



# **第二章 离散时间信号和系统**

**( The Discrete Time Signal&System )**



# 主要内容:

§ 2.1 引言

§ 2.2 离散时间信号—数字序列

§ 2.3 离散时间系统

§ 2.4 离散时间信号和系统的频域描述

§ 2.5 连续时间信号的取样

§ 2.6 Z变换

§ 2.7 系统函数

§ 2.8 全通系统与最小相位系统



## § 2.1 引言 (Introduction)

### • 2.1.1 信号分类

连续信号和离散信号；

模拟信号和数字信号；

确定性信号和随机信号。

时 间 幅 度	连 续	离 散
连 续	模 拟	抽 样
离 散	量 化	数 字

信号：转载信号的函数。

数学上表示为一个或多个自变量的函数。



## • 2.1.2 数字信号处理的范围

对幅度和时间都离散的信号进行变换。

本课程只讨论抽样信号处理。

## • 2.1.3 几个基本概念

连续时间系统、离散时间系统；

模拟系统、数字系统。



## § 2.2 离散时间信号—序列 (Sequence)

- 2.2.1 离散时间信号的表示

1. 数字表示

如果一个序列  $x$  的第  $n$  个数字表示为  $x(n)$ ，则全部信号序列表示为：

$$x = \{x(n)\}, -\infty < n < +\infty$$

其中  $n$  为整数，对于  $n$  的非整数点， $x(n)$  没有定义。



为方便，将其称为序列  $x(n)$ ，如：

$$x(n) = \{2, 3, 4, 5, 6.3, 7.9\}; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x(n) = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 6.3, 7.9; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, others \end{cases}$$

- 注意：

①有的书上也表示为  $x_n$ ，注意n的取值范围。





②当采用5bits量化时，取样信号和数字信号的区别如下：

取样信号：

$$x(n) = \begin{cases} 0.3767, 0.2604, 0.1721, 0.6883, 0.5809, 0.2904, & n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

数字信号：

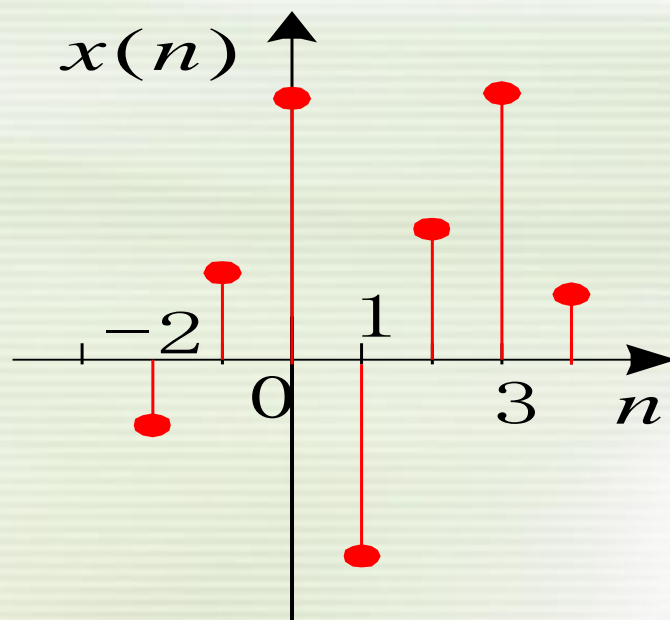
$$x(n) = \begin{cases} 0.375, 0.25, 0.125, 0.6875, 0.5625, 0.25; & n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



## 2. 图形表示

$$x(n) = \begin{cases} -0.5, 0.75, 2, -1.5, 1, 2, 0.5, & n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

序列图形如下图所示：







## •2.2.2 自变量n的变换

(1) 反转:  $x(n) \rightarrow x(-n)$

(2) 移位:  $x(n) \rightarrow x(n + n_0)$

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$

其中  $n, n_0$  均为整数。

## •2.2.3 常见序列

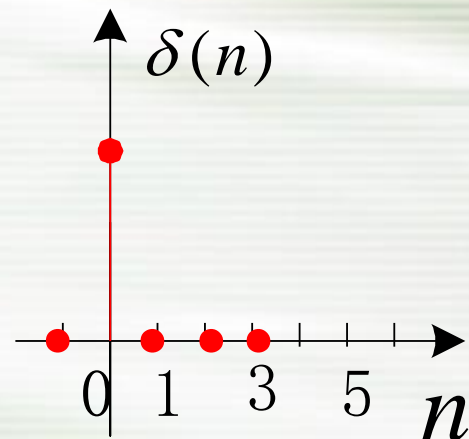
### 1. 单位取样序列 (Unit-sampling sequence)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$$



$\delta(n)$ 的波形如右图所示：



- 注意：

①  $\delta(n)$ 是一个确定的物理量， $\delta(t)$  而是一种数学抽象

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

②  $x(n)\delta(n) = x(0)$                        $x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)$

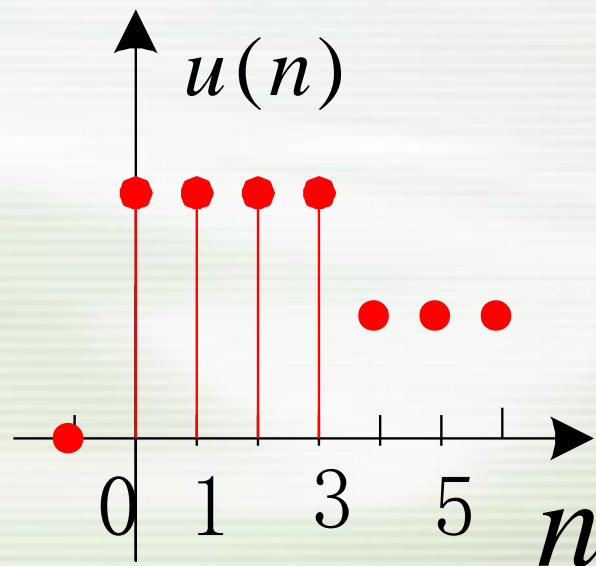
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$



## 2. 单位阶跃序列 (Unit-step sequence)

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

其波形如右图所示:



• 注意:

①  $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$



$$\textcircled{2} \quad u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

(令 $m=n-k$ 可完成两式之间的推导)

$$\textcircled{3} \quad u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, t < 0 \\ \frac{1}{2}, t = 0 \\ 0, t > 0 \end{cases}$$

请考虑:

$\delta(-n)$ 、 $\delta(3-n)$ 、 $\delta(-3-n)$ 、 $u(-n)$ 、 $u(3-n)$ 和  $u(-3-n)$

以上各种序列的图形该如何表示?

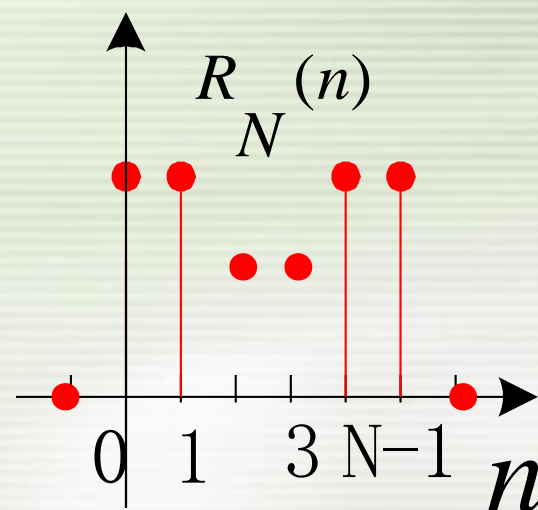


### 3. 矩形序列 (Rectangle sequence)

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N)$$

在  $(0, N-1)$  区间的  $N$  个值为 1，  
其它整数点为 0；  
其波形如右图所示：





#### 4. 实指数序列 (Real exponential sequence)

$$x(n) = a^n$$

如果  $n < 0$ ,  $x(n) = 0$  则有:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$





## 5. 复指数序列和正弦序列

(Complex exponential sequence)

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} = e^{\sigma n} \cos(\omega n) + j e^{\sigma n} \sin(\omega n)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad x(n) = A \sin(\omega n + \phi)$$

其中：  $A$  — 幅度       $\phi$  — 初相，单位为弧度(rad)；

$\omega$  — 数字域频率，单位为弧度(rad)；

比较：  $x_a(t) = A \sin(\Omega t + \phi) = A \sin(2\pi f t + \phi)$

其中：  $\Omega = 2\pi f$  模拟域频率，单位为rad/s；

$\omega = \Omega T$ ， $T$ 为采样周期。



- 注意:

$$\textcircled{1} \quad e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi n)n} \quad \cos(\omega n) = \cos((\omega + 2\pi n)n)$$

$$e^{j\Omega t} \neq e^{j(\Omega+2\pi n)t} \quad \cos(\Omega t) \neq \cos((\Omega + 2\pi n)t)$$

即：正弦序列和复指数序列对  $\omega$  变化以为  $2\pi$  周期。

在数字域考虑问题时，取数字频率的主值区间为：

$$[-\pi, \pi] \quad \text{或者} \quad [0, 2\pi]$$

$[-\pi, \pi]$  用于离散时间信号和系统的FT

$[0, 2\pi]$  用于DFT



- ② 当  $\omega = 0$  时,  $\cos(\omega n)$  变化最慢 (不变化) ;  
当  $\omega = \pi$  时,  $\cos(\omega n)$  变化最快。

在DSP中, 在主值区间上, 将  $\omega = 0$  附近称为数字低频; 而将  $\omega = \pi$  附近称为数字高频。

这一特点与模拟正弦信号  $x_a(t) = \cos(\Omega t)$  截然不同,  $\Omega$  越大,  $\cos(\Omega t)$  变化越快, 注意其中  $t$  连续取值, 而  $n$  只取整数值。



## • 2.2.4 周期序列 (Periodic sequence)

如果对所有的 $n$ 序列都满足:  $x(n) = x(n + N)$

其中 $N$ 为整数, 则称序列 $x(n)$ 为周期序列, 且最小周期为 $N$ , 记为  $\tilde{x}(n)$ 。

For  $\sigma = 0$ 的复指数序列和正弦序列:

①当  $\frac{2\pi}{\omega} = \text{整数}$  时, 序列为周期性的, 且周期为  $\frac{2\pi}{\omega}$

如:  $x(n) = A \cos(\frac{\pi}{4}n), N = 8$



② 当  $\frac{2\pi}{\omega}$  = 有理数时，序列为周期的，且周期大于  $\frac{2\pi}{\omega}$

如：  $x(n) = A \sin(\frac{3\pi}{7}n + \phi), N = 14$

③ 当  $\frac{2\pi}{\omega}$  = 无理数时，序列为非周期的。

如：  $x(n) = A \sin(\frac{3}{7}n + \phi)$

### • 2.2.5 序列的能量 (Energy of sequence)

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$





## • 2.2.6 序列间的运算

对于两个序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ , 有:

$$x(n) + y(n) = \{x(n) + y(n)\} , \text{ 和}$$

$$x(n) \cdot y(n) = \{x(n) \cdot y(n)\} , \text{ 积}$$

$$\alpha x(n) = \{\alpha x(n)\} , \text{ 与数 } \alpha \text{ 相乘}$$

如果  $y(n) = x(n - n_0)$ , 则称序列 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 的延迟序列或移位序列 (式中  $n_0$  为整数) 。





## • 2.2.7 序列的加权表示

$$\because x(n) \cdot \delta(n) = x(0) = x(0) \cdot \delta(n)$$

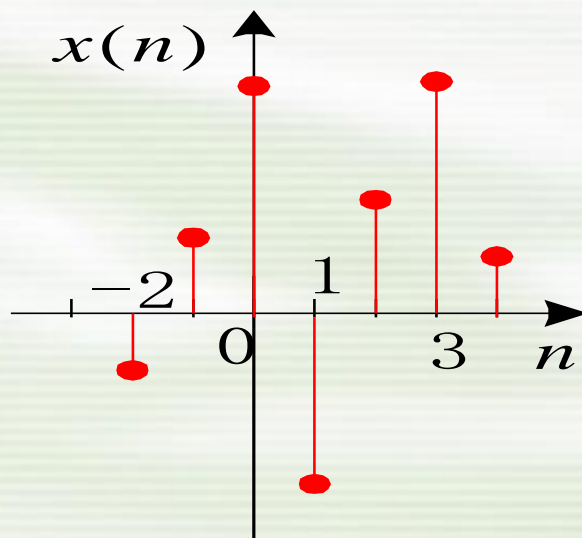
$$x(n) \cdot \delta(n - n_0) = x(n_0) = x(n_0) \cdot \delta(n - n_0)$$

$$\therefore x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n - k)$$

由于任意序列皆可以表示成各延迟单位取样序列的幅度加权和，因此，讨论系统的特性时只需讨论系统在单位取样序列作用下的响应即可。



例2.2.1 如下图所示的序列用序列  $\delta(n)$  表示则为:



$$x(n) = -0.5\delta(n+2) + 0.75\delta(n+1) + 2\delta(n) - 1.5\delta(n-1) \\ + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 0.5\delta(n-4)$$

