第二章　离散时间信号和系统

(The Discrete Time Signal&System)

主要内容：

§2.1　引言

§2.2　离散时间信号—数字序列

§2.3　离散时间系统

§2.4　离散时间信号和系统的频域描述

§2.5　连续时间信号的取样

§2.6　Z变换

§2.7　系统函数

§2.8　全通系统与最小相位系统

§2.1 引言（Introduction）

- ## 2.1.1 信号分类

连续信号和离散信号；

模拟信号和数字信号；

确定性信号和随机信号。

时间 幅度	连 续	离散
连 续	模 拟	抽 样
离 散	量 化	数 字

信号：传载信号的函数。

数学上表示为一个或多个自变量的函数。

- 2.1.2　**数字信号处理的范围**

对幅度和时间都离散的信号进行变换。

本课程只讨论抽样信号处理。

- 2.1.3　**几个基本概念**

连续时间系统、离散时间系统；

模拟系统、数字系统。

§2.2　离散时间信号—序列(Sequence)

- 2.2.1　离散时间信号的表示

1. 数字表示

如果一个序列 x 的第 n 个数字表示为 $x(n)$，则全部信号序列表示为：

$$x = \{x(n)\}, -\infty < n < +\infty$$

其中n为整数，对于n的非整数点，$x(n)$没有定义。

为方便，将其称为序列 $x(n)$，如：

$$x(n)=\{2,3,4,5,6.3,7.9\};n=0,1,2,3,4,5$$

$$x(n)=\begin{cases}2,3,4,5,6.3,7.9;n=0,1,2,3,4,5\\ 0,others\end{cases}$$

- 注意：

①有的书上也表示为 x_n ，注意n的取值范围。

②当采用5bits量化时，取样信号和数字信号的区别如下：

取样信号：

$$x(n)=\begin{cases}0.3767, 0.2604, 0.1721, 0.6883, 0.5809, 0.2904, & n=0,1,2,3,4,5\\ 0, & others\end{cases}$$

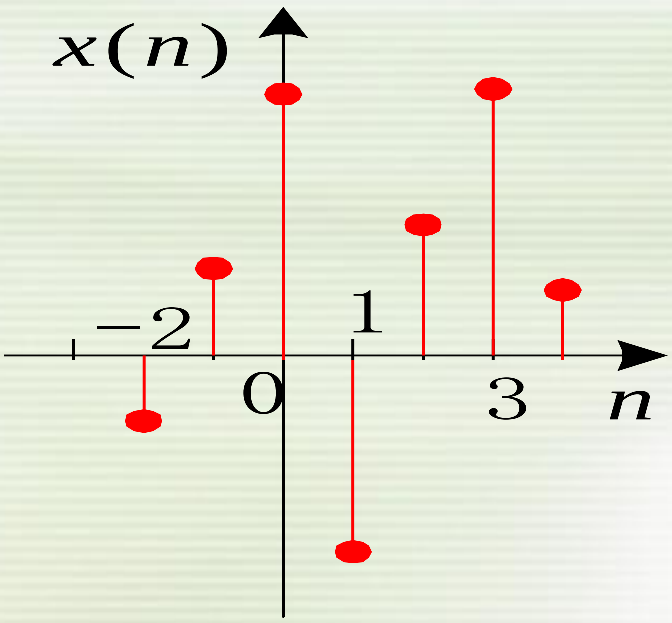
数字信号：

$$x(n)=\begin{cases}0.375, 0.25, 0.125, 0.6875, 0.5625, 0.25; & n=0,1,2,3,4,5\\ 0, & others\end{cases}$$

2. 图形表示

$$x(n)=\begin{cases}-0.5,0.75,2,-1.5,1,2,0.5,n=-2,-1,0,1,2,3,4\\ 0,others\end{cases}$$

序列图形如下图所示:



•2.2.2　自变量n的变换

（1）反转：　$x(n) -> x(-n)$

（2）移位：　$x(n) -> x(n+n_0)$

$x(n) -> x(n-n_0)$

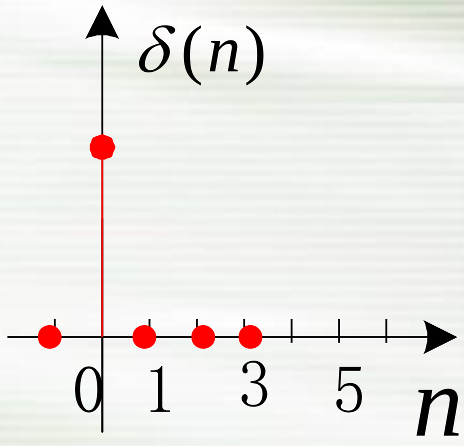
其中 n，n_0 均为整数。

•2.2.3　常见序列

1.　单位取样序列（**Unit-sampling sequence**）

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases} \qquad \delta(n-n_0)=\begin{cases}1, n=n_0\\0, n\neq n_0\end{cases}$$

$\delta(n)$的波形如右图所示：



- 注意:

① $\delta(n)$是一个确定的物理量，$\delta(t)$ 而是一种数学抽象

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, t=0\\ 0, t\neq 0\end{cases}$$

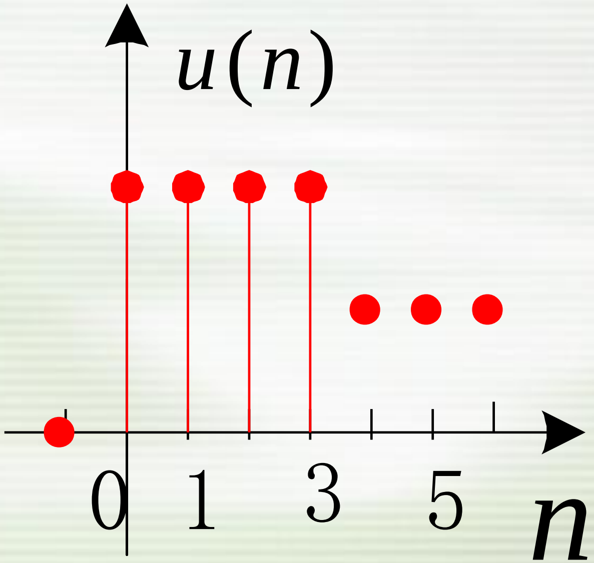
② $x(n)\delta(n)=x(0)$ $\quad$ $x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)$

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

2. 单位阶跃序列（Unit-step sequence）

$$u(n)=\begin{cases}1, n\geq 0\\0, n<0\end{cases}$$

其波形如右图所示：



- 注意：

① $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

② $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$ $u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

（令m＝n－k可完成两式之间的推导）

③ $u(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}$ $u(t)=\begin{cases}1, t<0\\\frac{1}{2}, t=0\\0, t<0\end{cases}$

请考虑：

$\delta(-n)$、$\delta(3-n)$、$\delta(-3-n)$、$u(-n)$、$u(3-n)$和$u(-3-n)$

以上各种序列的图形该如何表示？

3. 矩形序列（Rectangle sequence）

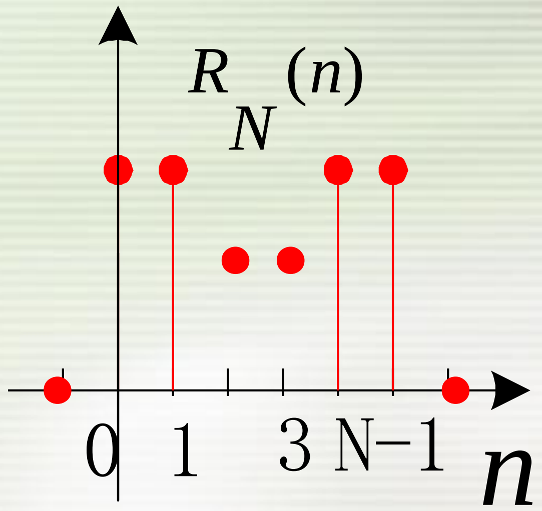
$$R_N(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, others\end{cases}$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

在（0, N-1）区间的N个值为1，

其它整数点为0；

其波形如右图所示：



4. 实指数序列（Real exponential sequence）

$$x(n) = a^n$$

如果 $n < 0,\ x(n) = 0$则有：

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

5. 复指数序列和正弦序列

(Complex exponential sequence)

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega)n}=e^{\sigma n}\cos(\omega n)+je^{\sigma n}\sin(\omega n)$$

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \qquad x(n)=A\sin(\omega n+\phi)$$

其中：A —幅度　　ϕ—初相，单位为弧度**(rad)**；

ω —数字域频率，单位为弧度**(rad)**；

比较：$x_a(t)=A\sin(\Omega t+\phi)=A\sin(2\pi ft+\phi)$

其中：$\Omega=2\pi f$ 模拟域频率，单位为**rad/s**；

$\omega=\Omega T$，**T**为采样周期。

- 注意：

① $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi m)n}$ $\cos(\omega n) = \cos((\omega + 2\pi m)n)$

$e^{j\Omega t} \neq e^{j(\Omega+2\pi m)t}$ $\cos(\Omega t) \neq \cos((\Omega + 2\pi m)t)$

即：正弦序列和复指数序列对ω变化以为2π周期。

在数字域考虑问题时，取数字频率的主值区间为：

$[-\pi, \pi]$ 或者 $[0, 2\pi]$

$[-\pi, \pi]$用于离散时间信号和系统的FT

$[0, 2\pi]$用于DFT

② 当$\omega = 0$时，$\cos(\omega n)$ 变化最慢（不变化）；

当$\omega = \pi$时，$\cos(\omega n)$ 变化最快。

在**DSP**中，在主值区间上，将 $\omega = 0$ 附近称为数字低频；而将$\omega = \pi$附近称为数字高频。

这一特点与模拟正弦信号 $x_a(t) = \cos(\Omega t)$ 截然不同，Ω 越大，$\cos(\Omega t)$变化越快，注意其中**t**连续取值，而**n**只取整数值。

•2. 2. 4　周期序列（Periodic sequence）

如果对所有的n序列都满足：$x(n)=x(n+N)$

其中N为整数，则称序列$x(n)$为周期序列，且最小周期为N，记为 $\tilde{x}(n)$。

For $\sigma=0$的复指数序列和正弦序列：

①当 $\frac{2\pi}{\omega}=$ 整数时，序列为周期性的，且周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

如： $x(n)=A\cos(\frac{\pi}{4}n), N=8$

② 当$\frac{2\pi}{\omega}$=有理数时，序列为周期的，且周期大于$\frac{2\pi}{\omega}$

如：$x(n)=A\sin(\frac{3\pi}{7}n+\phi), N=14$

③当$\frac{2\pi}{\omega}=$ 无理数时，序列为非周期的。

如：$x(n)=A\sin(\frac{3}{7}n+\phi)$

- **2.2.5 序列的能量（Energy of sequence）**

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$$

2.2.6　序列间的运算

对于两个序列$x(n)$和 $y(n)$，有：

$$x(n)+y(n)=\{x(n)+y(n)\}$$ ，和

$$x(n)\cdot y(n)=\{x(n)\cdot y(n)\}$$ ，积

$$\alpha x(n)=\{\alpha x(n)\}$$ ，与数α 相乘

如果 $y(n)=x(n-n_0)$，则称序列$y(n)$为序列 $x(n)$的延迟序列或移位序列（式中 n_0 为整数）。

- 2.2.7 序列的加权表示

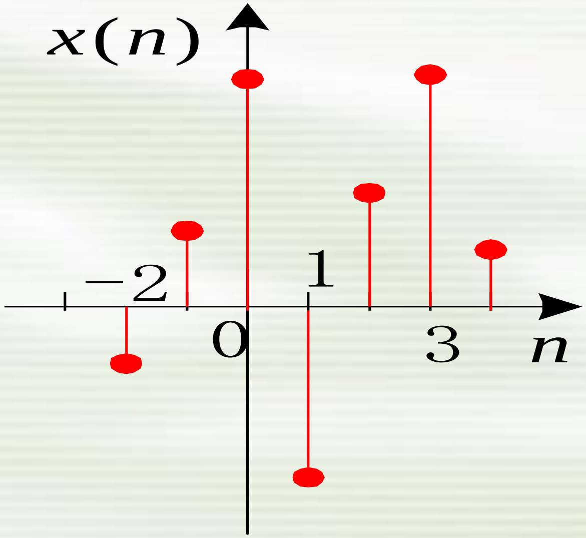
$$\because x(n)\cdot\delta(n)=x(0)=x(0)\cdot\delta(n)$$

$$x(n)\cdot\delta(n-n_0)=x(n_0)=x(n_0)\cdot\delta(n-n_0)$$

$$\therefore x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

由于任意序列皆可以表示成各延迟单位取样序列的幅度加权和，因此，讨论系统的特性时只需讨论系统在单位取样序列作用下的响应即可。

例2.2.1 如下图所示的序列用序列$\delta(n)$表示则为：



$$x(n)=-0.5\delta(n+2)+0.75\delta(n+1)+2\delta(n)-1.5\delta(n-1)$$
$$+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+0.5\delta(n-4)$$

