



# 第六章 功率谱估计的经典方法

(Classical Method of Power Spectrum Estimation)

# 主要内容:

§ 6.1 引言

§ 6.2 估计理论的几个基本概念

§ 6.3 自相关序列的估计

§ 6.4 周期图及其估计质量

§ 6.5 改善周期图质量的方法

## § 6.1 引言 (Introduction)

1. 功率谱：指功率密度谱 (Power Spectral Density, PSD) , 简称谱。
2. 零均值广义平稳随机过程的功率谱定义为：

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega m}$$

Wiener-Khinchin定理

(维纳-辛钦定理)

其中：  $R_{xx}(m) \triangleq E[x(n)x^*(n+m)] = E[x(n)x(n+m)]$

遍历性过程：  $R_{xx}(m) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x^*(n+m)$

### 3. 功率谱计算的定义要求:

样本无穷多, 时间无限长, 即需要集合平均。

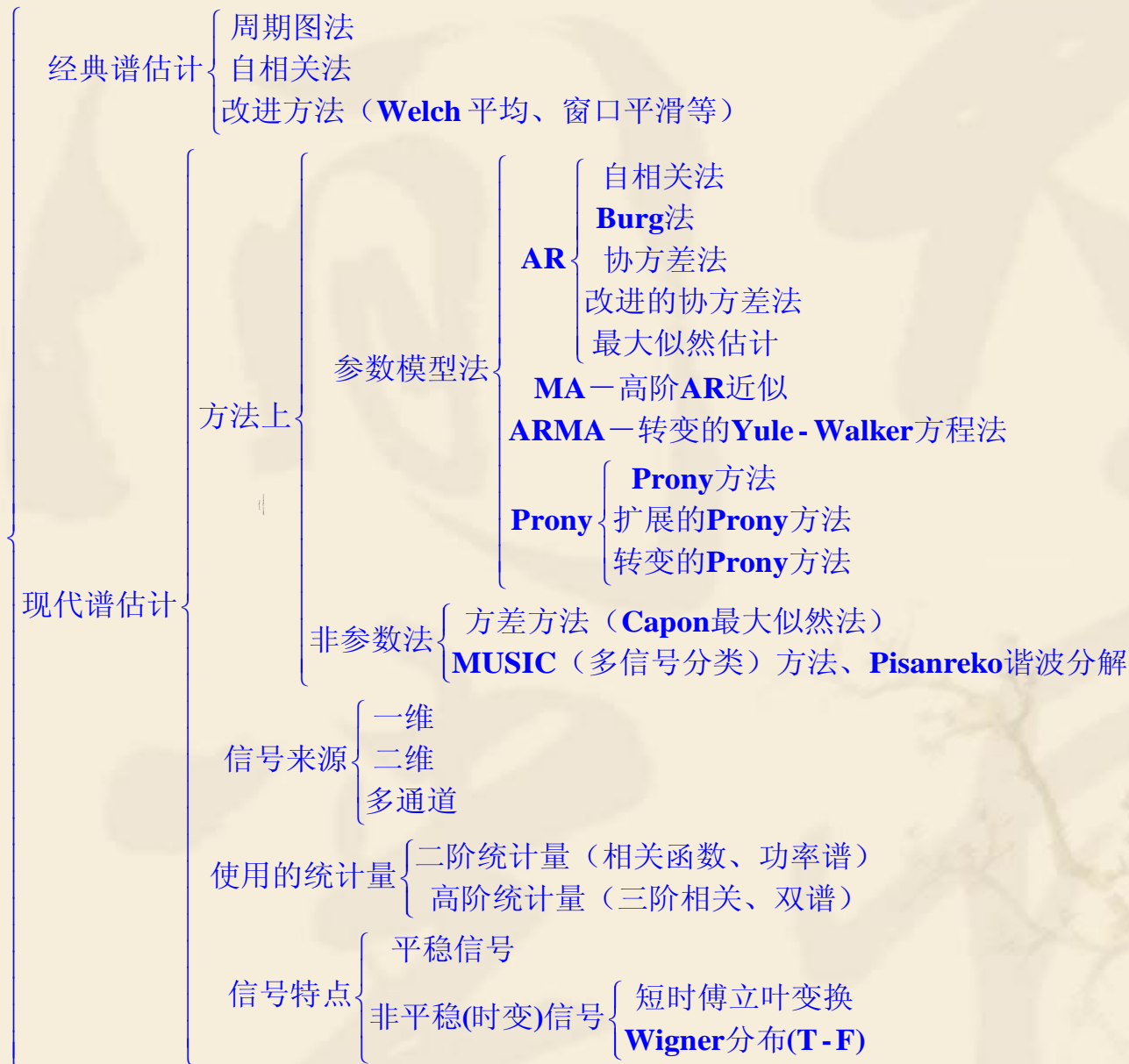
实际中, 单一的样本或单一样本的有限长数据。

问题: 如何用单一样本的有限长数据去估计原随机信号真实的自相关函数和功率谱?