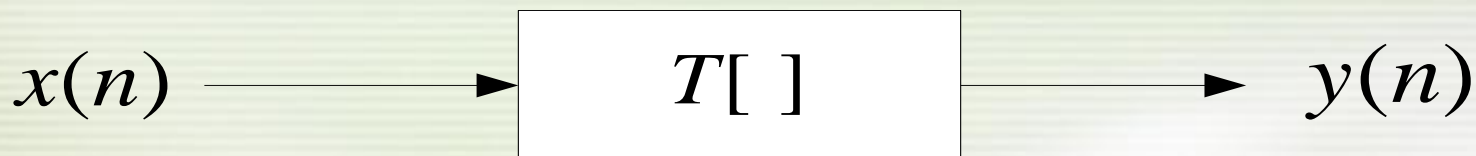


## § 2.3 离散时间系统 (Discrete Time System)

### • 2.3.1 线性非移变系统

(Linear shift-invariant systems)

1. 对于系统  $T[ ]$ ，把系统定义为将输入序列映射成输出序列的唯一变换，表示为： $y(n) = T[x(n)]$ 。





## 2. 线性系统 (Linear System) :

设  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$  分别是系统对  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的响应, 则:

线性系统满足:

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= a \cdot T[x_1(n)] + b \cdot T[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

(a, b 是任意常数)

## 3. 非移变系统 (Shift-invariant System) :

如果  $y(n) = T[x(n)]$ , 且  $y(n-k) = T[x(n-k)]$   
 $k$  为整数, 则  $T[ ]$  为非移变系统。



例2.3.1 证明  $y(n) = T[x(n)] = nx(n)$  不是非移变系统。

证明：

由于  $T[x(n-k)] = nx(n-k)$

和  $y(n-k) = (n-k)x(n-k)$

所以  $T[x(n-k)] \neq y(n-k)$

故该系统不是非移变系统。



#### 4. 线性非移变系统:

①系统即满足线性条件，又满足非移变条件即为线性非移变系统。 设  $x(n)$  为线性非移变系统的输入， $y(n) = T[x(n)]$  ；

当输入为  $\delta(n)$  时， $h(n) = T[\delta(n)]$ —单位取样响应；

当输入为  $\delta(n-k)$  时，  $h(n-k) = T[\delta(n-k)]$

$$\because x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$





$$\begin{aligned}\therefore y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= x(n) * h(n)\end{aligned}$$

即：对线性非移变系统，输入和输出满足卷积关系。

②离散卷积运算步骤：折叠移位、相乘、相加。



例. 已知线性非移变系统的单位取样响应为:

$$h(n) = u(n) - u(n-4), \text{ 输入为: } x(n) = \begin{cases} n, 0 \leq n \leq 3 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

求输出  $y(n)$  。

解:  $\because y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

$$\therefore y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = 0, \text{ 如图2.3.1(a)所示;}$$

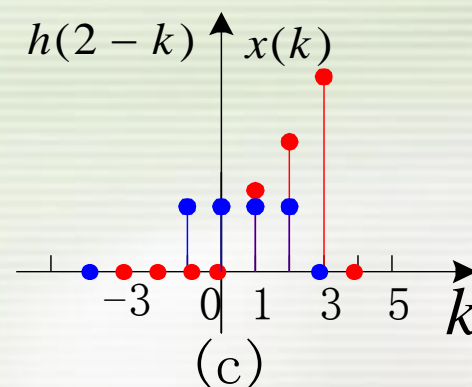
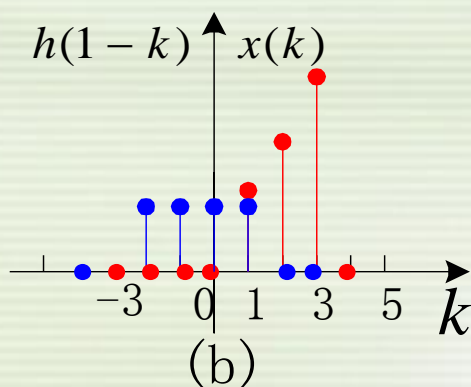
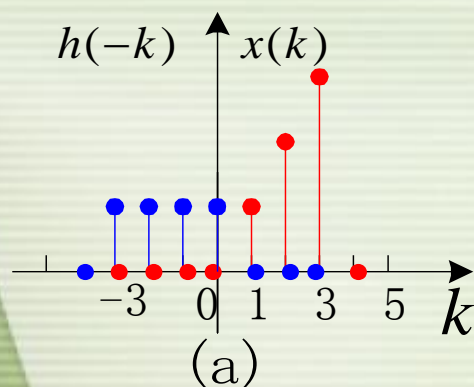
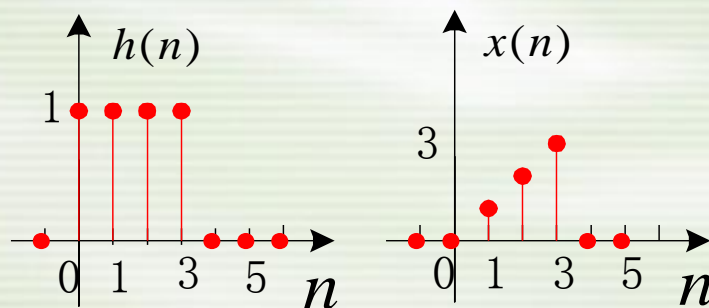
$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = 1, \text{ 如图2.3.1(b)所示;}$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = 3, \text{ 如图2.3.1(c)所示;}$$



$$y(n) = \begin{cases} 1, 3, 6, 6, 5, 3; n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

整个卷积过程如下图所示。





## 5. 离散卷积运算的基本规律:

①交换律

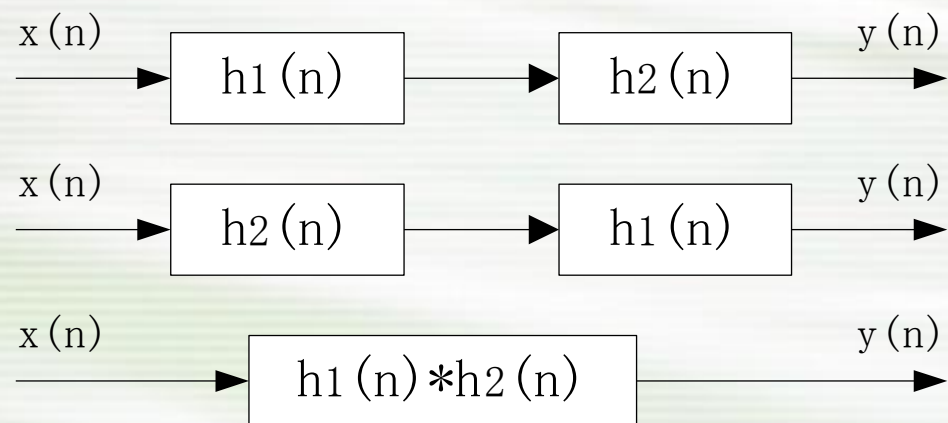
$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

②结合律

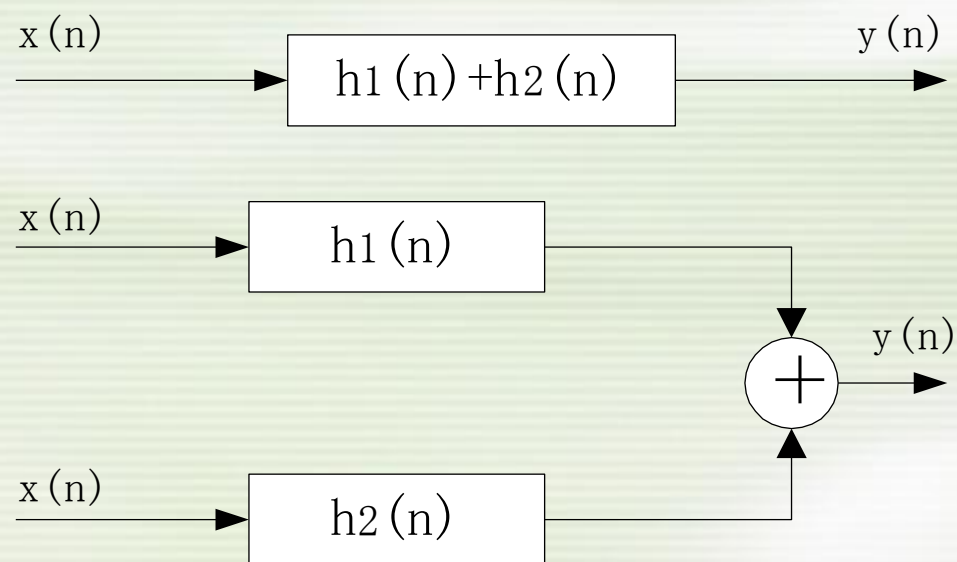
$$\begin{aligned} y(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

③分配律

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$



(a) 串联组合



(b) 并联组合



## • 2.3.2 系统的稳定性和因果性

(The Stability & Causality of System)

### 1. 稳定系统 (Stable System) :

① 对于一个有界的输入  $x(n)$ ，产生有界输出  $y(n)$  的系统。

即对于稳定系统，如果  $|x(n)| \leq M$  ( $M$  是常数)，  
则有： $|y(n)| < \infty$

例：判断系统  $y(n) = T[x(n)] = e^{x(n)}$  的稳定性？

解：设  $|x(n)| \leq M$ ，则： $|y(n)| = |e^{x(n)}| = e^{|M|} < \infty$ ，  
系统稳定。





②一个线性非移变系统稳定的充要条件是：其单位取样响应绝对可和，即：

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

证明：

a.充分性：设上式成立并设为一个有界输入序列，  
即： $|x(n)| \leq M$

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)| |h(k)| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \end{aligned}$$

$$\therefore |y(n)| < \infty$$



b.必要性：假设系统的单位取样响应不绝对可和，

即： 
$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$$

定义一个有界的输入：

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \neq 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases}$$

式中  $h^*(n)$  是  $h(n)$  的复共轭，

$$\therefore y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = S$$

$\therefore y(0)$  不是有界的。



## 2. 因果系统（Causal System）：

- ①输出的变化不会领先于输入的变化变化的系统。即：系统的输出值  $y(n)$  不取决于输入  $x(n)$  的将来值， $y(n)$  只与  $x(n)$  的现在值及过去值  $x(n-1), x(n-2), \dots$  等有关，与将来值  $x(n+1), x(n+2), \dots$  无关。

例：  
 $y(n) = T[x(n)] = x(n-1)$  是因果系统；  
 $y(n) = T[x(n)] = x(n+1)$  是非因果系统。

- ②一个线性非移变系统为因果系统的充要条件为：

$h(n) \equiv 0, n < 0$ ，应注意：系统的“稳定性”和“因果性”与系统的输入  $x(n)$  无关，而取决于系统本身的结构  $h(n)$ 。



例:

请判断系统  $T[x(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$  是否为:

①稳定系统, ②因果系统, ③线性系统, ④非时变系统?

