

Standard Code Library

stick16

Your Huazhong University of Science and Technology

November 29, 2024

Contents

一切的开始	3
宏定义	3
数据结构	3
ST 表	3
fhq	4
数学	5
MinMax 容斥	5
exCRT	5
gauss	5
线性筛	6
二元一次方程 $Ax+By=C$	6
求解连续按位异或	7
Miller - Rabin 素数测试	7
Pollard - Rho 因式分解	8
数论常见结论及例题	8
常见结论	8
常见例题	11
图论	12
LCA	12
prim	13
图的连通性:	13
dcc:	14
有向图缩点:	15
二分图	16
欧拉路径/欧拉回路 Hierholzers	17
图论常见结论及例题	18
常见结论	18
常见例题	18
多项式	25
NTT	25
cmd 的 NTT	26
全家桶 (可能不全)	27
常用结论	30
杂	30
普通生成函数 / OGF	30
指数生成函数 / EGF	31
字符串	31
kmp	31
ac	31
z 函数	32
sa	32
sam	33
gsum	33
pam	34
杂项	35
树上莫队	35
带悔贪心	36
模拟费用流	37
约瑟夫问题	38
日期换算 (基姆拉尔森公式)	39

博弈论	39
巴什博弈	39
扩展巴什博弈	39
Nim 博弈	39
Nim 游戏具体取法	40
Moore' s Nim 游戏 (Nim-K 游戏)	40
Anti-Nim 游戏 (反 Nim 游戏)	40
阶梯 - Nim 博弈	40
SG 游戏 (有向图游戏)	40
Anti-SG 游戏 (反 SG 游戏)	41
Lasker' s-Nim 游戏 (Multi-SG 游戏)	41
Every-SG 游戏	41
威佐夫博弈	41
斐波那契博弈	42
树上删边游戏	42
无向图删边游戏 (Fusion Principle 定理)	42
gzy	43
缺生源	43
圆方树	43
李超线段树	44
斯坦纳树	44
虚树	45
支配树	46
LCA	47
LCT	47

一切的开始

宏定义

- 需要 C++11

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  #define int long long
4  #define mid ((l+r)>>1)
5  // #define mod (998244353)
6  #define mod (1000000007)
7  #define ull unsigned long long
8  #define eps (1e-8)
9  #define mk make_pair
10 #define tim (double)clock()/CLOCKS_PER_SEC
11 #define For(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
12 #define rep(i,a,b) for(int i=(a);i>=(b);--i)
13 inline namespace IO{
14     inline int read(){
15         int x=0,f=1;char ch;
16         while((ch=getchar())<'0' || x>'9')if(ch=='-')f=-1;
17         while(ch>='0'&&ch<='9'){x=((x<<1)+(x<<3)+(ch^48)),ch=getchar();}
18         return x*f;
19     }
20     void write(char x){putchar(x);}
21     void write(const char *x){for(;;*x;++x)putchar(*x);}
22     void write(char *x){for(;;*x;++x)putchar(*x);}
23     void write(signed x){
24         if(x<0)putchar('-'),x=-x;
25         if(x>9)write(x/10); putchar('0'+x-x/10*10);
26     }
27     void write(long long x){
28         if(x<0)putchar('-'),x=-x;
29         if(x>9)write(x/10); putchar('0'+x-x/10*10);
30     }
31     void write(unsigned long long x){
32         if(x>9)write(x/10);
33         putchar('0'+x-x/10*10);
34     }
35     void write(double x){printf("%.5lf",x);}
36     template<typename type1,typename type2,typename ...typen>
37     void write(type1 a1,type2 a2,typen ...an){
38         write(a1);
39         write(a2,an...);
40     }
41 }using namespace IO;
42 inline int gcd(int x,int y){return y==0?x:gcd(y,x%y);}
43 inline int lcm(int x,int y){return x/gcd(x,y)*y;}
44 inline int lowbit(int x){return x&(-x);}
45 const int N=1900005;
```

数据结构

ST 表

- 二维

```
1  int f[maxn][maxn][10][10];
2  inline int highbit(int x) { return 31 - __builtin_clz(x); }
3  inline int calc(int x, int y, int xx, int yy, int p, int q) {
4      return max(
5          max(f[x][y][p][q], f[xx - (1 << p) + 1][yy - (1 << q) + 1][p][q]),
6          max(f[xx - (1 << p) + 1][y][p][q], f[x][yy - (1 << q) + 1][p][q])
7      );
8  }
9  void init() {
10     FOR (x, 0, highbit(n) + 1)
11     FOR (y, 0, highbit(m) + 1)
12     FOR (i, 0, n - (1 << x) + 1)
```

```

13     FOR (j, 0, m - (1 << y) + 1) {
14         if (!x && !y) { f[i][j][x][y] = a[i][j]; continue; }
15         f[i][j][x][y] = calc(
16             i, j,
17             i + (1 << x) - 1, j + (1 << y) - 1,
18             max(x - 1, 0), max(y - 1, 0)
19         );
20     }
21 }
22 inline int get_max(int x, int y, int xx, int yy) {
23     return calc(x, y, xx, yy, highbit(xx - x + 1), highbit(yy - y + 1));
24 }

```

fhq

```

1  mt19937 rnd(time(NULL)^clock());
2  int siz[N], pri[N], val[N];
3  int tot;
4  int ls[N], rs[N];
5  #define lc ls[now]
6  #define rc rs[now]
7  int root;
8  inline int New(int k){
9      int z=++tot;
10     val[z]=k, pri[z]=rnd(), siz[z]=1;
11     return z;
12 }
13 inline void push_up(int now){siz[now]=siz[lc]+siz[rc]+1;}
14 void split(int now, int k, int &x, int &y){
15     if(!now){x=y=0; return;}
16     if(val[now]<=k){x=now; split(rc, k, rc, y);}
17     else {y=now; split(lc, k, x, lc);}
18     push_up(now);
19 }
20 int merge(int x, int y){
21     if(!x||!y) return x|y;
22     if(pri[x]<pri[y]){rs[x]=merge(rs[x], y); push_up(x); return x;}
23     else {ls[y]=merge(x, ls[y]); push_up(y); return y;}
24 }
25 inline void insert(int k){
26     int x, y;
27     split(root, k, x, y);
28     root=merge(merge(x, New(k)), y);
29 }
30 inline void del(int k){
31     int x, y, z;
32     split(root, k-1, x, y);
33     split(y, k, y, z);
34     y=merge(ls[y], rs[y]);
35     root=merge(merge(x, y), z);
36 }
37 inline int getrnk(int k){
38     int x, y;
39     split(root, k-1, x, y);
40     int res=siz[x]+1;
41     root=merge(x, y);
42     return res;
43 }
44 inline int getkth(int now, int k){
45     while(1){
46         if(!now) return -1;
47         if(siz[lc]+1==k) return val[now];
48         if(siz[lc]>=k) now=lc;
49         else k-=siz[lc]+1, now=rc;
50     }
51 }
52 inline int getpre(int k){
53     int x, y;
54     split(root, k-1, x, y);
55     int res=getkth(x, siz[x]);
56     root=merge(x, y);

```

```

57     return res;
58 }
59 inline int getnxt(int k){
60     int x,y;
61     split(root,k,x,y);
62     int res=getkth(y,1);
63     root=merge(x,y);
64     return res;
65 }

```

数学

MinMax 容斥

$$\min(S) = \sum_{T \subseteq S, T \neq \emptyset} (-1)^{|T|+1} \max(S)$$

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S, T \neq \emptyset} (-1)^{|T|+1} \min(S)$$

exCRT

```

1  int n,m;
2  int a[N],b[N];
3  int exgcd(int a,int b,int &x,int &y){
4      if(b==0){x=1,y=0;return a;}
5      int d=exgcd(b,a%b,x,y);
6      int z=x;x=y,y=z-a/b*y;
7
8      return d;
9  }
10 inline int mul(int a,int b,int mod){
11     int res=0;
12     for(;b>=>=1){
13         if(b&1)res=(res+a)%mod;
14         a=(a<<1)%mod;
15     }
16     return res;
17 }
18 inline int excrt(){
19     int ans=b[1];m=a[1];
20     For(i,2,n){
21         int t,y,c=((b[i]-ans)%a[i]+a[i])%a[i];
22         int d=exgcd(m,a[i],t,y);
23         // t=t*(c/d);
24         t=mul(t,c/d,a[i]);
25         ans+=t*m;
26         m=lcm(m,a[i]);
27         ans=(ans%m+m)%m;
28     }
29     int res=(ans%m+m)%m;
30     return res;
31 }
32 signed main()
33 {
34     n=read();
35     For(i,1,n)a[i]=read(),b[i]=read();
36     write(excrt());
37     return 0;
38 }
39 /*
40 x=b[i](mod a[i])
41 */

```

gauss

```

1  int n,m;
2  double a[N][N];

```

```

3 inline void gauss(){
4     For(i,1,n){
5         int F=0;
6         For(j,i,n)if(a[j][i]){
7             For(k,1,m)swap(a[i][k],a[j][k]);
8             F=1; break;
9         }
10        if(!F)For(j,1,i-1)if(a[j][i]&&a[i][i]==0){
11            For(k,1,m)swap(a[i][k],a[j][k]);
12            F=1; break;
13        }
14        if(!F)continue;
15        double tt=a[i][i];
16        For(k,i,m)a[i][k]/=tt;
17        For(j,1,n)if(j!=i){
18            tt=a[j][i];
19            For(k,i,m)a[j][k]-=tt*a[i][k];
20        }
21    }
22    For(i,1,n)if(a[i][i]==0&&a[i][m]){write(-1,'\n');return;}
23    For(i,1,n)if(a[i][i]==0&&a[i][m]==0){write(0,'\n');return;}
24    For(i,1,n)printf("x%lld=%0.2lf\n",i,a[i][m]);
25 }
26 signed main()
27 {
28     n=read(),m=n+1;
29     For(i,1,n)For(j,1,m)cin>>a[i][j];
30     gauss();
31     return 0;
32 }
33 /*
34 a[1][1]*x1+a[1][2]*x2+...+a[1][n]*xn=b1
35 a[2][1]*x1+a[2][2]*x2+...+a[2][n]*xn=b2
36 无解-1
37 无穷解 0
38 */

```

线性筛

```

1 phi[1]=1,mu[1]=1;
2 For(i,2,N-1){
3     if(!vis[i]){p[++tot]=i,phi[i]=i-1,mu[i]=-1;}
4     for(int j=1;j<=tot&&i*p[j]<N;++j){
5         vis[i*p[j]]=1;
6         if(i%p[j]!=0){
7             phi[i*p[j]]=phi[i]*(p[j]-1);
8             mu[i*p[j]]=-mu[i];
9         }else{
10            phi[i*p[j]]=phi[i]*p[j],mu[i*p[j]]=0;
11            break;
12        }
13    }
14 }

```

二元一次方程 $Ax+By=C$

```

1 auto clac = [&](int a, int b, int c) {
2     int u = 1, v = 1;
3     if (a < 0) { // 负数特判, 但是没用经过例题测试
4         a = -a;
5         u = -1;
6     }
7     if (b < 0) {
8         b = -b;
9         v = -1;
10    }
11
12    int x, y, d = exgcd(a, b, x, y), ans;
13    if (c % d != 0) { // 无整数解
14        cout << -1 << "\n";
15    }
16 }

```

```

15     return;
16 }
17 a /= d, b /= d, c /= d;
18 x *= c, y *= c; // 得到可行解
19
20 ans = (x % b + b - 1) % b + 1;
21 auto [A, B] = pair{u * ans, v * (c - ans * a) / b}; // x 最小正整数 特解
22
23 ans = (y % a + a - 1) % a + 1;
24 auto [C, D] = pair{u * (c - ans * b) / a, v * ans}; // y 最小正整数 特解
25
26 int num = (C - A) / b + 1; // xy 均为正整数 的 解的组数
27 };

```

求解连续按位异或

$O(1)$ $0^1 2^{\dots n}$

```

1 unsigned xor_n(unsigned n) {
2     unsigned t = n & 3;
3     if (t & 1) return t / 2u ^ 1;
4     return t / 2u ^ n;
5 }
6
1 i64 xor_n(i64 n) {
2     if (n % 4 == 1) return 1;
3     else if (n % 4 == 2) return n + 1;
4     else if (n % 4 == 3) return 0;
5     else return n;
6 }

```

Miller - Rabin 素数测试

$O(4\log^3 x)$, 这里可以看错 $O(1)$

```

1 int mul(int a, int b, int m) {
2     int r = a * b - m * (int)(1.L / m * a * b);
3     return r - m * (r >= m) + m * (r < 0);
4 }
5 int mypow(int a, int b, int m) {
6     int res = 1 % m;
7     for (; b; b >>= 1, a = mul(a, a, m)) {
8         if (b & 1) {
9             res = mul(res, a, m);
10        }
11    }
12    return res;
13 }
14
15 int B[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23};
16 bool MR(int n) {
17     if (n <= 1) return 0;
18     for (int p : B) {
19         if (n == p) return 1;
20         if (n % p == 0) return 0;
21     }
22     int m = (n - 1) >> __builtin_ctz(n - 1);
23     for (int p : B) {
24         int t = m, a = mypow(p, m, n);
25         while (t != n - 1 && a != 1 && a != n - 1) {
26             a = mul(a, a, n);
27             t *= 2;
28         }
29         if (a != n - 1 && t % 2 == 0) return 0;
30     }
31     return 1;
32 }

```


Pollard - Rho 因式分解

以单个因子 $O(\log X)$ 的复杂度输出数字 X 的全部质因数，由于需要结合素数测试，总复杂度会略高一些。如果遇到超时的情况，可能需要考虑进一步优化，例如检查题目是否强制要求枚举全部质因数等等

