号反射量的重要指标是反射系数，表示反射电压和原传输信号电压的比值。

反射系数定义为：

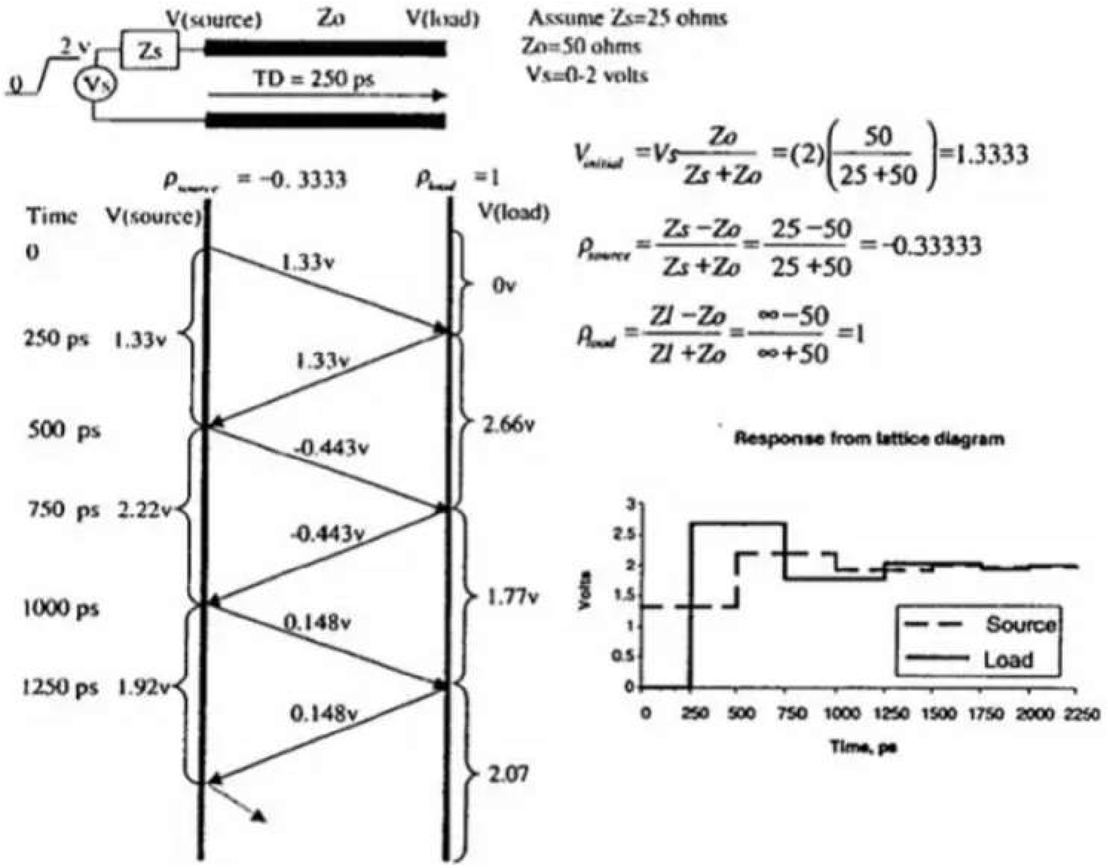
$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0}$$

其中：Z0 为变化前的阻抗，ZIN 为变化后的阻抗。假设 PCB 线条的特性阻抗为 50 欧姆，传输过程中遇到一个 100 欧姆的贴片电阻，暂时不考虑寄生电容电感的影响，把电阻看成理想的纯电阻，那么反射系数为：

$$\Gamma = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3}$$

信号有 1/3 被反射回源端。

如果传输信号的电压是 3.3V 电压，反射电压就是 1.1V。 纯电阻性负载的反射是研究反射现象的基础，阻性负载的变化无非是以下四种情况：阻抗增加有限值、减小有限值、开路（阻抗变为无穷大）、短路（阻抗突然变为 0）。



初始电压，是源电压 Vs（2V）经过 Zs（25 欧姆）和传输线阻抗（50 欧姆）分压。

Vinitial=1.33V

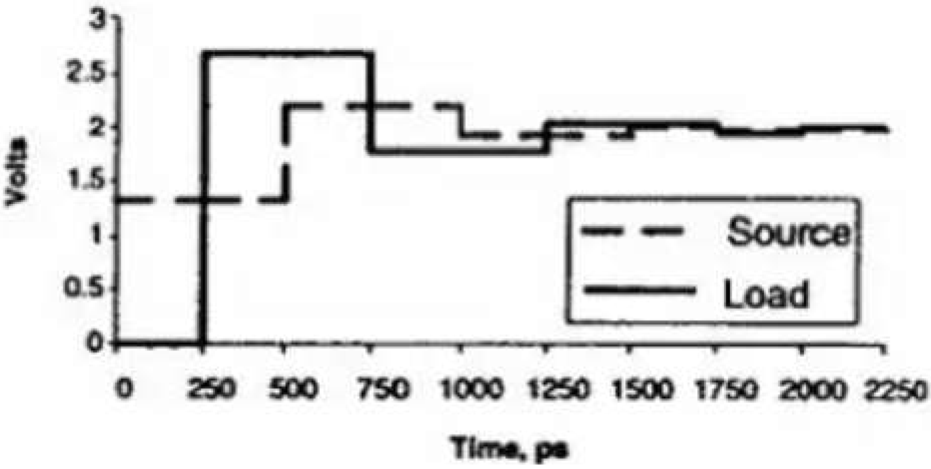
后续的反射率按照反射系数公式进行计算

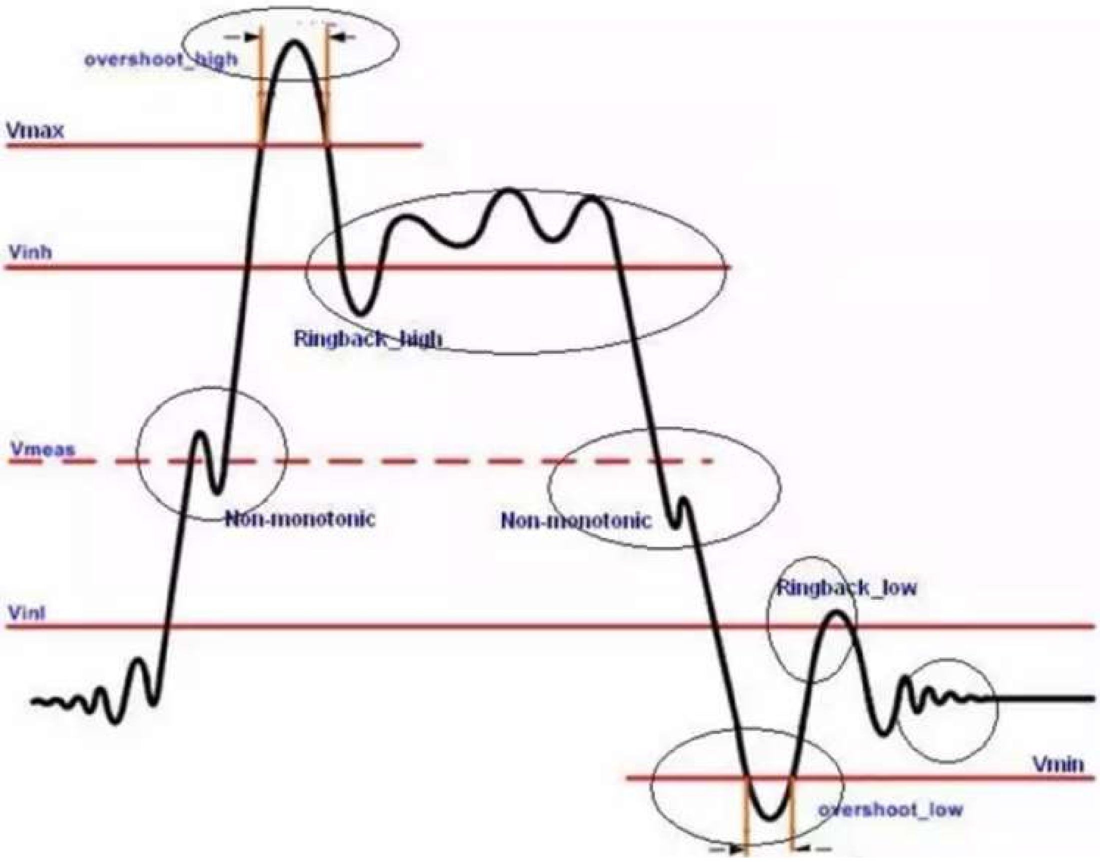
$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\varphi_L}$$