解: ① **if**  $|x(n)| \leq M$  , **then**  $|T[x(n)]| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| \leq (2n_0 + 1) |M|$

则该系统为稳定系统。

②  $\because T[x(n)]$  取决于  $x(n)$  的未来值, 该系统不是因果系统;

$$\begin{aligned} \text{③ } \because T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} [ax_1(k) + bx_2(k)] \\ &= a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k) = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

则该系统为线性系统。

$$\text{④ } T[x(n-m)] = \sum_{k=n-m-n_0}^{n-m+n_0} x(k) = y(n-m)$$

则该系统为非移变系统。



### § 2.3.3 线性常系数差分方程

(Linear Constant-coefficient Difference Equations)

- 2.3.3.1 函数序列的差分描述
- 2.3.3.2 线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

- ① 线性非移变离散系统，输入和输出满足上述方程；
- ② 上述方程描述的系统不一定是因果的，假定（除非另作说明）在一般情况下，上述方程描述一个因果系统。





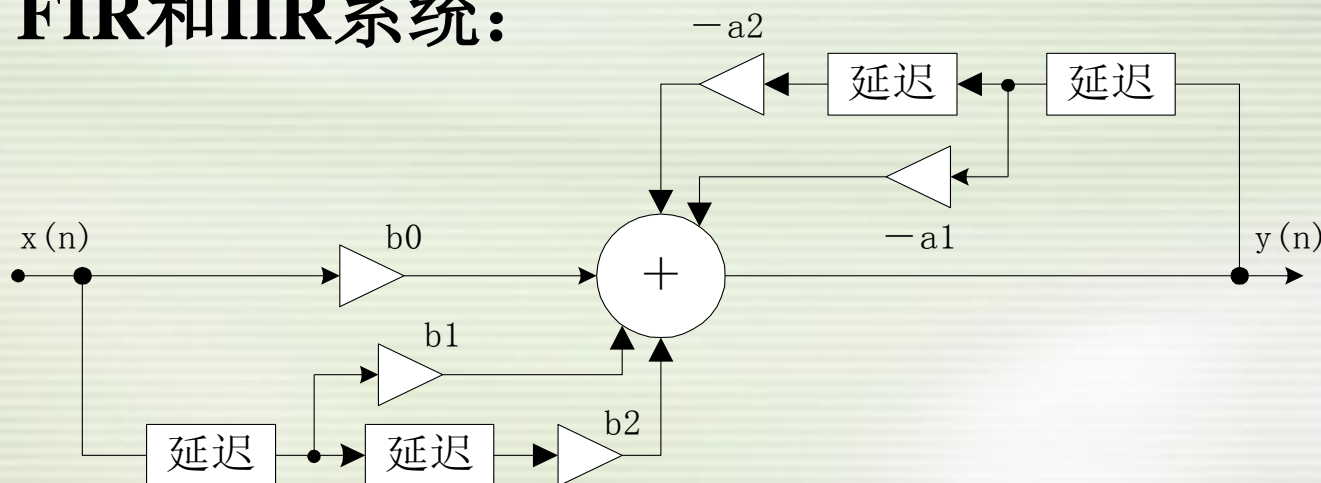
### • 2.3.3.3 FIR系统和IIR系统

(1) **FIR: Finite Impulse Response**(有限冲激响应);

**IIR: Infinite Impulse Response**(无限冲激响应);

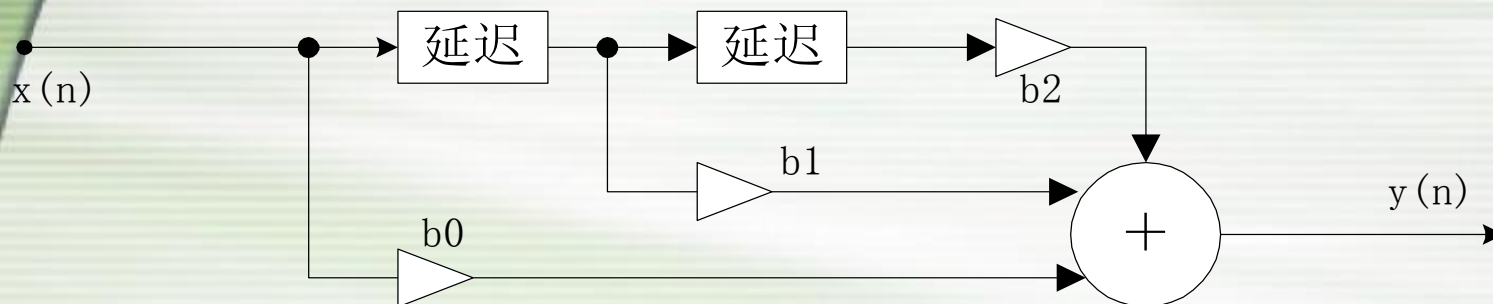
(2) 数字系统的表示: 差分方程、框图或流图、系统函数。

(3) **FIR和IIR系统:**



(a) 二阶IIR系统





(b) 二阶FIR系统

**例2.4.1：** 请写出上图所示系统(a)和(b)的差分方程。

**解：**

**二阶IIR系统：**  $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

**二阶FIR系统：**  $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$



## § 2.4 离散时间信号和系统的频域表示

(The Frequency Properties of The Discrete Time Signal & System)

### • 2.4.1 离散时间信号的Fourier变换

1. 连续时间信号的Fourier变换为：

$$\begin{cases} X(j\Omega) = FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = IFT[X(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

式中，表示角频率（rad/s）。



## 2. 离散时间信号的Fourier变换定义为:

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = IFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

在物理意义上,  $X(e^{j\omega})$  表示序列  $x(n)$  的频谱,  $\omega$  为数字域频率 (rad)。

注意:

a. 一般情况下,  $X(e^{j\omega})$  为复数, 故:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



$$X(\omega) = |X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] = \arctg\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right]$$

应注意取值范围

**b.**  $X(e^{j\omega})$  是以  $2\pi$  为周期的  $\omega$  的连续函数；而  $X(j\Omega)$  是角频率  $\Omega$  的非周期连续函数；

$$\because X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

**c.** 当  $x(n)$  为实序列时， $X(e^{j\omega})$  的幅值  $|X(e^{j\omega})|$  在区间  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  内是偶对称函数，相位  $\arg[X(e^{j\omega})]$  是奇对称函数。



证明:

因为  $|X(e^{j\omega})|$  关于  $\pi$  偶对称, 所以:  $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{j(2\pi-\omega)})|$

因为  $\arg[X(e^{j\omega})]$  关于  $\pi$  奇对称

所以:  $\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{j(2\pi-\omega)})]$

$$\because X^*(e^{j\omega}) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega})$$

$$\therefore X_R(e^{j\omega}) - jX_I(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) + jX_I(e^{-j\omega})$$

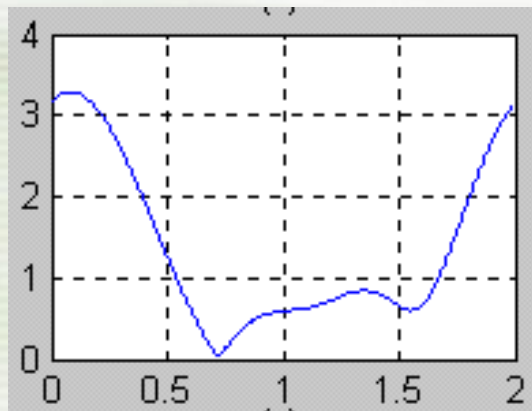
即:  $X_R(e^{j\omega})$  偶对称,  $X_I(e^{j\omega})$  奇对称。

所以  $x(n)$  为实序列时,  $[0, 2\pi]$  或  $[0, \pi]$  内的  $X(e^{j\omega})$  即代表其频率特性。

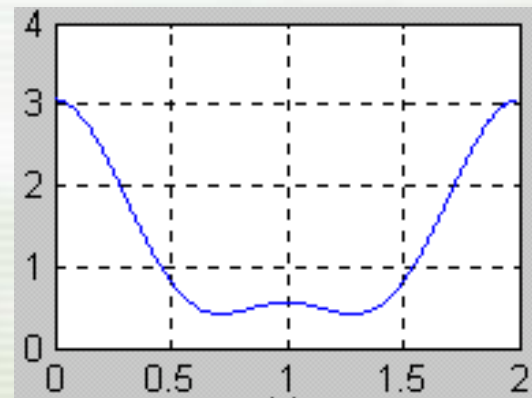




c. 当  $x(n)$  不为实序列时，上述结论不正确，如下图所示。



(a) 复序列的幅频特性



(b) 实序列的幅频特性

图(a)的序列为：
$$x(n) = \begin{cases} 1, 1, 0.75 + j0.5, 0.25 + j0.3, 0.0625; n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0; \text{others} \end{cases}$$

图(b)的序列为：
$$x(n) = \begin{cases} 1, 1, 0.75, 0.25, 0.0625; n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0; \text{others} \end{cases}$$





**e.**  $x(n)$  的FT存在的条件:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$  。

**f.**  $x(n)$  的FT  $X(e^{j\omega})$  代表信号的频域特性。

**g.** 从序列Fourier变换的公式可知: 离散信号

即可用时域形式  $x(n)$  表示, 也可用频域形

式  $X(e^{j\omega})$  表示。



例：求具有下列单位取样响应的系统频率响应。

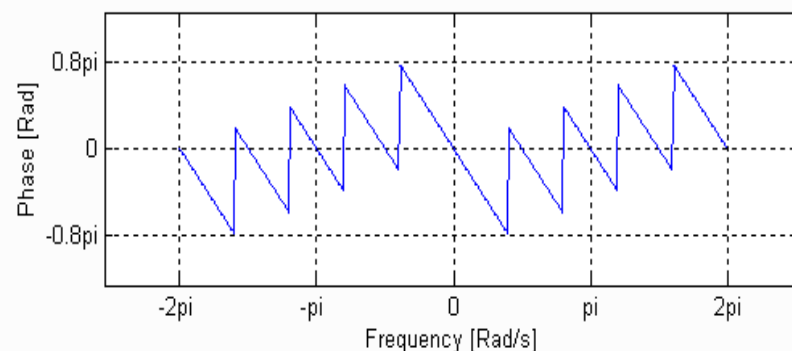
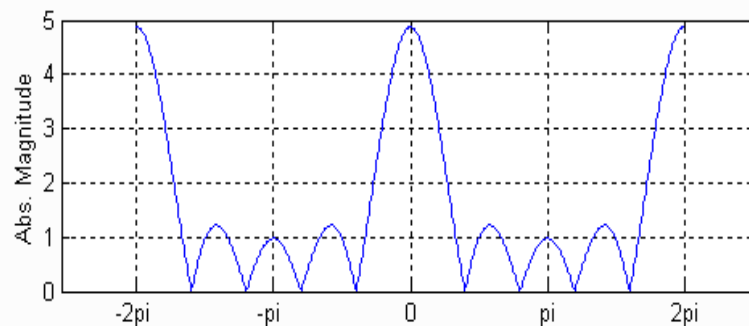
$$h(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, \text{ others} \end{cases}$$

解：右图画出的是  $N=5$  时， $H(e^{j\omega})$  的幅度和相位特性。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} \\ &= \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned}$$

注：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$





## • 2.4.2 离散时间信号的Fourier变换的性质

1. 线性：设  $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$ ,  $X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$ , 则

$$FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

2. 序列的移位：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ , 则

$$FT[x(n-k)] = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

3. 序列的调制：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ , 则

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$



4. 序列的折叠：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

5. 序列乘以  $n$ ：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[nx(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

6. 序列的复共轭：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$



7. 序列的卷积：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$  ,  $Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)]$

$w(n) = x(n) * y(n)$  , 则

$$W(e^{j\omega}) = FT[x(n) * y(n)] = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

8. 序列相乘：设  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$  ,  $Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)]$

$w(n) = x(n) \cdot y(n)$  , 则

$$W(e^{j\omega}) = FT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



## 9. 序列的FT的对称性:

- ①定义:  $x_e(n) = x_e^*(-n)$  共轭对称序列  
 $x_o(n) = -x_o^*(-n)$  共轭反对称序列

注意:

a. 变换区间  $-\infty < n < +\infty$

b. 以 原点 为对称点

c. 频域定义:  $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$  共轭对称函数  
 $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$  共轭反对称函数

d.  $x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$   $x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$   
 $x_{er}(n), x_{oi}(n)$  是偶序列,  $x_{or}(n), x_{ei}(n)$  是奇序列。





## ②序列分解:

**a.**  $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$  (任意长)

其中:  $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$        $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$

**b.**  $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

其中:  $x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$        $x_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$