```
1 int PR(int n) {
2     for (int p : B) {
3         if (n % p == 0) return p;
4     }
5     auto f = [&](int x) -> int {
6         x = mul(x, x, n) + 1;
7         return x >= n ? x - n : x;
8     };
9     int x = 0, y = 0, tot = 0, p = 1, q, g;
10    for (int i = 0; (i & 255) || (g = gcd(p, n)) == 1; i++, x = f(x), y = f(f(y))) {
11        if (x == y) {
12            x = tot++;
13            y = f(x);
14        }
15        q = mul(p, abs(x - y), n);
16        if (q) p = q;
17    }
18    return g;
19 }
20 vector<int> fac(int n) {
21     #define pb emplace_back
22     if (n == 1) return {};
23     if (MR(n)) return {n};
24     int d = PR(n);
25     auto v1 = fac(d), v2 = fac(n / d);
26     auto i1 = v1.begin(), i2 = v2.begin();
27     vector<int> ans;
28     while (i1 != v1.end() || i2 != v2.end()) {
29         if (i1 == v1.end()) {
30             ans.pb(*i2++);
31         } else if (i2 == v2.end()) {
32             ans.pb(*i1++);
33         } else {
34             if (*i1 < *i2) {
35                 ans.pb(*i1++);
36             } else {
37                 ans.pb(*i2++);
38             }
39         }
40     }
41     return ans;
42 }
```

数论常见结论及例题

常见结论

球盒模型（八种）

参考链接。给定 n 个小球 m 个盒子。

- 球同，盒不同、不能空

隔板法： N 个小球即一共 $N - 1$ 个空，分成 M 堆即 $M - 1$ 个隔板，答案为 $\binom{n-1}{m-1}$ 。

- 球同，盒不同、能空

隔板法：多出 $M - 1$ 个虚空球，答案为 $\binom{m-1+n}{n}$ 。

- 球同，盒同、能空

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$ 的 x^n 项的系数。

- 球同，盒同、不能空

$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$ 的 x^n 项的系数。

- 球不同，盒同、不能空

第二类斯特林数 $\text{Stirling2}(n, m)$ - 球不同，盒同、能空

第二类斯特林数之和 $\sum_{i=1}^m \text{Stirling2}(n, m)$ ，答案为 $\sum_{i=0}^m dp[n][i]$ 。

- 球不同，盒不同、不能空

第二类斯特林数乘上 m 的阶乘 $m! \cdot \text{Stirling2}(n, m)$ ，答案为 $dp[n][m] * m!$ 。

- 球不同，盒不同、能空

答案为 m^n 。

麦乐鸡定理

给定两个互质的数 n, m ，定义 $x = a * n + b * m$ $a \geq 0, b \geq 0$ ，当 $x > n * m - n - m$ 时，该式子恒成立。

一些结论：

对于给定的 X 和序列 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，有： $X = (X \& a_1) \text{or} (X \& a_2) \text{or} \dots \text{or} (X \& a_n)$ 。原理是 and 意味着取交集， or 意味着取子集。来源 - 牛客小白月赛 49C

调和级数近似公式

1 $\log(n) + 0.5772156649 + 1.0 / (2 * n)$

欧拉函数常见性质

- $1 - n$ 中与 n 互质的数之和为 $n * \varphi(n) / 2$ 。
- 若 a, b 互质，则 $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 。实际上，所有满足这一条件的函数统称为积性函数。
- 若 f 是积性函数，且有 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{c_i}$ ，那么 $f(n) = \prod_{i=1}^m f(p_i^{c_i})$ 。
- 若 p 为质数，且满足 $p \mid n$ ，
 - $p^2 \mid n$ ，那么 $\varphi(n) = \varphi(n/p) * p$ 。
 - $p^2 \nmid n$ ，那么 $\varphi(n) = \varphi(n/p) * (p - 1)$ 。
- $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ 。如 $n = 10$ ，则 $d = 10/5/2/1$ ，那么 $10 = \varphi(10) + \varphi(5) + \varphi(2) + \varphi(1)$ 。
- $\sum_{i=1}^n \gcd(i, n) = \sum_{d \mid n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \varphi(d)$ （欧拉反演）。

组合数学常见性质

- $k * C_n^k = n * C_{n-1}^{k-1}$ ；
- $C_k^n * C_m^k = C_m^n * C_{m-n}^{m-k}$ ；
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ；
- $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$ ；
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k * C_n^k = 0$ 。
- 拉格朗日恒等式： $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 = (\sum_{i=1}^n a_i)^2 (\sum_{i=1}^n b_i)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$ 。

范德蒙德卷积公式

在数量为 $n+m$ 的堆中选 k 个元素,和分别在数量为 n m 的堆中选 i $k-i$ 个元素的方案数是相同的,即 $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$;

变体:

- $\sum_{i=0}^k C_{i+n}^i = C_{k+n+1}^k$;
- $\sum_{i=0}^k C_n^i * C_m^i = \sum_{i=0}^k C_n^i * C_m^{m-i} = C_{n+m}^n$ 。

卡特兰数

是一类奇特的组合数,前几项为 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862。如遇到以下问题,则直接套用即可。

- 【括号匹配问题】 n 个左括号和 n 个右括号组成的合法括号序列的数量, 为 Cat_n 。
- 【进出栈问题】 $1, 2, \dots, n$ 经过一个栈, 形成的合法出栈序列的数量, 为 Cat_n 。
- 【二叉树生成问题】 n 个节点构成的不同二叉树的数量, 为 Cat_n 。
- 【路径数量问题】在平面直角坐标系上, 每一步只能向上或向右走, 从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) , 并且除两个端点外不接触直线 $y = x$ 的路线数量, 为 $2Cat_{n-1}$ 。

计算公式: $Cat_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$, $C_n = \frac{C_{n-1} * (4n-2)}{n+1}$ 。

斐波那契数列

通项公式: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ 。

直接结论:

- 卡西尼性质: $F_{n-1} * F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$;
- $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$;
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ (由上一条写两遍相减得到);
- 若存在序列 $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-5} + \dots (n \geq 1)$ 则 $a_n = F_n (n \geq 1)$;
- 齐肯多夫定理: 任何正整数都可以表示成若干个不连续的斐波那契数 (F_2 开始) 可以用贪心实现。

求和公式结论:

- 奇数项求和: $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
- 偶数项求和: $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
- 平方和: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n * F_{n+1}$;
- $F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$;
- $-F_1 + F_2 - F_3 + \dots + (-1)^n F_n = (-1)^n (F_{n+1} - F_n) + 1$;
- $F_{2n-2m-2} (F_{2n} + F_{2n+2}) = F_{2m+2} + F_{4n-2m}$ 。

数论结论:

- $F_a \mid F_b \Leftrightarrow a \mid b$;
- $\gcd(F_a, F_b) = F_{\gcd(a,b)}$;
- 当 p 为 $5k \pm 1$ 型素数时, $\begin{cases} F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \\ F_p \equiv 1 \pmod{p} \\ F_{p+1} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$;
- 当 p 为 $5k \pm 2$ 型素数时, $\begin{cases} F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ F_p \equiv -1 \pmod{p} \\ F_{p+1} \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$;
- $F(n) \% m$ 的周期 $\leq 6m$ ($m = 2 \times 5^k$ 时取到等号);
- 既是斐波那契数又是平方数的有且仅有 1, 144。

杂

- 负数取模得到的是负数，如果要用 0/1 判断的话请取绝对值；
- 辗转相除法原式为 $\gcd(x, y) = \gcd(x, y - x)$ ，推广到 N 项为 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_N) = \gcd(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_N - a_{N-1})$ ，
- 该推论在“四则运算后 gcd”这类题中有特殊意义，如求解 $\gcd(a_1 + X, a_2 + X, \dots, a_N + X)$ 时 See；
- 以下式子成立： $\gcd(a, m) = \gcd(a + x, m) \Leftrightarrow \gcd(a, m) = \gcd(x, m)$ 。求解上式满足条件的 x 的数量即为求比 $\frac{m}{\gcd(a, m)}$ 小且与其互质的数的个数，即用欧拉函数求解 $\varphi\left(\frac{m}{\gcd(a, m)}\right)$ 。
- 已知序列 a ，定义集合 $S = \{a_i \cdot a_j \mid i < j\}$ ，现在要求解 $\gcd(S)$ ，即为求解 $\gcd(a_j, \gcd(a_i \mid i < j))$ ，换句话说，即为求解后缀 gcd。
- 连续四个数互质的情况如下，当 n 为奇数时， $n, n-1, n-2$ 一定互质；而当 n 为偶数时， $\begin{cases} n, n-1, n-3 \text{ 互质} & \gcd(n, n-3) = 1 \text{ 时} \\ n-1, n-2, n-3 \text{ 互质} & \gcd(n, n-3) \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$ See；
- 由 $a \bmod b = (b + a) \bmod b = (2 \cdot b + a) \bmod b = \dots = (K \cdot b + a) \bmod b$ 可以推广得到 $(a \bmod b) \bmod c = ((K \cdot bc + a) \bmod b) \bmod c$ ，由此可以得到一个 bc 的答案周期 See；
- 对于长度为 $2 \cdot N$ 的数列 a ，将其任意均分为两个长度为 N 的数列 p, q ，随后对 p 非递减排序、对 q 非递增排序，定义 $f(p, q) = \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$ ，那么答案为 a 数列前 N 大的数之和减去前 N 小的数之和 See。
- 令 $\begin{cases} X = a + b \\ Y = a \oplus b \end{cases}$ ，如果该式子有解，那么存在前提条件 $\begin{cases} X \geq Y \\ X, Y \text{ 同奇偶} \end{cases}$ ；进一步，此时最小的 a 的取值为 $\frac{X - Y}{2}$ See。
然而，上方方程并不总是有解的，只有当变量增加到三个时，才一定有解，即：在保证上方前提条件成立的情况下，求解 $\begin{cases} X = a + b + c \\ Y = a \oplus b \oplus c \end{cases}$ ，则一定存在一组解 $\{\frac{X - Y}{2}, \frac{X - Y}{2}, Y\}$ See。
- 已知序列 p 是由序列 a_1 、序列 a_2 、……、序列 a_n 合并而成，且合并过程中各序列内元素相对顺序不变，记 $T(p)$ 是 p 序列的最大前缀和，则 $T(p) = \sum_{i=1}^n T(a_i)$ See。
- $x + y = x|y + x \& y$ ，对于两个数字 x 和 y ，如果将 x 变为 $x|y$ ，同时将 y 变为 $x \& y$ ，那么在本质上即将 x 二进制模式下的全部 1 移动到了 y 的对应的位置上 See。
- 一个正整数 x 异或、加上另一个正整数 y 后奇偶性不发生变化： $a + b \equiv a \oplus b \pmod{2}$ See。

常见例题

题意：将 1 至 N 的每个数字分组，使得每一组的数字之和均为质数。输出每一个数字所在的组别，且要求分出的组数最少 See。

考察哥德巴赫猜想，记全部数字之和为 S ，分类讨论如下：

- 为 S 质数时，只需要分入同一组；
- 当 S 为偶数时，由猜想可知一定能分成两个质数，可以证明其中较小的那个一定小于 N ，暴力枚举分组；
- 当 $S - 2$ 为质数时，特殊判断出答案；
- 其余情况一定能被分成三组，其中 3 单独成组， $S - 3$ 后成为偶数，重复讨论二的过程即可。

题意：给定一个长度为 n 的数组，定义这个数组是 BAD 的，当且仅当可以把数组分成两个子序列，这两个子序列的元素之和相等。现在你需要删除最少的元素，使得删除后的数组不是 BAD 的。

最少删除一个元素——如果原数组存在奇数，则直接删除这个奇数即可；反之，我们发现，对数列同除以一个数不影响计算，故我们只需要找到最大的满足 $2^k \mid a_i$ 成立的 2^k ，随后将全部的 a_i 变为 $\frac{a_i}{2^k}$ ，此时一定有一个奇数（换句话说，我们可以对原数列的每一个元素不断的除以 2 直到出现奇数为止），删除这个奇数即可 See。

题意：设当前有一个数字为 x ，减去、加上最少的数字使得其能被 k 整除。

最少减去 $x \bmod k$ 这个很好想；最少加上 $\left(\left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil * k\right) \bmod k$ 也比较好想，但是更简便的方法为加上 $k - x \bmod k$ ，这个式子等价于前面这一坨。

题意：给定一个整数 n ，用恰好 k 个 2 的幂次数之和表示它。例如： $n = 9, k = 4$ ，答案为 $1 + 2 + 2 + 4$ 。

结论 1: k 合法当且仅当 `__builtin_popcountll(n) <= k && k <= n`，显然。

结论 2: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ ，所以我们可以将二进制位看作是数组，然后从高位向低位推，一个高位等于两个低位，直到数组之和恰好等于 k ，随后依次输出即可。举例说明， $\{1, 0, 0, 1\} \rightarrow \{0, 2, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, 1\}$ ，即答案为 0 个 2^3 、1 个 2^2 、.....。

```
1 signed main() {
2     int n, k;
3     cin >> n >> k;
4
5     int cnt = __builtin_popcountll(n);
6
7     if (k < cnt || n < k) {
8         cout << "NO\n";
9         return 0;
10    }
11    cout << "YES\n";
12
13    vector<int> num;
14    while (n) {
15        num.push_back(n % 2);
16        n /= 2;
17    }
18
19    for (int i = num.size() - 1; i > 0; i--) {
20        int p = min(k - cnt, num[i]);
21        num[i] -= p;
22        num[i - 1] += 2 * p;
23        cnt += p;
24    }
25
26    for (int i = 0; i < num.size(); i++) {
27        for (int j = 1; j <= num[i]; j++) {
28            cout << (1LL << i) << " ";
29        }
30    }
31 }
```

题意： n 个取值在 $[0, k)$ 之间的数之和为 m 的方案数

答案为 $\sum_{i=0}^n -1^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{m - i \cdot k + n - 1}{n - 1}$

图论

LCA

```
1 vector<int> edge[N];
2 int fa[N], dep[N], siz[N], son[N];
3 int top[N], dfn[N], tot;
4 void dfs1(int x, int f) {
5     fa[x] = f, dep[x] = dep[f] + 1;
6     siz[x] = 1, son[x] = -1;
7     for (int y: edge[x]) {
8         if (y == f) continue;
9         dfs1(y, x);
10        siz[x] += siz[y];
11        if (son[x] == -1 || siz[y] > siz[son[x]]) son[x] = y;
12    }
13 }
```

```

13 }
14 void dfs2(int x,int t){
15     dfn[x]=++tot;
16     top[x]=t;
17     if(son[x]==-1)return;
18     dfs2(son[x],t);
19     for(int y:edge[x]){
20         if(y==fa[x]||y==son[x])continue;
21         dfs2(y,y);
22     }
23 }
24 inline int Lca(int x,int y){
25     int fx=top[x],fy=top[y];
26     while(fx!=fy){
27         if(dep[fx]>=dep[fy])x=fa[fx];
28         else y=fa[fy];
29         fx=top[x],fy=top[y];
30     }
31     if(dfn[x]<dfn[y])return x;
32     else return y;
33 }

```

prim