源端的反射率，是根据源端阻抗（25 欧姆）和传输线阻抗（50 欧姆）根据反射系数公式计算为-0.33；

终端的反射率，是根据终端阻抗（无穷大）和传输线阻抗（50 欧姆）根据反射系数公式计算为 1；

我们按照每次反射的幅度和延时，在最初的脉冲波形上进行叠加就得到了这个波形，这也就是为什么，阻抗不匹配造成信号完整性不好的原因。





那么我们做一个重要的假设！
为了减少未知参数的数量，可以固化一个经常出现并且在应用中经常使用的参数。这里 Z0 (特性阻抗)通常为常数并且是实数，是常用的归一化标准值，如 50Ω、75Ω、100Ω 和 600Ω。
假设 **Z0** 一定，为 **50** 欧姆。（为什么是 **50** 欧姆，此处暂时不表；当然也可以做其他假设，便于理解，我们先定死为 **50Ω**）。
那么，根据反射公式，我们得到一个重要的结论：

$$\Gamma = \frac{Z_{IN} - 50\Omega}{Z_{IN} + 50\Omega}$$

每一个 **Zin** 对应唯一的 **“Γ”**，反射系数。

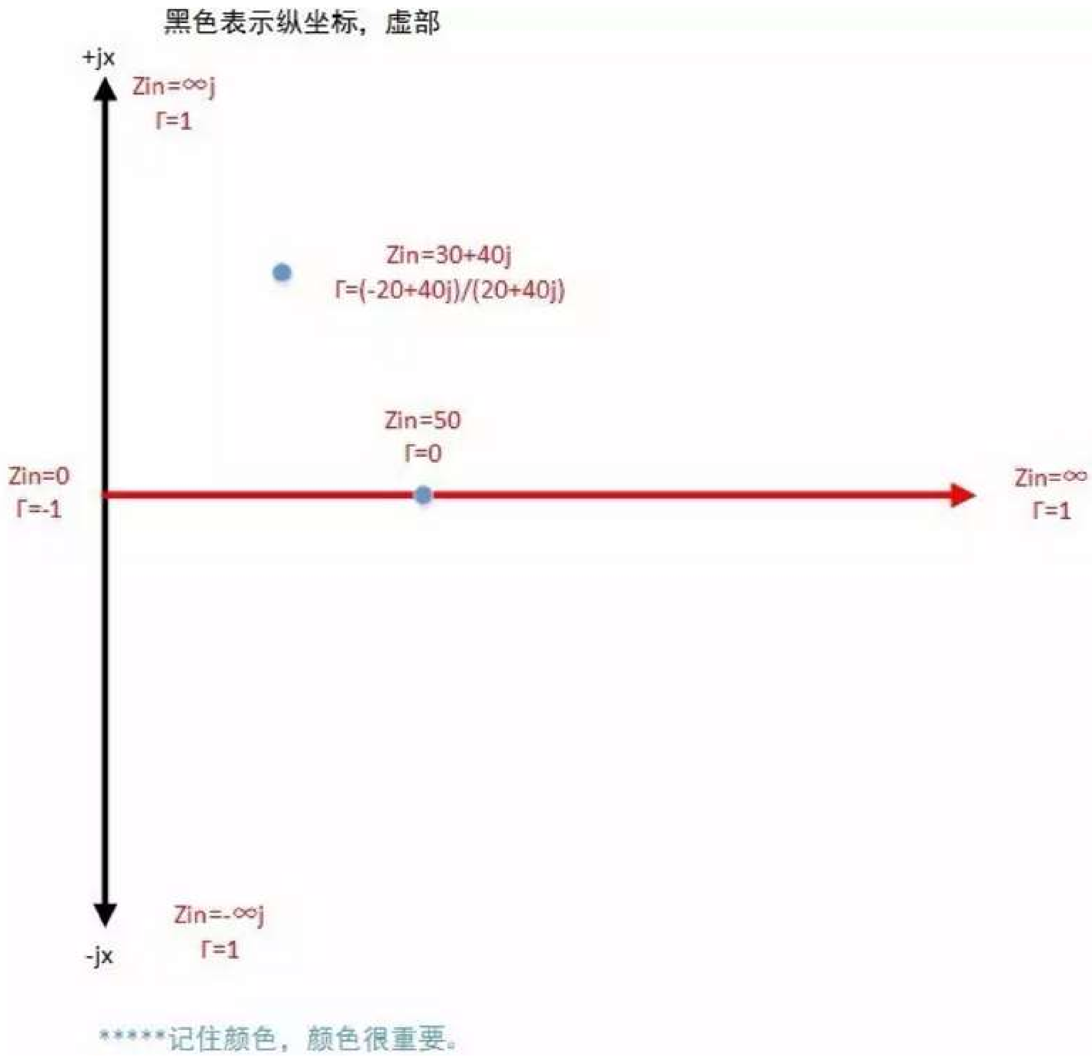
我们把对应关系描绘到刚刚我们说的“复平面”。

于是我们可以定义归一化的负载阻抗：

$$z = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R + jX}{Z_0} = r + jx$$

据此，将反射系数的公式重新写为：

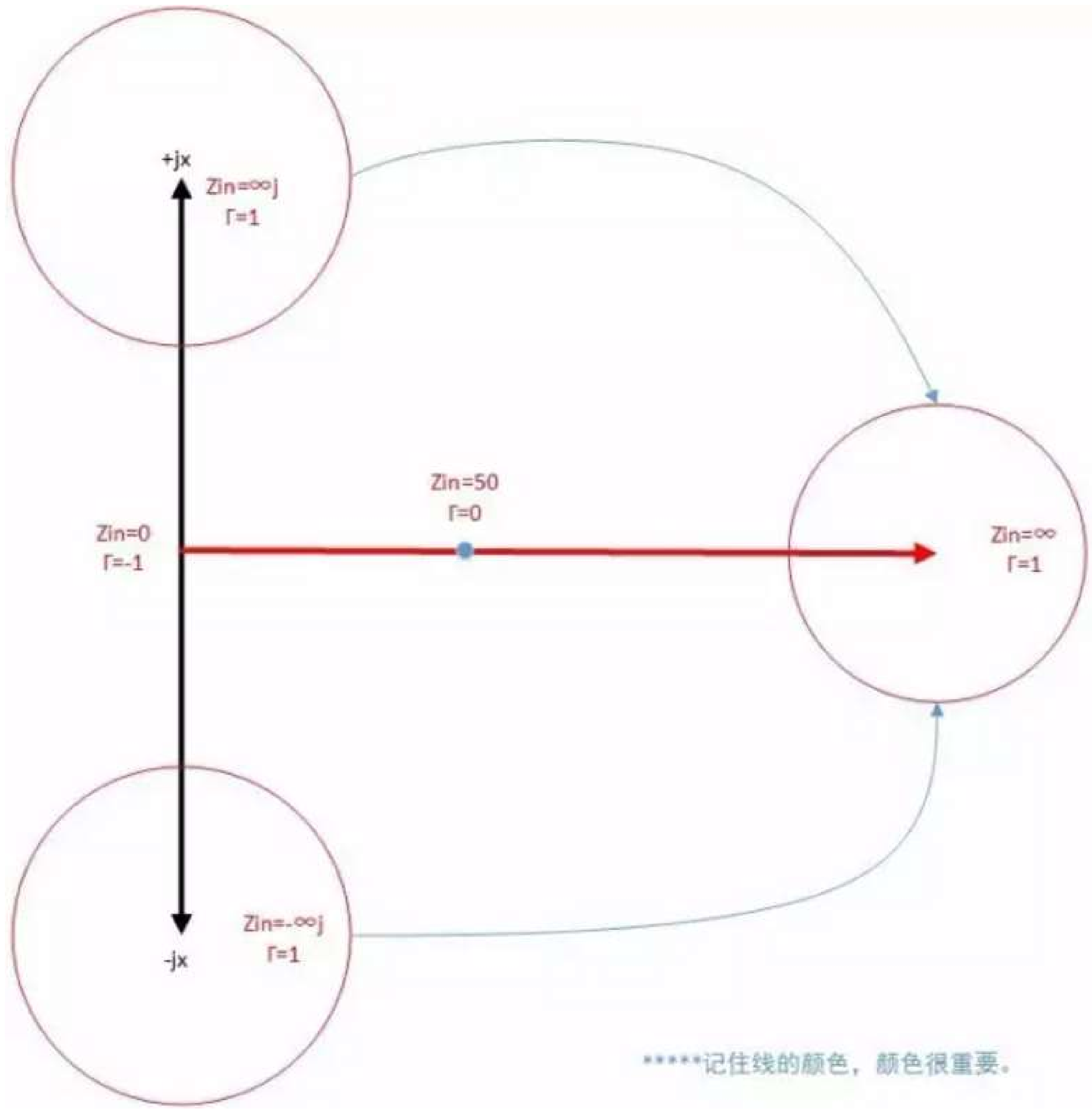
$$\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(Z_L - Z_0)/Z_0}{(Z_L + Z_0)/Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$



