Analysis für Wirtschaftsinformatiker

Skript

FSS 2024

Peter Parczewski

(zweite Version - fortlaufend korrigiert und ergänzt)

22. März 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur **4**

1 Reelle Zahlen **5**
- 1.1 Mathematische Grundbegriffe . . . 5
- 1.2 Axiome der reellen Zahlen . . . 7
- 1.3 Abzählen und Summenformeln . . . 11
- 1.4 Ungleichungen . . . 13

2 Komplexe Zahlen **15**
- 2.1 Komplexe Ebene . . . 15
- 2.2 Polardarstellung . . . 18

3 Polynome und Monotonie **20**
- 3.1 Polynome . . . 20
- 3.2 Monotonie von Funktionen . . . 22

4 Konvergenz **27**
- 4.1 Konvergenz von Folgen . . . 27
- 4.2 Limesregeln . . . 31
- 4.3 Existenzsätze . . . 32
- 4.4 Konvergenz von Reihen . . . 36

5 Potenzreihen und Exponentialfunktion **41**
- 5.1 Konvergenzradius . . . 41
- 5.2 Exponentialfunktion . . . 43

6 Stetigkeit **46**
- 6.1 Stetigkeitsregeln . . . 46
- 6.2 Zwischenwertsatz . . . 50

7 Differenziation **52**
- 7.1 Ableitungen . . . 52
- 7.2 Extrema . . . 56
- 7.3 Mittelwertsatz . . . 57

8 Integration 60
8.1 Integral . . . 60
8.2 Mittelwertsatz und Hauptsatz . . . 63
8.3 Integrationsregeln . . . 66
8.4 Uneigentliche Integrale . . . 72

9 Approximation 75
9.1 Taylorpolynome . . . 75
9.2 Regeln von L'Hospital . . . 80
9.3 Numerische Verfahren für nichtlineare Gleichungen . . . 82
9.4 Numerische Integration . . . 87

10 Analysis im $\mathbb{R}^n$ 89
10.1 Funktionen im $\mathbb{R}^n$ . . . 89
10.2 Konvergenz und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . 91
10.3 Differenziation im $\mathbb{R}^n$ . . . 94

Index 99

Literatur

[1] Alsina, C. und Nelsen, R.B. *Perlen der Mathematik*, Springer Spektrum (2015).

[2] Arens, T. et al. *Grundwissen Mathematikstudium: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*, Springer Spektrum (2013).

[3] Bornemann, F. *Konkrete Analysis* für Studierende der Informatik, Springer (2008).

[4] Goebbels, S. und Ritter, S *Mathematik verstehen und anwenden*, Springer Spektrum (2013).

[5] Oberguggenberger, M. und Ostermann, A. *Analysis für Informatiker: Grundlagen, Methoden, Algorithmen*, Springer (2009).

[6] Nelsen, R.B. *Beweise ohne Worte*, Springer Spektrum, (2016).

[7] Pöschel, J. *Etwas Analysis*, Springer (2014).

[8] Teschl, G. und Teschl, S *Mathematik für Informatiker. 2. Analysis und Statistik*, Springer (2014).

[9] Wendland, W.L. und Steinbach, O. *Analysis*. Wiesbaden. Teubner-Verlag (2005).

Kapitel 1
Reelle Zahlen

> Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht. [...] so verlangt sehr oft der so genannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine, als des Denkens sind.
>
> Georg Christoph Lichtenberg, Sudelbücher.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

Die Begriffe Aussagen und Mengen werden vorausgesetzt (siehe Formale Grundlagen der Informatik):

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist). Es gibt in der Aussagenlogik nur genau diese beiden **Wahrheitswerte**, ein Drittes gibt es nicht (Tertium non datur, Aristoteles).

Für Aussagen A und B kürzen wir ab (**logische Operationen: und, oder, Implikation**):
$A \wedge B$: A und B gelten gleichzeitig. $A \vee B$: Es gilt A oder B (oder beide!).
$A \Rightarrow B$: Aus A folgt B (Wenn A, dann B). $A \Leftrightarrow B$: A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **logisch äquivalent**).

- Gegenstände der Mathematik sind **mathematische Sätze** und **Beweise**.
- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage.
- Der **Beweis** ist eine logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen
- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge.
- **Mathematik** ist die Tätigkeit, aus Sätzen und Beweisen, **neue** Sätze und **neue** Beweise zu erzeugen!

Ein **Prädikat** $p(x)$ wird erst durch Einsetzen von x zu einer Aussage, ein Beispiel ist $x > 3$.
$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ bedeuten: Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**). Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die **Elementbeziehung** wird geschrieben als:

$x \in M$	bedeutet:	x ist Element der Menge M
$x \notin M$	bedeutet:	x ist nicht Element der Menge M

Definition einer Menge mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):

$$M := \{x : p(x)\} \quad \text{bzw.} \quad M := \{x \,|\, p(x)\} \quad \text{(d.h. Menge der } x\text{, für die } p(x) \text{ gilt)}$$

Mit **Quantoren** wird eine Aussage (mittels Prädikat $p(\cdot)$) über eine Menge M abgekürzt:

$\forall x \in M : p(x)$	bedeutet:	**Für alle** Elemente x in M gilt $p(x)$
$\exists x \in M : p(x)$	bedeutet:	**Es gibt (mindestens) ein** Element x in M, für das $p(x)$ gilt

Relationen und Definitionen für Mengen M und N:

$M \subseteq N :\Leftrightarrow \ \forall x : x \in M \Rightarrow x \in N$	M **Teilmenge** von N
$M = N :\Leftrightarrow \ (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$	**Gleichheit** (für Mengen!)
$M \subset N :\Leftrightarrow \ (M \subseteq N) \wedge (M \neq N)$	M **echte Teilmenge** von N (auch $M \subsetneq N$)
$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$	**Vereinigung**
$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$	**Durchschnitt**
$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$	**kartesisches Produkt**, z.B. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$	**Komplement** von N in M

Bekannt sind bereits die Zahlenmengen:

- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ($\rightsquigarrow$ Kombinatorik, vollständige Induktion)
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationale Zahlen** $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ ($\rightsquigarrow$ Lineare Algebra)

  In der Analysis geht es oft um **Folgenmengen** wie:
- **Fibonacci-Folge** $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ definiert durch $f_0 = f_1 = 1$ und die

  Rekursion: Für alle $n \geq 1$ ist $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ($\rightsquigarrow$ Kapitel Konvergenz)
- **Leere Menge** $\emptyset = \{\}$

Beachte den Unterschied : geschweifte und runde Klammer!

Menge $\{\dots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor $(\dots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

Neben dem vorherigen Kurs Formale Grundlagen der Informatik, in der es v.a. um **diskrete** Strukturen geht und der folgenden Linearen Algebra, in der es um **lineare** Strukturen geht, handelt Analysis allgemein von **stetigen/kontinuierlichen** Strukturen.

Insbesondere durch die Begriffe **Grenzwert/Limes** ($\rightsquigarrow$ Kapitel Konvergenz) kommt man nicht umhin, die obigen Zahlenmengen zu den reellen Zahlen zu erweitern. Beispiel: Vergleich von Laufzeiten von Algorithmen ergibt f_{n+1}/f_n für die Fibonacci-Zahlen. Doch konvergiert diese zusammengesetzte Folge $f_{n+1}/f_n \to ??$ für $n \to \infty$? Und falls ja, gegen welchen Wert?

1.2 Axiome der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden eingeführt, indem man alle Regeln festlegt, die sie erfüllen sollen. Diese Grundregeln (Axiome) verallgemeinern den Körper der rationalen Zahlen.

Körperaxiome

Die reellen Zahlen bilden mit Addition und Multiplikation einen **kommutativen Körper**, d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- Addition und Multiplikation sind **abgeschlossen** in $\mathbb{R}$, d.h. $x + y \in \mathbb{R}$ und $x \cdot y \in \mathbb{R}$
- **Kommutativgesetz der Addition**: $x + y = y + x$.
- **Assoziativgesetz der Addition**: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- **Kommutativgesetz der Multiplikation**: $xy = yx$.
- **Assoziativgesetz der Multiplikation**: $x(yz) = (xy)z$.
- Es gibt **genau eine** reelle Zahl 0 mit $x + 0 = x$. (**neutrales Element** $+$)
- Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es **genau ein** $y \in \mathbb{R}$, so dass $x + y = 0$ gilt (bezeichnet mit $(-x)$.)
- Es gibt **genau eine** reelle Zahl $1 \neq 0$ mit $1 \cdot x = x$. (**neutrales Element** $\cdot$)
- Zu jedem $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ gibt es **genau ein** $y \in \mathbb{R}$, so dass $x \cdot y = 1$.
- **Distributivgesetz**: $x(y + z) = xy + xz$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden auch bereits einen Körper. Andere Beispiele sind Restklassenkörper ($\rightsquigarrow$ Lineare Algebra).

Elementare Folgerungen aus den Körperaxiomen sind dann beispielsweise:

- Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1$ (x^{-1} bzw. $1/x$).
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x - y := x + (-y)$ die Differenz von x und y.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ sei $x/y := x \cdot 1/y$ der Quotient von x und y.
- Aus $x + y = x + z$ folgt $y = z$.
- Die Gleichung $a + x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt die eindeutige Lösung $x = b - a$.
- Die Gleichung $ax = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ besitzt die eindeutige Lösung $x = b/a$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$.
- Ist $xy = 0$, so gilt $x = 0$ oder $y = 0$ ($\rightsquigarrow$ analog alle Regeln des Bruchrechnens)

Bereits diese Folgerungen kann man rigoros aus den Axiomen **beweisen**. Als Beispiel die vorletzte Aussage: Es ist mit dem neutralen Element der Addition $0 = 0 + 0$. Also ist mit Distributivgesetz $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Somit ist auch $0x$ neutrales Element der Addition, dieses ist aber eindeutig, also folgt $0x = 0$.

Ordnungsaxiome

Die reellen Zahlen sind überdies **total geordnet** bezüglich einer Relation $<$, für die gilt:

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt **genau eine** der drei Aussagen: $x < y,\ x = y,\ y < x$
- **Transitivität**: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.
- **Ordnung Addition**: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.
- **Ordnung Multiplikation**: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $xz < yz$.

Man definiert zudem $x > y :\Leftrightarrow y < x$ und $x \leq y :\Leftrightarrow\ x < y$ oder $x = y$, sowie jede reelle Zahl $x > 0$ als **positiv** und jedes $x \geq 0$ als **nichtnegativ** (und analog **negativ** und **nichtpositiv**).

Einige Folgerungen sind:

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow -x > -y$ (aus Ordnung Addition).
- Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x < y$ und $z < 0$ folgt $xz > yz$.

  Beweis: Mit $-z > 0$ folgt es aus Ordnung Multiplikation und Äquivalenz zuvor:

  $$x(-z) < y(-z) \Leftrightarrow -xz < -yz \Leftrightarrow xz > yz$$

- Für $x \neq 0$ gilt $x^2 = (-x)^2 > 0$.

  Beweis: Wegen $x \neq 0$ ist entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Im ersten Fall folgt aus Ordnung Multiplikation $x \cdot x > 0$ und im zweiten Fall verwende vorherigen Punkt.
- Insbesondere ist nun damit auch bewiesen (!) : $1 > 0$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
- Für alle $x > 0$ gilt $1/x > 0$.

Vollständigkeit

Die reellen Zahlen setzen sich durch den Begriff der Vollständigkeit letztlich von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ab, die noch Lücken haben:

Satz 1.1. *Es gibt keine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$, d.h. die Wurzel $\sqrt{2}$ ist irrational ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ hat k^2 die letzte Ziffer in der Menge $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ und daher $2k^2$ die letzte Ziffer in der Menge $\{0, 2, 8\}$. Angenommen, es gilt $(m/n)^2 = 2$ für $m/n \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$ (d.h. m/n vollständig gekürzt). Es ist $(m/n)^2 = 2 \Leftrightarrow 2n^2 = m^2$ und darin also nur die letzte Ziffer 0 möglich. Dann haben m und n ihre letzte Ziffer in der Menge $\{0, 5\}$, sind als beide m und n teilbar durch 5 und nicht teilerfremd, ein Widerspruch! $\square$

Definition 1.2. *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \leq M$ bzw. $a \geq M$ für alle $a \in A$. Man bezeichnet M als **obere/untere Schranke**.*

*Die Menge A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben und unten beschränkt ist. (Ansonsten heißt A **unbeschränkt**.)*

*Die kleinste obere Schranke von A, d.h. ein $S \in \mathbb{R}$ mit $S \leq M$ für jede andere obere Schranke von A, heißt **Supremum** von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet..*

*Analog ist die größte untere Schranke von A, d.h. ein $I \in \mathbb{R}$ mit $I \geq M$ für jede andere untere Schranke von A, das **Infimum** von A und wird mit $\inf A$ bezeichnet..*

*Gilt $\sup A \in A$, so heißt es zudem **Maximum** von A und wird bezeichnet mit $\max A$..*

*Gilt $\inf A \in A$, so heißt es zudem **Minimum** von A und wird bezeichnet mit $\min A$..*

Für eine nach oben/unten beschränkte Menge A können wir also auch schreiben: $\sup A < \infty$ bzw. $\inf A > -\infty$. Für eine nach oben/unten unbeschränkte Menge A schreiben wir dementsprechend $\sup A = \infty$ bzw. $\inf A = -\infty$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < x < \infty$, insbesondere sind $\pm\infty$ nicht reelle Zahlen! Die Symbole ∞ bzw. $-\infty$ dienen nur der Abkürzung der Bezeichnung unbeschränkt!

Für die leere Menge $\emptyset$ setzt man daher auch $\sup \emptyset := -\infty,\ \inf \emptyset := \infty$.

Für die reellen Zahlen fordern wir das **Vollständigkeitsaxiom**:
Jede nichtleere nach oben/unten beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum/Infimum.

Damit erhalten wir die Charakterisierung:
Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist ein **vollständiger total angeordneter kommutativer Körper**.

Offenbar gilt für die Zahlenmengen
$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

In den reellen Zahlen hat die nach oben beschränkte Menge
$$A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$
das Supremum $\sqrt{2} = \sup A$, während diese Menge nach Satz 1.1 in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. Zudem besitzt die Menge A kein Maximum.

Definition 1.3. *Ein **Intervall** ist eine Teilmenge A der reellen Zahlen, die für zwei verschiedene Punkte auch alle Elemente dazwischen enthält, d.h. es gilt für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ auch $z \in A$ für alle $x < z < y$. Es gibt diese Typen von Intervallen:*

- ***abgeschlossenes Intervall**: Für alle $-\infty < a \leq b < \infty$*
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$$
- ***offenes Intervall**: Für alle $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$:*
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$$
- ***halboffene Intervalle**:*
$$\begin{aligned} (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}, \qquad && -\infty \leq a \leq b < \infty \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}, && -\infty < a \leq b \leq \infty \end{aligned}$$

- $-\infty$ und ∞ sind nur am offenen Rand eines Intervalls zugelassen.
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ist ein offenes Intervall.
- Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ ist $\sup[a, b] = \max[a, b] = \sup[a, b) = b$ aber $\max[a, b)$ existiert nicht.
- Für nichtleere beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt:
$$\sup\{-a : a \in A\} = -\inf A, \qquad A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Aus dem Vollständigkeitsaxiom erhalten wir überdies:

Satz 1.4 (Archimedisches Prinzip)**.** *Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ unbeschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ sei beschränkt, dann existiert das Supremum $\sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup \mathbb{N} - 1 < n \leq \sup \mathbb{N}$. Doch dann ist auch nach Umformen $\sup \mathbb{N} < n+1 \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Definition des Supremum! $\square$

Obere/untere Gaußklammer sind die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ des Auf- bzw. Abrunden:

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}, \qquad \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : x \geq z\}.$$

Wir erhalten für besondere Mengen stets Maxima und Minima:

Proposition 1.5 (Minimum/Maximum in $\mathbb{N}$)**.**
Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.
Jede nichtleere beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein Maximum.

Beweis. Wegen Vollständigkeit existiert zu der nichtleeren Menge $A \subset \mathbb{N}$ ein Infimum $I \geq 1$ mit $\lceil I \rceil \in A$ nach Definition des Infimums. Angenommen, es ist $I \notin A$, so ist $\varepsilon := \lceil I \rceil - I > 0$ und $I + \varepsilon/2 < \lceil I \rceil$ eine größere untere Schranke von A, ein Widerspruch zur Definition des Infimums! Analog folgt die Aussage über Maximum. $\square$

Interessante Resultate aus Archimedischen Prinzip sind:

Proposition 1.6.
(i): *Für jede reelle Zahl $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1/n < x$.*
(ii): *Die rationalen Zahlen liegen **dicht** in den reellen Zahlen:*
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweis. **(i):** Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/x$, also ist (nach Umformen) auch $0 < 1/n < x$.
(ii): Für $0 \in (x, y)$ sind wir fertig mit $0 \in \mathbb{Q}$. Sei nun $0 < x < y \Leftrightarrow y - x > 0$. Nach (i) existiert ein n mit $1/n < (y - x)$. Die Menge $A := \{k \in \mathbb{N} : x < k/n < y\} \subset \mathbb{N}$ ist nichtleer, denn sonst wäre $y - x \leq 1/n$ ein Widerspruch zu $1/n < (y - x)$. Nach Proposition 1.5 besitzt A also ein Minimum m mit $x < m/n < y$, die gesuchte rationale Zahl. Der Fall $x < y < 0$ folgt direkt daraus (mittels $x < -m/n < y < 0 \Leftrightarrow 0 < -y < m/n < -x$). $\square$

Damit können wir reelle Zahlen beliebig genau mit rationalen Zahlen *approximieren* (genauer $\rightsquigarrow$ Kapitel Konvergenz). Wir definieren **Natürliche Zahlen mit Null**

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die **Dezimaldarstellung** einer positiven reellen Zahl bis zur n-ten Stelle ist für passende $d_0, p_n \in \mathbb{N}_0, d_2, d_3, \ldots, \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gegeben durch:

$$x = d_0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n = \frac{p_n}{10^n}$$

Hierbei ist:

$$p_n = \max\{m \in \mathbb{N} : m \leq 10^n x\}$$

Dieses Maximum der nichtleeren beschränkten Menge in $\mathbb{N}$ existiert nach Proposition 1.5.

Abbildungen

Wir erinnern an die Begriffe ($\rightsquigarrow$ Formale Grundlagen der Informatik):
Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ **eindeutig** ein $f(a) = b \in B$ zu.

- Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a)|a \in C\} \ \subseteq\ B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a|f(a) \in D\} \ \subseteq\ A$ das **Urbild** von D.
- Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich** und A **Definitionsbereich** von f.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

injektiv	$:\Leftrightarrow\ \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$
surjektiv	$:\Leftrightarrow\ f(A) = B$
bijektiv	$:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** f.
Zum Beispiel ist die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, x \mapsto e^x \quad (e \approx 2.718)$$

eine Bijektion (die Inverse ist der Logarithmus $\ln$).

Unendlichkeit und Mächtigkeit

Wir erinnern ($\rightsquigarrow$ Formale Grundlagen der Informatik) an:

- Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert ($A \sim B$).
- Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$ existieren. Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.
- Eine Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt. Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.
- Mittels Bijektionen oder einer Schema-Anordung ($\rightsquigarrow$ Formale Grundlagen) ist

  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$
- Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar: $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$

1.3 Abzählen und Summenformeln

Wir wiederholen ohne Beweise ($\rightsquigarrow$ Formale Grundlagen):
Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen (**Permutationen**) der Zahlen $1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n =: n!$$

($n!$ heißt die **Fakultät** von n.) Man definiert zudem: $0! := 1$.

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$ ist

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k},$$

und heißt **Binomialkoeffizient**.

Notation: Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ und **Produkt** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

Natürlich verwendet man Summen und Produkte auch über andere/beliebige Indexmengen. Man definiert zudem die leere Summe als Null und das leere Produkt als 1, z.B. ist $\prod_{k=3}^{2} k = 1$.

Satz 1.7 (Binomialsatz). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. In dem Produkt $(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)$ auf der linken Seite gilt für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und den Term x^k: Nur genau diese Exponenten sind durch das Produkt möglich. Da x^k durch Multiplikation der n Klammern $(x+y)$ entsteht, ist es notwendig enthalten in dem Produkt $x^k y^{n-k}$. Der Koeffizient ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus den n Klammern $(x+y)$ jeweils genau k mal x auszuwählen. Das ist gerade die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$, also $\binom{n}{k}$. Summieren über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ergibt die Formel. □

Proposition 1.8 (Geometrische Summe). *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(1-x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}. \tag{1.1}$$

Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die geometrische Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Beweis. **Durch Induktion:** Für $n = 0$ ist in (1.1) klar $(1-x) \cdot 1 = (1 - x^{0+1})$. Angenommen, die Aussage (1.1) gilt bereits für $n \in \mathbb{N}_0$, so ist mit dieser Induktionsvoraussetzung

$$(1-x) \sum_{k=0}^{n+1} x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k + (1-x)x^{n+1} = 1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2} = 1 - x^{n+2},$$

also folgt die Aussage (1.1) auch für $n+1$. Damit ist (1.1) durch Induktion bewiesen.
Durch Abzählen: Ausmultiplizieren ergibt $(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$. Division mit $1 - x \neq 0$ ergibt die geometrische Summe $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. □

Weitere wichtige **Summenformeln**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}.$$

Beide können mittels Induktion bewiesen werden. Hilfreicher zum Einprägen sind jedoch **Bildbeweise**. Der folgende Bildbeweis in Abbildung 1.1 enthält die Beweisidee für beide Summenformeln (aus [6, p. 95]). Die erste Summenformel ist auf den Bildern in der unteren Zeile enthalten (Zusammensetzen der Dreiecke zu einem Rechteck):

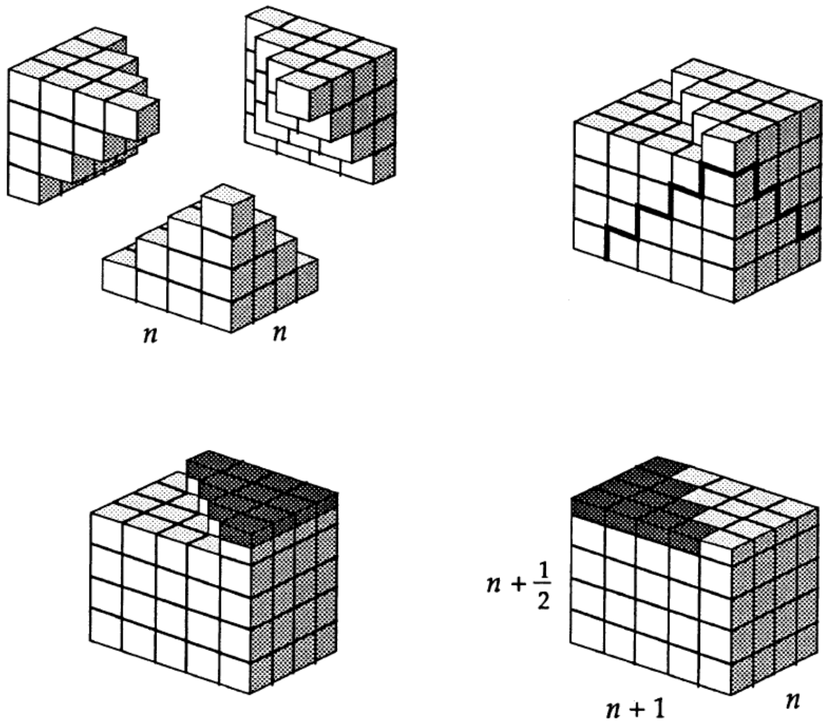

Abbildung 1.1: Bildbeweis für die Summenformeln $\sum_{k=1}^n k^2$ und $\sum_{k=1}^n k$

1.4 Ungleichungen

Für den Betrag
$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0\,. \end{cases}$$
und alle $x \in \mathbb{R}$ folgen durch Fallunterscheidung nach ≥ 0 /< 0 direkt die Eigenschaften:

- $|-x| = |x| \geq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
- Für alle $a, b \in \mathbb{R}:\ (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \ \Rightarrow |ab| \leq (a^2+b^2)/2$

Die Fallunterscheidung als Beweis betrachten wir bei dem wichtigen Werkzeug:

Proposition 1.9 (Dreiecksungleichung, $\triangle$-Ungl.). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*
$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad \text{sowie} \quad ||x| - |y|| \leq |x-y| \text{ ($\triangle$-Ungl. nach unten)}.$$

Beweis. Für $x + y \geq 0$ ist mit Definition (und Ordnungsaxiome) $|x+y| = x+y \leq |x| + |y|$. Für $x + y < 0$ ist ebenso
$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$
Die zweite Ungleichung (**Dreiecksungleichung nach unten**) folgt aus der ersten: Es ist
$$|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$$
und damit $|x| - |y| \leq |x-y|$. Vertauschen von x und y ergibt ebenso $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$. Damit folgt insbesondere $||x| - |y|| \leq |x-y|$. $\square$

Durch Iteration erhalten wir auch direkt die **verallgemeinerte Dreiecksungleichung**: Für alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{1.2}$$

Proposition 1.10 (Bernoulli-Ungleichung). *Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Durch Induktion: Für $n = 1$ lautet die Ungleichung $(1+x) \geq 1 + x$ und ist sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ bereits wahr.
Angenommen, die Ungleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir mit dieser Induktionsvoraussetzung, $(1+x) \geq 0$ sowie $nx^2 \geq 0$ für $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Das ist genau die Ungleichung für $n+1$ und die Induktion ist fertig. □

Einige **elementare Ungleichungen** sind: Für alle $a, b > 0$ gilt:

- $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$
- $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ AM-GM-Ungleichung
  (**A**rithmetisches Mittel/**G**eometrisches Mittel)
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{1/a+1/b}$

Bemerkung 1.11 (AM-GM-Ungleichung). *Für die obigen Ungleichungen gibt es ebenfalls praktische Bildbeweise, siehe Abbildung 1.2 (aus [6, p. 135]):*

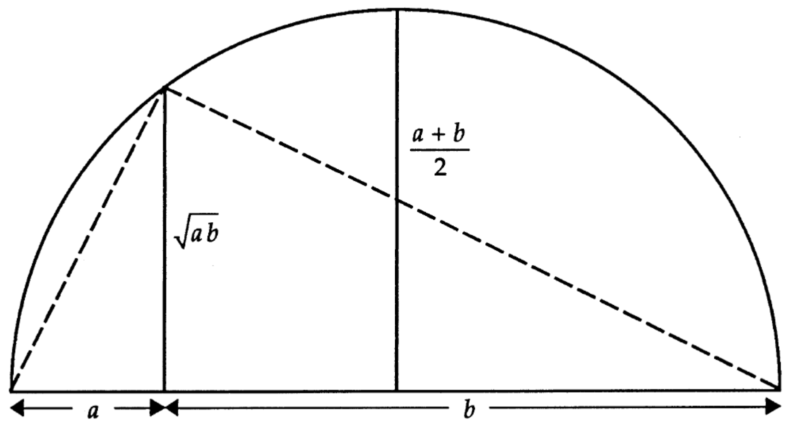

Abbildung 1.2: Bildbeweis für AM-GM-Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Eine wichtige Ungleichung ist überdies:

Proposition 1.12 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Für alle $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kapitel 2
Komplexe Zahlen

Die bisherigen Zahlenmengen
$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$$
hatten jeweils mehr abgeschlossene Operationen:

- $\mathbb{Z}$ ist im Gegenteil zu $\mathbb{N}$ abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existiert)
- $\mathbb{Q}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Multiplikation
- $\mathbb{R}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)

Aber $\mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. algebraischen Gleichungen: z.B. hat $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$. Die komplexe Zahlen werden als ein solcher Abschluss von $\mathbb{R}$ definiert:

Definition 2.1 (Komplexe Zahlen). *Sind* $a, b \in \mathbb{R}$ *und ist* i *die* imaginäre Einheit *mit* $i^2 = -1$, *so heißt der Ausdruck*
$$z := a + b \cdot i = a + bi$$
eine komplexe Zahl *mit* Realteil a *und* Imaginärteil b, *geschrieben* $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ *und* $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$ *(beide sind eindeutig!). Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Wir erhalten die folgenden Rechenregeln, wobei man bei der komplexen Multiplikation vorsichtig sein muss: Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, dann gilt:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$ **(komplexe Multiplikation)**

2.1 Komplexe Ebene

Geometrisch ist
$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$
die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.
Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt
$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.
Damit sind die Eigenschaften erfüllt:

- $\operatorname{Re}(z) = (z+\bar{z})/2, \operatorname{Im}(z) = (z-\bar{z})/(2i)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

Definition 2.2 (Betrag in $\mathbb{C}$). *Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in der komplexen Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|zw| = |z||w|$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Zum Beispiel ist

$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{2^2+3^3} = \frac{1}{13}((2-3)+(3+2)i) = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Überdies ist $|z-w|$ der **geometrische (euklidische) Abstand** der Punkte z und w und es gilt erneut:

Proposition 2.3 (Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad \text{sowie} \quad ||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

Beweis. Es ist mit $v + \overline{v} = 2\operatorname{Re}(v)$

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Also folgt mittels $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$ daraus auch

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Mit Wurzelziehen (erlaubt da alles nichtnegativ) erhalten wir die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$. Die Dreiecksungleichung nach unten folgt analog daraus wie in Proposition 1.9. □

Die komplexen Zahlen sind nicht mehr angeordnet. Aus den Ordnungsaxiomen folgte, dass jedes Quadrat eine nichtnegative Zahl ist (Erinnerung: $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Aber es ist beispielsweise $i^2 = -1 < 0$!
Nur die Beträge der komplexen Zahlen lassen sich anordnen.

