Programmi ed esercizi per il Senior

I programmi sono descritti sinteticamente all'inizio, come linee guida. Il testo successivo serve per specificare alcuni dettagli e come controllo per non dimenticare niente per chi fa lezione.

Le parti contrassegnate con ★ sono in più.

1 Programmi Basic

1.1 GB - 1 [Metodi Algebrici]

Luoghi di punti con la geometria analitica (classiconi: apollonio, luogo degli ortocentri) e scelte opportune di coordinate; distanze con i prodotti scalari e scrittura di vari punti con i vettori; rette e circonferenze con i complessi (e corde e tangenti); applicazioni della trigonometria.

Ricapitolazione veloce della geometria analitica: piano cartesiano, equazione di una retta ($y = mx + k$ o $Ax + By + C = 0$), coefficiente angolare, rette perpendicolari.
Formula della distanza, Equazione di una circonferenza come luogo di punti a distanza fissata.
Applicazioni: luogo degli ortocentri [e problema tipo da vettori]
Complessi: Sono simili alle coordinate cartesiane, sono formati da parte reale e immaginaria. Addizione e moltiplicazione. Forma polare di un numero complesso. Coniugato e sue proprietà.
Formule per allineamento, perpendicolarità, ciclicità.
Trigonometria: Recap delle formule in un triangolo.
IMOSL 2015 G1, Teorema di Stewart, esercizi con tanti teoremi del seno in un triangolo. Problemi che utilizzano $R = abc/4S$ e cose simili, formula di erone(?), esercizio G1 - 12
Analitica/Complessi: servono problemi con riferimento figo da usare.

1.2 GB - 2 [Trasformazioni]

Isometrie: Traslazione, Simmetria, Rotazione. Similitudine. Scrittura di queste trasformazioni in complessi. [★ Affinità] Inversione Circolare. Inversione + Simmetria in un triangolo.

Isometrie. Le isometrie sono trasformazioni che conservano la distanza. Le figure mantengono la stessa forma: le rette vanno in rette, circonferenze in circonferenze, poligoni in poligoni, gli angoli mantengono la misura.
Le isometrie più importanti sono traslazione, riflessione e rotazione.
La traslazione si definisce con un vettore $\vec{v}$, che manda ogni punto P in $P + \vec{v}$ (in cartesiane e in complessi).
La rotazione si definisce tramite un centro C e un angolo α tra 0 e 360. In complessi, se il centro è l'origine, il punto z viene mandato in $z \cdot e^{i\alpha}$; se il centro è un altro punto, allora bisogna fare una traslazione, rotazione e traslare indietro: $z \to (z - c) \cdot e^{i\alpha} + c$.
La riflessione si definisce tramite una retta r, ogni punto viene mandato nel suo simmetrico rispetto a questa retta. La riflessione inverte l'orientazione a differenza della traslazione e della rotazione.
Come per la rotazione, per scrivere in complessi la riflessione si compongono tre trasformazioni: si sceglie un punto c sulla retta e sia α l'angolo che forma con l'asse reale, allora z va in $\overline{(z - c)e^{-i\alpha}} \cdot e^{i\alpha} + c = \overline{(z - c)} \cdot e^{2i\alpha} + c$.
Esempio easy: ABC triangolo, H ortocentro, AH interseca BC in D e la circonferenza circoscritta in N. Dimostrare $DH = HN$.

[★ Fatti sparsi:
1) ogni isometria è composizione di al massimo tre riflessioni.

2)Si possono dividere in due gruppi, a seconda se mantengono l'orientamento oppure no. Quelle che mantengono l'orientamento sono traslazione e rotazione, quelle che lo invertono sono riflessione e glissoriflessione(=traslazione lungo una retta e riflessione lungo quella retta), questa sono tutte le isometrie possibili
3) rotazione di α+rotazione di β = rotazione di $\alpha+\beta$ se $\alpha+\beta \neq 0$, altrimenti è traslazione. Traslazione+rotazione di α=rotazione di α con un altro centro. analogamente per rotazione+traslazione]

★ **Affinità**

Inversione. A ogni punto P associa P' tale che $OP \cdot OP' = R^2$. Costruzione con le tangenti (per punto esterno) e al contrario per punto interno. È involutiva, scambia interno ed esterno, i punti sulla circonferenza di inversione rimangono gli stessi.
Le rette per l'origine rimangono rette per l'origine, circonferenze per l'origine diventano rette non per l'origine [questo si può dimostrare], circonferenze non per l'origine diventano circonferenze non per l'origine. Calcolo di $A'B' = \frac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$, dire che OAB e $OB'A'$ sono simili. L'inversione conserva gli angoli tra le curve, ma non gli angoli tra punti.
Esempio Teorema di Tolomeo.
In complessi, l'inversione nell'origine di raggio R manda z in $R^2 \cdot \overline{z}^{-1}$.
[★ Si può fare un ponte tra potenze e inversione: una circonferenza γ è invariata per inversione in O di raggio R se $pow_\gamma(O) = R^2$. er esempio γ circoscritta ad ABC, P è l'intersezione della tangente in A con BC, allora l'inversione in P di raggio PA scambia B e C e di conseguenza lascia invariata γ]

Inversione + Simmetria

1.3 GB - 3 [Sintetica]

Circonferenza di Apollonio. Circonferenza di Feuerbach. Simmediana. Segmenti di tangenza di Incerchi/Excerchi, punti di Gergonne e Nagel. Retta di simson. Applicazioni di potenze e assi radicali.

2 Programmi Medium

2.1 GM - 1 [Numeri complessi e coordinate baricentriche]

Numeri complessi nella geometria euclidea. Si assume che si possegga una discreta maneggevolezza con il piano complesso. Rapido ripasso sulla forma polare dei numeri complessi e significato geometrico delle operazioni.
Condizione di allineamento e scrittura dell'equazione di una retta per due punti. Condizione di parallelismo e scrittura della parallela ad una retta passante per un punto ad essa esterno. Condizione di perpendicolarità e scrittura della perpendicolare ad una retta passante per un punto ad essa esterno. Birapporto fra 4 numeri complessi e condizione di ciclicità.
Equazione di una generica circonferenza. Scelta classica delle coordinate: circonferenza circoscrita $\equiv$ circonferenza unitaria. Punti notevoli nella scelta classica delle coordinate. Esempio di quanto si semplificano i conti: intersezione di due corde generiche. Coordinate u, v, w per l'incentro.

Definizione di coordinate baricentriche.
Come verificare l'allineamento di tre punti ed equazione di una retta generica. Intersezione di due rette. Area di un triangolo di cui si conoscono le coordinate dei vertici. Punto all'infinito di una retta. Quando due rette sono parallele?
Punti notevoli e notazione di Conway: baricentro, incentro, ortocentro, circocentro, excentri, nagel, gergonne, lemoine... Coniugati isogonali e coniugati isotomici.
Equazione della circonferenza circoscritta (come coniugato isogonale della retta all'infinito). Equazione di una circonferenza in posizione generale. Equazione dell'asse radicale fra una circonferenza in posizione generale e la circonferenza circoscritta al triangolo referenziale: relazione di tale equazione con le potenze dei vertici del triangolo referenziale rispetto alla circonferenza in posizione generale. Formula di sdoppiamento per la tangente e la polare.

Versione estesa - Senior 2019

Numeri Complessi:

- **Introduzione:** Un numero complesso si scrive come $z = a + bi$, dove $i^2 = -1$ e a, b sono numeri reali. Il numero a si dice parte reale e il numero b si dice parte immaginaria. Si può anche scrivere come $z = \rho e^{i\theta}$, dove $\rho > 0$ è detto modulo e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ è detto argomento. Sul piano di Gauss, ρ è la distanza del punto (a, b) dall'origine e θ è l'angolo formato, in senso antiorario, col semiasse positivo delle x.

  Identifichiamo un numero complesso con il punto (a, b) del piano di Gauss e alle volte con il vettore che parte dall'origine e arriva ad (a, b).

  Per passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane: $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$. Viceversa $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan\frac{b}{a}$.

- **Operazioni:** Per quanto riguarda le operazioni, $z \to z + w$ corrisponde ad una traslazione del vettore w; $z \to zw$ - con $w = \rho e^{i\theta}$ corrisponde ad una rotazione in senso antiorario di θ più una omotetia di centro l'origine e fattore ρ; $z \to \bar{z}$ corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse reale.

- **Angoli e similitudini:**

  Osservazione. Sia $g(z) \doteq \frac{z}{\bar{z}}$. Se $z = \rho e^{i\theta}$, allora $g(z) = e^{2i\theta}$.

  Dati tre numeri complessi (punti) nel piano di Gauss a, b e c, detto θ l'angolo $\angle abc$ (ovvero l'angolo di cui ruotare ab in senso antiorario attorno a b perché la retta ab coincida con bc e in più a e c siano dalla stessa parte rispetto a b), si ha che esiste un numero reale $\rho > 0$ tale che

  $$c - b = (a - b)\rho e^{i\theta},$$

  dove ρ non è altro che il rapporto fra le lunghezze dei segmenti $\overline{cb}$ e $\overline{ab}$.

  Controlla *Conseguenza 1: Triangoli simili.* Se i triangoli abc e def sono ordinatamente simili, allora

  $$\frac{c - b}{a - b} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ab}} e^{i\angle abc} = \frac{\overline{fe}}{\overline{de}} e^{i\angle def} = \frac{f - e}{d - e},$$

  e vale anche il viceversa.

  Conseguenza 2: Equazione dell'angolo. Dall'osservazione, se θ è l'angolo $\angle abc$ si ha

  $$e^{2i\theta} = g\left(\frac{c - b}{a - b}\right) = \frac{c - b}{a - b} \cdot \frac{\bar{a} - \bar{b}}{\bar{c} - \bar{b}}.$$

Dunque per mostrare che $\angle abc = \angle def$ basta mostrare

$$\frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}} = \frac{f-e}{d-e} \cdot \frac{\bar{d}-\bar{e}}{\bar{f}-\bar{e}}$$

che è come dire che

$$\frac{c-b}{a-b}\frac{d-e}{f-e} \qquad \text{è reale.}$$

- **Allineamenti, parallelismi e perpendicolarità:**

  Allineamento. Se a, b e c sono allineati, allora $\angle abc = \pi$ e dunque dall'equazione dell'angolo

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{b}},$$

  e vale anche il viceversa. *Perpendicolarità 1.* Se $ab \perp bc$ allora dall'equazione dell'angolo

$$\frac{c-b}{a-b} = -\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{b}}.$$

  Parallelismo. Come esercizio, mostrare che $ab \parallel cd$ se e solo se

$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

  Perpendicoarità 2. Come esercizio mostrare che $ab \perp cd$ se e solo se

$$\frac{d-c}{b-a} = -\frac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

- **Birapporti e ciclicità:**

  Birapporto. Dati quattro numeri complessi z_1, z_2, z_3, z_4 si dice birapporto $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ la quantità

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \cdot \frac{z_3-z_4}{z_1-z_4}.$$

  Mediante l'equazione dell'angolo è immediato notare che $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se e solo se $z_1z_2z_3z_4$ è ciclico.