好了，我们在复平面里面，忘记 **Zin**，只记得 **z**（小写）和反射系数**“Γ”**。

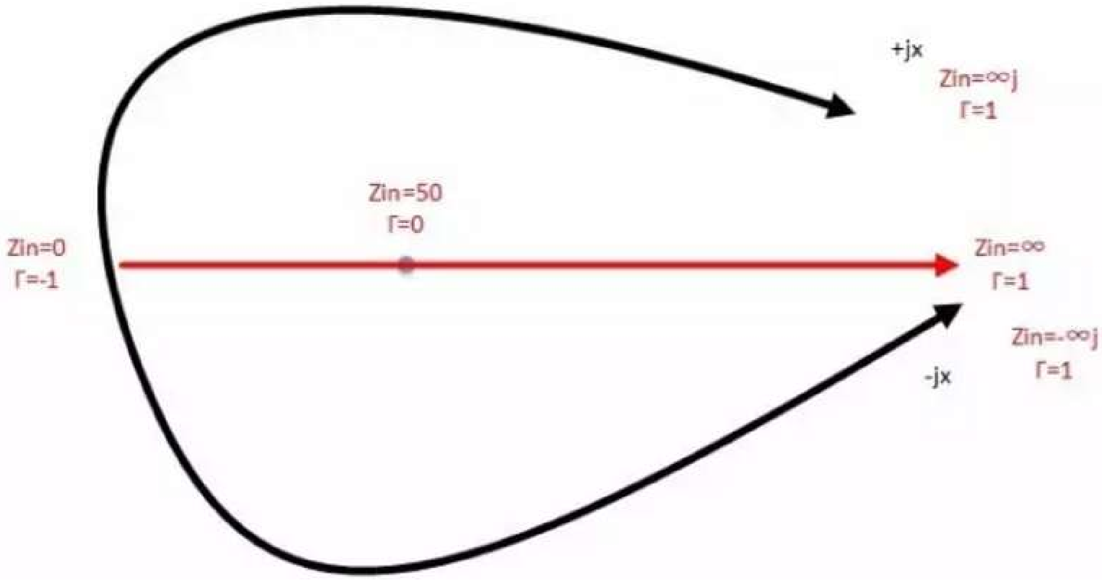
准备工作都做好了，下面我们准备“弯了”

2.3 掰弯

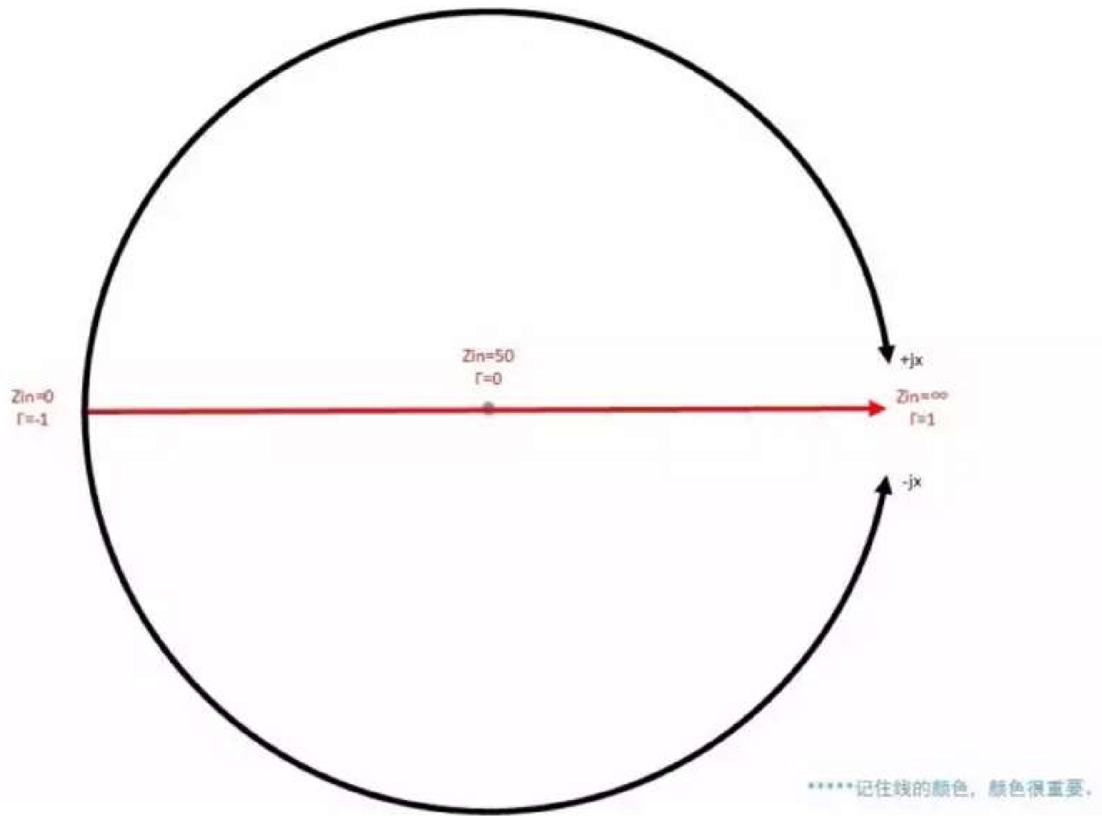


在复平面中，有三个点，反射系数都为 1，就是横坐标的无穷大，纵坐标的正负无穷大。历史上的某天，史密斯老先生，如有神助，把黑色线掰弯了，把上图中，三个红色圈标注的点，捏到一起。