§ 2.3 离散时间系统 (Discrete Time System)

- 2.3.1 线性非移变系统

  (Linear shift-invariant systems)

1. 对于系统$T[\ ]$，把系统定义为将输入序列映射成输出序列的唯一变换，表示为：$y(n)=T[x(n)]$。

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(n)$$

2.　线性系统（Linear System）：

设 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$分别是系统对$x_1(n)$和 $x_2(n)$ 的响应，则：

线性系统满足：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=a\cdot T[x_1(n)]+b\cdot T[x_2(n)]$$
$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

（**a**，**b**是任意常数）

3.　非移变系统（Shift-invariant System）：

如果$y(n)=T[x(n)]$，且$y(n-k)=T[x(n-k)]$

k为整数，则 $T[\ ]$为非移变系统。

例2.3.1 证明 $y(n)=T[x(n)]=nx(n)$不是非移变系统。

证明：

由于 $T[x(n-k)]=nx(n-k)$

和 $y(n-k)=(n-k)x(n-k)$

所以 $T[x(n-k)]\neq y(n-k)$

故该系统不是非移变系统。

4. 线性非移变系统：

①系统即满足线性条件，又满足非移变条件即为线性非移变系统。设 $x(n)$ 为线性非移变系统的输入，$y(n)=T[x(n)]$；

当输入为 $\delta(n)$ 时，$h(n)=T[\delta(n)]$—单位取样响应；

当输入为 $\delta(n-k)$ 时，$h(n-k)=T[\delta(n-k)]$

$$\because x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$$\therefore y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=x(n)*h(n)$$

即：对线性非移变系统，输入和输出满足卷积关系。

②离散卷积运算步骤：折叠移位、相乘、相加。

例. 已知线性非移变系统的单位取样响应为：

$h(n)=u(n)-u(n-4)$，输入为：$x(n)=\begin{cases} n, 0\le n\le 3 \\ 0, others \end{cases}$

求输出 $y(n)$ 。

解： $\because y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

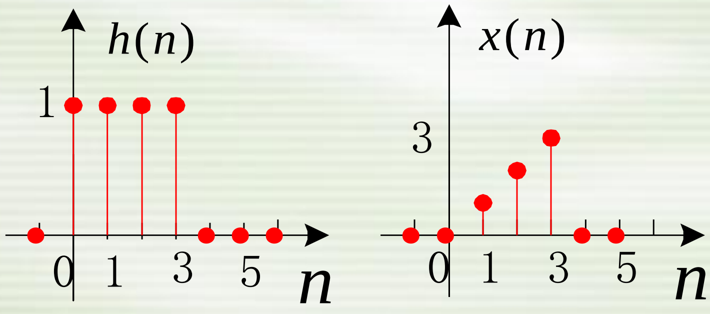
$\therefore y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)=0$，如图2.3.1(a)所示；

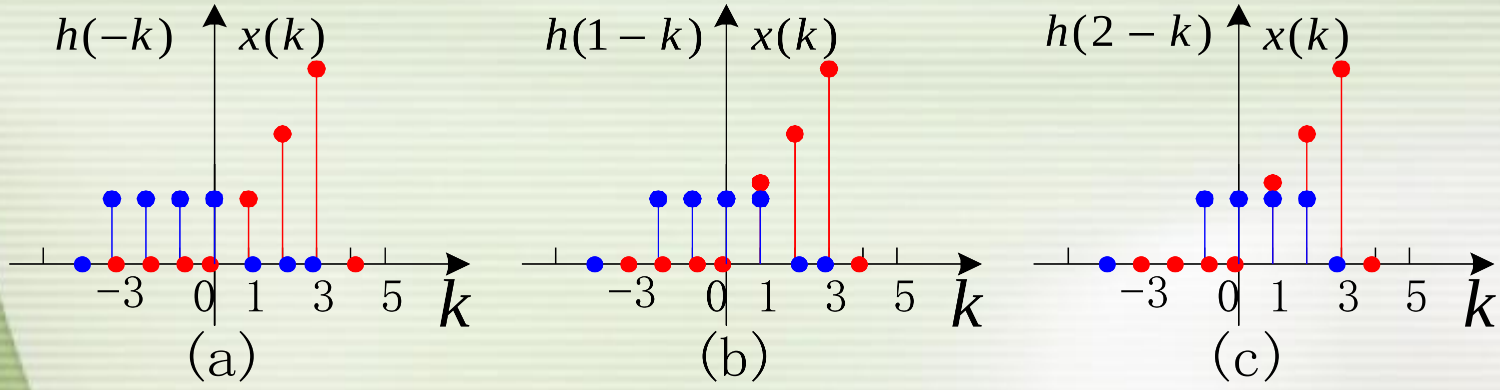
$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)=1$，如图2.3.1(b)所示；

$y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k)=3$，如图2.3.1(c)所示；

$$y(n)=\begin{cases}1,3,6,6,5,3; n=1,2,3,4,5,6\\ 0, others\end{cases}$$

整个卷积过程如下图所示。





5. 离散卷积运算的基本规律：

①交换律

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

②结合律

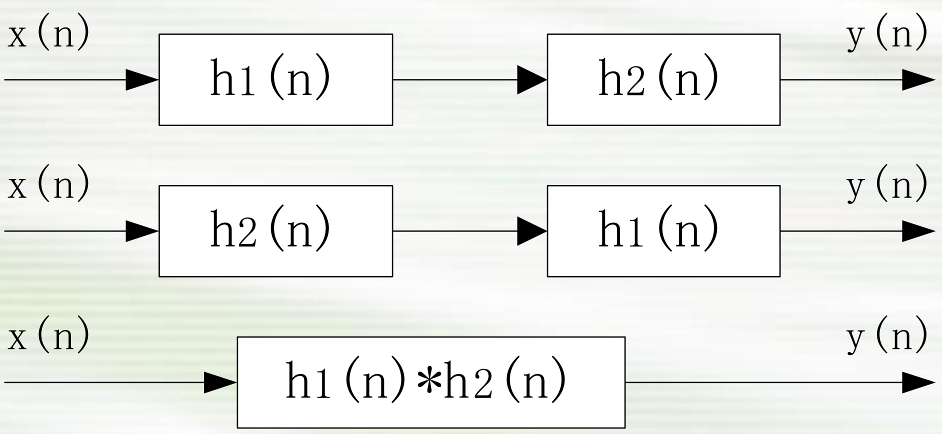
$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

$$= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n)$$

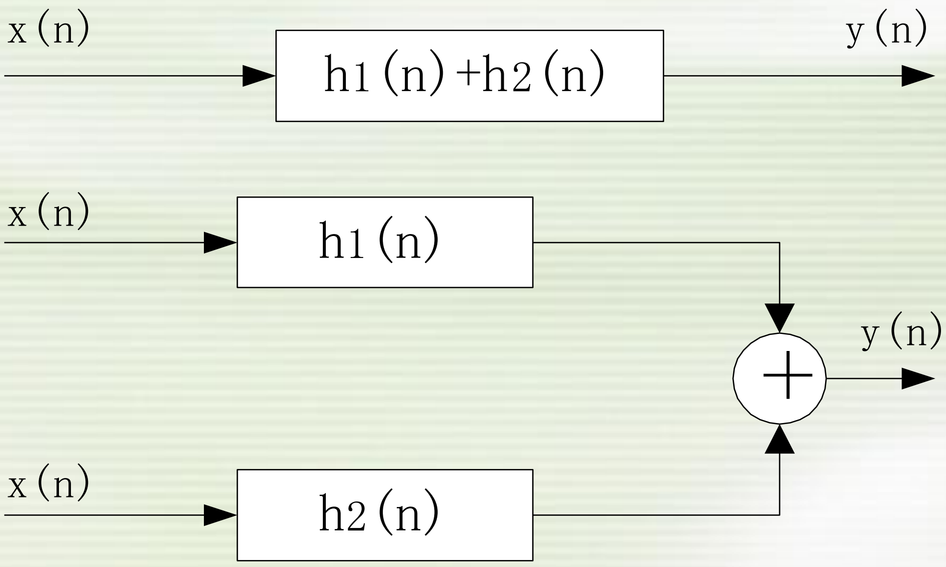
$$= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

③分配律 $y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$

$$= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$


x(n)
h1(n)
h2(n)
y(n)
x(n)
h2(n)
h1(n)
y(n)
x(n)
h1(n)*h2(n)
y(n)

（a）串联组合


x(n)
h1(n)+h2(n)
y(n)
x(n)
h1(n)
y(n)
x(n)
h2(n)

（b）并联组合

• 2.3.2　系统的稳定性和因果性

（The Stability & Causality of System）

1.　稳定系统（Stable System）：

①对于一个有界的输入 $x(n)$，产生有界输出 $y(n)$ 的系统。

即对于稳定系统，如果 $|x(n)| \le M$（M 是常数），

则有：$|y(n)| < \infty$

例：判断系统 $y(n) = T[x(n)] = e^{x(n)}$ 的稳定性？

解：设 $|x(n)| \le M$，则：$|y(n)| = |e^{x(n)}| = e^{|M|} < \infty$，

系统稳定。

②一个线性非移变系统稳定的充要条件是：其单位取样响应绝对可和，即：

$$S \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

证明：

a.充分性：设上式成立并设为一个有界输入序列，

即：$|x(n)| \le M$

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)||h(k)|$$

$$\le M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\therefore |y(n)| < \infty$$

b.必要性：假设系统的单位取样响应不绝对可和，

即：$S \overset{\Delta}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$

定义一个有界的输入：
$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, h(n) \neq 0 \\ 0, h(n) = 0 \end{cases}$$

式中$h^*(n)$是 $h(n)$的复共轭，

$$\therefore\ y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = S$$

$\therefore\ y(0)$不是有界的。

2. 因果系统（Causal System）：

①输出的变化不会领先于输入的变化的系统。即：系统的输出值 $y(n)$不取决于输入$x(n)$的将来值，$y(n)$只与$x(n)$的现在值及过去值$x(n-1), x(n-2), \ldots$等有关，与将来值$x(n+1), x(n+2), \ldots$无关。

例：

$y(n) = T[x(n)] = x(n-1)$ 是因果系统；

$y(n) = T[x(n)] = x(n+1)$ 是非因果系统。

②一个线性非移变系统为因果系统的充要条件为：

$h(n) \equiv 0, n < 0$，应注意：系统的“稳定性”和“因果性”与系统的输入 $x(n)$ 无关，而取决于系统本身的结构 $h(n)$ 。

例：　请判断系统 $T[x(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$是否为：

①稳定系统，②因果系统，③线性系统，④非时变系统？

解：① **if** $|x(n)|\le M$ ，**then** $|T[x(n)]|\le \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)|\le|(2n_0+1)|M$

则该系统为稳定系统。

②$\because T[x(n)]$取决于$x(n)$的将来值，该系统不是因果系统；

③ $\because T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}[ax_1(k)+bx_2(k)]$

$$=a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k)+b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

则该系统为线性系统。

④ $T[x(n-m)]=\sum_{k=n-m-n_0}^{n-m+n_0} x(k)=y(n-m)$

则该系统为非移变系统。

§2.3.3 线性常系数差分方程
（Linear Constant-coefficient Difference Equations）

- **2.3.3.1 函数序列的差分描述**
- **2.3.3.2 线性常系数差分方程**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