### 4. 功率谱估计方法:

经典方法和现代方法。





## § 6.2 估计理论的几个基本概念 (Basic Concepts of Estimation Theory)

为了进行估计，需要两种信息，一种是已知观测数据，另一种是被估计量与已知观测数据之间的函数关系；这种函数关系决定了不同的估计方法，也决定了不同估计方法的质量。

评价估计质量的几个参数：

### 1. 估计的偏差

被估计量  $\alpha$  又叫真值，对它的估计结果叫估计量或估计，用  $\hat{\alpha}$  表示，由于它是随机过程的一次实现中的有限个数据得到的，是一个随机变量。定义估计的偏差为：

$$B = \alpha - E[\hat{\alpha}]$$

$B = 0$  为无偏估计， $B \neq 0$  为有偏估计；当观测数据个数趋于无穷时  $B = 0$ ，为渐近无偏估计。

无偏估计和渐近无偏估计都是好估计。

## 2. 估计的方差

评价一次估计结果相对于估计量均值的分散程度。

实际估计中，多次估计和大量估计不可能或不允许进行，需要考虑方差：

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \text{Var}[\hat{\alpha}] \triangleq E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2]$$

方差小意味着单次估计结果有较大概率接近与多次估计的均值。

小方差和无偏估计的质量是优良的，小方差和渐近无偏估计也可以达到优良的估计结果。

### 3. 估计的均方误差

在许多应用中，要比较不同估计的质量比较复杂。仅靠偏差和方差来评价估计质量较困难。因此定义估计的均方误差：

$$MSE(\hat{\alpha}) \triangleq E[(\alpha - \hat{\alpha})^2] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 + B^2$$

均方误差小意味着方差和偏差的平方之和较小，具有较好的估计质量。

如果观测数据量趋于无穷大，某个估计的偏差和方差都趋于零，称该估计是一致估计。一致估计是好估计。



## § 6.3 自相关序列的估计

(Autocorrelation sequence estimation)

零均值广义平稳随机过程的功率谱估计问题可以归结为自相关序列的估计问题（Wiener-Khinchin 定理）。即通过该随机过程取样序列中的 $N$ 取样值  $x_N(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  来估计它的自相关序列  $R_{xx}(m)$ 。

集合自相关: 
$$R_{xx}(m) \triangleq E \left[ x(n) x^*(n+m) \right]$$

时间自相关: 
$$R_{xx}(m) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) x^*(n+m)$$

自相关序列估计: 
$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n) x^*(n+m)$$

自相关函数估计的质量:

## 1. 偏差

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x^*(n+m)$$

$$B = E[\hat{R}_{xx}(m)] - R_{xx}(m)$$

$$E[\hat{R}_{xx}(m)] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x^*(n+m)\right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} E[x(n)x^*(n+m)]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} R_{xx}(m)$$

$$= \frac{N-m}{N} R_{xx}(m)$$

$$B = -\frac{|m|}{N} R_{xx}(m) \quad \text{怎么理解?}$$

$$B = -\frac{|m|}{N} R_{xx}(m) \quad \text{怎么理解?}$$

(1)  $|m|$  固定,  $N$  趋于无穷大,  $B=0$ , 渐近无偏估计;

(2)  $N$  给定,  $|m| \ll N$ ,  $\hat{R}_{xx}(m)$  接近  $R_{xx}(m)$ , 给出了  $m$  的选取原则。

$$(3) E[\hat{R}_{xx}(m)] = \frac{N-m}{N} R_{xx}(m) = w(m) R_{xx}(m)$$

$$w(m) = \frac{N-m}{N} \quad \text{三角窗}$$

数据上加矩形窗, 其自相关函数加上了三角窗, 体现在估计的自相关函数的均值上。

## 2. 方差

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{R}_{xx}(m)] &= E\{[\hat{R}_{xx}(m) - E[\hat{R}_{xx}(m)]]^2\} \\ &= E[\hat{R}_{xx}^2(m)] - \{E[\hat{R}_{xx}(m)]\}^2 \\ &= E[\hat{R}_{xx}^2(m)] - \left[\frac{N - |m|}{N} R_{xx}(m)\right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_{xx}^2(m)] &= E\left\{\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m) \sum_{k=0}^{N-1-|m|} x(k)x(k+m)\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_k E[x(n)x(k)x(n+m)x(k+m)] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_k [R_{xx}^2(m) + R_{xx}^2(n-k) \\ &\quad + R_{xx}(n-k-m)R_{xx}(k-n-m)] \end{aligned}$$