Es gelten weiterhin alle Eigenschaften, die nur von Körpereigenschaften Gebrauch machen. Beispielsweise folgen völlig analog wie in Proposition 1.8 und Satz 1.7 ebenso:

Proposition 2.4 (Geometrische Summe + Binomialsatz in $\mathbb{C}$). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:*

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}, \qquad (z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.$$

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

- Sei $z^2 + 3 = 0$: Dann ist $z^2 = -3$, also $z_{1,2} = \pm\sqrt{3}\,i$
- Sei $z^2 - 8z + 20 = 0$: Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir $(z-4)^2 = -4$. Also sind die Lösungen gegeben durch $z_{1,2} = 4 \pm 2i$

Es gilt sogar allgemeiner:

Satz 2.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nichtkonstante Polynom besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle: Für komplexe Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Für den Beweis fehlen uns die Werkzeuge. Wir beweisen aber einen Spezialfall (Satz 2.10).

Das Pendant zu Intervallen in den reellen Zahlen sind Kreisflächen in der komplexen Ebene.

Definition 2.6 (Kreise/Umgebungen)**.**

- *Ein **offener Kreis (offene Umgebung)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch*
$$\mathcal{U}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$
- *Ein **abgeschlossener Kreis (abgeschlossener Ball)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch*
$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}.$$
- *Ein **Kreisrand (Sphäre)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist*
$$S_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Generell lassen sich viele geometrisch interessante Teilmengen der komplexen Zahlen nun mittels Realteil, Imaginärteil oder Betrag charakterisieren.
Wir geben einige Beispiele für Mengen in $\mathbb{C}$, siehe Abbildung 2.1:

- Die Menge
$$A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(2z) > 0\}$$
ist charakterisiert durch $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(2z) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}(z)/2$, d.h. es handelt sich bei A um eine *Halbebene ohne Rand.*
- Die Menge
$$B := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \sqrt{10}|\operatorname{Re}(z)|\}$$
ist charakterisiert durch
$\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 \le 10\operatorname{Re}(z)^2 \Leftrightarrow 0 \le \operatorname{Im}(z)^2 \le 9\operatorname{Re}(z)^2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z)| \le 3|\operatorname{Re}(z)|$.
Also ist B ein *beidseitig unendlicher Kegel mit Rand.*
- Mittels $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$ ist für die Menge
$$C := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(1/z) = 1\} :$$
$$\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z})}{|z|^2} = \frac{-\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = 1 \;\Leftrightarrow 0 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Im}(z).$$
Quadratische Ergänzung ergibt für $z \neq 0$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1/2)^2 = (1/2)^2 \Leftrightarrow |z - (-i/2)|^2 = (1/2)^2.$$
Das ist genau die Formel für den *Kreisrand* ohne Null, also ist $C = S_{1/2}(-i/2) \setminus \{0\}$.

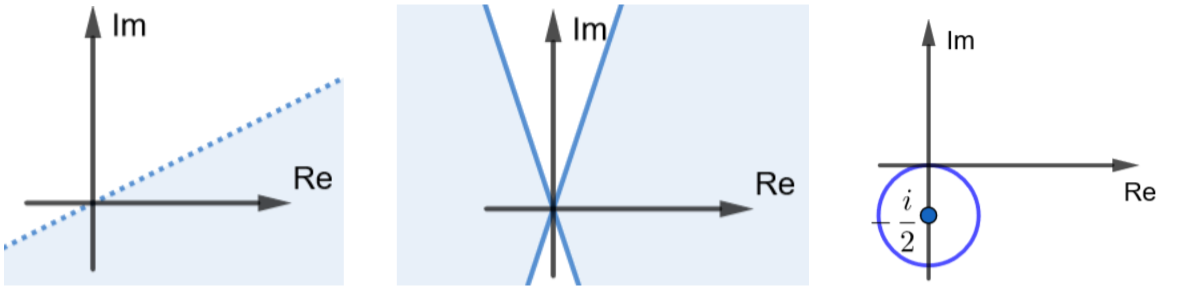

Abbildung 2.1: Skizzen für Beispiele Mengen in der komplexen Ebene

2.2 Polardarstellung

Neben der **kartesischen Darstellung** einer komplexen Zahl $z = a + bi$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ haben wir eine alternative Darstellung:

Definition 2.7 (Polardarstellung). *Für die Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gibt es ein eindeutiges Paar $(r, \varphi) \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times (-\pi, \pi)$ mit*

$$a = r\cos(\varphi), \quad b = r\sin(\varphi) \qquad \Leftrightarrow \quad z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

*Hierbei sind $r := |z| \geq 0$ der Betrag von z und $\varphi := \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ das **Argument** von z:*

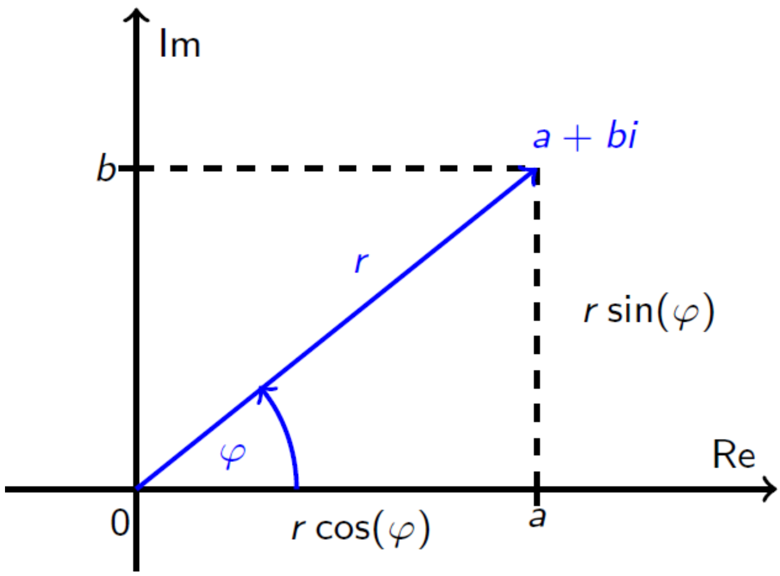

Abbildung 2.2: Polardarstellung einer komplexen Zahl $a + bi$

Für das Rechnen mit der Polardarstellung benötigen wir:

Proposition 2.8 (Additionstheoreme Sinus/Cosinus). *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

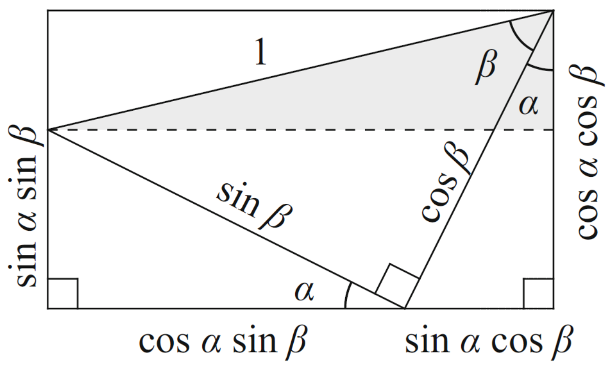

Abbildung 2.3: Bildbeweis für Additionstheoreme

Einen Beweis können wir später einfacher erhalten, hier verwenden wir zur Begründung einen eleganten Bildbeweis ([1, p. 24]) für den Fall $\alpha + \beta \in (0, \pi/2)$: Abbildung 2.3. Der allgemeine Fall läßt sich mittels Symmetrien (Periodizität von $\sin$ und $\cos$) auf diesen Fall zurückführen. Für die Polardarstellung erhalten wir aus den Additionstheoremen 2.8 durch komplexe Multiplikation direkt:

Proposition 2.9 (Formeln von Euler und de Moivre). *Für die komplexen Zahlen*

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)), \qquad z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)), \qquad z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \\ z_1/z_2 &= r_1/r_2 \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \\ z^n &= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

(Komplexe Multiplikation bei Polardarstellung: Beträge multiplizieren und Argumente addieren.)

So ist beispielsweise

$$z = \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = -i = (\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)) \Rightarrow z^3 = (-i)^3 = i = (\cos(9\pi/2) + i\sin(9\pi/2))$$

Satz 2.10 (n-te Wurzeln). *Seien $c = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Gleichung*

$$z^n = c$$

die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = r^{1/n}(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k)), \quad \varphi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Durch die echt verschiedenen Winkel φ_k (die sich um Werte $< 2\pi$ unterscheiden), sind alle z_k verschieden. Nachrechnen mittels Proposition 2.9 und Periodizität von $\sin$ und $\cos$ ergibt:

$$\begin{aligned} z_k^n &= r(\cos(n\varphi_k) + i\sin(n\varphi_k)) \\ &= r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = c. \end{aligned}$$

□

Kapitel 3
Polynome und Monotonie

Polynome sind die einfachsten und wichtigsten Funktionen in der Analysis, da sie zur Approximation und Interpolation ($\rightsquigarrow$ Potenzreihen, Taylorpolynome) verwendet werden.

3.1 Polynome

Definition 3.1 (Polynom). *Für die **Koeffizienten** $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ heißt die Funktion*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

***(komplexes) Polynom** vom **Grad** $\operatorname{Grad}(f) := n \in \mathbb{N}_0$. Sind alle Koeffizienten Null, so heißt die Funktion $f = 0$ **Nullpolynom**. Für Grad 0 heißt $f = a_0 \in \mathbb{C}$ **konstantes Polynom**.*
*Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ heißt **Nullstelle** von f.*
*Ein Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit reellen Koeffizienten heißt **reelles Polynom**.*

Polynome erfüllen:

- **Division mit Rest (Polynomdivision)**: Seien f und $g \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit $\operatorname{Grad}(r) < \operatorname{Grad}(g)$ oder $r = 0$, so dass $f = qg + r$.
- Ist z_0 eine Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom g mit $\operatorname{Grad}(g) = \operatorname{Grad}(f) - 1$ und $f(z) = g(z)(z - z_0)$. D.h. f ist **teilbar** durch $z - z_0$.
- Ist f durch $(z - z_0)^k$ aber nicht mehr durch $(z - z_0)^{k+1}$ ohne Rest teilbar für $k \in \mathbb{N}$, dann heißt z_0 eine **vielfache**, genauer k**-fache Nullstelle** von f.

Ein Beispiel für eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 2x^3 \ +5x^2 - 6x - 7 : (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 4 + \dfrac{2x - 11}{(x-1)^2} \\
-(x^4 - 2x^3 \ \ +x^2) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
4x^2 - 6x - 7 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
-(4x^2 - 8x + 4) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
2x - 11 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

Satz 3.2 (Linearfaktorzerlegung). *Jedes nichtkonstante komplexe Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

*besitzt eine Darstellung als Produkt von n **Linearfaktoren** (vgl. Abbildung 3.1 unten):*

$$f(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

*wobei mehrere Nullstellen α_k identisch sein können (**vielfache Nullstelle**).*

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra 2.5 hat jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. Diese Nullstelle können wir wie oben als Linearfaktor mittels Polynomdivision abspalten und diesen Vorgang iterieren, solange der Grad positiv ist. □

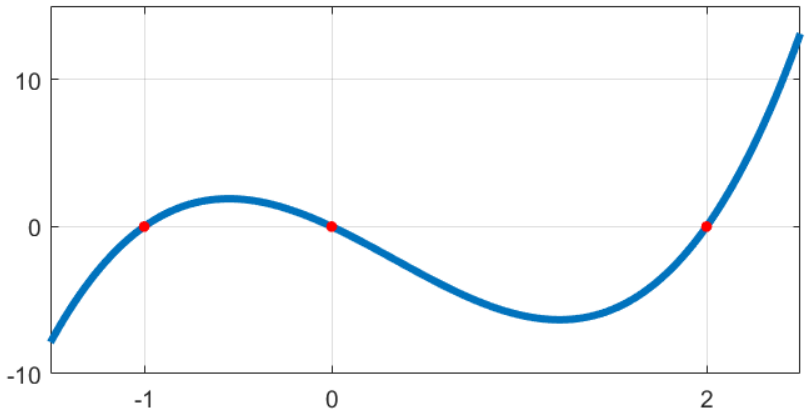

Abbildung 3.1: Polynom $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3(x+1)x(x-2)$

Aus der Linearfaktorzerlegung folgern wir:

Korollar 3.3 (Polynome Nullstellen)**.**

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*
- *Ein solches reelles Polynom kann nicht immer in Linearfaktoren zerlegt werden, Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$.*
- *Die nicht reellen Nullstellen eines reellen Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treten jedoch immer in **konjugierten Paaren** auf:*

$$f(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \overline{f(z)} = 0.$$

Satz 3.4 (Identitätssatz). *Stimmen zwei Polynome f und g von Grad n an $n+1$ verschiedenen Stellen überein, dann sind sie identisch.*

Beweis. $f - g$ ist ein Polynom von Grad n mit $n+1$ Nullstellen, also das Nullpolynom! □

Definition 3.5 (Rationale Funktion)**.** *Für zwei Polynome f, g mit $g \neq 0$ heißt die Funktion $r(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ **rationale Funktion**. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{C}$ (bzw. bei reellen Polynomen $\mathbb{R}$) **ohne** die Nullstellen von g.*
*Eine k-fache Nullstelle von g heißt hierbei **k-facher Pol (Polstelle)** von r.*

Die **Partialbruchzerlegung** einer rationalen Funktion $r = f/g$ mit den einfachen Polstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g)$ ist für passende $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

$$r(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - z_n}.$$

Handelt es sich um k_j-fache Polstellen z_j, so gilt allgemeiner für passende $c_{11}, \ldots, c_{nk_n} \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

$$r(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_j} \frac{c_{jl}}{(z - z_j)^l}.$$

Beispiel: Sei $r(x) = \dfrac{3x-1}{g(x)}$ für $g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Wir machen den Ansatz:

$$r(x) = \frac{c_{11}}{x} + \frac{c_{21}}{x-1} + \frac{c_{22}}{(x-1)^2}$$
$$\iff \quad 3x - 1 = c_{11}(x-1)^2 + c_{21}x(x-1) + c_{22}x. \tag{3.1}$$

Einsetzen von $x = 0$ in (3.1) liefert direkt $c_{11} = -1$ und $x = 1$ in (3.1) ergibt $c_{22} = 2$. Um c_{21} zu bestimmen setzen wir einen weiteren Wert ein, mit dem die Rechnung einfach ist, z.B. $x = 2$. Damit erhalten wir in (3.1) $: 5 = -1 + 2c_{21} + 4$, also $c_{21} = 1$. Somit folgt die Partialbruchzerlegung (siehe Abbildung 3.2):

$$r(x) = \frac{3x-1}{x^3 - 2x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

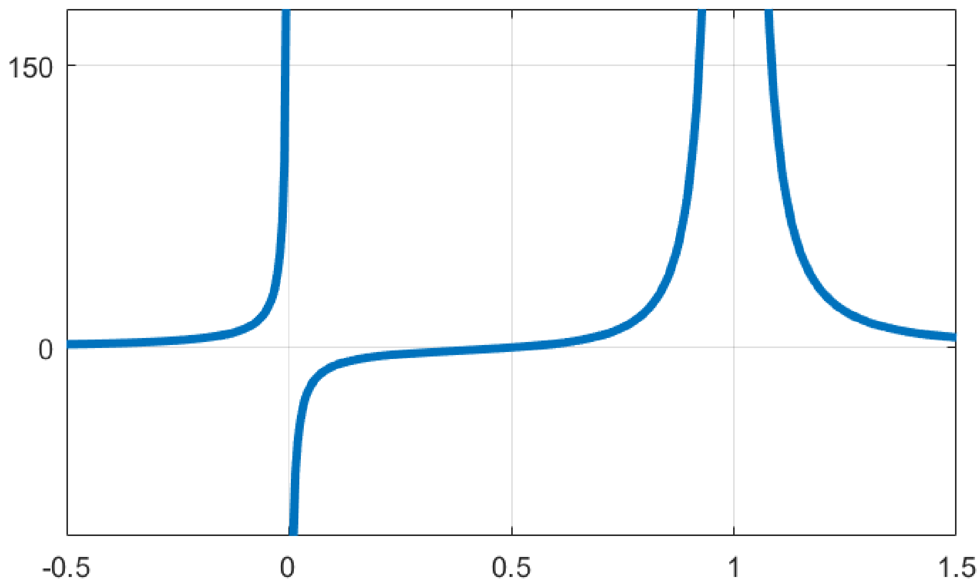

Abbildung 3.2: Rationale Funktion $r(x) = \dfrac{3x-1}{x^3 - 2x^2 + x}$

3.2 Monotonie von Funktionen

Definition 3.6 (Monotonie)**.** *Für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$:*

- ***monoton wachsend/fallend**, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets $f(x) \leq f(y)$ bzw. $f(x) \geq f(y)$ gilt. (Für wachsend verwendet man synonym die Bezeichnung **steigend**).*
- ***streng monoton wachsend/fallend**, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$ gilt.*
- ***monoton/streng monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend bzw. streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Wir bezeichnen $\mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ und analog $\mathbb{R}^{>0}$, $\mathbb{R}^{\leq 0}$, $\mathbb{R}^{<0}$.
Für einfachste Polynome (sogenannte **Monome**) haben wir die Monotonien:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^n$ streng monoton wachsend.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^{2n}$ streng monoton fallend.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n-1}$ streng monoton wachsend.

All diese Beispiele folgen direkt durch die Ordnungsregeln und Iteration (Induktion). Zum Beispiel ist $x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2 > 0 \Rightarrow x^3 < y^3 < 0$.

Wir haben die Fakten:

- Die Umkehrfunktion von f geht (sofern vorhanden!) aus $f(x) = y$ durch Auflösen nach x hervor: $x = f^{-1}(y)$ und umbennen von x und y.
- Der Graph der Umkehrfunktion einer reellen Funktion ist die *Spiegelung* an der Winkelhalbierenden $y = f(x) = x$ (denn es werden gerade die Variablen x und y vertauscht, vgl. Abbildungen 3.3, 3.4 unten).

Proposition 3.7 (Monotonie der Umkehrfunktion). *Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$) ist injektiv. Damit existiert insbesondere die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion ist ebenfalls streng monoton.*

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton. Wäre f nicht injektiv, so gibt es ein Paar $x, y \in D, x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$, ein Widerspruch zur strengen Monotonie!
Sei nun O.B.d.A. f streng monoton steigend. Wegen Injektivität ist für alle $x, y \in D : x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Seien für $a, b \in f(D)$ die eindeutigen $x, y \in D$ mit $a = f(x), b = f(y)$, so folgt

$$a < b \Leftrightarrow f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b) \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ streng monoton.}$$

□

Wir erhalten daher aus den Monotonien der Monome und Proposition 3.7:

Proposition 3.8 (allgemeine (k-te) Wurzelfunktion). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert*

- *die Inverse der Funktion $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^n$, die Funktion*
$$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad g(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x},$$
und ist streng monoton wachsend.
- *die Inverse der Funktion $f : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^{2n} = |x|^{2n}$, die Funktion*
$$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\leq 0}, \quad g(x) = -x^{1/(2n)},$$
und ist streng monoton fallend.
- *die Inverse der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n-1}$, die Funktion*
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^{1/(2n-1)},$$
und ist streng monoton wachsend. Siehe Abbildung 3.3 unten.

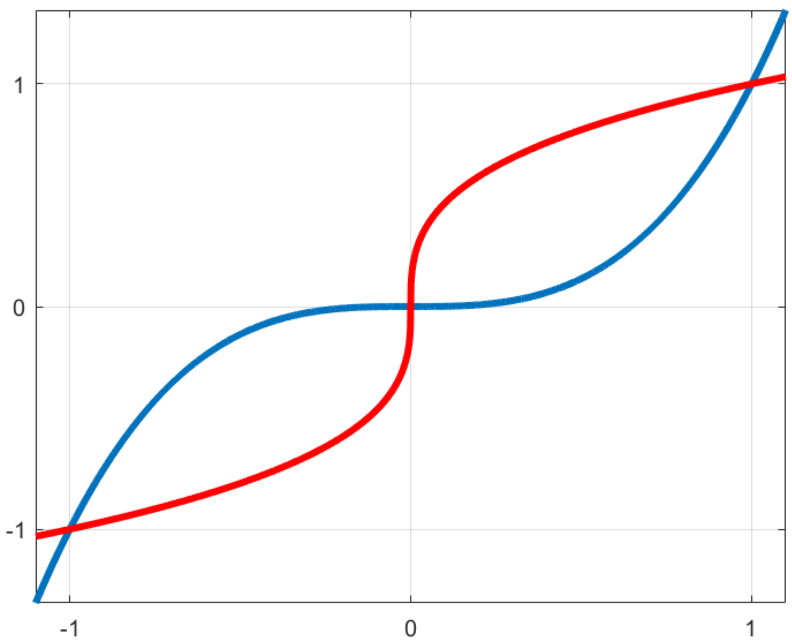

Abbildung 3.3: Polynom $f(x) = x^3$ und die Inverse: Wurzelfunktion $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

Genauere Charakterisierung der Intervalle der Monotonie von Polynomen und Funktionen erfolgt mittels den Stellen mit Ableitung $= 0$, ($\rightsquigarrow$ Differentiation). Wir halten aber fest:

- Bei einem nichtkonstanten Polynom hängt die Monotonie von den Koeffizienten ab. Mittels der Linearfaktorzerlegung springt Monotonie (ob wachsend/fallend) jeweils zwischen zwei Nullstellen, siehe Abbildung 3.1.
- Bei rationalen Funktion $r = f/g$ mit $\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g)$ ergeben sich die Intervalle der Monotonie aus (allen Vorzeichen) der Partialbruchzerlegung, vgl. Abbildung 3.2.
- Die allgemeine Potenzfunktion $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^p$ für ein $p > 0$ ist streng monoton steigend.
- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$, $\exp(x) = e^x$ ist streng monoton steigend.
- Ebenso ist für jedes $a > 0$ die Funktion $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ streng monoton steigend.
- Der (natürliche) Logarithmus $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist als Inverse der Exponentialfunktion streng monoton steigend (Proposition 3.7), siehe Abbildung 3.4.

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sind streng monoton steigend bzw. fallend auf Intervallen, die sich durch die Nullstellen der jeweils anderen Funktionen kennzeichnen lassen ($\rightsquigarrow$ Differentiation), siehe Abbildung 3.5.
Die Umkehrfunktionen Arkussinus und Arkuskosinus werden auf den maximalen Intervallen mit strenger Monotonie gebildet (siehe Abbildung 3.6):

$$\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2), \qquad \arccos : (-1, 1) \to (0, \pi).$$

Die Tangens-Funktion $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kann wie bei rationalen Funktionen bekanntlich nur für $\cos(x) \neq 0$ definiert werden. Auf den Intervallen zwischen diesen Nullstellen, die zugleich

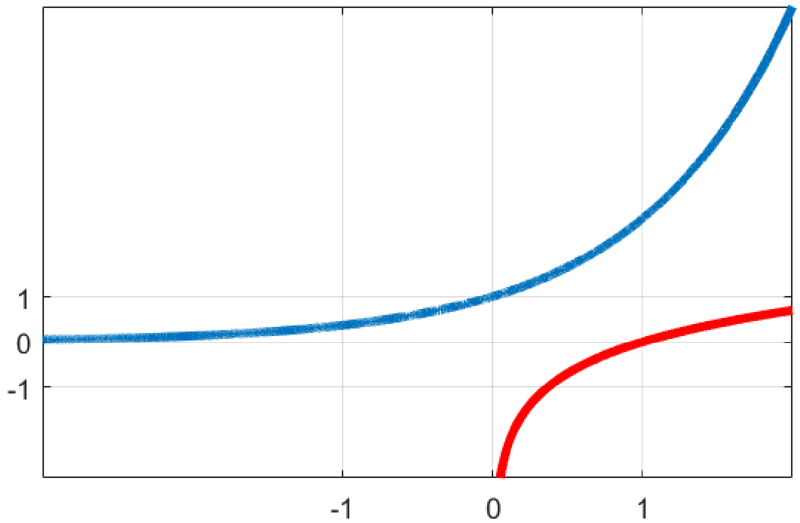

Abbildung 3.4: Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ und die Inverse: Logarithmus $x \mapsto \ln(x)$

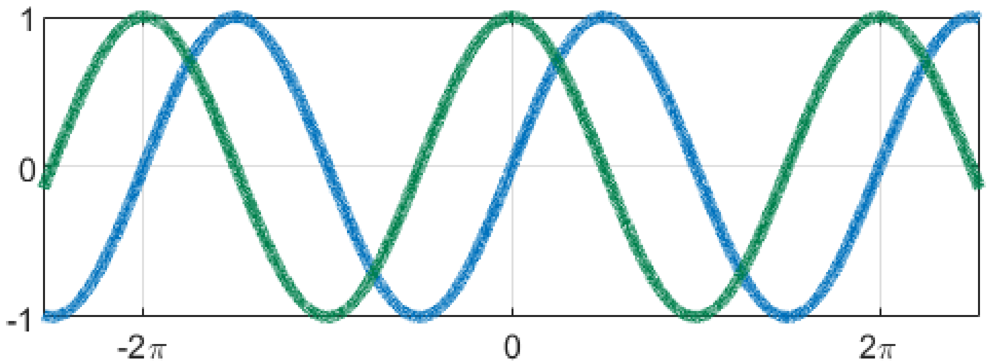

Abbildung 3.5: Sinus $\sin(x)$ und Kosinus $\cos(x)$

Polstellen des Tangens sind, ist diese Funktion stets streng monoton steigend, siehe Abbildung 3.7.
Damit ist der Tangens auf allen offenen Intervallen der Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + z\pi : z \in \mathbb{Z}\}$ streng monoton steigend.

Die Umkehrfunktion (des *Hauptzweigs*) des Tangens

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

ist der Arkustangens $\arctan$ (siehe Abbildung 3.7) und nach Proposition 3.7 ebenfalls streng monoton steigend.

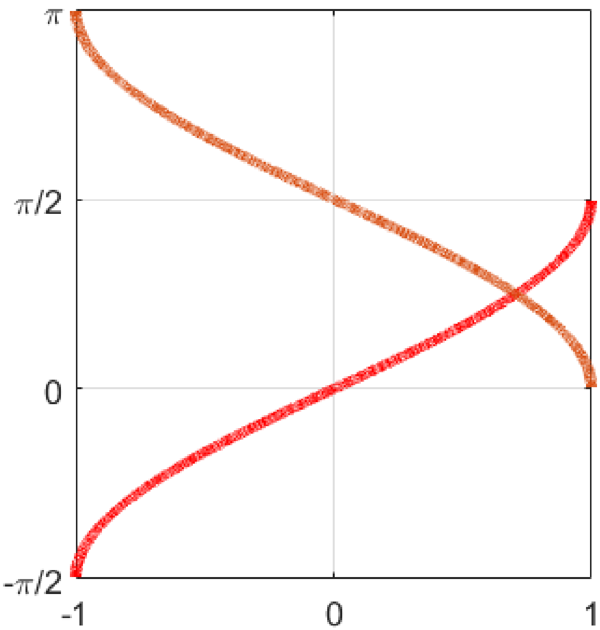

Abbildung 3.6: Arkussinus $\arcsin(x)$ und Arkuskosinus $\arccos(x)$

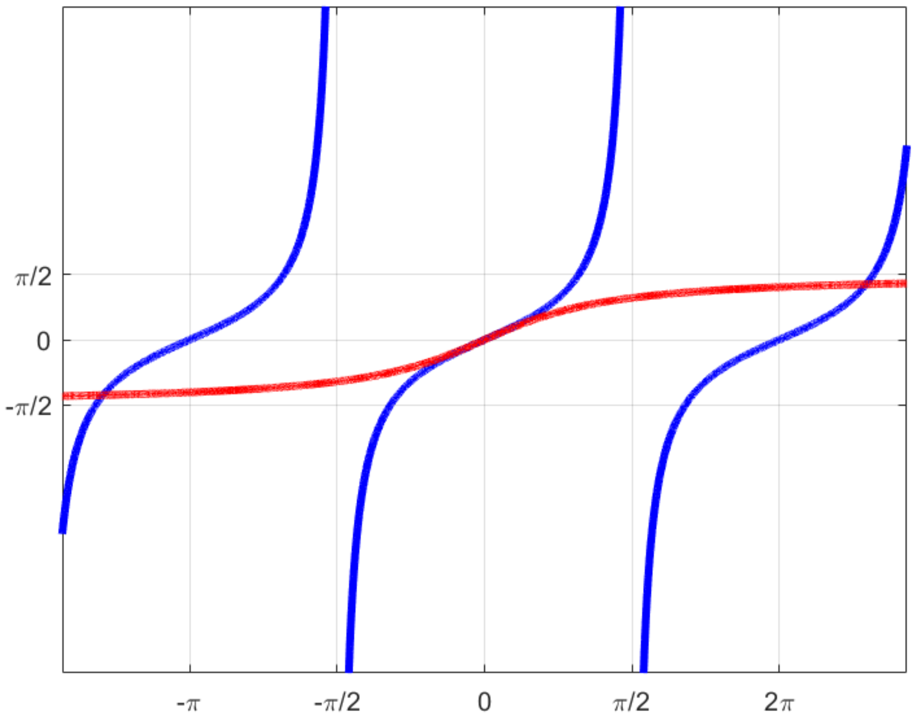

Abbildung 3.7: Tangens $\tan(x)$ und die Inverse: Arkustangens $\arctan(x)$

Kapitel 4
Konvergenz

Folgen und Konvergenz sind die zentralen Begriffe der Analysis, die vielen weiteren Definitionen zugrunde liegen.

