

Παράδειγμα Αναγωγής με Ισότητα

Αποδείξτε με αναγωγή πως το σύνολο $S = \{ \text{father(John)} = \text{Bill}, \forall x (\text{married}(\text{father}(x), \text{mother}(x)), \neg \text{married}(\text{Bill}, \text{mother}(\text{John}))) \}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο:

Απαρίθμηση προτάσεων S ως clauses:

- 1. $\{ \text{father(John)} = \text{Bill} \}$
- 2. $\{ \text{married}(\text{father}(x_1), \text{mother}(x_1)) \}$
- 3. $\{ \neg \text{married}(\text{Bill}, \text{mother}(\text{John})) \}$

Προσθήκη αξιωμάτων ισότητας στην Βάση Γνώσης

(το (E5.P) “σπάει” σε 2 clauses κατά την μετατροπή σε CNF)

- E1. $\{ x_2 = x_2 \}$
- E2. $\{ \neg(x_3 = y_3), y_3 = x_3 \}$
- E3. $\{ \neg(x_4 = y_4), \neg(y_4 = z_4), x_4 = z_4 \}$
- E4.m. $\{ \neg(x_5 = y_5), \text{mother}(x_5) = \text{mother}(y_5) \}$
- E4.f. $\{ \neg(x_6 = y_6), \text{father}(x_6) = \text{father}(y_6) \}$
- E5.m1 $\{ \neg(x_7 = y_7), \neg(x_8 = y_8), \neg \text{married}(x_7, x_8), \text{married}(y_7, y_8) \}$
- E5.m2 $\{ \neg(x_7 = y_7), \neg(x_8 = y_8), \neg \text{married}(y_7, y_8), \text{married}(x_7, x_8) \}$

Αναγωγή

- 4. $\{ \neg(x_7 = \text{Bill}), \neg(x_8 = \text{mother(John)}), \neg \text{married}(x_7, x_8) \}$, (3), (E5.m1), όπου $y_7/\text{Bill}, y_8/\text{mother(John)}$
- 5. $\{ \neg(x_8 = \text{mother(John)}), \neg \text{married}(\text{father(John)}, x_8) \}$, (1), (4), όπου $x_7/\text{father(John)}$
- 6. $\{ \neg(\text{mother(John)} = \text{mother(John)}) \}$, (2), (5), όπου $x_1/\text{John}, x_8/\text{mother(John)}$
- 7. $\{ \}$, (6), (E1), όπου $x_2/\text{mother(John)}$

Άσκηση

Αναπαραστήστε τις παρακάτω προτάσεις σε ΚΛ :

1.Ο Κώστας, η Μαρία, ο Γιάννης, και Ελένη είναι τα μόνο μέλη του τοπικού ορειβατικού συλλόγου.

$$\begin{aligned} & \text{member}(\text{Κώστας}) \wedge \text{member}(\text{Μαρία}) \wedge \\ & \text{member}(\text{Γιάννης}) \wedge \text{member}(\text{Ελένη}) \wedge \\ & \forall x (\text{member}(x) \Rightarrow (x=\text{Κώστας}) \vee (x=\text{Μαρία}) \\ & \vee (x=\text{Γιάννης}) \vee (x=\text{Ελένη})) \end{aligned}$$

2.Ο Κώστας είναι παντρεμένος με την Μαρία, και ο Γιάννης είναι αδερφός της Ελένης.

$$\text{married}(\text{Κώστας}, \text{Μαρία}) \wedge \text{siblings}(\text{Γιάννης}, \text{Ελένη})$$

3.Τα παντρεμένα μέλη του συλλόγου εγγράφονται υποχρεωτικά με τον/την σύζυγό τους.

$$\forall x \forall y (\text{member}(x) \wedge \text{married}(x, y) \Rightarrow \text{member}(y))$$

Μπορούμε με βάση τα παραπάνω να συμπεράνουμε πως η Ελένη είναι ανύπαντρη, δηλ. $\neg \exists y (\text{married}(\text{Ελένη}, y))$; Όχι. Θα πρέπει να προσθέσουμε στην βάση:

- $\forall x \forall y (\text{siblings}(x, y) \Rightarrow \neg \text{married}(x, y))$
(αλλιώς η Ελένη θα μπορούσε να είναι παντρεμένη με τον Γιάννη)

- $\forall x \forall y (\text{siblings}(x, y) \Rightarrow \text{siblings}(y, x))$
(αλλιώς η Ελένη θα μπορούσε να μην είναι αδερφή του Γιάννη και άρα να είναι παντρεμένη μαζί του)

- $\forall x \forall y \forall z (\text{married}(x, y) \wedge \text{married}(x, z) \Rightarrow y=z)$ (αλλιώς η Ελένη θα μπορούσε να είναι παντρεμένη με τον Κώστα)

- $\forall x \forall y (\text{married}(x, y) \Rightarrow \text{married}(y, x))$
(αλλιώς η Ελένη θα μπορούσε να είναι παντρεμένη με την Μαρία)

- $\forall x (\neg \text{married}(x, x))$
(αλλιώς η Ελένη θα μπορούσε να είναι παντρεμένη με τον εαυτό της)

- $\neg (\text{Μαρία}=\text{Ελένη}) \wedge \neg (\text{Κώστας}=\text{Ελένη})$
(αλλιώς η Ελένη θα ήταν παντρεμένη με τον Κώστα/Μαρία).