```

1  const int N = 550, INF = 0x3f3f3f3f;
2  int n, m, g[N][N];
3  int d[N], v[N];
4  int prim() {
5      ms(d, 0x3f); //这里的 d 表示到“最小生成树集合”的距离
6      int ans = 0;
7      for (int i = 0; i < n; ++ i) { //遍历 n 轮
8          int t = -1;
9          for (int j = 1; j <= n; ++ j)
10             if (v[j] == 0 && (t == -1 || d[j] < d[t])) //如果这个点不在集合内且当前距离集合最近
11                 t = j;
12             v[t] = 1; //将 t 加入“最小生成树集合”
13             if (i && d[t] == INF) return INF; //如果发现不连通，直接返回
14             if (i) ans += d[t];
15             for (int j = 1; j <= n; ++ j) d[j] = min(d[j], g[t][j]); //用 t 更新其他点到集合的距离
16         }
17         return ans;
18     }
19     int main() {
20         ms(g, 0x3f); cin >> n >> m;
21         while (m -- ) {
22             int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
23             g[x][y] = g[y][x] = min(g[x][y], w);
24         }
25         int t = prim();
26         if (t == INF) cout << "impossible" << endl;
27         else cout << t << endl;
28     } //22.03.19 已测试

```

图的连通性：

无向图的割点与桥：

给定无向图 $G = (V, E)$ ：

若对于 $x \in V$ ，从图中删去节点 x 以及所有相连边后， G 分裂为两个及以上不相连子图，则称 x 为 G 的割点。

若对于 $e \in E$ ，从图中删去边 e 后， G 分裂为两个不相连子图，则称 x 为 G 的桥或割边。

追溯值：

设 dfn_x 为 x 在搜索树上的时间戳， low_x 为 x 的追溯值。

- 追溯值定义：

设 $subtree(x)$ 表示无向图搜索树中以 x 为根的子树。

- $low[x] = dfn[x] \leftarrow$ 初值。
- $low[x] = \min(low[x], low[y]) \leftarrow$ 若 x 为 y 父节点。
- $low[x] = \min(low[x], dfn[y]) \leftarrow$ 若边 (x, y) 不是搜索树上的边。

设 x 为 y 的父节点, $low[y]$ 的意义为: 从 $subtree(y)$ 出发, 在不过边 (x, y) 的前提下, 能到达的时间戳最小的点。

无向图中的简单环:

搜索树上每条额外边都构成一个简单环, 且由 dfs 的性质, 该边为环上 dfn 最大的点, 连到该环 dfn 最小的点上。判定方式:

$$dfn[x] < dfn[y]$$

割边判定法则:

无向边 (x, y) 是桥, 当且仅当搜索树上存在 x 的一个子节点 y , 满足:

$$dfn[x] < low[y]$$

根据定义, $dfn[x] < low[y]$ 说明从 $subtree(y)$ 出发, 在不过 (x, y) 的前提下, 无法到达 x 或比 x 访问更早的节点。则显然边 (x, y) 为桥。

性质: 桥是搜索树上的边, 且一个简单环中的边不是桥。

割点判定法则:

若 x 非搜索树根节点, 则 x 是割点当且仅当搜索树上存在一个子节点 y , 满足:

$$dfn[x] \leq low[y]$$

特别的, 若 x 是搜索树根节点, 则 x 是割点当且仅当其存在至少两个子节点 y_1, y_2 满足上述条件。证明通同割边类似。

无向图求点双联通分量:

Tarjan 时维护一个栈: 1. 当一个节点第一次被访问时, 入栈

2. 当割点判定条件成立时, 无论 x 是否为根:

- 不断弹出栈顶节点, 直到节点 y 被弹出。
- 刚才弹出的所有节点与 x 一起构成一个 v -DCC

对于点双的缩点, 上述的每个 x 拆成多个点, 分别连向对应的虚点 X 。

有向图求强联通分量:

若对于途中任意两个节点 x, y , 既存在从 x 到 y 的路径, 也存在从 y 到 x 的路径, 则称该有向图为 “强连通图”。有向图的极大强联通子图称为 “强连通分量”, 即为 SCC。

$dfn[x] = low[x]$ 的点, 必定是一个 SCC 中最先被访问到的点, 此时在栈中的所有点必定满足 $dfn[x] > low[x]$, 直接弹出元素直到 x 被弹出为止。细节: 不在栈中的点已经不在这个 SCC 中了, 所以不能更新该点的 $low[x]$ 。

对于大多有向图上的 DP, 通用做法是: 缩点 \rightarrow 拓扑排序 \rightarrow DAG 上 DP。

dcc:

```

1  int n,m;
2  vector<pair<int,int>> edge[N];
3  int dfn[N],low[N],tot;
4  int vis[N],dcc[N],cnt;
5  vector<int> vec[N];
6  void dfs(int x,int ID){
7      dfn[x]=low[x]=++tot;
8      for(auto yy:edge[x]){
9          int y=yy.first,id=yy.second;
10         if(id==ID)continue;
11         if(!dfn[y]){
12             dfs(y,id);
13             low[x]=min(low[x],low[y]);
14         }else low[x]=min(low[x],dfn[y]);
15         if(low[y]>dfn[x])vis[id]=1;

```

```

16     }
17 }
18 void dfsc(int x,int ID){
19     dcc[x]=cnt; vec[cnt].push_back(x);
20     for(auto yy:edge[x]){
21         int y=yy.first,id=yy.second;
22         if(id==ID||vis[id])continue;
23         if(!dcc[y])dfsc(y,id);
24     }
25 }
26 signed main()
27 {
28     n=read(),m=read();
29     For(i,1,m){
30         int u=read(),v=read();
31         edge[u].push_back(mk(v,i));
32         edge[v].push_back(mk(u,i));
33     }
34     For(i,1,n)if(!dfn[i])dfs(i,0);
35     For(i,1,n)if(!dcc[i])cnt++,dfsc(i,0);
36     write(cnt,'\n');
37     For(i,1,cnt){
38         write((signed)vec[i].size(),' ');
39         for(int x:vec[i])write(x,' ');
40         write('\n');
41     }
42     return 0;
43 }

```

有向图缩点:

```

1  int n,m;
2  int a[N];
3  int dfn[N],low[N],tot;
4  int stk[N],vis[N],top;
5  int col[N],V[N],cnt;
6  vector<int> edge[N],e[N];
7  void dfs(int x){
8      dfn[x]=low[x]=++tot;
9      stk[++top]=x,vis[x]=1;
10     for(int y:edge[x]){
11         if(!dfn[y]){
12             dfs(y);
13             low[x]=min(low[x],low[y]);
14         }else if(vis[y])low[x]=min(low[x],dfn[y]);
15     }
16     if(dfn[x]==low[x]){
17         ++cnt;
18         while(stk[top]!=x){
19             int p=stk[top--];
20             V[cnt]+=a[p];
21             col[p]=cnt,vis[p]=0;
22         }int p=stk[top--];
23         V[cnt]+=a[p];
24         col[p]=cnt,vis[p]=0;
25     }
26 }
27 int deg[N];
28 int dp[N];
29 signed main()
30 {
31     n=read(),m=read();
32     For(i,1,n)a[i]=read();
33     For(i,1,m){
34         int u=read(),v=read();
35         edge[u].push_back(v);
36         // edge[v].push_back(u);
37     }
38     For(i,1,n)if(!dfn[i])dfs(i);
39     For(i,1,n)for(int y:edge[i]){
40         if(col[i]==col[y])continue;

```



```

41         e[col[i]].push_back(col[y]);
42         deg[col[y]]++;
43     }
44     queue<int> q;
45     For(i,1,cnt)if(!deg[i])q.push(i),dp[i]=V[i];
46     while(!q.empty()){
47         int x=q.front();q.pop();
48         for(int y:e[x]){
49             deg[y]--;dp[y]=max(dp[y],dp[x]+V[y]);
50             if(!deg[y])q.push(y);
51         }
52     }
53     int res=0;
54     For(i,1,cnt)res=max(res,dp[i]);
55     write(res,'\n');
56     return 0;
57 }
58 /*
59
60 */

```

二分图

最大独立集 = 总点数 - 最小点覆盖 (集合) 最大权闭合子图 = 正点权和 - 最小割 (构造) 对于正价点, 连源, 边权为点权。对应地, 负价点连汇, 边权为 (负) 点权。原图中的有向边保留, 边权置为 INF

最小路径覆盖 = 总点数 - 拆点二分图最大匹配

HopcroftKarp 算法 (基于最大流) 解

```

1  struct HopcroftKarp {
2      int n, m;
3      vector<array<int, 2>> ver;
4      vector<int> l, r;
5
6      HopcroftKarp(int n, int m) : n(n), m(m) { // 左右半部
7          l.assign(n, -1);
8          r.assign(m, -1);
9      }
10     void add(int x, int y) {
11         x--, y--; // 这个板子是 0-idx 的
12         ver.push_back({x, y});
13     }
14     int work() {
15         vector<int> adj(ver.size());
16
17         mt19937 rgen(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
18         shuffle(ver.begin(), ver.end(), rgen); // 随机化防卡
19
20         vector<int> deg(n + 1);
21         for (auto &[u, v] : ver) {
22             deg[u]++;
23         }
24         for (int i = 1; i <= n; i++) {
25             deg[i] += deg[i - 1];
26         }
27         for (auto &[u, v] : ver) {
28             adj[--deg[u]] = v;
29         }
30
31         int ans = 0;
32         vector<int> a, p, q(n);
33         while (true) {
34             a.assign(n, -1), p.assign(n, -1);
35
36             int t = 0;
37             for (int i = 0; i < n; i++) {
38                 if (l[i] == -1) {
39                     q[t++] = a[i] = p[i] = i;
40                 }
41             }

```

```

42
43     bool match = false;
44     for (int i = 0; i < t; i++) {
45         int x = q[i];
46         if (~l[a[x]]) continue;
47
48         for (int j = deg[x]; j < deg[x + 1]; j++) {
49             int y = adj[j];
50             if (r[y] == -1) {
51                 while (~y) {
52                     r[y] = x;
53                     swap(l[x], y);
54                     x = p[x];
55                 }
56                 match = true;
57                 ++ans;
58                 break;
59             }
60             if (p[r[y]] == -1) {
61                 q[t++] = y = r[y];
62                 p[y] = x;
63                 a[y] = a[x];
64             }
65         }
66         if (!match) break;
67     }
68     return ans;
69 }
70
71 vector<array<int, 2>> answer() {
72     vector<array<int, 2>> ans;
73     for (int i = 0; i < n; i++) {
74         if (~l[i]) {
75             ans.push_back({i, l[i]});
76         }
77     }
78     return ans;
79 }
80 };
81
82 signed main() {
83     int n1, n2, m;
84     cin >> n1 >> n2 >> m;
85     HopcroftKarp flow(n1, n2);
86     while (m--) {
87         int x, y;
88         cin >> x >> y;
89         flow.add(x, y);
90     }
91
92     cout << flow.work() << "\n";
93
94     auto match = flow.answer();
95     for (auto [u, v] : match) {
96         cout << u << " " << v << "\n";
97     }
98 }

```

欧拉路径/欧拉回路 Hierholzers

有向图欧拉路径存在判定有向图欧拉回路存在：恰有一个点出度比入度多 1（为起点）恰有一个点入度比出度多 1（为终点）恰有 $N-2$ 个点入度均等于出度。如果是欧拉回路，则上方起点与终点的条件不存在，全部点均要满足最后一个条件。无向图欧拉路径存在判定无向图欧拉回路存在：恰有两个点度数为奇数（为起点与终点），恰有 $N-2$ 个点度数为偶数。有向图欧拉回路求解（字典序最小）：

```

1  vector<int> ans;
2  auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
3      while (ver[x].size()) {
4          int net = *ver[x].begin();
5          ver[x].erase(ver[x].begin());
6          self(self, net);

```

```

7     }
8     ans.push_back(x);
9 };
10 dfs(dfs, s);
11 reverse(ans.begin(), ans.end());
12 for (auto it : ans) {
13     cout << it << " ";
14 }

```

图论常见结论及例题

常见结论

1. 要在有向图上求一个最大点集，使得任意两个点 (i, j) 之间至少存在一条路径（可以从 i 到 j ，也可以反过来，这两种有一个就行），即求解最长路；
2. 要求出连通图上的任意一棵生成树，只需要跑一遍 **bfs**；
3. 给出一棵树，要求添加尽可能多的边，使得其是二分图：对树进行二分染色，显然，相同颜色的点之间连边不会破坏二分图的性质，故可添加的最多的边数即为 $cnt_{\text{Black}} * cnt_{\text{White}} - (n - 1)$ ；
4. 当一棵树可以被黑白染色时，所有染黑节点的度之和等于所有染白节点的度之和；
5. 在竞赛图中，入度小的点，必定能到达出度小（入度大）的点。
6. 在竞赛图中，将所有点按入度从小到大排序，随后依次遍历，若对于某一点 i 满足前 i 个点的入度之和恰好等于 $\left\lfloor \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right\rfloor$ ，那么对于上一次满足这一条件的点 p ， $p + 1$ 到 i 点构成一个新的强连通分量。> 举例说明，设满足上方条件的点为 p_1, p_2 ($p_1 + 1 < p_2$)，那么点 1 到 p_1 构成一个强连通分量、点 $p_1 + 1$ 到 p_2 构成一个强连通分量。
7. 选择图中最少数量的边删除，使得图不连通，即求最小割；如果是删除点，那么拆点后求最小割。
8. 如果一张图是平面图，那么其边数一定小于等于 $3n - 6$ 。
9. 若一张有向完全图存在环，则一定存在三元环。
10. 竞赛图三元环计数：
11. 有向图判是否存在环直接用 topsort；无向图判是否存在环直接用 dsu，也可以使用 topsort，条件变为 $\deg[i] \leq 1$ 时入队。

常见例题

杂

题意：给出一棵节点数为 $2n$ 的树，要求将点分割为 n 个点对，使得点对的点之间的距离和最大。

可以转化为边上问题：对于每一条边，其被利用的次数即为 $\min\{\text{其左边的点的数量}, \text{其右边的点的数量}\}$ ，使用树形 **dp** 计算一遍即可。如下图样例，答案为 10。

```

1 vector<int> val(n + 1, 1);
2 int ans = 0;
3 function<void(int, int)> dfs = [&](int x, int fa) {
4     for (auto y : ver[x]) {
5         if (y == fa) continue;
6         dfs(y, x);
7         val[x] += val[y];
8         ans += min(val[y], k - val[y]);
9     }
10 };
11 dfs(1, 0);
12 cout << ans << endl;

```

题意：以哪些点为起点可以无限的在有向图上绕

概括一下这些点可以发现，一类是环上的点，另一类是可以到达环的点。建反图跑一遍 topsort 板子，根据容斥，未被移除的点都是答案

题意：添加最少的边，使得有向图变成一个 SCC

将原图的 SCC 缩点，统计缩点后的新图上入度为 0 和出度为 0 的点的数量 $cnt_{\text{in}}, cnt_{\text{out}}$ ，答案即为 $\max(cnt_{\text{in}}, cnt_{\text{out}})$ 。过程大致是先将一个出度为 0 的点和一个入度为 0 的点相连，剩下的点随便连。

题意：添加最少的边，使得无向图变成一个 E-DCC

将原图的 E-DCC 缩点，统计缩点后的新图上入度为 1 的点（叶子结点）的数量 cnt ，答案即为 $\lceil \frac{cnt}{2} \rceil$ 。过程大致是每次找两个叶子结点（但是还有一些条件限制）相连，若最后余下一个点随便连。

题意：在树上找到一个最大的连通块，使得这个联通内点权和边权之和最大，输出这个值，数据中存在负数的情况。

使用 dfs 即可解决。

