

1. 初始化：将 `start` 加入待扩展列表，路径代价为0。
2. 扩展节点：从待扩展列表中选择代价最小的节点进行扩展，计算该节点的相邻节点的路径代价，并将它们加入待扩展列表。

加入到待扩展列表中。如果相邻节点已经在待扩展列表中，更新其路径代价为更小的值。

3. 判断终点：如果待扩展列表为空，则搜索失败；如果待扩展列表中的节点是终点，则搜索成功，返回 `path`。

UCS算法的时间复杂度取决于图的大小和复杂度，并且需要扩展所有可达节点，其时间复杂度为  $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$ ，空间复杂度为  $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$

( $b$ : 最大分支因子,  $C^*$ : 最短路径的代价,  $\epsilon$ : 代价最小的两条路径之间的比率)

## A\*算法

A\*算法是一种启发式搜索算法，在USC算法的基础上增加了启发式函数来引导搜索方向，从而提高搜索效率。

启发式函数用于预测从当前节点到目标节点的最短路径长度，以便选择最有可能导向目标的节点进行扩展。A\*算法在保证最优解的情况下，相对于UCS算法，可以更快地找到起点到终点的最短路径。

### 算法步骤

1. 初始化：将起点加入待扩展列表 `open list`，路径代价为0。
2. 扩展节点：从待扩展列表中选择f值最小的节点进行扩展

$$f(current) = g(current \text{到起点的路径代价}) + h(current \text{到终点的启发式函数值}) \quad (1)$$

对于 `current` 的相邻节点，计算从起点到该节点的路径代价，并更新其启发式函数值和前驱节点。

3. 判断终点：如果待扩展列表 `open list` 为空，则搜索失败；如果待扩展列表中的节点是终点，则搜索成功，返回路径。

启发式函数的选择：

1. 可采纳： $h(n) \leq h^*(n)$
2. 单调： $h(n) \leq cost(n, n') + h(n')$
3. 常用的启发式函数：曼哈顿距离、欧式距离、切比雪夫距离等

## 2.伪代码

### 一致代价搜索

`Graph` 表示一个包含节点和边的图，`start` 表示起点，`goal` 表示终点。`frontier` 表示待扩展的节点列表，`came_from` 表示每个节点的前驱节点，`cost` 表示从起点到每个节点的路径代价。`neighbors(current)` 表示获取当前节点 `current` 的相邻节点，`cost(current, next)` 表示获取从节点 `current` 到节点 `next` 的边的代价。

算法流程：

- 通过一个优先队列（`PriorityQueue`）来存储待扩展的节点列表，按照路径代价从小到大排序。
- 每次扩展将路径代价最小的节点从队列中取出，然后对其相邻节点进行扩展。若从起点到相邻节点的新路径代价更小，则更新路径代价和前驱节点，并将相邻节点加入待扩展列表。
- 如果搜索成功，返回起点到终点的最短路径，否则返回空值。

```
1 function UniformCostSearch(Graph, start, goal)
2     frontier = PriorityQueue()    // 存储待扩展的节点，按照路径代价从小到大排序
```

```

3     frontier.put(start, 0)          // 将起点加入待扩展列表
4     came_from = {}                 // 存储每个节点的前驱节点
5     cost = {}                      // 存储起点到每个节点的路径代价
6     came_from[start] = None
7     cost[start] = 0
8
9     while not frontier.empty():
10        current = frontier.get()    // 获取路径代价最小的节点
11        if current == goal          // 若当前节点为终点，则返回路径
12            return reconstruct_path(came_from, start, goal)
13
14        for next in Graph.neighbors(current) // 对当前节点的相邻节点进行扩展
15            new_cost = cost[current] + Graph.cost(current, next)
16            // 计算从起点到next的路径代价
17            if next not in cost or new_cost < cost[next]
18                // 若next未被扩展过或新路径比原路径更优
19                cost[next] = new_cost // 更新路径代价
20                priority = new_cost   // 以路径代价作为优先级
21                frontier.put(next, priority) // 将next加入待扩展列表
22                came_from[next] = current // 更新next的前驱节点为current
23
24    return None // 若搜索失败，返回空值
25
26 function reconstruct_path(came_from, start, goal) // 通过前驱节点重构路径
27     path = [goal]
28     while path[-1] != start
29         path.append(came_from[path[-1]])
30     path.append(came_from[start])
31     path.reverse()
32     return path