导出:

$$Var[\hat{R}_{xx}(m)] = \frac{1}{N} \sum_{i=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|} \left\{ \left[ 1 - \frac{|m| + |i|}{N} \right] [R_{xx}^2(i) + R_{xx}(i+m)R_{xx}(i-m)] \right\}$$

有:  $N \rightarrow \infty, Var[\hat{R}_{xx}(m)] = 0$

故:  $N \rightarrow \infty, B[\hat{R}_{xx}(m)] = 0$

$$N \rightarrow \infty, Var[\hat{R}_{xx}(m)] = 0$$

渐近一致估计。

### 3. 自相关函数的计算

已知单个的N个取样值  $x_N(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  ,  
估计  $\hat{R}_{xx}(m)$ 。

两个计算方法:

(1) 直接按照定义计算:

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)$$

利用:  $\hat{R}_{xx}(m) = \hat{R}_{xx}(-m)$

完成计算:  $\hat{R}_{xx}(m), \quad m = -(N-1) \sim (N-1)$

(2) 利用FFT计算:

①将N点序列  $x_N(n)$  的后面补零得到2N点的序列  $x_{2N}(n)$

②对  $x_{2N}(n)$  做FFT, 得到  $X_{2N}(k)$

③对  $X_{2N}(k)$  求幅度平方, 得到  $|X_{2N}(k)|^2$

④对  $\frac{1}{N} |X_{2N}(k)|^2$  做IFFT, 得到

请问  $\hat{R}'_{xx}(m)$  和  $\hat{R}_{xx}(m)$  相等吗?

自相关函数的另一个估计方法：

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x_N(n) x_N(n+m)$$

很容易证明： $\hat{R}_{xx}(m)$  是  $R_{xx}(m)$  的无偏估计，但  
方差性能不好。



## § 6.4 周期图及其估计质量

### (Periodograms and their estimated quality)

问题的提出:

一个平稳随机过程  $X(n)$ ，在实际中常常只能得到它的:

单一样本  $x(n, i) \Rightarrow x(n)$

单一样本的N点取样值  $\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)\}$

怎样用N个样值去估计原来随机信号真实的功率谱  $P_x(e^{j\omega})$  ?

经典功率谱估计的两个基本方法: 直接法和间接法。

## 1. 周期图

$\{x_n\}$ 是零均值广义实平稳随机过程，具有遍历性， $x_N(n)$ 是其一个取样序列的一段数据，即：

$$x_N(n) = w_R(n)x(n) = \begin{cases} x(n), 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, n = \text{others} \end{cases}$$

其中  $w_R(n)$  是宽度为N的矩形窗。

自相关序列的有偏估计：

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n)x_N(n+m) = x_N(n) * x_N(-n), \quad |m| \leq N-1 \end{aligned}$$

上式的Fourier变换为:

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{xx}(m)e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_{xx}(m)e^{-j\omega m} \quad \text{— 周期图}$$

2. 周期图的间接方法: (Blackman-Tukey法, 先求取样自相关, 再求傅立叶变换)

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_{xx}(m)e^{-j\omega m}$$

3. 周期图的直接方法: (直接计算序列的傅立叶变换)

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega}) X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2$$

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{N} |X_N(k)|^2$$

实现步骤：先求  $x_N(n)$  的DFT，再对其DFT结果做幅度平方运算，除以N得到周期图的功率谱，作为对真实功率谱的估计。

#### 4. 周期图的偏差

$$\begin{aligned} E[S_{per}(e^{j\omega})] &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[\hat{R}_{xx}(m)]e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(m)R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \end{aligned}$$

其中：  $w_B(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| < N-1 \\ 0, & |m| \geq N \end{cases}$

是Bartlett窗（或三角窗）。



$$\begin{aligned}
 E[S_{per}(e^{j\omega})] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(m) R_{xx}(m) e^{-j\omega m} \\
 &= \frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\theta}) W_B(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta
 \end{aligned}$$

其中：

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2 \text{ 是三角窗的傅立叶变换。}$$

$W_B(e^{j\omega})$  不是一个冲击函数， $E[S_{per}(e^{j\omega})] \neq S_{xx}(e^{j\omega})$ ，有偏估计。