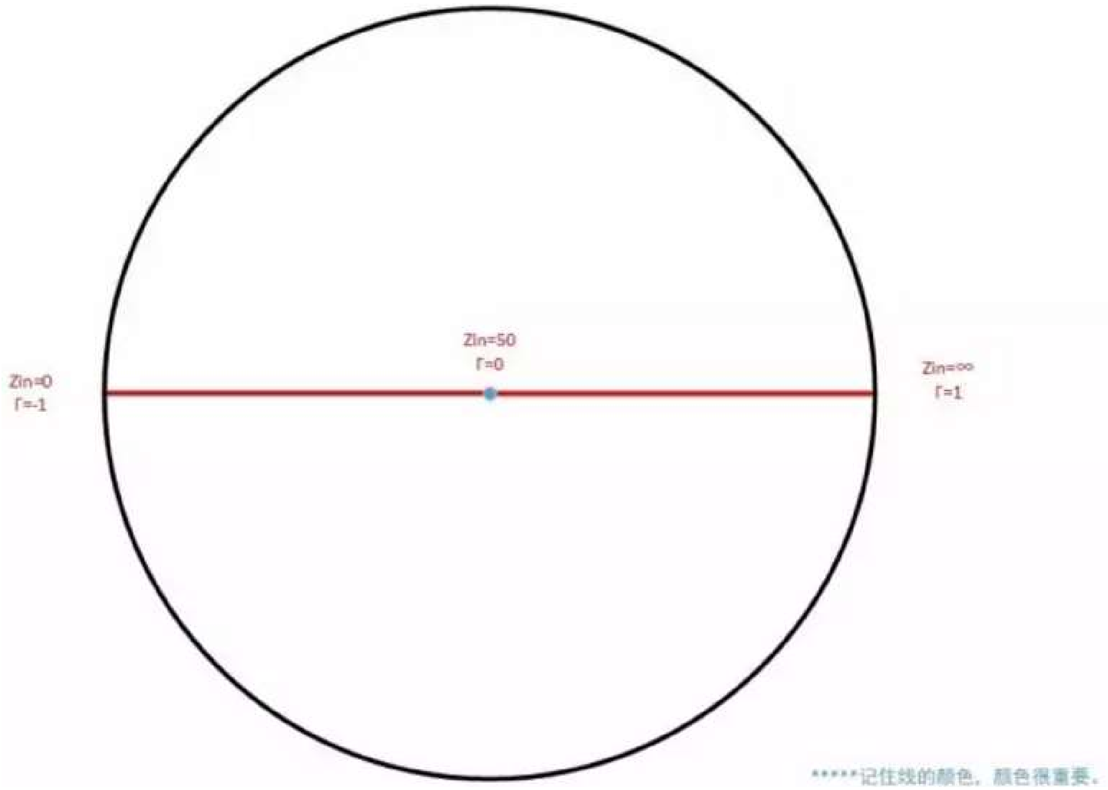
弯了，弯了



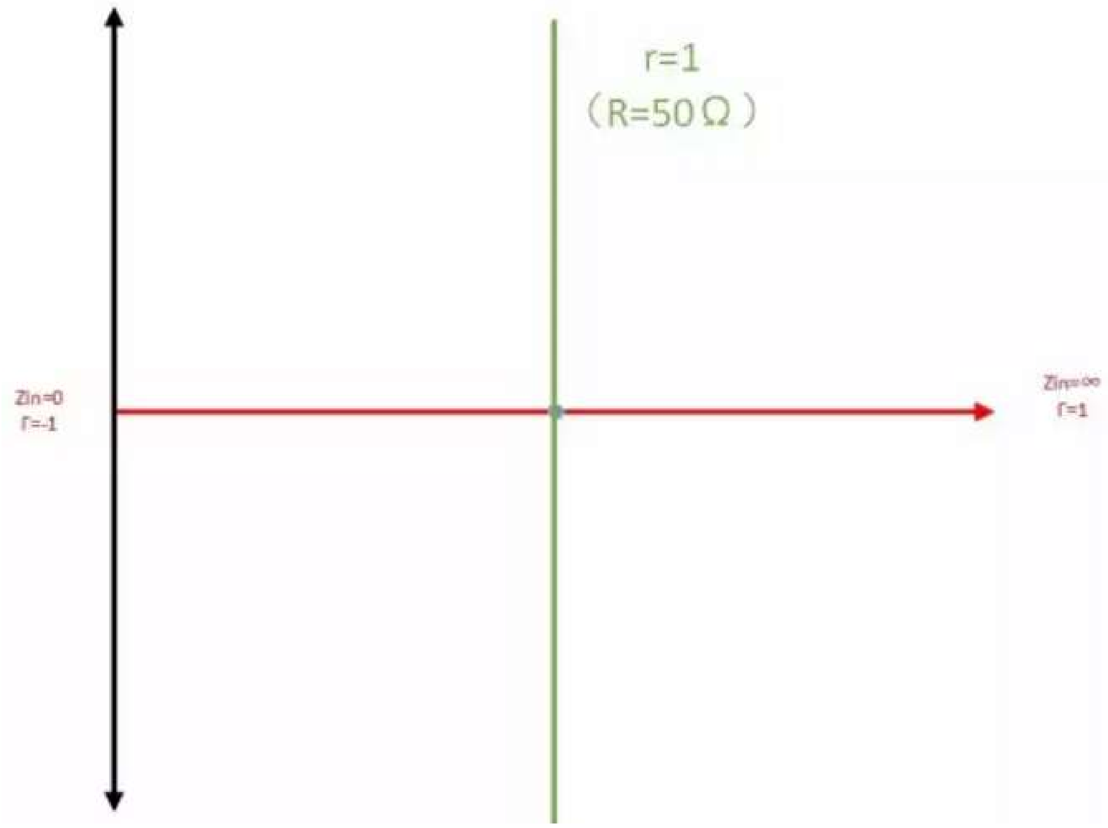
圆了，圆了。

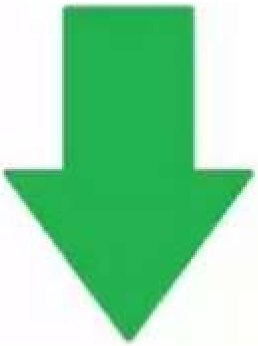


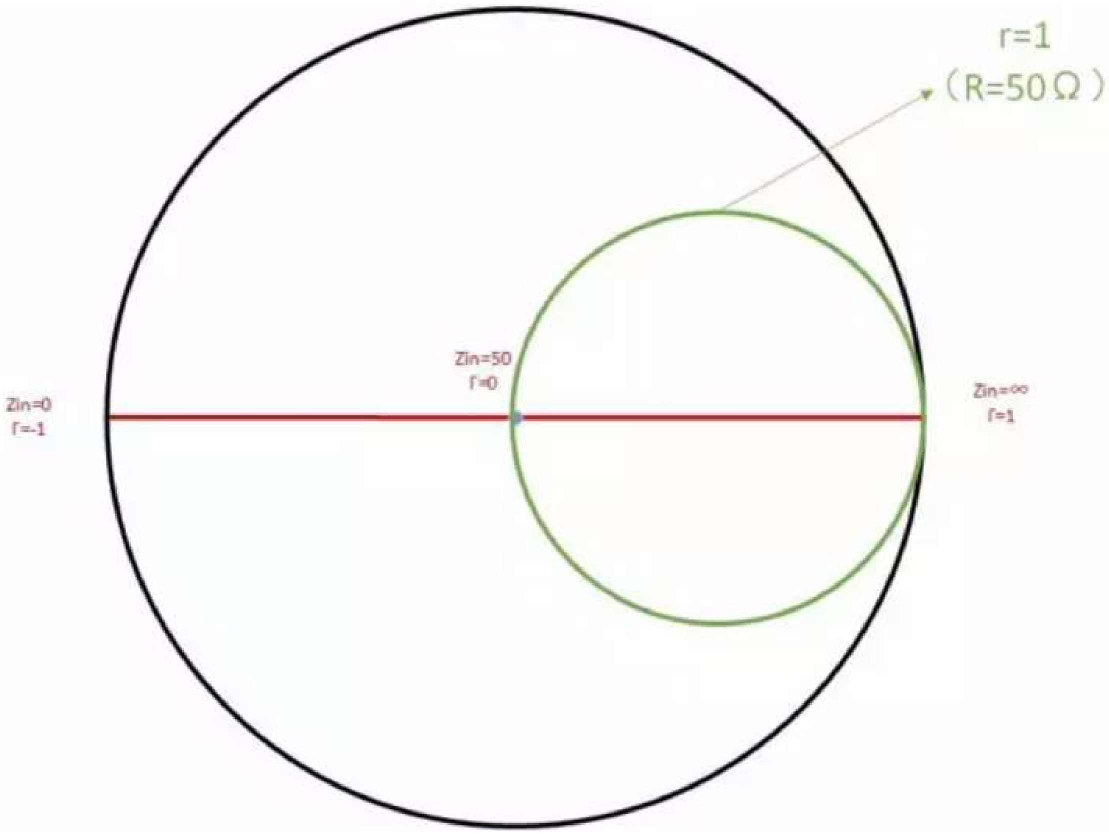
完美的圆：



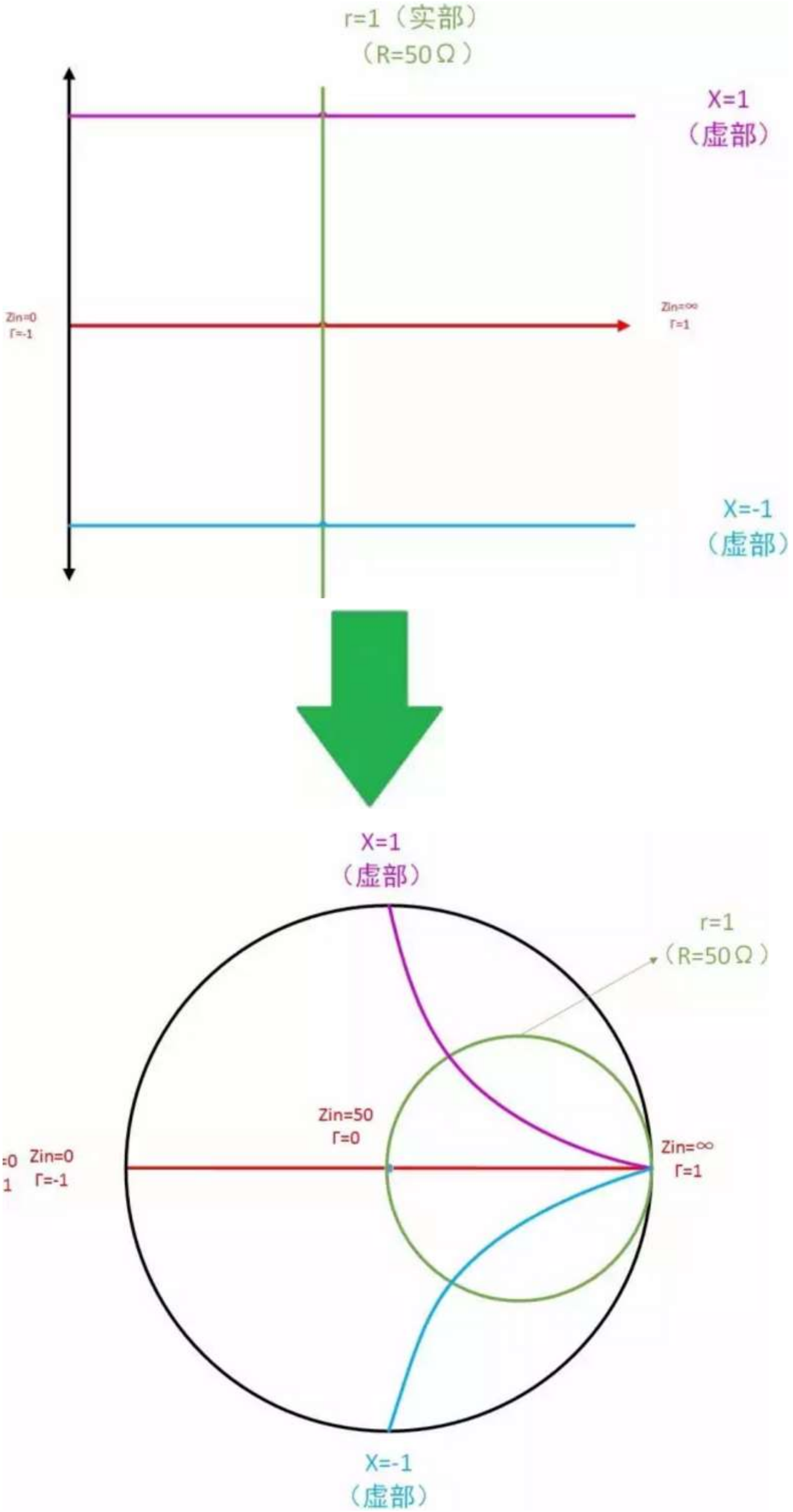
虽然，无穷大的平面变成了一个圆，但是，红线还是红线，黑线还是黑线。
同时我们在，原来的复平面中增加三根线，它们也随着平面闭合而弯曲。