```
1 LL n, point[N];
2 LL ver[N], head[N], nex[N], tot; bool v[N];
3 map<pair<LL, LL>, LL> edge;
4 // void add(LL x, LL y) {}
5 void dfs(LL x) {
6     for (LL i = head[x]; i; i = nex[i]) {
7         LL y = ver[i];
8         if (v[y]) continue;
9         v[y] = true; dfs(y); v[y] = false;
10    }
11    for (LL i = head[x]; i; i = nex[i]) {
12        LL y = ver[i];
13        if (v[y]) continue;
14        point[x] += max(point[y] + edge[{x, y}], 0LL);
15    }
16 }
17 void Solve() {
18     cin >> n;
19     FOR(i, 1, n) cin >> point[i];
20     FOR(i, 2, n) {
21         LL x, y, w; cin >> x >> y >> w;
22         edge[{x, y}] = edge[{y, x}] = w;
23         add(x, y), add(y, x);
24     }
25     v[1] = true; dfs(1); LL ans = -MAX18;
26     FOR(i, 1, n) ans = max(ans, point[i]);
27     cout << ans << endl;
28 }
```

Prüfer 序列：凯莱公式

题意：给定 n 个顶点，可以构建出多少棵标记树？

$n \leq 4$ 时的样例如上，通项公式为 n^{n-2} 。

Prüfer 序列

一个 n 个点 m 条边的带标号无向图有 k 个连通块。我们希望添加 $k - 1$ 条边使得整个图连通，求方案数量。

设 s_i 表示每个连通块的数量，通项公式为 $n^{k-2} \cdot \prod_{i=1}^k s_i$ ，当 $k < 2$ 时答案为 1。

单源最短/次短路计数

```
1 const int N = 2e5 + 7, M = 1e6 + 7;
2 int n, m, s, e; int d[N][2], v[N][2]; // 0 代表最短路, 1 代表次短路
3 Z num[N][2];
4
5 void Clear() {
6     for (int i = 1; i <= n; ++ i) h[i] = edge[i] = 0;
7     tot = 0;
8     for (int i = 1; i <= n; ++ i) num[i][0] = num[i][1] = v[i][0] = v[i][1] = 0;
9     for (int i = 1; i <= n; ++ i) d[i][0] = d[i][1] = INF;
10 }
11
12 int ver[M], ne[M], h[N], edge[M], tot;
13 void add(int x, int y, int w) {
```

```

14     ver[++ tot] = y, ne[tot] = h[x], h[x] = tot;
15     edge[tot] = w;
16 }
17
18 void dji() {
19     priority_queue<PIII, vector<PIII>, greater<PIII> > q; q.push({0, s, 0});
20     num[s][0] = 1; d[s][0] = 0;
21     while (!q.empty()) {
22         auto [dis, x, type] = q.top(); q.pop();
23         if (v[x][type]) continue; v[x][type] = 1;
24         for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
25             int y = ver[i], w = dis + edge[i];
26             if (d[y][0] > w) {
27                 d[y][1] = d[y][0], num[y][1] = num[y][0];
28                 // 如果找到新的最短路, 将原有的最短路数据转化为次短路
29                 q.push({d[y][1], y, 1});
30                 d[y][0] = w, num[y][0] = num[x][type];
31                 q.push({d[y][0], y, 0});
32             }
33             else if (d[y][0] == w) num[y][0] += num[x][type];
34             else if (d[y][1] > w) {
35                 d[y][1] = w, num[y][1] = num[x][type];
36                 q.push({d[y][1], y, 1});
37             }
38             else if (d[y][1] == w) num[y][1] += num[x][type];
39         }
40     }
41 }
42 void Solve() {
43     cin >> n >> m >> s >> e;
44     Clear(); //多组样例务必完全清空
45     for (int i = 1; i <= m; ++ i) {
46         int x, y, w; cin >> x >> y; w = 1;
47         add(x, y, w), add(y, x, w);
48     }
49     dji();
50     Z ans = num[e][0];
51     if (d[e][1] == d[e][0] + 1) {
52         ans += num[e][1]; // 只有在次短路满足条件时才计算 (距离恰好比最短路大 1)
53     }
54     cout << ans.val() << endl;
55 }

```

判定图中是否存在负环

使用 SPFA, 复杂度为 $\mathcal{O}(KM)$, 其中常数 K 相较裸的 SPFA 更高。

```

1  const int N = 1e5 + 7, M = 1e6 + 7;
2  int n, m;
3  int ver[M], ne[M], h[N], edge[M], tot;
4  int d[N], v[N], num[N];
5
6  void add(int x, int y, int w) {
7      ver[++ tot] = y, ne[tot] = h[x], h[x] = tot;
8      edge[tot] = w;
9  }
10 bool spfa() {
11     queue<int> q;
12     for (int i = 1; i <= n; ++ i) q.push(i), v[i] = 1; //全部入队
13     while(!q.empty()) {
14         int x = q.front(); q.pop();
15         v[x] = 0;
16         for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
17             int y = ver[i];
18             if(d[y] > d[x] + edge[i]) {
19                 num[y] = num[x] + 1;
20                 if (num[y] >= n) return true;
21                 d[y] = d[x] + edge[i];
22                 if(!v[y]) q.push(y), v[y] = 1;
23             }
24         }
25     }
26 }

```

```

25     }
26     return false;
27 }
28 int main() {
29     cin >> n >> m;
30     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
31         int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
32         add(x, y, w);
33     }
34     if(spfa() == true) cout << "Yes" << endl;
35     else cout << "No" << endl;
36 }

```

输出任意一个三元环

原题：给出一张有向完全图，输出任意一个三元环上的全部元素。使用 dfs，复杂度 $\mathcal{O}(N + M)$ ，可以扩展到非完全图和无向图。

```

1  int n;
2  cin >> n;
3  vector<vector<int>> a(n + 1, vector<int>(n + 1));
4  for (int i = 1; i <= n; ++i) {
5      for (int j = 1; j <= n; ++j) {
6          char x;
7          cin >> x;
8          if (x == '1') a[i][j] = 1;
9      }
10 }
11
12 vector<int> vis(n + 1);
13 function<void(int, int)> dfs = [&](int x, int fa) {
14     vis[x] = 1;
15     for (int y = 1; y <= n; ++y) {
16         if (a[x][y] == 0) continue;
17         if (a[y][fa] == 1) {
18             cout << fa << " " << x << " " << y;
19             exit(0);
20         }
21         if (!vis[y]) dfs(y, x); // 这一步的 if 判断很关键
22     }
23 };
24 for (int i = 1; i <= n; ++i) {
25     if (!vis[i]) dfs(i, -1);
26 }
27 cout << -1;

```

带权最小环大小与计数

原题：给出一张有向带权图，求解图上最小环的长度、有多少个这样的最小环。使用 floyd，复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$ ，可以扩展到无向图。

```

1  LL Min = 1e18, ans = 0;
2  for (int k = 1; k <= n; k++) {
3      for (int i = 1; i <= n; i++) {
4          for (int j = 1; j <= n; j++) {
5              if (dis[i][j] > dis[i][k] + dis[k][j]) {
6                  dis[i][j] = dis[i][k] + dis[k][j];
7                  cnt[i][j] = cnt[i][k] * cnt[k][j] % mod;
8              } else if (dis[i][j] == dis[i][k] + dis[k][j]) {
9                  cnt[i][j] = (cnt[i][j] + cnt[i][k] * cnt[k][j] % mod) % mod;
10             }
11         }
12     }
13     for (int i = 1; i < k; i++) {
14         if (a[k][i]) {
15             if (a[k][i] + dis[i][k] < Min) {
16                 Min = a[k][i] + dis[i][k];
17                 ans = cnt[i][k];
18             } else if (a[k][i] + dis[i][k] == Min) {
19                 ans = (ans + cnt[i][k]) % mod;
20             }
21         }
22     }
23 }

```

```

22     }
23 }

```

最小环大小

原题：给出一张无向图，求解图上最小环的长度、有多少个这样的最小环。使用 floyd，可以扩展到有向图。

```

1  int floyd(int n) {
2      for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
3          for (int j = 1; j <= n; ++ j) {
4              val[i][j] = dis[i][j]; // 记录最初的边权值
5          }
6      }
7      int ans = 0x3f3f3f3f;
8      for (int k = 1; k <= n; ++ k) {
9          for (int i = 1; i < k; ++ i) { // 注意这里是没有等于号的
10             for (int j = 1; j < i; ++ j) {
11                 ans = min(ans, dis[i][j] + val[i][k] + val[k][j]);
12             }
13         }
14         for (int i = 1; i <= n; ++ i) { // 往下是标准的 floyd
15             for (int j = 1; j <= n; ++ j) {
16                 dis[i][j] = min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]);
17             }
18         }
19     }
20     return ans;
21 }

```

使用 bfs，复杂度为 $\mathcal{O}(N^2)$ 。

```

1  auto bfs = [&] (int s) {
2      queue<int> q; q.push(s);
3      dis[s] = 0;
4      fa[s] = -1;
5      while (q.size()) {
6          auto x = q.front(); q.pop();
7          for (auto y : ver[x]) {
8              if (y == fa[x]) continue;
9              if (dis[y] == -1) {
10                 dis[y] = dis[x] + 1;
11                 fa[y] = x;
12                 q.push(y);
13             }
14             else ans = min(ans, dis[x] + dis[y] + 1);
15         }
16     }
17 };
18 for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
19     fill(dis + 1, dis + 1 + n, -1);
20     bfs(i);
21 }
22 cout << ans;

```

本质不同简单环计数

原题：给出一张无向图，输出简单环的数量。注意这里环套环需要分别多次统计，下图答案应当为 7。使用状压 dp，复杂度为 $\mathcal{O}(M \cdot 2^N)$ ，可以扩展到有向图。

```

1  int n, m;
2  cin >> n >> m;
3  vector<vector<int>> G(n);
4  for (int i = 0; i < m; i++) {
5      int u, v;
6      cin >> u >> v;
7      u--, v--;
8      G[u].push_back(v);
9      G[v].push_back(u);
10 }
11 vector<vector<LL>> dp(1 << n, vector<LL>(n));
12 for (int i = 0; i < n; i++) dp[1 << i][i] = 1;

```

```

13 LL ans = 0;
14 for (int st = 1; st < (1 << n); st++) {
15     for (int u = 0; u < n; u++) {
16         if (!dp[st][u]) continue;
17         int start = st & -st;
18         for (auto v : G[u]) {
19             if ((1 << v) < start) continue;
20             if ((1 << v) & st) {
21                 if ((1 << v) == start) {
22                     ans += dp[st][u];
23                 }
24             } else {
25                 dp[st | (1 << v)][v] += dp[st][u];
26             }
27         }
28     }
29 }
30 cout << (ans - m) / 2 << "\n";

```

输出任意一个非二元简单环

原题：给出一张无向图，不含自环与重边，输出任意一个简单环的大小以及其上面的全部元素。注意输出的环的大小是随机的，**不等价于最小环**。

由于不含重边与自环，所以环的大小至少为 3，使用 dfs 处理出 dfs 序，复杂度为 $\mathcal{O}(N + M)$ ，可以扩展到有向图；如果有向图中二元环也允许计入答案，则需要删除下方标注行。

```

1 vector<int> dis(n + 1, -1), fa(n + 1);
2 auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
3     for (auto y : ver[x]) {
4         if (y == fa[x]) continue; // 二元环需删去该行
5         if (dis[y] == -1) {
6             dis[y] = dis[x] + 1;
7             fa[y] = x;
8             self(self, y);
9         } else if (dis[y] < dis[x]) {
10            cout << dis[x] - dis[y] + 1 << endl;
11            int pre = x;
12            cout << pre << " ";
13            while (pre != y) {
14                pre = fa[pre];
15                cout << pre << " ";
16            }
17            cout << endl;
18            exit(0);
19        }
20    }
21 };
22 for (int i = 1; i <= n; i++) {
23     if (dis[i] == -1) {
24         dis[i] = 0;
25         dfs(dfs, i);
26     }
27 }

```

有向图环计数

原题：给出一张有向图，输出环的数量。注意这里环套环仅需要计算一次，数据包括二元环和自环，下图例应当输出 3 个环。使用 dfs 染色法，复杂度为 $\mathcal{O}(N + M)$ 。

```

1 int ans = 0;
2 vector<int> vis(n + 1);
3 auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
4     vis[x] = 1;
5     for (auto y : ver[x]) {
6         if (vis[y] == 0) {
7             self(self, y);
8         } else if (vis[y] == 1) {
9             ans++;
10        }
11    }
12 }

```



```

11     }
12     vis[x] = 2;
13 };
14 for (int i = 1; i <= n; i++) {
15     if (!vis[i]) {
16         dfs(dfs, i);
17     }
18 }
19 cout << ans << endl;

```

输出有向图任意一个环

原题：给出一张有向图，输出任意一个环，数据包括二元环和自环。使用 dfs 染色法。

```

1 vector<int> dis(n + 1), vis(n + 1), fa(n + 1);
2 auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
3     vis[x] = 1;
4     for (auto y : ver[x]) {
5         if (vis[y] == 0) {
6             dis[y] = dis[x] + 1;
7             fa[y] = x;
8             self(self, y);
9         } else if (vis[y] == 1) {
10            cout << dis[x] - dis[y] + 1 << endl;
11            int pre = x;
12            cout << pre << " ";
13            while (pre != y) {
14                pre = fa[pre];
15                cout << pre << " ";
16            }
17            cout << endl;
18            exit(0);
19        }
20    }
21    vis[x] = 2;
22 };
23 for (int i = 1; i <= n; i++) {
24     if (!vis[i]) {
25         dfs(dfs, i);
26     }
27 }

```

判定带环图是否是平面图

原题：给定一个环以一些额外边，对于每一条额外边判定其位于环外还是环内，使得任意两条无重合顶点的额外边都不相交（即这张图构成平面图）使用 2-sat。考虑全部边都位于环内，那么“一条边完全包含另一条边”、“两条边完全没有交集”这两种情况都不会相交，可以直接跳过这两种情况的讨论。

```

1 signed main() {
2     int n, m;
3     cin >> n >> m;
4     vector<pair<int, int>> in(m);
5     for (int i = 0, x, y; i < m; i++) {
6         cin >> x >> y;
7         in[i] = minmax(x, y);
8     }
9     TwoSat sat(m);
10    for (int i = 0; i < m; i++) {
11        auto [s, e] = in[i];
12        for (int j = i + 1; j < m; j++) {
13            auto [S, E] = in[j];
14            if (s < S && S < e && e < E || S < s && s < E && E < e) {
15                sat.add(i, 0, j, 0);
16                sat.add(i, 1, j, 1);
17            }
18        }
19    }
20    if (!sat.work()) {
21        cout << "Impossible\n";
22        return 0;
23    }
24 }

```