```

## A\*算法

在A\*算法中，使用的`open_list`、`pre`（前驱节点）和`cost`（存储起点到每个节点的g值）和一个启发式函数`heuristic`，用于预测从当前节点到目标节点的最短路径长度，以便选择最有可能导向目标的节点进行扩展。在本案例中，使用Manhattan距离作为启发式函数。

算法流程：

- 从`open_list`中获取f最小的节点`current`，然后对其相邻节点进行扩展。
- 对于每个相邻节点`next`，计算从起点到该节点的路径代价`new_cost`，如果该节点未被扩展过或新路径比原路径更优，则更新其`cost`值和前驱节点`pre`，并计算该节点的`f`。
- 将该节点加入到`open_list`中，按照其`f`大小排序。
- 路径重构函数`reconstruct_path`通过前驱节点回溯路径。

```

1 function AStarSearch(Graph, start, goal)
2     open_list = PriorityQueue() // 存储待扩展的节点，按照f值（g值+估价函数值）从小到大排序
3     open_list.put(start, 0)     // 将起点加入待扩展列表，f值为0
4     pre = {}                    // 存储每个节点的前驱节点
5     cost = {}                   // 存储起点到每个节点的g值（路径代价）
6     pre[start] = None
7     cost[start] = 0
8     while not open_list.empty()

```

```

9         current = open_list.get() // 获取f值最小的节点
10        if current == goal // 若当前节点为终点，则返回路径
11            return reconstruct_path(pre, start, goal)
12
13        for next in Graph.neighbors(current) // 对当前节点的相邻节点进行扩展
14            new_cost = cost[current] + Graph.cost(current, next)
15            // 计算从起点到next的路径代价
16            if next not in cost or new_cost < cost[next]:
17                //若next未被扩展过或新路径比原路径更优
18                cost[next] = new_cost // 更新g值
19                f = new_cost + heuristic(next, goal) // 计算next的f值
20                open_list.put(next, f) // 将next加入待扩展列表，f值为f
21                pre[next] = current // 更新next的前驱节点为current
22        return None // 搜索失败，返回空值
23
24    function heuristic(a, b) //启发式函数，采用Manhattan距离
25        return abs(a[0] - b[0]) + abs(a[1] - b[1])
26
27    function reconstruct_path(pre, start, goal) // 通过前驱节点重构路径
28        path = [goal]
29        while path[-1] != start:
30            path.append(closed_list[path[-1]])
31        path.append(closed_list[start])
32        path.reverse()
33        return path

```

### 3.关键代码展示（带注释）

#### 文件读取与迷宫数据的存储

- 打开文件 `MazeData.txt`，用 `read()` 读取文件内容，并关闭文件。
- 按行遍历 `maze_str` 字符串，用字符串切片的方式将每个字符提取出来，并根据元素的类型将其转化为数字或保留为字符串。
- 将每行的列表组成二维列表 `maze`。

```

1 maze_file = open("MazeData.txt", "r")
2 maze_str = maze_file.read()
3 maze_file.close()
4 # 用列表存储maze
5 maze = []
6 for line in maze_str.splitlines():#按行读取
7     row = [int(line[i]) if line[i].isdigit() else line[i] for i in range(len(line))]
8     # 数字0、1直接存储，字母（S、E）用字符串类型存储
9     maze.append(row)

```

#### 一致代价搜索的代码实现

- 初始化 `closed` 列表、前驱节点 `pre` 列表、起点代价值 `g` 和 `open` 表，将起点加入 `open` 表。
- 当 `open` 表非空时，从中取出代价最小的节点进行扩展。
- 对当前节点的四个相邻节点进行扩展，更新其前驱节点、代价值和加入 `open` 表。