①线性非移变离散系统，输入和输出满足上述方程；

②上述方程描述的系统不一定是因果的，假定（除非另作说明）在一般情况下，上述方程描述一个因果系统。

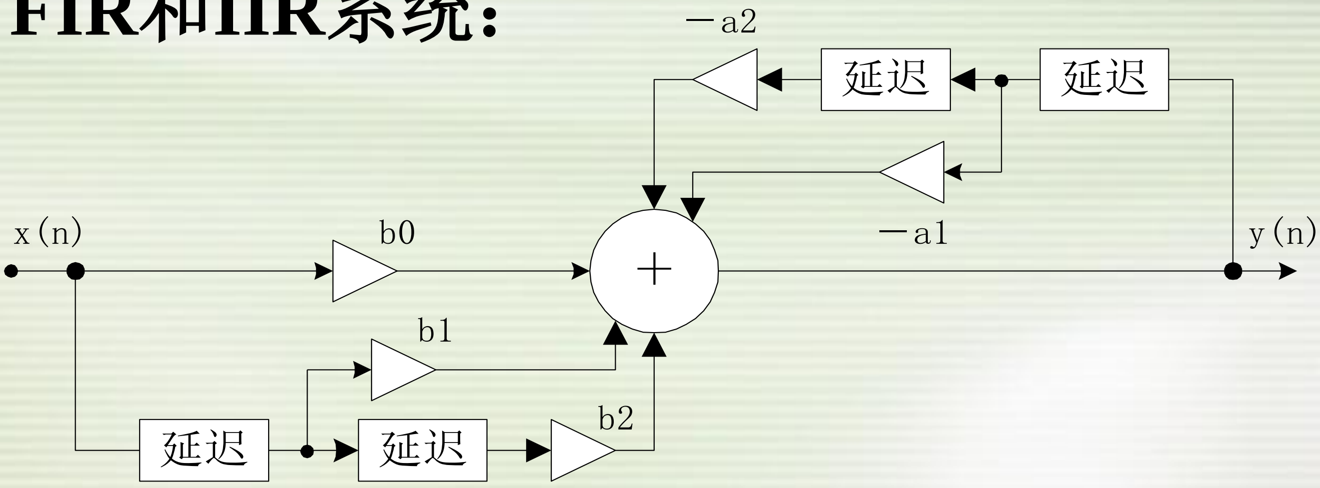
- **2.3.3.3 FIR系统和IIR系统**

（1）FIR：Finite Impulse Response(有限冲激响应)；

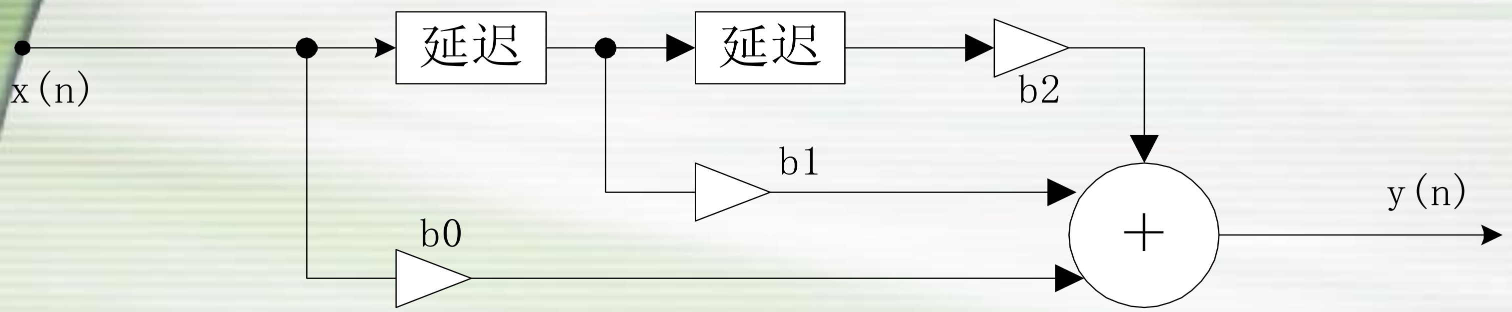
IIR：Infinite Impulse Response(无限冲激响应)；

（2）数字系统的表示：差分方程、框图或流图、系统函数。

（3）FIR和IIR系统：



（a）二阶IIR系统



（b）二阶FIR系统

例2.4.1：请写出上图所示系统(a)和(b)的差分方程。

解：

二阶IIR系统： $y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

二阶FIR系统： $y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

§ 2.4 离散时间信号和系统的频域表示

(The Frequency Prosperties of The Discrete Time Signal & System)

- **2.4.1 离散时间信号的Fourier变换**

1. 连续时间信号的Fourier变换为：

$$\begin{cases} X(j\Omega) = FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \\ x(t) = IFT[X(j\Omega)] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \end{cases}$$

式中，表示角频率（rad/s）。

2. 离散时间信号的**Fourier**变换定义为：

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = IFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

在物理意义上，$X(e^{j\omega})$表示序列 $x(n)$的频谱，ω为数字域频率（**rad**）。

注意:

a.一般情况下，$X(e^{j\omega})$为复数，故：

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$X(\omega)=|X(e^{j\omega})|=\sqrt{X_R^2(e^{j\omega})+X_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\varphi(\omega)=\arg[X(e^{j\omega})]=arctg[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}]$$

应注意取值范围

b. $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的 ω 的连续函数；而 $X(j\Omega)$ 是角频率 Ω 的非周期连续函数；

$$\because\ X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$$

c. 当 $x(n)$ 为实序列时，$X(e^{j\omega})$ 的幅值 $|X(e^{j\omega})|$ 在区间 $0\le\omega\le2\pi$ 内是偶对称函数，相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是奇对称函数。

证明：

因为 $|X(e^{j\omega})|$ 关于 π 偶对称，所以： $|X(e^{j\omega})|=|X(e^{j(2\pi-\omega)})|$

因为 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 关于 π 奇对称

所以： $\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{j(2\pi-\omega)})]$

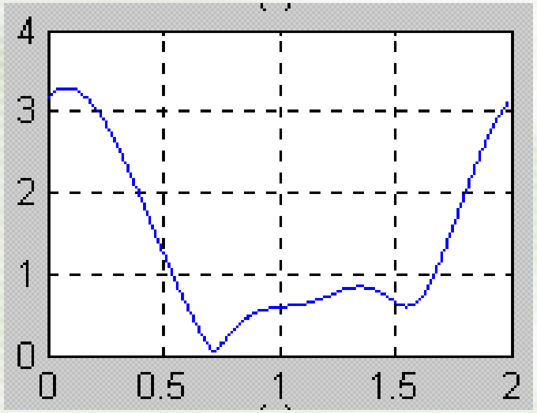
$$\because X^*(e^{j\omega})=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}]^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{j\omega n}=X(e^{-j\omega})$$

$$\therefore X_R(e^{j\omega})-jX_I(e^{j\omega})=X_R(e^{-j\omega})+jX_I(e^{-j\omega})$$

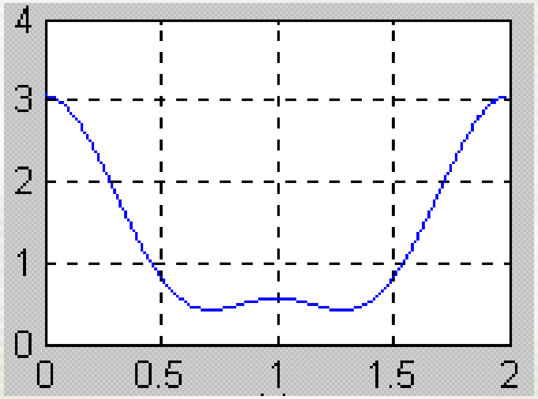
即：$X_R(e^{j\omega})$ 偶对称，$X_I(e^{j\omega})$ 奇对称。

所以 $x(n)$为实序列时，$[0,2\pi]$或$[0,\pi]$内的 $X(e^{j\omega})$即代表其频率特性。

c.当$x(n)$不为实序列时，上述结论不正确，如下图所示。



(a)复序列的幅频特性



(b)实序列的幅频特性

图(a)的序列为：

$$x(n)=\begin{cases}1,1,0.75+j0.5,0.25+j0.3,0.0625; n=0,1,2,3,4\\ 0; others\end{cases}$$

图(b)的序列为：

$$x(n)=\begin{cases}1,1,0.75,0.25,0.0625; n=0,1,2,3,4\\ 0; others\end{cases}$$

e.$x(n)$ **的FT存在的条件：** $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$ 。

f. $x(n)$**的FT** $X(e^{j\omega})$ 代表信号的频域特性。

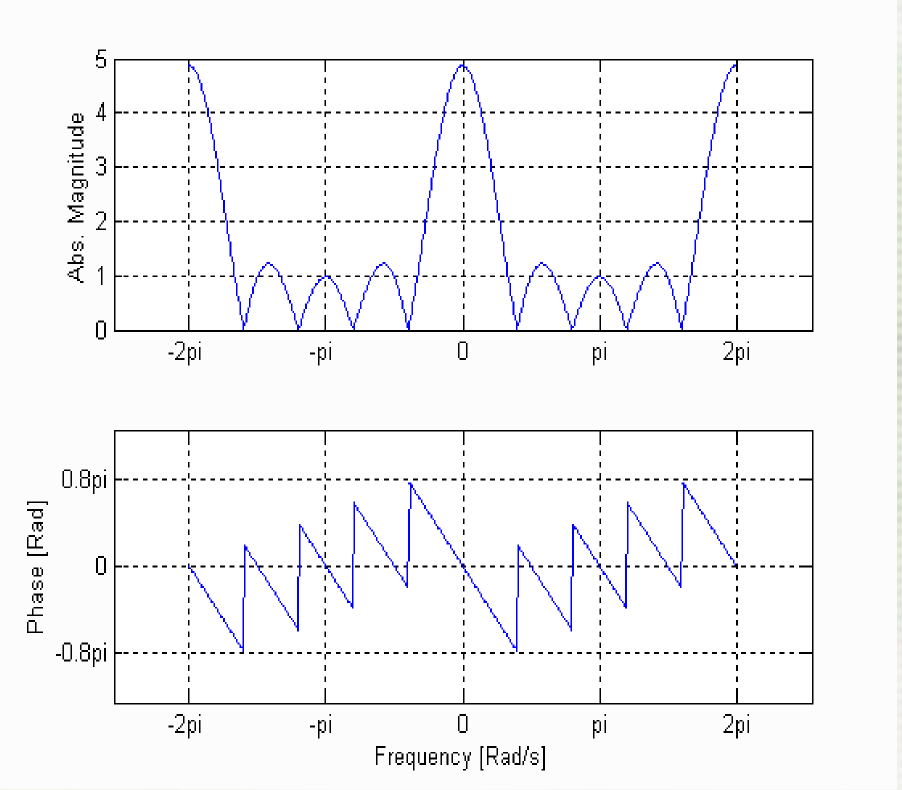
g.从序列Fourier变换的公式可知：离散信号即可用时域形式 $x(n)$**表示，也可用频域形式** $X(e^{j\omega})$**表示。**

例：求具有下列单位取样响应的系统频率响应。

$$h(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, \quad others\end{cases}$$

解：右图画出的是$N=5$时，

$H(e^{j\omega})$的幅度和相位特性。



$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{j\omega N}}{1-e^{j\omega}}$$

$$=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-j(N-1)\omega/2}$$

注：

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

- **2.4.2 离散时间信号的Fourier变换的性质**

1. 线性：设$X_1(e^{j\omega})=FT[x_1(n)]$，$X_2(e^{j\omega})=FT[x_2(n)]$，则

$$FT[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

2. 序列的移位：设$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[x(n-k)]=e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$$

3. 序列的调制：设$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4. 序列的折叠：设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[x(-n)]=X(e^{-j\omega})$$

5. 序列乘以 n：设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[nx(n)]=j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

6. 序列的复共轭：设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[x^*(n)]=X^*(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(-n)]=X^*(e^{j\omega})$$

7. 序列的卷积：设$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，$Y(e^{j\omega})=FT[y(n)]$

$w(n)=x(n)*y(n)$，则

$$W(e^{j\omega})=FT[x(n)*y(n)]=X(e^{j\omega})\cdot Y(e^{j\omega})$$

8. 序列相乘：设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，$Y(e^{j\omega})=FT[y(n)]$

$w(n)=x(n)\cdot y(n)$，则

$$W(e^{j\omega})=FT[x(n)y(n)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})\cdot Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

9. 序列的FT的对称性：

①定义： $x_e(n)=x_e^*(-n)$ 共轭对称序列

$x_o(n)=-x_o^*(-n)$ 共轭反对称序列

注意：

a.变换区间 $-\infty<n<+\infty$

b.以 原点 为对称点

c.频域定义： $X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})$ 共轭对称函数

$X_o(e^{j\omega})=-X_o^*(e^{-j\omega})$共轭反对称函数

d. $x_o(n)=x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$ $x_e(n)=x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$

$x_{er}(n),x_{oi}(n)$是偶序列， $x_{or}(n),x_{ei}(n)$是奇序列。

②序列分解：

a. $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$ **(任意长)**

其中：$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$ $x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$

b. $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

其中：$x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$ $x_i(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)]$

c. $X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$

其中：$X_e(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})]$

$$X_o(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

例：　　已知序列$x(n)=u(n)$，请画出$x_o(n)$和$x_e(n)$的图形？

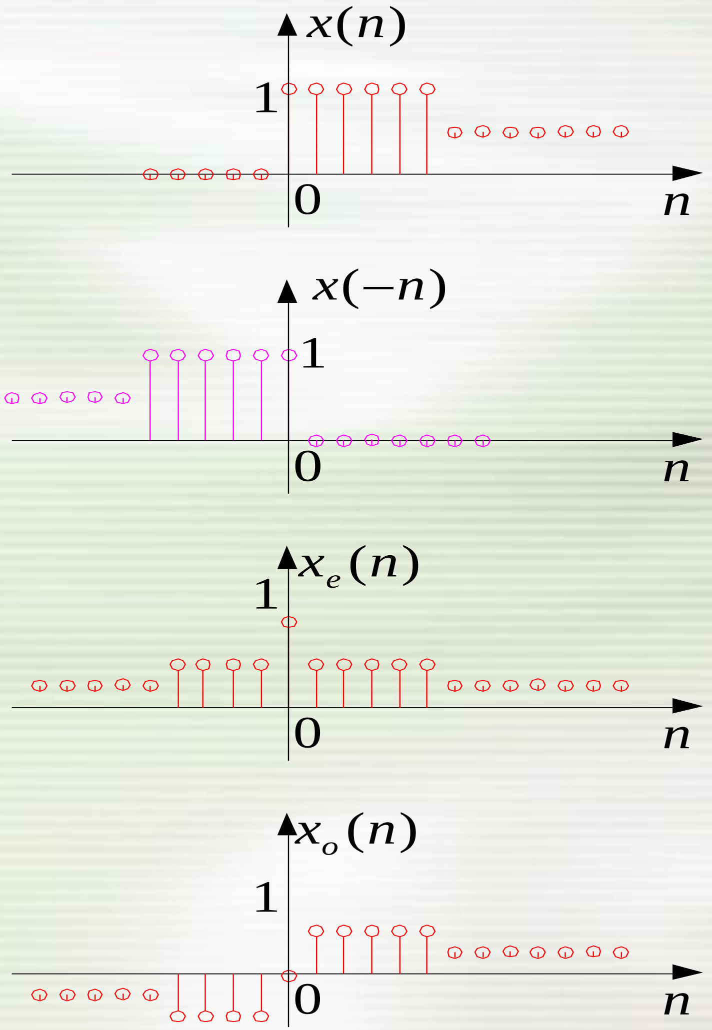
解：

当$x(n)$为实序列时，有：

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

其图形如右图所示。



③FT的共轭对称性：

a. $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$FT[x_r(n)] = X_e(e^{j\omega})$$

$$FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega})$$

证明：

$$\because x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$\therefore FT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-jw})] = X_e(e^{j\omega})$$

b. $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$FT[x_e(n)] = X_R(e^{j\omega})$$

$$FT[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega})$$

证明:

$$\because x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$\therefore FT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