```

23     }
24     auto ans = sat.answer();
25     for (auto it : ans) {
26         cout << (it ? "out" : "in") << " ";
27     }
28 }

```

多项式

NTT

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  using ll = long long;
4  const ll MOD = 998244353;
5  const int N = 4e6+10;
6  int rev[N];
7  int qpow(int a, int b){
8      int ret = 1;
9      for(; b ; b >>= 1){
10         if(b & 1) ret = 1llu * ret * a % MOD;
11         a = 1llu * a * a % MOD;
12     }
13     return ret;
14 }
15 int ginv(int x){
16     return qpow(x, MOD - 2);
17 }
18 int add(int x, int y){
19     x += y;
20     if(x >= MOD) return x - MOD;
21     return x;
22 }
23 int sub(int x, int y){
24     if(x < y) return x + MOD - y;
25     return x - y;
26 }
27 int preNTT(int len){
28     int deg = 1;
29     while(deg < len) deg *= 2;
30     for(int i = 0; i < deg; ++i)
31         rev[i] = (rev[i >> 1] >> 1) | (i & 1 ? deg / 2 : 0);
32     return deg;
33 }
34 struct poly : vector<int>{
35     using vector::vector;
36     using vector::operator [];
37     friend void NTT(poly &f, int deg, int opt){
38         f.resize(deg);
39         for(int i = 0; i < deg; ++i){
40             if(i < rev[i]) std::swap(f[i], f[rev[i]]);
41         }
42         for(int h = 2, m = 1; h <= deg; h *= 2, m *= 2){
43             int w1 = qpow(3, (MOD - 1) / h);
44             for(int l = 0; l < deg; l += h){
45                 int w0 = 1;
46                 for(int i = l, j = 0; i < l + m; ++j, ++i){
47                     int x = f[i], y = 1ll * w0 * f[i + m] % MOD;
48                     f[i] = x + y > MOD ? x + y - MOD : x + y;
49                     f[i + m] = x < y ? MOD + x - y : x - y;
50                     w0 = 1ll * w0 * w1 % MOD;
51                 }
52             }
53         }
54         if(opt == -1){
55             reverse(f.begin() + 1, f.end());
56             ll iv = ginv(deg);
57             for(auto &it : f){
58                 it = it * iv % MOD;
59             }

```

```

60     }
61 }
62 friend void dmul(poly& f, const poly& g){
63     for(int i = 0 ; i < g.size(); ++i){
64         f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % MOD;
65     }
66 }
67 friend poly operator *(poly f, poly g){
68     if(f.empty() || g.empty()) return {};
69     int len = f.size() + g.size() - 1;
70     int deg = preNTT(len);
71     NTT(f, deg, 1);
72     NTT(g, deg, 1);
73     dmul(f, g);
74     NTT(f, deg, -1);
75     f.resize(len);
76     return f;
77 }
78 friend void operator *=(poly& f, poly g){
79     if(f.empty() || g.empty()) {
80         f = {};
81         return;
82     }
83     int len = f.size() + g.size() - 1;
84     int deg = preNTT(len);
85     NTT(f, deg, 1);
86     NTT(g, deg, 1);
87     dmul(f, g);
88     NTT(f, deg, -1);
89     f.resize(len);
90 }
91 }f;
92 int read(){
93     int x = 0;
94     char ch = getchar();
95     while(!isdigit(ch)) ch = getchar();
96     while(isdigit(ch)) x = x * 10 + ch - '0', ch = getchar();
97     return x;
98 }
99
100 int main(){
101     int n, m;
102     n = read(), m = read();
103     ++n, ++m;
104     poly f, g;
105     f.resize(n), g.resize(m);
106     for(int i = 0; i < n; ++i) f[i] = read();
107     for(int i = 0; i < m; ++i) g[i] = read();
108     f = f * g;
109     for(auto it : f){
110         printf("%d ", it);
111     }
112     printf("\n");
113     return 0;
114 }
115

```

cmd 的 NTT

```

1  #define ll long long
2  #define ull unsigned long long
3  #define clr(f,n) memset(f,0,sizeof(int)*(n))
4  #define cpy(f,g,n) memcpy(f,g,sizeof(int)*(n))
5  const int _G=3,mod=998244353,Maxn=;
6
7  ll powM(ll a,ll t=mod-2){
8      ll ans=1;
9      while(t){
10         if(t&1)ans=ans*a%mod;
11         a=a*a%mod;t>>=1;
12     }return ans;

```

```

13 }
14 const int invG=powM(_G);
15 int tr[Maxn<<1],tf;
16 void tpre(int n){
17     if (tf==n)return ;tf=n;
18     for(int i=0;i<n;i++)
19         tr[i]=(tr[i>>1]>>1)|((i&1)?n>>1:0);
20 }
21 void NTT(int *g,bool op,int n)
22 {
23     tpre(n);
24     static ull f[Maxn<<1],w[Maxn<<1]={1};
25     for (int i=0;i<n;i++)f[i]=(((ll)mod<<5)+g[tr[i]])%mod;
26     for(int l=1;l<n;l<=<=1){
27         ull tG=powM(op?_G:invG,(mod-1)/(l+1));
28         for (int i=1;i<l;i++)w[i]=w[i-1]*tG%mod;
29         for(int k=0;k<n;k+=l+l)
30             for(int p=0;p<l;p++){
31                 int tt=w[p]*f[k|l|p]%mod;
32                 f[k|l|p]=f[k|p]+mod-tt;
33                 f[k|p]+=tt;
34             }
35         if (l==(1<<10))
36             for (int i=0;i<n;i++)f[i]%mod;
37     }if (!op){
38         ull invn=powM(n);
39         for(int i=0;i<n;i++)
40             g[i]=f[i]%mod*invn%mod;
41     }else for(int i=0;i<n;i++)g[i]=f[i]%mod;
42 }
43 void px(int *f,int *g,int n)
44 {for(int i=0;i<n;i++)f[i]=1ll*f[i]*g[i]%mod;}
45 void times(int *f,int *g,int len,int lim)
46 {
47     static int sav[Maxn<<1];
48     int n=1;for(n;n<len+len;n<=<=1);
49     clr(sav,n);cpy(sav,g,n);
50     NTT(f,1,n);NTT(sav,1,n);
51     px(f,sav,n);NTT(f,0,n);
52     clr(f+lim,n-lim);clr(sav,n);
53 }

```

全家桶（可能不全）

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  using ll = long long;
4  const ll MOD = 998244353;
5  const int N = 4e5+10;
6  int rev[N];
7  ll qpow(ll a, ll b){
8      ll ret = 1;
9      for(; b ; b >= 1){
10         if(b & 1) ret = ret *a % MOD;
11         a = a * a % MOD;
12     }
13     return ret;
14 }
15 ll ginv(ll x){
16     return qpow(x, MOD - 2);
17 }
18 ll add(ll x, ll y){
19     x += y;
20     if(x >= MOD) return x - MOD;
21     return x;
22 }
23 ll sub(ll x, ll y){
24     x -= y;
25     if(x < 0) return x + MOD;
26     return x;
27 }

```

```

28 ll w[N];
29 int preNTT(int len){
30     int deg = 1;
31     while(deg < len) deg *= 2;
32     for(int i = 0; i < deg; ++i)
33         rev[i] = (rev[i >> 1] >> 1) | (i & 1 ? deg / 2 : 0);
34     w[0] = 1;
35     w[1] = qpow(3, (MOD - 1) / deg);
36     for(int i = 2; i < deg; ++i) w[i] = w[i - 1] * w[1] % MOD;
37     return deg;
38 }
39 struct poly : vector<ll>{
40     using vector::vector;
41     using vector::operator [];
42     void cksize(int x){
43         if(size() < x) resize(x);
44     }
45     ll& operator()(int x){
46         cksize(x + 1);
47         return this->operator[](x);
48     }
49     friend poly diff(poly f){
50         for(int i = 0; i + 1 < f.size(); ++i){
51             f[i] = f[i + 1] * (i + 1) % MOD;
52         }
53         f.pop_back();
54         return f;
55     }
56     friend poly inte(poly f){
57         if(f.empty()) return {};
58         for(int i = int(f.size()) - 1; i >= 1; --i){
59             f[i] = f[i - 1] * ginv(i) % MOD;
60         }
61         f[0] = 0;
62         return f;
63     }
64     void makemod(){
65         for(auto & it : (*this)){
66             it = (it % MOD + MOD) % MOD;
67         }
68     }
69     friend void NTT(poly &f, int deg, int opt){
70         f.resize(deg);
71         // f.ckmod();
72         for(int i = 0; i < deg; ++i){
73             if(i < rev[i]) std::swap(f[i], f[rev[i]]);
74         }
75         for(int h = 2, m = 1, t = deg / 2; h <= deg; h *= 2, m *= 2, t /= 2){
76             for(int l = 0; l < deg; l += h){
77                 for(int i = l, j = 0; i < l + m; ++j, ++i){
78                     ll x = f[i], y = w[t * j] * f[i + m] % MOD;
79                     f[i] = add(x, y);
80                     f[i + m] = sub(x, y);
81                 }
82             }
83         }
84         f.makemod();
85         if(opt == -1){
86             reverse(f.begin() + 1, f.end());
87             ll iv = ginv(deg);
88             for(auto &it : f){
89                 it = it * iv % MOD;
90             }
91         }
92     }
93     friend poly dmul(poly f, const poly& g){
94         f.cksize(g.size());
95         for(int i = 0; i < g.size(); ++i){
96             f[i] = f[i] * g[i] % MOD;
97         }
98         return f;

```

```

99     }
100     friend poly operator - (poly f, const poly& g){
101         f.cksize(g.size());
102         for(int i = 0; i < g.size(); ++i){
103             f[i] = (f[i] - g[i] + MOD) % MOD;
104         }
105         return f;
106     }
107     friend poly operator *(poly f, poly g){
108         if(f.empty() || g.empty()) return {};
109         int len = f.size() + g.size() - 1;
110         int deg = preNTT(len);
111         NTT(f, deg, 1);
112         NTT(g, deg, 1);
113         f = dmul(std::move(f), g);
114         NTT(f, deg, -1);
115         f.resize(len);
116         return f;
117     }
118     friend poly pinv(const poly& f){
119         if(f.empty()) return {};
120         poly ret;
121         ret[0] = ginv(f[0]);
122         poly a;
123         for(int len = 2; len < (2 * f.size()); len *= 2){
124             a.assign(f.begin(), f.begin() + min(len, (int)f.size()));
125             int deg = preNTT(a.size() + 2 * ret.size() - 2);
126             NTT(ret, deg, 1);
127             NTT(a, deg, 1);
128             for(int i = 0; i < deg; ++i)
129                 ret[i] = (2 - a[i] * ret[i] % MOD) * ret[i] % MOD;
130             ret.makemod();
131             NTT(ret, deg, -1);
132             ret.resize(len); // to mod
133         }
134         ret.resize(f.size());
135         return ret;
136     }
137     friend poly sqrt(const poly& f){
138         poly res;
139         res[0] = 1;
140         poly a;
141         ll iv2 = ginv(2);
142         for(int len = 2; len < 2 * f.size(); len *= 2){
143             res.resize(len); //to ensure enough space & inv's mod is len
144             a.assign(f.begin(), f.begin() + min(len, (int)f.size()));
145             a = a * pinv(res);
146             for(int i = 0; i < len; ++i) res[i] = (res[i] + a[i]) * iv2 % MOD;
147         }
148         res.resize(f.size());
149         return res;
150     }
151     void prt()const{
152         for(auto it : (*this)){
153             cerr << it << " ";
154         }
155         cerr<<endl;
156     }
157     friend poly ln(const poly& f){
158         poly res = inte(diff(f) * pinv(f));
159         res.resize(f.size());
160         return res;
161     }
162     friend poly exp(const poly& f){
163         poly ret;
164         ret[0] = 1;
165         poly a, b;
166         for(int len = 2; len < f.size() * 2; len *= 2){
167             ret.resize(len); // to ensure INV's mod is len
168             a = ln(ret);
169             b.assign(f.begin(), f.begin() + min(len, (int)f.size()));

```

```

170         b = b - a;
171         b[0] ++ ;
172         ret = ret * b;
173         ret.resize(len); // to mod len
174     }
175     ret.resize(f.size());
176     return ret;
177 }
178 }f;
179 int read(){
180     int x = 0;
181     char ch = getchar();
182     while(!isdigit(ch)) ch = getchar();
183     while(isdigit(ch)) x = x * 10 + ch - '0', ch = getchar();
184     return x;
185 }
186 int main(){
187     ios::sync_with_stdio(false), cin.tie(0), cout.tie(0);
188     int n;
189     cin >> n;
190     f.resize(n);
191     for(int i = 0; i < n; ++i){
192         cin >> f[i];
193     }
194     f = exp(f);
195     for(int i = 0; i < n; ++i){
196         cout << f[i] << " ";
197     }
198     cout << endl;
199     return 0;
200 }
201

```

常用结论

杂

- 求 $B_i = \sum_{k=i}^n C_k^i A_k$, 即 $B_i = \frac{1}{i!} \sum_{k=i}^n \frac{1}{(k-i)!} \cdot k! A_k$, 反转后卷积。
- NTT 中, $\omega_n = \text{qpow}(G, (\text{mod}-1)/n)$ 。
- 遇到 $\sum_{i=0}^n [i \% k = 0] f(i)$ 可以转换为 $\sum_{i=0}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (\omega_k^i)^j f(i)$ 。(单位根卷积)
- 广义二项式定理 $(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$ 。

普通生成函数 / OGF

- 普通生成函数: $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$;
- $1 + x^k + x^{2k} + \dots = \frac{1}{1-x^k}$;
- 取对数后 $-\ln(1-x^k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^{ki}$ 即 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^i \otimes x^k$ (polymul_special);
- $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\ln(1-x)$;
- $1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{1-x^m}{1-x}$;
- $1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$ (借用导数, $nx^{n-1} = (x^n)'$);
- $C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^m x^m = (1+x)^m$ (二项式定理);
- $C_m^0 + C_{m+1}^1 x + C_{m+2}^2 x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ (归纳法证明);
- $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{(F_1 - F_0)x + F_0}{1-x-x^2}$ (F 为斐波那契数列, 列方程 $G(x) = xG(x) + x^2G(x) + (F_1 - F_0)x + F_0$);

- $\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ (H 为卡特兰数);
- 前缀和 $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{1-x} f(x)$;
- 五边形数定理: $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}$ 。

指数生成函数 / EGF

- 指数生成函数: $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$;
- 普通生成函数转换为指数生成函数: 系数乘以 $n!$;
- $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \exp x$;
- 长度为 n 的循环置换数为 $P(x) = -\ln(1-x)$, 长度为 n 的置换数为 $\exp P(x) = \frac{1}{1-x}$ (注意是**指数**生成函数)
 - n 个点的生成树个数是 $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{x^n}{n!}$, n 个点的生成森林个数是 $\exp P(x)$;
 - n 个点的无向连通图个数是 $P(x)$, n 个点的无向图个数是 $\exp P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{x^n}{n!}$;
 - 长度为 $n (n \geq 2)$ 的循环置换数是 $P(x) = -\ln(1-x) - x$, 长度为 n 的错排数是 $\exp P(x)$ 。

字符串

kmp