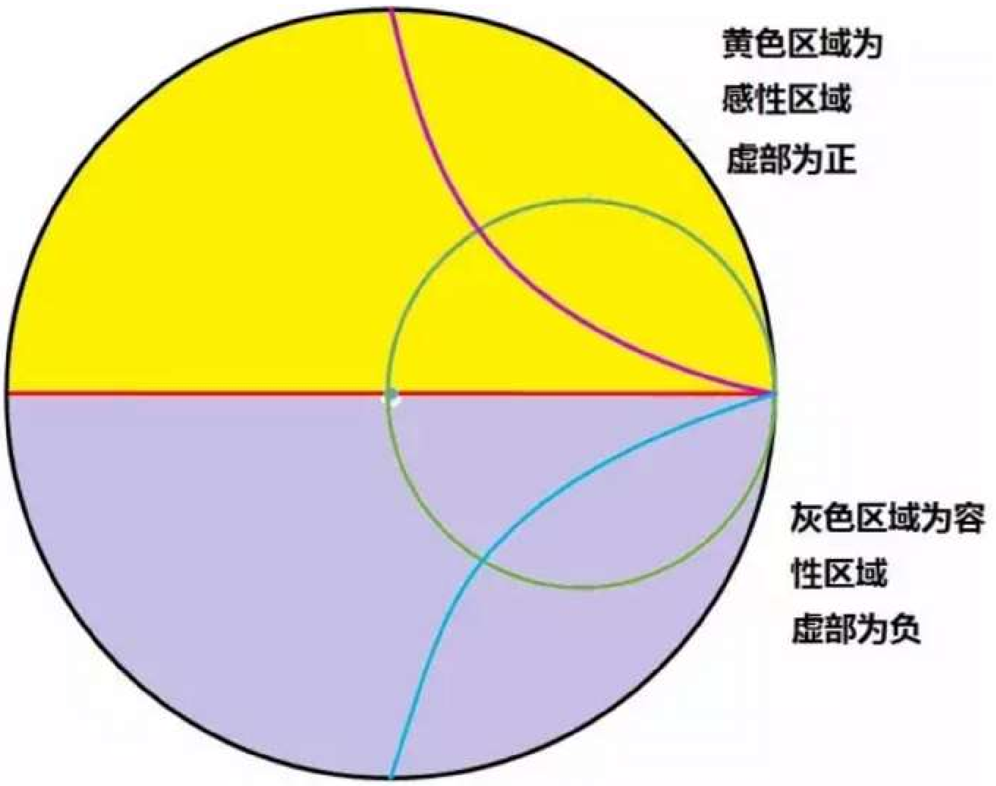


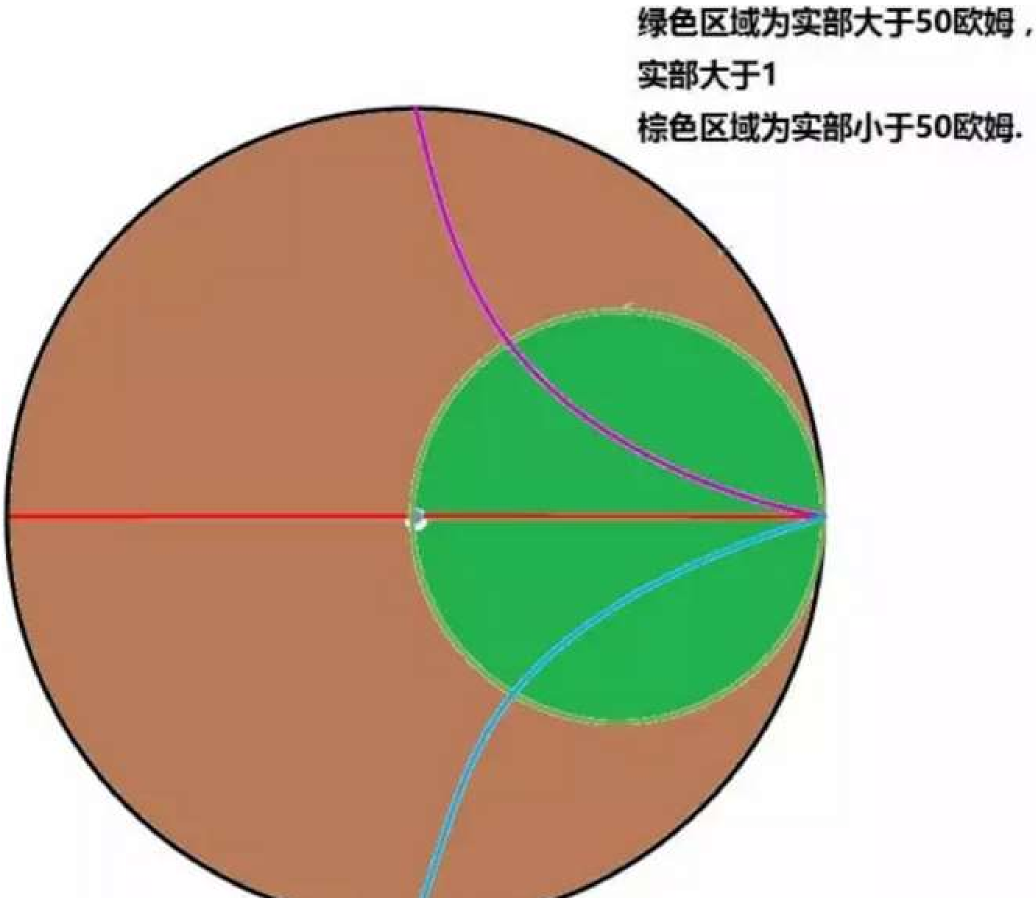
黑色的线上的阻抗，有个特点：实部为 0；（电阻为 0）
红色的线上的阻抗，有个特点：虚部为 0；（电感、电容为 0）
绿色的线上的阻抗，有个特点：实部为 1；（电阻为 50 欧姆）
紫色的线上的阻抗，有个特点：虚部为-1；
蓝色的线上的阻抗，有个特点：虚部为 1；