其中 $FT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)e^{j\omega n}]^*$

$$\underline{\underline{m=-n}}[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m}]^* = X^*(e^{j\omega})$$

c. 当$x(n)$为实序列（任意长），且$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$则：

① $X(e^{j\omega})$ 共轭对称，即：$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

$\because x_i(n)=0 \qquad \therefore FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})=0$

② 如$x(n)$ 为实偶序列，则$X(e^{j\omega})$为实偶函数，即：

若 $x(n)=x(-n)$，则 $X(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$

$\because x_o(n)=0 \qquad x_i(n)=0$

$\therefore FT[x_o(n)]=jX_I(e^{j\omega})=0$

$FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})=0$

③ 如$x(n)$ 为实奇序列，则 $X(e^{j\omega})$为纯虚奇对称函数，

即：若$x(n)=x(-n)$，则 $X(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})$

④ 如果$x(n)$ 为实因果序列，$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

$$x(n)=\begin{cases}2x_e(n), n>0\\ x_e(n), n=0\\ 0, n<0\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}2x_o(n), n>0\\ x(0), n=0\\ 0, n<0\end{cases}$$

$$x_e(n)=\begin{cases}x(0), n=0\\ \frac{1}{2}x(n), n>0\\ \frac{1}{2}x(-n), n<0\end{cases}$$

$$x_o(n)=\begin{cases}0, n=0\\ \frac{1}{2}x(n), n>0\\ -\frac{1}{2}x(-n), n<0\end{cases}$$

注：$x(n)\equiv 0, n<0$

• **2.4.3 离散时间系统的频率响应**

1. 定义：

$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$，其中 $h(n)$ 是系统的单位取样响应

$$H(e^{j\omega})=H_R(e^{j\omega})+jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$H(\omega)=|H(e^{j\omega})|=\sqrt{H_R^2(e^{j\omega})+H_I^2(e^{j\omega})}$ 为系统的幅度响应

$\varphi(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]=arctg[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}]$ 为系统的相位响应

2. 正弦信号或复指数信号通过线性非移变系统：

设 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$，则有：

$$\because y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}$$

$$=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

$$\therefore y(n)=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})$$

其中$H(e^{j\omega 0})$是系统在 ω_0 处的频率响应。

设 $x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)$，

如为 $h(n)$ 实序列，则系统对 $x(n)$ 的响应为：

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)=\frac{A}{2}(e^{j(\omega_0 n+\phi)}+e^{-j(\omega_0 n+\phi)})$$
$$=\frac{A}{2}(e^{j\phi}\cdot e^{j\omega_0 n}+e^{-j\phi}\cdot e^{-j\omega_0 n})$$

$$y(n)=\frac{A}{2}[e^{j\phi}\cdot e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})+e^{-j\phi}\cdot e^{-j\omega_0 n}H(e^{-j\omega_0})]$$
$$=\frac{A}{2}[e^{j\phi}\cdot e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})+e^{-j\phi}\cdot e^{-j\omega_0 n}H^*(e^{j\omega_0})]$$

当 $h(n)$ 为实序列时，有： $H(e^{-j\omega_0})=H^*(e^{j\omega_0})$

$$\therefore y(n)=A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\phi+\theta)$$

其中，$\theta=\arg[H(e^{j\omega_0})]$ 是系统在 ω_0 处的相位响应。

例：　　求一个因果的线性非移变系统，其系统的频率响应为：$H(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}+\beta}{1-\beta\cdot e^{-j\omega}}$ ，$\beta<1$ 。求系统对下列输入信号的响应：　$x(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ 　。

解：该系统对输入 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ 的响应为：

$$y(n)=A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\phi+\theta)$$

$$y(n)=|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\theta)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=\frac{\beta-j}{1+j\beta}=-j$$

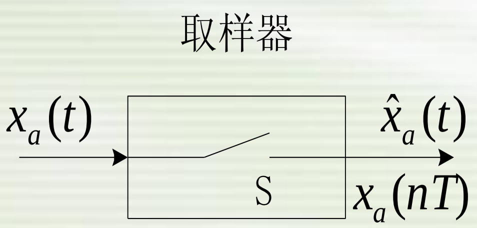
$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|=1 \qquad \theta=-\frac{\pi}{2}$$

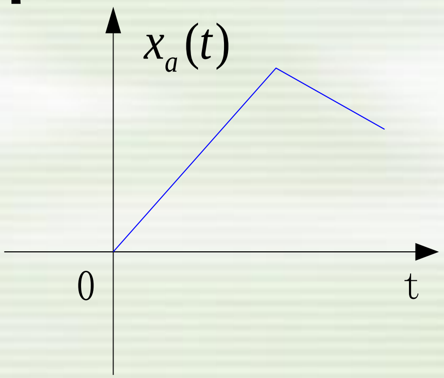
$$\therefore y(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})$$

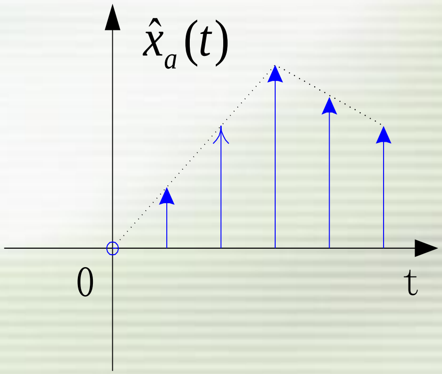
§ 2.5 连续时间信号的取样

(The Sampling of Continuous Time Signal)

- **2.5.1 理想取样**







如上图所示，模拟信号$x_a(t)$经过取样器，其输出的取样信号为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$$

其中 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

注意：$\hat{x}_a(t)$是模拟信号，不是数字信号。

数字信号（序列）$x(n)$ 是模拟信号$x_a(t)$经过理想取样才得到的，即：

$$x(n)=\{x_a(nT)\}, -\infty<n<\infty$$

$$=\{\cdots, x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \ldots\}$$

2.5.2 频谱周期延拓

模拟信号$x_a(t)$经过取样得到取样信号$\hat{x}_a(t)$，其频谱为：

$$\hat{X}_a(j\Omega)=FT[x_a(t)p(t)]=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*P(j\Omega)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega)*\delta(j\Omega-jr\Omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega-jr\Omega_s)$$

$$\therefore\ \hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega-jr\Omega_s) \qquad \text{…(2.6a)}$$

$p(t)$**的FT变换为：**$P(j\Omega)=FT[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{jr\Omega_s t}]=\frac{2\pi}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(j\Omega-jr\Omega_s)$

即取样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 就是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，延拓周期的取样角频率是Ω_s 。

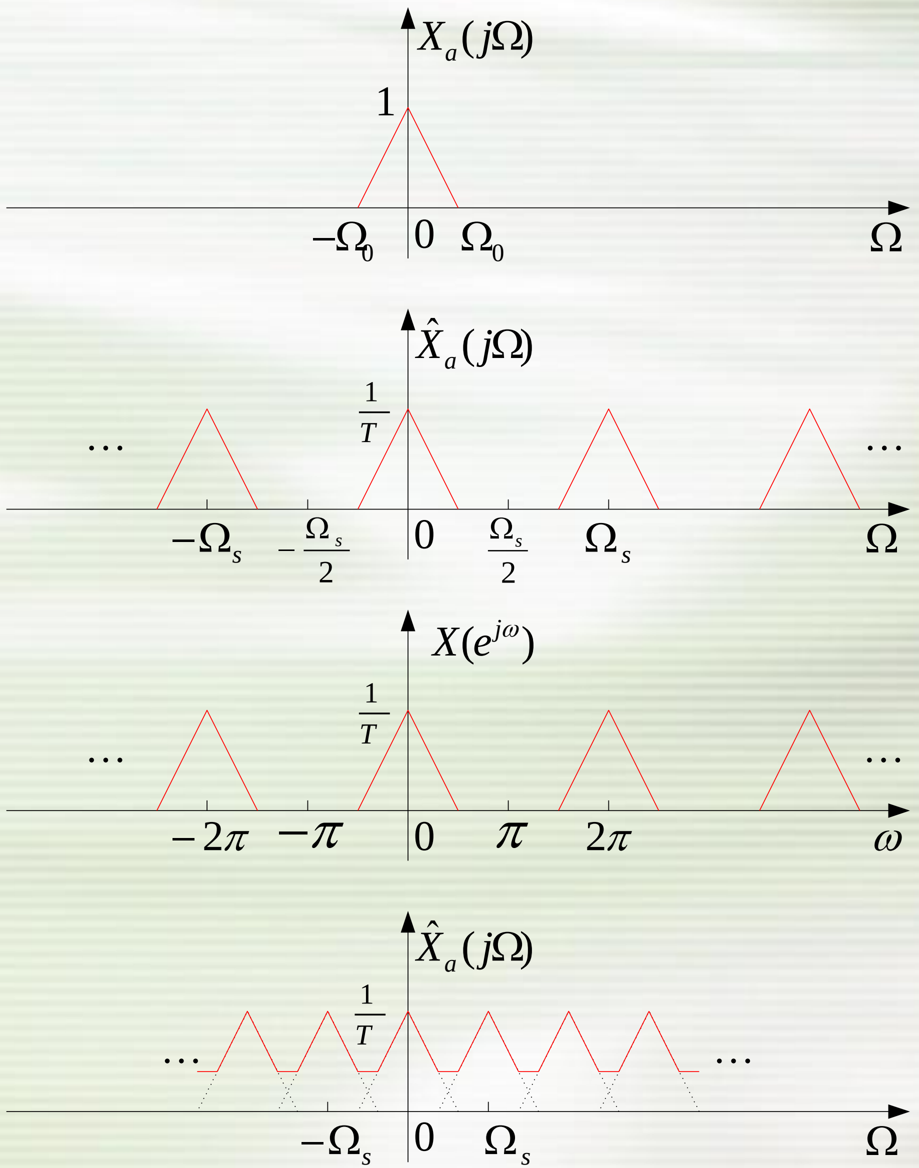
从右图可知，为使取样后的信号频谱不产生“混叠”，在信号的频带受限的情况下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即：

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0$$

其中：

Ω_s称为奈奎斯特频率；

$\Omega_s/2$称为折叠频率。



• 2.5.3 频率归一化

频率归一化讨论离散时间信号$x(n)$的频谱$X(e^{j\omega})$和取样信号$\hat{x}_a(t)$的频谱$\hat{X}_a(j\Omega)$之间的关系。假设离散时间信号$x(n)$是模拟信号$x_a(t)$通过周期性取样得到的，即：

$$x(n) = x_a(nT) \qquad \text{…(2.6b)}$$

取样信号$\hat{x}_a(t)$的频谱为：

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t)p(t)] \\ &= FT[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\cdot\delta(t-nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\cdot FT[\delta(t-nT)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT} \qquad \text{…(2.6c)}\end{aligned}$$

离散时间信号 $x(n)$ 的FT变换为：

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) \qquad \text{…(2.6d)}$$

利用式(2.6b)的关系，比较式(2.6c)和式(2.6d)得：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

将式(2.6a)代入上式得：

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \qquad \text{…(2.6e)}$$

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega}{T} - jr\frac{2\pi}{T}) \qquad \text{…(2.6f)}$$

即在 $\omega=\Omega T$ 的条件下，离散时间信号$x(n)$的频谱 $X(e^{j\omega})$ 与取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 相等。

由于 $\omega=\Omega T=\dfrac{2\pi f}{f_s}$ （ f_s 为取样频率）是 f 对 f_s 归一化的结果，因此可认为离散时间信号 $x(n)$ 的频谱是取样信号的频谱经频率归一化后的结果。