4.1 Konvergenz von Folgen

Definition 4.1 (Folge). *Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:*

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

*Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.*

Beispiele für Folgen sind:

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** sind möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge.

  Die Folge kann auch durch eine **rekursive Vorschrift (Rekursion)** gegeben sein:
- Sei $a_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ ist $a_{n+1} = -a_n/2$: $(a_n)_{n\geq 0} = (2, -1, 1/2, -1/4, 1/8, \ldots)$
- **Fibonacci-Folge**: $f_0 = f_1 = 1$ und für alle $n \geq 1$ ist $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Definition 4.2 (Grenzwert (Limes), Konvergenz). *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

*Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **konvergent gegen** a, und wir schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

*Siehe Abbildung 4.1 unten. Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.*
*Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.*
Die Definition gilt analog für komplexe Folgen mit dem Betrag in $\mathbb{C}$.
*Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \mathbb{C}$) heißt **beschränkt**, wenn ein $M \geq 0$ existiert, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ansonsten heißt die Folge **unbeschränkt**.*

Satz 4.3. *Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!*

Beweis. Wegen Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ $(= \varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung folgt für diese Indizes also

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

und daher sind alle $|a_m|, m \in \mathbb{N}$ beschränkt von $M := \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. Angenommen, eine Folge (a_n) sei konvergent gegen die verschiedenen $a, \overline{a} \in \mathbb{R}$, so ist für $\varepsilon := (a - \overline{a})/3 > 0$ mit Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon$, $|a_n - \overline{a}| < \varepsilon$. Doch mit Dreiecksungleichung folgt daraus der Widerspruch

$$3\varepsilon = |a - \overline{a}| = |a - \overline{a} + a_n - a_n| \leq |a - a_n| + |\overline{a} - a_n| < 2\varepsilon.$$

□

Die Umkehrung der Aussage in Satz 4.3 ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.
- Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Es gilt nach Definition die Äquivalenz: $\quad a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| \to 0.$

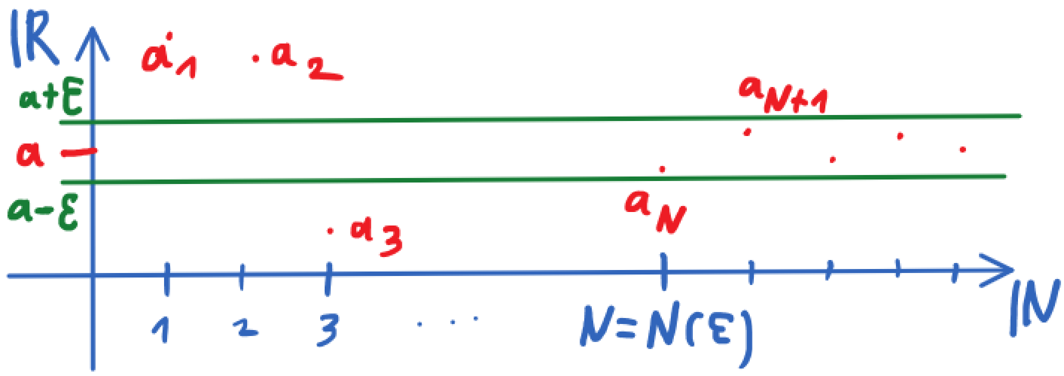

Abbildung 4.1: Skizze Definition Grenzwert: Ab einem Index $N = N(\varepsilon)$ gilt stets $|a - a_n| < \varepsilon$

Mittels obiger Äquivalenz erhalten wir direkt:

Für alle $x \in \mathbb{C}$ und $a_n \to a$ gilt auch: $\quad |xa_n - xa| = |x||a_n - a| \to 0 \quad \Rightarrow \quad xa_n \to xa.$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{R}$ ist konvergent gegen a. (Klar!)
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge: Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Also folgt auch

  $$n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Somit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Das ist nach Definition gerade die Konvergenz $1/n \to 0$.

Wichtig: Die Folgenglieder $a_n = 1/n$ **konvergieren (d.h. gehen)** gegen 0 - den Grenzwert der Folge - aber die Folgenglieder **sind nicht** der Grenzwert, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist offenbar $1/n \neq 0$.

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent , denn angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert, so ist für $\varepsilon \in (0, 1)$ mittels Dreiecksungleichung der Widerspruch:

$$2 = |(1-a) + (1+a)| \leq |1-a| + |1+a| = |a-1| + |a-(-1)| \leq \varepsilon + \varepsilon < 2$$

Definition 4.4 (Teilfolge und Häufungspunkt).
*Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
*Existiert eine gegen a konvergente Teilfolge, so heißt a **Häufungspunkt** der Folge.*

- Die reelle divergente Folge $a_n = (-1)^n$ hat nur die beiden Häufungspunkte 1 und -1.
- Jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt. Aber nicht umgekehrt: Folge $a_n = (-1)^n$.

Proposition 4.5 (Limes-Ungleichung). *Gilt für reelle Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ sowie*

$$a_n \leq b_n$$

für unendlich viele n, dann ist auch $a \leq b$.

Beweis. Mit der Konvergenz der Folgen existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für unendlich viele $n \geq N$:

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq b + \varepsilon \quad \Rightarrow a - b \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt damit auf der rechten Seite $a - b \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b$. □

Beachte: Aus $a_n < b_n$ folgt im Limes nicht $a < b$!
Beispiel: Für die Folgen $a_n = -1/n < 1/n = b_n$ ist $a_n \to 0 = 0 \leftarrow b_n$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **Geometrische Folge:** $z^n \to 0$ **für** $|z| < 1$: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $a_n = z^n$ eine Nullfolge: Für $z = 0$ ist es die konstante Nullfolge. Ansonsten ist für die Wahl

$$x := \frac{1-|z|}{|z|} > 0 \quad \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{1+x}$$

mit der Bernoulli-Ungleichung (1.10), Limes-Ungleichung 4.5 und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$:

$$0 < |z^n| = |z|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} \to 0.$$

Warum ist die **Begründung** $1/n \to 0$ **so wichtig**?
Weil wir den Grenzwert oder die Idee in allen Beispielen bisher verwenden!

Zudem ist das Argument noch allgemeiner. Zuerst erinnern wir an die Definition der Monotonie 3.6, die nun für eine reelle Folge lautet: Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist:

(streng) monoton steigend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ (streng: $a_n < a_m$).

(streng) monoton fallend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \geq a_m$ (streng: $a_n > a_m$).

Notation: Wir schreiben für eine **(positiv) unbeschränkte Folge, so dass jede Teilfolge ebenfalls positiv unbeschränkt ist** kurz

$$a_n \nearrow \infty.$$

(Wir sagen umgangsprachlich auch: *Die Folge explodiert.*) Analog verwenden wir für eine **(negativ) unbeschränkte Folge, so dass jede Teilfolge ebenfalls negativ unbeschränkt ist** die Kurzschreibweise $a_n \searrow -\infty$.

Analog zu $1/n \to 0$ folgt nun auch:

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$):** Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:

$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$

- **($1/n^k \to 0$):** Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$):** Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.
- Ebenso ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k/2} \to 0$.
- **($\sqrt[n]{n} \to 1$):** Mittels $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Binomialsatz 1.7 ist

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 \ \Rightarrow \ n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \ \Leftrightarrow a_n \leq \sqrt{2/n}.$$

  Mit $n^{-1/2} \to 0$ und Limes-Ungleichung 4.5 folgt $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0$ und somit $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Damit haben wir also die **wichtigsten Grenzwerte**:

$$\begin{aligned}
1/n \to 0 \qquad & \text{und allgemein} \quad 1/n^k \to 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ beliebig,} \\
& \text{und allgemeiner} \quad 1/a_n \to 0 \quad \text{für } a_n \nearrow \infty, \\
& \text{beispielsweise auch} \quad n^{-1/2} \to 0, \\
z^n \to 0, \qquad & \text{für } |z| < 1, \\
\sqrt[n]{n} \to 1. \qquad &
\end{aligned}$$

4.2 Limesregeln

Lemma 4.6 (Limesregeln). *Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \to a$, $b_N \to b$, dann gelten für $n \to \infty$ ebenso die Regeln:*

- $|a_n| \to |a|$ *(Betrag)*
- $a_n + b_n \to a + b$ *(Summe)*
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ *(Produkt)*
- *Falls $b \neq 0$: $a_n/b_n \to a/b$ (Quotient)*

Beweis. Wir beweisen nur Betrag und Summe, die anderen folgen etwas aufwendiger ähnlich. Betrag: Mit Dreiecksungleichung nach unten und Limes-Ungleichung folgt:

$$0 \le ||a_n| - |a|| \le |a_n - a| \to 0 \qquad \Rightarrow \; |a_n| \to |a|.$$

Summe: Sei $\varepsilon > 0$, so existieren nach Definition der Konvergenz $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \ge N_a, \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \ge N_b.$$

Für die Wahl $N = \max\{N_a, N_b\}$ erhalten wir mit Dreiecksungleichung für alle $n \ge N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - n| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

somit also die Konvergenz $a_n + b_n \to a + b$. □

Beispiele:

Die Untersuchung von Folgen auf Konvergenz wird zumeist auf bekannte Grenzwerte zurückführt (unsere **wichtigsten Grenzwerte**).
Dies erfolgt durch Kürzen, Umformen und hierbei insbesondere durch die **Limesregeln** (Summe, Produkt, etc) oder **Limes-Ungleichung**:

- Mit Limesregeln (Summe, Produkt), $3^{-n} \to 0$ (Geometrische Folge) und $n^{-3} \to 0$ ist

$$3^{-n} + 3n^{-3} \to 0$$

- Mit Kürzen und Limesregeln (Summe, Produkt, Quotient) und $1/n^k \to 0$ ist

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 + 1} = \frac{1 + 2/n - 1/n^2}{3 + 1/n^2} \to \frac{1}{3}$$

- Mit $n^{-3/2} \to 0$, Binomialsatz 1.7 sowie Kürzen und Limesregeln (Summe, Quotient) ist

$$\frac{n(3 - 2\sqrt{n})}{(\sqrt{n} + 1)^3} = \frac{3n - 2n^{3/2}}{n^{3/2} + 3n + 3n^{1/2} + 1} = \frac{3n^{-1/2} - 2}{1 + 3n^{-1/2} + 3n^{-1} + n^{-3/2}} \to -2$$

- Wir beobachten mit Limes-Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |\sin(n^2)/n| \leq 1/n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(n^2)/n \to 0$$

also folgt mit Kürzen und Limesregeln (Quotient)

$$\frac{\sin(n^2) + 2n}{n} = \frac{\sin(n^2)/n + 2}{1} \to 2$$

- Sei die komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : a_n = \dfrac{(2i)^n + 3}{2^{n+1} - 1}$.

Zuerst bringen wir mit Kürzen bekannte Grenzwerte hinein:

$$\frac{(2i)^n + 3}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^n(i^n + 3 \cdot 2^{-n})}{2^n(2 - 2^{-n})} = \frac{i^n + 3 \cdot (1/2)^n}{2 - (1/2)^n}. \tag{4.1}$$

Mit $(1/2)^n \to 0$ (Geometrische Folge) alleine hätten wir keine Probleme.

Aber da ist ja noch die periodische Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}} = (i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots)$.

Diese ist divergent und besitzt genau die vier Häufungspunkte $\{i, -1, -i, -1\}$.

Also ist auch die damit gebildete Folge (a_n) divergent.

(Vorsicht Voraussetzungen Limesregeln: alle Grenzwerte existieren! Bei Untersuchung Folgen aber erst Umformen/Vereinfachen, dann Grenzwerte!).

Die Folge (a_n) besitzt ebenso vier Häufungspunkte. Beispielsweise ist für die Teilfolge $(a_{4n})_{n\geq 1}$ wegen $i^{4n} = (i^4)^n = 1$ mit Limesregeln (Summe, Quotient) in (4.1):

$$a_{4n} = \frac{i^{4n} + 3 \cdot (1/2)^{4n}}{2 - (1/2)^{4n}} = \frac{1 + 3 \cdot (1/2)^{4n}}{2 - (1/2)^{4n}} \to \frac{1}{2}.$$

Ebenso ist für die Teilfolge $(a_{4n+3})_{n\geq 1}$ wegen $i^{4n+3} = i^{4n} i^3 = 1(i^2)i = -i$ und (4.1):

$$a_{4n+3} = \frac{i^{4n+3} + 3 \cdot (1/2)^{4n+3}}{2 - (1/2)^{4n+3}} = \frac{-i + 3 \cdot (1/2)^{4n+3}}{2 - (1/2)^{4n+3}} \to -\frac{i}{2}$$

Die Konvergenz der beiden anderen Teilfolgen ist nun klar und erfolgt völlig analog:

$$a_{4n+1} \to i/2, \qquad a_{4n+2} \to -1/2.$$

4.3 Existenzsätze

Satz 4.7 (Monotone Konvergenz: Monotonie + Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz). *Es gelten die folgenden Äquivalenzen für eine monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$:*

- *Die monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist:*

  nach oben beschränkt $\iff$ konvergent mit $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- *Die monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist:*

  nach unten beschränkt $\iff$ konvergent mit $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Wir betrachten nur monoton steigend, da für monoton fallend Beweis analog. Da jede konvergente Folge beschränkt ist nach Satz 4.3, gilt bereits $\Leftarrow$.
Sei die monoton steigende Folge (a_n) nach oben beschränkt, so existiert wegen Vollständigkeit

$$a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Mit der Monotonie ist dann aber auch für alle $n \geq N$:

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a \quad \Rightarrow |a - a_n| = a - a_n < \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad a_n \to a.$$

□

Beispiel: Seien $0 < a < b$ und die Folgen rekursiv

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Wir beobachten zuerst die AM-GM-HM-Ungleichung für alle $0 < b < a$:

$$\frac{2ab}{a+b} =: \overline{HM} \quad \leq \quad \overline{GM} := \sqrt{ab} \quad \leq \quad \overline{AM} := \frac{a+b}{2}$$

Ein Bildbeweis in Abbildung 4.2 - (Ungleichung folgt durch Ähnlichkeit der Dreiecke).

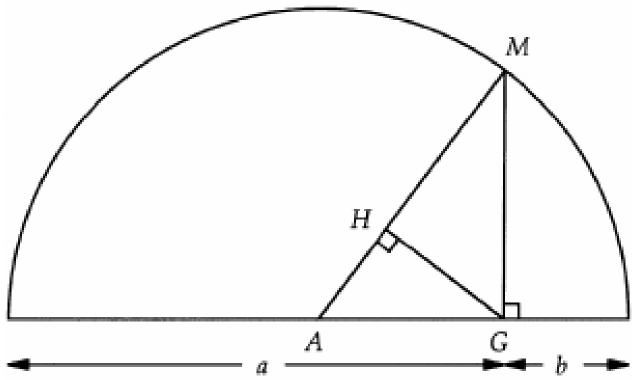

Abbildung 4.2: Bildbeweis AM-GM-HM-Ungleichung: $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

(1): Es ist nun für alle $n \geq 0$: $\quad x_{n+1}y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \cdot \dfrac{x_n + y_n}{2} = x_n y_n = ab.$

(2): Mit der AM-GM-HM-Ungleichung erhalten wir die Monotonien:

$$0 < a = x_0 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < y_{n+1} < y_n < \cdots < y_0 = b.$$

Also konvergieren beide Folgen (x_n) und (y_n) wegen Monotonie und Beschränktheit, also mittels Satz über monotone Konvergenz 4.7.
(3): Zudem ist

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n}{2(x_n + y_n)} = \frac{(y_n - x_n)^2}{2(x_n + y_n)} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

(4): Für die Grenzwerte aus (2) gilt mit (3) Gleichheit und mit (1) ist:

$$x_n \to x,\ y_n \to x, \quad ab = x_n y_n \to x^2 \qquad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab}.$$

Eine bekannte Anwendung für monotone Konvergenz ist:

Satz 4.8 (Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen)). *Für jedes $x > 0$ konvergiert die rekursive Folge gegen die Quadratwurzel:*

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad a_n \to \sqrt{x}.$$

Beweis. (1) : Wegen

$$a_{n+1}^2 - x = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)^2 - x = \frac{a_n^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4a_n^2} - x = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 \geq 0$$

folgt für alle $n \geq 0$: $a_n^2 \geq x \Leftrightarrow a_n \geq \sqrt{x} > 0$.
(2) : Zudem ist für alle $n \geq 0$:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} - \frac{x}{2a_n} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x) \geq 0,$$

d.h. die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{x} > 0$ beschränkt.
(3) : Mit dem Satz über monotone Konvergenz 4.7 folgt $a_n \to \inf\{a_n : n \geq 0\} =: a \geq \sqrt{x}$.
(4) : Mit Limesregeln (Summe, Quotient) gilt in der Gleichung der Rekursion tatsächlich

$$a \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \to \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = x \quad \Rightarrow a_n \to a = \sqrt{x}.$$

□

Das Heron-Verfahren (ca. 60 n. Chr.) ist zugleich eines der ältesten Algorithmen. Die ersten Iterationen für $\sqrt{2}$ finden sich bereits in babylonischen Keilschrifttafeln (ca 1800 v. Chr. (!)):

n	0	1	2	3
a_n	2	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{17}{12} \approx 1.4167$	$\frac{577}{408} \approx 1.4142$

Satz 4.9 (Intervallschachtelung). *Zu jeder Folge von nichtleeren Mengen $J_n := [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ mit*

$$J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$$

und $(b_n - a_n) \to 0$ existiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n\geq 0} J_n$.

Beweis. Nach Konstruktion gilt für die Folgen der Ränder der Intervalle:
(a_n) ist monoton steigend und nach oben beschränkt (z.B. durch b_0).
(b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt (z.B. durch a_0).
Also existierten die Grenzwerte wegen monotoner Konvergenz 4.7 und mit $a_n \leq b_n$ und Limes-Ungleichung 4.5 ist:

$$a_n \to a \leq b \leftarrow b_n.$$

Mit Eindeutigkeit des Grenzwertes ist $b - a \leftarrow b_n - a_n \to 0$ also $x = a = b$ gefunden. □

Für eine beschränkte reelle Folge existieren Supremum b_0 und Infimum a_0 und die ganze Folge liegt in dem Intervall $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$. Wir halbieren nun in jedem Schritt diese Intervalle: in mindestens einem dieser halben Intervalle liegen weiterhin unendlich viele Folgenglieder. Auf diese Weise erfolgt eine Intervallschachtelung und mit 4.9:

Satz 4.10 (Bolzano-Weierstraß : Beschränkte Folge $\Rightarrow$ konvergente Teilfolge**).**
Jede beschränkte Folge $(c_n) \subset \mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.

Definition 4.11. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n, m \geq N.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Es gilt nun sogar die folgende Äquivalenz der Aussagen:

- Vollständigkeitsaxiom
- Satz über Intervallschachtelung 4.9
- Satz von Bolzano-Weierstraß 4.10
- Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Die **Vollständigkeit** wird mit dem letzten Kriterium allgemein definiert (siehe z.B. [7, 9]).

Asymptotik

Definition 4.12 (Asymptotische Gleichheit, Landau-$\mathcal{O}$)**.** *Seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

- *Die beiden Folgen erfüllen **asymptotische Gleichheit**, falls*
$$\frac{a_n}{b_n} \to 1, \qquad \text{Schreibweise:} \quad a_n \sim b_n, \ \text{für } n \to \infty.$$
- *Folge (a_n) **wächst höchstens so schnell** wie (b_n), falls ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren:*
$$|a_n| \leq C|b_n| \quad \text{für alle } n \geq N, \qquad \text{Schreibweise: } a_n = \mathcal{O}(b_n) \ (\textbf{Landau } \mathcal{O}\textbf{-Notation})$$
- *Folge (a_n) **wächst langsamer als** (b_n), falls:*
$$a_n/b_n \to 0, \qquad \text{Schreibweise: } a_n = o(b_n) \ (\textbf{Landau } o\textbf{-Notation})$$

Beispiele für Asymptotik:

- Es ist mit den bekannten Grenzwerten $\frac{1}{n^k} \to 0$:
$$\frac{(n+1)^2}{2n} = \frac{n^2+2n+1}{2n} = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{2n} \sim \frac{n}{2}$$
Beachte: Die Konvergenz der Folgen ist nicht notwendig für asymptotische Gleichheit!
- Es gilt: a_n/b_n konvergent $\Rightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n)$. Umkehrung ist falsch, z.B. $a_n = (-1)^n, b_n = 1$.
- Also folgt insbesondere aus $a_n = o(b_n)$ stets $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.
- $\frac{(-1)^n}{n^2} = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$
- $\sin(n^2) = \mathcal{O}(1)$
- $n = o(n^2)$
- $\frac{1}{n} = o(1)$

Bemerkung 4.13 (Stirling-Approximation). *Eine wichtige Asymptotik ist:*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

*Wieso ist das **interessant?** – Eine Approximation von $n!$ ist notwendig, da ohne Berechnung selbst die Anzahl der Dezimalen von $n!$ unklar ist! Oftmals ist die Asymptotik völlig hinreichend.*
***Beispiel**: Sei eine Tastatur mit 50 verschiedenen Tasten. Wieviele Kombinationen der Anordnung gibt es?*

$$\sqrt{2\pi 50}(50/e)^{50} = e^{\ln(\sqrt{2\pi})+50.5\ln(50)-50} \approx e^{150} \approx 10^{150/\ln(10)} \approx 10^{150/2.3} \approx 10^{65}.$$

Es ist tatsächlich

$$50! = 3.041409320171338 \cdot 10^{64}, \qquad \sqrt{2\pi 50}(50/e)^{50} = 3.036344593938139 \cdot 10^{64}.$$

4.4 Konvergenz von Reihen

Definition 4.14 (Konvergenz Reihe). *Folgen besonderer Art* $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißen* ***Reihen***. *Die Elemente* $\sum_{k=1}^{n} a_n$ *heißen* ***Partialsummen*** *und die Reihe wird dargestellt als unendliche Summe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Eine Reihe heißt ***konvergent***, *falls die Folge der Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt ***Wert*** *der Reihe. Konvergiert die Reihe nicht, so heißt sie* ***divergent***.

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe als auch den Grenzwert (falls vorhanden)!
- Natürlich sind auch andere Indexmengen möglich wie z.B. $\sum_{n\geq 0} a_n$.
- Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch als Reihe darstellbar: $a_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n$.

Erstes Beispiel einer konvergenten Reihe:

- $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$: Die Folge der Partialsummen $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

  Mittels $k^2 > k(k-1) \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ und **Teleskopsumme** ist die Folge auch beschränkt:

  $$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

  Der Satz über monotone Konvergenz 4.7 liefert also die Konvergenz der Reihe.

  Der genaue Wert ist zudem interessant: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist die Nullfolge der Summenglieder:

Proposition 4.15 (Nullfolgenkriterium). *Für eine konvergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist*

$$a_n \to 0.$$

Beweis. Aus der Konvergenz der Partialsummen und Limesregeln (Summe) folgt

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

□

Wichtige Beispiele:

- **Geometrische Reihe** $\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1\right)$: Mit der geometrischen Summe 2.4, der geometrischen Folge $z^n \to 0$ und Limesregeln ist für alle $|z| < 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$
Für $|z| \geq 1$ ist das Nullfolgenkriterium 4.15 verletzt und die Reihe somit **divergent**.

Die Nullfolge der Glieder ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe:

- **Harmonische Reihe** $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist divergent}\right)$:
Diese Reihe divergiert (aber extrem langsam)! Es gilt z.B.
$$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$
Analog folgt (mit Induktion) :
$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2},$$
was eine unbeschränkte Teilfolge der Partialsummen ist. Damit folgt die Divergenz.

Definition 4.16 (Absolute Konvergenz). *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn Ihre **Absolutreihe** $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.*

Satz 4.17 (Satz über absolute Konvergenz). *Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt die Äquivalenz:*
$$\text{absolut konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist beschränkt}$$
*Zudem gilt für eine absolut konvergente Reihe die **Dreiecksungleichung***
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{4.2}$$

Beweis. Die Äquivalenz ist eine direkte Folgerung aus monotoner Konvergenz 4.7.
Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung 1.2 gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die obere Schranke
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$
Mit Limesregeln (Betrag) und Limes-Ungleichung 4.5 folgt die Dreiecksungleichung (4.2):
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$
□

- Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, Aber nicht umgekehrt:

Proposition 4.18 (Leibniz-Kriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die **alternierende Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Beispielsweise ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ konvergent aber nicht absolut konvergent! Die Absolutreihe ist hier die harmonische Reihe.

Das wichtigste Werkzeug zum Nachweis der Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen ist der Vergleich mit bereits bekannten Reihen:

Satz 4.19 (Majorantenkriterium). *Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente **Majorante**, d.h. eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \ : \quad |a_n| \leq b_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Mit der konvergenten Majorante, Limesregeln (Betrag) und Limes-Ungleichung 4.5 ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

also ist die Absolutreihe beschränkt und 4.17 ergibt die absolute Konvergenz. □

Analog folgt:

Satz 4.20 (Minorantenkriterium). *Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine divergente **Minorante**, d.h. eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \ : \quad 0 \leq b_n \leq a_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beachte: In beiden Resultaten sowie allen Konvergenz- bzw. Divergenzkriterien genügt die Bedingung auch jeweils nur

für alle bis auf endlich viele (d.h. für fast alle) Summenglieder,

da sich die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe durch das Verändern endlich vieler Glieder nicht ändert!

Beispiele:

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$ ist absolut konvergent mit der konvergenten Absolutreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k$ ist absolut konvergent aufgrund der **Majorante**:

$$\text{für alle } k \geq 2 \ : \ \left|\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k\right| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent aufgrund $\sqrt{k} \le k \Rightarrow \dfrac{1}{k} \le \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ und der divergenten **Minorante** Harmonische Reihe.

Satz 4.21 (Wurzelkriterium).
Konvergiert die Folge $|a_n|^{1/n} \to Q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Besitzt die Folge $|a_n|^{1/n}$ einen Häufungspunkt > 1, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. Bei der Konvergenz $|a_n|^{1/n} \to Q < 1$ existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und $q < 1$ mit

$$|a_n|^{1/n} \le q \;\Leftrightarrow\; |a_n| \le q^n \qquad \text{für alle } n \ge N.$$

Also haben wir die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ als konvergente Majorante und das Majorantenkriterium 4.19 liefert die absolute Konvergenz.
Sei $Q > 1$ ein Häufungspunkt der Folge Folge $|a_n|^{1/n}$, so gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n|^{1/n} > 1 \;\Leftrightarrow\; |a_n| > 1,$$

d.h. das Nullfolgenkriterium 4.15 ist verletzt und die Reihe divergent. □

Ganz ähnlich folgt mit 4.19 auch:

Satz 4.22 (Quotientenkriterium).
Gilt $a_n \ne 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Folge $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to Q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Konvergiert die Folge $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ gegen $q > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiele:

- Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n = z + 2^p z^2 + \cdots$ absolut konvergent: Mit Limesregeln (Produkt), dem Grenzwert $\sqrt[n]{n} \to 1$ ist die Bedingung für das Wurzelkriterium erfüllt:

  $$|n^p z^n|^{1/n} = n^{p/n}|z| = |z| \left(\sqrt[n]{n}\right)^p \to |z| < 1.$$

  Also folgt mit Satz 4.21 die absolute Konvergenz.
- Wir erhalten überdies aus der Konvergenz der obigen Reihe und dem Nullfolgenkriterium 4.15 für jedes $p \in \mathbb{N}$, $|z| < 1$ den Grenzwert und daher die Asymptotik:

  $$\text{für alle } p, m \in \mathbb{N}, m \ge 2, |z| < 1 \;:\quad n^p z^n \to 0, \quad n^p = o(m^n) \quad (\text{z.B. } n^{10} = o(2^n))$$
- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4.3}$$

  absolut konvergent: Wir verwenden das Quotientenkriterium: Die Bedingung ist wegen

  $$\frac{|z^{n+1}/(n+1)!|}{|z^n/n!|} = |z| \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$

  für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt, also folgt mit 4.22 die absolute Konvergenz.

- Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n + 2n^3 + 10}$$
ist konvergent aufgrund einer geometrischen Reihe als Majorante:
$$\frac{3}{3^n + 2n^3 + 10} < \frac{3}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}.$$

- Die **Konvergenz der Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ **für** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ läßt sich mit Wurzelfunktion und Quotientenkriterium nicht entscheiden:
$$|n^{-k}|^{1/n} = (\sqrt[n]{n})^{-k} \to 1, \qquad \frac{|(n+1)^{-k}|}{|n^{-k}|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1 + 1/n}\right)^k \to 1.$$
Mittels dem Majorantenkriterium 4.19 und unserem ersten Beispiel einer konvergenten Reihe
$$n^k \geq n^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$
erhalten wir allerdings für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Beachte: Die Kriterien 4.21 und 4.22 sind nützlich, aber zuweilen ungenügend (s.o.). Oftmals ist es ohnehin einfacher, Reihen mittels Umformungen und Abschätzungen mit einfacheren/bekannten Reihen und Majoranten bzw. Minoranten, 4.19 und 4.20, zu untersuchen!

