Day1

Set

subset(子集)

proper subset（真子集）⊂⊊

superset（超集）

proper superset（真超集）

Universal Set（全集）---U

cardinality（基数）

一个集合中元素的个数

Union and Intersection

Union（并集）

Intersection（交集）

Complement and Difference

Complement（补集）

$$\complement A$$

Difference（差集）A\B或A-B

Symmetric difference（对称差）

$$A \oplus B = A \triangle B$$

Cartesian Products（笛卡尔积）

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ and } a_2 \in A_2 \text{ and } \ldots \text{ and } a_n \in A_n\}$$

Relations

On a set A, the relation A × A is called the universal relation

ATTENTION!!!

注意一下，对于一个含有pair的集合来说，整个集合叫做关系，而不是pair

Day2

Composite relation（复合关系）and Inverse relation(逆关系)

Composite relation

$$S \circ R \subseteq A \times C$$

Q1:如果没有相互对应的怎么办

Inverse relation

$$R = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

$$R^{-1} = B \times A = \{(a, b) \mid a \in B \text{ and } b \in A\}$$

在这里R与R-1互为逆关系

Logic: Propositions（逻辑命题）

Propositions

命题就是一类满足特定条件的**陈述句**

compound proposition（复合命题）

logical connectives--Compound propositions（复合命题）

合取（Conjunction）（and)

$$P \wedge Q$$

析取（Disjunction）(or)

$$P \vee Q$$

否定（Negation) (not)

$$\neg P$$

蕴含（Implication）

$$P \rightarrow Q$$

等价（Biconditional）

$$P \leftrightarrow Q$$

条件和（Conditional And)(implies / if–then–)

$$P \rightarrow Q \quad (\text{also } \neg P \vee Q)$$

条件或（Conditional Or）

$$P \leftarrow Q \quad (\text{also } \neg Q \vee P)$$

双条件或（Biconditional Or）(iff / – if and only if –).

$$P \leftrightarrow Q \quad (\text{also } (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

Syntax tree（语法树）

```
     ∨
    / \
   p   ∨
      / \
     ¬   r
    / \
   q
```

便于表达判断正确错误

Truth Tables

Implies (→)

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

一个假的前提不能证明任何结论为假

If and only if (↔)

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

And (∧)

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Or (∨)

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Not (¬)

p	¬p
T	F
F	T

优先级

Operator	¬	∧	∨	→	↔
Precedence	1	2	3	4	5

Day3

Tautology(永真式：) and Contraduction(矛盾)

永真式：一个命题不管组成是对是错总是保证整体是对的

矛盾：一个命题不管组成是对是错总是保证整体是错的

Contingency（偶然命题）and Satisfiability（不是偶然的命题）

可满足性（Satisfiability）：

- 如果至少存在一种赋值（变量的真值分配），使得一个逻辑公式或一组逻辑公式全部为真，那么我们就说这个公式或这组公式是可满足的。

Logical Equivalence（逻辑等价）

$$\alpha \equiv \beta$$

逻辑等价和等价的区别（≡与→的区别）

1,α≡β 不是命题逻辑公式。它是关于两个公式的陈述。

这个陈述意味着 α≡β 不是一个可以在命题逻辑中直接评估为真或假的公式。相反，它是一个元逻辑陈述，表明 α 和 β在所有可能的解释下具有相同的真值。换句话说，α 和 β 是逻辑等价的。

2,α↔β 是一个命题逻辑公式.

这是一个标准的命题逻辑公式，表示 α 和 β 具有相同的真值。如果 α𝛼 和 β𝛽 都为真或都为假，那么 α↔β 为真；如果 α和 β的真值不同，那么 α↔β为假

Turnstiles()

α logically implies β iff α ↔ β is a tautology.