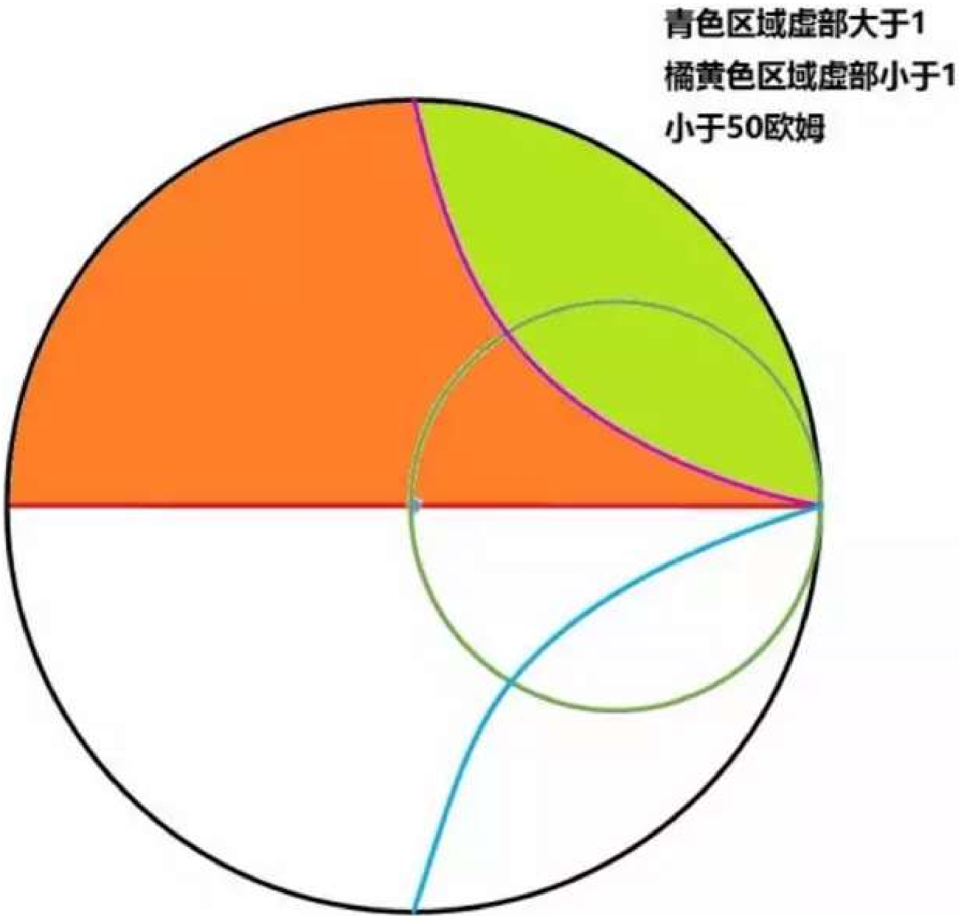


线上的阻抗特性，我们是从复平面，平移到史密斯原图的，所以特性跟着颜色走，特性

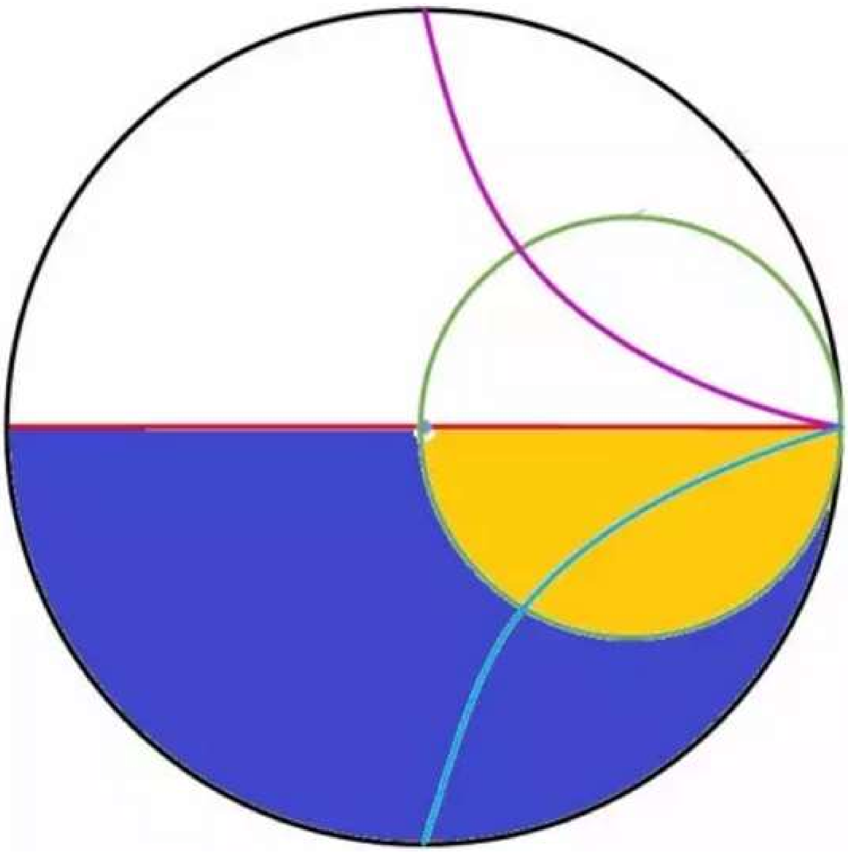
不变。


黄色区域为
感性区域
虚部为正
灰色区域为容
性区域
虚部为负


绿色区域为实部大于50欧姆，
实部大于1
棕色区域为实部小于50欧姆.



下半圆与上班圆是一样的划分。



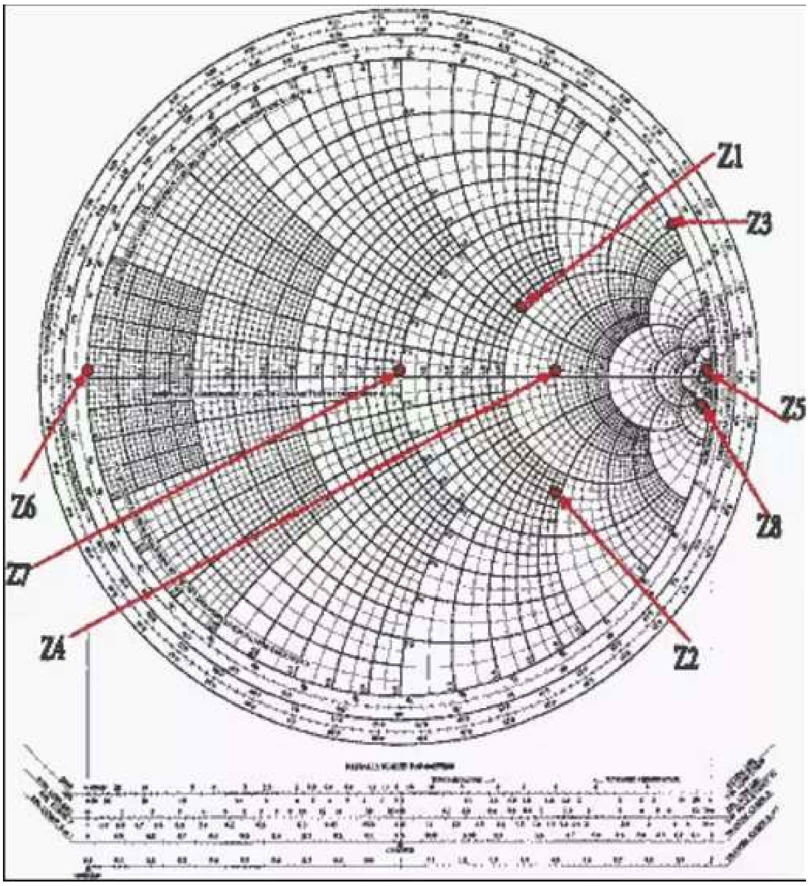
因为史密斯圆图是一种基于图形的解法，所得结果的精确度直接依赖于图形的精度。下面是一个用史密斯圆图表示的 RF 应用实例：

例： 已知特性阻抗为 50Ω，负载阻抗如下：

Z1 = 100 + j50Ω	Z2 = 75 - j100Ω	Z3 = j200Ω	Z4 = 150Ω
Z5 = ∞ (an open circuit)	Z6 = 0 (a short circuit)	Z7 = 50Ω	Z8 = 184 - j900Ω