- **Circonferenza unitaria e scelta delle coordinate:**

  Circonferenza unitaria e coordinate classiche. Nel piano cartesiano la circonferenza unitaria ha equazione $z\bar{z} = 1$. Molto spesso nella risoluzione dei problemi è utile settare la circonferenza circoscritta come circonferenza unitaria, dunque tutti i punti su essa soddisfano $z\bar{z} = 1$ e o, il circocentro, diviene l'origine degli assi. Siccome vale $h + 2o = 3g$ in generale, visti i rapporti sulla retta di Eulero, e, sempre in generale, $g = \frac{a+b+c}{3}$, si ottiene che in questa scelta di coordinate $h = a + b + c$.

  Coordinate dell'incentro L'incentro è più difficile da gestire. In un problema con l'incentro conviene usare la notazione u, v, w. Infatti (dare come esercizio), dato un triangolo abc, esistono sempre tre numeri complessi u, v, w tali che $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$ e l'incentro $i = -(uv + vw + uw)$. *Hint:* Mostrare che esistono u, v e w tali che $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$ e i punti $-uv$, $-vw$, $-uw$ sono i punti medi degli archi ab, bc e ca che non contengono i terzi punti.

  Dagli esercizi:

- [**Seconda intersezione di due circonferenze in complessi**] Siano dati 4 punti a, b, c, d nel piano complesso che non formano un parallelogrammo.

  Mostrare che esiste una e una sola rotomotetia che manda a in b e c in d. Detto x il centro di tale rotomotetia e α il numero complesso che rappresenta la rotomotetia, si ha

$$x = \frac{ad - bc}{a-b-c+d}$$

$$\alpha = \frac{b-d}{a-c}.$$

  Mostrare che l'intersezione delle circonferenze circoscritte a ABX e CDX dove AC e BD sono segmenti non paralleli le cui rette si intersecano in X, è il centro della rotomotetia che manda A in B e C in D.

  Dai problemi:

- **[BMO 2009 - 2]** Sia MN una segmento parallelo al lato BC del triangolo ABC, con M sul lato AB e N sul lato AC. Le rette BN e CM si incontrano in P. Le circonferenze circoscritte a BMP e CNP si incontrano in due punti distinti P e Q.

  Mostrare che $\angle BAQ = \angle PAC$.

- **[RMM 2012 - 2]** Sia ABC un triangolo non isoscele e siano D, E e F rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA e AB. La circonferenza BCF e la retta BE si intersecano nuovamente in P e la circonferenza ABE e la retta AD in Q. Le rette DP e FQ si incontrano in R.

  Mostrare che il baricentro G del triangolo ABC giace sulla circonferenza circoscritta al triangolo PQR.

Coordinate baricentriche:

- **Definizioni:** *Terna omogenea.* Con $[x : y : z]$ indico una terna omogenea di numeri non tutti nulli, ovvero $[x : y : z] = [u : v : w]$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $u = kx$, $v = ky$ e $w = kz$.

  Coordinate baricentriche. Dato ABC un triangolo e P un punto sullo stesso piano di ABC, allora le coordinate baricentriche di P sono
  $$[|BCP| : |CAP| : |ABP|],$$
  dove $|\cdot|$ indica l'area con segno, ovvero è un numero che ha come modulo l'area di $\cdot$ e come segno $+$ o $-$ a seconda che il verso in cui sono scritti i vertici sia lo stesso o l'opposto rispetto a quello in cui sono assegnati ABC.

- **Alcuni punti:** *Notazione di Conway.* Da ora in poi scriveremo
  $$S_A \doteq \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad S_B \doteq \frac{a^2+c^2-b^2}{2}, \quad S_C \doteq \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

  Inoltre indichiamo con a la lunghezza di BC, con b la lunghezza di AC e con c la lunghezza di AB. Siano α, β, γ rispettivamente gli angoli in A, B e C.

  I vertici hanno coordinate
  $$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1],$$
  i punti medi hanno coordinate
  $$M_{BC} = [0 : 1 : 1], \quad \text{e cicliche},$$
  i piedi delle bisettrici hanno coordinate
  $$D_{BC} = [0 : b : c], \quad \text{e cicliche},$$
  il baricentro ha coordinate
  $$G = [1 : 1 : 1],$$
  e l'incentro ha coordinate
  $$I = [a : b : c].$$
  Per l'ortocentro calcoliamo le aree
  $$H = \left[\frac{a}{\cos\alpha} : \frac{b}{\cos b} : \frac{c}{\cos\gamma}\right] = [\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma] = [S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B],$$
  dove nell'ultimo passaggio usiamo la notazione di Conway. Per i piedi delle altezze notiamo che in generale le tracce di un punto sono semplici da trovare e dunque
  $$H_{BC} = [0 : S_C : S_B].$$
  Troviamo il circocentro
  $$O = [\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma] = [a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C].$$
  dove nell'ultimo passaggio usiamo la notazione di Conway.

  Esercizio: Il coniugato isogonale di $[x : y : z]$ ha coordinate $\left[\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right]$ e quello isotomico ha coordinate $\left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$.

  Esercizio: Mostrare che le coordinate dell'excentro relativo ad A sono
  $$I_A = [-a : b : c],$$

le coordinate del punto di Lemoine sono

$$L = [a^2 : b^2 : c^2],$$

quelle di Gergonne sono

$$Ge = \left[\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right],$$

e di Nagel

$$Na = [p-a : p-b : p-c] \, .$$

- *Osservazioni.* Ci sono dei punti che *non stanno sul nostro piano.* Infatti si mostra che S, l'area di ABC, è uguale a $|BCP| + |CAP| + |ABP|$. Dunque i punti $[x : y : z]$ tali che $x + y + z = 0$ sono dei punti *fantasma* sul nostro piano. Diciamo che sono *sulla retta all'infinito.*

  Notare che per qualsiasi altra scelta di $[x : y : z]$ con $x + y + z \neq 0$ esiste uno e un solo punto sul piano che ha quelle come coordinate.

  Le coordinate $P = [\alpha : \beta : \gamma]$ tali che $\alpha + \beta + \gamma = 1$ sono dette coordinate baricentriche esatte di P e sono tali che

  $$\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}.$$

  Questo segue molto velocemente dalla definizione delle coordinate che tira in ballo l'area. Dunque per trovare il punto medio fra due punti bisogna usare le coordinate baricentriche esatte - o perlomeno con la stessa somma delle coordinate!

  Esercizio: trova le coordinate del punto di Feuerbach, ovvero il centro della circonferenza di Feuerbach, che è il punto medio fra O e H.

- **Rette**: *Equazione.* Una generica retta ha equazione $lx + my + nz = 0$ per qualche l, m, n reali. *Pensarci per esercizio.*

  Punto all'infinito. Il punto all'infinito di questa retta è $[m - n : n - l : l - m]$.

  Intersezione di due rette. Due rette $lx + my + nz = 0$ e $l'x + m'y + n'z = 0$, una non multipla dell'altra, si intersecano sempre nell'unico punto di coordinate omogenee

  $$[n'm - nm' : nl' - n'l : lm' - l'm] \, .$$

  Rette parallele. Dunque anche due rette parallele si intersecano sempre, visto il punto precedente. In effetti si intersecano nel punto all'infinito di entrambe.

  Retta per due punti. Dati due punti $[a : b : c]$ e $[a' : b' : c']$, la retta passante per questi due punti ha equazione

  $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x & y & z \end{bmatrix} = 0$$

  Da questa segue anche la condizione di allineamento di tre punti, e la scrittura di una retta parallela ad una data, passante per un punto.

  Rette perpendicolari. Da fare come esercizio Il punto all'infinito di una retta perpendicolare a $px+qy+rz = 0$ è

  $$[S_B g - S_C h : S_C h - S_A f : S_A f - S_B g] \tag{1}$$

  dove $[f : g : h] = [q - r : r - p : p - q]$ è il punto all'infinito della retta.

  Dagli esercizi:

- [**Coordinate dei vertici del *triangolo tangenziale* in baricentriche**] Dato un triangolo ABC referenziale in un sistema di coordinate baricentriche, mostrare che la tangente condotta da A alla circonferenza circoscritta ad ABC ha equazione

  $$c^2 y + b^2 z = 0. \tag{2}$$

  Ciclando opportunamente, calcolare le coordinate dei vertici del triangolo tangenziale (*i.e.* il triangolo formato dalle intersezione delle tangenti condotte da A, B e C alla circonferenza circoscritta ad ABC).

  Dai problemi:

- [**MOP 2006**] Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza ω. P giace su BC in modo tale che PA è tangente a ω. La bisettrice di $\angle APB$ interseca i segmenti AB e AC rispettivamente in D ed E e i segmenti BE e CD si intersecano in Q. Supponiamo che la retta PQ passi per il centro di ω.

  Calcolare $\angle BAC$.

2.2 GM - 2, [Geometria proiettiva, poli e polari, quadrilateri armonici]

Lunghezze con segno (velocemente). Birapporto tra 4 punti su una retta. Proiezione del birapporto, quindi birapporto tra 4 rette o 4 punti su circonferenza. Quaterna Armonica. Teorema di Desargues.
Polo e Polare. Teorema di La Hire. Lemma della polare. Teorema di Pappo. Teorema di Pascal. Dualità polo-polare.