Kapitel 5
Potenzreihen und Exponentialfunktion

Potenzreihen sind Funktionen der Gestalt

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{(für eine Folge } (a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R} \text{ bzw. } \subset \mathbb{C})$$

Beispiele:

- Polynome: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. (Für Polynome sei $0^0 = 1$.)
- **Geometrische Reihe**: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \left(\text{für } |z| < 1: \; P(z) = \frac{1}{1-z}\right)$

Mit dem Majorantenkriterium beobachten wir sofort:

Proposition 5.1. *Konvergiert die Potenzreihe P für ein $w \neq 0$, dann konvergiert sie absolut für jedes z mit $|z| < |w|$.*

Beweis. Wegen Konvergenz und Nullfolgenkriterium 4.15 ist $(|a_n w^n|)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge und insbesondere beschränkt (4.3) durch ein $M < \infty$. Mit $q = |z|/|w| < 1$ ist also

$$|a_n w^n| \leq M \quad \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n w^n| \frac{|z^n|}{|w^n|} \leq M q^n,$$

und wir erhalten für die Absolutreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ die konvergente Majorante $M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, eine konvergente geometrische Reihe. □

5.1 Konvergenzradius

Definition 5.2 (Konvergenzradius)**.** *Wir definieren den **Konvergenzradius** einer Potenzreihe P als*

$$r := \sup\{|z| : P(z) \text{ ist konvergent}\} \geq 0$$

und $r := \infty$ falls obige Menge unbeschränkt ist.

Für eine Potenzfunktion $P(z)$ mit Konvergenzradius r ist der **Konvergenzbereich** einer Funktion $P(z - z_0)$ für ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$ die (verschobene) Umgebung :

$$\{z \in \mathbb{C} : P(z - z_0) \text{ ist konvergent}\} = z_0 + \mathcal{U}_r(0)$$

Für eine reelle Potenzreihe $P(x)$ mit Konvergenzradius r hat die Potenzreihe $P(x - x_0)$ entsprechend ein offenes Intevall als **Konvergenzbereich** :

$$\{x \in \mathbb{R} : P(x - x_0) \text{ ist konvergent}\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

- Jedes Polynom hat Konvergenzradius $r = \infty$.
- Die geometrische Reihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat offenbar Konvergenzradius $r = 1$.
- Sei die reelle Potenzreihe
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-2)^n$$
Untersuchung der Konvergenz mittels Wurzelkriterium:
$$\sqrt[n]{|2^n (x-2)^n|} = 2|x-2| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1/2.$$
Damit erhalten wir direkt den **Konvergenzbereich**: $(3/2, 5/2)$

Mit Wurzelkriterium 4.21 und Quotientenkriterium 4.22 folgen:

Satz 5.3 (Formeln für Konvergenzradius). *Gilt für die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:*

- *Sei w der größte Häufungspunkt von $\sqrt[n]{|a_n|}$, so ist für den Konvergenzradius $r = 1/w$.*
- *Sei q der Grenzwert von $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, so ist für den Konvergenzradius $r = 1/q$.*

Wir verwenden für $w, q = 0$ bzw. unbeschränkte Folgen (d.h. $w, q = \infty$): $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.

Beispiele:

- Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n := \begin{cases} 1 & n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & n \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$

  hat mit dem größten Häufungspunkt 1 von $\sqrt[n]{|a_n|}$ nach Satz 5.3 den Konvergenzradius $r = 1$. Genauer ist sogar mit der geometrischen Reihe für alle $|z| < 1$:
$$P(z) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n - (z^2)^0 = \frac{1}{1-z^2} - 1 = \frac{z^2}{1-z^2}$$

- Die Potenzreihe
$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
hat mit dem Grenzwert $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ nach Satz 5.3 den Konvergenzradius $r = 1$.

  Beachte: Es ist mit der Kenntnis des Konvergenzradius generell noch keine Aussage über Konvergenz für $|z| = r$ möglich: Hier ist für Konvergenzradius $r = 1$:
  $P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (Harmonische Reihe) aber
  $P(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium).
  Das **Konvergenzverhalten** einer Potenzreihe $P(z)$ für $|z| = r$ muss individuell untersucht werden!

- Die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2+1/n)^{3n} x^n$ hat mittels Limesregeln (Produkt): $\sqrt[n]{|a_n|} = \left|(2+1/n)^{3n}\right|^{1/n} = |2+1/n|^3 \to 2^3 = 8$ nach Satz 5.3 den Konvergenzradius $r = \frac{1}{8}$. Das Verhalten für $|x| = 1/8$ ist Divergenz, da das Nullfolgenkriterium 4.15 verletzt ist: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist wegen $(1/8)^n = 2^{-3n}$: $|(2+1/n)^{3n}(\pm 1/8)^n| = |1 + \frac{1}{2n}|^{3n} > 1$.

5.2 Exponentialfunktion

Die komplexe **Exponentialfunktion/Exponentialreihe** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{5.1}$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ (da alle Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n!}$ reell).
Der Konvergenzradius ist $r = \infty$, denn mit Satz 5.3 mit Quotientenkriterium ist

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Proposition 5.4 (Eigenschaften Exponentialfunktion).

(1) *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\quad \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad$ ***(Funktionalgleichung)****.*

(2) $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e \approx 2.7183 \quad$ ***(Eulersche Zahl)***

(3) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gelten* $\quad e^z = \exp(z), \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad e^x = (e^{x/2})^2 > 0$

(4) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad$ ***(Exponentialfunktion als Limes)***

Beweis. **(1):** Wir betrachten das Produkt der absolut konvergenten Reihen und erhalten durch Ausmultiplizieren (sogenanntes Cauchy-Produkt) mit dem Binomialsatz 2.4:

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w).
\end{aligned}$$

(2): Klar nach Definition.
(3): Mit der Funktionalgleichung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$: $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$ und dann ebenso wegen $e = \exp(n/n) = \exp(1/n)^n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ auch

$$\exp(1/n) = e^{1/n}, \ \exp(m/n) = \exp(1/n)^m = e^{m/n}, \ \exp(-m/n) = \exp(m/n)^{-1} = e^{-m/n}.$$

Mit (etwas mehr Arbeit mit) Limesregeln folgt $e^z = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit Funktionalgleichung folgen

$$1 = e^0 = e^{z-z} = e^z \cdot e^{-z} \Rightarrow \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \qquad e^x = e^{x/2+x/2} = (e^{x/2})^2 \geq 0.$$

Wäre ein $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = 0$, so wäre der Widerspruch $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x} = 0$.
Auf den Beweis von **(4)** verzichten wir. □

Betrachten wir die Exponentialfunktion auf der imaginären Achse $i\mathbb{R}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\overline{e^{ix}} = 1 + \overline{ix} + \frac{\overline{(ix)^2}}{2} + \frac{\overline{(ix)^3}}{3!} + \dots = e^{-ix}, \qquad |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Mit den bekannten Formeln für Real- und Imaginärteil $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ erhalten wir: $\exp(i\mathbb{R})$ ist surjekiv (aber nicht injektiv) auf den Einheitskreis und es ist für die (geometrische) Definition der trigonometrischen Funktionen:

$$\mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x), \qquad \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x).$$

Mittels der Exponentialreihe (5.1) erhalten wir somit:
Die **Sinus–Funktion** $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

Die **Cosinus–Funktion** $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots$$

Insbesondere gilt auch $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und der Konvergenzradius ist jeweils $r = \infty$ wegen Satz 5.3 (mit Quotientenkriterium).
Wir erhalten allgemein:

Satz 5.5 (Eulersche Formel). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z).$$

Beweis. Nachrechnen mit den Potenzreihen ergibt direkt:

$$\begin{aligned} e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot i \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(z) + i \sin(z). \end{aligned}$$

□

Beispielsweise erhalten wir die Formeln $e^{i\pi} = -1$ und $e^{2\pi i} = 1$. Die komplexe Exponentialfunktion besitzt somit die komplexe Periode $2\pi \cdot i$:

$$e^z = e^{z+2\pi i}$$

Es gelten insbesondere mit der Definition des Betrages allgemein die Formeln

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$1 = e^{iz} \cdot e^{-iz} = |e^{iz}|^2 = \cos^2(z) + \sin^2(z), \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Damit haben wir die **wichtigsten Reihen und Potenzreihen:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent **(Harmonische Reihe)**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist konvergent für jedes $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ (**Majorante**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^k}$ ist konvergent für jedes $k \in \mathbb{N}$ **(Leibniz-Kriterium)**

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für alle $|z| < 1$ und ansonsten divergent **(Geometrische Reihe)**

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ **(Exponentialfunktion)**

$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ist konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ **(Sinus-Funktion)**

$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ ist konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ **(Cosinus-Funktion)**

Kapitel 6
Stetigkeit

Die Stetigkeit einer Funktion f ist die Eigenschaft der Verträglichkeit mit der Konvergenz, d.h.

$$x_n \to x \quad \implies \quad f(x_n) \to f(x).$$

Im Weiteren seien stets reelle Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ für eine Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Alle Begriffe und Werkzeuge der Stetigkeit lassen sich analog für komplexe Funktionen einführen.

Definition 6.1 (Stetigkeit). *Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt:*

- ***stetig in*** $x \in D_f$*, falls für jede Folge $(x_n) \subset D_f$ mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.*

  *Ansonsten heißt die Funktion **unstetig in** x.*
- ***stetig in/auf*** D_f*, falls sie stetig ist für alle $x \in D_f$.*
- ***rechts– bzw. linksseitig stetig in*** $x \in D_f$*, falls für jede Folge $(x_n) \subset D_f$ mit $x_n > x, x_n \to x$ (wir schreiben $x_n \searrow x$) bzw. $x_n < x, x_n \to x$ (wir schreiben $x_n \nearrow x$) gilt $f(x_n) \to f(x)$.*

*Wir schreiben für den **Grenzwert** von $f(x_n)$ für jede Folge $x_n \to x_0$ auch*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{bzw. bei einseitigen Grenzwert} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Genauer ist Stetigkeit also eine höchst lokale Eigenschaft, denn die Stetigkeit in einem Punkt hat keinen Einfluß auf die Stetigkeit in einem anderen Punkt.

6.1 Stetigkeitsregeln

Mit den Limesregeln (Lemma 4.6) erhalten wir direkt:

Lemma 6.2 (Limesregeln für Funktionen). *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$, so gelten auch die Stetigkeiten in x von:*

- $|f|$ *(Betrag)*
- $f + g$ *(Summe)*
- $f \cdot g$ *(Produkt)*
- *Falls $g(x) \neq 0$: f/g (Quotient)*

Ebenso folgen für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ all diese Stetigkeiten von $|f|, f + g, f \cdot g$ und f/g (mit eventuell kleinerer Definitionsmenge $D_{f/g} \subset D$!)

Direkt aus den Limesregeln für Funktionen 6.2 erhalten wir:

- Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig, ebenso stetig auf jeder Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Jede rationale Funktion $r(x) = f(x)/g(x)$ ist überall stetig auf der Definitionsmenge $D_r = \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : g(y) = 0\}$.

Für das Verhalten an den Polstellen verwenden wir allgemeiner:

Definition 6.3 (Uneigentlicher Grenzwert)**.** *Für eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt:*

- ∞ *bzw.* $-\infty$ ***uneigentlicher Grenzwert****, falls* $f(x) \nearrow \infty$ *bzw.* $f(x) \searrow -\infty$ *für* $x \to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$)*. D.h. f ist* ***unbeschränkt für*** $x \to x_0$
- $x_0 \in D_f$ ***Polstelle ohne Vorzeichenwechsel****, falls* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *(oder* $= -\infty$*)*
- $x_0 \in D_f$ ***Polstelle mit Vorzeichenwechsel****, falls* $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = -\infty$ *(oder beides umgekehrt)*
- f *in* $x_0 \notin D_f$ ***stetig fortsetzbar****, falls* $\lim\limits_{x\to x_0, x\in D_f} f(x)$ *existiert (und ist eindeutig!)*

Beispiele:

- Es ist für die rationale Funktion $r(x) = \dfrac{x^2+1}{4(1-x)}$, siehe Abbildung 6.1, beispielsweise
$$\lim_{x\to 2} r(x) = r(2) \quad \text{und analog für alle } x_0 \neq 1 \;:\; \lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0),$$
sowie an der Polstelle **mit Vorzeichenwechsel**: $\lim\limits_{x\searrow 1} r(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} r(x) = \infty$:

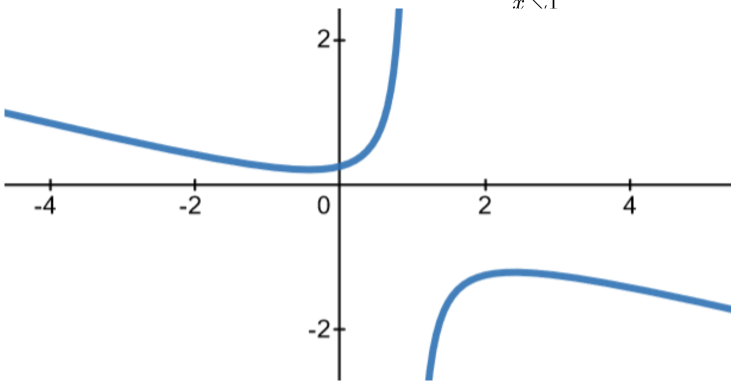

Abbildung 6.1: Rationale Funktion mit Polstelle mit Vorzeichenwechsel in 1

- Mit Stetigkeit Limesregeln 6.2 ist: $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{|x|+x^3}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x+x^3}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0}(1+x^2) = 1$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{|x|+x^3}{x} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{-x+x^3}{x} = \lim\limits_{x\nearrow 0}(-1+x^2) = -1$.
- Es gilt $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$ Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist also mit $x \to 0$:
$$-\infty \leftarrow (-\varepsilon - 1)/x^2 \leq f(x) \leq (\varepsilon - 1)/x^2 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$
- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1+\alpha x\,, & \text{für } x < 0\,, \\ x^2+\alpha^2\,, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ ist für alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da Polynome. Wegen den einseitigen Grenzwerten
$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0}(x^2+\alpha^2) = \alpha^2, \qquad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}(1+\alpha x) = 1$$
ist die Funktion nur für $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ stetig fortsetzbar, d.h. hier stetig. Ansonsten hat die Funktion in 0 einseitig verschiedene Grenzwerte.

Satz 6.4 (Stetigkeitsregeln). *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:*

- *Für $g : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig.* ***(Stetigkeit der Komposition)***
- *Jede Potenzreihe ist stetig im Konvergenzradius.* ***(Stetigkeit der Potenzreihe)***
- *Für f injektiv ist die Inverse $f^{-1} : f(D) \to D$ auch stetig.* ***(Stetigkeit der Inversen)***

Beweis. Wir zeigen nur die Stetigkeit der Komposition: Mit der Definition der Stetigkeit ist für alle $x \to x_0$ in D:

$$f(x) \to f(x_0) \text{ in } E \;\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0),$$

d.h. auch $g \circ f$ ist stetig nach Definition. □

Beispiele:

- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind überall stetig (Potenzrehen).
- Die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$, $\ln, \arcsin, \arccos, \arctan$ sind stetig auf den Definitionsbereichen (Stetigkeit der Inversen).
- Mittels Komposition und $c^x = e^{x \ln(c)}$ für $c > 0$ sind auch diese Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$:
$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = \frac{|\cos(x)|^3}{1 + x^2}, \quad h(x) = (\ln(|x| + 1/2))^{1/3}, \quad k(x) = 2^{x^3 - |x|}$$
- Die Funktion $f(x) = e^{1/x}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (Abbildung 6.2) ist stetig mit
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \searrow 0} e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \nearrow 0} e^{1/x} = 0$$

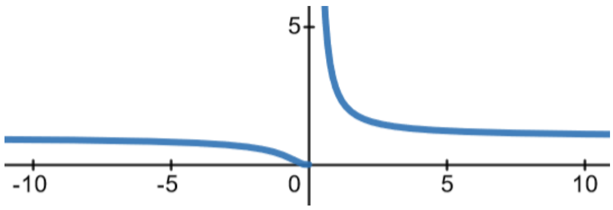

Abbildung 6.2: Funktion $f(x) = e^{1/x}$ mit rechtsseitiger Polstelle in 0

- Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$, $f : D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist überall auf D_f stetig, aber nicht stetig fortsetzbar in 0, da $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ nicht existiert, siehe Abbildung 6.3: Es ist beispielsweise für die Nullfolgen $x_n = 1/(2\pi n), y_n = 1/(2\pi n + \pi/2) : f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0$ aber $f(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$.

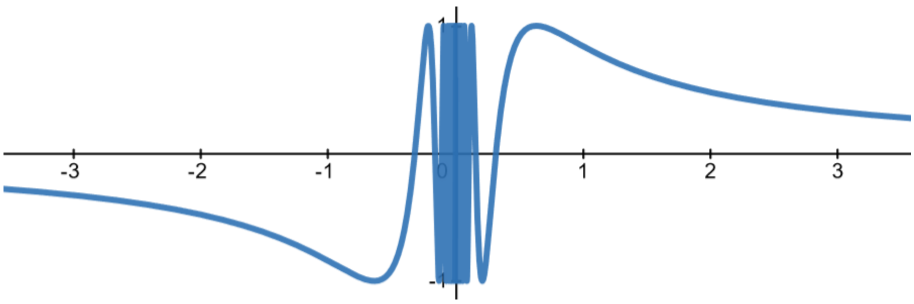

Abbildung 6.3: Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ nicht stetig fortsetzbar in 0

- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist überall unstetig, denn mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (Proposition 1.6) gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ Folgen $(q_n) \subset \mathbb{Q}$, $(r_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_n \to x, r_n \to x$ und daher $f(q_n) = 1 \to 1 \neq 0 \leftarrow 0 = f(r_n)$.

Bemerkung 6.5 (ε-δ-Kriterium der Stetigkeit). *Eine reelle Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D_f$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$x \in D_f \text{ und } |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

In Abbildung 6.3 sehen wir direkt, wie dieses Kriterium verletzt ist, z.B. für ein $\varepsilon < 1/2$.

Asymptotik bei Funktionen

Analog zu Folgen (Definition 4.12) definieren wir:

Definition 6.6 (Asymptotische Gleichheit Landau-$\mathcal{O}$). *Seien zwei Funktionen f, g.*

- *Die beiden Funktionen erfüllen **asymptotische Gleichheit** für $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls*
$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 1, \qquad \text{Schreibweise:} \quad f \sim g, \text{ für } x \to x_0$$
- *Funktion f **hat die asymptotische Schranke** g für $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls ein $C > 0$ existiert, so dass für jede Folge $x_n \to x_0$*
$$|f(x_n)| \leq C|g(x_n)| \quad \text{für fast alle } x_n, \qquad \text{Schreibweise: } f = \mathcal{O}(g) \text{ für } x \to x_0$$
- *Funktion f **ist asymptotisch vernachlässigbar bzgl.** g für $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls:*
$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0, \qquad \text{Schreibweise:} \quad f = o(g) \text{ für } x \to x_0$$

Beachte: $\mathcal{O}$ und o sind Schreibweisen! Aus $f_1 = \mathcal{O}(g), f_2 = \mathcal{O}(g)$ folgt nicht $f_1 = f_2$.
Beispiel: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, g(x) = x^3$ für $x \to \infty$. Es ist aber $f = o(g) \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$.

Beispiele:

- Es ist $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2}$ für $x \to 0$
- Für die Funktion $r(x) = \frac{x^2+1}{4(1-x)}$ (Abbildung 6.1) haben wir die Asymptotiken:
$$r(x) = \frac{x + 1/x}{-4 + 4/x} \sim -x/4 \text{ für } x \to \pm\infty, \qquad r(x) = \mathcal{O}(1/(1-x)) \text{ für } x \to 1$$
- Mittels Potenzreihe $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)$ ist für die alternierende Reihe durch Einschachtelung:
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right| \leq x^2/6 \to 0 \text{ für } x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(x) \sim x \text{ für } x \to 0$$
- Ebenso folgt mit der Potenzreihe auch $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ für $x \to 0$
- Mit dem Binomialsatz 1.7 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $(1 + x)^n = 1 + \mathcal{O}(x)$ für $x \to 0$

6.2 Zwischenwertsatz

Eine Funktion ist stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, falls sie rechtsseitig stetig in a, stetig für alle $x \in (a, b)$ und linksseitig stetig in b ist.
Wir sahen bei dem Beispiel $r(x) = \frac{x^2+1}{4(1-x)}$ (Abbildung 6.1), dass eine stetige Funktion, die unstetig in einem Intervall $[0, 2]$ ist, nicht alle Werte im Intervall $[r(0), r(2)] = [-5/4, 1, 4]$ annimmt. Andererseits gilt:

Satz 6.7 (Zwischenwertsatz). *Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir verwenden eine Intervallschachtelung (Satz 4.9): Sei O.B.d.A. $f(a) < f(b)$ und ein $z \in (f(a), f(b))$. Wir wählen $m := \frac{a+b}{2}$ und sei O.B.d.A $f(m) \in (f(a), f(b))$. Dann ist $z = f(m)$ oder z liegt in mindestens einem der Intervalle $(f(a), f(m))$, $(f(m), f(b))$. Wi wählen das entsprechende Intervall $[a, m]$ bzw. $[m, b]$ und bezeichnen es als $[a_1, b_1]$ Dann verfahren wir analog und iterieren dieses **Bisektionsverfahren**: Das n-te Intervall $[a_n, b_n]$ hat dabei die Länge $|b-a|2^{-n}$. Somit ergibt Satz 4.9 einen Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und mit der Stetigkeit der Funktion und der Limes-Ungleichung erhalten wir das Urbild von z:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq z \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x) \quad \Rightarrow f(x) = z.$$

□

Eine direkte Folgerung für den Zwischenwert 0 ist:

Satz 6.8 (Nullstellensatz). *Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) \leq 0$, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$.*

Bemerkung 6.9 (Algorithmus Bisektionsverfahren). *Aus dem Beweis von 6.7 erhalten wir ein praktisches Approximationsverfahren für Nullstellen von stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ mit einer Genauigkeit $\varepsilon > 0$:*

Algorithm 1 Biseksionsverfahren Nullstelle stetiger Funktion

```
Set k = 0
while b_k − a_k > 2ε do
  Set m_k = (a_k + b_k)/2
  if f(m_k) = 0 then
    BREAK
  else if f(m_k) · f(a_k) < 0 then
    Set a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = m_k
  else
    Set a_{k+1} = m_k, b_{k+1} = b_k
  end if
end while      (es ist für die Nullstelle x nun |x − m_k| < ε)
```

Beispiele:

- Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einem Intervall, dann ist nach Zwischenwertsatz 6.7 auch $f(I)$ ein Intervall.

- Die Funktion $f(x) = 3\cos(x) - x^2$ ist mit Limesregeln Funktionen 6.2 stetig auf $\mathbb{R}$ und erfüllt $f(0) = 3 > 0$ und $f(\pi) = -3 - \pi^2 < 0$. Also besitzt die Funktion in $(0, \pi)$ mindestens eine Nullstelle. Mit dem Bisektionsverfahren (Algorithmus 1) erhalten wir die Intervallschachtelung für diese Nullstelle als:

$$[0, \pi], \quad [0, \pi/2], \quad \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right], \quad \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi\right], \quad \left[\frac{5}{16}\pi, \frac{3}{8}\pi\right], \quad \ldots$$

  Der Algorithmus ergibt für $\varepsilon = 10^{-6}$ nach 22 Iterationen den Approximationswert $y = 1.1306$ mit $f(y) = -0.217 \cdot 10^{-6}$.

Die Stetigkeit hat noch eine weitere interessante Folgerung: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt darauf ein Maximum und Minimum an:

Satz 6.10 (vom Maximum und Minimum). *Seien $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren Punkte $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit*

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in [a,b]} f(x) .$$

Beachte: Die Aussage wird falsch, wenn der Definitionsbereich von f nicht abgeschlossen oder unbeschränkt ist!

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(x^2)$ (Abbildung 6.4) ist mit Limesregeln Funktionen 6.2 und Stetigkeit der Komposition 6.4 überall stetig auf $\mathbb{R}$ und nimmt daher auf jedem abgeschlossenen Intervall ein eindeutiges Maximum und Mininimum an.

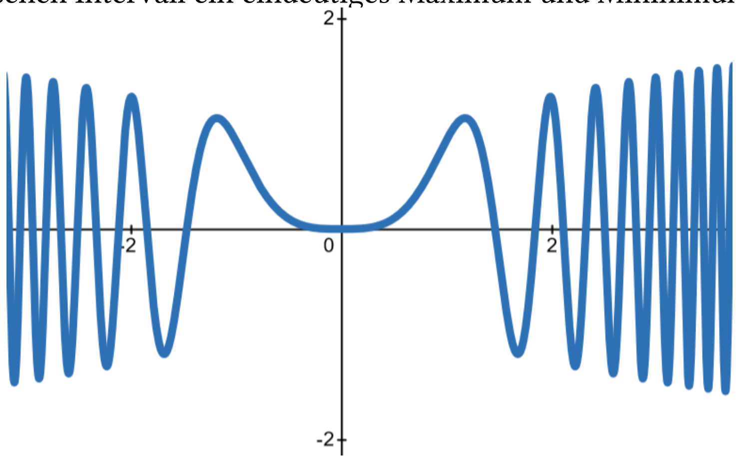

Abbildung 6.4: Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin\left(x^2\right)$

- Die Funktion $f(x) = x^2$ ist überall stetig. Auf dem nicht abgeschlossenen Intervall $(-2, 2)$ nimmt die Funktion allerdings kein Maximum an. Es ist nur $\sup_{x \in (-2,2)} f(x) = 4$, ein Maximum existiert nicht.
- Die Funktion $f(x) = e^{-x}$ ist überall stetig. Auf dem unbeschränkten Intervall $[0, \infty)$ nimmt die Funktion allerdings kein Minimum an. Es ist nur $\inf_{x \in (-2,2)} f(x) = 0$, ein Minimum existiert nicht.
- Eine stetige Funktion bildet ein abgeschlossenes Intervall auf ein abgeschlossenes Intervall ab.

Kapitel 7
Differenziation

Ab hier wird evtl. noch etwas korrigiert!

Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 beschreibt die lokale Veränderung der Funktion bezüglich $x - x_0$. Dabei wird die Funktion durch die Tangente an der Stelle x_0 approximiert. Somit ist die Ableitung eine **lineare Approximation** (d.h. durch eine Gerade) der Funktion f an x_0:

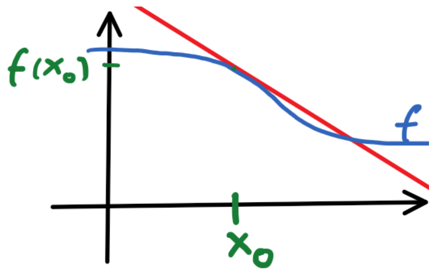

Abbildung 7.1: Differenziation: Ableitung als lineare Approximation in x_0

7.1 Ableitungen

Definition 7.1 (Differenzierbarkeit, Ableitung). *Seien $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
*Die Funktion f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in (a, b)$, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{existiert}$$

*unabhängig von den Folgen $x \to x_0$ bzw. $h \to 0$. $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ heißt die **(erste) Ableitung** von f in x_0. Der Quotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt **Differenzenquotient** und ist zugleich die Sekantensteigung durch die Punkte x und x_0.*
Ist f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf (a, b) und die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion.

*Ist $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f (einmal) **stetig differenzierbar**. Schreibweise: $f \in C^1((a, b))$.*
Die Tangente an f im Punkt x_0 ist gegeben durch

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

*und $f'(x_0)$ ist die **Steigung** der Tangente. Die Ableitung als **Tangentensteigung** im Punkt x_0 ist daher der **Grenzwert der Sekantensteigung** im Differenzenquotient für $x \to x_0$. Die **einseitigen** Ableitungen (**rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung**) sind:*

$$f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'(b) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Beispiele:

- **Lineare Funktion:** Seien $m, c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = mx + c$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(mx + c) - (mx_0 + c)}{x - x_0} = m \Rightarrow f'(x) = m$.
- **Quadratwurzel:** Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist mit
  $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ für alle $x > 0$
  (Definition der Differenzierbarkeit: ein offenes Intervall!) mit Stetigkeit von $x \mapsto \sqrt{x}$:
  $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
  Zudem ist $\displaystyle\lim_{h \searrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$
  Also existiert die rechtsseitige Ableitung in 0 nicht! (Ableitung $\in \mathbb{R}$ notwendig!)
- **Betrag:** Sei $f(x) = |x|$, so ist für alle $x, x_0 > 0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$
  und für alle $x, x_0 < 0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x_0 - x}{x - x_0} = -1$
  In 0 existieren die einseitigen Ableitungen, sind aber verschieden:
  $$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Satz 7.2 (**Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit**)**.** *Ist eine Funktion f differenzierbar in $x \in D_f$, so ist sie dort auch stetig.*

Die Umkehrung von Satz 7.2 gilt jedoch im Allg. **nicht** wie z.B. oben die Betragsfunktion zeigt.