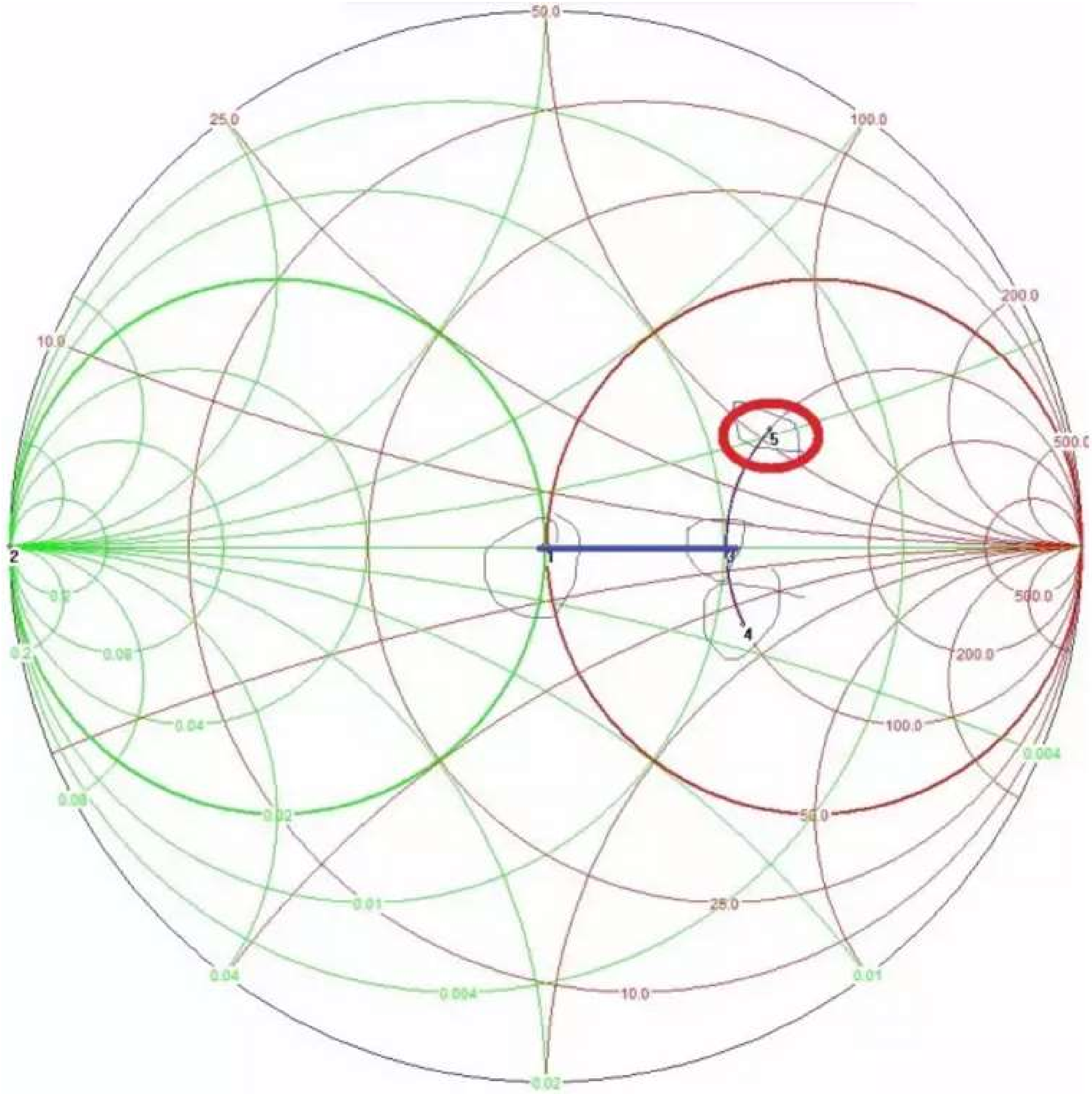
对上面的值进行归一化并标示在圆图中(见图 5)：

z1 = 2 + j	z2 = 1.5 - j2	z3 = j4	z4 = 3
z5 = 8	z6 = 0	z7 = 1	z8 = 3.68 - j18



我们看不清上图。

如果是"串联"，我们可以在清晰的史密斯原图上，先确定实部（红线上查找，原来复平面的横坐标），再根据虚部的正负，顺着圆弧滑动，找到我们对应的阻抗。（先忽略下图中的绿色线）



现在可以通过圆图直接解出反射系数 Γ。

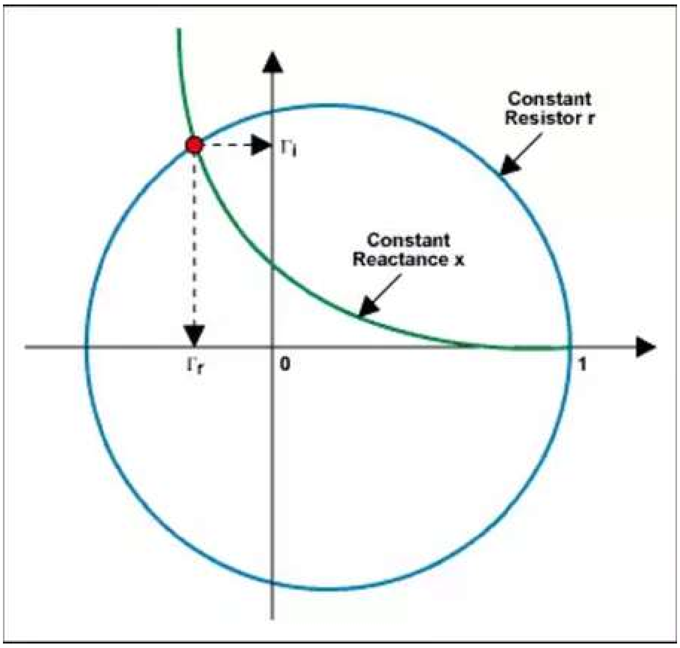
我们既可以通过直角坐标，去直接读取反射系数的值，也可以通过极坐标，读取反射系数的值。

直角坐标

画出阻抗点(等阻抗圆和等电抗圆的交点)，只要读出它们在直角坐标水平轴和垂直轴上的投影，就得到了反射系数的实部 Γr 和虚部 Γi (见图 6)。

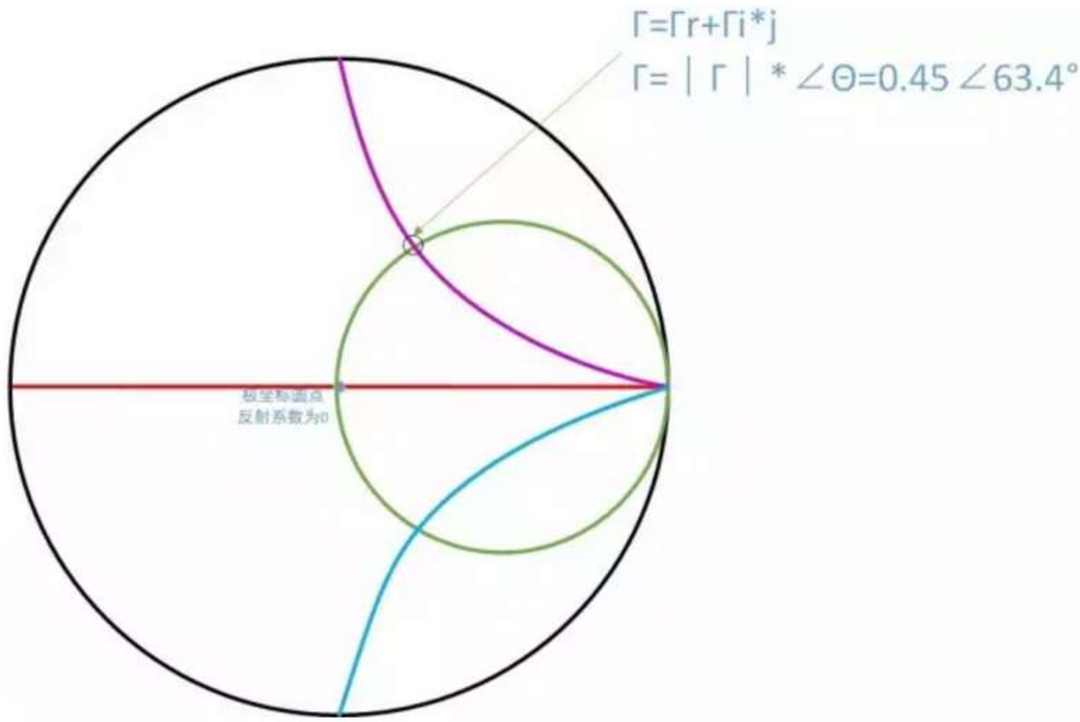
该范例中可能存在八种情况，在图 6 所示史密斯圆图上可以直接得到对应的反射系数 Γ：

$\Gamma_1 = 0.4 + 0.2j$	$\Gamma_2 = 0.51 - 0.4j$	$\Gamma_3 = 0.875 + 0.48j$	$\Gamma_4 = 0.5$
$\Gamma_5 = 1$	$\Gamma_6 = -1$	$\Gamma_7 = 0$	$\Gamma_8 = 0.96 - 0.1j$