```

1 string s,t;cin>>s>>t;
2 int n=s.size(),m=t.size();
3 s=' '+s,t=' '+t;
4 vi nxt(t.size());
5 for(int i=2,j=0;i<=m;i++)
6 {
7     while(j&& t[j+1]!=t[i])j=nxt[j];
8     if(t[j+1]==t[i])j++;
9     nxt[i]=j;
10 }
11 for(int i=1,j=0;i<=n;i++)
12 {
13     while(j&& t[j+1]!=s[i])j=nxt[j];
14     if(t[j+1]==s[i])j++;
15     if(j==m)
16     {
17         cout<<i-m+1<<"\n";
18         j=nxt[j];
19     }
20 }
21 for(int i=1;i<=m;i++)cout<<nxt[i]<<" ";

```

ac

```

1 constexpr int MAXN=3e5+10;
2 int son[MAXN][26],nxt[MAXN],mmax[MAXN],tt;
3 inline void insert(char s[])
4 {
5     int i=0,p=0;
6     for(;s[i];i++)
7     {
8         int c=s[i]-'a';
9         if(!son[p][c])son[p][c]=++tt;
10        p=son[p][c];
11    }
12    mmax[p]=i;
13 }

```



```

14 inline void built()
15 {
16     queue<int>q;
17     for(int i=0;i<26;i++)if(son[0][i])q.push(son[0][i]);
18     while(!q.empty())
19     {
20         int u=q.front();q.pop();
21         for(int i=0;i<26;i++)
22         {
23             int&v=son[u][i];
24             if(v){q.push(v),nxt[v]=son[nxt[u]][i];}
25             else v=son[nxt[u]][i];
26         }cmax(mmax[u],mmax[nxt[u]]);
27     }
28 }

```

z 函数

```

1 int n=strlen(s+1);
2 z[1]=n;
3 for(int i=2,l=0,r=0;i<=n;i++)
4 {
5     int& p=z[i];
6     if(i<=r)p=min(z[i-l+1],r-i+1);
7     while(i+p<=n&&s[p+i]==s[p+1])p++;
8     if(i+p-1>r)l=i,r=i+p-1;
9 }
10
11 int m=strlen(t+1);
12 for(int i=1,l=0,r=0;i<=m;i++)
13 {
14     int& p=nxt[i];
15     if(i<=r)p=min(z[i-l+1],r-i+1);
16     while(i+p<=m&&t[p+i]==s[p+1])p++;
17     if(i+p-1>r)l=i,r=i+p-1;
18 }

```

sa

```

1 void get_sa(int n,int m)
2 {
3     for(int i=1;i<=n;i++)cnt[x[i]=a[i]]++;
4     for(int i=1;i<=m;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
5     for(int i=n;i;i--)sa[cnt[x[i]]--]=i;
6     for(int k=1;k<=n;k<=1)
7     {
8         int p=0;
9         for(int i=n-k+1;i<=n;i++)y[++p]=i;
10        for(int i=1;i<=n;i++)if(sa[i]>k)y[++p]=sa[i]-k;
11        for(int i=1;i<=m;i++)cnt[i]=0;
12        for(int i=1;i<=n;i++)cnt[x[i]]++;
13        for(int i=1;i<=m;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
14        for(int i=n;i;i--)sa[cnt[x[y[i]]]--]=y[i],y[i]=0;
15        swap(x,y);
16        p=1;x[sa[1]]=1;
17        for(int i=2;i<=n;i++)
18            x[sa[i]]=(y[sa[i]]==y[sa[i-1]]&&y[sa[i]+k]==y[sa[i-1]+k])?p:++p;
19        if(p==n)break;
20        m=p;
21    }
22    for(int i=1;i<=n;i++)rk[sa[i]]=i;
23    //for(int i=1;i<=n;i++)cerr<<rk[i]<<" ";
24    for(int i=1,k=0;i<=n;i++)
25    {
26        if(rk[i]==1)continue;
27        if(k)k--;
28        int j=sa[rk[i]-1];
29        while(i+k<=n&&j+k<=n&&a[i+k]==a[j+k])k++;
30        hi[rk[i]]=k;
31    }

```

32 }

sam

```
array<int,26> son[MAXN];
int fa[MAXN],len[MAXN];
int la=1,tt=1;
inline void insert(int c)
{
    int p=la,np=la+++tt;
    len[la]=len[p]+1;
    for(;p&&!son[p][c];p=fa[p])son[p][c]=np;
    if(!p)fa[np]=1;
    else
    {
        int q=son[p][c];
        if(len[q]==len[p]+1)fa[np]=q;
        else
        {
            int nq=+++tt;
            son[nq]=son[q];
            fa[nq]=fa[q];
            len[nq]=len[p]+1;
            fa[np]=fa[q]=nq;
            for(;p&&son[p][c]==q;p=fa[p])son[p][c]=nq;
        }
    }
}
```

gsum

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  // #pragma GCC optimize("Ofast")
3  using namespace std;
4  template<typename T>
5  inline bool cmax(T&x,const T& y){return x<y?x=y,1:0;}
6  template<typename T>
7  inline bool cmin(T&x,const T& y){return y<x?x=y,1:0;}
8  typedef long long ll;
9  typedef pair<int,int> pii;
10 typedef pair<ll,ll> pll;
11 typedef vector<int> vi;
12 typedef vector<vector<int>> > vii;
13 const int mod=998244353;
14 inline void MOD(int&x){x-=mod,x+=x>>31&mod;}
15 inline void MOD(ll& x){x-=mod,x+=x>>63&mod;}
16 inline int add(int x,int y){MOD(x+=y);return x;}
17 inline int mul(int x,int y){return 1ll*x*y%mod;}
18 template<typename ... A>inline int mul(const int& x,const A&... p){return 1ll*x*mul(p...)%mod;}
19 inline ll ksm(ll a,ll p=mod-2){ll ans=1;for(;p>>=1;a=a*a%mod)if(p&1)ans=ans*a%mod;return ans;}
20 typedef long double LD;
21 const int MAXN=2e6+10;
22 array<int,26>son[MAXN];
23 int fa[MAXN],len[MAXN],la=1,tt=1;
24 int insert(int c,int la)
25 {
26     if(son[la][c]&&len[son[la][c]]==len[la]+1)return son[la][c];
27     int p=la,np=+++tt,flag=0;
28     len[np]=len[p]+1;
29     for(;p&&!son[p][c];p=fa[p])son[p][c]=np;
30     if(!p){fa[np]=1;return np;}
31     int q=son[p][c];
32     if(len[q]==len[p]+1){fa[np]=q;return np;}
33     if(p==la)flag=1,np=0,tt--;
```

```

34     int nq=++tt;son[nq]=son[q],fa[nq]=fa[q],len[nq]=len[p]+1;
35     fa[q]=fa[np]=nq;
36     for(;p&&son[p][c]==q;p=fa[p])son[p][c]=nq;
37     return flag?nq:np;
38 }
39 int main()
40 {
41     ios::sync_with_stdio(0),cin.tie(0),cout.tie(0);cout<<fixed<<setprecision(10);
42     int n;cin>>n;
43     for(int i=1;i<=n;i++)
44     {
45         string s;cin>>s;
46         la=1;
47         for(auto p:s)la=insert(p-'a',la);
48     }
49     ll ans=0;
50     for(int i=2;i<=tt;i++)ans+=len[i]-len[fa[i]];
51     cout<<ans<<'\n';
52     cout<<tt<<'\n';
53     return 0;
54 }

```

pam

```

string s;
int son[MAXN][26],nxt[MAXN],len[MAXN],la=1,tt=1;
int cnt[MAXN];
inline int getfail(int p,int n)
{
    while(n-len[p]-1<=0||s[n-len[p]-1]!=s[n])p=nxt[p];
    return p;
}
inline int insert(char c,int n)
{
    c-='a';
    int p=getfail(la,n);
    if(!son[p][c])
    {
        nxt[++tt]=son[getfail(nxt[p],n)][c];
        son[p][c]=tt;
        len[tt]=len[p]+2;
        cnt[tt]=cnt[nxt[tt]]+1;
    }
    return cnt[la=son[p][c]];
}
int main()
{
    ios::sync_with_stdio(0),cin.tie(0),cout.tie(0);cout<<fixed<<setprecision(10);
    cin>>s;
    s=' '+s;
    nxt[0]=1,len[1]=-1;
    int la=0;
    for(int i=1;i<s.size();i++)
    {
        if(i>1)s[i]=(s[i]-'a'+la)%26+'a';
        la=insert(s[i],i);
        cout<<la<<' ';
    }

    return 0;
}

```

杂项

树上莫队

st[i] 为 i 加入到欧拉序的时间, ed[i] 为回溯时 i 加入欧拉序的时间设 st[x]<st[y]

若 lca(x,y)=x, 则 x,y 在一条链上, 在 st[x]~st[y] 这段区间中, 有的点出现了两次, 有的点没有出现, 这些点都是对答案无贡献的, 我们只需要统计出现 1 次的点就好。

若 lca(x,y)≠x, 此时 x,y 位于不同子树内, 我们只需要按照上面的方法统计 ed[x]~st[y] 这段区间内的点。

同时, 注意特判 lca。

```
1  const int N=300005;
2  int n,m;
3  vector<int> edge[N];
4  int fa[N],dep[N],siz[N],son[N];
5  int top[N],dfn[N],tot;
6  int rnk[N],Fir[N],Sec[N],cnt;
7  void dfs1(int x,int f){
8      fa[x]=f,dep[x]=dep[f]+1;
9      siz[x]=1,son[x]=-1;
10     rnk[++cnt]=x,Fir[x]=cnt;
11     for(int y:edge[x]){
12         if(y==f)continue;
13         dfs1(y,x);
14         siz[x]+=siz[y];
15         if(son[x]==-1||siz[y]>siz[son[x]])son[x]=y;
16     }rnk[++cnt]=x,Sec[x]=cnt;
17 }
18 void dfs2(int x,int t){
19     top[x]=t,dfn[x]=++tot;
20     if(son[x]==-1)return;
21     dfs2(son[x],t);
22     for(int y:edge[x]){
23         if(y==fa[x]||y==son[x])continue;
24         dfs2(y,y);
25     }
26 }
27 inline int Lca(int x,int y){
28     int fx=top[x],fy=top[y];
29     while(fx!=fy){
30         if(dep[fx]>=dep[fy])x=fa[fx];
31         else y=fa[fy];
32         fx=top[x],fy=top[y];
33     }
34     if(dfn[x]<dfn[y])return x;
35     else return y;
36 }
37 int bel[N];
38 int a[N],b[N],lsh;
39 int ans[N];
40 struct node{int l,r,lca,id;}q[N];
41 inline bool cmp(node a,node b){
42     return (bel[a.l]^bel[b.l])?(bel[a.l]<bel[b.l]):((bel[a.l]&1)?a.r<b.r:a.r>b.r);
43 }
44 int vis[N],Cnt[N];
45 int now;
46 inline void cal(int pos){
47     vis[pos]?(now-=!Cnt[a[pos]]):(now+=!Cnt[a[pos]]++);
48     vis[pos]^=1;
49 }
50 signed main()
51 {
52     n=read(),m=read();
53     For(i,1,n)a[i]=read(),b[i]=a[i];
54     sort(b+1,b+n+1);
55     lsh=unique(b+1,b+n+1)-(b+1);
56     For(i,1,n)a[i]=lower_bound(b+1,b+lsh+1,a[i])-b;
57     For(i,1,m-1){
58         int u=read(),v=read();
```

```

59     edge[u].push_back(v);
60     edge[v].push_back(u);
61 }dfs1(1,1);dfs2(1,1);
62 int SZ=sqrt(2*n);For(i,1,2*n)bel[i]=i/SZ;
63 For(i,1,m){
64     int l=read(),r=read(),lca=Lca(l,r);
65     if(Fir[l]>Fir[r])swap(l,r);
66     if(l==lca)q[i]=node{Fir[l],Fir[r],0,i};
67     else q[i]=node{Sec[l],Fir[r],lca,i};
68 }sort(q+1,q+m+1,cmp);
69 int l=1,r=0;
70 For(i,1,m){
71     int L=q[i].l,R=q[i].r,lca=q[i].lca;
72     while(r<R)cal(rnk[++r]);
73     while(r>R)cal(rnk[r--]);
74     while(l>L)cal(rnk[--l]);
75     while(l<L)cal(rnk[l++]);
76     if(lca)cal(lca);
77     ans[q[i].id]=now;
78     if(lca)cal(lca);
79 }
80 For(i,1,m)write(ans[i],'\n');
81
82 return 0;
83 }

```

带悔贪心

cyrccyr 今天在种树，他在一条直线上挖了 n 个坑。这 n 个坑都可以种树，但为了保证每一棵树都有充足的养料，cyrccyr 不会在相邻的两个坑中种树。而且由于 cyrccyr 的树种不够，他至多会种 k 棵树。假设 cyrccyr 有某种神能力，能预知自己在某个坑种树的获利会是多少（可能为负），请你帮助他计算出他的最大获利。

```

1  int n,k;
2  struct node{
3      int x,id;
4  }a[N];
5  bool operator<(node A,node B){return A.x<B.x;}
6  priority_queue<node> q;
7  int L[N],R[N];
8  int vis[N];
9  inline void del(int x){
10     L[x]=L[L[x]];
11     R[x]=R[R[x]];
12     R[L[x]]=x;
13     L[R[x]]=x;
14 }
15 inline void work(){
16     n=read(),k=read();
17     For(i,1,n){
18         a[i].x=read(),a[i].id=i;
19         q.push(a[i]);
20         L[i]=i-1; if(i!=n)R[i]=i+1;
21     }
22     int ans=0,res=0;
23     For(i,1,k){
24         while(vis[q.top().id])q.pop();
25         node tt=q.top(); q.pop();
26         res+=tt.x; ans=max(ans,res);
27         int _L=L[tt.id],_R=R[tt.id];
28         a[tt.id].x=a[_L].x+a[_R].x-tt.x;
29         vis[_L]=vis[_R]=1;
30         q.push(a[tt.id]);
31         del(tt.id);
32     }
33     write(ans,'\n');
34 }