**c.**  $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$

其中:  $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$



例： 已知序列  $x(n] = u(n)$ ，请画出  $x_o(n)$  和  $x_e(n)$  的图形？

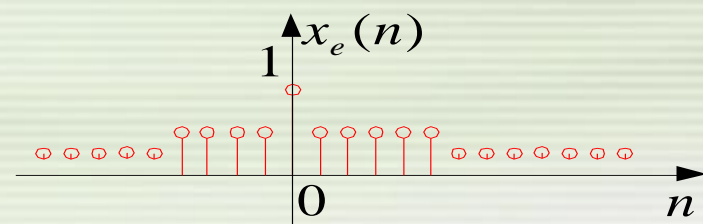
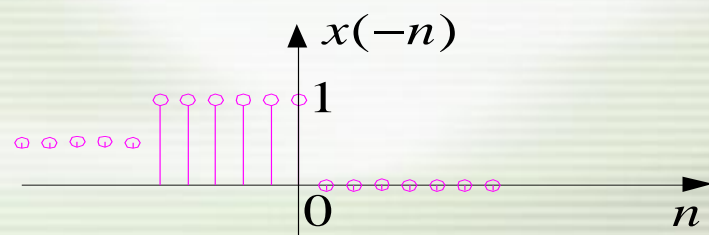
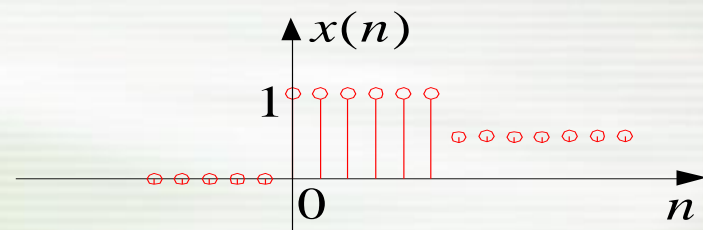
解：

当  $x(n)$  为实序列时，有：

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

其图形如右图所示。





### ③FT的共轭对称性:

**a.**  $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$FT[x_r(n)] = X_e(e^{j\omega})$$

$$FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega})$$

证明:

$$\because x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$\therefore FT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})$$



**b.**  $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$FT[x_e(n)] = X_R(e^{j\omega})$$

$$FT[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega})$$

证明:

$$\because x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$\therefore FT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

其中  $FT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)e^{j\omega n}]^*$

$$\underline{\underline{m = -n}} [\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m}]^* = X^*(e^{j\omega})$$



c. 当  $x(n)$  为实序列（任意长），且  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$  则：

①  $X(e^{j\omega})$  共轭对称，即：  $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$\because x_i(n) = 0 \quad \therefore FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega}) = 0$$

② 如  $x(n)$  为实偶序列，则  $X(e^{j\omega})$  为实偶函数，即：

$$\text{若 } x(n) = x(-n), \text{ 则 } X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\because x_o(n) = 0 \quad x_i(n) = 0$$

$$\therefore FT[x_o(n)] = jX_i(e^{j\omega}) = 0$$

$$FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega}) = 0$$



③ 如  $x(n)$  为实奇序列，则  $X(e^{j\omega})$  为纯虚奇对称函数，

即：若  $x(n) = -x(-n)$ ，则  $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$

④ 如果  $x(n)$  为实因果序列， $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), n > 0 \\ x_e(n), n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), n > 0 \\ x(0), n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$x_e(n) = \begin{cases} x(0), n = 0 \\ \frac{1}{2} x(n), n > 0 \\ \frac{1}{2} x(-n), n < 0 \end{cases} \quad x_o(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{1}{2} x(n), n > 0 \\ -\frac{1}{2} x(-n), n < 0 \end{cases}$$

注：  $x(n) \equiv 0, n < 0$





## • 2.4.3 离散时间系统的频率响应

### 1. 定义:

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ , 其中  $h(n)$  是系统的单位取样响应

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad \text{为系统的幅度响应}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = \arctg\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right] \quad \text{为系统的相位响应}$$



## 2. 正弦信号或复指数信号通过线性非移变系统:

设  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$  , 则有:

$$\begin{aligned}\because y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j\omega_0(n-m)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega_0 m}\end{aligned}$$

$$\therefore y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

其中  $H(e^{j\omega_0})$  是系统在  $\omega_0$  处的频率响应。



设  $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$  ,

如为  $h(n)$  实序列, 则系统对  $x(n)$  的响应为:

$$\begin{aligned} x(n) &= A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} (e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}) \\ &= \frac{A}{2} (e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} [e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0})] \\ &= \frac{A}{2} [e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H^*(e^{j\omega_0})] \end{aligned}$$

当  $h(n)$  为实序列时, 有:  $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$

$$\therefore y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

其中,  $\theta = \arg[H(e^{j\omega_0})]$  是系统在  $\omega_0$  处的相位响应。



例： 求一个因果的线性非移变系统，其系统的频率响

应为： $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} + \beta}{1 - \beta \cdot e^{-j\omega}}$ ， $\beta < 1$ 。求系统对下列输入信号

的响应： $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$ 。

解：该系统对输入  $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$  的响应为：

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

$$y(n) = |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| \cdot \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \theta)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\beta - j}{1 + j\beta} = -j$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 1 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

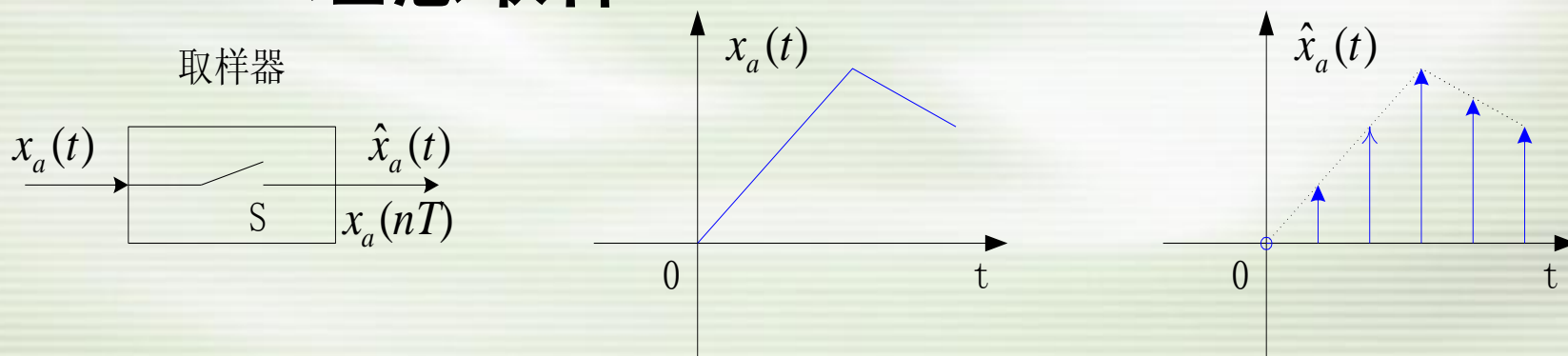
$$\therefore y(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})$$



## § 2.5 连续时间信号的取样

### (The Sampling of Continuous Time Signal)

#### • 2.5.1 理想取样



如上图所示，模拟信号  $x_a(t)$  经过取样器，其输出的取样信号为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$$

其中  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



注意：  $\hat{x}_a(t)$  是模拟信号，不是数字信号。

数字信号（序列） $x(n)$  是模拟信号  $x_a(t)$  经过理想取样才得到的，即：

$$x(n) = \{x_a(nT)\}, -\infty < n < \infty$$

$$= \{\cdots, x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \dots\}$$





## • 2.5.2 频谱周期延拓

模拟信号 $x_a(t)$ 经过取样得到取样信号 $\hat{x}_a(t)$ ，其频谱为：

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[x_a(t)p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega) * \delta(j\Omega - jr\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s)\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \quad \dots(2.6a)$$

$p(t)$ 的FT变换为： $P(j\Omega) = FT[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\Omega_s t}] = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(j\Omega - jr\Omega_s)$

即取样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 就是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$

的周期延拓，延拓周期的取样角频率是 $\Omega_s$ 。



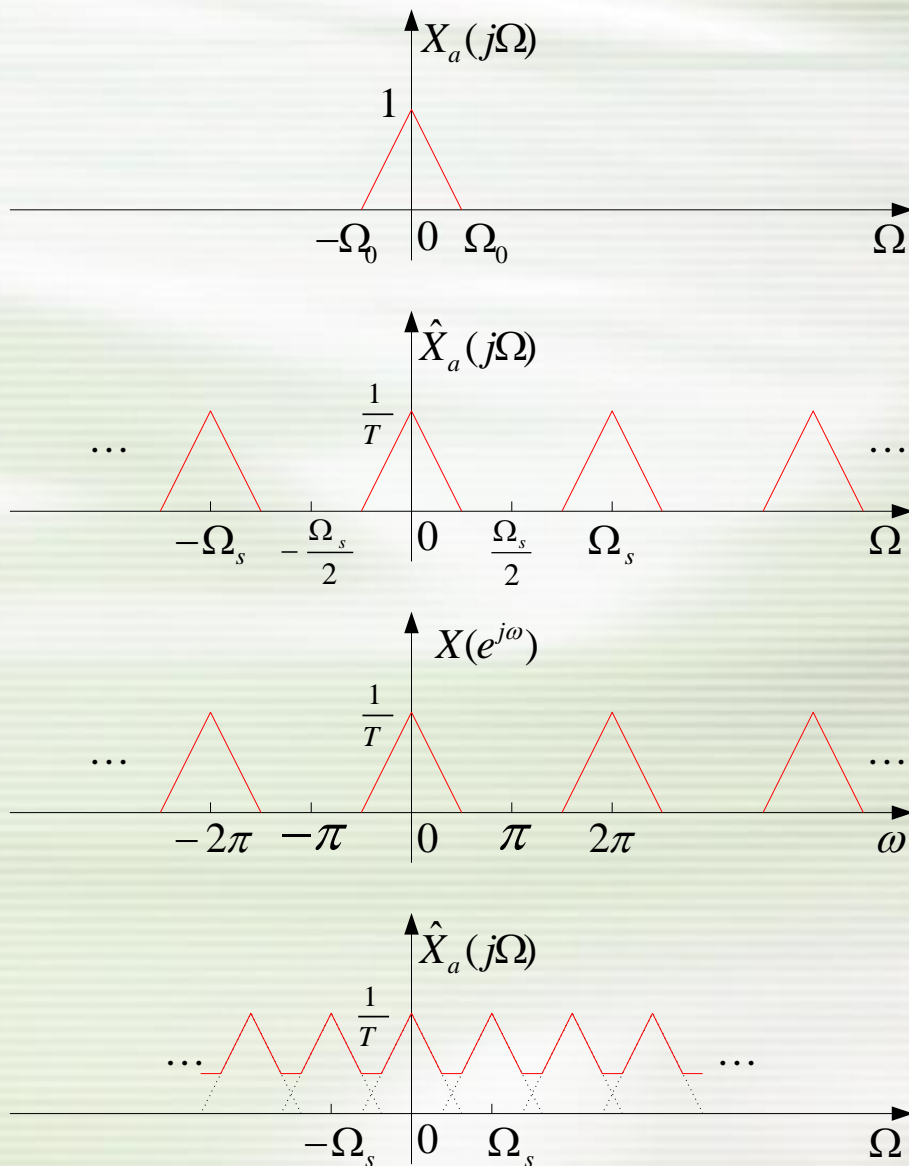
从右图可知，为使取样后的信号频谱不产生“混叠”，在信号的频带受限的情况下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即：

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0$$

其中：

$\Omega_s$  称为奈奎斯特频率；

$\Omega_s / 2$  称为折叠频率。





## • 2.5.3 频率归一化

频率归一化讨论离散时间信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega})$  和取样信号  $\hat{x}_a(t)$  的频谱  $\hat{X}_a(j\Omega)$  之间的关系。假设离散时间信号  $x(n)$  是模拟信号  $x_a(t)$  通过周期性取样得到的，即：

$$x(n) = x_a(nT) \quad \dots(2.6b)$$

取样信号  $\hat{x}_a(t)$  的频谱为：

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t)p(t)] \\ &= FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot FT[\delta(t - nT)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \quad \dots(2.6c) \end{aligned}$$



离散时间信号  $x(n)$  的FT变换为:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) \quad \dots(2.6d)$$

利用式(2.6b)的关系, 比较式(2.6c)和式(2.6d)得:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

将式(2.6a)代入上式得:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \quad \dots(2.6e)$$

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega}{T} - jr\frac{2\pi}{T}) \quad \dots(2.6f)$$



即在  $\omega = \Omega T$  的条件下，离散时间信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega})$  与取样信号  $\hat{x}_a(t)$  的频谱  $\hat{X}_a(j\Omega)$  相等。

由于  $\omega = \Omega T = \frac{2\pi f}{f_s}$  （ $f_s$  为取样频率）是  $f$  对  $f_s$  归一化的结果，因此可认为离散时间信号  $x(n)$  的频谱是取样信号的频谱经频率归一化后的结果。

综上所述：离散时间信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega})$  是模拟信号  $x_a(t)$  的频谱  $X_a(j\Omega)$  的周期延拓，且在频率轴上进行归一化（ $f$  对  $f_s$  归一化）。





## • 2.5.4 信号重建

如果取样信号的频谱不存在混叠，让取样信号通过一理想低通滤波器，其特性为： $H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_s / 2 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s / 2 \end{cases}$