Άσκηση

1. { member(Κώστας) }
2. { member(Μαρία) }
3. { member(Γιάννης) }
4. { member(Ελένη) }
5. { married(Κώστας, Μαρία) }
6. { siblings(Γιάννης, Ελένη) }
7. { ¬(Μαρία=Ελένη) }
8. { ¬(Κώστας=Ελένη) }
9. { ¬member(x1), x1=Κώστας, x1=Μαρία, x1=Γιάννης, x1=Ελένη }
10. { ¬member(x2), ¬married(x2, x3), member(x3) }
11. { ¬siblings(x4, x5), ¬married(x4, x5) }
12. { ¬siblings(x6, x7), siblings(x7, x6) }
13. { ¬married(x8, x9), ¬married(x8, x10), x9=x10 }
14. { ¬married(x11, x12), married(x12, x11) }
15. { ¬married(x13, x13) }
16. { x14 = x14 }
17. { ¬(x15=x16), x16=x15 }
18. { ¬(x17=x18), ¬(x18=x19), x17=x19 }
19. { ¬(x20=x21), ¬(x22=x23), ¬married(x20,x22), married(x21,x23) }
20. { ¬(x24=x25), ¬(x26=x27), ¬siblings(x25,x27), siblings(x24,x26) }
21. { married(Ελένη, a) }

22. { ¬member(Ελένη), member(a) }, (21), (10)
23. { member(a) }, (26), (4)
24. {a=Κώστας, a=Μαρία,
a=Γιάννης, a=Ελένη } (27), (9)
25. { ¬(x20=x13), ¬(x22=x13),
¬married(x20,x22) } (15), (19)
26. { ¬(Ελένη=x13), ¬(a = x13) } (25), (21)
27. {a=Κώστας, a=Μαρία,
a=Γιάννης, ¬(Ελένη=Ελένη)} (26), (24)
28. {a=Κώστας, a=Μαρία, a=Γιάννης} (27), (16)
29. { ¬siblings(Ελένη, a) } (11), (28)
30. { ¬(Ελένη=x25), ¬(α=x27),
¬siblings(x25,x27) } (29), (20)
31. { ¬(Ελένη=x25), ¬(α=x27),
¬siblings(x27,x25) } (30), (12)
32. { ¬(Ελένη=Ελένη), ¬(α=Γιάννης) } (31), (6)
33. { ¬(α=Γιάννης) } (32), (16)
34. {a=Κώστας, a=Μαρία} (33), (28)
35. { married(a,Ελένη) } (14), (21)
36. { ¬married(a, x10), Ελένη=x10 } (35), (13)

Άσκηση

1. { member(Κώστας) }
2. { member(Μαρία) }
3. { member(Γιάννης) }
4. { member(Ελένη) }
5. { married(Κώστας, Μαρία) }
6. { siblings(Γιάννης, Ελένη) }
7. { ¬(Μαρία=Ελένη) }
8. { ¬(Κώστας=Ελένη) }
9. { ¬member(x1), x1=Κώστας, x1=Μαρία, x1=Γιάννης, x1=Ελένη }
10. { ¬member(x2), ¬married(x2, x3), member(x3) }
11. { ¬siblings(x4, x5), ¬married(x4, x5) }
12. { ¬siblings(x6, x7), siblings(x7, x6) }
13. { ¬married(x8, x9), ¬married(x8, x10), x9=x10 }
14. { ¬married(x11, x12), married(x12, x11) }
15. { ¬married(x13, x13) }
16. { x14 = x14 }
17. { ¬(x15=x16), x16=x15 }
18. { ¬(x17=x18), ¬(x18=x19), x17=x19 }
19. { ¬(x20=x21), ¬(x22=x23), ¬married(x20, x22), married(x21, x23) }
20. { ¬(x24=x25), ¬(x26=x27), ¬siblings(x25, x27), siblings(x24, x26) }
21. { married(Ελένη, a) }

Συνέχεια...

37. { ¬married(a, x10), x10=Ελένη } (36), (17)
38. { ¬married(a, Μαρία) } (37), (7)
39. { ¬(x20=a), ¬(x22=Μαρία),
¬married(x20, x22) } (38), (19)
40. { ¬(Κώστας=a), ¬(Μαρία=Μαρία) } (39), (5)
41. { ¬(Κώστας=a) } (40), (16)
42. { ¬(a=Κώστας) } (41), (17)
43. { a=Μαρία } (42), (34)
44. { ¬married(a, Κώστας) } (37), (8)
45. { ¬(x20=a), ¬(x22=Κώστας),
¬married(x20, x22) } (44), (19)
46. { ¬(x20=a), ¬(x22=Κώστας),
¬married(x22, x20) } (45), (14)
47. { ¬(Μαρία=a), ¬(Κώστας=Κώστας) } (46), (5)
48. { ¬(Μαρία=a) } (47), (16)
49. { ¬(a=Μαρία) } (48), (17)
50. { } (49), (43)