```

模拟费用流

有 $x + y + z$ 个人，第 i 个人有 A_i 个金币， B_i 个银币， C_i 个铜币。

要选出 x 个人获得其金币，选出 y 个人获得其银币，选出 z 个人获得其铜币。在不重复选某个人的情况下，最大化获得的币的总数。

$x + y + z \leq 10^5$ 。

```
1 struct node{int x,id;};
2 inline bool operator<(const node &A,const node &B){
3     if(A.x!=B.x)return A.x<B.x;
4     return A.id<B.id;
5 }
6 int n;
7 int X,Y,Z;
8 int a[N],b[N],c[N];
9 priority_queue<node> q1,q2,q3;
10 int vis[N];
11 signed main()
12 {
13     X=read(),Y=read(),Z=read();n=X+Y+Z;
14     For(i,1,n)a[i]=read(),b[i]=read(),c[i]=read();
15     int ans=0;
16     For(i,1,n)ans+=a[i],b[i]-=a[i],c[i]-=a[i];
17     For(i,1,n)q1.push(node{b[i],i});
18     For(i,1,Y){
19         node tt=q1.top();q1.pop();
20         ans+=tt.x;vis[tt.id]=1;
21     }
22     // write(ans,'\n');
23     For(i,1,n){
24         if(vis[i])q3.push(node{c[i]-b[i],i});
25         else q2.push(node{c[i],i});
26     }
27     For(i,1,Z){
28         while(!q1.empty()&&vis[q1.top().id])q1.pop();
29         while(!q2.empty()&&vis[q2.top().id])q2.pop();
30         int v1,v2,v3;
31         if(q1.empty())v1=-1e9; else v1=q1.top().x;
32         if(q2.empty())v2=-1e9; else v2=q2.top().x;
33         if(q3.empty())v3=-1e9; else v3=q3.top().x;
34         // write(v1,' ',v2,' ',v3,'\n');
35         if(v2>=v1+v3){
36             ans+=v2;node tt=q2.top();q2.pop();
37             vis[tt.id]=2;
38         }else{
39             ans+=v1+v3;node tt1=q1.top(),tt3=q3.top();
40             q1.pop();q3.pop();vis[tt1.id]=vis[tt3.id]=1;
41             q3.push(node{c[tt1.id]-b[tt1.id],tt1.id});
42         }
43     }
44     // For(i,1,n)write(vis[i],' '); write('\n');
45     write(ans,'\n');
46     return 0;
47 }
```

把 N 个人派遣到 K 个城市，每个城市需要的人数是固定的。

把不同的人派遣到不同城市，代价都是不同的，求最小代价。 $n1e5\ k10$

```
1 int S,T;
2 vector<pair<int,int>> edge[21];
3 int dis[21],vis[21],pre[21];
4 inline void spfa(){
5     queue<int> q;
6     memset(dis,-0x3f,sizeof(dis));
7     memset(vis,0,sizeof(vis));
8     q.push(S);dis[S]=0,vis[S]=1;
9     while(!q.empty()){
10         int x=q.front();q.pop();
11         vis[x]=0;
12         for(auto yy:edge[x]){
```

```

13         int y=yy.first,w=yy.second;
14         if(dis[y]<dis[x]+w){
15             dis[y]=dis[x]+w,pre[y]=x;
16             if(!vis[y]){vis[y]=1;q.push(y);}
17         }
18     }
19 }
20 }
21 int n,k;
22 int a[N];
23 int c[N][11];
24 priority_queue<pair<int,int>> q[11][11];
25 int id[11][11],bel[N];
26 inline void cl(int x,int y){
27     while(!q[x][y].empty()&&bel[q[x][y].top().second]!=id[x][y])q[x][y].pop();
28 }
29 inline void update(int x,int p){
30     bel[x]=p;
31     For(i,1,k)if(i!=p)q[i][p].push(mk(c[x][i]-c[x][p],x));
32 }
33 int ans;
34 inline void work(){
35     For(i,1,T)edge[i].clear();
36     For(i,1,k)if(a[i])edge[S].push_back(mk(i,0));
37     For(i,1,k){
38         cl(i,i);if(!q[i][i].empty())edge[i].push_back(mk(T,q[i][i].top().first));
39     }
40     For(i,1,k)For(j,1,k)if(i!=j){
41         cl(i,j);if(!q[i][j].empty())edge[i].push_back(mk(j,q[i][j].top().first));
42     }spfa();ans+=dis[T];
43     // exit(0);
44     vector<int> vec;
45     int x=T; while(x)vec.push_back(x),x=pre[x];
46     // for(int pp:vec)write(pp,' ');
47     // exit(0);
48     for(int i=0;i+1<(signed)vec.size();++i){
49         // write(i,'\n');
50         if(vec[i]==T){
51             int p=vec[i+1];
52             cl(p,p);update(q[p][p].top().second,p);
53         }else if(vec[i+1]==S){
54             a[vec[i]]--;
55         }else{
56             cl(vec[i+1],vec[i]);
57             update(q[vec[i+1]][vec[i]].top().second,vec[i+1]);
58         }
59     }
60 }
61 signed main()
62 {
63     n=read(),k=read(),S=k+1,T=S+1;
64     For(i,1,k)a[i]=read();
65     For(i,1,k)For(j,1,k)if(i!=j)id[i][j]=j;
66     For(i,1,n)For(j,1,k){
67         c[i][j]=-read();
68         q[j][j].push(mk(c[i][j],i));
69     }
70     For(i,1,n)work();
71     write(-ans,'\n');
72     return 0;;
73 }

```

约瑟夫问题

n 个人编号 $0, 1, 2, \dots, n-1$ ，每次数到 k 出局，求最后剩下的人的编号。

$\mathcal{O}(N)$ 。

```

1 int jos(int n,int k){
2     int res=0;
3     repeat(i,1,n+1)res=(res+k)%i;

```

```

4     return res; // res+1, 如果编号从 1 开始
5 }

```

$\mathcal{O}(K \log N)$, 适用于 K 较小的情况。

```

1 int jos(int n,int k){
2     if(n==1 || k==1)return n-1;
3     if(k>n)return (jos(n-1,k)+k)%n; // 线性算法
4     int res=jos(n-n/k,k)-n%k;
5     if(res<0)res+=n; // mod n
6     else res+=res/(k-1); // 还原位置
7     return res; // res+1, 如果编号从 1 开始
8 }

```

日期换算（基姆拉尔森公式）

已知年月日，求星期数。

```

1 int week(int y,int m,int d){
2     if(m<=2)m+=12,y--;
3     return (d+2*m+3*(m+1)/5+y+y/4-y/100+y/400)%7+1;
4 }

```

博弈论

巴什博弈

有 N 个石子，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

规定：每人每次可以取走 $X(1 \leq X \leq M)$ 个石子，拿到最后一颗石子的一方获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

两名玩家轮流报数。

规定：第一个报数的人可以报 $X(1 \leq X \leq M)$ ，后报数的人需要比前者所报数大 $Y(1 \leq Y \leq M)$ ，率先报到 N 的人获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

- $N = K \cdot (M + 1)$ (其中 $K \in \mathbb{N}^+$)，后手必胜（后手可以控制每一回合结束时双方恰好取走 $M + 1$ 个，重复 K 轮后即胜利）；
- $N = K \cdot (M + 1) + R$ (其中 $K \in \mathbb{N}^+, 0 < R < M + 1$)，先手必胜（先手先取走 R 个，之后控制每一回合结束时双方恰好取走 $M + 1$ 个，重复 K 轮后即胜利）。

扩展巴什博弈

有 N 颗石子，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

规定：每人每次可以取走 $X(a \leq X \leq b)$ 个石子，如果最后剩余物品的数量小于 a 个，则不能再取，拿到最后一颗石子的一方获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

- $N = K \cdot (a + b)$ 时，后手必胜；
- $N = K \cdot (a + b) + R_1$ (其中 $K \in \mathbb{N}^+, 0 < R_1 < a$) 时，后手必胜（这些数量不够再取一次，先手无法逆转局面）；
- $N = K \cdot (a + b) + R_2$ (其中 $K \in \mathbb{N}^+, a \leq R_2 \leq b$) 时，先手必胜；
- $N = K \cdot (a + b) + R_3$ (其中 $K \in \mathbb{N}^+, b < R_3 < a + b$) 时，先手必胜（这些数量不够再取一次，后手无法逆转局面）；

Nim 博弈

有 N 堆石子，给出每一堆的石子数量，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

规定：每人每次任选一堆，取走正整数颗石子，拿到最后一颗石子的一方获胜（注：几个特点是**不能跨堆**、**不能不拿**）。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

记初始时各堆石子的数量 (A_1, A_2, \dots, A_n) ，定义尼姆和 $Sum_N = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$ 。

当 $Sum_N = 0$ 时先手必败，反之先手必胜。

Nim 游戏具体取法

先计算出尼姆和，再对每一堆石子计算 $A_i \oplus Sum_N$ ，记为 X_i 。

若得到的值 $X_i < A_i$ ， X_i 即为一个可行解，即剩下 X_i 颗石头，取走 $A_i - X_i$ 颗石头（这里取小于号是因为至少要取走 1 颗石子）。

Moore' s Nim 游戏 (Nim-K 游戏)

有 N 堆石子，给出每一堆的石子数量，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

规定：每人每次任选不超过 K 堆，对每堆都取走不同的正整数颗石子，拿到最后一颗石子的一方获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

把每一堆石子的石子数用二进制表示，定义 One_i 为二进制第 i 位上 1 的个数。

以下局面先手必胜：

对于每一位， $One_1, One_2, \dots, One_N$ 均不为 $K + 1$ 的倍数。

Anti-Nim 游戏 (反 Nim 游戏)

有 N 堆石子，给出每一堆的石子数量，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

规定：每人每次任选一堆，取走正整数颗石子，拿到最后一颗石子的一方出局。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

- 所有堆的石头数量均不超过 1，且 $Sum_N = 0$ （也可看作“且有偶数堆”）；
- 至少有一堆的石头数量大于 1，且 $Sum_N \neq 0$ 。

阶梯 - Nim 博弈

有 N 级台阶，每一级台阶上均有一定数量的石子，给出每一级石子的数量，两名玩家轮流行动，按以下规则操作石子：

规定：每人每次任选一级台阶，拿走正整数颗石子放到下一级台阶中，已经拿到地面上的石子不能再拿，拿到最后一颗石子的一方获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

对奇数台阶做传统 Nim 博弈，当 $Sum_N = 0^{**}$ 时先手必败，反之先手必胜。^{**}

SG 游戏 (有向图游戏)

我们使用以下几条规则来定义暴力求解的过程：

- 使用数字来表示输赢情况，0 代表局面必败，非 0 代表存在必胜可能，我们称这个数字为这个局面的 SG 值；
- 找到最终态，根据题意人为定义最终态的输赢情况；
- 对于非最终态的某个节点，其 SG 值为所有子节点的 SG 值取 mex；
- 单个游戏的输赢态即对应根节点的 SG 值是否为 0，为 0 代表先手必败，非 0 代表先手必胜；
- 多个游戏的总 SG 值为单个游戏 SG 值的异或和。

使用哈希表，以 $\mathcal{O}(N + M)$ 的复杂度计算。

```
1 int n, m, a[N], num[N];
2 int sg(int x) {
3     if (num[x] != -1) return num[x];
4
5     unordered_set<int> S;
6     for (int i = 1; i <= m; ++ i)
7         if (x >= a[i])
8             S.insert(sg(x - a[i]));
9
10    for (int i = 0; ; ++ i)
11        if (S.count(i) == 0)
12            return num[x] = i;
13 }
14 void Solve() {
15     cin >> m;
```

```

16     for (int i = 1; i <= m; ++ i) cin >> a[i];
17     cin >> n;
18
19     int ans = 0; memset(num, -1, sizeof num);
20     for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
21         int x; cin >> x;
22         ans ^= sg(x);
23     }
24
25     if (ans == 0) no;
26     else yes;
27 }

```

Anti-SG 游戏 (反 SG 游戏)

SG 游戏中最先不能行动的一方获胜。

以下局面先手必胜：

- 单局游戏的 SG 值均不超过 1，且总 SG 值为 0；
- 至少有一局单局游戏的 SG 值大于 1，且总 SG 值不为 0。

在本质上，这与 Anti-Nim 游戏的结论一致。

Lasker' s-Nim 游戏 (Multi-SG 游戏)

有 N 堆石子，给出每一堆的石子数量，两名玩家轮流行动，每人每次任选以下规定的一种操作石子：

- 任选一堆，取走正整数颗石子；
- 任选数量大于 2 的一堆，分成两堆非空石子。

拿到最后一颗石子的一方获胜。双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

本题使用 SG 函数求解，SG 值定义为：

$$SG(x) = \begin{cases} x-1 & , x \bmod 4 = 0 \\ x & , x \bmod 4 = 1 \\ x & , x \bmod 4 = 2 \\ x+1 & , x \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Every-SG 游戏

给出一个有向无环图，其中 K 个顶点上放置了石子，两名玩家轮流行动，按以下规则操作石子：

移动图上所有还能够移动的石子；

无法移动石子的一方出局。双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

定义 $step$ 为某一局游戏至多需要经过的回合数。

以下局面先手必胜： $step$ 为奇数。

威佐夫博弈

有两堆石子，给出每一堆的石子数量，两名玩家轮流行动，每人每次任选以下规定的一种操作石子：

- 任选一堆，取走正整数颗石子；
- 从两队中同时取走正整数颗石子。

拿到最后一颗石子的一方获胜。双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

以下局面先手必败：

$(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), \dots$ 具体而言，每一对的第一个数为此前没出现过的最小整数，第二个数为第一个数加上 $1, 2, 3, 4, \dots$ 。

更一般地，对于第 k 对数，第一个数为 $First_k = \left\lfloor \frac{k*(1+\sqrt{5})}{2} \right\rfloor$ ，第二个数为 $Second_k = First_k + k$ 。

其中，在两堆石子的数量均大于 10^9 次时，由于需要使用高精度计算，我们需要人为定义 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的取值为 *lorry* = 1.618033988749894848204586834。

```
1 const double lorry = (sqrt(5.0) + 1.0) / 2.0;
2 //const double lorry = 1.618033988749894848204586834;
3 void Solve() {
4     int n, m; cin >> n >> m;
5     if (n < m) swap(n, m);
6     double x = n - m;
7     if ((int)(lorry * x) == m) cout << "lose\n";
8     else cout << "win\n";
9 }
```

斐波那契博弈

有一堆石子，数量为 N ，两名玩家轮流行动，按以下规则取石子：

先手第 1 次可以取任意多颗，但不能全部取完，此后每人取的石子数不能超过上个人的两倍，拿到最后一颗石子的一方获胜。

双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

当且仅当 N 为斐波那契数时先手必败。

```
1 int fib[100] = {1, 2};
2 map<int, bool> mp;
3 void Force() {
4     for (int i = 2; i <= 86; ++ i) fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
5     for (int i = 0; i <= 86; ++ i) mp[fib[i]] = 1;
6 }
7 void Solve() {
8     int n; cin >> n;
9     if (mp[n] == 1) cout << "lose\n";
10    else cout << "win\n";
11 }
```