当N趋于无穷大时， $W_B(e^{j\omega})$  收敛于一个冲击函数，有：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[S_{per}(e^{j\omega})] = S_{xx}(e^{j\omega})$$

即： $S_{per}(e^{j\omega})$  是  $S_{xx}(e^{j\omega})$  的渐近无偏估计。

#### 4. 周期图的方差

$$\text{Var}[S_{\text{per}}(e^{j\omega})] = E\{[S_{\text{per}}(e^{j\omega}) - E[S_{\text{per}}(e^{j\omega})]]^2\}$$

周期图的方差与随机过程的4阶矩有关，求解困难。

解决思路：

(1) 令  $x(n)$  是方差为  $\sigma_x^2$  的高斯白噪声随机过程

(2) 求  $S_{\text{per}}(e^{j\omega})$  在2个频率  $\omega_1, \omega_2$  处的协方差

$$\begin{aligned} \text{cov}[S_{\text{per}}(e^{j\omega_1}), S_{\text{per}}(e^{j\omega_2})] &= E\{[S_{\text{per}}(e^{j\omega_1}) - E[S_{\text{per}}(e^{j\omega_1})]] \\ &\quad [S_{\text{per}}(e^{j\omega_2}) - E[S_{\text{per}}(e^{j\omega_2})]]\} \end{aligned}$$

(3) 当  $\omega_1 = \omega_2$  时，有：

$$\text{Var}[S_{\text{per}}(e^{j\omega_1})] = \text{cov}[S_{\text{per}}(e^{j\omega_1}), S_{\text{per}}(e^{j\omega_2})]$$

$$\begin{aligned}\text{cov}[S_{per}(e^{j\omega_1}), S_{per}(e^{j\omega_2})] &= E[S_{per}(e^{j\omega_1})S_{per}(e^{j\omega_2})] \\ &\quad - E[S_{per}(e^{j\omega_1})]E[\hat{S}_{per}(e^{j\omega_2})] \\ &= \sigma_x^4 \left[ \frac{\sin N(\omega_1 - \omega_2) / 2}{N \sin(\omega_1 - \omega_2) / 2} \right]^2\end{aligned}$$

注：上式的推导过程请见教材。

令  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ，由上式得到周期图的方差：

$$\text{Var}[S_{per}(e^{j\omega})] = \text{cov}[S_{per}(e^{j\omega}), S_{per}(e^{j\omega})] = \sigma_x^4$$

当N趋于无穷大时，周期图的方差并不趋于零，故周期图不是功率谱的一致估计。

## § 6.5 改善周期图质量的方法

(Methods for Improving the Quality of the Periodogram )

周期图的主要优点：计算简单

主要缺点：

- (1) 加窗效应造成频率分辨率下降和旁瓣泄露；
- (2) 当 $N$ 趋于无穷大时，方差不趋于零而等于常数，任何一次估计得到的周期图的一致性和稳定性差。

改善周期图质量的方法：修正周期图法（数据加窗）、Bartlett法（周期图的平均）、Welch法（修正周期图的平均）、Blackman-Tukey法（周期图的加窗平滑）。



## 1. 修正周期图法（数据加窗）

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_{xx}(m) e^{-j\omega m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w_R(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

式中， $w_R(n)$  是宽度为N高度为1的矩形窗。

将上式中的矩形窗改成其它的数据窗，计算的周期图为修正周期图。

$$S_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

式中N是数据窗的长度，U是使修正周期图为渐近无偏估计引入的常数，它是数据窗的平均能量。
$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |w(n)|^2$$

如果选择合适的数据窗，使得：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NU} |W(e^{j\omega})|^2 = \begin{cases} 1, \omega = 0 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

则有：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[S_M(e^{j\omega})] = S_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\text{Var}[S_M(e^{j\omega})] \approx \text{Var}[S_{per}(e^{j\omega})] = S_{xx}^2(e^{j\omega})$$

修正周期图是功率谱的渐近无偏估计，也不是功率谱的一致估计。

## 2. Bartlett法（周期图的平均）

令  $x_i(n), i = 1, 2, \dots, K$  是随机过程  $x(n)$  的K个互不相关的实现，即  $x_i(n)$  是  $x(n)$  的K个互不相关的取样序列，每个序列的长度均为L，则  $x_i(n)$  的周期图为：

$$S_{per}^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

上述周期图的算术平均为：

$$S_a(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K S_{per}^{(i)}(e^{j\omega})$$