- 如果相邻节点已经在 `closed` 表中，并且代价高于之前扩展到该节点的代价，则不更新。
- 如果相邻节点未被扩展过或者新的代价值更小，则更新 `pre` 前驱节点和代价值，并加入 `open` 表。
- 如果扩展到终点，则返回路径；如果 `open` 表为空，说明无法找到路径，返回 `False`。

```

1 def ucs(maze, start, end):
2     # 定义四个方向的相邻节点，分别为右、左、下、上
3     neighbors = [(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)]
4     close_set = set() # closed列表
5     pre = {} # 前驱节点列表
6     g = {start: 0} # g值初始化
7     open_heap = [] # open表初始化
8     heapq.heappush(open_heap, (g[start], start))
9     # 当open表不为空时，从中取出代价最小的节点，并进行扩展
10    while open_heap:
11        current = heapq.heappop(open_heap)[1]
12        if current == end:
13            # 找到终点，返回路径
14            data = []
15            while current in pre:
16                data.append(current)
17                current = pre[current]
18            return data
19        close_set.add(current)
20        # 对当前节点的四个相邻节点进行扩展
21        for i, j in neighbors:
22            neighbor = current[0] + i, current[1] + j
23            tentative_g = g[current] + 1
24            # 判断相邻节点的有效性：在迷宫范围内且不是墙
25            if 0 <= neighbor[0] < len(maze) and 0 <= neighbor[1] < len(maze[0]):
26                if maze[neighbor[0]][neighbor[1]] == 1:
27                    continue
28            else:
29                continue
30            # 如果相邻节点已经在closed表中，并且代价高于之前扩展到该节点的代价，则不更新
31            if neighbor in close_set and tentative_g >= g.get(neighbor, 0):
32                continue
33            # 如果相邻节点未被扩展过或者新的代价值更小，则更新pre前驱节点和代价值，并加入open表
34            if tentative_g < g.get(neighbor, 0) or neighbor not in [i[1] for i in
open_heap]:
35                pre[neighbor] = current
36                g[neighbor] = tentative_g
37                heapq.heappush(open_heap, (g[neighbor], neighbor))
38            # 如果open表为空，则表示无法到达终点，返回False
39    return False

```

## 启发式函数设计

在迷宫问题中，只允许向四邻域的移动，因此使用Manhattan距离

```

1 # 定义A*算法中的启发式函数：Manhattan距离
2 def heuristic(a, b):
3     return abs(a[0] - b[0]) + abs(a[1] - b[1])

```



## A\*搜索算法代码实现

- 初始化 `closed` 表、前驱节点 `pre` 列表、起点代价值 `g` 和启发式函数值 `h`，将起点加入 `open` 表。
- 当 `open` 表非空，从中取出启发式函数值最小的节点进行扩展。
- 对当前节点的四个相邻节点进行扩展，更新其前驱节点、代价和启发式函数值，加入 `open` 表。
- 如果相邻节点已经在 `closed` 表中并且代价高于之前扩展到该节点的代价，则不更新。
- 如果相邻节点未被扩展过或者当前的代价值更小，则更新前驱节点、代价值和启发式函数值，并加入 `open` 表。
- 如果扩展到终点，则返回路径；如果 `open` 表为空，说明无法找到路径，返回 `False`。

```
1 def a_star(maze, start, end):
2     # 定义四个方向的相邻节点，分别为右、左、下、上
3     neighbors = [(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)]
4     close_set = set() # closed表的初始化
5     pre = {} # 前驱节点列表的初始化
6     g = {start: 0} # 起始点的代价值为0
7     f = {start: heuristic(start, end)} # 起始点的f值为其对应的启发式函数的值
8     open_heap = [] # open表的初始化
9     heapq.heappush(open_heap, (f[start], start))
10    # 当open表不为空时，从中取出代价值最小的节点进行扩展
11    while open_heap:
12        current = heapq.heappop(open_heap)[1]
13        if current == end:
14            # 找到终点，返回路径
15            data = []
16            while current in pre:
17                data.append(current)
18                current = pre[current]
19            return data
20        close_set.add(current)
21        # 对当前节点的四个相邻节点进行扩展
22        for i, j in neighbors:
23            neighbor = current[0] + i, current[1] + j
24            tentative_g = g[current] + 1 # 相邻节点的g值为当前节点的g值+1
25            # 判断相邻节点的有效性：在迷宫范围内且不是墙
26            if 0 <= neighbor[0] < len(maze) and 0 <= neighbor[1] < len(maze[0]):
27                if maze[neighbor[0]][neighbor[1]] == 1:
28                    continue
29            else:
30                continue
31            # 如果相邻节点已经在closed表中并且代价高于之前扩展到该节点的代价，则不更新
32            if neighbor in close_set and tentative_g >= g.get(neighbor, 0):
33                continue
34            # 如果相邻节点未被扩展过或者当前的代价值更小
35            if tentative_g < g.get(neighbor, 0) or neighbor not in [i[1] for i in
open_heap]:
36                pre[neighbor] = current # 更新前驱节点
37                g[neighbor] = tentative_g # 更新代价值
38                f[neighbor] = tentative_g + heuristic(neighbor, end) # 更新启发式函数
值
39                heapq.heappush(open_heap, (f[neighbor], neighbor))
40            # 如果open表为空，则表示无法到达终点，返回False
```

```
41         return False
```