Lunghezze con segno. Definizione di birapporto fra 4 punti $(A, B; C, D)$ su una retta e quando si dicono coniugati armonici. Conservazione del birapporto fra punti per proiezione da un punto esterno. Discussione del caso in cui, proiettando da un punto esterno su una retta, un punto va nel punto all'infinito: cosa diventa il birapporto nel caso in cui un punto sia all'infinito? Unicità del quarto armonico. Definizione di birapporto fra 4 rette e relazione con gli angoli che queste formano. Definizione di birapporto fra 4 punti su una circonferenza.
Teorema di Desargues, Teorema di Pappo e Teorema di Pascal.

Definizione proiettiva di polare: data una circonferenza (o due rette) e punto P, si traccino le rette che passano per P e secano lo circonferenza (o incontrano le rette) in due punti A e B. Il luogo dei punti X tali che $(A, B; P, X) = -1$ è una retta detta polare di P rispetto alla circonferenza (o alle due rette). Proprietà geometriche nel caso della circonferenza.
Dualità poli-polari. Lemma della polare: Dato un punto P e una circonferenza (o due rette), se traccio due rette secanti che tagliano la circonferenza (o le rette) in due coppie di punti A, B e C, D dimodoché i punti siano nell'ordine P, A, B e P, C, D, allora $AD \cap BC$ e $AC \cap BD$ sono sulla polare di P rispetto alla circonferenza (o alle due rette). Teorema di Brianchion.
Definizione di quadrilatero armonico con i birapporti. In un quadrilatero armonico una diagonale e la tangenti alla circonferenza in cui è inscritto condotte per gli altri due punti concorrono.

Versione estesa

Il setting della geometria proiettiva è quello della retta euclidea a cui viene aggiunto un punto all'infinito, o del piano euclideo in cui viene aggiunta una retta all'infinito.

Lunghezze con segno Su una retta r sono presenti alcuni punti $A, B, C \dots$. Si scelga un verso sulla retta e si considerino i segmenti su di essa come vettori, con segno positivo se orientati nel verso scelto e negativo altrimenti. Il vantaggio di questo è che vale $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ per qualsiasi posizione reciproca di A, B, C.

Birapporto Dati 4 punti A, B, C, D su una retta, si definisce il birapporto è la seguente quantità:

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{AC}{AD}}{\frac{BC}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

dove le lunghezze sono prese con segno.

Se $(A, B; C, D) = k$, qual è il valore del birapporto se si permuta l'ordine in cui si prendono i punti? Le $4! = 24$ possibilità si dividono in 6 gruppi in ciascuno dei quali il birapporto è lo stesso. Se si scambiano le due coppie oppure si inverte l'ordine in entrambe il birapporto non cambia: $(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (B, A; D, C)$.
Se si scambiano i primi due o gli ultimi due, il birapporto diventa reciproco: $(A, B; D, C) = (B, A; C, D) = 1/k$.
Se si scambia il secondo e il terzo $B \leftrightarrow C$, si ottiene $(A, C; B, D) = 1 - k$.
Se si scambia il primo e il terzo $A \leftrightarrow C$, si ottiene $(C, B; A, D) = \frac{k}{k-1}$.
Combinando queste trasformazioni, si possono ottenere i valori di $(A, C; D, B) = \frac{1}{1-k}$ e $(A, D; B, C) = \frac{k-1}{k}$.
Un'altra cosa interessante è fissare i punti A, B, C e vedere come varia il birapporto $(A, B; C, D)$ al variare di D sulla retta. Questa è una funzione biettiva dalla retta proeittiva in $\mathbb{R} \cup \infty$, nei casi degeneri in cui D coincide con uno dei punti assume i valori degeneri di $0, 1, \infty$; se $D = \infty$, il birapporto vale AC/BC.

Quaterna Armonica Quattro punti su una retta si dicono una quaterna armonica se $(A, B; C, D) = -1$. Per quanto detto sulle permutazioni, una quaterna è armonica se e solo se non è degenere e $(A, B; C, D) = (B, A; C, D)$. Una quaterna armonica dev'essere "incatenata": fissati A, B, uno tra C e D deve stare all'interno del segmento AB e uno all'esterno. Analogamente si avrà che uno tra A e B sta all'interno del segmento CD e uno all'esterno.

2.3 GM - 3 [Configurazione di Miquel, rotomotetia, qualcosa sulle mistilinee e inversioni sintetiche]

Angoli orientati, Miquel su triangolo e su quadrilatero. Lemma della rotomotetia. Quadrilatero completo e rotomotetie presenti nella configurazione. Altre applicazioni di inversione. mistilinei,

Angoli orientati ed esercizi/complementi sui quadrilateri ciclici.
Punto di Miquel riferito a una terna di punti presi sui lati di un triangolo. Punto di Miquel riferito a un quadrilatero. Facendo opportuno riferimento all'esercizio 2 della sezione **GM-1**, osservare che il punto di Miquel di un quadrilatero $ABCD$ è il centro della *spilar similarity* che manda AB in DC o AD in BC. Il quadrilatero $ABCD$ è ciclico se e solo se il punto di Miquel M sta su QR, dove $Q = AB \cap CD$ e $R = AD \cap BC$.
Nel caso di ciclicità:

- OM è perpendicolare a QR, essendo O il circocentro di $ABCD$;
- A, C, M, O e B, D, M, O sono conciclici;
- AC, BD e OM sono concorrenti in P;
- MO biseca $\angle CMA$ e $\angle BMD$;
- P e M sono inversi rispetto alla circonferenza circoscritta al quadrilatero $ABCD$.

Un'avventura mistilinea: considerati quattro punti in senso antiorario su una circonferenza Γ (A, B, C, D) ed essendo $P = AC \cap BD$, considero ω tangente ai segmenti AP e BP e a Ω rispettivamente in E, F e T. Provare le seguenti:

- TE biseca l'arco AC che contiene D;
- Detto I l'incentro di ABC, $IFTB$ è ciclico e $I \in EF$
- Detto J l'incentro di APB allora $TJFB$ è ciclico e TJ biseca $\angle ATB$.

Ripasso delle proprietà base riguardanti l'inversione. $\sqrt{bc}$-inversione più simmetria: risoluzione di alcuni problemi.

Versione estesa - Senior 2019

- **Angoli Orientati**: *Definizione.* L'angolo orientato $\angle(l, r)$ è l'angolo di cui si deve ruotare l in senso antiorario perché coincida con r. L'angolo orientato $\angle ABC$ è, per definizione, l'angolo orientato $\angle(AB, BC)$.

  Proprietà.

  1. $\angle(l, m) + \angle(m, l) = \pi$,
  2. $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \pi$,
  3. $\angle AOP + \angle POB = \angle AOB$,
  4. A, B, C allineati se e solo se per un punto (o per tutti) $\angle XBC = \angle XBA$,
  5. A, B, X, Y ciclico se esolo se $\angle AXB = \angle AYB$.

- **Teorema di Miquel**: *Versione triangolare.* Dato ABC un triangolo e D, E, F punti rispettivamente sulle rette dei lati BC, CA e AB, le circonferenze AEF, BDF e CDE concorrono.

  Versione quadrangolare. Date r_1, r_2, r_3, r_4 rette che si intersecano in 6 punti (*Cosa succede nei casi degeneri?*) siano $A_{ij} \doteq r_i \cap r_j$ i punti di intersezione. Le circonferenze circoscritte ai triangoli $A_{12}A_{23}A_{31}$, $A_{12}A_{24}A_{14}$, $A_{13}A_{34}A_{14}$ e $A_{23}A_{34}A_{24}$ concorrono.

- **Rotomotetie**: Dati due punti A, B, C, D distinti sul piano, ricordare che esiste una e una sola rotomotetia che porta A in B e C in D se e solo se AC non è parallelo a BD. In tal caso, detto $X \doteq AC \cap BD$, il centro di tale rotomotetia è W l'interesezione delle circonferenze circoscritte a AXB e CXD. Discutere cosa succede se X coincide con uno dei 4 punti A, B, C, D (una delle due circonferenze da tracciare diviene tangente ad uno dei segmenti).

  Dagli Esercizi: Discutere un caso degenere

- Sia ABC un triangolo. Mostrare che il centro della (unica) rotomotetia che manda B in A e A in C è sulla simmediana uscente da A.

- **Inversione $\sqrt{bc}$ e simmetria**. Usare come pretesto la parte finale dell'esercizio precedente per introdurre questa tecnica.

  Dai problemi:

- **[USAMO 2006]** Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano E e F punti su AD e BC rispettivamente tali che $AE/ED = BF/FC$. La retta FE incontra BA e CD in S e T rispettivamente.

  Mostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli SAE, SBF, TCF e TDE passano per uno stesso punto.

  Approfondimento sulla configurazione di Miquel: Sia $ABCD$ un quadrilatero con $Q \doteq AB \cap CD$ e $R \doteq AD \cap BC$. Mostrare che

  1. $M \in QR$ se e solo se $ABCD$ ciclico,
  2. $ABCD$ ciclico implica $OM \perp QR$,
  3. $ABCD$ ciclico implica $MAOC$ e $BODM$ ciclici,
  4. $ABCD$ ciclico implica MO biseca AMC e BMD,
  5. $ABCD$ ciclico implica O, M e $AC \cap BD$ allineati. Da ciò, invertendo nella circonferenza circoscritta ad $ABCD$, si ottiene che P e M sono uno l'inverso dell'altro.

  Fatti sulle circonferenze mistilinee: *Le ceviane delle mistilinee concorrono.* Sia ABC un triangolo inscritto in Ω e ω_A una circonferenza tangente internamente a Ω in T_A e tangente anche ad AB e AC in B_1 e C_1 rispettivamente. Da un'inversione $\sqrt{bc}$ più simmetria rispetto alla bisettrice mostrare che AT_A e cicliche concorrono - nel coniugato isogonale del punto di Nagel. Osservare che AT_A contiene il centro di similitudine esterno fra ω, la circonferenza inscritta ad ABC, e Ω e dunque il coniugato isogonale del punto di Nagel è il centro di similitudine esterno fra ω e Ω.