由估计理论可知平稳随机过程N个相互统计独立随机变量的算

术平均  $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x(i)$  方差为：  $\sigma_{m_x}^2 = \frac{1}{N} \sigma_x^2$

根据该结论，假设  $x_i(n)$  互不相关，则有：

$$Var[S_a(e^{j\omega})] = \frac{1}{K} Var[S_{per}^{(i)}(e^{j\omega})] \approx \frac{1}{K} S_{xx}^2(e^{j\omega})$$

K趋于无穷，方差趋于零。一致估计

$$E[S_a(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j(\omega-\theta)}) W(e^{j\theta}) d\theta$$

无偏估计

将长度为N的随机序列  $x(n)$  分成长度为L互不重叠的K段子序列，且  $N=KL$ ，每个子序列为：

$$x_i(n) = x(n + iL), n = 0, 1, \dots, L-1, \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

则有：

$$S_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n + iL) e^{-j\omega n} \right|^2$$

Bartlett周期图

Bartlett法平均多个不同数据块的周期图估计结果。



### 3. Welch法（修正周期图的平均）

对Bartlett法的2点修正：(1) 让子序列 有重叠，  
(2) 对每个子序列都加数据窗  $w(n)$ 。

设子序列  $x_i(n)$  长为L，相邻子序列有L-D点重叠，则下标为i的子序列表示为：

$$x_i(n) = x(n + iD), n = 0, 1, 2, \dots, L-1; \quad i = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

如果K个子序列刚好覆盖N个数据点，则有：  $N=L+D(K-1)$ 。

Welch 周期图为：（采用有重叠的数据块）

$$S_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w(n)x(n+iD)e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} S_M^{(i)}(e^{j\omega})$$

其中：

$$S_M^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w(n)x(n+iD)e^{-j\omega n} \right|^2$$

Welch 周期图是功率谱的无偏估计，也是一致估计。

#### 4. Blackman-Tukey法（周期图的加窗平滑）

为了减少周期图的方差，采取对自相关序列的估计进行加窗处理，则为Blackman-Tukey法谱估计：

$$S_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-N}^N R_N(m)w(m)e^{-j\omega m}, |M| \leq N-1$$

式中， $w(m)$  是加在  $R_N(m)$  上的滞后窗， $R_N(m)$  是自相关序列的一致估计。

BT谱估计的期望值:

$$E[S_{BT}(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W_{BT}(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

BT谱估计的方差:

$$\text{Var}[S_{BT}(e^{j\omega})] \approx \frac{1}{N} S_{xx}(e^{j\omega}) \sum_{m=-M}^M w^2(m)$$

即: Blackman-Tukey周期图是功率谱的渐近无偏估计, 也是功率谱的一致估计。

## 功率谱估计的经典方法:

方法	$S(e^{j\omega})$	$E[S(e^{j\omega})]$	$\Delta\omega$	$\text{Var}[S(e^{j\omega})]$
周期图	$\frac{1}{N} \left  \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right ^2$	$\frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$	$0.89 \frac{2\pi}{N}$	$S_{xx}^2(e^{j\omega})$
修正 周期图	$\frac{1}{NU} \left  \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) x(n) e^{-j\omega n} \right ^2$	$\frac{1}{2\pi NU} S_{xx}(e^{j\omega}) *  W(e^{j\omega}) ^2$	取决于窗 函数 $w(n)$	$S_{xx}^2(e^{j\omega})$
Bartlett	$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left  \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iL) e^{-j\omega n} \right ^2$	$\frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$	$0.89K \frac{2\pi}{N}$	$\frac{1}{K} S_{xx}^2(e^{j\omega})$
Welch	$\frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left  \sum_{n=0}^{L-1} w(n) x(n+iD) e^{-j\omega n} \right ^2$	$\frac{1}{2\pi LU} S_{xx}(e^{j\omega}) *  W(e^{j\omega}) ^2$	取决于窗 函数 $w(n)$	$\frac{9L}{16N} S_{xx}^2(e^{j\omega})$
Blackman -Tukey	$\sum_{m=-M}^M R_N(m) w(m) e^{-j\omega m}$	$\frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$	取决于窗 函数 $w(n)$	$\frac{S_{xx}^2(e^{j\omega})}{N} \sum_{m=-M}^M w^2(m)$

注:(1)  $W_B(e^{j\omega})$ 是宽为  $2N$  的 Bartlett 窗  $w_B(m)$  ( $-N \leq m \leq N$ ) 的傅里叶变换。