其频谱特性为： $H(j\Omega)\hat{X}_a(j\Omega) = X_a(j\Omega), |\Omega| \leq \Omega_s / 2$

输出信号为：

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T \cdot X(e^{j\Omega T}) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \right] e^{j\Omega t} d\Omega \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \left[ \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega \right] \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot S_a(t-nT)\end{aligned}$$

其中， $S_a(t-nT) = \frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}$  为内插函数。

结论：取样信号通过理想LPF后，完全可以将信号还原，而不损失任何信息。由于插值的唯一性，还原的信号也是唯一的。



**例2.5.1:** 对  $x_a(t)$  进行理想取样, 取样间隔  $T = 0.25s$ , 得到  $\hat{x}_a(t)$ , 让  $\hat{x}_a(t)$  通过理想低通滤波器  $G(j\Omega)$ ,

$G(j\Omega)$  的表示式为:  $G(j\Omega) = \begin{cases} 0.25, & |\Omega| \leq 4\pi \\ 0, & 4\pi < |\Omega| \end{cases};$

设:  $x_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$ , 求:

(1) 写出  $\hat{x}_a(t)$  的表达式;

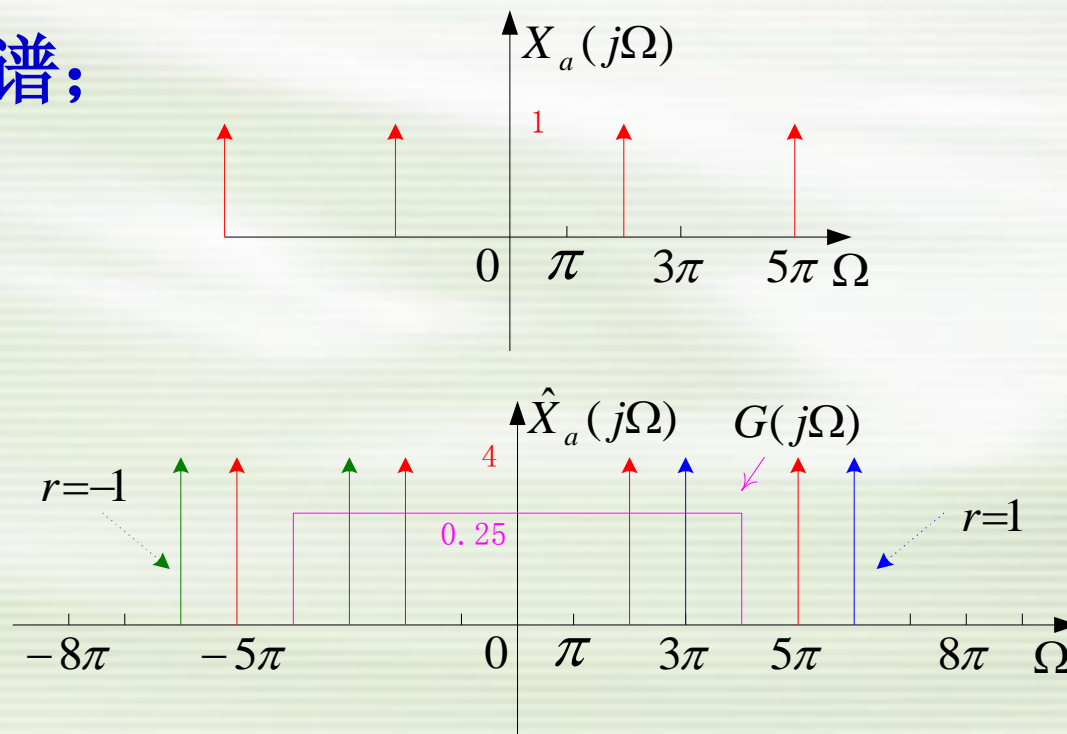
(2) 求出理想低通滤波器的输出信号  $y_a(t)$ 。

解: (1)  $\because \hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$

$$\therefore \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(2\pi nT) + \cos(5\pi nT)]\delta(t-nT)$$



(2) 如下图所示,  $X_a(j\Omega)$  为  $x_a(t)$  的频谱,  $\hat{X}_a(j\Omega)$  为  $\hat{x}_a(t)$  的频谱;



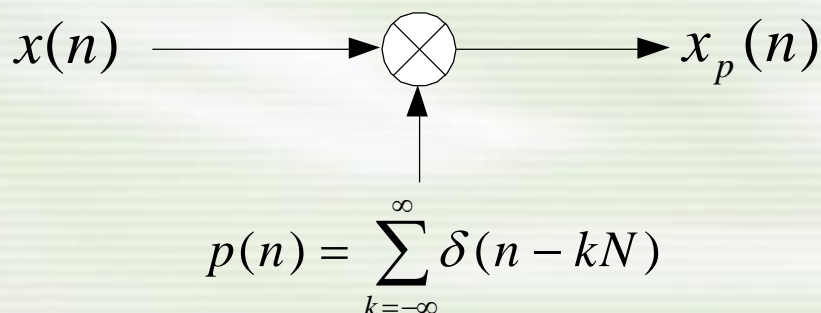
由图可知,  $\hat{x}_a(t)$  通过  $G(j\Omega)$  后其输出信号为:

$$y_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$$



- **2.5.5 离散时间信号的取样**  
**(The Sampling of Discrete Time Signal)**

### 1. 时域表示



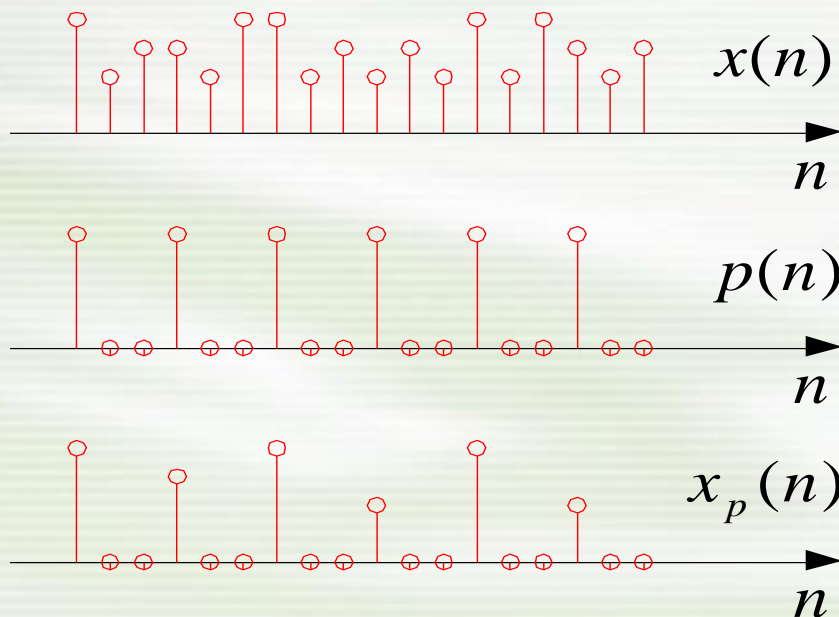
$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), n = kN, k : \text{int} \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

上式可以看成是一个信号调制的过程，即：

$$x_p(n) = x(n)p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(Nk)\delta(n - kN) \quad \circ$$



各信号的波形如下图所示：



## 2. 频域表示

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} P(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) X(\omega - \theta) d\theta$$

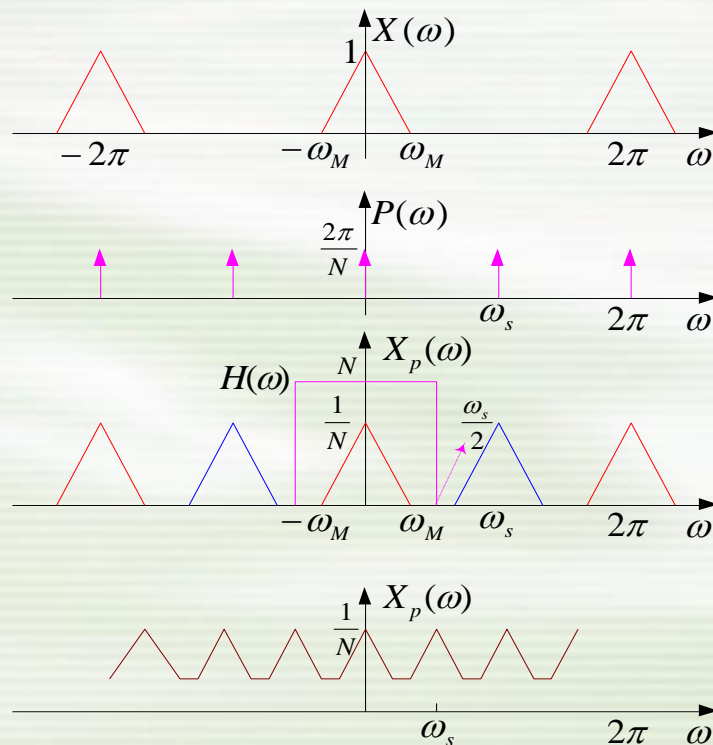
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad X_p(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega - k\omega_s)$$

式中  $\omega_s$  为取样频率，且  $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$ 。





下图为离散时间信号取样的频谱和离散时间信号的恢复：



结论：离散时间序列  $x_p(n)$  的FT  $X_p(\omega)$  是原序列  $x(n)$  的FT  $X(\omega)$  的周期延拓，周期为取样频率  $\omega_s$ 。因此，在离散时间信号取样中，为了不发生频谱混叠失真，取样频率应满足条件： $\omega_s \geq 2\omega_M$





### 3. 序列 $x(n)$ 的恢复

在序列 $x_p(n)$ 的频谱没有混叠失真的情况下，用一个增益为 $N$ ，截止频率大于 $\omega_M$ 而小于 $(\omega_s - \omega_M)$ 的低通滤波器，对 $x_p(n)$ 进行滤波，可恢复出原信号 $x(n)$ 。图中，取低通滤波器的截止频率为 $\omega_s/2$ ，其频率特性为

$$H(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$



相应的冲击响应为：

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} N \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{N}{\pi n} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} n\right)$$

恢复的序列为：

$$\begin{aligned} x_r(n) &= x_p(n) * h(n) \\ &= \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \delta(n - kN) \right] * \frac{N}{\pi n} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} n\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \frac{N}{\pi(n - kN)} \sin\left[\frac{\omega_s}{2} (n - kN)\right] \end{aligned}$$



## 2.5.6 离散时间信号的抽取与内插

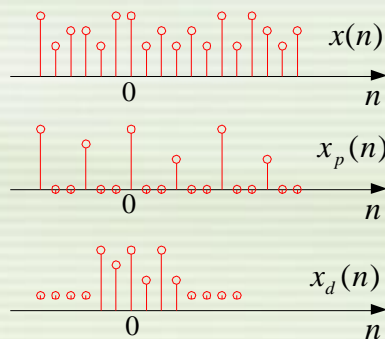
(The Decimation and Interpolation of the Discrete Time Signal)

1. 离散时间信号的抽取/减采样:  $x_d(n) = x(nN) = x_p(nN)$

$x_d(n)$ 的FT为: 
$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) e^{-j\omega n / N} = X_p\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

由于在N的整倍数点外的取样值均为0, 上式可写成:

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nN) e^{-j\omega n}$$

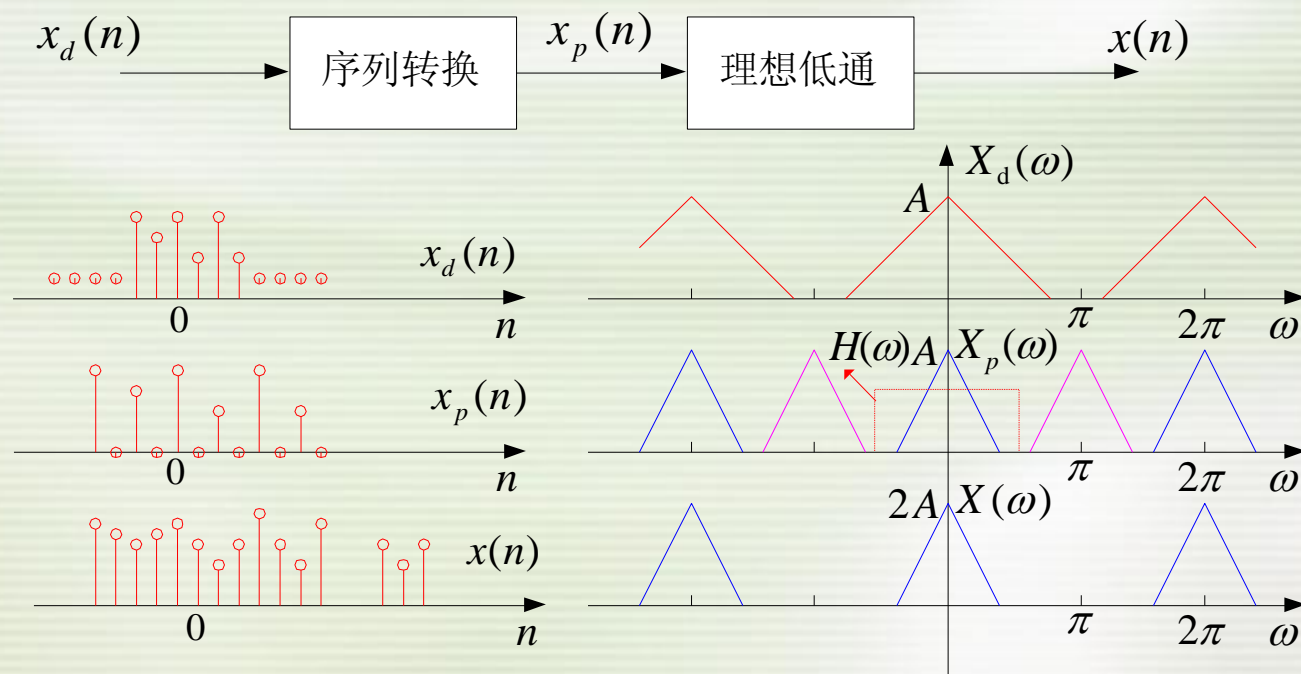


即: 取样序列和抽取序列的频谱只是频率尺度不同。

注意: 只有进行“过采样”, 才允许进一步降低采样率, 即进行“减采样”。



2.离散时间信号的内插(Interpolating)/增采样(Upsampling):  
抽取的逆过程。下图所示是对序列  $x_d(n)$  增采样得到  $x(n)$  的过程: 先在  $x_d(n)$  的每相邻两个序列之间插入  $N-1$  个零值, 得到序列  $x_p(n)$ , 然后用一个低通滤波器从  $x_p(n)$  得到  $x(n)$  内插后的序列。





## § 2.6 Z变换 (Z Transformation)

### • 2.6.1 Z变换的定义

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \dots(2.7a)$$

极坐标形式:  $X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \quad \dots(2.7b)$

式中 $z$ 为复变量, 即  $z = re^{j\omega}$ 。

式(2.7a)为双边ZT, 单边ZT为:

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \dots(2.7c)$$





注意：

a.  $X(z)$  是一个Laurent级数 $x(n)$  是系数，

一般情况下为有理分式： $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  。

ZT的收敛域：使  $X(z)$  收敛的 $z$ 值，

一般为某个环域： $R_{x-} < |z| < R_{x+}$  ；

ZT的零点：使  $X(z) = 0$  的 $z$ 值，

在 $z$ 平面上用 “o”表示；

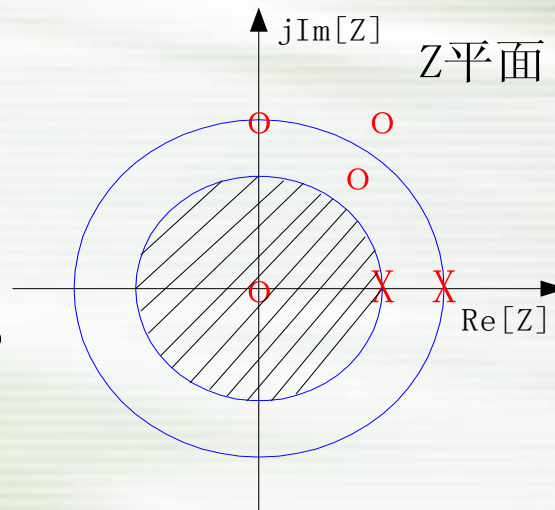
ZT的极点：使  $X(z) = \infty$  的 $z$ 值，

在 $z$ 平面上用 “ $\times$ ” 表示。





如右图所示为的  
收敛域和极零点分布图。



b. 序列的ZT与FT的关系：当  $r = 1$  时，则

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

即序列在单位圆上的ZT等于序列的FT。

c. 当  $x(n)$  为实序列时，对于FT，有： $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ ；

对于ZT有： $X(z) = X^*(z^*)$ 。

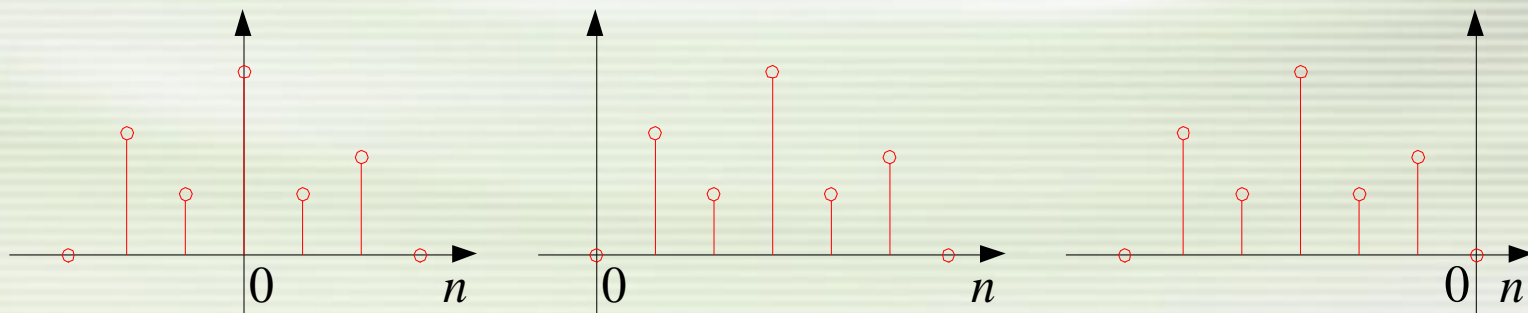


## • 2.6.2 几种特殊序列的Z变换的收敛域

### 1. 有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0, \text{others} \end{cases}, |n_1| \leq |n_2|$$

如下图所示：



其ZT为：

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$



一般情况下，其收敛域为： $0 < |Z| < \infty$ ；（因为  $X(z)$  为有限项，当  $X(z)$  展开时，既有  $z$  的正幂项，又有  $z$  的负幂项，故： $z \neq 0 \quad z \neq \infty$ ）

当  $n_1 \geq 0$  时，收敛域为： $0 \leq |Z| < \infty$ ；（此时无  $z$  的正幂项）

当  $n_2 \leq 0$  时，收敛域为： $0 < |Z| \leq \infty$ ；（此时无  $z$  的负幂项）

**例2.6.1：**求序列  $R_N(n)$  的ZT及收敛域？

解：
$$\text{ZT}[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

其收敛域为：

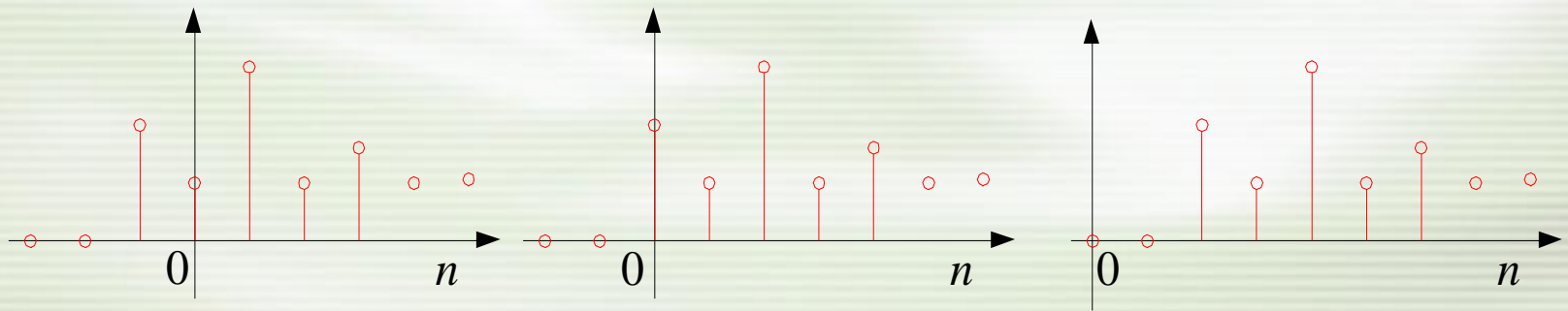
$$0 < |Z| \leq \infty$$



## 2. 右边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n \geq n_1 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

如下图所示：



其ZT为：

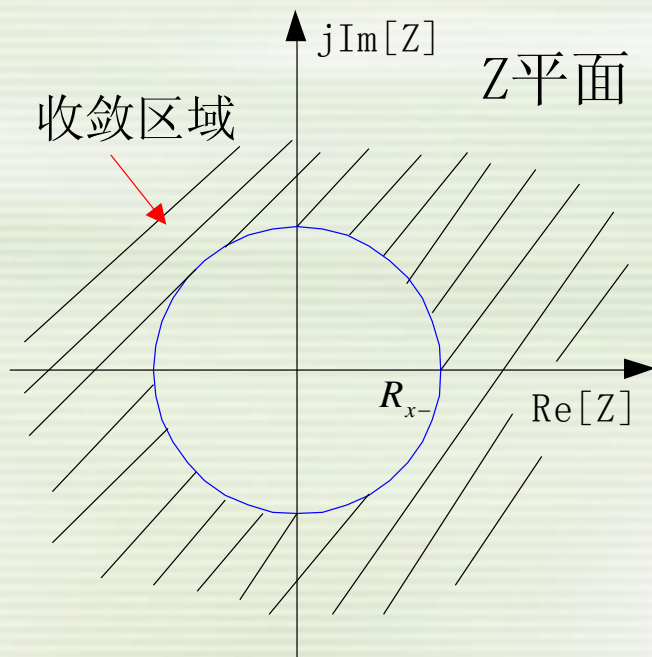
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



其收敛域是以  $R_{x-}$  为半径的圆的外部，

即：  $|Z| > R_{x-}$  ；

收敛域如下图所示：





证明：假设级数在某个圆  $|z| = |z_1|$  上绝对收敛，

即：
$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty$$

设 $z$ 是这个圆外的任一点，即 $|z| > |z_1|$ ，则有：

(1)当  $n_1 \geq 0$ 时，  $\because |z^{-n}| < |z_1^{-n}| \therefore \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty$

故级数  $\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z$  是收敛的。

(2)当  $n_1 < 0$ 时，  $\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=n_1}^{-1} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$

上式的第一项级数的值收敛（有限项），

参考（1）的结论可知级数收敛。





特例：因果序列： $n_1 \geq 0$  的右边序列。其收敛域为： $R_{x-} < |Z| \leq \infty$ ；（因果序列的ZT无正幂项）

注意：对于右边序列，如存在  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ ，则该序列为因果序列。

例2.6.2：求序列  $x(n) = a^n u(n), |a| < 1$  的ZT及收敛域？

解：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |az^{-1}| < 1$$

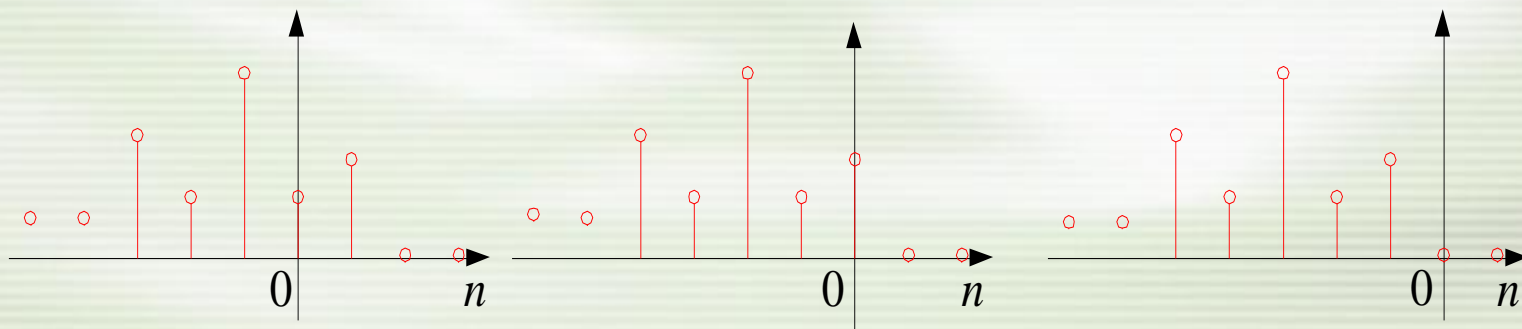
其收敛域为： $|a| < |Z| \leq \infty$



### 3. 左边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n \leq n_2 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