树上删边游戏

给出一棵 N 个节点的有根树，两名玩家轮流行动，按以下规则操作：

选择任意一棵子树并删除（即删去任意一条边，不与根相连的部分会同步被删去）；

删掉最后一棵子树的一方获胜（换句话说，删去根节点的一方失败）。双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

结论：当根节点 SG 值非 1 时先手必胜。

相较于传统 SG 值的定义，本题的 SG 函数值定义为：

- 叶子节点的 SG 值为 0。
- 非叶子节点的 SG 值为其所有孩子节点 SG 值 +1 的异或和。

```
1 auto dfs = [&](auto self, int x, int fa) -> int {
2     int x = 0;
3     for (auto y : ver[x]) {
4         if (y == fa) continue;
5         x ^= self(self, y, x);
6     }
7     return x + 1;
8 };
9 cout << (dfs(dfs, 1, 0) == 1 ? "Bob\n" : "Alice\n");
```

无向图删边游戏（Fusion Principle 定理）

给出一张 N 个节点的无向联通图，有一个点作为图的根，两名玩家轮流行动，按以下规则操作：

选择任意一条边删除，不与根相连的部分会同步被删去；

删掉最后一条边的一方获胜。双方均采用最优策略，询问谁会获胜。

- 对于奇环，我们将其缩成一个新点 + 一条新边；
- 对于偶环，我们将其缩成一个新点；

- 所有连接到原来环上的边全部与新点相连。

此时，本模型转化为“树上删边游戏”。

gzy

缺生源

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2  // #pragma GCC optimize("Ofast")
3  using namespace std;
4  template<typename T>
5  inline bool cmax(T&x,const T& y){return x<y?x=y,1:0;}
6  template<typename T>
7  inline bool cmin(T&x,const T& y){return y<x?x=y,1:0;}
8  typedef long long ll;
9  typedef pair<int,int> pii;
10 typedef pair<ll,ll> pll;
11 typedef vector<int> vi;
12 typedef vector<vector<int>> > vii;
13 const int mod=998244353;
14 inline void MOD(int&x){x-=mod,x+=x>>31&mod;}
15 inline void MOD(ll& x){x-=mod,x+=x>>63&mod;}
16 inline int add(int x,int y){MOD(x+=y);return x;}
17 inline int mul(int x,int y){return 1ll*x*y%mod;}
18 template<typename ... A>inline int mul(const int& x,const A&... p){return 1ll*x*mul(p...)%mod;}
19 inline ll ksm(ll a,ll p=mod-2){ll ans=1;for(;p>=1;a=a*a%mod)if(p&1)ans=ans*a%mod;return ans;}
20 typedef long double LD;
21 const int MAXN=2e5+10;

```

圆方树

```

1  const intMAXN=2e6+10;
2  struct edge{int from,v;}e[MAXN*2];
3  int head[MAXN],cnt,n,m;
4  inline void addd(int u,int v)
5  {e[++cnt]=(edge){head[u],v},head[u]=cnt;}
6  #define tree(u) for(int i=head[u],v=e[i].v;i;i=e[i].from,v=e[i].v)
7  vector<int>g[MAXN];
8  int tt,tot,S;
9  int dfn[MAXN],low[MAXN],w[MAXN],s[MAXN],top;
10 inline void add(int u,int v){g[u].push_back(v),g[v].push_back(u);}
11 void tarjan(int u,int fa)
12 {
13     dfn[u]=low[u]=++tt,s[++top]=u,S++;w[u]=-1;
14     tree(u)
15     {
16         if(!dfn[v])
17         {
18             tarjan(v,u);
19             if(low[v]>=dfn[u])
20             {
21                 tot++;
22                 add(u,tot);w[tot]=1;
23                 int x=0;
24                 do
25                 {
26                     x=s[top--];w[tot]++;
27                     add(x,tot);
28                 }while(x!=v);
29             }
30             cmin(low[u],low[v]);
31         }
32         else if(v!=fa)cmin(low[u],dfn[v]);
33     }

```

李超线段树

```
1 struct node{LD k,b;inline LD val(LL x){return k*x+b;}};
2 node f[MAXN];
3 int id[MAXN];
4 const LD eps=1e-6;
5 inline bool better(int x,int y,int p)
6 {
7     auto a=f[x].val(p),b=f[y].val(p);
8     if(a-b>eps)return 1;
9     else if(fabs(a-b)<eps&& x<y)return 1;
10    else return 0;
11 }
12 struct xds
13 {
14     xds *ls,*rs;
15     int l,r;
16     int id;
17     xds(int L,int R):l(L),r(R),id(0)
18     {
19         if(L==R)return;
20         int mid=(L+R)>>1;
21         ls=new xds(L,mid),rs=new xds(mid+1,R);
22     }
23     void update(int ql,int qr,int u)
24     {
25         int mid=(l+r)>>1;
26         if(ql<=l&&r<=qr)
27         {
28             if(!id)return id=u,void();
29             if(l==r)
30             {
31                 if(better(u,id,l))id=u;
32                 return;
33             }
34             if(f[u].val(mid)>f[id].val(mid))swap(u,id);
35             if(better(u,id,l)) ls->update(ql,qr,u);
36             else if(better(u,id,r)) rs->update(ql,qr,u);
37             return;
38         }
39         if(ql<=mid) ls->update(ql,qr,u);
40         if(qr >mid) rs->update(ql,qr,u);
41     }
42     int ask(int qq)
43     {
44         if(l==r)return id;
45         int mid=(l+r)>>1;
46         int ans=qq<=mid?ls->ask(qq):rs->ask(qq);
47         if(better(id,ans,qq))ans=id;
48         return ans;
49     }
50 }
51 };
52
```

斯坦纳树

```
1 vector<pii>e[MAXN];
2 int F[1<<10][MAXN];
3 bool is[MAXN];
4 signed main()
5 {
6     ios::sync_with_stdio(0),cin.tie(0),cout.tie(0);
7     int n,m,p;
8     cin>>n>>m>>p;
9     int u,v,w;
10    for(int i=1;i<=m;i++)
11    {
12        cin>>u>>v>>w;
13        e[u].emplace_back(v,w);
14        e[v].emplace_back(u,w);
15    }
16 }
```

```

15     }
16     memset(F,0x3f,sizeof(F));
17     for(int i=0;i<p;i++)
18     {
19         int x;cin>>x;
20         F[1<<i][x]=0;
21     }
22     for(int s=1;s<(1<<p);s++)
23     {
24         for(int x=s&(s-1);x=s&(x-1))
25             for(int i=1;i<=n;i++)
26                 cmin(F[s][i],F[x][i]+F[s^x][i]);
27         queue<int>q;
28         for(int i=1;i<=n;i++) q.push(i),is[i]=1;
29         while(!q.empty())
30         {
31             int u=q.front();q.pop();is[u]=0;
32             for(auto&p:e[u])if(cmin(F[s][p.X],F[s][u]+p.Y))
33             {
34                 if(!is[p.X])q.push(p.X),is[p.X]=1;
35             }
36         }
37     }
38     int ans=1e9;
39     for(int i=1;i<=n;i++)cmin(ans,F[(1<<p)-1][i]);
40     cout<<ans;
41     return 0;
42 }

```

虚树

```

1     const int MAXN=3e5+10;
2     vector<pii> e[MAXN];
3     vi g[MAXN];
4     const int K=20;
5     pii F[K+1][MAXN*2];
6     int tt;
7     int dfn[MAXN],d[MAXN];
8     int mmin[MAXN];
9     int h[MAXN*2];
10    void dfs(int u,int fa)
11    {
12        dfn[u]=++tt;
13        F[0][tt]={d[u],u};
14        for(const pii&p:e[u])
15        {
16            int v=p.X;if(v!=fa)d[v]=d[u]+1,mmin[v]=min(mmin[u],p.Y),dfs(v,u),F[0][++tt]={d[u],u};
17        }
18    }
19 }
20 inline int LCA(int x,int y)
21 {
22     x=dfn[x],y=dfn[y];
23     if(x>y)swap(x,y);int k=31-__builtin_clz(y-x+1);
24     return min(F[k][x],F[k][y-(1<<k)+1]).Y;
25 }
26 int s[MAXN],top;
27 bool is[MAXN];
28 ll dp(int u)
29 {
30     ll sum=0;
31     for(const int&v:g[u])sum+=dp(v);
32     if(u==1)
33     {
34         if(is[u])sum=mmin[u];
35         g[u].clear(),is[u]=0;
36         return sum;
37     }
38     if(is[u])sum=mmin[u];
39     else cmin(sum,(ll)mmin[u]);
40     g[u].clear(),is[u]=0;

```

```

41     return sum;
42 }
43 signed main()
44 {
45     ios::sync_with_stdio(0),cin.tie(0),cout.tie(0);
46     int n,m;
47     cin>>n;
48     int u,v,w;
49     for(int i=1;i<n;i++)cin>>u>>v>>w,e[u].emplace_back(v,w),e[v].emplace_back(u,w);
50     mmin[1]=1e9;
51     dfs(1,0);
52     for(int i=1;i<=K;i++)
53         for(int j=1;j+(1<<i)-1<=tt;j++)
54             F[i][j]=min(F[i-1][j],F[i-1][j+(1<<(i-1))]);
55     cin>>m;
56     while(m--)
57     {
58         int k;cin>>k;
59         for(int i=1;i<=k;i++)cin>>h[i],is[h[i]]=1;
60         sort(h+1,h+k+1,[&](const int&x,const int&y){return dfn[x]<dfn[y]});
61         s[top=1]=h[1];
62         for(int i=2;i<=k;i++)
63         {
64             int u=h[i];
65             int l=LCA(u,s[top]);
66             while(1)
67             {
68                 if(d[l]>=d[s[top-1]])
69                 {
70                     if(l==s[top])break;
71                     g[l].push_back(s[top]);
72                     if(l!=s[top-1])s[top]=l;
73                     else top--;
74                     break;
75                 }
76                 else g[s[top-1]].push_back(s[top]),top--;
77             }
78             s[++top]=u;
79         }
80         while(top>1)g[s[top-1]].push_back(s[top]),top--;
81         cout<<dp(s[1])<<'\n';
82     }
83     return 0;
84 }

```

支配树

```

1  const int MAXN=65534+10;
2  const int K=16;
3  int F[K+1][MAXN],d[MAXN];
4  vi e[MAXN];
5  inline int LCA(int u,int v)
6  {
7      if(!u||!v)return u|v;
8      if(d[u]<d[v])swap(u,v);
9      for(int i=K;~i;i--)if(d[F[i][u]]>=d[v])u=F[i][u];
10     if(u==v)return u;
11     for(int i=K;~i;i--)if(F[i][u]!=F[i][v])u=F[i][u],v=F[i][v];
12     return F[0][u];
13 }
14 int in[MAXN],siz[MAXN];
15 int main()
16 {
17     ios::sync_with_stdio(0),cin.tie(0),cout.tie(0);cout<<fixed<<setprecision(10);
18     int n;cin>>n;
19     for(int i=1,x;i<=n;i++)
20     {
21         cin>>x;
22         while(x)
23         {
24             e[x].push_back(i);

```

```

25         in[i]++;
26         cin>>x;
27     }
28 }
29 for(int i=1;i<=n;i++)if(!in[i])in[i]=1,e[n+1].push_back(i);
30 vi q;q.push_back(n+1);int h=0;
31 while(h<q.size())
32 {
33     int u=q[h++];
34     d[u]=d[F[0][u]]+1;
35     for(int i=1;i<=K;i++)F[i][u]=F[i-1][F[i-1][u]];
36     for(auto&v:e[u])
37     {
38         F[0][v]=LCA(F[0][v],u);
39         if(!--in[v])q.push_back(v);
40     }
41 }
42 for(int i=q.size()-1;~i;i--)
43 {
44     siz[F[0][q[i]]]+=siz[q[i]]+1;
45 }
46 for(int i=1;i<=n;i++)cout<<siz[i]<<'\\n';
47 return 0;
48 }

```

LCA

```

1  vi e[MAXN];
2  int dfn[MAXN],tt,F[K+1][MAXN];
3  void dfs(int u,int fa)
4  {
5      F[0][dfn[u]=++tt]=fa;
6      for(auto&v:e[u])if(v!=fa)dfs(v,u);
7  }
8  inline int Min(int u,int v){return dfn[u]<dfn[v]?u:v;}
9  inline int LCA(int u,int v)
10 {
11     if(u==v)return u;
12     u=dfn[u],v=dfn[v];
13     if(u>v)swap(u,v);
14     int k=__lg(v-u++);
15     return Min(F[k][u],F[k][v-(1<k)+1]);
16 }

```

LCT

```

1  const int MAXN=3e5+10;
2  struct node
3  {
4      int son[2],fa;
5      bool rev;
6      int w,mmin;
7  }t[MAXN];
8  #define ls t[p].son[0]
9  #define rs t[p].son[1]
10 inline bool isroot(int p){return p!=t[t[p].fa].son[0]&&p!=t[t[p].fa].son[1];}
11 const int INF=2e9;
12 int n,m,T;
13 inline void push_up(int p)
14 {
15     t[p].mmin=p>n?t[p].w:INF;
16     if(ls)cmin(t[p].mmin,t[ls].mmin);
17     if(rs)cmin(t[p].mmin,t[rs].mmin);
18 }
19 inline void rev(int p){swap(ls,rs),t[p].rev^=1;}
20 inline void push_down(int p)
21 {
22     if(t[p].rev)
23     {
24         if(ls)rev(ls);if(rs)rev(rs);

```



```

25         t[p].rev=0;
26     }
27 }
28 inline void rotate(int x)
29 {
30     int y=t[x].fa,z=t[y].fa;
31     if(!isroot(y)) t[z].son[y==t[z].son[1]]=x;t[x].fa=z;
32     int r=x==t[y].son[1];z=t[x].son[r^1],t[x].son[r^1]=y;
33     t[y].fa=x,t[y].son[r]=z,t[z].fa=y;push_up(y);
34 }
35 inline void splay(int p)
36 {
37     static int s[MAXN],top;
38     s[top]=p;int x=p;
39     while(!isroot(p))s[++top]=p=t[p].fa;
40     while(top)push_down(s[top--]);
41     while(!isroot(x))
42     {
43         int y=t[x].fa;if(!isroot(y))rotate(((x==t[y].son[0])!=(y==t[t[y].fa].son[0]))?x:y);
44         rotate(x);
45     }push_up(x);
46 }
47 inline void access(int p)
48 {
49     for(int i=0;p;p=t[i=p].fa)splay(p),rs=i,push_up(p);
50 }
51 inline void makeroot(int p){access(p),splay(p),rev(p);}
52 inline void link(int x,int y)
53 {
54     makeroot(x),t[x].fa=y;
55 }
56 inline void cut(int x,int y)
57 {
58     makeroot(x),access(y),splay(y);
59     t[x].fa=0,t[y].son[0]=0;
60 }

```