  Altri fatti. Con riferimento alla precedente, mostrare che

  1. L'incentro di ABC, I, è su B_1C_1. Ciò segue da Pascal su $M_{AB}T_AM_{AC}BAC$, dove M_{AB} e M_{AC} sono i punti medi degli archi AB e AC che non contengono C e B; più il lemma che T_A, B_1, M_{AB} sono allineati,
  2. L'incentro I, dopo l'inversione, va nell'excentro I_A. Ciò segue dal fatto che $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$ il quale a sua volta segue dal fatto che $BCII_A$ è ciclico più un semplice conto di angoli. Da ciò segue che BT_AB_1I e CT_AC_1I sono ciclici,
  3. Dal punto precedente segue T_AI biseca $\angle BT_AC$,
  4. T_AM_A, BC e B_1C_1 concorrono applicando Pascal su $BCM_{AB}T_AM_AA$,
  5. Da due punti sopra viene M_AT_A perpendicolare a T_AI e dunque T_AI interseca Ω nel diametralmente opposto di M_A.

  Dai problemi:

- **[EGMO 2013 - 5]** Sia Ω la circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC. La circonferenza ω è tangente ai lati AC e BC e internamente alla circonferenza Ω in un punto P. Una retta parallela ad AB che interseca l'interno del triangolo ABC è tangente a ω in Q.

  Mostrare che $\angle ACP = \angle QCB$.

- **Qualche problema sull'inversione:** *Dagli esercizi:*

  [Teorema di Feuerbach] Mostrare che la circonferenza di Feuerbach è tangente alla circonferenza inscritta e alle circonferenze exinscritte.

  Dai problemi:

  [IMO 2015 - 3] Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB > AC$. Sia Γ la sua circonferenza circoscritta, H il suo ortocentro, e F il piede dell'altezza condotta da A. Sia M il punto medo di BC. Sia Q il punto su Γ tale che $\angle HQA = 90°$ e sia K il punto su Γ tale che $\angle HKQ = 90°$. Assumiamo che A, B, C, K e Q sono tutti distinti e giacciono su Γ in quest'ordine.

  Mostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli KQH e FKM sono fra loro tangenti.

3 Esercizi Basic

3.1 GB-1, Esercizi

Analitica

1. Dimostrare la formula distanza di un punto di coordinate (p, q) dalla retta di equazione $Ax + By + C = 0$:

$$\text{distanza} = \frac{Ap + Bq + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

3. Dati due punti A e B, trovare il luogo di punti C tali che $AC/BC = \lambda$ costante fissata.
Soluzione: Pongo $A = (0, 0), B = (1, 0)$ e wlog $\lambda < 1$. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lambda$.
$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$
$x^2 + y^2 + \frac{2}{\lambda^2-1}x - \frac{1}{\lambda^2-1} = 0$ è un cerchio centrato in $(-\frac{1}{\lambda^2-1}, 0)$.

Trigonometria

4. Calcolare, in termini dei lati e degli angoli del triangolo ABC, le seguenti lunghezze:

$$AH, HH_a, BH_a, H_bH_c, OM_a, OH, AI, IA', IO$$

dove H è l'ortocentro, O è il circocentro, I l'incentro, H_a la proiezione di H su BC (e similmente sono definiti H_b e H_c), M_a il punto medio di BC, A' il punto medio dell'arco BC che non contiene A nella circonferenza circoscritta ad ABC.

5. **Teorema di Stewart** Sia ABC un triangolo e P un punto sul lato BC. Dimostrare la seguente formula:

$$AB^2 \cdot PC + AC^2 \cdot BP = BC \cdot BP \cdot PC + AP^2 \cdot BC$$

Complessi

6. (*Proposto come fatto in GM1 senza soluzione*) **Allineamento** A, B, C sono allineati se e solo se

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$$

7. (*Proposto come fatto in GM1 senza soluzione*) **Perpendicolarità** $AC \perp BC$ se e solo se

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$$

Vario

8. Teoremi di Napoleone e Vecten (enunciato in G2)

9. Sia Γ una circonferenza fissa e sia BC una corda. Sia A un punto su Γ e sia H l'ortocentro di ABC. Determinare al variare di A su Γ il luogo geometrico descritto da H.

10. **Eserciziario Senior 2017, G1 - 12** Sia dato un triangolo ABC e si fissino i punti A',B',C' sui lati opposti ai vertici A, B, C, rispettivamente, in modo che le rette AA' , BB' , CC' siano concorrenti in un punto P interno al triangolo. Sia d il diametro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, e sia S' l'area del triangolo $A'B'C'$.
Dimostrare che $d \cdot S' = AB' \cdot BC' \cdot CA'$.

11. In un triangolo ABC, trovare il punto P che minimizza la quantità $AP^2 + BP^2 + CP^2$.
Soluzione: $AP^2 = (x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2$, quindi posso risolvere separatamente il trovare la coordinata x_P e y_P. Per x_P bisogna minimizzare $3x_P^2 - 2x_P(x_A + x_B + x_C)$, che è una parabola con zeri $x = 0, \frac{2}{3}(x_A + x_B + x_c)$, quindi $x_P = \frac{x_A+x_B+x_c}{3}$ e P è il baricentro

3.2 GB-2, Esercizi

1. Fare i conti per traslazioni, rotazioni, riflessioni, inversione in complessi.

Simmetrie

2. **Problema di Fagnano** Sia ABC un triangolo acutangolo, P, Q, R tre punti variabili sui lati BC, AC, AB rispettivamente. Per quale posizione dei tre punti il perimetro del triangolo PQR è minimo?

   Soluzione: Sia P_1 il simmetrico di P rispetto AB e P_2 rispetto AC. Allora il perimetro $PR + RQ + QP = P_1R + RQ + QP_2$ è la lunghezza della spezzata P_1RQP_2, fissato P è minimo se i quattro punti sono allineati. Inoltre $\widehat{P_1AP_2} = 2 \cdot \widehat{BAC}$ e $AP_1 = AP_2 = AP$, quindi $P_1P_2 = AP \sin \widehat{BAC}$ è minimo quando è minimo AP. Quindi P è piede dell'altezza da A, e in tale caso anche Q e R lo sono

Rotazioni

3. **Teorema di Napoleone** Sia ABC un triangolo e si costruisca un triangolo equilatero su ciascuno dei lati di ABC, esterno ad esso. Chiamati O_A, O_B, O_C i centri dei tre triangoli, dimostrare che $O_AO_BO_C$ è un triangolo equilatero.

   Soluzione: Siano A_1, B_1, C_1 i vertici dei triangoli equilateri. $BA = \sqrt{3}BO_C$ e analogamente per gli altri lati. Una rotazione di 30 centrata in B manda BO_C in BA e BO_A in BA_1. Il triangolo $BO'_CO'_A$ è simile a BAA_1, quindi per Talete $O_CO_A = O'_CO'_A = \frac{1}{\sqrt{3}}AA_1 = O_BO_C$. Quindi i tre lati sono uguali.

   Si fa benissimo in complessi (per G1). Su cut-the-knot ci sono tanti approcci.[10]

4. **Teorema di Vecten** Sia ABC un triangolo e si costruisca un quadrato su ciascuno dei lati di ABC, esterno ad esso. Chiamati O_A, O_B, O_C i centri dei tre quadrati, dimostrare che $O_AO_BO_C$ è un triangolo equilatero.

5. **Eserciziario Senior 17, G2 - 10** Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso. Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC e MP sono i vertici di un quadrato.

   Soluzione: sia L il centro di $ABMN$ e R di $BCQP$, J il punto medio di AC. LJ è parallelo a MC per omotetia di centro B e fattore 2, inoltre dopo una rotazione di 90° va in BP che è parallelo a JR. Da questo si deduce che $LJ = JR$ e sono ortogonali. Analogamente si fa per il punto medio di MP

Omotetia

6. Sia ABC un triangolo, ω la circonferenza inscritta tangente a BC in D. Sia M il punto medio di BC e E il simmetrico di D rispetto a M. Sia T il diametralmente opposto a D in ω.
   Dimostrare che A, T, E sono allineati.

7. Siano Γ e ω due circonferenza tangenti internamente in P, con ω all'interno di Γ. Sia AB una corda di Γ tangente a ω in un punto T.
   Dimostrare che PT è la bisettrice di APB.

Omotetia+Simmetria

8. **[Lemma della *simmediana*]** Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza γ. Le tangenti a γ in B e C si intersecano in P.

   Mostrare che AP è *simmediana* relativa a BC, *i.e.* simmetrica della mediana relativa a BC rispetto alla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

   Soluzione: Sia ω la circonferenza di centro P e raggio PB. $\Omega \cap AB = D$, $\Omega \cap AC = E$. Per angle chasing DPE allineati è DE è antiparallelo a BC, quindi simmetria+omotetia manda ABC in AED e AM in AP in quanto mediane, da cui AP simmediana.

Inversione

9. Data l'inversione di centro O e raggio R, due punti A e B vanno in A' e B'. Determinare la lunghezza di $A'B'$ conoscendo le lunghezze di OA, OB, AB.

10. **Teorema di Tolomeo** Sia $ABCD$ un quadrilatero, $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$ e l'uguale vale sse $ABCD$ è ciclico.

11. **[Teorema di Feuerbach]** Mostrare che la circonferenza di Feuerbach è tangente alla circonferenza inscritta e alle circonferenze exinscritte.

    Soluzione: Sia M il punto medio di BC e D e G rispettivamente i punti in cui la circonferenza inscritta e quella ex-inscritta opposta ad A incontrano BC. Invertire in M con raggio MD.

    Per prima cosa si nota che il piede della perpendicolare e il piede della bisettrice su BC si scambiano perché $MH \cdot MI = MD^2$. Inoltre si mostra passando per la circoscritta che la retta immagine della circonferenza dei nove punti fa un angolo di beta - gamma con BC. Dunque la cfr dei nove punti va nella simmetrica della retta BC rispetto alla bisettrice che tange entrambe le circonferenze inscritta ed exinscritta. Inoltre queste due si scambiano

Inversione+Simmetria

12. **[Lemma della *simmediana*]** Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza γ. Le tangenti a γ in B e C si intersecano in P.

    Mostrare che AP è *simmediana* relativa a BC, *i.e.* simmetrica della mediana relativa a BC rispetto alla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

3.3 GB-3, Esercizi

1. *[Copiato da GM]* Sia ABC un triangolo con ortocentro H e siano D, E e F i piedi delle altezze che cadono sui lati BC, CA e AB rispettivamente. Sia $T = EF \cap BC$.

   Mostrare che TH è perpendicolare alla mediana condotta da A.