如下图所示：



其ZT为：

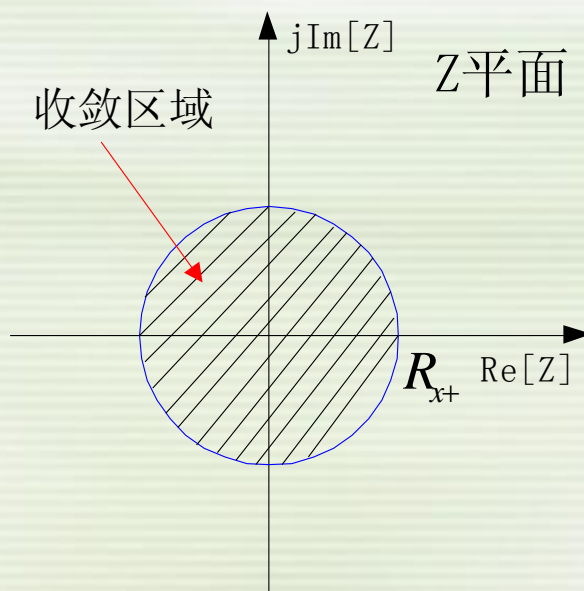
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



其收敛域是以  $R_{x+}$  为半径的圆的内部，

即：  $|Z| < R_{x+}$  ；

收敛域如下图所示：





特例：因果序列： $n_2 \leq 0$  的左边序列。其收敛域为： $0 \leq |Z| < R_{x+}$ ；（因果序列的ZT无负幂项）

注意：对于左边序列，如存在  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ ，则该序列为逆因果序列。

例2.6.3：求序列  $x(n) = b^n u(-n-1)$  的ZT及收敛域？  
解：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (bz^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n = \frac{b^{-1}z}{1 - b^{-1}z}, |b^{-1}z| < 1$$

其收敛域为： $0 \leq |Z| < b$



## (4) 双边序列

$n = -\infty \sim +\infty$ ，序列都有非零值；

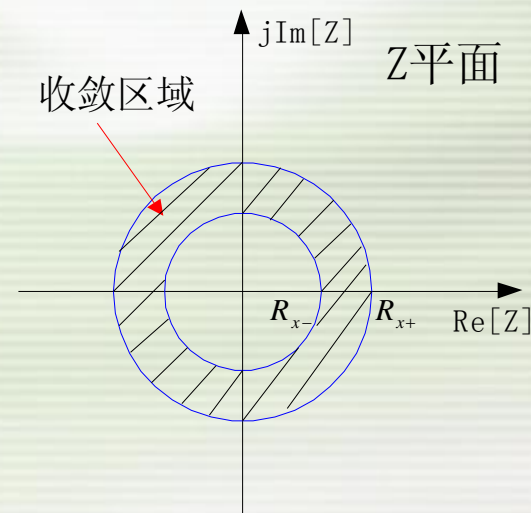
其ZT为：
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

收敛域为  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  的收敛域的公共部分，

一般情况下为： $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ ；

如右图所示：

注意：如果  $R_{x+} < R_{x-}$ ，双边序列ZT无收敛域。





例2.6.4: 求序列  $x(n) = \begin{cases} a^n, n > 0 \\ -b^n, n < 0 \end{cases}, (a < b)$  的ZT及其收敛域。

解: 该序列为双边序列, 其ZT为:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

其收敛域为:  $a < |Z| < b$

其中:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \xrightarrow{m=-n} \sum_{m=1}^{\infty} b^{-m} z^m = b^{-1} z \sum_{m=0}^{\infty} b^{-m} z^m = \frac{b^{-1} z}{1-b^{-1} z} = \frac{-z}{(z-b)}$$





结论：

- ①序列 $ZT$ 为有理分式的收敛域以极点为边界（包括  $0, \infty$ ）；
- ②收敛域内不能包括任何极点，可以包含零点；
- ③相同的零极点分别可能对应不同的收敛域，即：  
不同的序列可能有相同的 $ZT$ ；
- ④收敛域汇总：右外、左内、双环、有限长 $Z$ 平面。



## • 2.6.3 逆Z变换

### 1. 幂级数法

如果序列的ZT能表示成幂级数的形式，则序列 $x(n)$ 是幂级数  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$  中 $z^{-n}$ 的系数。

注意：这种方法只对某些特殊的ZT有效。

如果ZT为有理函数，可用长除法将 $X(z)$ 展开成幂级数。若为右边序列（特例：因果序列），将 $X(z)$ 展开成负幂级数；若为左边序列（特例：逆因果序列），将 $X(z)$ 展开成正幂级数。



## 2. 部分分式法

如果  $X(z)$  是一个有理分式（两个多项式之比），分母的阶次大于分子的阶次，且只有单阶极点，则可表示成部分分式，

即：

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

式中  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) 是  $X(z)$  的极点。

$X(z)$  的收敛域为以最大极点的模为半径的圆的外部，即：

$$|Z| > \max\{|a_k|\} \quad A_k = X(z)(1 - a_k z^{-1}) \big|_{z=a_k}$$

（上面两种逆Z变换的例题请见教材）



### 3. 留数定理法

Cauchy积分公式:  $\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = x(k), \quad \dots(2.7a)$

式中c是反时针方向环绕原点的围线。

对  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$  两边  $\times z^{k-1}$  , 并在  $X(z)$  的收敛域内

$$\begin{aligned} \text{作围线积分得: } \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} dz \end{aligned}$$

当  $n = k$ , 参考 (2.7a) 式得:  $\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$



$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \dots (2.7b)$$

式中 $c$ 是 $X(z)z^{n-1}$ 收敛域中反时针方向环绕原点的闭合曲线， $n$ 为整数。注意：

①留数定义： $\text{Re } s[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c f(z) dz$ 是 $f(z)$ 在 $z_0$ 的留数；

②Cauchy留数 (Residue Theorem)/积分定理(Integral Theorem)：

设函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内除有效个奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$

外处处解析； $C$ 是 $D$ 内包围诸奇点的一条正向简单闭

合曲线，则：
$$\oint_c f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Re } s[f(z), z_k]$$

③由留数定理可知：围线内外的留数之和等于零；





④设在有限Z平面上,  $\{a_k\} (k = 1, 2, \dots, N)$  是  $X(z) \cdot z^{n-1}$  在围线c内的极点集,  $\{b_k\} (k = 1, 2, \dots, N)$  是  $X(z) \cdot z^{n-1}$  在围线c外的极点集。

由Cauchy留数定理, 有:

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, a_k] \quad \dots (2.7c)$$

$$\text{或: } x(n) = -\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, b_k] - \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, \infty] \quad \dots (2.7d)$$

当  $X(z) \cdot z^{n-1}$  在  $z = \infty$  处有二阶或二阶以上的零点, 即  $X(z) \cdot z^{n-1}$  的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高二阶或二阶以上时, 无穷远处的留数为零, 故有:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, b_k] \quad \dots (2.7e)$$



例2.6.6: 设  $X(z) = \frac{z(a-1/a)}{(z-1/a)(z-a)}$ ,  $a < |z| < \frac{1}{a}$ 。其中  $0 < a < 1$ ,

求  $x(n)$ 。

解: 有两个极点  $1/a$  和  $a$ 。

$$\text{被积函数为 } X(z)z^{n-1} = \frac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)(z-a)}$$

当  $n \geq 0$  时, 围线内仅包含极点  $a$ , 使用式 (2.7c) 得:

$$x(n) = \left. \frac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)} \right|_{z=a} = a^n u(n)$$

当  $n < 0$  时, 围线外仅包含一个极点  $a^{-1}$ , 所以根据式 (2.7d) 得:

$$x(n) = -\text{Res}[X(z)z^{n-1}, a^{-1}] = -\left. \frac{(a-1/a)z^n}{(z-a)} \right|_{z=1/a} = a^{-n} u(-n-1)$$

$$\text{最后得 } x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ a^{-n}, n < 0 \end{cases}$$

或者表示为  $x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1)$ 。

## 2.6.4 Z变换的性质与定理

### 1. 线性

设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ ,

$Y(z) = ZT[y(n)]$ ,  $R_{y-} < |Z| < R_{y+}$

则  $ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$ ,

$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |Z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$ ;

一般情况下，收敛域变小。但在组合ZT可能出现新的零极点抵消的情况时，收敛域可能增大。

如：  $a^n u(n)$ ,  $a^n u(n-1)$ ，收敛域  $|Z| > a$ ；

但  $\delta(n) = a^n u(n) - a^n u(n-1)$ ，收敛域：整个Z平面。



2. 序列移位: 设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ ,

则:  $ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

注意:

收敛域在  $z = 0/\infty$  处有例外, 如  $\delta(n)$  收敛域为整个  $Z$  平面。但  $\delta(n-1)$  在  $z = 0$  处不收敛,  $\delta(n+1)$  在  $z = \infty$  处不收敛。

3. 乘以指数序列  $a^n$ : 设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ ,

则:  $ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$ ,  $|a| R_{x-} < |Z| < |a| R_{x+}$



4. 序列的折叠：设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$  ,

$$\text{则： } ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{R_{x+}} < |Z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

5. 复序列的共轭：设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$  ,

$$\text{则： } X^*(z^*) = ZT[x^*(n)], R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

6.  $X(z)$  的微分：设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$  ,

$$\text{则： } -z \frac{dX(z)}{dz} = ZT[nx(n)], R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$



## 7. 初值定理:

对于因果序列  $x(n)$ :  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  ;

对于逆因果序列  $x(n)$ :  $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$  ;

注意: 对于因果序列  $x(n)$ , 有:  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

对于逆因果序列  $x(n)$ , 有:  $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$ ;

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n} = x(0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

8. 终值定理: 若  $x(n)$  是因果序列, 且  $X(z)$  除在  $z=1$  处有一阶极点外, 全部其它极点都在单位圆内, 则:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$





证明:  $(z-1)X(z) = zX(z) - X(z) = ZT[x(n+1) - x(n)]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \quad (x(n) \text{ 为因果序列})$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)]z^{-k}$$

由于  $(z-1)X(z)$  抵消了函数  $X(z)$  在  $z=1$  处的可能极点,  
故  $(z-1)X(z)$  的收敛域将包括单位圆, 对上式两端求

极限得:  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(0) - 0 + x(1) - x(0) + \dots + x(n+1) - x(n)]$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$





9. 序列的卷积： 设  $w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$ ，

则：  $W(z) = ZT[x(n) * y(n)] = X(z) \cdot Y(z)$

$$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |Z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

证明：  $W(z) = ZT[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)]z^{-n}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)]z^{-n}$$

令  $m = n - k$  ， 则：

$$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-n} = X(z) \cdot Y(z)$$



## 10. 复卷积定理:

设  $w(n) = x(n) \cdot y(n)$ ,  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

$Y(z) = ZT[y(n)]$ ,  $R_{y-} < |Z| < R_{y+}$  ; 则:

$$W(z) = ZT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv$$

其  $R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+}$

式中c是v平面收敛域中任一条环绕原点的逆时针方向的闭合曲线, v平面的收敛域为: ;

$$\max\left[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}\right]$$



证明：

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(v)v^{n-1} z^{-n} dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(v)v^{-1} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1} dv \quad \text{—复卷积公式}
 \end{aligned}$$

其中： $c$ 是 $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$ 在 $v$ 平面收敛域中的围线， $\{v_k\}$

是 $c$ 所包含的全部极点。 $W(z)$ 在 $Z$ 平面中的收敛域

和 $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$ 在 $v$ 平面中的收敛域为：

$$X(z) \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+} \quad Y(z) \quad R_{y-} < |Z| < R_{y+}$$