其实与逻辑相等同理

Proving Equivalences！！！

1. 幂等律：
   - A ∨ A ≡ A （Identity Law for ∨）
   - A ∧ A ≡ A （Identity Law for ∧）
2. 交换律：
   - A ∨ B ≡ B ∨ A （Commutative Law）
   - A ∧ B ≡ B ∧ A （Commutative Law）
3. 结合律：
   - (A ∨ B) ∨ C ≡ A ∨ (B ∨ C) （Associative Law）
   - (A ∧ B) ∧ C ≡ A ∧ (B ∧ C) （Associative Law）
4. 分配律：
   - A ∨ (B ∧ C) ≡ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C) （Distributive Law）
   - A ∧ (B ∨ C) ≡ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C) （Distributive Law）
5. 德摩根律：
   - ¬(A ∨ B) ≡ ¬A ∧ ¬B （De Morgan's Law）
   - ¬(A ∧ B) ≡ ¬A ∨ ¬B （De Morgan's Law）
6. 吸收律：
   - A ∨ (A ∧ B) ≡ A （Absorption Law）
   - A ∧ (A ∨ B) ≡ A （Absorption Law）
7. 零律：
   - A ∨ 1 ≡ 1 （Identity Law for ∨）
   - A ∧ 0 ≡ 0 （Identity Law for ∧）
8. 同一律：
   - A ∨ 0 ≡ A （Identity Law for ∨）
   - A ∧ 1 ≡ A （Identity Law for ∧）
9. 排中律：
   - A ∨ ¬A ≡ 1 （Law of Excluded Middle）
10. 矛盾律：
    - A ∧ ¬A ≡ 0 （Law of Non-Contradiction）
11. 双重否定律：
    - ¬¬A ≡ A （Double Negation Law）
12. 蕴涵等值式：(***important!!!!***)

- A → B ≡ ¬A ∨ B （Material Implication）

13. 等价等值式：
    - A ↔ B ≡ (A → B) ∧ (B → A) （Equivalence Law）
14. 等价否定等值式：
    - A ↔ B ≡ ¬A ↔ ¬B （Contrapositive Law）
15. 假言易位：
    - A → B ≡ ¬B → ¬A （Contrapositive Law）
16. 归谬论：？？？？
    - (A → B) ∧ (A → ¬B) ≡ ¬A （Proof by Contradiction）

Day4Day5

Predicate Logic（谓词逻辑）

Domain(定义域)

Predicate（谓词）

谓词：谓词是一个函数，它接受一个或多个参数，并返回一个真值。例如，"P(x)" 表示谓词P应用于个体x。

Universal and Existential Quantifiers（全称量词和存在量词）

符号：∀

符号：∃

negation with quantifiers(带量词的否定)

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$

$$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

Interaction of quanitifiers with ∨ and ∧ （Conjunction与Distunction的交互）

∃x(φ ∨ ψ) ≡ (∃x φ) ∨ (∃x ψ)

∀x(φ ∧ ψ) ≡ (∀x φ) ∧ (∀x ψ)

Day6

Mathematical Statements(数学陈述)

1，theorem（定理）

2，lemma（引理）

3，proposition（命题）

....

Types of Proof

direct proof(直接证明)

prove $\alpha \to \beta$

indirect proof（间接证明）

proof by contraposition(反证法)

prove $\alpha \to \beta$ by:
prove $\neg\beta \to \neg\alpha$

tip: Converse 是逆命题

proof by contradiction（矛盾证明）

prove α by:
assume $\neg\alpha$
show this is impossible(证明反命题是不可能成立的)

proof by cases（案例证明--proof by exhaustion.）

splitting a proof down into two or more parts where each part has some extra condition

Day-7

Reflexivity

$\forall a(a \mathrel{R} a)$

Reflexivity

$\forall a \forall b(a \mathrel{R} b \to b \mathrel{R} a)$

Transitivity

$\forall a \forall b \forall c((a \mathrel{R} b \wedge b \mathrel{R} c) \to a \mathrel{R} c)$