   Soluzione: Oltre alla soluzione per inversione, pensavo anche qualcosa con gli assi radicali: il centro radicale delle circonferenze per $AEFH, BCH, ABEF$ è T, quindi TH passa per l'intersezione di AEFH e BCH che chiamo P. Allora APH è retto in quanto diametro

   inversione di centro A e raggio $AH \cdot HD$. La tesi diventa equivalente a mostrare che la circonferenza per D (immagine di H), per l'intersezione della circoscritta con AEF (immagine di T) e A ha la retta AM come diametro. Questo segue perché in effetti M, T', A, D sono ciclici

2. Sia ABC un triangolo, E, F i piedi delle altezze su AC, AB. Sia H l'ortocentro, M il punto medio di BC e Q l'intersezione più vicina ad A di HM con la circoscritta Γ. Sia $T = EF \cap BC$. Dimostrare che T, Q, A sono allineati.

   Soluzione: Usare due fatti 1) Il punto Q è l'intersezione di Γ con la circonferenza di diametro AH ed è allineato con H,M e il simmetrico di A rispetto O 2) Assi radicali di AQH, ABC, BCEF.

3. Sia ABC un triangolo con I incentro e I_A centro della circonferenza ex-inscritta relativa ad A. Sia Γ la circonferenza circoscritta ad ABC e sia M il punto medio dell'arco BC non contenente A.

   Dimostrare che B, I, C, I_A si trovano su una stessa circonferenza di centro M

   Soluzione: Calcolare i segmenti di tangenza di inscritta ed ex-inscritta, poi omotetia in A

4. Proprietà varie della circonferenza di Feuerbach.

4 Esercizi Medium

4.1 GM - 1, Esercizi

1. **[Scrittura del coniugato isogonale in complessi]** Dimostrare che in un triangolo abc inscritto in una circonferenza unitaria centrata nell'origine, il coniugato isogonale di p è

$$q = \frac{-p + a + b + c - \overline{p}(ab + bc + ca) + \overline{p}^2 abc}{(1 - p\overline{p})}. \tag{3}$$

2. **[Seconda intersezione di due circonferenze in complessi]** Siano dati 4 punti a, b, c, d nel piano complesso che non formano un parallelogrammo.

   Mostrare che esiste una e una sola rotomotetia che manda a in b e c in d. Detto x il centro di tale rotomotetia e α la ragione, si ha

$$c = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}$$
$$\alpha = \frac{b - d}{a - c}.$$

   Mostrare che l'intersezione delle circonferenze circoscritte a ABX e CDX dove AC e BD sono segmenti non paralleli le cui rette si intersecano in X, è il centro della rotomotetia che manda A in B e C in D.

   Soluzione: Sia x il centro della rotomotetia, α il numero complesso che rappresenta la rotomotetia - ovvero l'argomento di α è l'angolo di rotazione e il modulo di α è la ragione della rotomotetia. Se manda a in b, allora

$$b - x = (a - x)\alpha,$$

   e poiché manda c in d si ha anche

$$d - x = (c - x)\alpha.$$

   Dunque per confronto

$$\frac{b - x}{a - x} = \frac{d - x}{c - x}$$

   da cui

$$(b - x)(c - x) = (d - x)(a - x) \Rightarrow x = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}.$$

   Svolgendo i calcoli si ha infine

$$\alpha = \frac{b - d}{a - c}.$$

3. **[Una caratterizzazione della *polare* come luogo dei *quarti armonici*]** Sia γ la circonferenza unitaria centrata nell'origine e sia P un punto qualsiasi. Siano r ed s la polare di P rispetto a Γ e una retta passante per P rispettivamente.

   - Mostrare che r ha equazione
   $$x\overline{p} - 2 + \bar{x}p = 0 \tag{4}$$
   dove p è il numero complesso associato a P.
   - Supponiamo che s intersechi γ in A_1, A_2, ed r in Q. Mostrare che $(P, Q; A1, A2) = -1$.

4. **[Scrittura del circocentro di un triangolo generico in complessi]** Mostrare che il circocentro del triangolo $z_1 z_2 z_3$ è

$$\frac{z_1\bar{z}_1(z_2 - z_3) + z_2\bar{z}_2(z_3 - z_1) + z_3\bar{z}_3(z_1 - z_2)}{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

5. **[Teorema di Brocard]** Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O. Le rette AB e CD si intersecano in E, le rette AD e BC si intersecano in F e le rette AC e BD si intersecano in G. Mostrare che O è ortocentro di EFG.

6. Sia ABC un triangolo di ortocentro H. Da A si conducano le due tangenti alla circonferenza di diametro BC che la intersecano in P e Q.
   Mostrare che $H \in PQ$.

   Soluzione: la circonferenza unitaria è quella di diametro BC. I punti x che stanno su tale circonferenza e per cui $AX \perp OX$ soddisfano una quadratica. Sia H' l'intersezione di AH con PQ. Basta mostrare che $CH' \perp AB$.

7. **[Una caratterizzazione del *punto di Lemoine*]** Sia ABC un triangolo e siano D, E e F i punti medi di BC, CA e AB rispettivamente. Siano X, Y e Z i punti medi delle altezze condotte da A, B e C rispettivamente.

   Mostrare che DX, EY e FZ si intersecano in un punto di coordinate baricentriche $[a^2 : b^2 : c^2]$. Chi è tale punto nel triangolo referenziale?

   ($\star$) Mostrare che tale punto (il *punto di Lemoine*) è l'unico punto ad essere baricentro del proprio triangolo pedale.

8. **[Coordinate dei vertici del *triangolo tangenziale* in baricentriche]** Dato un triangolo ABC referenziale in un sistema di coordinate baricentriche, mostrare che la tangente condotta da A alla circonferenza circoscritta ad ABC ha equazione
   $$c^2y + b^2z = 0. \tag{6}$$

   Ciclando opportunamente, calcolare le coordinate dei vertici del triangolo tangenziale (*i.e.* il triangolo formato dalle intersezione delle tangenti condotte da A, B e C alla circonferenza circoscritta ad ABC).

   Soluzione: Calcoliamo le coordinate di P, intersezione della tangente condotta da A alla circoscritta e BC. Risulta che
   $$P = [0 : -b^2 : c^2]$$
   da cui si ottiene subito che la tangente, dovendo passare per $A = [1 : 0 : 0]$ è
   $$c^2y + b^2z = 0.$$

   Ciclando si ottiene che i vertici del triangolo tangenziale sono $[a^2 : b^2 : -c^2]$ e ciclici.

9. Sia dato un triangolo ABC e un punto P di coordinate baricentriche $[u : v : w]$ scegliendo come triangolo referenziale ABC.

   - **[Proiezione di un punto sui lati in baricentriche]** Mostra che, dette P_A, P_B e P_C le proiezioni di P sui lati BC, CA e AB, si ottiene
     $$P_A = [0 : S_Cu + a^2v : S_Bu + a^2w]$$
     $$P_B = [S_Cv + b^2u : 0 : S_Av + b^2w]$$
     $$P_C = [S_Bw + c^2u : S_Aw + c^2v : 0]$$
     dove $S_A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ e cicliche.
   - **[Punto all'infinito della retta perpendicolare in baricentriche]** Usando il punto precedente mostrare che il punto all'infinito di una retta perpendicolare a $px + qy + rz = 0$ è
     $$[S_Bg - S_Ch : S_Ch - S_Af : S_Af - S_Bg] \tag{7}$$
     dove $[f : g : h] = [q - r : r - p : p - q]$ è il punto all'infinito della retta.

10. **[Intersezione delle ceviane per un punto P con la circoscritta in baricentriche]** Sia $P = [u : v : w]$, dove le coordinate baricentriche sono riferite ad ABC. Dette P^A, P^B e P^C rispettivamente le intersezioni di AP, BP e CP con la circonferenza circoscritta, mostrare che
    $$P^A = \left[\frac{-a^2vw}{c^2v + b^2w} : v : w\right]$$
    $$P^B = \left[u : \frac{-b^2uw}{a^2w + c^2u} : w\right]$$
    $$P^C = \left[u : v : \frac{-c^2uv}{a^2v + b^2u}\right].$$

11. Ricordiamo il seguente fatto noto di geometria elementare: un punto P sta sulla circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC se e solo se le sue proiezioni sui lati AB, BC e CA sono allineate (su quella che si chiama *retta di Simson*).

    Usando questo fatto e l'esercizio 9 mostrare che l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo referenziale è
    $$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0. \tag{8}$$

12. Mostrare che l'asse radicale fra la circonferenza circoscritta al triangolo referenziale e
    - la circonferenza di Feuerbach è $S_Ax + S_By + S_Cz = 0$.
    - la circonferenza inscritta è $(p-a)^2x + (p-b)^2y + (p-c)^2z = 0$, essendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

13. **[Distanza fra due punti in baricentriche]** Siano $P = [u : v : w]$ e $Q = [u' : v' : w']$ le coordinate **baricentriche esatte** di due punti rispetto a un triangolo referenziale ABC.
    - Mostrare che
    $$PQ^2 = S_A(u-u')^2 + S_B(v-v')^2 + S_C(w-w')^2. \tag{9}$$
    - Dato un generico punto $P = [u : v : w]$, mostrare che
    $$AP^2 = \frac{c^2v^2 + 2S_Avw + b^2w^2}{(u+v+w)^2} \tag{10}$$
    e dedurre, ciclicamente, le espressioni per BP^2 e CP^2.

14. Mostrare che il coniugato isogonale del punto di Nagel (risp. Gergonne) è il centro di omotetia esterno (risp. interno) della circonferenza inscritta e circoscritta.

4.2 GM - 2, Esercizi

1. Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze di centri O_1 e O_2 rispettivamente. Siano S_1 e S_2 rispettivamente il centro di similitudine interno ed esterno di γ_1 e γ_2.

   Mostrare che $(O_1, O_2; S_1, S_2) = -1$.

2. Siano A, C, B e D allineati in quest'ordine su una retta. Siano M e N i punti medi dei segmenti CD e AB rispettivamente.

   Mostrare che sono equivalenti le seguenti proprietà:

   - $(A, B; C, D) = -1$;
   - $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$;
   - $MA \cdot MB = MC^2$;
   - $CA \cdot CB = CD \cdot CN$;
   - $AB^2 + CD^2 = 4MN^2$.

3. Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze *ortogonali* di centri O_1 e O_2 rispettivamente. Una generica retta passante per O_1 interseca γ_1 in A e B e interseca γ_2 in C e D.

   Mostrare che $(A, B; C, D) = -1$.

4. [**Conservazione del birapporto per inversione**] Assumiamo che A, B, C e D siano allineati o conciclici. Siano A', B', C' e D' (allineati o conciclici) le immagini dei precedenti punti tramite un'inversione circolare di centro $O \notin \{A, B, C, D\}$ qualsiasi. Allora

   $$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D'). \tag{11}$$

   Cosa succede se $O \in \{A, B, C, D\}$?

5. [**Unicità del quarto armonico**] Assumiamo che A, B, C, D_1 e D_2 siano conciclici o allineati.

   Mostrare che se $(A, B; C, D_1) = (A, B; C, D_2)$ allora $D_1 \equiv D_2$.

6. Sia ABC un triangolo e M un punto sul segmento BC. Sia N preso sulla retta di BC dimodoché $\angle MAN = 90$.

   Mostrare che $(B, C; M, N) = -1$ se e solo se AM è bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

7. Sia ABC un triangolo scaleno e sia $D \in AC$ tale che BD è la bisettrice di $\angle ABC$. Siano E ed F i piedi delle perpendicolari tracciate rispettivamente da A e da C sulla retta BD e sia $M \in BC$ tale che $DM \perp BC$.

   Mostrare che $\angle EMD = \angle DMF$.

8. [**Teorema della farfalla**] Sia MN una corda di una circonferenza γ e sia P il suo punto medio. Siano AB e CD due corde qualsiasi di γ che si intersecano in P dimodoché A e C siano nello stesso semipiano generato dalla retta su cui giace MN.

   Mostrare che AD e BC intersecano la corda MN in due punti equidistanti da P.

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto a una circonferenza e siano M, N, P e Q i punti di tangenza di AB, BC, CD e DA con la circonferenza rispettivamente.

   Mostrare che AC, BD, MP e NQ sono concorrenti.

10. *[Copiato in GB]* [**Lemma della *simmediana***] Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza γ. Le tangenti a γ in B e C si intersecano in P.

    Mostrare che AP è *simmediana* relativa a BC, *i.e.* simmetrica della mediana relativa a BC rispetto alla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

11. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Le rette AB e CD si intersecano in un punto E e le diagonali AC e BD si intersecano in un punto F. Sia H l'intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli AFD e BFC.

    Mostrare che $\angle EHF = 90°$.

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero armonico inscritto in una circonferenza γ di centro O con diagonali AB e CD. Sia M il punto medio di AB.

    Mostrare MA è la bisettrice dell'angolo $\angle CMD$.

13. Usando gli argomenti della lezione **G2 - Medium** mostrare il **Teorema di Brocard** contenuto nella raccolta degli esercizi relativi alla lezione **G1 - Medium**.

14. Sia ω la circonferenza inscritta in un triangolo ABC e sia I il suo centro. ω interseca BC, CA e AB rispettivamente in D, E e F. BI interseca EF in K.

    Mostrare che $BK \perp CK$.

15. Sia ABC un triangolo la cui circonferenza inscritta, di centro I, tange BC,CA e AB in D,E e F rispettivamente. Siano N l'intersezione di ID con EF e M il punto medio di BC.

    Mostrare che A, N e M sono allineati.

4.3 GM - 3, Esercizi

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico di circocentro O. Le rette AB e CD si intersecano in E, le rette AD e BC si intersecano in F e le rette AC e BD si intersecano in P. Sia K l'intersezione di EP e AD e M la proiezione di O su AD.

   Mostrare che $BCMK$ è ciclico.

2. Sia ABC un triangolo. Mostrare che il centro della (unica) rotomotetia che manda B in A e A in C è sulla simmediana uscente da A.

   Soluzione: Viste le considerazioni fatte nella parte sulla rotomotetia, tale centro è l'intersezione X fra la circonferenza che passa per A e B e tange AC in A e la circonferenza che passa per A e C e tange AB in A. Ora (anticipazione) faccio una inversione di centro in A e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ più una simmetria rispetto alla bisettrice. Si ha che $B \to C$ e $C \to B$. La circonferenza ABX va in una retta passante per C e parallela ad AB e la circonferenza ACX va in una retta passante per B e parallela ad C. Dunque X va in un punto sulla mediana e dunque prima era sulla simmediana.

3. [**Fatti su triangolo con mistilinea**] Sia ABC un triangolo iscritto in una circonferenza Γ e sia γ la circonferenza tangente ai segmenti AB, AC e a Γ rispettivamente in E, F e T. Sia I l'incentro di ABC. Sia M il punto medio dell'arco BC che non contiene A. Sia V l'intersezione di AT con EF.

   Mostrare che:

   - $I \in EF$ e $IE = IF$;
   - MT, EF e BC sono concorrenti;
   - $\angle BVE = \angle CVF$.

4. [**Teorema di Sawyama-Thébault**] Sia ABC un triangolo di incentro I e sia D un punto sul lato BC. Sia P (rispettivamente Q) il centro della circonferenza che tange i segmenti AD e DC (rispettivamente DB) e la circonferenza circoscritta ad ABC.

   Mostrare che P, Q e I sono allineati.

5. [**NUSAMO 2015/2016 - 5**] Sia ABC un triangolo, I_A l'excentro opposto ad A e I il suo incentro. Sia M il circocentro del triangolo BIC e sia G la proiezione di I_A su BC. Sia, infine, P l'intersezione fra la circonferenza circoscritta di ABC e la circonferenza di diametro AI_A.

   Mostrare che M, G e P sono allineati. *Soluzione:* Inversione nella circonferenza circoscritta a BIC che ha centro in M

6. *[Copiato in GB]* Siano A, B e C tre punti allineati e supponiamo che P sia un punto qualsiasi del piano distinto dai precedenti 3.

   Mostrare che i circocentri dei triangoli PAB, PAC, PBC e P sono conciclici.

7. *[Copiato in GB]* Sia ABC un triangolo con ortocentro H e siano D, E e F i piedi delle altezze che cadono sui lati BC, CA e AB rispettivamente. Sia $T = EF \cap BC$.

   Mostrare che TH è perpendicolare alla mediana condotta da A.

8. [**Teorema di Feuerbach**]*[Copiato in GB]* Mostrare che la circonferenza di Feuerbach è tangente alla circonferenza inscritta e alle circonferenze exinscritte.

   Suggerimento: Sia M il punto medio di BC e D e G rispettivamente i punti in cui la circonferenza inscritta e quella ex-inscritta opposta ad A incontrano BC. Invertire in M con raggio MD.

9. La circonferenza inscritta nel triangolo ABC è tangente a BC, CA e AB in M, N e P rispettivamente.

   Mostrare che il circocentro e l'incentro di ABC sono allineati con l'ortocentro di MNP.

5 Problemi Basic

5.1 GB - 1, Problemi

- **EGMO 2013 - 1** Nel triangolo ABC, si prolunghi il lato BC dalla parte di C di un segmento CD tale che $CD = BC$. Si prolunghi poi il lato CA dalla parte di A di un segmento AE tale che $AE = 2CA$.Dimostrare che, se $AD = BE$, allora il triangolo ABC è rettangolo

- **IMOSL 1998 - 5** Sia ABC un triangolo, H l'ortocentro, O il circocentro e R il raggio della circonferenza circoscritta. Sia D il simmetrico di A rispetto a BC, E il simmetrico di B rispetto AC e F il simmetrico di C rispetto AB.
  Dimostrare che D, E, F sono allineati se e solo se $OH = 2R$.

  Soluzione: Complessi con circoscritta = circonferenza unitaria

- **IMOSL 2015 - G1** Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. Sia G il punto per cui il quadrilatero $ABGH$ risulta un parallelogrammo. Sia I il punto della retta GH per cui la retta AC biseca il segmento HI. Sia J l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo GCI. Dimostrare che $IJ = AH$.

  Soluzione: Sia $M = GH \cap AC$, Teorema dei seni su $\triangle IJM$ da $\frac{\sin\alpha}{IJ} = \frac{\sin IMJ}{IJ} = \frac{\sin IJM}{MH} = \frac{\sin IGC}{MH}$ per la ciclicità di $GCIJ$. Teorema dei seni su $\triangle MAH$ da $\frac{\sin\alpha}{AH} = \frac{\sin CJH}{MH}$. Per la tesi basta dimostrare che $\widehat{CGH} = \widehat{CAH} = 90 - \gamma$, ma CHG è rettangolo e $CH = c \cdot cotg(\gamma) = HG \cdot cotg(\gamma)$.

- **ITA TST 2016 - 1** Sia $ABCD$ un quadrilatero. Supponiamo che esista un punto P interno al quadrilatero tale che $\angle APD = \angle BPC = 90°$ e $PA \cdot PD = PB \cdot PC$. Sia O il circocentro di $\triangle CPD$.
  Dimostrare che la retta OP passa per il punto medio di AB.

5.2 GB - 2, Problemi

- **IMOSL2013 - G2** Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che noncontiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.
  Dimostrare che $KA = KT$.

  Soluzione: La simmetria rispetto all'asse di AT manda M in X e N in Y, quindi K rimane fisso e sta sull'asse.

- **EGMO 2016 - 4** Due circonferenze aventi lo stesso raggio, ω_1 e ω_2 , si intersecano in due punti distinti X_1 and X_2 . Si consideri una circonferenza ω tangente esternamente a ω_1 nel punto T_1 e internamente a ω_2 nel punto T_2.
  Si dimostri che il punto d'intersezione fra le rette X_1T_1 e X_2T_2 giace su ω. *Soluzione:* Inversione in X_1

- **Allenamenti EGMO 2019 - G6** Dato il triangolo ΔABC consideriamo ω_B la circonferenza passante per A, B e tangente in A al lato AC e, simmetricamente, ω_C la circonferenza passante per A, C e tangente in A al lato AB. Sia D il punto di intersezione di ω_B e ω_C , e sia E il punto sulla retta AD tale che $AD = DE$. Dimostrare che E sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABC$.

  Soluzione: invertire in A.

- **Senior 2013 TF** Sia ABC un triangolo. Sia D l'ulteriore intersezione tra la circonferenza passante per C e tangente alla retta AB in A e la circonferenza passante per B e tangente alla retta AC in A. Sia E il punto sulla retta AB (diverso da A) tale che $BA = BE$. Sia F l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo ADE.
  Dimostrare che $AC = AF$.