## 例6.1 白噪声加正弦信号的功率谱和周期图。

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) + v(n)$$

式中,  $\varphi$  是一个在  $[-\pi, \pi]$  区间内均匀分布的随机变量,  $v(n)$  是方差为  $\sigma_v^2$  的白噪声。

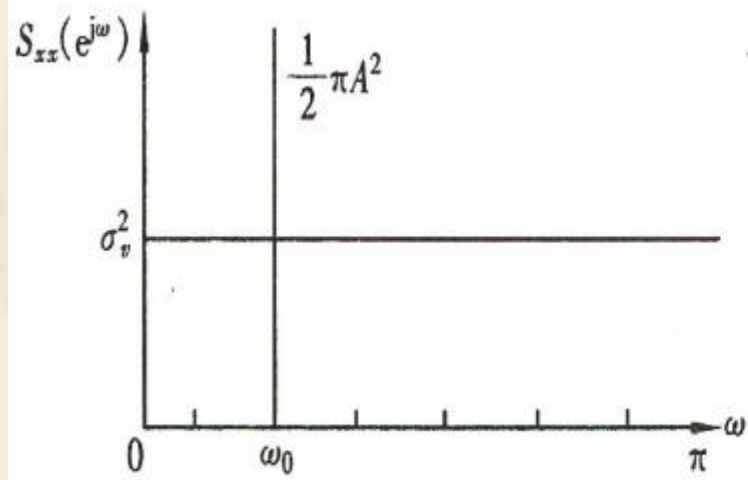
$x(n)$  的真实功率谱为:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 + \frac{1}{2} \pi A^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

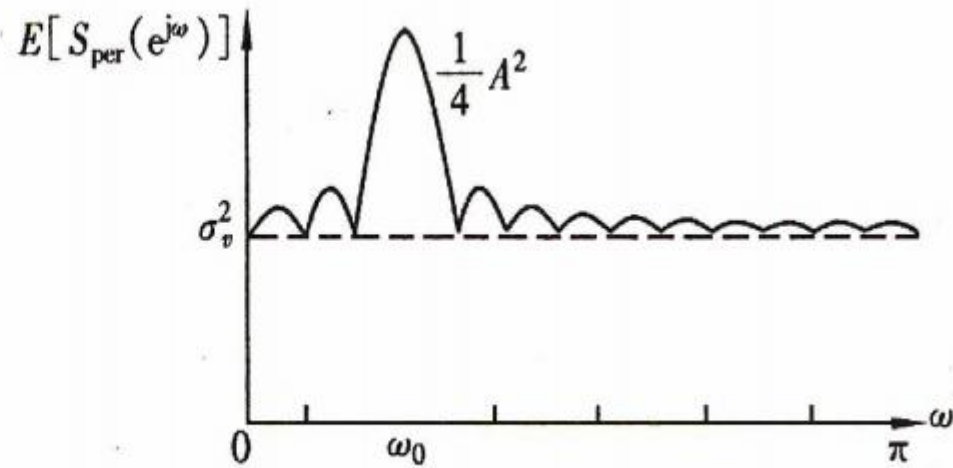
周期图的期望值为:

$$\begin{aligned} E[S_{per}(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} W_B(e^{j\omega}) * S(e^{j\omega}) \\ &= \sigma_v^2 + \frac{1}{4} A^2 [W_B(\omega - \omega_0) + W_B(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

白噪声加正弦信号的功率谱和周期图。



(a)



(b)