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar. Dann gilt mit der Existenz der Ableitung die Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ in x_0 mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{7.1}$$

Die Funktion φ ist die **beste Linearisierung** in x_0 und es folgt mit dieser Stetigkeit und Limesregeln (Produkt) für $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \to f(x_0) + 0 \cdot \varphi(x_0) = f(x_0).$$

□

(Untere) **Gaußklammer Funktion:** $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ ist nicht stetig in $\mathbb{Z}$, also nach 7.2 dort auch nicht differenzierbar. Auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (offene Intervalle) ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Für alle $z \in \mathbb{Z}$ existieren die einseitigen Ableitungen $f'(z) = 0$, aber f ist dennoch nicht differenzierbar. Beispielsweise ist für die Nullfolge $(h_n) = ((-1)^n/n)$: $f(h_n) = \lfloor (-1)^n/n \rfloor = \begin{cases} 0 & n \in 2\mathbb{N} \\ -1 & n \notin 2\mathbb{N} \end{cases} = ((-1)^n - 1)/2$ und so ist :

$$\frac{f(0+h_n) - f(0)}{h_n} = \frac{((-1)^n - 1)/2 - 0}{(-1)^n/n} = n(1 - (-1)^n)/2 \quad \text{divergent!}$$

Den Limesregeln für Folgen 4.6 und Funktionen 6.2 folgen:

Satz 7.3 (Differenziationsregeln). *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x \in (a, b)$. Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, $c, d \in \mathbb{R}$, dann sind auch $cf \pm dg$ und $f \cdot g$ in x differenzierbar. Ist $g(x) \neq 0$, so ist f/g in x differenzierbar. Es gelten die Ableitungen:*

- $(cf \pm dg)'(x) = cf'(x) \pm dg'(x)$ ***(Linearität der Ableitung)***
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ ***(Produktregel)***
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$ ***(Quotientenregel)***
- *Ist h in x und f in $h(x)$ differenzierbar, so ist $f \circ h$ in x differenzierbar, und es gilt die*
  $(f \circ h)'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$ ***(Kettenregel)***
- *Sei f streng monoton mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion*
  $g = f^{-1} : f((a, b)) \to (a, b)$ differenzierbar in $y = f(x)$ mit (Kettenregel):
  $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 1/f'(x) = 1/f'(g(y))$ (***Umkehrfunktion***)

Beweis. **Produktregel:** Für $h \to 0$ ist mit Satz 7.2 und Limesregeln Funktionen (Produkt):

$$\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \left(\frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}\right) g(x_0+h) + \left(\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right) f(x_0)$$
$$\to f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Kettenregel: Mit bester Linearisierung (7.1) gibt es in x_0 bzw. $h(x_0) =: y_0$ stetige Funktionen φ und γ (da differenzierbar) mit

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)\varphi(x), \qquad f(y) - f(y_0) = (y - y_0)\gamma(y)$$

Hierbei ist $\varphi(x_0) = h'(x_0)$ und $\gamma(y_0) = f'(y_0)$. Also folgt

$$(f \circ h)(x) - (f \circ h)(x_0) = (h(x) - h(x_0))\gamma(h(x)) = (x - x_0)\varphi(x)(\gamma \circ h)(x).$$

Mit Stetigkeit der Komposition ist $\gamma \circ \varphi$ selbst stetig in x_0. Damit folgt

$$(f \circ h)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ h)(x) - (f \circ h)(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x_0)(\gamma \circ h)(x_0) = h'(x_0) f'(h(x_0)).$$

Alle anderen Aussagen folgen ebenso mit Limesregeln 6.2 und Kettenregel. □

Beispiele:

- Jedes **Polynom** $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach 7.3 (Linearität, Produktregel) überall differenzierbar mit der Ableitung
$$p'(x) = n\, a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$
- Jede **rationale Funktion** $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist nach 7.3 (Quotientenregel) überall auf $D_r = \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : q(y) = 0\}$ differenzierbar mit der Ableitung
$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2}$$

Satz 7.4 (Differenziation Potenzreihe). *Jede Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist im Konvergenzradius r differenzierbar mit der (gliedweisen) Ableitung mit Konvergenzradius r:*
$$P'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Für unsere wichtigsten Potenzreihen erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die bekannten Ableitungen:
$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$
$$\sin'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$
$$\cos'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

Beispiele:

- **Logarithmus:** Der Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ mit $(e^x)' = e^x$. Anwenden der Ableitung der Umkehrfunktion 7.3 liefert:
$$(\ln(y))' = \frac{1}{(e^{\ln(y)})'} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$
- **Allgemeine Potenzfunktion:** Sei $r \neq 0$, so ist mittels $x^r = e^{r \ln(x)}$ und 7.3 (Kettenregel, Linearität) für alle $x > 0$:
$$(x^r)' = \left(e^{r \ln(x)}\right)' = e^{r \ln(x)} \cdot (r \ln(x))' = e^{r \ln(x)} \cdot r/x = x^r \cdot r/x = r x^{r-1}.$$
- Beispielsweise ist für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/x$ mit Kettenregel und Linearität:
$$(1/x)' = \begin{cases} (x^{-1})' = -x^{-2} & x > 0 \\ (-(-x)^{-1})' = -((-x)^{-1})' = -(-x)^{-2} = -x^{-2} & x < 0 \end{cases} = -x^{-2}$$
- **k-te Wurzelfunktion:** $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ hat die Ableitung $f'(x) = x^{1/k-1}/k$.

Damit haben wir die **wichtigsten Ableitungen:**

$(x^n)' = nx^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$(x^r)' = rx^{r-1}$ für jedes $r \neq 0, x > 0$

$(e^x)' = e^x,\ \sin(x)' = \cos(x),\ \cos(x)' = -\sin(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$(\ln(x))' = 1/x,$ für jedes $x > 0$

Definition 7.5 (Höhere Ableitungen). *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist $(n+1)$**–mal differenzierbar**, wenn f auf dem Intervall n–mal differenzierbar ist und die n–te Ableitung selbst auch differenzierbar ist. Wir bezeichnen:*

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \ldots$$

*Ist die n–te Ableitung $f^{(n)}$ auf dem Intervall (a, b) stetig, so schreiben wir $f \in C^n((a, b))$. Existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n–te Ableitung $f^{(n)}$, so nennen wir f **beliebig oft** differenzierbar und schreiben $f \in C^\infty((a, b))$.*

Beispielsweise sind beliebig of differenzierbar: Polynome, Potenzreihen im Konvergenzradius (z.B. $\exp, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$.)

7.2 Extrema

Definition 7.6 (Extremum/Maximum/Minimum). *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat in $c \in (a, b)$ ein **lokales Minimum (bzw. Maximum)**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $|c - x| < \varepsilon$:*

$$f(c) \leq f(x) \qquad (\text{bzw. } f(c) \geq f(x))$$

*Lokale Minima und Maxima werden als **Extrema** bezeichnet. Gilt obige Bedinung für alle $x \in D_f$, so heißt es **globales Minimum (bzw Maximum)**.*

Beispiele: (vgl. Abbildung 7.2)

- Für ein Polynom $p(x)$ haben wir die lokalen Extrema c an den Stellen $p'(c) = 0$.
- Die Funktion $f(x) = (\max\{1, |x|\} - 1)^2$ hat ein globales Intervall $[-1, 1]$ von Minima.
- Die Funktion $f(x) = |x - 1|$ hat ein globales Minimum in $c = 1$.

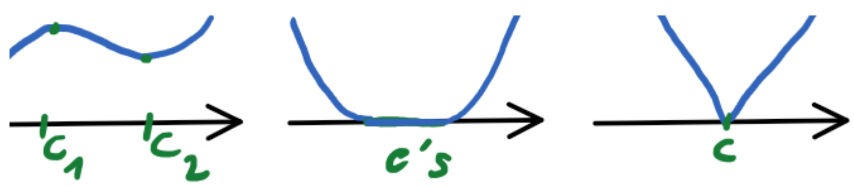

Abbildung 7.2: Skizze Beispiele für Typen von Extrema, hier Minima

Proposition 7.7 (Extremum im Inneren $\Rightarrow f'(c) = 0$). *Besitzt $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $c \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist f in c differenzierbar, dann ist $f'(c) = 0$.*

Beweis. Sei O.B.d.A c ein lokales Minimum, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(c) \leq f(x)$ für alle $|c - x| < \varepsilon$. Also ist, da der Grenzwert des Differenzenquotienten nach Voraussetzung existiert, nur der Limes $= 0$ möglich:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} \geq 0 & x > c \\ \leq 0 & x < c \end{cases} \to 0 \qquad \Rightarrow f'(c) = 0$$

□

Beachte: Auch ohne eine Ableitung kann es sich um Extrema handeln, z.B: $f(x) = |x - 1|$.
Einzige Kandidaten für Extremalstellen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind:

- Randpunkte a, b
- Punkte $x \in (a, b)$, in denen f nicht differenzierbar ist
- Punkte $x \in (a, b)$, in denen $f'(x) = 0$ gilt

  Ein Punkt c mit $f'(c) = 0$ heißt **stationärer bzw. kritischer Punkt** von f.

Beispiel:
Für das Polynom

$$f\,(x) = f(x) = x^4/4 - x^3/3 - x^2/2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^3 - x^2 - x = x(x^2 - x - 1)$$

auf dem Intervall $[-1, 2]$ (siehe Abbildung 7.3) erhalten wir drei kritische Werte: $0, (1 \pm \sqrt{5})/2$ und durch Vergleich der Funktionswerte $f(-1) = 1/12,\ f\left((1 - \sqrt{5})/2\right) \approx -0.07,\ f(0) = 0,\ f\left((1 + \sqrt{5})/2\right) \approx -1.01,\ f(2) = -2/3$ also ein globales Minimum in $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61$, ein lokales Minimum in $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.61$, das globale Maximum in -1 und ein lokales Maximum in 0.

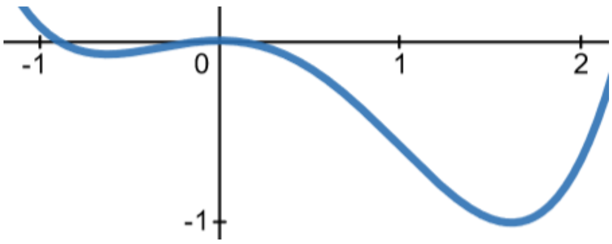

Abbildung 7.3: Funktion $f(x) = x^4/4 - x^3/3 - x^2/2$

7.3 Mittelwertsatz

Satz 7.8 (Mittelwertsatz/Rolle). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D.h. an (mindestens) einer Stelle $c \in (a, b)$ ist die Tangente an die Funktion parallel zur Sekante.
Satz von Rolle: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Der Mittelwertsatz folgt aus Satz von Rolle mit der neuen Funktion, die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b):

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow g(a) = f(a),\ g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

Satz von Rolle: Für f konstant ist Aussage klar. Sei f nicht konstant. Mit 6.10 nimmt f Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an. Diese können nicht zugleich am Rand liegen. Also ist mindestens ein Extremum c im Inneren (a, b). Proposition 7.7 ergibt $f'(c) = 0$. □

Damit erhalten wir das Kriterium:

Satz 7.9 (Monotonie f'). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt:*

- *f ist konstant auf $[a, b]$ $\iff$ $f' = 0$ auf (a, b)*
- *f ist (streng) monoton steigend auf $[a, b]$ $\iff$ $f' \geq 0$ $(f' > 0)$ auf (a, b)*
- *f ist (streng) monoton fallend auf $[a, b]$ $\iff$ $f' \leq 0$ $(f' < 0)$ auf (a, b)*

Proposition 7.10 (Kriterium für Extrema). *Seien f auf (a, b) differenzierbar und c ein kritischer Punkt. Dann gilt:*

- *$f' \leq 0$ auf (a, c) und $f' \geq 0$ auf (c, b) $\implies$ c ist ein lokales Minimum*
- *$f' \geq 0$ auf (a, c) und $f' \leq 0$ auf (c, b) $\implies$ c ist ein lokales Maximum*

Die Aussagen gelten analog für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die auf $(a, c) \cup (c, b)$ differenzierbar (z.B. $f(x) = |x|$).

Beispiele:

- $f(x) = e^x - x$ ist auf $[0, \infty)$ nach 7.9 streng monoton steigend da $f'(x) = e^x - 1 > 0$ auf $(0, \infty)$. Auf $(-\infty, 0)$ ist es wegen $f'(x) < 0$ streng monoton fallend. Somit ist 0 das globale Minimum von f nach 7.10.
- Für $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ (Kettenregel): $f'(x) = -\dfrac{x\sqrt{1 + x^2}}{(1 + x^2)^2}$. Somit ist f auf $[0, 3]$ streng monoton fallend. $x = 0$ ist einziger kritischer Punkt: Es ist $f' < 0$ auf $(0, \infty)$ und $f' > 0$ auf $(-\infty, 0)$. Also hat f in 0 ein globales Maximum, siehe 7.4.

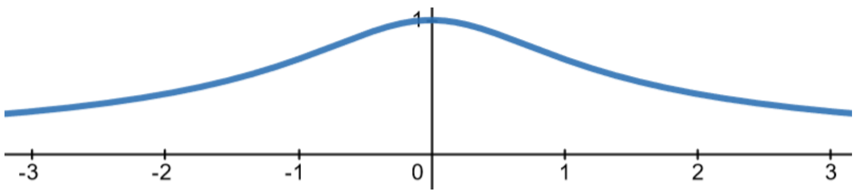

Abbildung 7.4: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Definition 7.11 (konvex/konkav). *Die Funktion $f \in C^2((a, b))$ heißt*

- ***(streng) konvex**, wenn $f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$ auf (a, b)*

- ***(streng) konkav***, *wenn* $f'' \leq 0$ $(f'' < 0)$ *auf* (a, b)

Satz 7.12. *Sei* $f \in C^2((a, b))$ *und* c *ein kritischer Punkt. Dann gilt:*

$$f \text{ streng konvex/konkav} \quad \Longrightarrow \quad c \text{ lokales Minimum/Maximum}$$

Im obigen Beispiel $f(x) = e^x - x$ ist $f''(x) = e^x$ und $f''(0) = 1 > 0$, also ein Minimum in 0.

Exkurs 7.13 (Differenzialgleichung $y' = y, y(0) = 1$). *Sei* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $y' = y$ *und* $y(0) = 1$. *Es ist mit Differenziationsregeln 7.3 (Produktregel) und* $(e^{-x})' = -e^{-x}$*:*

$$g(x) := y(x)e^{-x} \qquad g'(x) = y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = (y'(x) - y(x))e^{-x} = 0$$

Mit Satz 7.9 und $g(0) = y(0)e^{-0} = 1$ *ist* $g(x) = 1$ *(konstant). Somit ist auch* $y(x) = e^x$*, d.h. die Exponentialfunktion ist die einzige differenzierbare Funktion mit* $y' = y, y(0) = 1$.

Kapitel 8
Integration

Die Integralrechnung bildet das Gegenstück zur Differentialrechnung. Das Integral ist hierbei die Fläche zwischen der Funktion f und der Achse $\mathbb{R}$:

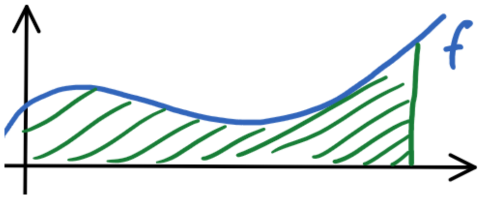

Abbildung 8.1: Integration: Fläche zwischen Funktion f und der Achse $\mathbb{R}$

Die genaue Definition basiert erneut auf einer Konvergenz und beginnt mit Rechtecken, deren Fläche einfacher zu berechnen ist, siehe Abbildung 8.2:

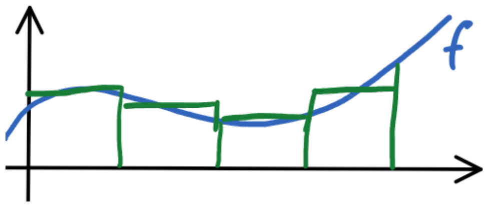

Abbildung 8.2: Idee Integral: Rechtecke zur Approximation der Fläche

8.1 Integral

Definition 8.1 (**Zerlegung, Treppenfuktion, Integral**). *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, so heißt $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ eine **Zerlegung** falls*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

*Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf allen Intervallen einer Zerlegung konstant ist, heißt **Treppenfunktion**, d.h. es gibt eine Zerlegung $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ von $[a, b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit:*

$$f(x) = c_i \text{ für alle } x \in (t_{i-1}, t_i), \; i = 1, \ldots, n.$$

An den restlichen Stellen $t_0, \ldots, t_n$ ist es egal wie die Treppenfuktion definiert wird.
*Das **Integral** einer solchen Treppenfuktion ist dann definiert als*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}).$$

Beispiele für Treppenfuktionen für jedes abgeschlossene Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$:

- Die **Signum/Vorzeichen-Funktion** $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
- Die (Obere) **Gaußklammer Funktion:** $f(x) = \lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : x \le z\}$

Direkt aus der Definition folgen:

Proposition 8.2 (**Eigenschaften des Integrals für Treppenfuktionen**). *Das Integral erfüllt für alle Treppenfunktionen f, g auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R}$:*

- $\int_a^b (cf(x) + dg(x))\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx + d\int_a^b g(x)\, dx$ ***(Linearität)***
- $f \le g$ *auf* $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$ ***(Monotonie)***
- $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)$ *für alle* $a < c < b$ ***(Additivität)***
- $|\int_a^b f(x)\, dx| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$ ***(Dreiecksungleichung)***
- $|\int_a^b f(x)\, dx| \le \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)(b-a)$ ***(Beschränktheit)***

Beweis. Die Dreiecksungleichung und Beschränktheit folgen mit Dreiecksungleichung 1.2:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n c_i(t_i - t_{i-1})\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n |c_i|(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|\, dx \\ &\le \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a)\end{aligned}$$

Alle anderen Aussagen folgen direkt aus Linearität und Monototie für endliche Summen. □

Das Regelintegral ist die Verallgemeinerung, sofern eine Approximation mittels Treppenfuktionen vorliegt:

Definition 8.3 (**Integral (Regelintegral)**). *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und (T_n) eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - T_n(x)|\right) = 0$. Dann ist das Integral definiert als*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b T_n(x)\, dx.$$

und die Funktion f heißt ***integrierbar****, wenn obiger Grenzwert existiert und unabhängig von der Folge (T_n) ist. Die Wohldefiniertheit des Integrals folgt hierbei aus Beschränktheit des Integrals mit der Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - T_n(x)|\right) = 0$:*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[a,b]} |T_n(x)|\right)(b-a) < \infty$$

Mit Limesregeln folgt aus der Definition und Proposition 8.2:

Satz 8.4 (**Eigenschaften des Integrals**). *Das Integral erfüllt für alle integrierbaren Funktionen die Eigenschaften aus Proposition 8.2:*
Linearität, Monotonie, Beschränktheit, Additivität, Dreiecksungleichung.

Zur Vereinfachung definieren wir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Satz 8.5 (**Stetigkeit $\Rightarrow$ Integrierbarkeit**). *Das Regelintegral existiert für jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ [a,b] \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Mit Stetigkeit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion T, so dass für alle $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dann folgt mit Linearität und Dreiecksungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b T(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - T(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon,$$

d.h. mit Definition des Integrals 8.3 die Intergrierbarkeit von f über $[a,b]$. □

Allgemeiner ist jede **stückweise stetige Funktion** f, die auf allen offenen Intervallen einer Zerlegung stetig ist, integrierbar.

Noch allgemeiner ist jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wenn für alle $x \in [a,b]$ die einseitigen Grenzwerte existieren.

Beispiele:

- Für jede konstante Funktion $f(x) = c$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist klar $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$ (Treppenfuktion).
- Für jede lineare Funktion $f(x) = mx + c$ erhalten wir das Integral direkt als Fläche eines Trapezes:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left((mb+c) + (ma+c)\right)(b-a) = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + c(b-a)$$

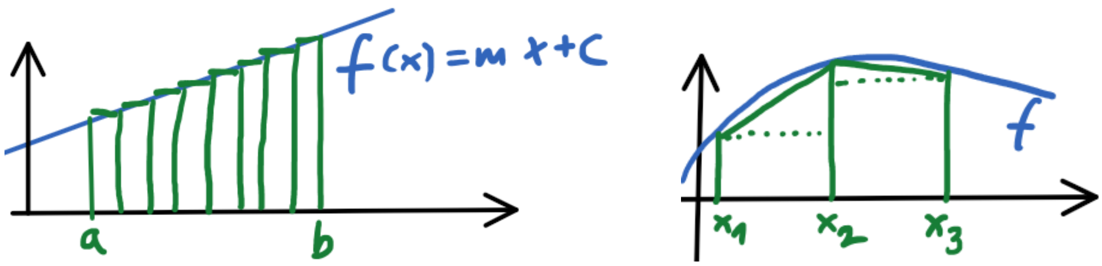

Abbildung 8.3: Skizze: Integral einer Funktion $f(x) = mx + c$ und Idee Bogenlänge

Werkzeuge der Integration weiterer Funktionen entwickeln wir in den Abschnitten 8.2 und 8.3.

Exkurs 8.6 (Bogenlänge einer Funktion). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf (a, b) stetig differenzierbare Funktion. Für die Länge der Kurve der Funktion $L_{[x_1,x_2]}$ auf $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ verwenden wir Pythagoras und den Mittelwertsatz für passende $\xi \in [x_1, x_2]$, siehe Abbildung 8.3 rechts:*

$$\begin{aligned} L_{[x_1,x_2]} \approx \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f'(\xi))^2 (x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \end{aligned}$$

Für eine stetig differenzierbare Funktion f ist obige Funktion stetig und somit integrierbar nach Satz 8.5 und wir erhalten für die Länge der Kurve $L_{[a,b]}$ für $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{n} L_{[x_{i-1},x_i]} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_2 - x_1)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \to \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = L_{[a,b]}.$$

8.2 Mittelwertsatz und Hauptsatz

Satz 8.7 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und die Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $p \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass*

$$\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\, dx$$

Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

Beweis. Weil f stetig auf $[a, b]$, existieren nach Satz von Max/Min 6.10 Minimum m und Maximum M mit

$$mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$$

für alle $x \in [a, b]$. Mit der Monotonie des Integrals 8.4 ist daher auch

$$m \int_a^b p(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\, dx \leq M \int_a^b p(x)\, dx$$

Somit existiert ein $q \in [m, M]$ mit $\int_a^b f(x)p(x)\, dx = q \int_a^b p(x)\, dx$. Für die stetige Funktion f folgt mit $m \leq f \leq M$ und dem Zwischenwertsatz 6.7 ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = q$. Also gilt tatsächlich $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\, dx$. □

Definition 8.8 (Stammfunktion). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ heißt eine **Stammfunktion** von f auf $[a, b]$.*
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $G = F + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, da $(F + c)' = F' = f$. Insbesondere ist jede Stammfunktion F stetig.

Satz 8.9 (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**). *Sei die Funktion f auf $[a,b]$ stetig. Dann gilt:*

- *$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f, d.h. $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$*
- *Jede andere Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.*
- *Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b =: F(b) - F(a)$*

  Insbesondere hat jede stetige Funktion f eine stetig differenzierbare Stammfunktion F.

Beweis. • Wir verwenden die Approximation mittels Differenzenquotienten von F_a:

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Mite dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 8.7 ist $\int_{x_0}^x f(t)\,dt = (x - x_0) f(\tilde{x})$ für ein $\tilde{x} \in (x_0, x) \cup (x, x_0)$. Also folgt $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{x - x_0}\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\tilde{x})$.

Im Limes für $x \to x_0$ erhalten wir damit $F'(x_0) = f(x_0)$.

• Sei G andere Stammfunktion von f, so ist $(F_a - G)' = f - f = 0$, also $F_a - G$ konstant.

• Ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$ eine beliebige Stammfunktion von f, so folgt
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - 0.$ □

Mit dem Hauptsatz 8.9 haben wir jetzt das Werkzeug zur Hand, um Integrale zu bestimmen: Wir suchen eine Stammfunktion, d.h. eine Funktion F, deren Ableitung gerade der Integrand f ist.

Beispiele:

- $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ da für $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ die Ableitung $(F(x))' = x = f(x)$.
- $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ da für $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ die Ableitung $(F(x))' = x^2 = f(x)$.
- **Allgemeine Potenzfunktion:** Allgemein erhalten wir für alle $r \neq -1$:

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\Big|_a^b = \frac{1}{r+1}(b^r - a^r)$$

  da für $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ die Ableitung $(F(x))' = x^r = f(x)$.
- Es ist wegen $(\ln(x))' = 1/x$ für alle $0 < a < b$:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(y)|_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a)$$

- Mittels Quotientenregel und Ableitung Inverse 7.3 ist

$$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

  und somit $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Daher folgt mit Hauptsatz für alle $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$\int_a^b \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \arctan(x)|_a^b. \tag{8.1}$$

Analog erhalten wir mittels bekannten Ableitungen und der Kettenregel 7.3 die folgenden **wichtigsten Stammfunktionen:**

Integrand f	Stammfunktion F	
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	für $r \neq -1$
$(ax+b)^r$	$\frac{(ax+b)^{r+1}}{(r+1)a}$	für $r \neq -1,\ a \neq 0$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)$	für $a \neq 0$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	für $a \neq 0$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	für $a \neq 0$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	für $a \neq 0$
$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a}\ln(\lvert\cos(ax)\rvert)$	für $a \neq 0$
$\frac{1}{a^2x^2+b^2}$	$\frac{1}{ab}\arctan(ax/b)$	für $a, b \neq 0$

Beispiele:

- Mittels $c^x = e^{x\ln(c)}$ ist:
$$\int_1^2 8^x\,dx = \int_1^2 e^{x\ln(8)}\,dx = \frac{1}{\ln(8)}e^{x\ln(8)}\Big|_1^2 = \frac{e^{2\ln(8)} - e^{\ln(8)}}{\ln(2^3)} = \frac{8^2-8}{3\ln(2)} = \frac{56}{3\ln(2)}$$
- Es ist z.B. für alle $a < b < 3/2$: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|2x-3|)\Big|_a^b$.

  Aber für $a < 3/2 < b$ existiert das Integral nicht (da $1/x$ (und $\ln(x)$) nicht für $x = 0$ definiert!)
- Wir untersuchen die folgende Funktion auf Extrema:
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \sin(y^2)dy$$
  Mit Hauptsatz und Differenziation ist
$$f(x) = \int_0^x \sin(y^2)dy \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \sin(x^2) \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \cos(x^2)2x$$
  Die kritischen Punkte sind:
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \pi\mathbb{Z}$$
  Wegen $x \in [0,1] \cap \pi\mathbb{Z} \Rightarrow x = 0$, $f''(0) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = \int_0^1 \sin(y^2)dy > 0$, sowie $f'(x) > 0$ für $x > 0$ erhalten wir: globales Minimum in 0 und globales Maximum in 1.

Definition 8.10 (Unbestimmtes Integral). *Das **unbestimmte Integral** einer auf $\mathbb{R}$ (oder einem Intervall) integrierbaren Funktion f ist die Familie aller Stammfunktionen*

$$\int f(x)\,dx := \{F + c : c \in \mathbb{R}, F' = f\}$$

So haben wir beispielsweise die unbestimmten Integrale

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c, \qquad \int e^{-ax}\,dx = -e^{-ax}/a + c, \qquad \int \cos(3x)\,dx = \sin(3x)/3 + c$$

8.3 Integrationsregeln

Analog zur Differenziation haben wir:

Satz 8.11 (Integration von Potenzreihen). *Jede Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ist im Konvergenzradius r integrierbar mit dem (gliedweisen) Integral mit Konvergenzradius r:*

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, x^{n+1}\Big|_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(b^{n+1} - a^{n+1})}{n+1}$$

für alle $-r < a < b < r$.

Beispiele:

- Für alle $|x| < 1$ ist $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (geometrische Reihe) und daher für alle $-1 < a < b < 1$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\Big|_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

  Mit $\int_0^a \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(|1-a|)$ erhalten wir also die Potenzreihe für alle $a \in (0,1)$:

$$\ln(1-a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

- Für $|x| < 1$ ist $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ (geometrische Reihe) und für alle $-1 < t < 1$ das Integral

$$\int_0^t f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$$

  Mit (8.1) erhalten wir die Potenzreihe

$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} = t - t^3/3 + t^5/5 \pm \cdots$$

Mittels dem Hauptsatz können wir aus den Differenziationsregeln weitere Integrationsregeln erhalten:

Satz 8.12 (Partielle Integration). *Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = (f(x)\,g(x))|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

bzw. für die unbestimmte Integration

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx + c$$

Beweis. Mit Produktregel für Differentiation 7.3 und Hauptsatz 8.9 ist

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx = \int (f(x)\,g(x))'\,dx = f(x)\,g(x) + c.$$

Alle Integrale existieren, da Integranden stetig (Satz 8.5). □

Beispiele:

- Gesucht sei $\int \ln(x)\,dx$: Mit $f'(x) = 1, g(x) = \ln(x)$ ist $\int f'(x)\,g(x)\,dx = \int \ln(x)\,dx$. Dann ist mit $f(x) = x$ und $g'(x) = 1/x$ und partieller Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx + c = x\ln(x) - x + c$$

- Gesucht sind $\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx$ und $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$: Mit partieller Integration ist

$$\int_a^b \cos^2(x)\,dx = \int_a^b \cos(x)(\sin(x))'\,dx = \cos(x)\sin(x)|_a^b + \int_a^b \sin^2(x)\,dx$$

  Also insbesondere

$$\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\sin(x)|_0^\pi + \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

  Mit Pythogoras $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und somit $\int_0^\pi (\cos^2(x) + \sin^2(x))\,dx = \pi$ folgt:

$$\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{8.2}$$

- Gesucht sei $\int_a^b x^k e^{-\alpha x}\,dx$ für $0 < a < b$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ beliebig:
  Mit partieller Integration und $f'(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow f(x) = -e^{-\alpha x}/\alpha$ ist

$$\int_a^b x^k e^{-\alpha x}\,dx = -\left.\frac{1}{\alpha}x^k e^{-\alpha x}\right|_a^b + \frac{k}{\alpha}\int_a^b x^{k-1}e^{-\alpha x}\,dx$$

  Mit Iteration bzw. Induktion folgt daraus

$$\int_a^b x^k e^{-\alpha x}\,dx = -\left.\left(e^{-\alpha x}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!}x^m\alpha^{-(k+1-m)}\right)\right|_a^b \tag{8.3}$$

Satz 8.13 (Integration durch Substitution). *Seien $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $h : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(h(x))\, h'(x)\, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s)\, ds.$$

Substitution der Integrationsgrenzen beachten! Für eine Stammfunktion F von f folgt

$$\int_a^b f(h(x))\, h'(x)\, dx = F(h(x))|_a^b\,.$$

Beweis. Für jede Stammfunktion F von f gilt mit Kettenregel 7.3:

$$(F \circ h)' = (F' \circ h) \cdot h' = (f \circ h) \cdot h' = (f(h)) \cdot h'$$

Also folgt mit Hauptsatz 8.9:

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(s)\, ds = F|_{h(a)}^{h(b)} = (F \circ h)|_a^b = \int_a^b (F \circ h)'(x)\, dx = \int_a^b f(h(x))\, h'(x)\, dx$$

Für unbestimmte Integrale schreibt man $\int f(h(x))\, h'(x)\, dx = \int f(s)\, ds$ (aber natürlich dann auch Substitution der Integrationsgrenzen beachten!). □

Substitution **bedeutet**: Man verwendet $h'(x) = \dfrac{dh}{dx}$ und löst *formal* auf zu $dh = h'(x)\, dx$.