  Soluzione: Invertire in A.

- **IMOSL2011 - G4** Sia ABC un triangolo acutangolo e Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia B_0 il punto medio di AC e C_0 il punto medio di AB. Sia D il piede dell'altezza da A su BC e sia G il baricentro di ABC. Sia ω la circonferenza passante per B_0, C_0 e tangente a Γ in un punto $X \neq A$.

  Dimostrare che D, X, G sono allineati.

  Soluzione: nota: la soluzione proposta è basic difficile/medium facile

Inversione + simmetria di centro A e raggio $\sqrt(AB * AB_0)$, scambia B e B_0, C e C_0, manda D nel centro di Γ O e ω in una circonferenza per B e C tangente all'immagine di Γ, B_0C_0, in un punto Y. Poiché BC e B_0C_0 sono paralleli, Y sta sull'asse di BC, quindi OY è perpendicolare a B_0C_0.

Sia T l'intersezione delle tangenti a Γ per A,X e di B_0C_0, è centro radicale di Γ, ω e la circoscritta a AB_0C_0. ATXYO è ciclico, l'immagine sotto inversione è la retta XDY. Ora basta mostrare DY intersecato la mediana AA_0 è G, ma AD è il doppio di XA_0 e sono paralleli, quindi l'intersezione è proprio G.

5.3 GB - 3, Problemi

1. **Polish MO 2018 - 5** Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB \neq AC$ e siano E, F i piedi delle altezze su AC e AB. La tangente in A alla circoscritta interseca BC in P. La retta parallela a BC passante per A interseca EF in Q.

   Dimostrare che PQ è perpendicolare alla mediana passante per A del triangolo ABC

   Soluzione: Assi radicali swag: 1) La circonferenza degenere di centro A, la circoscritta a AEF e a $BCEF$ hanno Q come centro radicale (in quanto sta su EF per le ultime due e AQ tange la circoscritta AEF per le prime due). 2) $PA^2 = PB \cdot PC$, quindi P sta sull'asse radicale tra A e la circoscritta a $BCEF$. Dunque PQ è asse radicale delle due circonferenze ed è perpendicolare alla congiungente dei centri, che è AM

6 Problemi Medium

6.1 GM - 1, Problemi

1. **[BMO 2009 - 2]** Sia MN una segmento parallelo al lato BC del triangolo ABC, con M sul lato AB e N sul lato AC. Le rette BN e CM si incontrano in P. Le circonferenze circoscritte a BMP e CNP si incontrano in due punti distinti P e Q.

   Mostrare che $\angle BAQ = \angle PAC$.

   Soluzione: Diciamo che a è l'origine del nostro piano di Gauss, mentre b e c sono due generici punti. Visto che $mn \parallel bc$ e $m \in ab$, $m \in ac$ si ha che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $m = \lambda b$ e $n = \lambda c$. Essendo q il centro della rotomotetia che manda m in b e c in n, allora

   $$q = \frac{mn - bc}{m + n - b - c} = \frac{\lambda^2 bc - bc}{\lambda b + \lambda c - b - c} = \frac{(\lambda + 1)bc}{b + c}.$$

   Per trovare trovare p basterebbe imporre $p \in mc$ e $p \in bn$. *Proporlo come esercizio.* D'altra parte non ce n'è bisogno: infatti noi siamo interessati poi solo all'angolo $\angle CAP$ e dunque non tanto ci servono le coordinate di P quanto capire chi è la retta AP, che è la mediana di ABC. Dunque possiamo dire che esiste un certo η reale tale che

   $$p = \eta(b + c).$$

   Per l'equazione dell'angolo, se $\theta = \angle BAQ$ si ha

   $$e^{2i\theta} = \frac{q - a}{b - a}\frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{q} - \bar{a}} = \frac{c(\bar{b} + \bar{c})}{\bar{c}(b + c)},$$

   mentre se $\theta' = \angle PAC$ si ha

   $$e^{2i\theta'} = \frac{c - a}{p - a}\frac{\bar{p} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{a}} = \frac{c(\bar{b} + \bar{c})}{\bar{c}(b + c)}.$$

   Da ciò, con un attimo di discussione, si ottiene che $\theta = \theta'$ che implica la tesi.

2. **[RMM 2012 - 2]** Sia ABC un triangolo non isoscele e siano D, E e F rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA e AB. La circonferenza BCF e la retta BE si intersecano nuovamente in P e la circonferenza ABE e la retta AD in Q. Le rette DP e FQ si incontrano in R.

   Mostrare che il baricentro G del triangolo ABC giace sulla circonferenza circoscritta al triangolo PQR.

   Soluzione: Per mostrare la ciclità è sufficiente mostrare che, detto $\theta = \angle GPD$ e $\theta' = \angle GQF$, si ha

   $$\theta = \theta'.$$

   Dall'equazione dell'angolo risulta che per fare ciò è sufficiente mostrare

   $$\frac{d - p}{g - p}\frac{g - q}{f - q} \in \mathbb{R}.$$

   Il problema è dunque spostato a trovare i punti p e q. Qui usiamo un'osservazione sintetica. Si ha che

   $$\angle GDE = \angle GAB = \angle QEG,$$

   dove la prima è vera per il parallelismo $AB \parallel ED$ e la seconda è vera poiché $ABEQ$ è ciclico. Analogamente si ha $\angle EQD = \angle GED$ e dunque i triangoli GDE e GEQ sono ordinatamente simili. Dunque, scegliendo $g = 0$, risulta, visto che $GD \cdot GQ = GE^2$,

   $$q = d\frac{|e|^2}{|d|^2} = \frac{e\bar{e}}{\bar{d}}$$

   e analogamente

   $$p = \frac{f\bar{f}}{\bar{e}}.$$

   A questo punto

   $$\frac{d - p}{g - p}\frac{g - q}{f - q} = \frac{(d\bar{e} - f\bar{f})e\bar{e}}{(f\bar{d} - e\bar{e})f\bar{f}}$$

   e poiché, essendo $g = 0$, si ha $d + e + f = 0$, la precedente espressione è uguale a

   $$\frac{|e|^2}{|f|^2}$$

   che è un numero reale, come si voleva.

   che segue poiché $d + e + f = 0$, essendo $g = 0$, e sostituendo.

3. **[USAMO 2016 - Day 2 - 2]** Un pentagono equilatero $AMNPQ$ è inscritto in un triangolo ABC in modo che $M \in AB$, $Q \in AC$ e $N, p \in BC$. Sia S l'intersezione di MN e PQ e denotiamo con l la bisettrice di $\angle MSQ$.

   Mostrare che, detto I l'incentro di ABC, OI è parallelo a l.

4. **[IMO 2008 - 6]** Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $BA \neq BC$. Siano ω_1 e ω_2 le circonferenze inscritte ai triangoli ABC e ADC rispettivamente. Supponiamo che esista una circonferenza ω tangente alla retta BA oltre A, alla retta BC oltre C, alla retta AD e alla retta CD.

   Mostrare che le tangenti esterne comuni a ω_1 e ω_2 si intersecano su ω.

5. **[BMO 2015 - 2]** Sia ABC un triangolo scaleno con incentro I e circonferenza circoscritta ω. AI, BI e CI intersecano ω di nuovo nei punti D, E e F rispettivamente. Le rette parallele a BC, CA e AB condotte da I intersecano EF, DF e DE rispettivamente nei punti K, L e M.

   Mostrare che K, L e M sono allineati.

6. **[IMO 2012 - 1]** Dato un triangolo ABC, sia J il centro della circonferenza ex-inscritta opposta al vertice A, la quale tange BC in M e le rette AB e AC in K e L rispettivamente. Le rette LM e BJ si intersecano in F e le rette KM e CJ si intersecano in G. Sia S il punto d'intersezione fra AF e BC e sia T il punto d'intersezione fra AG e BC.

   Mostrare che M è il punto medio di ST.

   Soluzione:

7. **[IMO SL 2011 - 4]** Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno, e sia γ la sua circonferenza circoscritta. Siano A_0 il punto medio di BC, B_0 il punto medio di AC e C_0 il punto medio di AB. Sia D il piede dell'altezza uscente da A, D_0 la proiezione di A_0 sulla retta B_0C_0 e G il baricentro di ABC. Sia γ_1 la circonferenza passante per B_0 e C_0, e tangente a γ in un punto P diverso da A.

   - Dimostrare che la retta B_0C_0 e le tangenti a γ nei punti A e P sono concorrenti.
   - Dimostrare che i punti D_0, G, D, e P sono allineati.

8. **[USA TST 2012 - December Test - 1]** In un triangolo acutangolo ABC si ha $\angle A < \angle B$ e $\angle A < \angle C$. Sia P un punto variabile su BC. I punti D e E giacciono su AB e AC rispettivamente in modo che $BP = PD$ e $CP = PE$.

   Mostrare che al variare di P sul segmento BC, la circonferenza circoscritta al triangolo ADE passa per un punto fisso oltre A.

9. **[IMO 2019 - 6]** Sia I l'incentro di un triangolo acutangolo ABC con $AB \neq AC$. La circonferenza inscritta ω di ABC è tangente a BC, CA e AB in D, E e F rispettivamente. La retta per D e perpendicolare ad EF interseca ω di nuovo in R e la retta AR interseca ω di nuovo in P. Sia Q la seconda intersezione, diversa da P, delle circonferenze circoscritte ai triangoli PBF e PCE.

   Mostrare che le rette DI e PQ si incontrano su una retta per A perpendicolare ad AI.

   Soluzione: Usare come circonferenza unitaria la circonferenza inscritta. Consulta `https://artofproblemsolving.com/community/c6h1876745p12752769`.

10. **[MOP 2006]** Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza ω. P giace su BC in modo tale che PA è tangente a ω. La bisettrice di $\angle APB$ interseca i segmenti AB e AC rispettivamente in D ed E e i segmenti BE e CD si intersecano in Q. Supponiamo che la retta PQ passi per il centro di ω.

    Calcolare $\angle BAC$.