综上所述：离散时间信号 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，且在频率轴上进行归一化（ f 对 f_s 归一化）。

- **2.5.4 信号重建**

如果取样信号的频谱不存在混叠，让取样信号通过一理想低通滤波器，其特性为：$H(j\Omega)=\begin{cases}T, |\Omega|\le \Omega_s/2\\ 0, |\Omega|>\Omega_s/2\end{cases}$

其频谱特性为：$H(j\Omega)\hat{X}_a(j\Omega)=X_a(j\Omega), |\Omega|\le \Omega_s/2$

输出信号为：

$$x_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T\cdot X(e^{j\Omega T})e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-j\Omega nT}\right]e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)[\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)}d\Omega]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot S_a(t-nT)$$

其中，$S_a(t-nT)=\dfrac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}$ 为内插函数。

结论：取样信号通过理想LPF后，完全可以将信号还原，而不损失任何信息。由于插值的唯一性，还原的信号也是唯一的。

例2.5.1：对$x_a(t)$进行理想取样，取样间隔$T=0.25s$，得到$\hat{x}_a(t)$，让$\hat{x}_a(t)$通过理想低通滤波器$G(j\Omega)$，$G(j\Omega)$的表示式为：$G(j\Omega)=\begin{cases}0.25, |\Omega|\le 4\pi \\ 0, 4\pi<|\Omega|\end{cases}$；

设：$x_a(t)=\cos(2\pi t)+\cos(5\pi t)$，求：

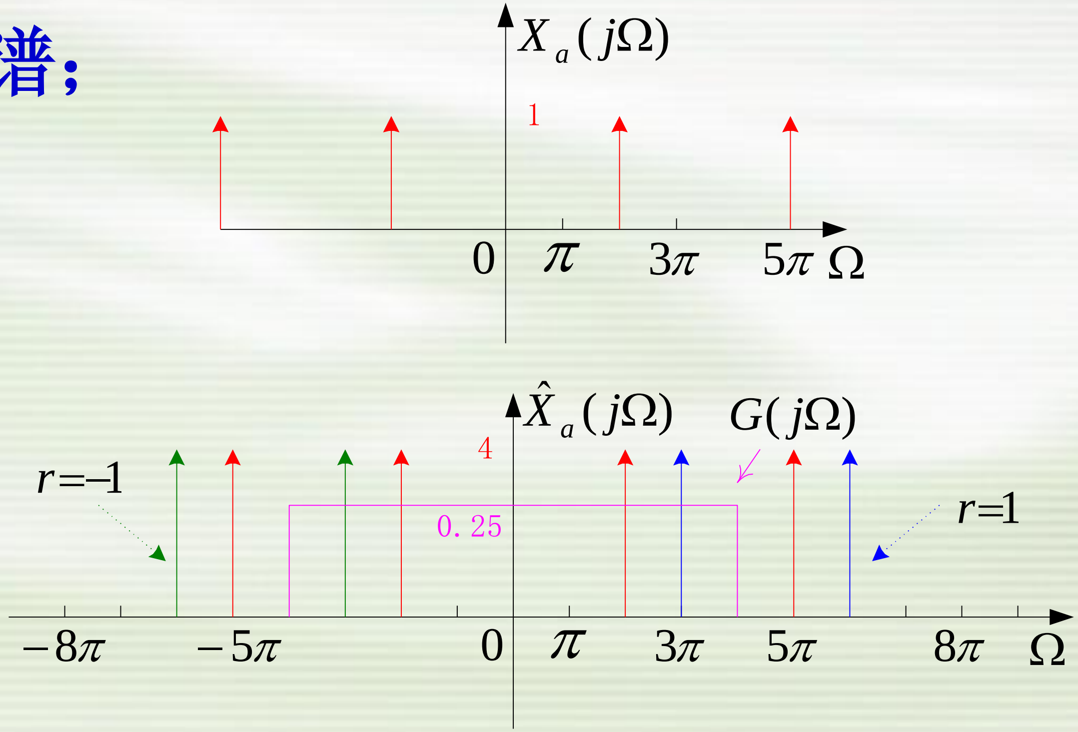
（1）写出$\hat{x}_a(t)$的表达式；

（2）求出理想低通滤波器的输出信号$y_a(t)$。

解：（1）$\because \hat{x}_a(t)=x_a(t)p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$

$$\therefore \hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\cos(2\pi nT)+\cos(5\pi nT)]\delta(t-nT)$$

（2）如下图所示，$X_a(j\Omega)$ 为 $x_a(t)$ 的频谱，$\hat{X}_a(j\Omega)$ 为 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱；



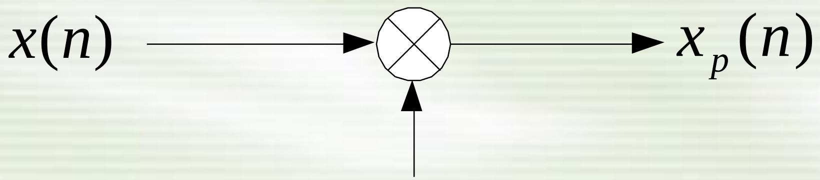
由图可知，$\hat{x}_a(t)$ 通过 $G(j\Omega)$ 后其输出信号为：

$$y_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$$

2.5.5 离散时间信号的取样

（The Sampling of Discrete Time Signal）

1. 时域表示



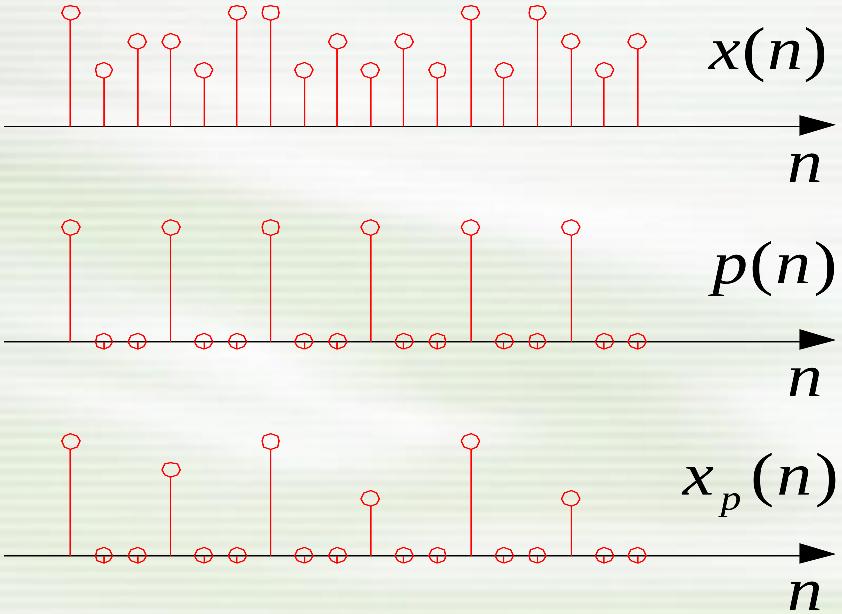
$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$

$$x_p(n)=\begin{cases}x(n), n=kN, k:\text{int}\\ 0, others\end{cases}$$

上式可以看成一个信号调制的过程，即：

$$x_p(n)=x(n)p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(Nk)\delta(n-kN)$$ 。

各信号的波形如下图所示：



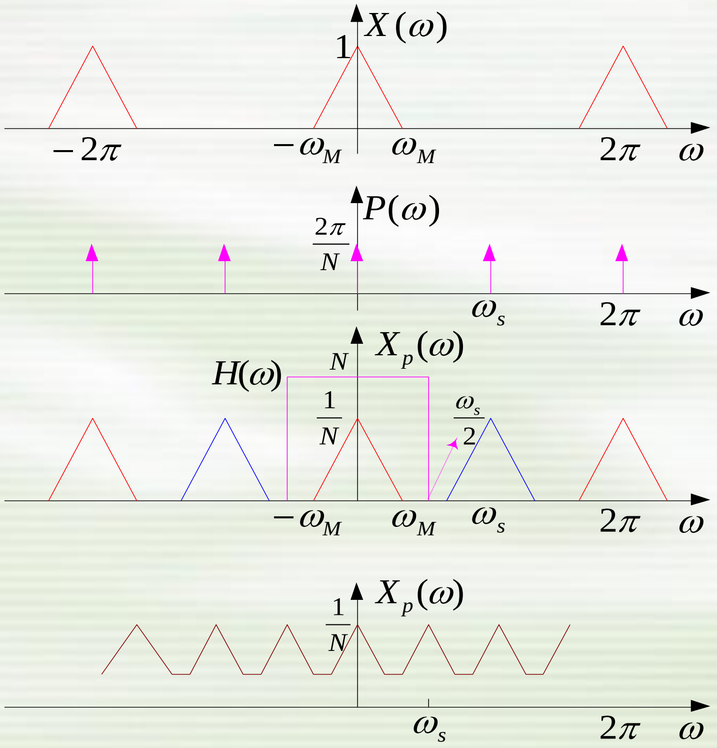
2. 频域表示

$$X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}P(\omega)*X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\theta)X(\omega-\theta)d\theta$$

$$P(\omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\qquad X_p(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\omega-k\omega_s)$$

式中 ω_s 为取样频率，且 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{N}$ 。

下图为离散时间信号取样的频谱和离散时间信号的恢复：



结论：离散时间序列 $x_p(n)$的**FT** $X_p(\omega)$是原序列 $x(n)$的**FT** $X(\omega)$的周期延拓，周期为取样频率 ω_s。因此，在离散时间信号取样中，为了不发生频谱混叠失真，取样频率应满足条件：$\omega_s \geq 2\omega_M$

3. 序列$x(n)$的恢复

在序列$x_p(n)$的频谱没有混叠失真的情况下，用一个增益为N，截止频率大于ω_M而小于$(\omega_s-\omega_M)$的低通滤波器，对$x_p(n)$进行滤波，可恢复出原信号$x(n)$。图中，取低通滤波器的截止频率为$\omega_s/2$，其频率特性为

$$H(\omega)=\begin{cases} N,|\omega|\le\dfrac{\omega_s}{2} \\ 0,|\omega|>\dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

相应的冲击响应为：

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} N\cdot e^{j\omega n}d\omega=\frac{N}{\pi n}\sin(\frac{\omega_s}{2}n)$$

恢复的序列为：

$$\begin{aligned}x_r(n)&=x_p(n)*h(n)\\&=[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\delta(n-kN)]*\frac{N}{\pi n}\sin(\frac{\omega_s}{2}n)\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\frac{N}{\pi(n-kN)}\sin[\frac{\omega_s}{2}(n-kN)]\end{aligned}$$

• 2.5.6 离散时间信号的抽取与内插

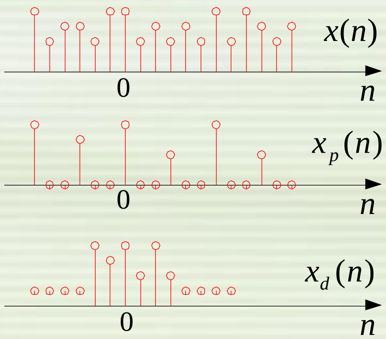
（The Decimation and Interpolation of the Discrete Time Signal）

1. 离散时间信号的抽取/减采样：$x_d(n) = x(nN) = x_p(nN)$

$x_d(n)$的FT为：$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) e^{-j\omega n/N} = X_p(\frac{\omega}{N})$