Beispiele:

- Gesucht sei $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{1+x}\, dx$:

  Wir setzen $h(x) = \sqrt{1+x}$, d.h. $x = h^2(x) - 1$ und somit $h'(x) = \dfrac{dh}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2h(x)}$ bzw. $dx = 2h(x)\, dh$. Also ist mit $\int h^r\, dh = \frac{1}{r+1} h^{r+1}$:

  $$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\, dx = \int_{\sqrt{1+0}}^{\sqrt{1+3}} (h^2-1)h\, 2h\, dh = 2\int_1^2 (h^4 - h^2)\, dh = \left(\frac{2}{5}h^5 - \frac{2}{3}h^3\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{15}$$

- Gesucht sei $\int_0^3 x^3 e^{x^4}\, dx$. Wir setzen $y = x^4$, $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$ d.h. $4x^3\, dx = dy$ Somit folgt $\displaystyle\int_0^3 x^3 e^{x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{3^4} e^y\, dy = \frac{1}{4}e^y\Big|_0^{81} = \frac{e^{81}-1}{4}.$
- Gesucht sei der Umfang eines Kreises mit Radius $r > 0$:

  Es genügt einen Viertelkreis zu betrachten: $f : [0,r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Die Länge der Kurve von f ist mit Exkurs 8.6 und Differenziation:

  $$\begin{aligned} L &= \int_0^r \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx = \int_0^r \sqrt{\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 + 1}\, dx \\ &= \int_0^r \sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \end{aligned}$$

Die Substitution $x = r\sin(y)$, $\dfrac{dx}{dy} = r\cos(y)$ ergibt

$$\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r^2\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\cos(y)}$$

und daher

$$L = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = r\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(y)}{\cos(y)}\,dy = r\pi/2.$$

Also ist der Umfang eines Kreises mit Radius r der bekannte Wert $2\pi r$.

- Gesucht sei $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$:

  Wir setzen $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$ und $\frac{dx}{dy} = e^y$. Also folgt mittels dieser Substitution

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{e^y}{e^y\,y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|) + c = \ln(|\ln(x)|) + c$$

Wir sammeln die **typischen und wichtigsten Substitutionen:**

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy, \quad y = x+c$$

$$\int_a^b f(xc)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,dy, \quad y = xc$$

$$\int_a^b f(x^n)x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} f(y)\,dy, \quad y = x^n$$

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \ln(|h(x)|) + c$$

$$\int e^{h(x)}\cdot h'(x)\,dx = e^{h(x)} + c$$

$$\int (h(x))^r\cdot h'(x)\,dx = \frac{1}{r+1}\,(h(x))^{r+1} + c \quad \text{für } r \neq -1$$

Integration rationaler Funktionen

Gesucht sei $\int r(x)\,dx$ für eine rationale Funktion $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$.
Polynomdivision und Partialbruchzerlegung führen auf ein Integral von Polynomen und Integrale der Form $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ mit $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q) \leq 2$ und Leitkoeffizient von q ist 1, d.h. $q(x) = x+\alpha$ oder $q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Es sind nur diese Fälle möglich:

1. $\mathrm{Grad}(q) = 1$: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{b}{x+a}$

2. $\mathrm{Grad}(q) = 2$, zwei reelle Nullstellen: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$
3. $\mathrm{Grad}(q) = 2$, doppelte reelle Nullstelle: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{cx+d}{(x-a)^2}$
4. $\mathrm{Grad}(q) = 2$, keine reelle Nullstelle: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{cx+d}{(x+a)^2+b^2}$

Fall 1.: Berechne $\displaystyle\int \frac{b}{x+a}\,dx$: Mittels $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ und Hauptsatz 8.9 kennen wir bereits $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$. Die Substitution $y = x + a$ ergibt also:

$$\int \frac{b}{x+a}\,dx = b\ln(|x+a|) + c$$

Fall 2.: Berechne $\displaystyle\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}\,dx$: Wir machen die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $A = \dfrac{d+ac}{a-b}, B = \dfrac{d+bc}{b-a}$ und somit (ohne Konstante $F + c$):

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx = \frac{d+ac}{a-b}\ln(|x-a|) + \frac{d+bc}{b-a}\ln(|x-b|)$$

Fall 3.: Berechne $\displaystyle\int \frac{cx+d}{(x-a)^2}\,dx$: Wir machen die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{cx+d}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} = \frac{Ax + (-Aa+B)}{(x-a)^2}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $A = c$ und $B = d + ca$ und daher (ohne Konstante $F + c$):

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)^2}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{(x-a)^2}\,dx = c\ln(|x-a|) - \frac{d+ca}{x-a}$$

Fall 4.: Berechne $\displaystyle\int \frac{cx+d}{(x+a)^2+b^2}\,dx$: Umformen mittels $\gamma = d - ca$ ergibt:

$$\frac{cx+d}{(x+a)^2+b^2} = \frac{c}{2}\frac{2x+2a}{(x+a)^2+b^2} + \frac{\gamma}{(x+a)^2+b^2}$$

Mit der Substitution $\displaystyle\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \ln(|h(x)|) + c$ und $((x+a)^2)' = 2(x+a)$ folgt (ohne Konstante $F + c$):

$$\frac{c}{2}\int \frac{2(x+a)}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{c}{2}\ln\left(|(x+a)^2+b^2|\right)$$

Mit $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ist auch $\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{ax}{b}\right)' = \frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}\frac{a}{b} = \frac{1}{a^2x^2+b^2}$.
Also ist mit Hauptsatz:

$$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{ax}{b}\right) + c$$

Substitution der hier verwendeten Konstanten ergibt:

$$\int \frac{\gamma}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{\gamma}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + c$$

Also ist insgesamt (ohne Konstante $F + c$):

$$\int \frac{cx+d}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{c}{2}\ln\left(|(x+a)^2+b^2|\right) + \frac{d-ca}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

Beispiele:

- Gesucht sei $\int \frac{2x+1}{4x^2+4x-8}\,dx$: Der Nenner ist $4x^2+4x-8 = 4(x-1)(x+2)$, also haben wir zwei reelle Nullstellen und Fall 2:

  $$\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{d+ac}{a-b}\ln(|x-a|) + \frac{d+bc}{b-a}\ln(|x-b|) + c$$

  Somit erhalten wir

  $$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+2}{3}\right)\ln(|x-1|) + \frac{1}{4}\left(\frac{1-4}{-3}\right)\ln(|x-(-2)|) + c \\ &= \frac{1}{4}\ln(|x-1|) + \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + c \\ &= \frac{1}{4}\ln(|x-1||x+2|) + c\end{aligned}$$

- Gesucht sei $\int \frac{5x^7+5x^3+2x}{x^2+1}\,dx$: Polynomdivision ergibt

  $$\frac{5x^7+5x^3+2x}{x^2+1} = 5x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{8x}{x^2+1}$$

  Die verbliebene rationale Funktion erfüllt Fall 4. Damit folgt

  $$\begin{aligned}\int \frac{5x^7+5x^3+2x}{x^2+1}\,dx &= \int (5x^5-5x^3+10x)\,dx - \int \frac{8x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{5}{6}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + 5x^2 - 4\ln(|x^2+1|) + c\end{aligned}$$

8.4 Uneigentliche Integrale

Integrale über unbeschränkten Intervallen führen zu der

Definition 8.14 (Uneigentliches Integral). *Seien $a < b \leq \infty$ und die Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \subset [a, b)$ integrierbar. Existiert zudem der Grenzwert*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$

*so heißt dieser **uneigentliches Integral** von f über $[a, b]$ (Das Integral **konvergiert**). Ansonsten **divergiert** es. Analog definiert man das **uneigentliche Integral** für $-\infty \leq a < b$.*
*Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < c < b \leq \infty$, so dass beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren, so existiert auch das **uneigentliche Integral** über (a, b):*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Es können also zwei Typen von uneigentlichen Integralen vorkommen:

- **Typ $\pm\infty$:** Es ist für ein $c \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ bzw. $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$
- **Typ Undefiniert:** Für eine Integrationsgrenze $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Integrand nicht definiert: f in $x = a$ und/oder $x = b$ unbeschränkt aber auf (a, b) stetig oder integrierbar.

Beispiele:

- Gesucht ist das Integral $\displaystyle\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx$ für $\alpha > 0$ und ein $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Mit den bekannten Integralen ist

$$\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \ln(b) - \ln(a) & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

  Das Integral konvergiert also nur für $\alpha > 1$ und dann ist:

$$\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \tag{8.4}$$

- Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-\alpha b} - e^{-\alpha a}}{\alpha}$$

  existiert nur wenn $\alpha > 0$.
  In diesem Fall ist

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha} \tag{8.5}$$

  Für $\alpha \leq 0$ ist das Integral divergent.

- Mit dem Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-\alpha x} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ und (8.3) ist für alle $a > 0$:

$$\int_a^\infty x^k e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b x^k e^{-\alpha x}\,dx = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\alpha x}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!}x^m\alpha^{-(k+1-m)}\right)\Bigg|_a^b$$

$$= e^{-\alpha a}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!}a^m\alpha^{-(k+1-m)} < \infty. \tag{8.6}$$

- Wegen Symmetrie ist für alle $a > 0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sin(x)\,dx = 0$.

  Also existiert der Grenzwert $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\sin(x)\,dx = 0$.

  Aber: Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\,dx$ existiert nicht da

  $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}(1-\cos(b))$ nicht existiert!

Exkurs 8.15 (Wichtige uneigentliche Integrale in der Mathematik).

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \textit{und daher} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Satz 8.16 (Absolutintegral). *Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent**, falls das **Absolutintegral** $\int_a^b |f(x)|\,dx$ existiert.*
Ein absolut konvergentes Integral ist auch konvergent (aber die Umkehrung gilt nicht!).

Beachte: Die Definition uneigentliches Integral und Absolutintegral sind analog zur Konvergenz einer Reihe und Absolutreihe.

Mittels Monotonie des Integrals und Dreiecksungleichung aus Satz 8.4 folgt:

Satz 8.17 (Majoranten/Minorantenkriterium Integral). *Gilt $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [a,b)$, $0 < a < b \le \infty$ und ist $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent, so ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.*
Insbesondere ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent für die möglichen Majoranten

$$|f(x)| \le \begin{cases} x^{-\alpha} & \textit{mit } \alpha > 1 \quad \text{mit} \quad \int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad (8.4) \\ e^{-\alpha x} & \textit{mit } \alpha > 0 \quad \text{mit} \quad \int_a^\infty e^{-\alpha x}\,dx = e^{-a\alpha}/\alpha \quad (8.5) \\ x^k e^{-\alpha x} & \textit{mit } \alpha > 0 \textit{ und } k \in \mathbb{N} \quad (8.6) \end{cases}$$

Gilt $f(x) \ge g(x) \ge 0$ und ist $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent, so ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent.

Beispiele:

- Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^x}\,dx$ ist konvergent, da $\left|\frac{\sin(x)}{e^x}\right| \leq e^{-x}$.
- Wir berechnen das uneigentliche Integral $\int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

  Mittels Symmetrie ist $\int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 2\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$. Substitution und Pythagoras ergeben

$$x = a\sin(y), \qquad \frac{dx}{dy} = a\cos(y) = a\sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{a^2-x^2}$$

  Also ist mit (8.2):

$$\int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2(y)\,dy = \frac{a^2\pi}{2}$$

Satz 8.18 (**Integralkriterium**). *Es sei* $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ *monoton fallend. Das uneigentliche Integral* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ *konvergiert.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt durch die Einschachtelung für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^\infty f(k).$$

$\square$

Satz 8.19 (**Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$**). *Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ *konvergiert nur für* $\alpha > 1$.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Integralkriteriuem 8.18, da $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ nur für $\alpha > 1$ konvergiert. Es gilt dann mittels (8.4) genauer $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha} \leq 1 + \int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. $\square$

Damit erhalten wir nun insbesondere die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Kapitel 9
Approximation

In diesem Kapitel betrachten wir verschiedene Approximationen in der Analysis, die sich an die Themen Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration anschließen.

9.1 Taylorpolynome

Wir haben die Ableitung einer Funktion als Approximation mittels einer linearen Funktion kennengelernt. Mit einem Polynom höheren Grades erreichen wir bessere Approximationen. Wir betrachten das allgemeine Problem:
Gegeben seien eine Funktion $f : D_F \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_f$. Gesucht ist ein Polynom T_n vom (gegebenen) Grad n so, dass T_n eine möglichst gute Approximation von f für alle x nahe bei x_0 liefert:

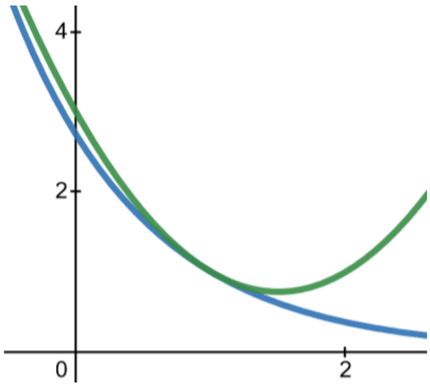

Abbildung 9.1: Skizze Idee: Taylorpolynom um $x_0 = 1$ für eine Funktion

Wir erinnern an höhere Ableitungen und die Menge der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen $C^n((a,b))$ in Definition 7.5.
Betrachten wir den einfachsten Fall $x_0 = 0$:
Dafür liefern die Polynome $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ diese Approximationen. Wir ermitteln die Koeffizienten durch die beste Approximation der Funktion mittels Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&T_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n &&\Rightarrow \quad T_n(0) = \alpha_0 = f(0)\\
&T_n'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} &&\Rightarrow \quad T_n'(0) = \alpha_1 = f'(0)\\
&T_n''(x) = 2\alpha_2 + 2\cdot 3\alpha_3 x + \cdots + n(n-1)\alpha_n x^{n-2} &&\Rightarrow \quad T_n''(0) = 2\alpha_2 = f''(0)\\
&\text{usw. bis} &&\\
&T_n^{(n)}(x) = n!\alpha_n x^0 &&\Rightarrow \quad T_n^{(n)}(0) = n!\alpha_n = f^{(n)}(0)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir allgemein:

Satz 9.1 (**Taylorpolynom**). *Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f in $x_0 \in D_f$ n-mal differenzierbar. Dann gibt es genau ein Polynom T_n vom Grad n mit*

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{für alle} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Dieses Polynom heißt ***Taylorpolynom n–ten Grades zu f*** *um den* ***Entwicklungspunkt*** *x_0. Wir sagen: Die Funktion f wird um den Punkt x_0* ***entwickelt****. Es gilt also*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Alternativ ist auch die Schreibweise (mit h klein) hilfreich:

$$T_n(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + \cdots + f^{(n)}(x)h^n/n!$$

Mittels Hauptsatz 8.9, Induktion und Mittelwertsatz für Integrale 8.7 folgt:

Satz 9.2 (**Taylor Restglied**). *Sei $f \in C^{n+1}((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für das Taylorpolynom und den Fehler, das* ***Restglied****:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

für ein geeignetes $\xi \in [x, x_0] \cup [x_0, x]$:

$$R_n(x) \quad = \quad \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - y)^n f^{(n+1)}(y)\, dy \quad = \quad \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Die zweite Formel ohne Integral ist die ***Restgliedformel von Lagrange****.*

- Der Mittelwertsatz 7.8 ist ein Spezialfall von Satz 9.1 für $n = 0$:

$$f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

- Für $n = 1$ ist das Taylorpolynom die *Linearisierung* von f in x_0. Es gilt

$$f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

  Hierbei ist T_1 die Tangente an f in x_0.

- Für $n = 2$ haben wir die *quadratische Approximation* von f in x_0

$$f(x) \approx T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

- Mittels Landau-Notation (Definition 4.12 bzw. 6.6) können wir für $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ auch schreiben:

$$f(x) = T_n(x) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^{n+1}\right) \qquad \text{für} \quad x \to x_0$$

- Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ eine Potenzreihe, so sind die Partialsummen die Taylorpolynome etwickelt um $x_0 = 0$: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$.

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ entwickelt um $x_0 = 0$ ergibt mit den einfachen Ableitungen $f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x), \ldots$ das Taylorpolynom:

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{9.1}$$

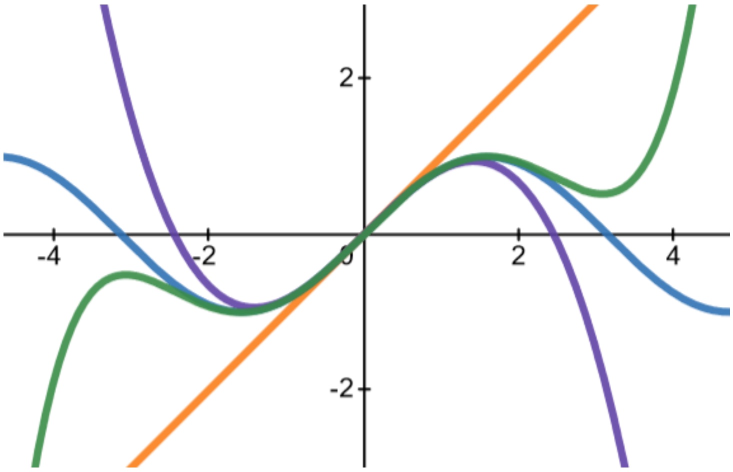

Abbildung 9.2: Taylorpolynome T_1, T_3, T_5 von $f(x) = \sin(x)$ in $x_0 = 0$

Mit den Ableitungen $f^{(2n)}(0) = \pm\sin(0) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auch $T_{2n+1} = T_{2(n+1)}$.

Das Restglied ist mit Satz 9.2 hier $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Für das Intervall $[-\pi/4, \pi/4]$ erhalten wir mit $|\cos(x)| \leq 1$ daher

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{(\pi/4)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{9.2}$$

Ist nun eine Approximation von f auf dem Intervall $[-\pi/4, \pi/4]$ bis auf 2 Nachkommastellen gefragt, so erhalten wir mit obiger Abschätzung des Restglieds und somit des Fehlers auf diesem Intervall das gesuchte Taylorpolynom: Unter Verwendung der Rechnungen $(\pi/4)^4/4! \approx 0.016$ und $(\pi/4)^5/5! \approx 0.0025$ genügt das Taylorpolynom (siehe Abbildung 9.2)

$$T_5(x) = x - x^3/3! + x^5/5! \qquad \Rightarrow \sup_{x\in[-\pi/4,\pi/4]} |\sin(x) - T_5(x)| \leq 0.0025 < 0.01$$

- Betrachten wir $f(x) = e^{1+x^2}$ und entwickeln um $x_0 = 1$ in dem Intervall $[0, 2]$, so ist

$$f(1) = e^2,\ f'(1) = 2e^2,\ f''(1) = 6e^2,\ f'''(x) = e^{1+x^2}(8x^2 + 12)x$$

Also folgt das Taylorpolynom

$$T_2(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{6e^2}{2}(x-1)^2$$

mit dem Restglied

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{1}{6}e^{1+\xi^2}(8\xi^2+12)\xi(x-1)^3.$$

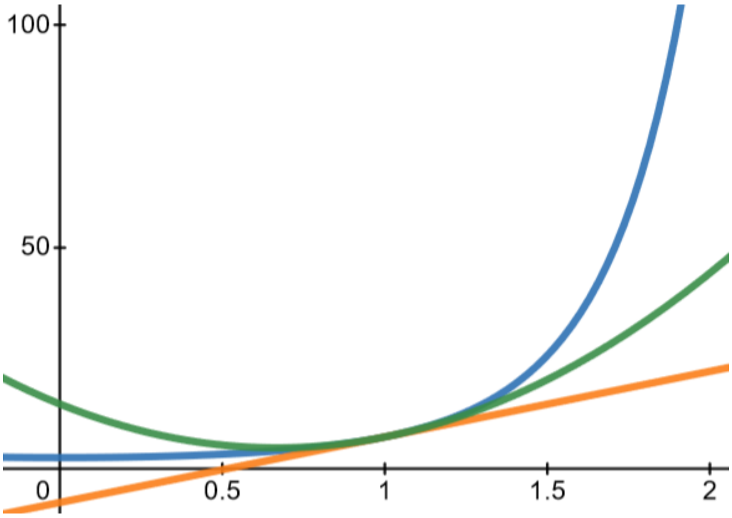

Abbildung 9.3: Taylorpolynome T_1 und T_2 von $f(x) = e^{1+x^2}$ in $x_0 = 1$

Somit ist für $x \in [0,2]$ die (hier sehr ungenaue) Approximation

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_2(x)| \leq \frac{1}{6}e^5 \cdot (8 \cdot 4 + 12)2 = \frac{88}{6}e^5 \approx 2176.7$$

Tatsächlich ist aber der wahre Fehler oftmals viel kleiner wie beispielsweise

$$|f(2) - T_2(2)| \approx 104.1$$

- Wir betrachten $f(x) = x\cos(x) - e^{2x}\sin(x)$ und suchen das Taylorpolynom T_2 entwickelt in $x_0 = 0$:

  Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - x\sin(x) - 2e^{2x}\sin(x) - e^{2x}\cos(x) = \cos(x)\left(1-e^{2x}\right) - \sin(x)\left(x+2e^{2x}\right) \\ f''(x) &= -\sin(x)(1-e^{2x}) - 2\cos(x)e^{2x} - \cos(x)(x+2e^{2x}) - \sin(x)(1+4e^{2x}) \\ &= -\cos(x)(x+4e^{2x}) - \sin(x)(2+3e^{2x}) \end{aligned}$$

  Für die Koeffizienten des Taylorpolynoms benötigen wir

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -4$$

  Also ist das gesuchte Taylorpolynom von f entwickelt in $x_0 = 0$:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = -2x^2$$

Satz 9.3 (Taylorreihe). *Ist $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$, so heißt*

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

*die **Taylorreihe** von f um den Entwicklungspunkt x_0.*
Die Taylorreihe konvergiert im Entwicklungspunkt und hat dort den Wert $f(x_0)$.
Die Partialsummen der Taylorreihe sind die Taylorpolynome.
Konvergiert die Taylorreihe in einer Umgebung von x_0 und gilt dort auch $T(x) = f(x)$, so heißt f um x_0 in seine Taylorreihe entwickelbar. Somit stellt die Taylorreihe die Funktion f in x dar, falls das Restglied im Limes verschwindet: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Beispiele:

- Für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2-2(x-1)^2}$ haben wir mittels geometrischer Reihe für alle $|x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in (0,2)$:

  $$f(x) = \frac{1}{2-2(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(x-1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}$$

  Die ersten Ableitungen sind (z.B. Quotientenregel):

  $$f'(x) = \frac{x-1}{(1-(x-1)^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{3x^2-6x+4}{(-x^2+2x)^3}$$

  Dies ergibt $f(1) = 1/2,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = 1$ und die Taylorreihe von f um $x_0 = 1$ entspricht der obigen geometrischen Reihe:

  $$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 1/2 + 0 + 1/2(x-1)^2 + \cdots$$

  Für $x \in (0,2)$ konvergiert die Taylorreihe und stellt die Funktion f dar.

  Für $|x-1| \geq 1$ divergiert die Taylorreihe.

- Wir haben in (9.1) bereits die Taylorpolynome von $f(x) = \sin(x)$ entwickelt in $x_0 = 0$ erhalten. Da für das Restglied die globale Abschätzung (9.2) gilt, erhalten wir für jedes abgeschlossene Intervall mit $c > 0$ den Limes

  $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-c,c]} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

  Somit erhalten wir die Potenzreihe des Sinus als Taylorreihe entwickelt in $x_0 = 0$:

  $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

  die (bekanntlich) überall auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $C^\infty(\mathbb{R})$ und besitzt in $x_0 = 0$ die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k \equiv 0 \neq f(x)$. Die Bestimmung von $f^{(n)}(0), n \in \mathbb{N}$ erfolgt beispielsweise mit den Werkzeugen aus dem folgenden Abschnitt 9.2.

  Somit stellt hier die Taylorreihe für alle $x \neq 0$ nicht die Funktion dar!

  Dies ist ein extremes Beispiel. Für gewöhlich gilt: Konvergiert die Taylorreihe von f in x, so stimmt sie auch mit $f(x)$ überein.

9.2 Regeln von L'Hospital

In diesem Abschnitt geht es um die Umformung von Grenzwerten vom Typ $0/0$, die nicht definiert sind.

Satz 9.4 (Regeln von l'Hospital). *Seien $f, g \in C^r((a,b))$ für ein $r \geq 1$.*

- *Verschwinden in $x_0 \in (a,b)$ alle Ableitungen von f und g bis $r-1$,*

  d.h. $0 = f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(r-1)}(x_0)$ sowie $0 = g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(r-1)}(x_0)$

  und gilt $g^{(r)}(x_0) \neq 0$, dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(r)}(x)}{g^{(r)}(x)} = \frac{f^{(r)}(x_0)}{g^{(r)}(x_0)}$$

- *Gilt für $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $= \pm\infty$, dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In beiden obigen Aussagen ist die linke Seite durch die rechte Seite definiert nur sofern die rechte Seite existiert!

Z.B. mittels $f/g = (1/g)/(1/f)$ können auch undefinierte Grenzwerte vom Typ ∞/∞ untersucht werden. Analog können auch Grenzwerte vom Typ $0 \cdot \infty$ oder $\infty - \infty$ mittels Umformungen auf obige Regeln zurückgeführt werden.

Beweis. Wir betrachten nur den ersten Fall. Nach dem Satz über das Taylorpolynom und das Restglied 9.2 haben wir für die Entwicklung in x_0:

$$f(x) = \frac{f^{(r)}(\xi_f)}{r!}(x - x_0)^r, \quad g(x) = \frac{g^{(r)}(\xi_g)}{r!}(x - x_0)^r$$

für passende $\xi_f, \xi_g \in [x, x_0] \cup [x_0, x]$. Insbesondere ist wegen $x \to x_0 \Rightarrow \xi_f, \xi_g \to x_0$ also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(r)}(\xi_f)}{f^{(r)}(\xi_g)} = \frac{f^{(r)}(x_0)}{g^{(r)}(x_0)}$$

□

Beispiele:

- Es ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x\pi/2)}{x-x^2}$ nicht definiert (vom Typ $0/0$). Mit l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x\pi/2)}{x-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(\cos(x\pi/2))'}{(x-x^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{-(\pi/2)\sin(x\pi/2)}{1-2x} = \frac{-\pi/2}{-1} = \pi/2$$

- Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ nicht definiert (vom Typ $0/0$). Mit l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

- Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ nicht definiert (vom Typ ∞/∞). Mit l'Hospital ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- Zuweilen benötigt man höhere Ableitungen, da der Grenzwert der ersten Ableitungen noch immer nicht definiert ist: Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2}{\sin(x^2)}$ nicht definiert (vom Typ $0/0$). Mit l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-4x}{2x\cos(x^2)} \quad \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{6x-4}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

- Es ist $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2)}{x^{-2}}$ nicht definiert (vom Typ $0\cdot\infty$ bzw. letztlich ∞/∞). Mit l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

- **Beachte:** Der Grenzwert von f'/g' kann auch nicht existieren, obwohl der Grenzwert von f/g existiert! Im Satz 9.4 ist wichtig, dass die linke Seite nur bei Vorhandensein der rechten Seite durch letztes definiert wird!