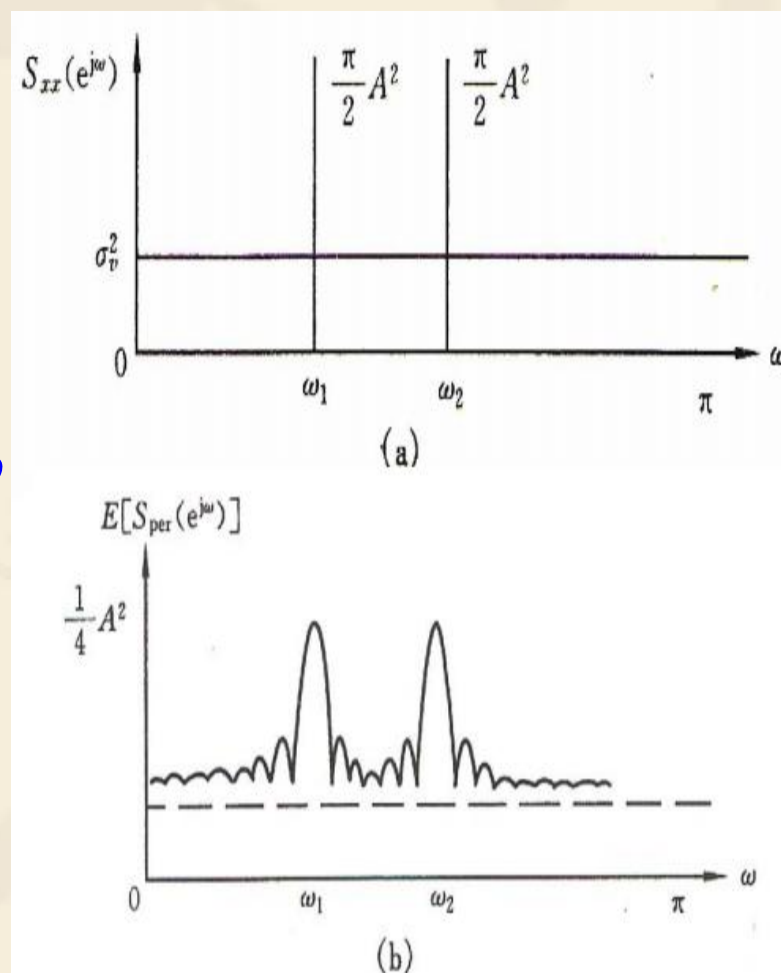
例6.2 白噪声加两个具有随机相位的正弦信号的功率谱和周期图。 $x(n) = A_1 \sin(\omega_1 n + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 n + \varphi_2) + v(n)$

频率分辨率：周期图能够分布出两个频率相近的正弦信号的能力。

频率分辨率用窗谱主瓣宽度  $\Delta\omega$  来度量。

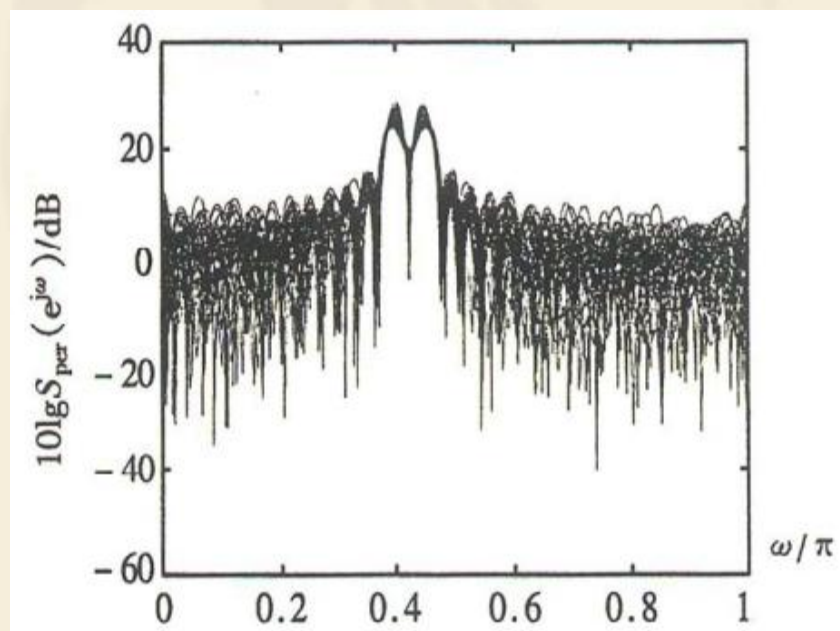
$$\Delta\omega = \text{Re } s[S(e^{j\omega})] = \alpha \frac{2\pi}{N}$$