## 获取起点与终点的坐标

使用 `enumerate()` 函数获取 `maze` 中每个元素的索引和对应的值

```
1  # 获取迷宫中的起点和终点
2  def find_start_end(maze):
3      start = None
4      end = None
5      for i, row in enumerate(maze): #i为行索引
6          for j, val in enumerate(row): #j为列索引, val为元素值
7              if val == "S":
8                  start = (i, j)
9              elif val == "E":
10                 end = (i, j)
11     return start, end
```

## 绘制含最短路径的迷宫

路径用“■”表示，并保留起点S和终点E

```
1  # 将结果绘制在迷宫上
2  def draw_path(maze, path):
3      # 路径用"■"表示
4      for step in path:
5          if maze[step[0]][step[1]] == "S" or maze[step[0]][step[1]] == "E":
6              continue
7          maze[step[0]][step[1]] = "■"
8      # 墙用"□"表示, 可通行用" "表示
9      for i, row in enumerate(maze):
10         for j, val in enumerate(row):
11             if val == 1:
12                 maze[i][j] = "□"
13             elif val == 0:
14                 maze[i][j] = " "
15     # 将行中的每个元素转换为字符串类型, 并组合成新列表
16     # 使用join()将列表中的元素用空格连接, 形成新的字符串
17     for row in maze:
18         print(' '.join([str(elem) for elem in row]))
```

# 三、实验结果及分析

## 1.实验结果展示示例

路径用“■”表示，墙用“□”表示，可通行用“ ”表示

一致代价搜索





[illegible]

`path`为：（用坐标表示）

```
1 [(1, 34), (1, 33), (1, 32), (1, 31), (1, 30), (1, 29), (1, 28), (1, 27), (1, 26),
  (1, 25), (2, 25), (3, 25), (3, 26), (3, 27), (4, 27), (5, 27), (6, 27), (6, 26), (6,
  25), (6, 24), (5, 24), (5, 23), (5, 22), (5, 21), (5, 20), (6, 20), (7, 20), (8,
  20), (8, 21), (8, 22), (8, 23), (8, 24), (8, 25), (8, 26), (8, 27), (9, 27), (10,
  27), (11, 27), (12, 27), (13, 27), (14, 27), (15, 27), (15, 26), (15, 25), (15, 24),
  (15, 23), (15, 22), (15, 21), (15, 20), (15, 19), (15, 18), (15, 17), (15, 16), (15,
  15), (15, 14), (15, 13), (15, 12), (15, 11), (15, 10), (16, 10), (16, 9), (16, 8),
  (16, 7), (16, 6), (16, 5), (16, 4), (16, 3), (16, 2), (16, 1)]
```

## 2.评测指标展示及分析

	完备性	最优性	时间复杂度	空间复杂度
一致代价搜索 UCS	Yes(树的分支因子有限&代价值为正)	Yes	$O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$	$O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$
A*搜索	Yes	$h(n)$ 单调且可采纳	$O(b^d)$	$O(b^d)$

```
1 uniform cost search running time is 0.001101999999999988 seconds
2 Astar running time is 0.0010519999999999974 seconds
```

- 根据上述运行时间结果，可以看出一致代价搜索算法和A\*搜索算法的运行时间非常接近，但A\*搜索算法的运行时间略短一些，因为A\*搜索算法利用了启发式函数来引导搜索过程，从而能够更快地找到最优解。
- 一致代价搜索算法尽可能地扩展到代价最小的节点，从而找到最优路径。但一致代价搜索没有使用启发式函数，因此它在找到最优路径时可能需要扩展更多的节点，导致运行时间略长。
- A\*搜索算法使用了启发式函数来引导搜索过程，从而更快地找到最短路径。启发式函数用于估计从当前节点到目标节点的最短距离，A\*搜索尽可能地扩展启发式函数值最小的节点，从而找到最优解。因此，A\*搜索在找到最优路径时通常比一致代价搜索更快。

- A\*搜索相对于一致代价搜索而言，具有更好的性能，能够更快地找到最优解。但是，在某些情况下，一致代价搜索可能比A\*搜索更适合，例如：启发式函数不可用或不准确时，一致代价搜索可能比A\*搜索更稳定和更可靠。