由于在N的整倍数点外的取样值均为0，上式可写成：

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nN) e^{-j\omega n}$$

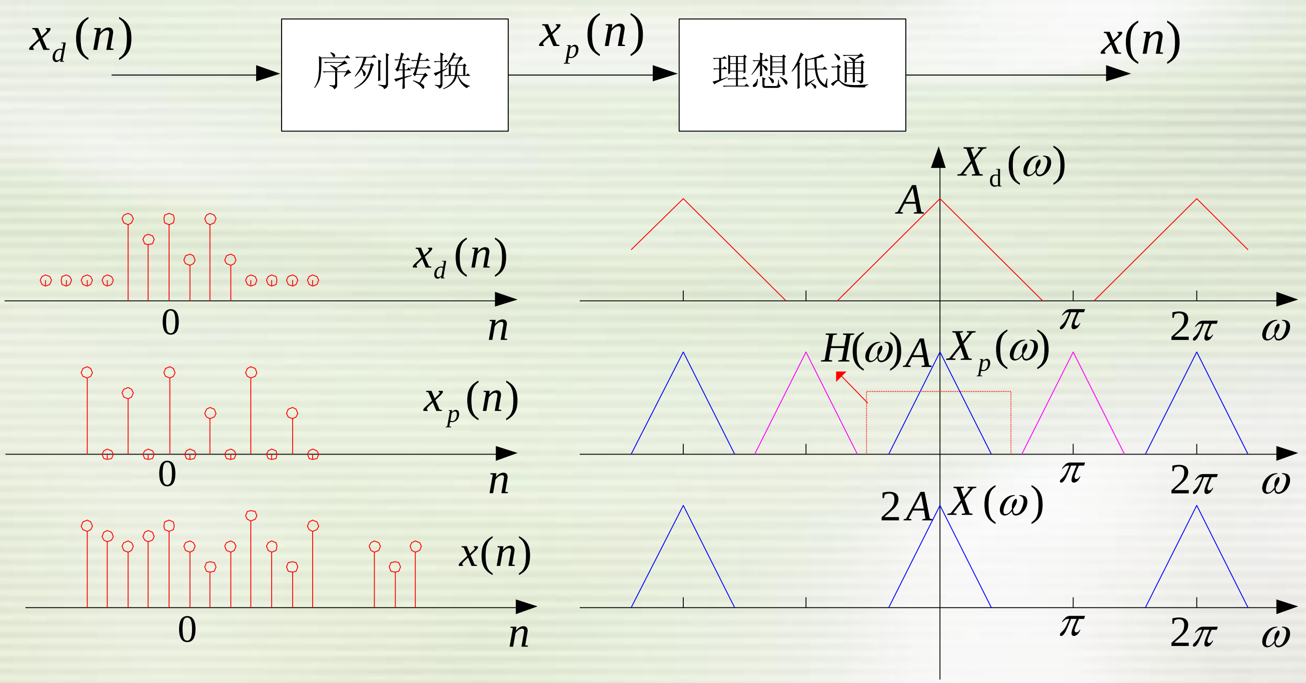


即：取样序列和抽取序列的频谱只是频率尺度不同。

注意：只有进行“过采样”，才允许进一步降低采样率，即进行“减采样”。

2.离散时间信号的内插(Interpolating)/增采样(Upsampling):

抽取的逆过程。下图所示是对序列 $x_d(n)$增采样得到 $x(n)$的过程：先在$x_d(n)$的每相邻两个序列之间插入 N-1个零值，得到序列 $x_p(n)$，然后用一个低通滤波器从$x_p(n)$得到$x(n)$ 内插后的序列。



§ 2.6 Z变换 (Z Transformation)

- **2.6.1 Z变换的定义**

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad \text{…(2.7a)}$$

极坐标形式： $X(re^{j\omega}) == \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$ **…(2.7b)**

式中z为复变量，即 $z = re^{j\omega}$**。**

式(2.7a)为双边ZT，单边ZT为：

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad \text{…(2.7c)}$$

注意：

a. $X(z)$ 是一个Laurent级数 $x(n)$ 是系数，

一般情况下为有理分式：$X(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$ 。

ZT的收敛域：使 $X(z)$ 收敛的z值，

一般为某个环域：$R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ ；

ZT的零点：使 $X(z)=0$ 的z值，

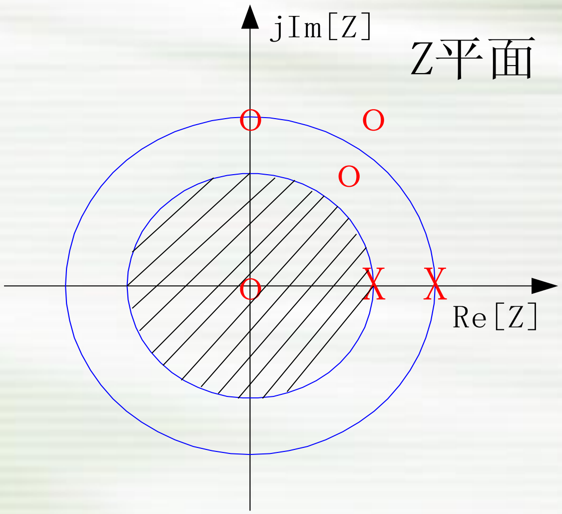
在Z平面上用“o”表示;

ZT的极点：使 $X(z)=\infty$ 的z值，

在Z平面上用“╳”表示。

如右图所示为的

收敛域和极零点分布图。



b．序列的ZT与FT的关系：当 $r=1$ **时，则**

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

即序列在单位圆上的ZT等于序列的FT。

c．当 $x(n)$ **为实序列时，对于FT，有：** $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$；

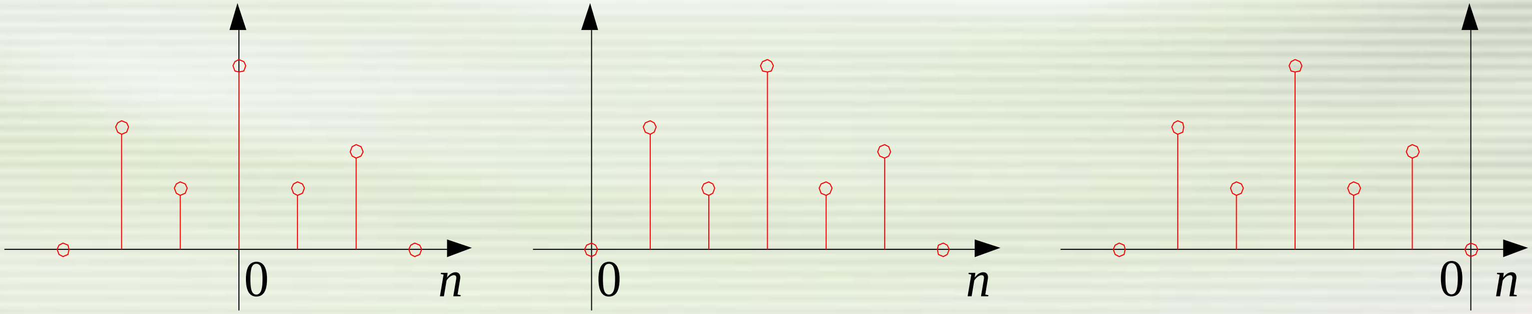
对于ZT有： $X(z)=X^*(z^*)$ 。

• 2.6.2　几种特殊序列的Z变换的收敛域

1. 有限长序列

$$x(n)=\begin{cases} x(n), n_1 \le n \le n_2 \\ 0, others \end{cases}, |n_1| \le |n_2|$$

如下图所示：



其ZT为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

一般情况下，其收敛域为：$0<|Z|<\infty$；(因为 $X(z)$ 为有限项，当$X(z)$展开时，既有z的正幂项，又有z的负幂项，故：$z\neq 0$　$z\neq\infty$　)

当 $n_1\geq 0$ 时，收敛域为：$0\leq|Z|<\infty$；(此时无z的正幂项)

当 $n_2\leq 0$ 时，收敛域为：$0<|Z|\leq\infty$；(此时无z的负幂项)

例2.6.1：求序列 $R_N(n)$ 的ZT及收敛域？

解：ZT[$R_N(n)$]＝$\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

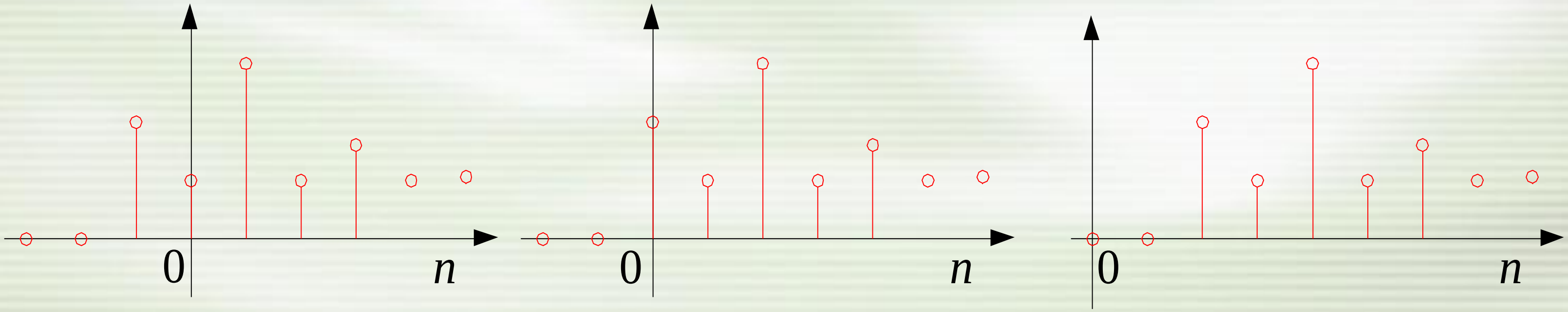
其收敛域为：

$$0<|Z|\leq\infty$$

2.右边序列

$$x(n)=\begin{cases} x(n), n\geq n_1 \\ 0, others \end{cases}$$

如下图所示：



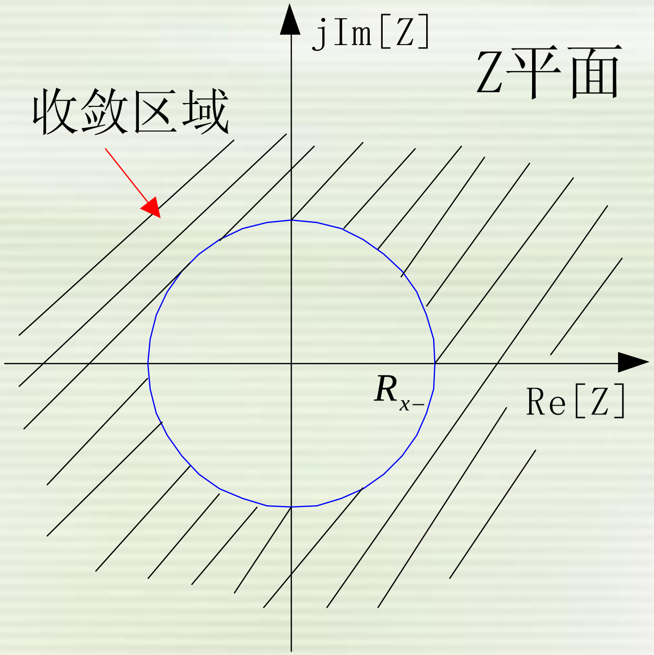
其ZT为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

其收敛域是以 R_{x-} 为半径的圆的外部，

即：$|Z|> R_{x-}$ ；

收敛域如下图所示：



证明：假设级数在某个圆 $|z|=|z_1|$上绝对收敛，

即： $\sum_{n=n_1}^{\infty}|x(n)z_1^{-n}|<\infty$

设z是这个圆外的任一点，即$|z|>|z_1|$，则有：

(1)当 $n_1\geq 0$时， $\because |z^{-n}|<|z_1^{-n}| \therefore \sum_{n=n_1}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\sum_{n=n_1}^{\infty}|x(n)z_1^{-n}|<\infty$

故级数 $\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z$是收敛的。

(2)当$n_1<0$时， $\sum_{n=n_1}^{\infty}|x(n)z^{-n}|=\sum_{n=n_1}^{-1}|x(n)z^{-n}|+\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)z^{-n}|$

上式的第一项级数的值收敛（有限项），

参考（1）的结论可知级数收敛。

特例：因果序列：$n_1 \geq 0$ 的右边序列。其收敛域为：$R_{x-} < |Z| \leq \infty$ ；（因果序列的ZT无正幂项）

注意：对于右边序列，如存在 $\lim_{z \to \infty} X(z)$ ，则该序列为因果序列。

例2.6.2：求序列 $x(n) = a^n u(n), |a| < 1$ 的ZT及收敛域？

解：

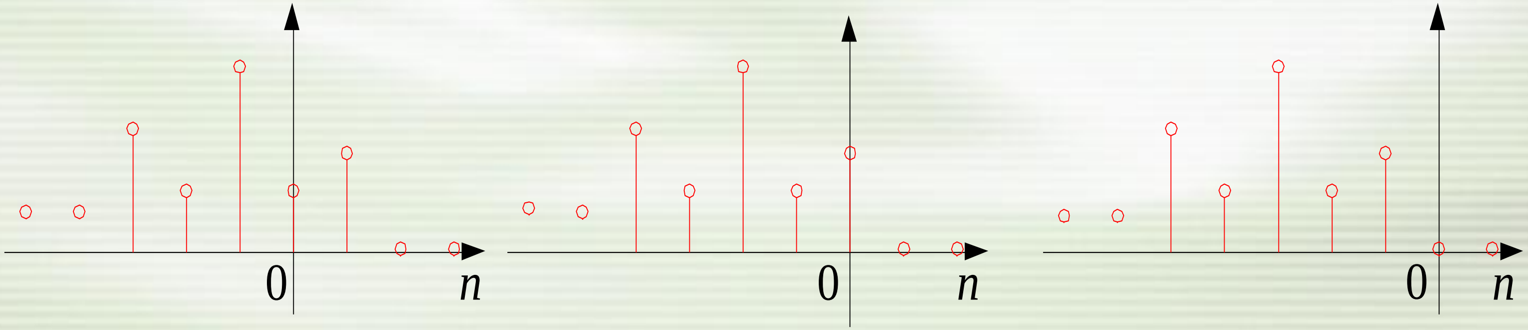
$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |az^{-1}| < 1$$