  Beispielsweise ist wegen $|x\sin(1/x)| \le |x|$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{x} = 0$$

  aber es ist mit der Divergenz von $\cos(1/x)$ für $x\to 0$ auch dies divergent:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{1} = 2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$$

9.3 Numerische Verfahren für nichtlineare Gleichungen

Wir haben bereits einige numerische Verfahren kennengelernt:

- Folge, die für $0 < a < b$ gegen das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ konvergiert (Beispiel nach Satz über monotone Konvergenz 4.7)
- Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen) 4.8
- **Bisektionsverfahren** (Bemerkung 6.9) (aus Beweis von Zwischenwertsatz 6.7)

In diesem Abschnitt wollen wir noch zwei weitere Verfahren betrachten, um die Nullstellen von nichtlinearen Gleichungen zu approximieren:

Fixpunktsätze

Satz 9.5 (Fixpunkt stetige Abbildung). *Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann existiert mindestens ein **Fixpunkt** von f in $[a, b]$, d.h. ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.*

Beweis. Die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$ erfüllt $g(a) = f(a) - a \geq 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq 0$, also existiert nach dem Zwischenwertsatz 6.7 mindestens eine Nullstelle von g, d.h. ein Fixpunkt von f in $[a, b]$. $\square$

Beispiele:

- $\sin : [0, \pi] \to [0, \pi]$ ist stetig und somit existiert ein Fixpunkt $\xi = \sin(\xi) \in [0, \pi]$
- $f : [0, 2] \to [0, 2],\ x \mapsto 2^{-x}$ ist stetig und somit gibt es einen Fixpunkt $\xi = 2^{-\xi} \in [0, 2]$
- Die Gleichung
$$e^x \cos(x) = 2x(x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) := e^x \cos(x)/(2(x + 1)) = x$$
besitzt wegen $\cos(x) \geq 0$ für $x \in [0, \pi/2]$ und $f(0) = 1/2$ sowie $f(\pi/2) = 0$ und der Stetigkeit (Stetigkeitsregeln, Quotient) eine Lösung.

Exkurs 9.6 (Logistische Abbildung - Chaos). *Sei $r \in (0, 4)$ fest und die stetige Funktion*
$$f : [0, 1] \to [0, 1],\ x \mapsto rx(1 - x).$$
Dann existiert nach Fixpunktsatz 9.5 mindestens einen Fixpunkt in $(0, 1)$ (0 ist stets ein Fixpunkt). Die Funktion f ist eine nach unten geöffnete Parabel und hat daher genau einen Fixpunkt in $(0, 1)$. Für verschiedene Parameter r ist der Fixpunkt anziehend oder abstoßend:
Für $r < 3$ ist der Fixpunkt anziehend. Für Werte $r > 3$ entstehen immer weitere periodische Bahnen der ganzen Abbildung $f : [0, 1] \to [0, 1]$ und der Fixpunkt ist abstoßend. Ab $r > 3.57$ ist das Verhalten sehr irregulär (ein chaotisches dynamisches System)*, siehe Abbildung 9.4:*

Definition 9.7 (Lipschitzstetigkeit und Kontraktion). *Die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt **lipschitzstetig**, falls eine **Lipschitz-Konstante** $L \in \mathbb{R}^{>0}$ existiert mit*
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D_f$$
*Gilt $L < 1$, so heißt f **Kontraktion** und $L \in (0, 1)$ die **Kontraktionskonstante**.*

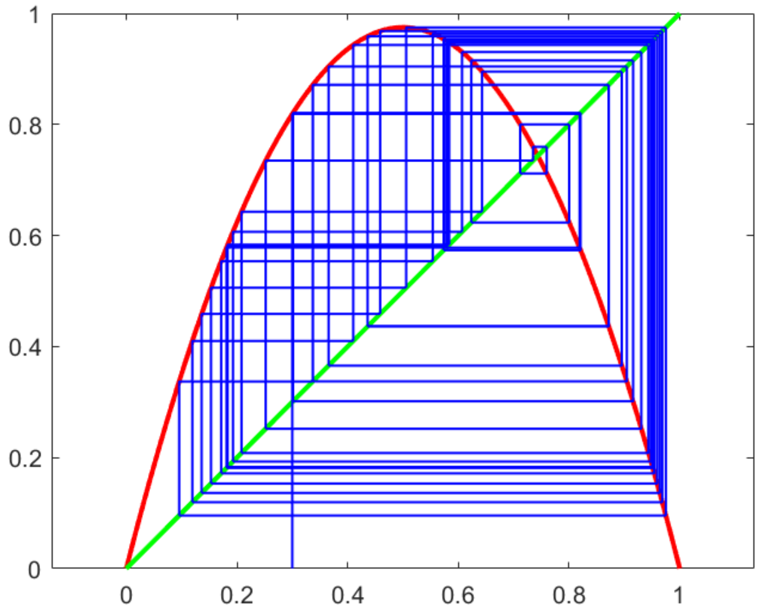

Abbildung 9.4: 50 Iterationen der Abbildung $f(x) = (3.9)x(1-x)$ für Startwert $x_0 = 0.3$

- Lipschitzstetigkeit impliziert Stetigkeit: Sei f lipschitzstetig mit $L > 0$, so ist für alle $x_n \to x$ auch
$$|f(x_n) - f(x)| \leq L|x_n - x| \to 0 \quad \Rightarrow f \text{ stetig in } x$$
- $f(x) = (x-1)/4$ ist auf $[0,1]$ Kontraktion mit $L = 1/4$.
- $f(x) = e^x$ ist auf $[-1,1]$ lipschitzstetig mit $L = e$.
- $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ stetig aber nicht lipschitzstetig, da $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ nicht definiert.
- Für eine Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ mit $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq L < 1$ erhalten wir mit Mittelwertsatz 7.8 stets eine Kontraktion:
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)||(x-y)| \leq L|x-y|$$

Satz 9.8 (**Fixpunktsatz für Kontraktion**). *Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a,b] \to [a,b]$ eine **Kontraktion** mit Kontraktionskonstante L. Dann besitzt f **genau einen Fixpunkt** $x^* \in [a,b]$ und die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ **konvergiert** für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ gegen x^*. Zudem gilt die a priori Abschätzung*
$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_0 - x_1|.$$

Bemerkung 9.9 (**Algorithmus Fixpunktiteration**). *Approximationsverfahren für Fixpunkt $f(x^*) = x^*$ einer Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ mit einer Genauigkeit $\varepsilon > 0$:*

Algorithm 2 Fixpunktiteration

Set $x = x_0$ (Startwert)
while $|x - f(x)| \geq \varepsilon$ **do**
  Set $x = f(x)$
end while (es ist nun $|x - f(x)| < \varepsilon$)

Beispiele:

- Die Gleichung
$$\sin(x^2/3 + 1) = x$$
besitzt in $[0,1]$ genau eine Lösung: denn für $f(x) = \sin(x^2/3+1)$ gilt auf $[0,1]$:
$$0 \leq x \leq 1 \ \Rightarrow 1 \leq x^2/3+1 \leq 4/3+1 < \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$
Zudem ist $f'(x) = \cos(x^2/3+1) \cdot 2x/3 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq 2/3$. Also ist mit Mittelwertsatz auch die Kontraktion
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq (2/3)|x-y|$$
Nach dem Fixpunktsatz für Kontraktion 9.8 existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in [0,1]$ mit $f(x^*) = x^*$. Wir bestimmen mit dem Startwert $x_0 = 1/2$ die ersten Iterationen $x_{n+1} = f(x_n)$:
$$x_0 = 1/2, \quad x_1 \approx 0.88352, \qquad x_2 \approx 0.95215, \quad x_3 \approx 0.96414, \quad x_4 \approx 0.96615$$
Mittels der a priori Abschätzung können wir nun gar ermitteln, nach wievielen Iterationen spätestens der Approximationsfehler höchstens 10^{-8} ist:
$$\frac{(2/3)^k}{1-2/3}|x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} 10^{-8} \ \Leftrightarrow \ (2/3)^k \leq 10^{-8}/(3\cdot|x_1 - x_0|) \approx 8.6913\cdot 10^{-9} \ \Rightarrow k \geq 45.78$$

- Die Logistische Abbildung $f(x) = rx(1-x)$ aus Exkurs 9.6 ist wegen
$$f'(x) = (rx(1-x))' = r - 2rx = r(1-2x)$$
nur für $r \in (0,1)$ eine Kontraktion auf $[0,1]$. Für $r \geq 1$ kann man allerdings f einschränken. Beispielsweise ist für $r = 2.5$ wegen
$$(2.5)|1-2x| \leq 0.9 \ \Leftrightarrow \ 5|1/2 - x| \leq 9/10 \ \Leftrightarrow \ |1/2 - x| \leq 9/50 = 0.18$$
die logistische Abbildung
$$f : [0.32, 0.68] \to [0.32, 0.68], \quad x \mapsto (2.5)x(1-x) \quad \text{mit } f(0.32) = f(0.68) = 0.544$$
eine Kontraktion und die eindeutige Lösung der Fixpunktsgleichung $(2.5)x(1-x) = x$ kann mittels Satz 9.8 approximiert werden. Für den Startwert $x_0 = 0.5$ erhalten wir die ersten Iterationen $x_{n+1} = f(x_n)$:
$$x_1 = 0.625, \quad x_2 \approx 0.58593, \quad x_3 \approx 0.60654, \quad x_4 \approx 0.59662$$

Newton-Verfahren

Beim Newton-Verfahren wird zur Bestimmung einer Nullstelle einer nichtlinearen differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die lineare Approximation (d.h. das Taylorpolynom ersten Grades) bezüglich der gesuchten Nullstelle x_0 verwendet: Also bestimmt man anstatt $f(x) = 0$ die Lösung von

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

Da die Nullstelle x_0 unbekannt ist und wir mit dem Taylorpolynom einen Fehler machen (Restglied in Satz 9.2), wird dieses Verfahren iteriert - man erhält eine Folge von Approximationen:

Satz 9.10 (Konvergenz Newton-Verfahren). *Sei $f \in C^2([a, b])$ mit genau einer Nullstelle $f(x^*) = 0$ in $[a, b]$ konvex oder konkav, sowie $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$, so dass die untere Iteration für beide Startwerte $x_0 = a$ und $x_0 = b$ in $[a, b]$ liegt.*
Dann konvergiert für jeden Startwert x_0 die rekursive Folge des ***Newton-Verfahrens***

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{9.3}$$

gegen die eindeutige Nullstelle x^*.

Bemerkung 9.11 (Algorithmus Newton-Verfahren). *Approximationsverfahren für Nullstelle $f(x^*) = 0$ einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (die Voraussetzungen in Satz 9.10 erfüllt) mit einer Genauigkeit $\varepsilon > 0$:*

Algorithm 3 Newton-Verfahren

Set $x = x_0$ (Startwert)
while $|f(x)| \geq \varepsilon$ **do**
  Set $x = x - f(x)/f'(x)$
end while (es ist nun $|f(x)| < \varepsilon$)

Exkurs 9.12 (Quadratische Konvergenz). *Zudem existiert eine Konstante $c > 0$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die (quadratische) Konvergenz $|x^* - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|^2$ vorliegt.*

Beispiele:

- Gesucht ist die Nullstelle der Funktion

  $$f(x) = (x - 1)e^{-x} + 1/2$$

  auf dem Intervall $[0, 1/2]$. Wegen der strengen Monotonie und Vorzeichenwechsel

  $$f'(x) = (2 - x)e^{-x}, \quad f(0) = -1/2, \qquad f(1/2) = (1 - e^{-1/2})/2 > 0$$

  und Zwischenwertsatz 6.7, hat f genau eine Nullstelle in dem Intervall $[0, 1/2]$. Klar ist $f \in C^2([0, 1/2])$ mit

  $$f''(x) = -e^{-x} - (2 - x)e^{-x} = (x - 3)e^{-x}$$

  Also ist wegen $f'' < 0$ auf $[0, 1/2]$ die Funktion f nach Kriterium Konvex/konkav durch f'' (Satz 7.12) streng konkav. Zudem ist für das Newton-Verfahren für die Startwerte 0 oder $1/2$:

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 1/4, \qquad x_1 = 1/2 - \frac{f(1/2)}{f'(1/2)} = 0.5 - \frac{(1-e^{-1/2})/2}{(2-1/2)e^{-1/2}} \approx 0.28$$

Somit sind die Voraussetzungen für die Konvergenz des Newton-Verfahrens erfüllt und wir erhalten für den Startwert $x_0 = 0$ die Approximationen:

$$x_1 = 1/4, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.3117, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.3149$$

Wir untersuchen die Approximation der Lösung der Gleichung

$$\cos(x) = x^2$$

in $\mathbb{R}^{>0}$ bis auf einen Fehler $\varepsilon = 10^{-6}$ mit den drei obigen Verfahren:

- **Bisektionsverfahren**
- **Fixpunktsätze**
- **Newton-Verfahren**

Wir benötigen zuerst das zugehörige Problem einer Nullstelle und eine Fixpunktgleichung:

$$\cos(x) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := \cos(x) - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) := \cos(x)/x = x$$

Bisektionsverfahren:
Wir prüfen die notwendigen Bedingungen für eine Nullstelle: g ist stetig (Stetigkeitsregeln) mit

$$g(0) = 1, \quad g(\pi/2) = 0 - (\pi/2)^2 < 0$$

Also existiert nach dem Zwischenwert 6.7 mindestens eine Nullstelle von g im Intervall $[0, \pi/2]$. Zudem ist mit

$$g'(x) = -\sin(x) - 2x = -(\sin(x) + 2x), \quad g'(x) < 0 \text{ für } x \in (0, \pi/2]$$

und Satz über Monotonie mittels f' 7.9 die Funktion g auf $(0, \pi/2)$ streng monoton steigend. Also kann höchstens eine Nullstelle vorliegen. Das Bisektionsverfahren (Algorithmus 1) mit dem Startintervall $[0, \pi/2]$ liefert nach 21 Iterationen die Approximation der Nullstelle

$$[\mathbf{0.82413}193\ ,\ \mathbf{0.82413}268]$$

Fixpunktsätze:
Wir prüfen zuerst die Voraussetzungen vom einfacheren Fixpunktsatz 9.5: $f(x) = \cos(x)/x$ ist beispielsweise wegen $f(0.6) = (0.6)\cos(0.6) \approx 1.37 > 1$ und $f(\pi/2) = 0$ und wegen der strengen Monotonie (Quotientenregel)

$$f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{x}\right)' = \frac{-\sin(x)x - \cos(x)}{x^2} = -\frac{\cos(x) + \sin(x)x}{x^2} < 0 \quad \text{für } x \in [1/2, \pi/2]$$

eine stetige Abbildung $f : [0.6, \pi/2] \to [0.6, \pi/2]$, siehe Abbildung 9.5:
Somit besitzt diese Funktion nach dem Fixpunktsatz 9.5 und aufgrund der strengen Monotonie einen einzigen Fixpunkt.
Können wir den Fixpunktsatz für Kontraktion 9.8 zur Approximation verwenden? Jedoch ist hier bereits die streng monoton fallende Ableitung f' mit

$$f'(1) = -\cos(1) - \sin(1) \approx -1.38$$

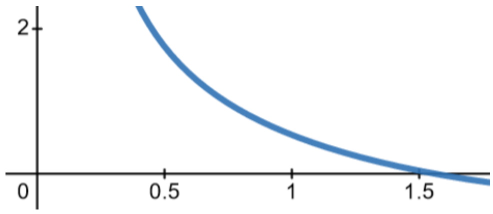

Abbildung 9.5: $f(x) = \cos(x)/x$ im Intervall $[0.6, \pi/2]$

und wir werden mit dem Mittelwertsatz keine Kontraktion auf dem Intervall $[0.6, \pi/2]$ zeigen können und auch kein kleineres Intervall auswählen können, wo das gelingen könnte. Also können wir hier den Fixpunktsatz für Kontraktion nicht verwenden.

Newton-Verfahren:

Wir kehren wieder zur Funktion g zurück mit $g'(x) = -(\sin(x) + 2x) < 0$. Es ist

$$g''(x) = -(\cos(x) + 2) < 0 \quad \text{für alle } x \in [0, \pi/2]$$

und Satz Konvex/Konkav durch f'' 7.12 ergibt, dass g konkav ist. Das Newton-Verfahren $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ und Satz 9.10 ist also anwendbar. Die Iteration mit Startwert $x_0 = 1$ ergibt nach bereits $n = 3$ Schritten die Approximation $x_3 = \mathbf{0.824132}319$.

Für die Lösung einer Gleichung bzw. Fixpunktgleichung

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) := g(x) + x = x$$

- Das **Bisektionsverfahren** ist für jede stetige Funktion g anwendbar, die auf dem Intervall $[a, b]$ einen Vorzeichenwechsel besitzt. Ist die Nullstelle eindeutig, dann konvergiert das Bisektionsverfahren gegen diese Nullstelle (Zwischenwertsatz 6.7).
- Der **Fixpunktsatz für Kontraktion** ist für jede Kontraktion $f : [a, b] \to [a, b]$ anwendbar und dann konvergiert die **Fixpunktiteration** gegen den eindeutigen Fixpunkt $f(x^*) = x^*$ in $[a, b]$.
- Liegt eine stetige Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ vor, die keine **Kontraktion** ist, garantiert der **Fixpunktsatz** 9.5 mindestens einen Fixpunkt.
- Das **Newton-Verfahren** ist für jede Funktion $g \in C^2([a, b])$ anwendbar, die zudem die Voraussetzungen in Satz 9.10 erfüllt. Dann konvergiert die rekursive Folge (9.3) gegen die eindeutige Nullstelle von g. Das Newton-Verfahren konvergiert am schnellsten.

9.4 Numerische Integration

Falls die Bestimmung einer Stammfunktion zu aufwendig oder nicht möglich ist, integriert man **numerisch**. Hierbei wird das bestimmte Integral durch Rechtecksummen aproximiert (vergleiche Definition 8.3). Es gibt allerdings auch verbessere Verfahren, beispielsweise mittels **Trapezen** anstatt **Rechtecken**:

Definition 9.13 (Mittelpunktsregel, Trapezregel). *Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, setzen die* ***Schrittweite*** $h := \frac{b-a}{n}$ *und verwenden* ***äquidistante Knoten*** $x_i = a + ih$ *mit* $i = 0 \dots n$*. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Approximation dieser Integrale durch Rechtecke mit Höhe des Mittelpunktes

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

ergibt die ***Mittelpunktsregel****:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \approx \quad M_n(f) := \sum_{i=1}^n h \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

Approximation der Integrale durch den Trapezinhalt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h \cdot \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

ergibt die ***Trapezregel****:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \approx \quad T_n(f) := \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Für genügend glatte Funktionen kann man mittels Hauptsatz 8.9 und Mittelwertsatz für Integrale 8.7 Formeln für die Approximationsfehler angeben:

Satz 9.14 (Approximationsfehler numerische Integration). *Sei $f \in C^2([a,b])$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeweils ein geeignetes $\xi \in [a,b]$:*

- *Für die Mittelpunktsregel ist* $\int_a^b f(x)\,dx = M_n(f) + R_n^M(f)$ *mit* $R_n^M(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$
- *Für die Trapezregel ist* $\int_a^b f(x)\,dx = T_n(f) + R_n^T(f)$ *mit* $R_n^T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$

Beispiel:

Gesucht ist $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$. Wir wissen natürlich $\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)|_0^\pi = 2\ (= 1.999\dots)$.
Mit der Mittelpunktsregel erhalten wir hier für $f(x) = \sin(x)$ beispielsweise

$$M_{10}(f) = 2.00824841, \quad M_{100}(f) = 2.00008225, \quad M_{1000}(f) = 2.00000082$$

Mit der Trapezregel erhalten wir:

$$T_{10}(f) = 1.98352354, \quad T_{100}(f) = 1.99983550, \quad T_{1000}(f) = 1.99999835$$

Es gibt noch diverse weitere numerische Verfahren. Die nächste Verbesserung besteht darin, Polynome höherer Grade zur Approximation der Funktion auf den einzelnen Intervallen zu verwenden.

Generell gilt für numerische Integrationsverfahren:

- Leicht implementierbar
- Integration in mathematischer Software basiert auf solchen Quadraturverfahren

Kapitel 10
Analysis im $\mathbb{R}^n$

Alle Begriffe der Analysis wie Stetigkeit, Differenziation, Integration, lassen sich auch für mehrdimensionale Funktion einführen. Wir betrachten hier nur die ersten beiden. Zuerst führen wir häufige Bezeichnungen für mehrdimensionale Funktionen ein.

10.1 Funktionen im $\mathbb{R}^n$

Definition 10.1 (**Kurve, Skalarfeld, Vektorfeld**)**.** *Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$, so ist eine (mehrdimensionale) Funktion*

$$f : D_f \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))^T = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix},$$

die jedem Vektor $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ zuordnet.
Die Funktion f besteht aus n skalarwertigen Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.
Oft schreibt man $f(x) \in \mathbb{R}^m$ auch als Zeilenvektor $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
Genauer gelten die folgenden Bezeichnungen: Für

*$m = 1$ heißt die Funktion auch **Kurve**,*

*$m = 1$ und $D_f = [a, b]$ heißt die Funktion durch $[a, b]$ **parametrisierte Kurve**,*

*$n = 1$ nennt man die Funktion skalarwertig oder **Skalarfeld**,*

$n > 1$ heißt die Funktion vektorwertig,

*$m = n > 1$ heißt die Funktion **Vektorfeld**.*

*Die Menge $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} : \ x \in D_f, \ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ heißt **Graph** von f.*

Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann auch als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretiert werden.

Beispiele:

- Die Kurve
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$$
beschreibt den **Einheitskreis** in der Ebene (d.h. Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1).
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist der k-fach durchlaufene Kreis um $c \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$ gegeben durch
$$\gamma : [0, 2\pi k] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = c + r(\cos(t), \sin(t))^T$$

- Die **Logarithmische Spirale**, siehe Abbildung 10.1, ist in Polarkoordinaten für $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$r : [0, T] \to \mathbb{R}, \qquad r(\varphi) = ae^{b\varphi}$$

In kartesischen Koordinaten ist die Kurve mittels Definition 2.7 und $t = \varphi$:

$$r : [0, T] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(t) = (a\cos(t), a\sin(bt))$$

Die logarithmische Spirale findet sich häufig in der Natur (z.B. Galaxien, Sturmwirbel, Schneckenschalen).

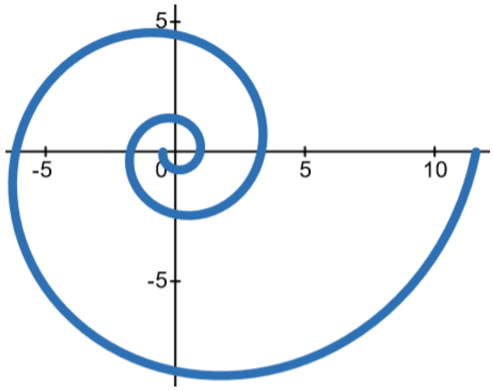

Abbildung 10.1: Beispiel logarithmische Spirale $r : [0, 5\pi],\ r(\varphi) = -e^{\varphi/5}/2$

- Beispiele für Skalarfelder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Abbildung 10.2

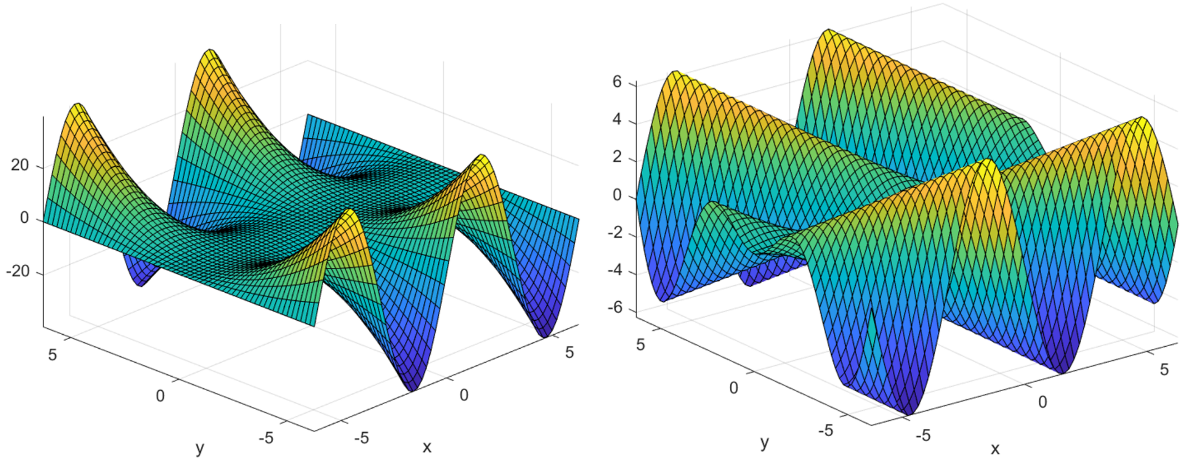

Abbildung 10.2: Beispiele Skalarfelder $f(x, y) = \sin(x)y^2$ und $f(x, y) = \sin(x + y)y$

- Beispiele für Kurven

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \left(e^{-t/(3\pi)}\cos(t), e^{-t/(3\pi)}\sin(t), t/(10\pi)\right)^T$$

in Abbildung 10.3.

- Beispiele für Vektorfelder

$$f(x, y) = (xy, 3x)^T \quad \text{und} \quad f(x, y, z) = (1 + y, 2x, xyz + 1/2)^T$$

in Abbildung 10.4.

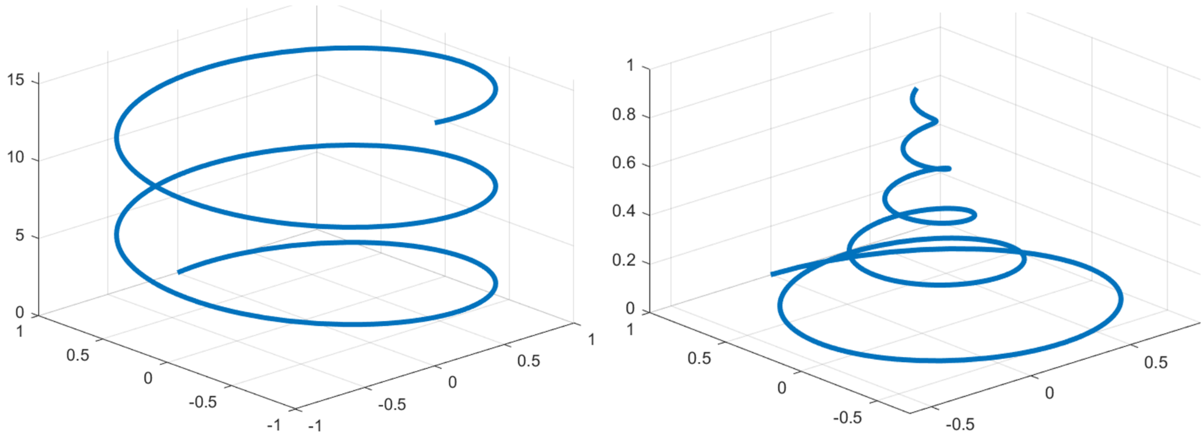

Abbildung 10.3: Beispiele Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

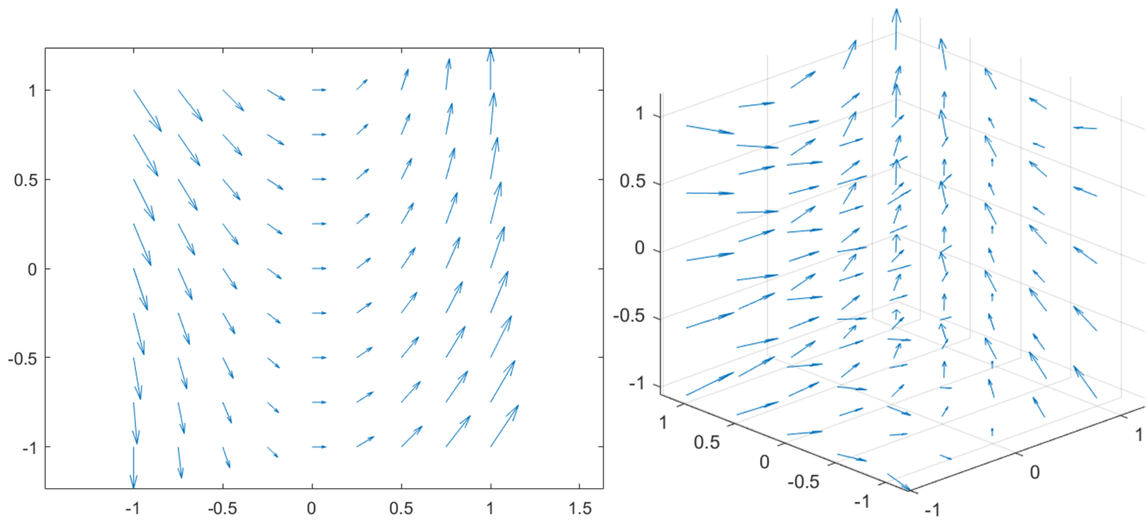

Abbildung 10.4: Beispiele Vektorfelder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

10.2 Konvergenz und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Im $\mathbb{R}^n$ verwenden wir statt dem Betrag einen **Abstand von Vektoren**. Der häufigste Abstand ist die bekannte **euklidische Norm** (für $x \in \mathbb{R}^n$):

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Diese erfüllt wie der Betrag auf $\mathbb{R}$ die Eigenschaften einer **Norm**:

- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$
- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|$
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(Dreiecksungleichung)**

Für $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben wir all diese Eigenschaften gezeigt und es gilt die Abschätzung für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $|x_i| \leq \|x\|$.
Analog zu Definition 4.2 haben wir nun im $\mathbb{R}^n$:

Definition 10.2 (**Konvergenz in $\mathbb{R}^n$**). *Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt* ***konvergent****, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m \geq N$:*

$$\|a_m - a\| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der ***Grenzwert (Limes)*** *der Folge (a_k). Die Folge heißt* ***kovergent gegen*** *a, und wir schreiben*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_k \to a \quad (\text{für } k \to \infty).$$

Satz 10.3 (**Konvergenz mehrdimensional ⇔ eindimensional**). *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn alle Komponentenfolgen $(x_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, konvergieren. Genauer gilt die Äquivalenz:*

$$x_k \to x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \; : \; x_k^{(i)} \to x^{(i)}$$

Beweis. $\Rightarrow$: Folgt aus Definition Konvergenz und $|x_k^{(i)}| \leq \|x_k\|$ für alle $i \leq n$.
$\Leftarrow$: Folgt aus Limesregeln und Stetigkeit von $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \sqrt{x}$. □

Beispiel:

- Die Folge $(1/n, e^{2-n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $(0, 0)$.
- Die Folge $(\sin(1/n), \cos(1/n^2), \sin(n\pi/2))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ konvergiert nicht, da die Komponente $\sin(n\pi/2)$ divergiert.