与之对应:  $X\left(\frac{z}{v}\right): R_{x-} < \left|\frac{z}{v}\right| < R_{x+} \quad \dots(2.6d)$

$$Y(v): R_{y-} < |v| < R_{y+} \quad \dots(2.6e)$$

合并(2.6d)式和(2.6e)式得  $W(z)$  在  $Z$  平面的收敛域为:

$$R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+} ;$$

将(2.6d)式变成倒数形式, 得:

$$\frac{|z|}{R_{x+}} < |v| < \frac{|z|}{R_{x-}} \quad \dots(2.6f)$$

由(2.6e)式和(2.6f)得  $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$  在  $v$  平面中的收敛域为:

$$\max\left[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}\right]$$



例2.6.8: 已知  $x(n)$  和  $y(n)$  的ZT如下, 用复卷积公式求

$$\text{ZT}[x(n) \cdot y(n)]。 X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, |z| > 0.5, \quad Y(z) = \frac{1}{1-2z}, |z| < 0.5$$

解: 由复卷积公式得:

$$\begin{aligned} \text{ZT}[x(n)y(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z}{v(v-0.5)(v-2z)} dv \end{aligned}$$

$v$ 平面极点:  $v=0, v=0.5, v=2z$ ,

$X(z)$ 收敛域为:  $0.5 < |z| \leq \infty$

$Y(z)$ 收敛域为:  $0 \leq |z| \leq 0.5$





所以 $v$ 平面收敛域为:  $\max[0,0] < |v| < \min[2|z|, 0.5]$  ,

即:  $\max[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}] < |v| < \min[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}]$

无论 $z$ 取何值,  $v$ 平面收敛域内只有一个极点  $v=0$ ,

则:

$$ZT[x(n)y(n)] = \text{Res}[X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}, 0] = [\frac{z}{z-0.5v} \cdot \frac{1}{1-2v}]|_{v=0} = 1$$

收敛域为:  $R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$

即:  $ZT[x(n)y(n)] = 1$

$$0 \leq |z| \leq \infty$$





## 11.Parseval公式:

设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Y(z) = ZT[y(n)], R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

且:  $R_{x-} R_{y-} < 1 < R_{x+} R_{y+}$

$$\text{则: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

式中 $c$ 是  $X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1}$  收敛域中环绕逆时针方向的围线,  $v$  平面的收敛域由下式确定:

$$\max\left[\frac{1}{R_{y+}}, R_{x-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{y-}}, R_{x+}\right]$$



证明：设  $w(n) = x(n)y^*(n)$ ，应用复序列的共轭ZT的性质和复卷积公式得：

$$W(z) = ZT[x(n)y^*(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+}$$

$\because$  已经假设  $X(z)$  与  $Y(z)$  的公共收敛域包括单位圆，

$$\text{即：} R_{x-}R_{y-} < 1 < R_{x+}R_{y+}$$

$\therefore W(z)$  在单位圆上收敛，则：

$$W(z)|_{z=1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$



又因： 
$$W(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$

$$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

如  $X(z)$  和  $Y(z)$  在单位圆上收敛，则围线  $c$  为单位圆。

令  $v = e^{j\omega}$ ， $\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \oint_c X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

当  $x(n) = y(n)$  时，有：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

**Parseval**公式的物理意义：在时域中对序列求能量与在频域中对频谱求能量是一致的。



## § 2.7 系统函数 (System Function)

### • 2.7.1 定义

①设  $x(n)$ ,  $y(n)$  和  $h(n)$  分别是线性非移变系统的输入、输出和单位取样响应,  $X(z)$ ,  $Y(z)$  和  $H(z)$  分别表示其对应的Z变换。则:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \dots(2.7a)$$

表示该系统的系统函数。



②设一个系统的输入输出满足下列差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

则该系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \dots (2.7b)$$

式中和分别表示在Z平面上的极点和零点。

注意：系统函数由系统本身的结构决定，与系统的输入输出无关。





## • 2.7.2 系统稳定性与系统函数的关系

线性非移变系统稳定的充要条件是： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

而  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$  ,

如果  $h(n)$  的ZT存在, 则上式右边的级数绝对收敛:

即  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) \cdot z^{-n}| < \infty$

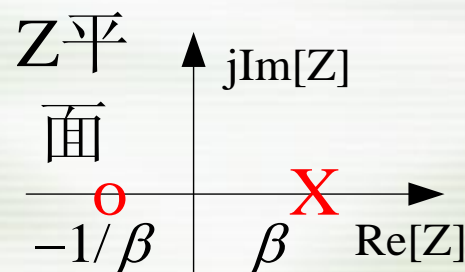
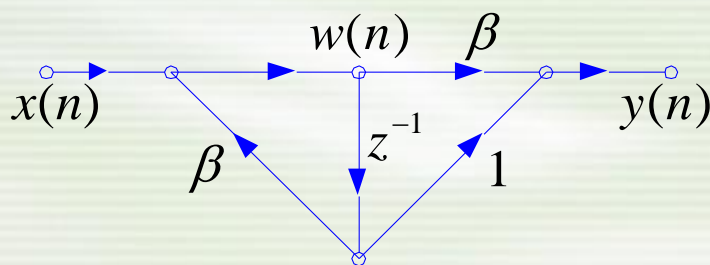
当  $|z|=1$  时, 上式变成:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

如果系统函数的收敛域包括单位圆, 则系统稳定; 反之亦然。

**请考虑:** 一个稳定的因果系统的系统函数  $H(z)$  的极点应该怎样分布?



例2.7.1：如图所示表示一个因果的线性非移变系统，求该系统的系统函数  $H(z)$  并画出极零点图；如果该系统是稳定的，求  $\beta$  的取值范围。



解：如图，得：

$$\begin{cases} w(n) = x(n) + \beta \cdot w(n-1) \\ y(n) = \beta \cdot w(n) + w(n-1) \end{cases}$$

对上式两边进行ZT得：

$$\begin{cases} W(z)(1 - \beta \cdot z^{-1}) = X(z) \\ Y(z) = (\beta + z^{-1})W(z) \end{cases}$$

$$\therefore H(z) = \frac{z^{-1} + \beta}{1 - \beta \cdot z^{-1}} \quad \text{极点：} z = \beta ;$$

如果该系统是稳定的，则：  $\beta < 1$  。



### • 2.7.3 系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

如果系统是稳定的，令  $z = e^{j\omega}$ ，代入系统函数  $H(z)$ ，得：
$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

### • 2.7.4 系统极零点对系统频率响应的影响

由式(2.7b)得：

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

式中， $A = b_0 / a_0$ ， $c_r$  是  $H(z)$  的零点， $d_k$  是其极点。

A 参数影响传输函数的幅度大小，影响系统特性的是零点  $c_r$  和极点  $d_k$  的分布。



将上式分子分母均乘以  $z^{N+M}$ ，得到：

$$H(z) = Az^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

设系统稳定，将  $z = e^{j\omega}$  代入上式，得到传输函数：

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)}$$

设  $N=M$ ，由上式得：

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \quad \dots(2.7c)$$



在Z平面上,  $e^{j\omega} - c_r$  用一根由零点  $c_r$  指向单位圆上  $e^{j\omega}$  点B的向量  $\vec{c_r B}$  表示,

同样,  $e^{j\omega} - d_r$  用由极点  $d_r$  指向  $e^{j\omega}$  点B的向量表示, 即:

$$\vec{c_r B} = e^{j\omega} - c_r \quad \vec{d_r B} = e^{j\omega} - d_r$$

$\vec{c_r B}$  和  $\vec{d_r B}$  分别称为零点矢量和极点矢量, 用极坐标表示

为:  $\vec{c_r B} = c_r B e^{j\alpha_r} \quad \vec{d_r B} = d_r B e^{j\beta_r}$

将  $\vec{c_r B}$  和  $\vec{d_r B}$  代入式(2.7c)得:

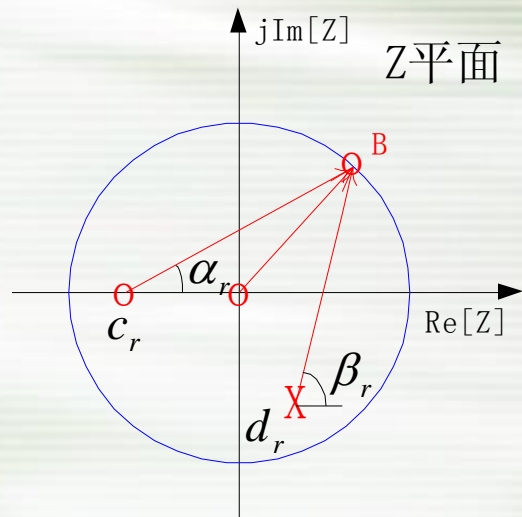
$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N \vec{c_r B}}{\prod_{r=1}^N \vec{d_r B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$





$$|H(e^{j\omega})| = A \frac{\prod_{r=1}^N c_r B}{\prod_{r=1}^N d_r B} \quad \dots(2.7d)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=0}^N \alpha_r - \sum_{r=0}^N \beta_r \quad \dots(2.7e)$$



系统的频率特性如右图所示：

系统的频率特性由式（2.7d）和（2.7e）确定。当向量的终点B转到极点附近时，极点矢量长度最短，峰值愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为  $\infty$ ，系统不稳定；当B点转到零点附近，零点矢量长度变短，幅度特性特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值愈接近零。当零点位于单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。



## § 2.8 全通系统与最小相位系统 (All Pass System and Minimum Phase System)

### 2.8.1 全通系统

#### 1、全通系统 (Allpass System)

- 全通系统是幅度响应  $|H(e^{j\omega})| \equiv C$  (C为常数) 的系统。
- 应用范围：滤波器结构设计、多速率信号处理、滤波器组和信道相位均衡等。



- 系统函数:  $H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$  (一阶系统)

对于单位取样为实系数的多阶系统, 有:

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_r} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

其中:

$$|d_k| < 1, |e_k| < 1$$



## 2、全通系统的特点

(1)  $H_{ap}(z)$  的每个极点  $z_p$  都有一个与之配对的共轭倒数零点  $z_o = \frac{1}{z_p^*}$ 。

(2) 一阶全通系统:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

令:  $a = re^{j\theta}$ , 有:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$



$$= e^{-j\omega} \frac{1 - re^{j(\omega-\theta)}}{1 - re^{-j(\omega-\theta)}} = e^{-j\omega} \frac{1 - r \cos(\omega-\theta) - jr \sin(\omega-\theta)}{1 - r \cos(\omega-\theta) + jr \sin(\omega-\theta)}$$

- 其相位函数为：

$$\phi(\omega) = -\omega - 2 \arctg \left[ \frac{r \sin(\omega-\theta)}{1 - r \cos(\omega-\theta)} \right]$$

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{-(1-r^2)}{[1 - r \cos(\omega-\theta)]^2 + r^2 \sin^2(\omega-\theta)} < 0$$

- 即：一阶全通滤波器的相位响应  $\phi(\omega)$  是单调递减的。





## • 2.8.2 最小相位系统

### 1、最小相位系统、最大相位系统

(1) 最小相位系统：系统函数  $H_{\min}(z)$  所有零、极点都在单位圆内的系统。

(2) 最小相位序列：序列 $z$ 变换的所有零、极点都在单位圆内的序列。

(3) 最大相位系统：系统函数  $H_{\max}(z)$  所有零点都在单位圆外的系统。

(4) 对最小相位系统，存在一个稳定的因果逆系统  $H_{\min}^{-1}(z)$ ，有：

$$H_{\min}^{-1}(z)H_{\min}(z)=1$$



## 2、全通系统与最小相位系统级联

- 任何系统都可以表示成一个最小相位系统和一个全通系统的级联，即：

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

证明：  $H(z) = H_1(z)(z^{-1} - d^*) \quad |d| < 1$ ，一个零点在单位园外。

$$= H_1(z)(1 - dz^{-1}) \left[ \frac{z^{-1} - d^*}{1 - dz^{-1}} \right]$$

$$= H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

上式中：  $H_1(z)$  和  $H_1(z)(1 - dz^{-1})$  为最小相位系统，

$$\left[ \frac{z^{-1} - d^*}{1 - dz^{-1}} \right] \text{ 为全通系统。}$$



## 2. 18. 3、相位延迟和群延迟

- 对数字滤波器，有： $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$ 。

### 1、相位延迟 (Phase delay)

- 数字滤波器的相位延迟定义为： $T_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$ ，  
表示输入是频率为  $\omega$  的单一正弦波时的延迟时间。

例：设信号  $x(n)$  经过系统后输出为： $y(n) = x(n-m)$

则有：

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} = e^{-j\omega m}$$

信号的延迟时间为：

$$-\frac{\phi(\omega)}{\omega} = m$$



## 2、群延迟 (Group Delay)

数字滤波器的群延迟或包络延迟定义为： $T_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ ，

表示某一频率  $\omega$  邻域内（窄带信号）的延迟性质，或者说反映了某一频率的包络的延迟时间。



# 本章结束

谢谢大家！