其收敛域为： $a < |Z| \leq \infty$

3. 左边序列

$$x(n)=\begin{cases} x(n), n \le n_2 \\ 0, others \end{cases}$$

如下图所示：



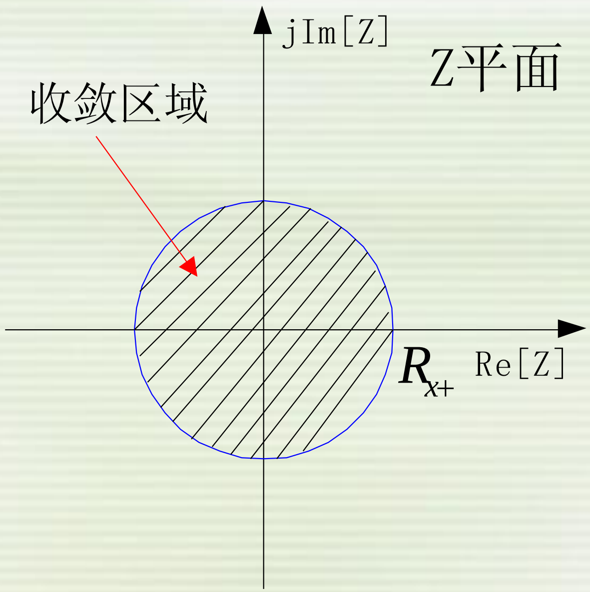
其ZT为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

其收敛域是以 R_{x+} 为半径的圆的内部，

即：$|Z|< R_{x+}$ ；

收敛域如下图所示：



特例：因果序列：$n_2 \le 0$ 的左边序列。其收敛域为：$0 \le |Z| < R_{x+}$；（因果序列的ZT无负幂项）

注意：对于左边序列，如存在 $\lim_{z \to \infty} X(z)$，则该序列为逆因果序列。

例2.6.3：求序列 $x(n) = b^n u(-n-1)|$ 的ZT及收敛域？

解：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (bz^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n = \frac{b^{-1}z}{1-b^{-1}z}, |b^{-1}z| < 1$$

其收敛域为：$0 \le |Z| < b$

（4）双边序列

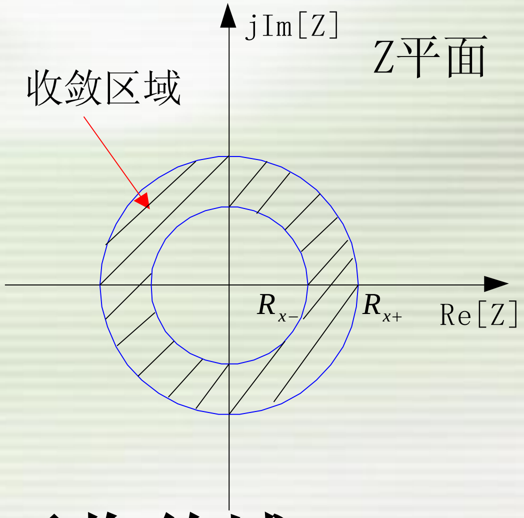
$n=-\infty \sim +\infty$，序列都有非零值；

其ZT为：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z)$

收敛域为 $X_1(z)$和 $X_2(z)$的收敛域的公共部分，

一般情况下为：$R_{x-}<|Z|<R_{x+}$；

如右图所示：



注意:如果 $R_{x+}<R_{x-}$，双边序列ZT无收敛域。

例2.6.4：求序列 $x(n)=\begin{cases}a^n, n>0\\ -b^n, n<0\end{cases}, (a<b)$ 的ZT及其收敛域。

解：该序列为双边序列，其ZT为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{z}{z-b}+\frac{z}{z-a}=\frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

其收敛域为： $a<|Z|<b$

其中：

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}\underline{\underline{m=-n}}\sum_{m=1}^{\infty}b^{-m}z^m=b^{-1}z\sum_{m=0}^{\infty}b^{-m}z^m=\frac{b^{-1}z}{1-b^{-1}z}=\frac{-z}{(z-b)}$$

结论：

①序列ZT为有理分式的收敛域以极点为边界（包括 $0, \infty$）；

②收敛域内不能包括任何极点，可以包含零点；

③相同的零极点分别可能对应不同的收敛域，即：不同的序列可能有相同的ZT；

④收敛域汇总：右外、左内、双环、有限长Z平面。

• 2.6.3　逆Z变换

1. 幂级数法

如果序列的ZT能表示成幂级数的形式，则序列$x(n)$是幂级数 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$ 中z^{-n}的系数。

注意：这种方法只对某些特殊的ZT有效。

如果ZT为有理函数，可用长除法将 $X(z)$展开成幂级数。若为右边序列（特例：因果序列），将 $X(z)$ 展开成负幂级数；若为左边序列（特例：逆因果序列），将 $X(z)$ 展开成正幂级数。

2. 部分分式法

如果$X(z)$是一个有理分式（两个多项式之比），分母的阶次大于分子的阶次，且只有单阶极点，则可表示成部分分式，即：

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_Nz^{-N}}$$

$$=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_Mz^{-M}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}}$$

式中 $a_k(k=1,2,\ldots,N)$ 是$X(z)$的极点。

$X(z)$ 的收敛域为以最大极点的模为半径的圆的外部，即：

$|Z|>\max\{|a_k|\}$ $\qquad A_k=X(z)(1-a_kz^{-1})|_{z=a_k}$

（上面两种逆Z变换的例题请见教材）

3. 留数定理法

Cauchy积分公式： $\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz = x(k)$， **…(2.7a)**

式中c是反时针方向环绕原点的围线。

对 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ **两边**$\times z^{k-1}$**，并在**$X(z)$**的收敛域内**

作围线积分得： $\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n+k-1}dz$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-n+k-1}dz$$

当 $n=k$**，参考（2.7a）式得：** $\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{k-1}dz = \begin{cases}1, k=0\\ 0, k\neq 0\end{cases}$

$$\therefore x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz\ldots\textbf{(2.7b)}$$

式中c是$X(z)z^{n-1}$收敛域中反时针方向环绕原点的闭合曲线，n为整数。注意:

①留数定义：$\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c f(z)dz$是$f(z)$在$z_0$的留数；

②Cauchy留数 (Residue Theorem)/积分定理(Integral Theoram)：

设函数$f(z)$在区域D内除有效个奇点 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 外处处解析；C 是D内包围诸奇点的一条正向简单闭合曲线，则：$\oint_c f(z)dz=2\pi j\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]$

③由留数定理可知：围线内外的留数之和等于零；

④设在有限Z平面上，$\{a_k\}(k=1,2,\ldots,N)$是$X(z)\cdot z^{n-1}$在围线c内的极点集，$\{b_k\}(k=1,2,\ldots,N)$是$X(z)\cdot z^{n-1}$在围线c外的极点集。

由Cauchy留数定理，有：

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},a_k] \quad \ldots(2.7c)$$

或：$x(n)=-\sum_{k=1}^{M}\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},b_k]-\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},\infty] \quad \ldots(2.7d)$

当 $X(z)\cdot z^{n-1}$在 $z=\infty$处有二阶或二阶以上的零点，即$X(z)\cdot z^{n-1}$的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高二阶或二阶以上时，无穷远处的留数为零，故有：

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{M}\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},b_k]\ldots(2.7e)$$

例2.6.6：设$X(z)=\dfrac{z(a-1/a)}{(z-1/a)(z-a)}, a<|z|<\dfrac{1}{a}$。其中 $0<a<1$，求$x(n)$。

解：有两个极点$1/a$和a。

被积函数为 $X(z)z^{n-1}=\dfrac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)(z-a)}$

当 $n\geq 0$时，围线内仅包含极点a，使用式(2.7c)得：

$$x(n)=\left.\frac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)}\right|_{z=a}=a^n u(n)$$

当$n<0$时，围线外仅包含一个极点a^{-1}，所以根据式(2.7d)得：

$$x(n)=-\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},a^{-1}]=-\left.\frac{(a-1/a)z^n}{(z-a)}\right|_{z=1/a}=a^{-n}u(-n-1)$$

最后得 $x(n)=\begin{cases}a^n, n\geq 0\\ a^{-n}, n<0\end{cases}$

或者表示为 $x(n)=a^n u(n)+a^{-n}u(-n-1)$。

• 2.6.4 Z变换的性质与定理

1. 线性

设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$,

$Y(z)=ZT[y(n)], R_{y-}<|Z|<R_{y+}$

则 $ZT[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z)$,

$\max(R_{x-},R_{y-})<|Z|<\min(R_{x+},R_{y+})$;

一般情况下，收敛域变小。但在组合ZT可能出现新的零极点抵消的情况时，收敛域可能增大。

如：$a^n u(n), a^n u(n-1)$ ，收敛域 $|Z|>a$；

但 $\delta(n)=a^n u(n)-a^n u(n-1)$，收敛域：整个Z平面。

2. 序列移位：设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ ，

则： $ZT[x(n-m)]=z^{-m}X(z), R_{x-}<|Z|<R_{x+}$

注意：

收敛域在 $z=0/\infty$处有例外，如 $\delta(n)$ 收敛域为整个Z平面。但 $\delta(n-1)$在$z=0$处不收敛，$\delta(n+1)$在 $z=\infty$ 处不收敛。

3. 乘以指数序列 a^n：设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$，

则： $ZT[a^n x(n)]=X(a^{-1}z), |a|R_{x-}<|Z|<|a|R_{x+}$

4. 序列的折叠：设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ ，

则：$ZT[x(-n)]=X(\frac{1}{z}), \frac{1}{R_{x+}}<|Z|<\frac{1}{R_{x-}}$

5. 复序列的共轭：设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ ，

则：$X^*(z^*)=ZT[x^*(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$

6. $X(z)$ 的微分：设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ ，

则：$-z\frac{dX(z)}{dz}=ZT[nx(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$

7. 初值定理：

对于因果序列 $x(n)$：$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$ ；

对于逆因果序列 $x(n)$： $x(0)=\lim\limits_{z\to 0}X(z)$ ；

注意：对于因果序列 $x(n)$，有：$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

对于逆因果序列 $x(n)$，有：$x(0)=\lim\limits_{z\to 0}X(z)$;

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}=x(0)+\sum_{n=-\infty}x(n)z^{-n}$$

8. 终值定理：若$x(n)$是因果序列，且$X(z)$除在 $z=1$处有一阶极点外，全部其它极点都在单位圆内，则： $\lim\limits_{n\to\infty}x(0)=\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

证明：$(z-1)X(z)=zX(z)-X(z)=ZT[x(n+1)-x(n)]$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} \qquad (x(n)\text{为因果序列})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-1}^{n}[x(k+1)-x(k)]z^{-k}$$

由于$(z-1)X(z)$ 抵消了函数 $X(z)$ 在 $z=1$处的可能极点，故 $(z-1)X(z)$ 的收敛域将包括单位圆，对上式两端求极限得：

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-1}^{n}[x(k+1)-x(k)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[x(0)-0+x(1)-x(0)+\ldots+x(n+1)-x(n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[x(n+1)]=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

9. 序列的卷积：设 $w(n)=x(n)*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$，

则：$W(z)=ZT[x(n)*y(n)]=X(z)\cdot Y(z)$

$$\max(R_{x-},R_{y-})<|Z|<\min(R_{x+},R_{y+})$$

证明：$W(z)=ZT[x(n)*y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)]z^{-n}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)]z^{-n}$$

令 $m=n-k$ ，则：

$$W(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}y(m)z^{-n}=X(z)\cdot Y(z)$$

10. 复卷积定理：

设$w(n)=x(n)\cdot y(n)$, $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|Z|<R_{x+}$

$Y(z)=ZT[y(n)], R_{y-}<|Z|<R_{y+}$ ；则：

$$W(z)=ZT[x(n)y(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}dv$$

其 $R_{x-}R_{y-}<|Z|<R_{x+}R_{y+}$

式中c是v平面收敛域中任一条环绕原点的逆时针方向的闭合曲线，v平面的收敛域为：；

$$\max[\frac{|z|}{R_{x+}},R_{y-}]<|v|<\min[\frac{|z|}{R_{x-}},R_{y+}]$$

证明：$W(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(v)v^{n-1}z^{-n}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(v)v^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(\frac{z}{v})^{-n}]dv$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}dv$$ —复卷积公式

其中：c是$X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}$在v平面收敛域中的围线，$\{v_k\}$是c所包含的全部极点。$W(z)$在Z平面中的收敛域和$X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}$在v平面中的收敛域为：

$X(z)$ $R_{x-}<|Z|<R_{x+}$ $Y(z)$ $R_{y-}<|Z|<R_{y+}$

与之对应： $X(\frac{z}{v})$：$R_{x-} < |\frac{z}{v}| < R_{x+}$ …(2.6d)

$Y(v)$：$R_{y-} < |v| < R_{y+}$ …(2.6e)

合并(2.6d)式和(2.6e)式得 $W(z)$在Z平面的收敛域为：

$$R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+}$$ ；

将(2.6d)式变成倒数形式，得：

$$\frac{|z|}{R_{x+}} < |v| < \frac{|z|}{R_{x-}} \quad \text{…(2.6f)}$$

由(2.6e)式和(2.6f)得 $X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}$在v平面中的收敛域为：

$$\max[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}] < |v| < \min[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}]$$