$\alpha$  由窗函数类型决定，故窗函数的选择直接影响频率分辨率。

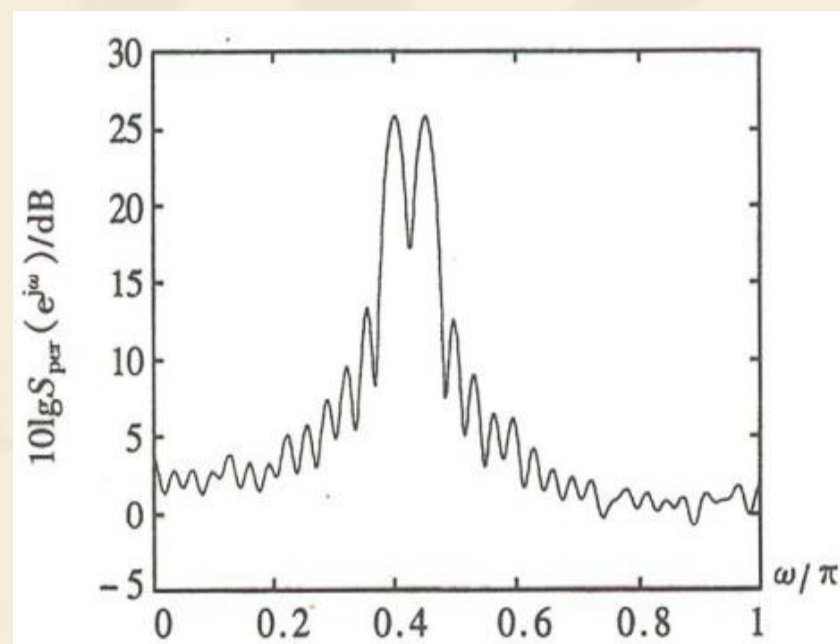


## 频率分辨率问题:

两个正弦波  $\omega_1 = 0.4\pi, \omega_2 = 0.45\pi, A_1 = A_2 = 5$  信号加高斯白噪声(均值为0, 方差为1)的随机过程的周期图。



N=64时50个周期图



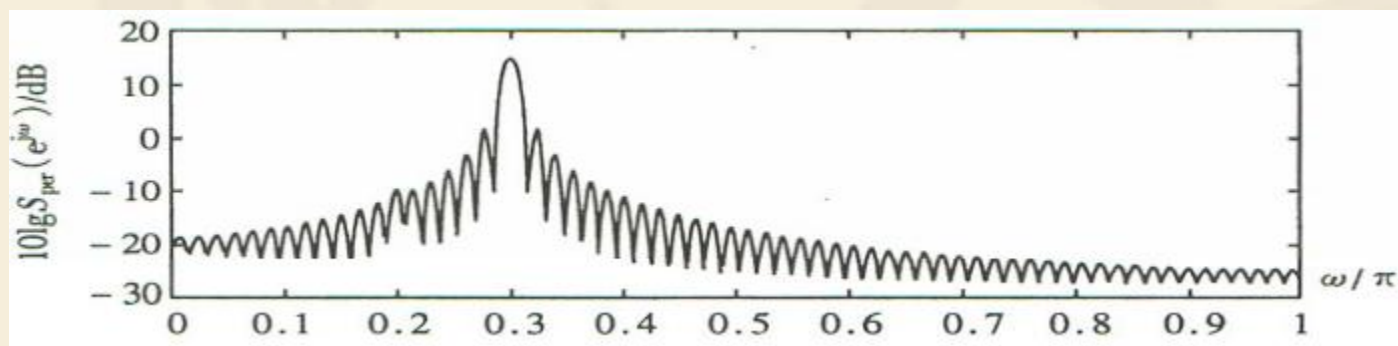
N=64时50个周期图的平均



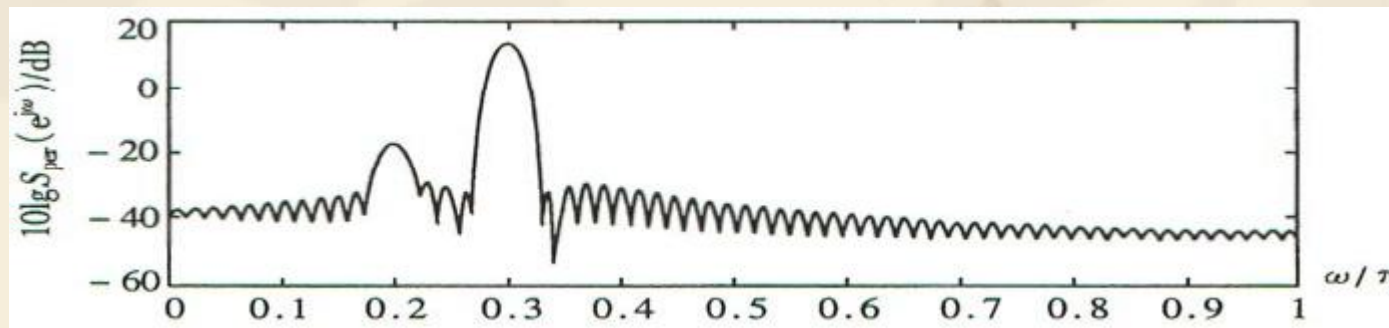
### 例6.3 白噪声加两个正弦信号的功率谱和周期图。


$$x(n) = 0.03 \sin(0.2\pi n + \varphi_1) + \sin(0.3\pi n + \varphi_2) + v(n)$$

数据窗为矩形窗的50个周期图平均



数据窗为汉明窗的50个周期图平均





本章结束  
本课程结束

谢谢同学们！