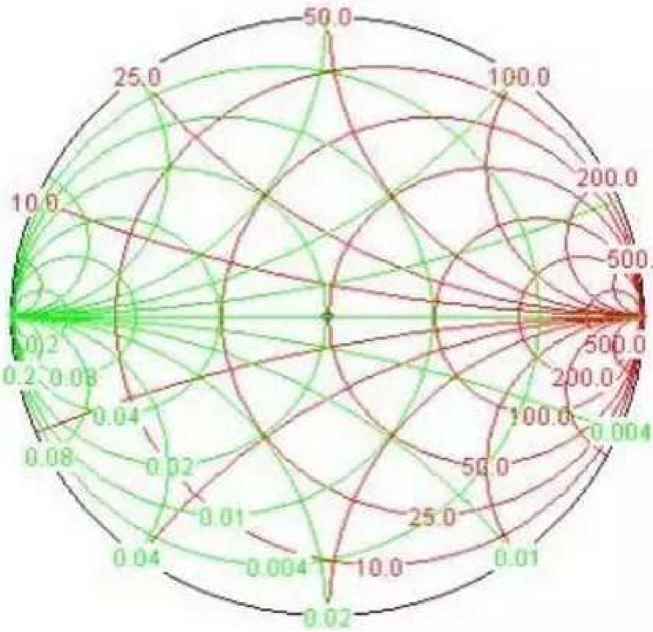
从 X-Y 轴直接读出反射系数 Γ 的实部和虚部

极坐标



极坐标表示，有什么用？非常有用，这其实也是史密斯原图的目的。

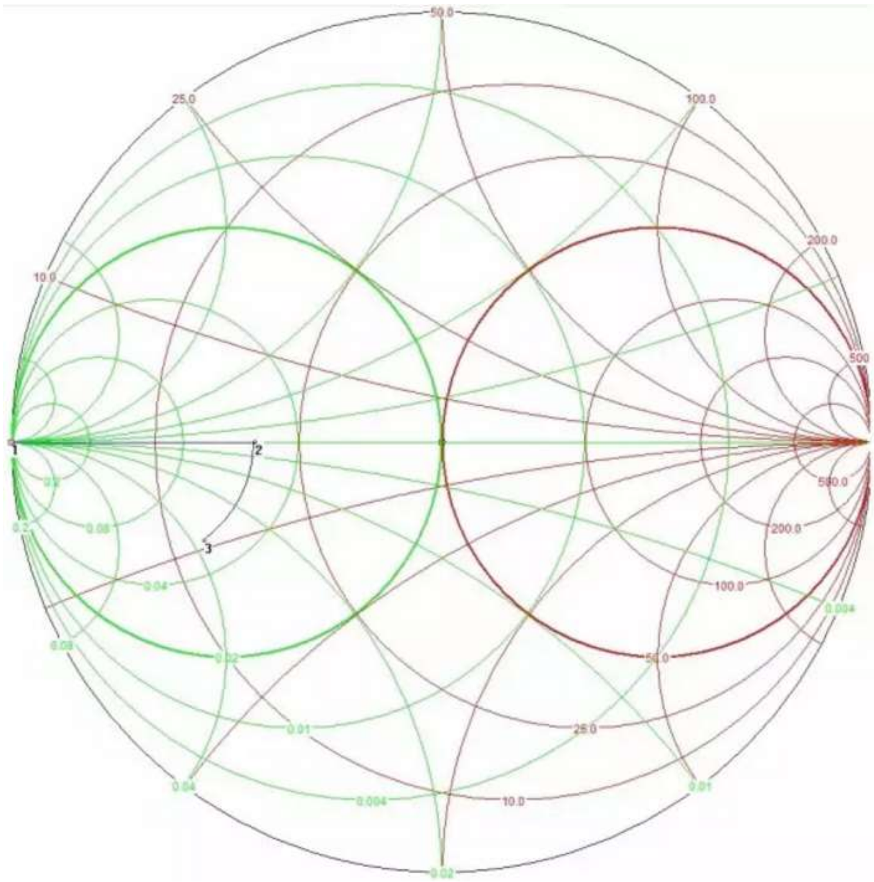
2.4 红色阵营 VS 绿色阵营

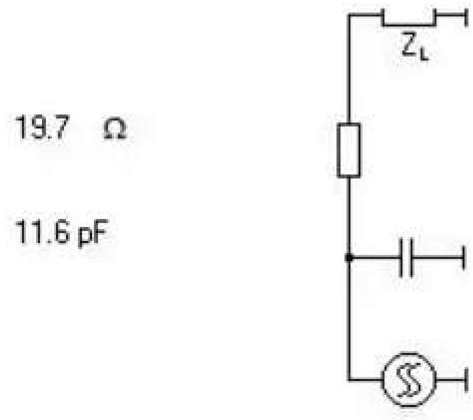


刚刚我们已经注意到，史密斯原图，除了有红色的曲线，是从阻抗复平面掰弯，过来的红色世界。同时，在图中，还有绿色的曲线，他们是从导纳复平面，掰弯产生的。过程跟刚刚的过程是一样的。

那么这个导纳的绿色，有什么用呢？

并联电路，用导纳计算，我们会很便利。同时在史密斯原图中，我们用导纳的绿色曲线进行查询，也会很方便。





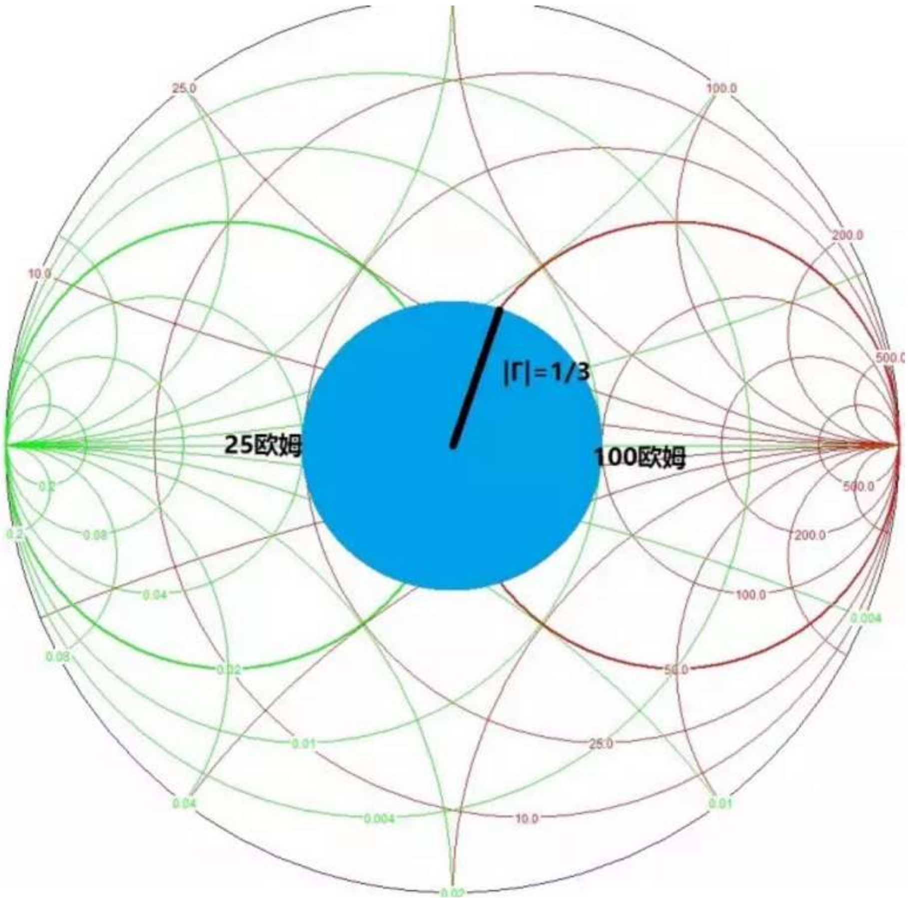
如图，这样并联一个电容，通过绿色的曲线很快就可以查询到对应的归一化阻抗和反射系数。

3、干什么？

解释和介绍了史密斯圆图这么长的段落，别忘了，我们想干什么。我们实际是希望，我们设计的电路反射系数越接近 0 越好。

但是，什么样的电路是合格的电路呢？反射系数不可能理想的为 0，那么我们对反射系数，有什么样的要求呢？

我们希望反射系数的绝对值小于 1/3，即反射系数落入史密斯圆图的蓝色区域中（如下图）。



这个蓝色的球，有什么特色呢？其实我们通过史密斯原图的数值已经清楚的发现。在中轴线，也就是之前说的红线上，分别是 25 欧姆，和 100 欧姆两个位置。即：Zin 在 1/2 Zo 和 2 倍 Zo 之间的区域。
也就是，我们打靶打在蓝色区域，即认为反射系数是可以接受的。