例2.6.8：已知$x(n)$和 $y(n)$的ZT如下，用复卷积公式求

ZT[$x(n)\cdot y(n)$]。$X(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}},|z|>0.5$ ， $Y(z)=\dfrac{1}{1-2z},|z|<0.5$

解：由复卷积公式得：

$$ZT[x(n)y(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z}{v(v-0.5)(v-2z)}dv$$

v平面极点： $v=0,v=0.5,v=2z$ ，

$X(z)$收敛域为： $0.5<|z|\leq\infty$

$Y(z)$收敛域为： $0\leq|z|\leq 0.5$

所以v平面收敛域为：$\max[0,0]<|v|<\min[2|z|,0.5]$ ，

即： $\max[\frac{|z|}{R_{x+}},R_{y-}]<|v|<\min[\frac{|z|}{R_{x-}},R_{y+}]$

无论z取何值，v平面收敛域内只有一个极点 $v=0$，

则：

$$ZT[x(n)y(n)]=\mathrm{Res}[X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1},0]=[\frac{z}{z-0.5v}\cdot\frac{1}{1-2v}]|_{v=0}=1$$

收敛域为： $R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$

即： $ZT[x(n)y(n)]=1$

$$0\leq|z|\leq\infty$$

11.Parseval公式：

设 $X(z) = ZT[x(n)], R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

$$Y(z) = ZT[y(n)], R_{y-} < |Z| < R_{y+}$$

且：$R_{x-}R_{y-} < 1 < R_{x+}R_{y+}$

则：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$

式中c是 $X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}$ 收敛域中环绕逆时针方向的围线，v平面的收敛域由下式确定：

$$\max[\frac{1}{R_{y+}}, R_{x-}] < |v| < \min[\frac{|z|}{R_{y-}}, R_{x+}]$$

证明：设 $w(n)=x(n)y^*(n)$，应用复序列的共轭ZT的性质和复卷积公式得：

$$W(z)=ZT[x(n)y^*(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*(\frac{z^*}{v^*})v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{y-}<|Z|<R_{x+}R_{y+}$$

$\because$已经假设$X(z)$与 $Y(z)$的公共收敛域包括单位圆，

即：$R_{x-}R_{y-}<1<R_{x+}R_{y+}$

$\therefore$ $W(z)$在单位圆上收敛，则：

$$W(z)|_{z=1}=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$$

又因： $W(z)|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)$

$$\therefore\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$$

如 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 在单位圆上收敛，则围线c为单位圆。

令 $v=e^{j\omega}$，$\therefore\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\oint_c X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

当 $x(n)=y(n)$ 时，有：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

Parseval公式的物理意义：在时域中对序列求能量与在频域中对频谱求能量是一致的。

§2.7 系统函数 (System Function)

- 2.7.1 定义

①设 $x(n), y(n)$和 $h(n)$分别是线性非移变系统的输入、输出和单位取样响应，$X(z), Y(z)$和 $H(z)$ 分别表示其对应的Z变换。则：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \quad \ldots(2.7a)$$

表示该系统的系统函数。

②设一个系统的输入输出满足下列差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

则该系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \quad \ldots(2.7b)$$

式中和分别表示在Z平面上的极点和零点。

注意：系统函数由系统本身的结构决定，与系统的输入输出无关。

• 2.7.2 系统稳定性与系统函数的关系

线性非移变系统稳定的充要条件是：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

而 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$ ，

如果$h(n)$的ZT存在，则上式右边的级数绝对收敛：

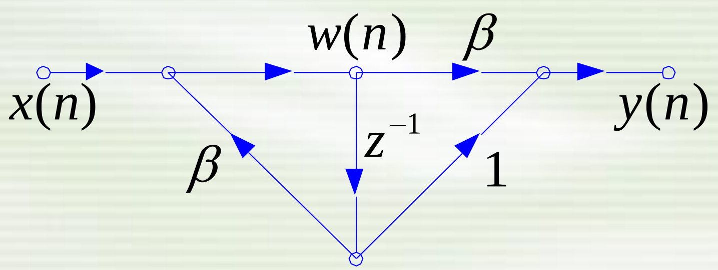
即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)\cdot z^{-n}|<\infty$

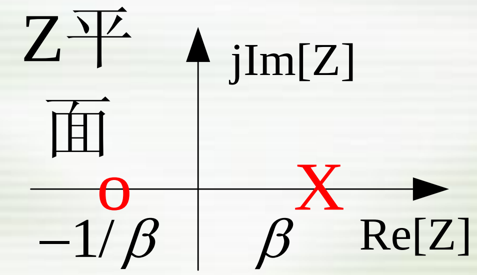
当 $|z|=1$ 时，上式变成：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

如果系统函数的收敛域包括单位圆，则系统稳定；反之亦然。

请考虑：一个稳定的因果系统的系统函数 $H(z)$的极点应该怎样分布？

例2.7.1：如图所示表示一个因果的线性非移变系统，求该系统的系统函数 $H(z)$ 并画出极零点图；如果该系统是稳定的，求 的取值范围。





解：如图，得：
$$\begin{cases} w(n)=x(n)+\beta\cdot w(n-1) \\ y(n)=\beta\cdot w(n)+w(n-1) \end{cases}$$

对上式两边进行ZT得：
$$\begin{cases} W(z)(1-\beta\cdot z^{-1})=X(z) \\ Y(z)=(\beta+z^{-1})W(z) \end{cases}$$

$$\therefore H(z)=\frac{z^{-1}+\beta}{1-\beta\cdot z^{-1}}$$ 极点：$z=\beta$；

如果该系统是稳定的，则：$\beta<1$ 。

- **2.7.3 系统的频率响应**

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

如果系统是稳定的，令 $z=e^{j\omega}$，代入系统函数$H(z)$，

得： $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

- **2.7.4 系统极零点对系统频率响应的影响**

由式(2.7b)得：
$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

式中，$A=b_0/a_0$，c_r 是$H(z)$的零点，d_k 是其极点。

A参数影响传输函数的幅度大小，影响系统特性的是零点 c_r 和极点 d_k 的分布。

将上式分子分母均乘以 z^{N+M} ，得到：

$$H(z) = Az^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^{M}(z-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

设系统稳定，将 $z=e^{j\omega}$ 代入上式，得到传输函数：

$$H(e^{j\omega}) = A\frac{\prod_{r=1}^{N}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{r=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)}$$

设N=M，由上式得：

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)} \quad \text{…(2.7c)}$$

在Z平面上，$e^{j\omega}-c_r$ 用一根由零点 c_r 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点B的向量 $\overrightarrow{c_r B}$ 表示，

同样，$e^{j\omega}-d_r$ 用由极点 d_r 指向 $e^{j\omega}$ 点B的向量表示，即：

$$\overrightarrow{c_r B}=e^{j\omega}-c_r \qquad \overrightarrow{d_r B}=e^{j\omega}-d_r$$

$\overrightarrow{c_r B}$ 和 $\overrightarrow{d_r B}$ 分别称为零点矢量和极点矢量，用极坐标表示为：

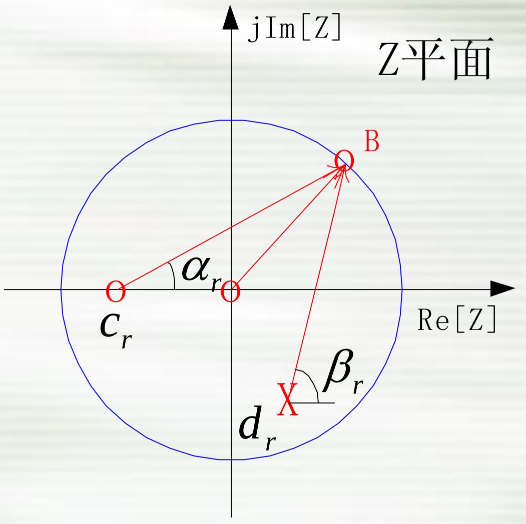
$$\overrightarrow{c_r B}=c_r B e^{j\alpha_r} \qquad \overrightarrow{d_r B}=d_r B e^{j\beta_r}$$

将 $\overrightarrow{c_r B}$ 和 $\overrightarrow{d_r B}$ 代入式(2.7c)得：

$$H(e^{j\omega})=A\frac{\prod_{r=1}^{N}\overrightarrow{c_r B}}{\prod_{r=1}^{N}\overrightarrow{d_r B}}=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = A\frac{\prod_{r=1}^{N} c_r B}{\prod_{r=1}^{N} d_r B} \qquad \ldots(2.7d)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=0}^{N}\alpha_r - \sum_{r=0}^{N}\beta_r \qquad \ldots(2.7e)$$



系统的频率特性如右图所示：

系统的频率特性由式（2.7d）和（2.7e）确定。当向量的终点B转到极点附近时，极点矢量长度最短，峰值愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为 ∞，系统不稳定；当B点转到零点附近，零点矢量长度变短，幅度特性特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值愈接近零。当零点位于单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。

§ 2.8 全通系统与最小相位系统
(All Pass System and Minimum Phase System)

2.8.1 全通系统

1、全通系统（Allpass System）

- 全通系统是幅度响应 $\left|H(e^{j\omega})\right| \equiv C$ （C为常数）的系统。
- 应用范围：滤波器结构设计、多速率信号处理、滤波器组和信道相位均衡等。

- 系统函数： $H_{ap}(z)=\dfrac{z^{-1}-a^{*}}{1-az^{-1}}$ （一阶系统）

对于单位取样为实系数的多阶系统，有：

$$H_{ap}(z)=A\prod^{M_c}\frac{z^{-1}-d_k}{1-d_kz^{-1}}\prod^{M_r}\frac{(z^{-1}-e_k^{*})(z^{-1}-e_k)}{(1-e_kz^{-1})(1-e_k^{*}z^{-1})}$$

其中：

$$|d_k|<1,|e_k|<1$$

2、全通系统的特点

(1) $H_{ap}(z)$ 的每个极点 z_p 都有一个与之配对的共轭倒数零点 $z_o=\frac{1}{z_p^*}$ 。

(2)一阶全通系统：

$$H_{ap}(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}$$

令：$a=re^{j\theta}$，有：

$$H_{ap}(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}=e^{-j\omega}\frac{1-re^{-j\theta}e^{j\omega}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$

$$= e^{-j\omega}\frac{1-re^{j(\omega-\theta)}}{1-re^{-j(\omega-\theta)}} = e^{-j\omega}\frac{1-r\cos(\omega-\theta)-jr\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)+jr\sin(\omega-\theta)}$$

- 其相位函数为：

$$\phi(\omega) = -\omega - 2arctg\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]$$

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{-(1-r^2)}{[1-r\cos(\omega-\theta)]^2 + r^2\sin^2(\omega-\theta)} < 0$$

- 即：一阶全通滤波器的相位响应 $\phi(\omega)$ 是单调递减的。

- 2.8.2 最小相位系统

1、最小相位系统、最大相位系统

（1）最小相位系统：系统函数 $H_{\min}(z)$ 所有零、极点都在单位圆内的系统。

（2）最小相位序列：序列z变换的所有零、极点都在单位圆内的序列。

（3）最大相位系统：系统函数 $H_{\max}(z)$所有零点都在单位圆外的系统。

（4）对最小相位系统，存在一个稳定的因果逆系统 $H_{\min}^{-1}(z)$，有：

$$H_{\min}^{-1}(z)H_{\min}(z)=1$$

2、全通系统与最小相位系统级联

- 任何系统都可以表示成一个最小相位系统和一个全通系统的级联，即：

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

证明：$H(z)=H_1(z)(z^{-1}-d^*)\quad |d|<1$，一个零点在单位园外。

$$=H_1(z)(1-dz^{-1})\left[\frac{z^{-1}-d^*}{1-dz^{-1}}\right]$$

$$=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

上式中：$H_1(z)$ 和 $H_1(z)(1-dz^{-1})$ 为最小相位系统，

$\left[\dfrac{z^{-1}-d^*}{1-dz^{-1}}\right]$ 为全通系统。

2.18.3、相位延迟和群延迟

- 对数字滤波器，有： $H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\phi(\omega)}$ 。

1、相位延迟（Phase delay）

- 数字滤波器的相位延迟定义为： $T_p(\omega)=-\dfrac{\phi(\omega)}{\omega}$ ，表示输入是频率为 ω 的单一正弦波时的延迟时间。

例：设信号 $x(n)$ 经过系统后输出为：$y(n)=x(n-m)$

则有：

$$H(e^{j\omega})=e^{j\phi(\omega)}=e^{-j\omega m}$$

信号的延迟时间为：

$$-\frac{\phi(\omega)}{\omega}=m$$

2、群延迟（Group Delay）

数字滤波器的群延迟或包络延迟定义为：$T_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$，

表示某一频率 ω 邻域内（窄带信号）的延迟性质，或者说反映了某一频率的包络的延迟时间。

本章结束

谢谢大家！