Damit ist völlig analog zu Definition 6.1:

Definition 10.4 (**Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$**). *Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt:*

- ***stetig in*** *$x \in D_f$, falls für jede Folge $(x_n) \subset D_f$ mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.*

  Ansonsten heißt die Funktion ***unstetig in*** *x.*
- ***stetig in/auf*** *D_f, falls sie stetig ist für alle $x \in D_f$.*

Mit Stetigkeitsregeln erhalten wir auch leicht:

Satz 10.5 (**Stetigkeitsregeln in $\mathbb{R}^n$**). *Setzt sich $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Komposition von stetigen Funktionen zusammen, dann ist f auf der maximalen Definitionsmenge ebenfalls selbst stetig.*

Beispiele für stetige mehrdimensionale Funktionen:

- **Projektionen** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (n \leq m) \quad f : x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; : f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$
- $f(x) = e^{\|x\|}, \; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\sin(x_1), \sin(x_2), \ldots, \sin(x_n))^T$
- $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$ ist definiert und stetig für $f : D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\} \to \mathbb{R}$
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; f(x, y) = \left(x + y, \dfrac{1}{|xy| + 1}, e^{-xy}\right)^T$ ist überall stetig

- Die Funktion $f(x,y) = 2 - \max\{|x|, 2|y|\}$ ist überall definiert und stetig. Das Maximum ist mittels stetigen Funktionen darstellbar: $\max\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Man muss allerdings gerade bei Definitionslücken und Fallunterscheidungen auch im Mehrdimensionalen vorsichtig sein:
Wir betrachten die beiden Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, siehe Abbildung 10.5:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{10.1}$$

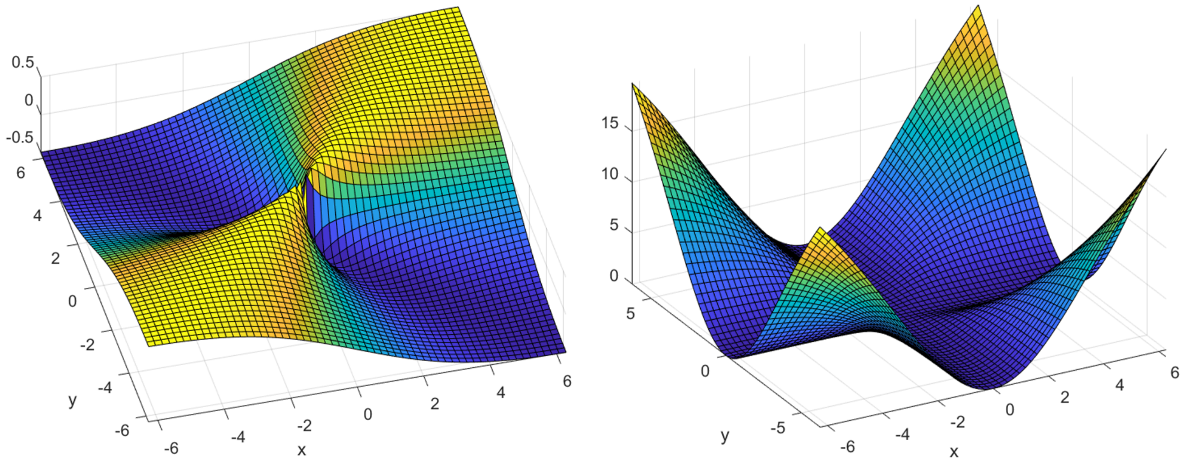

Abbildung 10.5: Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$: Funktionen f (links) und g (rechts) aus (10.1)

Beide Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.
Die Funktion f ist in $(0,0)$ nicht stetig, denn für die Folge $(1/n, 1/n) \to (0,0)$ gilt

$$f(1/n, 1/n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = 1/2 \to 1/2 \neq 0 = f(0,0)$$

Die Funktion g ist stetig in $(0,0)$, denn für jede Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$ gilt beispielsweise mittels der elementaren Ungleichung $ab \leq (a^2+b^2)/2$ für alle $a, b > 0$:

$$|g(x_n,y_n) - g(0,0)| = \frac{|x_n^2 y_n^2|}{x_n^2 + y_n^2} = |x_n y_n| \frac{|x_n y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n y_n|/2 \to 0 = g(0,0)$$

Die Funktion g ist somit die stetige Funktion $g(x,y) = x^2 + y^2$.

- Die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin((x-y)^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
ist für $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig (Satz 10.5).

  Es ist für $(1/n, 1/n) \to (0,0)$ zwar $f(1/n, 1/n) = \dfrac{0}{2/n^2} = 0 \to 0$.

  Aber für $(1/n, -1/n) \to (0,0)$ ist es schon komplizierter. Mit den Regeln von l'Hospital erhalten wir:
$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, -1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(4/n^2)}{2/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2$$
  Also ist f unstetig in $(0,0)$.

10.3 Differenziation im $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit der Differenziation von Kurven und verwenden wie in Definition 7.1 eine beste Approximation mittels einer Linearisierung:

Definition 10.6 (Differenziation als lineare Approximation). *Seien $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und die Kurve*

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

*Die Funktion f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in (a,b)$, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ (sowie $x, h \in \mathbb{R}$) gibt mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - v(x - x_0)\|}{|x - x_0|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - vh\|}{|h|} = 0$$

*unabhängig von den Folgen $x \to x_0$ bzw. $h \to 0$. Dann heißt v der **Tangentialvektor (Ableitung)** von f in x_0 und wir schreiben*

$$v =: f'(x_0) = \dot{f}(x_0).$$

Mittels Betrachtung der einzelnen Differenzenquotienten in den Komponenten erhält man:

Satz 10.7 (Differenzierbarkeit einer Kurve). *Die Kurve $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ ist in $x_0 \in (a,b)$ genau dann **differenzierbar**, wenn alle Komponentenfunktionen in x_0 differenzierbar sind und dann gilt*

$$\dot{f}(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

Ist die Kurve f in jedem $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf (a,b). Sind alle $f_1, \dots, f_n \in C^m((a,b))$, so heißt f m-mal stetig differenzierbar und wir schreiben analog $f \in C^m((a,b))$.
*Die Länge des Vektors $\|\dot{f}(x_0)\|$ ist die **Geschwindigkeit**. Für $\dot{f}(x_0) \neq 0$ ist die **Tangente** an f in x_0 gegeben durch die **parametrisierte Gerade***

$$g(t) = f(x_0) + \dot{f}(x_0) \cdot t$$

Für $\dot{f}(x_0) = 0$ ist dagegen keine Tangente definiert (Knick oder Spitze in Kurve).

Beispiele:

- Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ hat die Ableitung
$$\dot{\gamma}(t) = (\cos'(t), \sin'(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$$
- Die Kurve $\gamma : [-3, 3] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, \sqrt{|t|})$ ist nur für $t \neq 0$ differenzierbar mit der Ableitung
$$\dot{\gamma}(t) = \left(1, \mathrm{sign}(t)/(2\sqrt{|t|})\right)$$
- Die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^2)$ ist überall differenzierbar mit der Ableitung
$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t)$$
und hat in $t = 0$ eine Spitze, siehe Abbildung 10.6 (links).

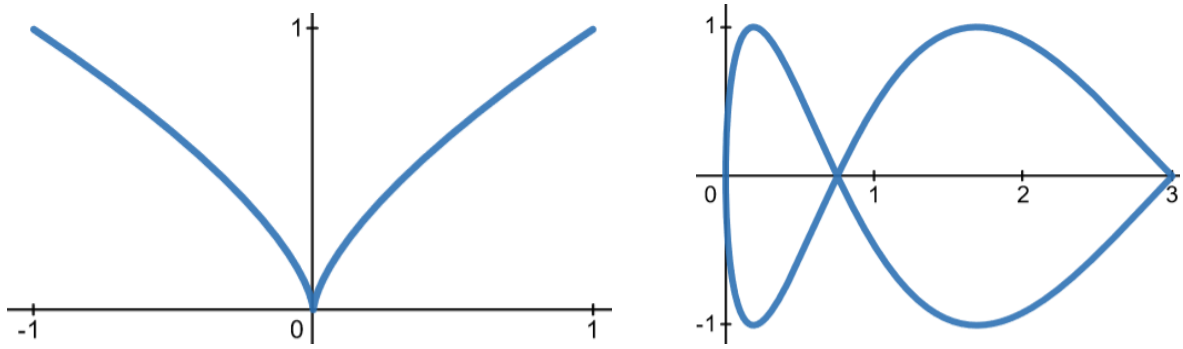

Abbildung 10.6: Kurven $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ und $\gamma(t) = (3t^2, \sin(2\pi t))$

- Die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (3t^2, \sin(2\pi t))$, siehe Abbildung 10.6 (rechts) schneidet sich selbst.
- Die natürliche Parametrisierung einer reellen Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ergibt die Kurve

  $$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

  mit der Ableitung $\dot\gamma(t) = (1, f'(t))$ und der Geschwindigkeit

  $$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0$$

Analog zu Exkurs über Bogenlänge einer Kurve 8.6 folgt aus dem Hauptsatz:

Satz 10.8 (**Länge einer Kurve**). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine auf (a, b) stetig differenzierbare Kurve. Für die **Länge der Kurve** gilt:*

$$L_{[a,b]} = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

Beispiel:

- Die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (3t^2, \sin(2\pi t))$ (Abbildung 10.6 (rechts)) hat mit $\dot\gamma(t) = (6t, 2\pi\cos(2\pi t))$ die Länge

  $$L_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(6t)^2 + (2\pi\cos(2\pi t))^2}\, dt$$

  Mit der Trapezregel für $n = 10^8$ erhalten wir die Approximation $L_{[-1,1]} \approx 10.689805$.

Eine **lineare Abbildung** $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ erfüllt für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^m$:

$$L(ax) = aL(x), \qquad L(x + y) = L(x) + L(y)$$

und kann eindeutig mittels einer **Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und Matrixmultiplikation beschrieben werden: $L(x) = A \cdot x$. (Lineare Abbildungen $\rightsquigarrow$ Lineare Algebra)

Die Differenziation im Mehrdimensionalen folgt der Idee aus Definition 10.6:

Definition 10.9 (**Totale Differenzierbarkeit**). *Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ für $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt **(total) differenzierbar** in $x_0 \in D_f$, wenn es eine **stetige lineare Abbildung** $L : D_f \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Lh\|}{\|h\|} = 0$$

*unabhängig von den Folgen $x \to x_0$ bzw. $h \to 0$. Dann heißt L die **totale Ableitung** von f in x_0 und wir schreiben $L = Df(x_0)$. Diese lineare Abbildung wird mittels einer Matrix, der (**Jacobi-Matrix** bzw. **Funktionalmatrix**) $Jf(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dargestellt: $L(y) = Df(x_0)(y) = Jf(x_0)\cdot y$.*

Die Differenzierbarkeit wird erneut mittels Komponentenfunktionen beschrieben und verwendet:

Definition 10.10 (**Partielle Ableitung**). *Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$, heißt in $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f$ **partiell differenzierbar** nach x_i, falls die (erste) Ableitung in dieser Dimension existiert (mit $h \in \mathbb{R}, h \to 0$):*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Für die partielle Ableitungen gibt es zudem die Bezeichnungen $\partial_{x_i} f(x)$, $f_{x_i}(x)$ oder $D_i f(x)$.
*Ist f nach allen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar, so heißt f in x **partiell differenzierbar**.*

*Analog definiert man **höhere Ableitungen**, wie beispielsweise die **zweiten partiellen Ableitungen** bzw. Ableitungen **zweiter Ordnung**:*

$$\partial_{x_i x_j} f = \partial_{x_i}\left(\partial_{x_j} f\right)$$

***Beachte:** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ hat m partielle Ableitungen erster Ordnung, m^2 partielle Ableitungen zweiter Ordnung und allgemein m^k Ableitungen k-ter Ordnung.*

Satz 10.11 (**Jacobi-Matrix**). *Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in x differenzierbar, so existieren sämtliche partiellen Ableitungen und es gilt:*

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_2(x) \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_n(x) \end{pmatrix}$$

Satz 10.12 (**Differenzierbarkeitskriterium**). *Existieren für $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ alle partiellen Ableitungen und sind stetig, dann ist f total differenzierbar.*

Beispiele:

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \sin(xyz^2)$ ist total differenzierbar, da mit Kettenregel die stetigen partiellen Ableitungen entstehen:

  $$\partial_x f(x,y,z) = \cos(xyz^2)yz^2, \quad \partial_y f(xyz) = \cos(xyz^2)xz^2, \quad \partial_z = \cos(xyz^2)2xyz$$

  Einige zweiten Ableitungen sind mit Kettenregel

  $$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y,z) &= -\sin(xyz^2)y^2z^4, \\ \partial_{xy} f(x,y,z) &= -\sin(xyz^2)xyz^4 + \cos(xyz^2)z^2, \\ \partial_{xz} f(x,y,z) &= -\sin(xyz^2)2xy^2z^4 + 2\cos(xyz^2)yz, \\ \partial_{yx} f(x,y,z) &= -\sin(xyz^2)xyz^4 + \cos(xyz^2)z^2, \\ \partial_{yy} f(x,y,z) &= -\sin(xyz^2)x^2z^4 \end{aligned}$$

Die Gleichheit der zweiten Ableitungen folgt aus einem allgemeinen Resultat:

Satz 10.13 (Schwarz). *Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, seien die Koordinaten $x \neq y$ und existiert die stetige zweite Ableitung $\partial_{xy} f$, dann existiert auch die zweite Ableitung $\partial_{yx} f$ und es gilt die Gleichheit $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$.*

Beispiele:

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-\|x\|}$ ist total differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da mit
$$\partial_{x_i}\|x\| = \partial_{x_i}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots x_n^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$
und Kettenregel stetige partielle Ableitungen entstehen:
$$\partial_{x_i} f(x) = -2x_i e^{-\|x\|}/\|x\|$$
Für $x = 0$ ist $\|x\|$ nicht differenzierbar (klar, da $\|x\| = |x|$ für Dimension $n = 1$).
- Die Funktion
$$f(x, y, z) = e^{-x^2+y^2+z^2}(xyz + 1/x)$$
hat wegen $1/x$ den maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{\{0\} \times \mathbb{R}^2\}$ Die partiellen Ableitungen sind mit Produktregel und Kettenregel, sowie $(1/x)' = -x^{-2}$:
$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y, z) &= e^{-x^2+y^2+z^2}(xyz + 1/x)(-2x) + e^{-x^2+y^2+z^2}(yz - x^{-2}) \\
\partial_y f(x, y, z) &= e^{-x^2+y^2+z^2}(xyz + 1/x)(2y) + e^{-x^2+y^2+z^2}(xz) \\
\partial_z f(x, y, z) &= e^{-x^2+y^2+z^2}(xyz + 1/x)(2z) + e^{-x^2+y^2+z^2}(xy)
\end{aligned}$$
Dies sind auf D_f stetige Funktionen (Satz 10.5). Somit ist f auf D_f (!) total differenzierbar.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ besitzt zwar stetige partiellen Ableitungen $\partial_x f(0) = \partial_y f(0) = 0$ aber beispielsweise in $0 = (0, 0)$ ist f unstetig und daher ist f nicht differenzierbar (!) (Satz 7.2).

Für die Ableitung bei Skalarfeldern verwendet man:

Definition 10.14 (Gradient). *Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$, so heißt der **Gradient**:*
$$\nabla f(x) := (\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x))^T = Jf(x)^T$$
Wir erinnern an das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T, y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Satz 10.15 (Richtungsableitung Skalarfeld). *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$, so zeigt $\nabla f(x)$ in die Richtung des steilsten Anstiegs.*
Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist
$$\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v/\|v\|\rangle$$
*die **Richtungsableitung** von f in x in **Richtung** v und es gilt mit $h \to 0$ in $\mathbb{R}$:*
$$\partial_v f(x) = \frac{\partial}{\partial v} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h\|v\|}$$

Beispiele:

- Die partiellen Ableitungen $\partial_{x_i} f$ sind die Richtungsableitungen in Richtung der kanonischen Einheitsvektoren $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ (nur eine 1 an der i-ten Koordinate): $\partial_{e_i} f = \partial_{x_i} f$.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xe^{x+2y}$ ist total differenzierbar und hat den Gradienten
$$\nabla f(x, y) = \left(e^{x+2y} + xe^{x+2y}, 2xe^{x+2y}\right)^T$$
- Die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xe^{y^2} + xy$$
ist auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar. Im Punkt $(1, 0)$ erhalten wir mit dem Gradienten
$$\nabla f(x, y) = \left(e^{y^2} + y, 2xye^{y^2} + x\right)^T, \qquad \nabla f(1, 0) = (1, 1)^T$$
für die Richtung $v = (1, 1)^T$ die Richtungsableitung
$$\partial_v f(1, 0) = \langle (1, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$$
und mit $\nabla f(2, 3) = (e^9 + 9, 12e^9 + 2)^T$ für die Richtung $w = (3, -4)^T$ die Richtungsableitung
$$\partial_w f(2, 3) = \langle \left(e^9 + 9, 12e^9 + 2\right)^T, \frac{1}{5}(3, -4)^T \rangle = \frac{3}{5}(e^9 + 9) - \frac{4}{5}(12e^9 + 2) = 19/5 - 9e^9$$

Exkurs 10.16 (Extrema Skalarfeld). *Analog zu reellen Funktionen und Definition 7.6 heißt für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in Punkt $x_0 \in D_f$* ***lokales Extremum*** *bzw.* ***Maximum*** *oder* ***Minimum*** *von f, falls für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt, daß $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$. Ein Punkt $x_0 \in D_f$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ heißt* ***stationär*** *und es gilt analog zu Proposition 7.7:*

Satz 10.17 (Extremum im Innerem $\Rightarrow \nabla f(c) = 0$). *Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, differenzierbar und $c \in D_f$ ein Extremum. Dann ist c ein stationärer Punkt.*

Es gibt zudem in Analogie zum Kriterium für Extrema (7.10) Kriterien für lokale Maxima/Minima von Skalarfeldern mittels der Infomation zweiter Ableitungen.
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***abgeschlossen****, wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt.*

Satz 10.18 (Satz vom Maximum/Minimum). *Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, ein stetiges Skalarfeld und die Menge $A \subseteq D_f$ abgeschlossen und beschränkt. Dann nimmt die Funktion f auf A ein Maximum und Minimum an.*

Beispiele:

- Das Skalarfeld $g(x, y) = x^2 + y^2$ in Abbildung 10.5 (rechts) hat in $(0, 0)$ ein globales Minimum mit $\nabla g(0, 0) = 0$.
- Das Skalarfeld $f(x, y) = \sin(x)y^2$ in Abbildung 10.2 (links) hat in $(0, 0)$ zwar einen stationären Punkt, aber weder ein lokales Maximum, noch Minimum (einen Sattelpunkt).
- Das Skalarfeld $f(x, y) = \sin(x + y)y$ in Abbildung 10.2 (links) nimmt auf der **Einheitskreisscheibe** $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Maximum und Minimum an.

Index

$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (Folge), 27
$C^m((a,b))$ (m-mal stetig differenzierbar), 56
$C^\infty((a,b))$ (beliebig oft differenzierbar), 56
$\mathrm{Grad}(f)$, 20
$\mathbb{N}$, 6
$\mathbb{Q}$, 6, 8
$\mathbb{R}$, 9
$\mathbb{Z}$, 6
$\arg(z)$ (Argument von z), 18
$\binom{n}{k}$, 12
$\inf$ (Infimum), 9
$\lfloor x \rfloor$ (untere Gaußklammer), 54
$\overline{z}$ (komplex konjugierte Zahl), 15
$\prod$, 12
$\sum$, 12
$\sup$ (Supremum), 8
$a_n = \mathcal{O}(b_n)$ (Landau $\mathcal{O}$), 35
$a_n = o(b_n)$ (Landau o), 35
$a_n \sim b_n$ (asymptotisch gleich), 35
e^z (Exponentialfunktion), 43
$f = \mathcal{O}(g)$ (Landau $\mathcal{O}$), 49
$f = o(g)$ (Landau o), 49
$f \sim g$ (asymptotisch gleich), 49
f' (Ableitung), 52
i (imaginäre Einheit $i^2 = -1$), 15

Abbildung, 11
 lineare, 95
abgeschlossen, 98
Ableitung, 52, 94
 höhere, 56
 höhre, 96
 partielle, 96
 Richtungsableitung, 97
Additionstheoreme, 18
Algorithmus
 Bisektionsverfahren, 50
 Fixpunktiteration, 83
 Newton-Verfahren, 85
Asympotische Gleichheit, 35
Asymptotisch vernachlässigbar, 49
Asymptotische Gleichheit, 49
Asymptotische Schranke, 49

beschränkt
 Folge, 27
 Integral, 61
 Menge, 8
Betrag, 13, 16
Bijektion, 11
bijektiv, 11
Binomialkoeffizient, 12
Binomialsatz, 12, 16
Bisektionsverfahren, 50

Cauchy-Folge, 35
Cosinus-Funktion, 44

Definitionsbereich, 11
dicht ($\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$), 10
Differenzenquotient, 52
Differenzialgleichung, 59
Differenziationsregeln, 54
Differenzierbarkeit
 Definition, 52
 Definition $\mathbb{R}^n$, 94
 Kurve, 94
 partielle, 96
 totale, 95
Divergenz, 27, 36
 Uneigentliches Integral, 72
Dreiecksungleichung, 13, 14, 16, 37, 61, 91

elementare Ungleichungen, 14
Entwicklungspunkt (Taylorpolynom), 76

euklidische Norm, 91
Eulersche Formel $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, 44
Exponentialfunktion, 43
Extremum, 56, 98

Fakultät, 12
Fibonacci-Folge, 6
Fixpunkt, 82
Folge
    $1/n \to 0$, 28
    Cauchy-Folge, 35
    Definition, 27
    divergent, 27
    Fibonacci, 6, 27
    geometrische, 29
    Grenzwert, 27
    Häufungspunkt, 29
    Index, 27
    konvergent $\Rightarrow$ beschränkt, 27
    monoton steigend/fallend, 30
    Nullfolge, 27
    Reihe, 36
    rekursive, 27, 33, 34
    Teilfolge, 29
Formeln von Euler/de Moivre, 19
Funktion, 11

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, 6
Gaußklammer (untere), 54
Geometrische Folge, 29
Geometrische Summe, 12, 16
Grad, 20
Gradient, 97
Graph (einer Funktion), 89
Grenzwert
    Funktion, 46
    uneigentlich, 47
Grenzwert (Limes), 27

Hauptsatz Differential/Integralrechnung, 64
Häufungspunkt, 29

Imaginärteil, 15
Infimum, 9
injektiv, 11
Integral
    Integralkriterium, 74
    Majorante, 73
    Mittelpunktsregel, 88
    Partielle Integration, 67
    Potenzreihe, 66
    rationale Funktion, 69
    Regelintegral, 61
    Substitution, 68
    Trapezregel, 88
    Treppenfuktion, 60
    unbestimmt, 66
    uneigentliches, 72
integrierbar
    Definition, 61
Intervall
    abgeschlossen, 9
    offen, 9

Jacobi-Matrix, 96

Kettenregel, 54
komplex konjugiert, 15
komplexe Ebene, 15
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$, 15
konkav, 59
Kontraktion, 82
Kontraktionskonstante, 82
Konvergenradius, 41
Konvergenz, 27
    $\mathbb{R}^n$, 92
    absolute, 37
    Folge, 27
    Reihe, 36
    Uneigentliches Integral, 72
Konvergenzbereich (Reihe), 41
konvex, 58
kritischer Punkt, 57
Kurve, 89
Körperaxiome, 7

l'Hospital, 80
Leibniz-Kriterium, 38
Limes-Ungleichung, 29
Limesregeln, 31
Limesregeln für Funktionen, 46
lineare Abbildung, 95

Lipschitz-Konstante, 82
lipschitzstetig, 82
Logistische Abbildung, 82

Majorante, 38, 73
Majorantenkriterium, 73
Maximum
    $\mathbb{R}^n$, 98
    lokale, 56
    Menge, 9
    stetige Funktion, 51
Menge
    $\mathbb{C}$, 15
    abzählbar unendlich, 11
    endlich, 11
    unendlich, 11
    überabzählbar, 11
Minimum
    $\mathbb{R}^n$, 98
    globale, 56
    lokale, 56
    Menge, 9
    stetige Funktion, 51
Minorante, 38, 73
Mittelwertsatz, 57
Mittelwertsatz für Integrale, 63
Monome, 23
monoton steigend/fallend (Folge), 30
monoton wachsend/fallend, 22
Monotonie der Umkehrfunktion, 23
Monotonie der Wurzelfunktionen, 23
Monotonie durch f', 58

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, 6
Newton-Verfahren, 85
Norm, 91
Nullfolge, 27
Nullfolgenkriterium, 36

Ordnungsaxiome, 8

Partialbruchzerlegung, 21
Partialsumme, 36
partielle Ableitung, 96
Partielle Integration, 67
Polardarstellung, 18
Polstelle, 47
Polynomdivision, 20
Polynome, 20
Potenzreihe, 41

Rationale Funktionen, 21
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, 6
Realteil, 15
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$, 9
Reihe
    $\sum_{n\geq 1} n^{-k}$, 40
    Absolutreihe, 37
    alternierende, 38
    Definition, 36
    Exponentialreihe, 43
    Geometrische, 37
    Harmonische, 37
    Integralkriterium, 74
    Majorante, 38
    Minorante, 38
    Potenzreihe, 41
    Wert, 36
Restglied (Taylorpolynom), 76

Satz
    n-te Wurzeln in $\mathbb{C}$, 19
    Babylonisches Wurzelziehen, 34
    Binomialsatz, 12
    Bolzano-Weierstraß, 35
    Differenziationsregeln, 54
    differenzierbar $\Rightarrow$ stetig, 53
    Differenzierbarkeitskriterium, 96
    Eulersche Formel, 44
    Fixpunkt Kontraktion, 83
    Fixpunkt stetige Abbildung, 82
    Fundamentalsatz der Algebra, 17
    Geometrische Summe, 12
    Hauptsatz Differentialrechnung, 64
    Heron-Verfahren, 34
    Identitätssatz, 21
    Integralkriterium, 74
    Integration durch Substitution, 68
    Intervallschachtelung, 34
    Konvergenz in $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbb{R}$, 92
    Konvergenz Newton-Verfahren, 85
    Konvergenzradius, 42

- Linearfaktorzerlegung, 20
- Länge einer Kurve, 95
- Majorantenkriterium, 38, 73
- Minorantenkriterium, 38, 73
- Mittelwertsatz, 57
- Mittelwertsatz für Integrale, 63
- Monotone Konvergenz, 32
- Monotonie durch f', 58
- Nullstellensatz, 50
- Partielle Integration, 67
- Quotientenkriterium, 39
- Regeln von l'Hospital, 80
- stetig $\Rightarrow$ integrierbar, 62
- Stetigkeit der Komposition, 48
- Stetigkeitsregeln, 48
- vom Maximum und Minimum, 51, 98
- von Rolle, 57
- Wurzelkriterium, 39
- Zwischenwertsatz, 50

Schranke
- asymptotische, 49
- Menge, 8

Sinus-Funktion, 44
Skalarfeld, 89
Stammfunktion, 63
stationärer Punkt, 57
stetig fortsetzbar, 47
Stetigkeit
- ε-δ-Kriterium, 49
- Definition, 46
- Definition $\mathbb{R}^n$, 92

Stetigkeitsregeln, 46, 48
Stirling-Approximation, 35
Summenformeln, 12
Supremum, 8
surjektiv, 11

Tangentialvektor, 94
Taylorpolynom, 76
Taylorreihe, 79
Teilfolge, 29
Teleskopsumme, 36
total geordnet, 8
totale Ableitung, 96
Treppenfuktion, 60

Umgebung (in $\mathbb{C}$), 17
unbeschränkt
- $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ (ArchimedischesPrinzip), 10
- Folge, 27
- Menge, 8

Ungleichung
- AM-GM, 14
- Dreiecksungleichung, 13
- elementare, 14
- Limes, 29

Vektorfeld, 89
Vollständigkeit, 9, 35
Vollständigkeitsaxiom, 9
Vollständigkeitsaxiom (Äquivalenzen), 35

Zerlegung, 60
Zwischenwertsatz, 50