11. **[USAMO 2001]** Sia ABC un triangolo di circonferenza inscritta ω. Siano D_1 ed E_1 i punti in cui ω tange BC e AC rispettivamente. Siano D_2 ed E_2 i punti sui lati BC e AC rispettivamente tali che $CD_2 = BD_1$ e $CE_2 = AE_1$ e sia P il punto d'intersezione dei segmenti AD_2 e BE_2. La circonferenza ω interseca il segmento AD_2 in due punti, il più vicino dei quali al vertice A sia detto Q.

    Mostrare che $AQ = D_2P$.

    Soluzione: Scrivere tutti i punti in coordinate baricentriche normalizzate. Per trovare Q notare che I è il punto medio di QD_1. Infine per mostrare $AQ = D_2P$ usare i displacement dati i punti con le coordinate normalizzate.

6.2 GM - 2, Problemi

1. **[China NMO 2017 - 2]** Siano ω e Ω di centro I e O rispettivamente la circonferenza inscritta e circoscritta a un triangolo acutangolo ABC. La circonferenza ω interseca BC in D e le tangenti a Ω passanti per B e C si intersecano in L. Siano AH l'altezza condotta da A a BC e X l'intersezione di AO con BC. Siano P e Q le intersezioni di OI con Ω.

   Mostrare che $PQXH$ è ciclico se e solo se A, D e L sono allineati.

2. **[IMO 2014 - 4]** Siano P e Q punti su un segmento BC di un triangolo acutangolo ABC tali che $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Siano M e N punti su AP e AQ rispettivamente tali che P è punto medio di AM e Q è punto medio di AN.

   Mostrare che l'intersezione di BM e CN giace sulla circonferenza circoscritta di ABC.

3. **[Iran TST 2007 - Day 2 - 3]** Sia ω la circonferenza inscritta ad un triangolo ABC che tange AB e AC rispettivamente in F e E. Siano P e Q su AB e AC rispettivamente in modo che PQ sia parallelo a BC e tangente ad ω. Siano T l'intersezione di EF con BC e M il punto medio di PQ.

   Mostrare che TM tange ω.

   Soluzione: Se $X = AD \cap \omega$, TX tange ω per quadrilateri armonici. Poi (XDAY)=-1 e proiettando da T su PQ ottengo che l'intersezione di TX con PQ è il suo punto medio

4. **[Iran TST 2009 - Day 2 - 3]** In un triangolo ABC è inscritta una circonferenza ω di centro I che interseca i lati BC, CA e AB rispettivamente in D, E e F. Sia M il piede della perpendicolare da D a EF. Sia P il punto medio di DM e H l'ortocentro del triangolo BIC.

   Mostrare che PH biseca EF.

5. **[Romania TST 2007 - Day 7 - 2]** La circonferenza inscritta al triangolo ABC è tangente ad AB e AC in F ed E rispettivamente. Sia M il punto di BC e N l'intersezione di AM con EF. La circonferenza di diametro BC interseca BI e CI in X e Y rispettivamente.

   Mostrare che $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{AC}{AB}$.

   Soluzione: Usa l'esercizio 13 e nota che DXY è simile ad ABC e ID è bisettrice di YDX. Oppure semplicemente formula seni-lati su IXY e un po' di trigonometria

6. **[IMO SL 2007 - G8]** Sul lato AB di un quadrilatero convesso $ABCD$ è preso un punto P. Sia ω la circonferenza inscritta al triangolo CPD e sia I il suo centro. Supponiamo che ω sia tangente alle circonferenze inscritte ai triangoli APD e BPC in K e L rispettivamente. Siano E l'intersezione delle rette AC e BD e F l'intersezione delle rette AK e BL.

   Mostrare che E, I e F sono allineati.

6.3 GM - 3, Problemi

1. **[USA TST 2007 - 5]** Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza Γ. Le tangenti a Γ condotte da B e C si intersecano in T. Il punto S è sulla retta BC dimodoché $AS \perp AT$. Siano B_1 e C_1 sulla retta ST dimodoché $B_1T = BT = C_1T$.

   Mostrare che ABC e AB_1C_1 sono simili.

2. **[IMO 2005 - 5]** Sia $ABCD$ un quadrialtero convesso con $BC = DA$ e BC non parallelo a DA. Siano E e F su BC e DA rispettivamente tali che $BE = DF$. Siano P l'intersezione di AC e BD, Q l'intersezione di BD e EF e R l'intersezione di EF e AC.

   Mostra che, al variare di E e F, la circonferenza circoscritta al triangolo PQR passa per un punto fisso (oltre P).

3. **[?]** Sia ABC un triangolo e siano D e E i piedi delle altezze relative ad A e B, rispettivamente, le quali siintersecano in H. Sia M il punto medio di AB e supponiamo che le circonferenze circoscritte a ABH e DEM si intersechino nei punti P e Q (con P e A sullo stesso lato di CH).

   Mostrare che le rette PH e MQ si incontrano sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

4. **[IMO SL 2006 - 9]** Sui lati BC, CA e AB di un triangolo ABC si scelgano tre punti A_1, B_1 e C_1 rispettivamente. Le circonferenze circoscritte a AB_1C_1, BC_1A_1 e CA_1B_1 intersecano la circonferenza circoscritta ad ABC in A_2, B_2 e C_3 rispettivamente. Siano, inoltre, A_3, B_3 e C_3 rispettivamente i simmetrici di A_1, B_1 e C_1 rispetto ai punti medi dei lati del triangolo su cui giacciono.

   Mostrare che i triangoli $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ sono simili.

   Soluzione: A_2 è il centro della spilar similiarity che porta BC_1 in CB_1 quindi $A_2C/A_2B = B_1C/C_1B = AB_3/AC_3$ da cui A_2BC è simile ad AC_3B_3 e da qui sono angoli

5. **[EGMO 2013 - 5]** Sia Ω la circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC. La circonferenza ω è tangente ai lati AC e BC e internamente alla circonferenza Ω in un punto P. Una retta parallela ad AB che interseca l'interno del triangolo ABC è tangente a ω in Q.

   Mostrare che $\angle ACP = \angle QCB$.

   Soluzione: Per inversione più simmetria AP è la simmetrica della ceviana di Nagel rispetto alla bisettrice, che , per omotetia, coincide con AQ.

6. **[IMO SL 2003 - 4]** Siano Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 circonferenze distinte tali che Γ_1 e Γ_3 (così come Γ_2 e Γ_4) siano tangenti esternamente in P. Supponiamo che Γ_1 e Γ_2, Γ_2 e Γ_3, Γ_3 e Γ_4, Γ_4 e Γ_1 si intersechino in A, B, C e D rispettivamente e che nessuno di questi punti sia P.

   Mostrare che
   $$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

7. **[IMO 2015 - 3]** Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB > AC$. Sia Γ la sua circonferenza circoscritta, H il suo ortocentro, e F il piede dell'altezza condotta da A. Sia M il punto medo di BC. Sia Q il punto su Γ tale che $\angle HQA = 90°$ e sia K il punto su Γ tale che $\angle HKQ = 90°$. Assumiamo che A, B, C, K e Q sono tutti distinti e giacciono su Γ in quest'ordine.

   Mostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli KQH e FKM sono fra loro tangenti. *Soluzione:* Inversione di centro H che fissa la circonferenza circoscritta ad ABC. K'Q' diviene perpendicolare ad AK' che è l'asse di F'M' e dunque K'Q' è la tangente a K' nella circonferenza circoscritta a F'M'K'.

8. **[USAMO 2006]** Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano E e F punti su AD e BC rispettivamente tali che $AE/ED = BF/FC$. La retta FE incontra BA e CD in S e T rispettivamente.

   Mostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli SAE, SBF, TCF e TDE passano per uno stesso punto.

   Soluzione: Innanzitutto Per Miquel sui quadrangoli sappiamo che le circonferenze circoscritte ai triangoli SAE, SBF e ABX concorrono; così come le circonferenze circoscritte ai triangoli TCF, TDE e XCD. Quindi, essendo la tesi vera, l'intersezione delle quattro circonferenze deve essere l'altra intersezione fra le circonferenze XAB e XCD. Sia Y questa intersezione. Per quanto visto sulle rotomotetie, questo punto è il centro della rotomotetia che manda BC in AD e dunque, visti i rapporti fra i segmenti, deve mandare F in E. Allora
   $$\angle YFB = \angle YEX$$
   e dunque Y è sulla circonferenza circoscritta a XEF e pertanto, per Miquel, anche su quella circoscritta a SAE e SBF.

Riferimenti bibliografici

[1] Gunmay Anda, *Inversion on the fly*, http://services.artofproblemsolving.com/download.php?id=YXR0YWNobWVudHMvNy85LzRiMmFiYzk1NTgxNjQyZGNhNjEzZDkxOGQ0OTFmN2UyYWFlMDc3LnBkZg==&rn=SW52ZXJzaW9uLnBkZg==

[2] Dušan Djukić, *Inversion*, http://memo.szolda.hu/feladatok/inversion_ddj.pdf

[3] Paul Yiu, *Introduction to the geometry of the triangle*, http://math.fau.edu/yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf

[4] Marko Radovanović, *Complex numbers in geometry*, https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwjZiqjuhLDkAhUN16QKHZTNBnAQFjAAegQIAhAC&url=http%3A%2F%2Fservices.artofproblemsolving.com%2Fdownload.php%3Fid%3DYXR0YWNobWVudHMvOS9iLzZhNGM2M2Y0NzZiNGY3MWE3ZTI0ZTRiY2Y4OGIwMzhiN2IyNzFhLnBkZg%3D%3D%26rn%3DbWFya28tcmFkb3Zhbm92aWMtY29tcGxleC1udW1iZXJzLWluLWdlb21ldHJ5LnBkZg%3D%3D&usg=AFQjCNFBeoyb2eMJWQnC3Q7qMMS3okG1Kw

[5] Milivoje Lukić, *Projective geometry*, http://memo.szolda.hu/feladatok/projg_ml.pdf

[6] Ercole Suppa, *Divisione armonica*, http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2010/19-Geometria-Testi/02-Ercole_Suppa-Divisione_Armonica.pdf

[7] Yufei Zaho, *Cyclic quadrilaterals – the big picture*, http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf

[8] Yufei Zaho, *Circles*, http://yufeizhao.com/olympiad/imo2008/zhao-circles.pdf

[9] *Mathlinks*, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=MathLinks

[10] Cut the Knot *Napoleon Theorem - Proof with complex numbers* https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_complex2.shtml