推理

提到了推理的方法

Day-8

Equivalence Relations（等价关系）

当一个关系具有Reflexivity，Reflexivity，Transitivity即为等价关系

Equivalence Classes（等价类）

就是我现在有一个等价关系'~'，那么元素a的等价类就是$[a]=\{b\in A \mid a\sim b\}$

Function

函数的相关内容

重要的概念

- **Domain:**可以理解为定义域
- **Codomain:**值域（具有潜在性）
- **Source:**定义域
- **Target:**值域
- **Range:**f(a)
- **Image:**f(a)

单射（Injective Functions）

- **定义**：如果一个函数$f:A\to B$ 是单射的，那么对于 AA 中的任意两个不同的元素 a1$a1$ 和 a2$a2$，它们在 BB 中的像也不同，即 f(a1)≠f(a2)
- **直观理解**：单射函数保证了定义域中的**每个元素**都映射到值域中的**唯一元素**，没有两个不同的元素映射到同一个元素。
- **例子**：函数 $f(x)=2x$ 是单射的，因为不同的 x 值总是得到不同的 $f(x)$ 值。

满射（Surjective Functions）

- **定义**：如果一个函数 f:A→B是满射的，那么值域 BB 中的每一个元素至少有一个在定义域 AA 中的元素映射到它，即对于 BB 中的每一个 bb，都存在一个 a∈A 使得 $f(a)=b$。
- **直观理解**：满射函数保证了值域中的每个元素都被定义域中的某个元素映射到，没有被遗漏的元素。
- **例子**：函数 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ 是满射的，因为对于任何整数 n，都可以找到一个实数 xx 使得 $f(x)=n$。

双射（Bijective Functions）

- **定义**：如果一个函数既是单射的又是满射的，那么它是双射的。
- **直观理解**：双射函数保证了定义域和值域之间的一一对应关系，即定义域中的每个元素都唯一地映射到值域中的一个元素，且值域中的每个元素都被唯一地映射到。
- **例子**：函数 f(x)=x+1$f(x)=x+1$ 是双射的，因为它是单射的（不同的 xx 值得到不同的 f(x)$f(x)$ 值），同时也是满射的（对于任何 yy，都可以找到一个 xx 使得 f(x)=y$f(x)=y$）.

Day-9

Composing Functions（函数的复合）

Identity functions（恒等函数）

$1A : A \to A$

Inverses of functions（逆函数）

存在性：f 有逆函数当且仅当 f 是双射（即 f 既是单射又是满射）

Partial Orders（偏序）

- 反对称性和非对称性
  - **反对称性**（Antisymmetric）：集合 A 上的关系 R 是反对称的，如果对于所有 a 和 b，(a, b) ∈ R 且 (b, a) ∈ R 意味着 a = b
    - 当你永远找不到两个不同的元素a和B，并且a与B相关，B与a相关时，关系就是反对称的。
    - 没有任何两个不同的元素对称
  - **非对称性**：（Asymmetric）集合 A 上的关系 R 是非对称的，如果对于所有 a 和 b，(a, b) ∈ R 意味着 (b, a) 不∈ R.非对称性不意味着非对称性.
- **非自反性**（irreflexive）
  - 就是没有任何元素自反

A partial order on a set A is a relation R on A which is:
▶ reflexive, and
▶ antisymmetric, and
▶ transitive

Total Orders（全序）

就是全部可比

Day-10

证明方法

Proof by Induction

这种推理的步骤要求比较严格

1. **Base Case（基本情况）**：在数学归纳法中，基本情况是证明的第一步，通常涉及验证某个命题在最小的自然数（通常是0或1）上成立
2. **Inductive Step（归纳步骤）**：
   1. 首先假设：**Inductive Hypothesis**（即假设对于任意的k，该式子的格式都为......）
   2. 接着推导对于任意的k+1，该式子的格式为......
   3. 最后发现该k+1式子确实是可以通过k的式子推导出来

推理完成

Strong Induction

其余的步骤都是一样的，区别在于：

1. 假设定位对于所有的基于base case到k的式子都成立
2. 最后一步：k+1式子可以通过之前的1到k中任意的式子推导出来