Teoria Sterowania Laboratorium 2

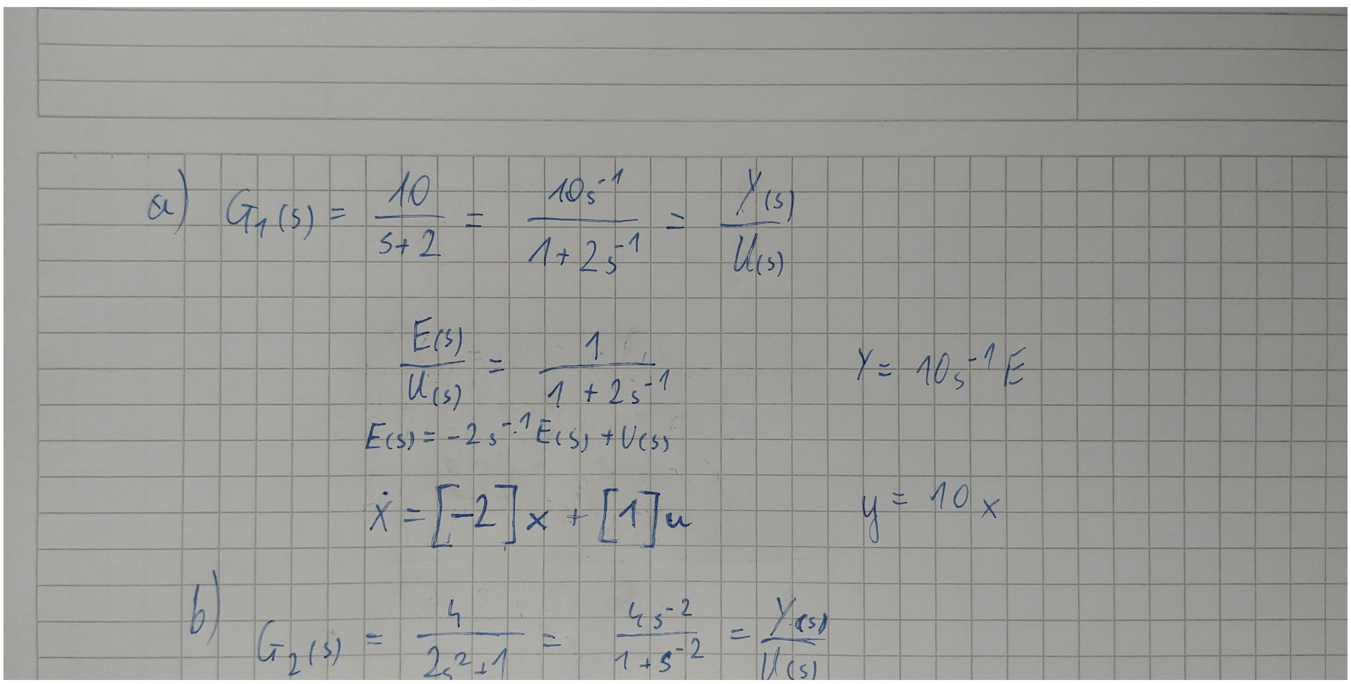
Konrad Borowik 141023

29.03.2021

1 Zadanie 1

1.1

a) Ręczne wyznaczenie równania stanu i wyjścia



b) Zdefiniowanie transmitancji w Python

```
Transmitancja 1 :  TransferFunctionContinuous(
array([10.]),
array([1., 2.]),
dt: None
)
```

c) Ręcznie wyznaczony model w przestrzeni stanu

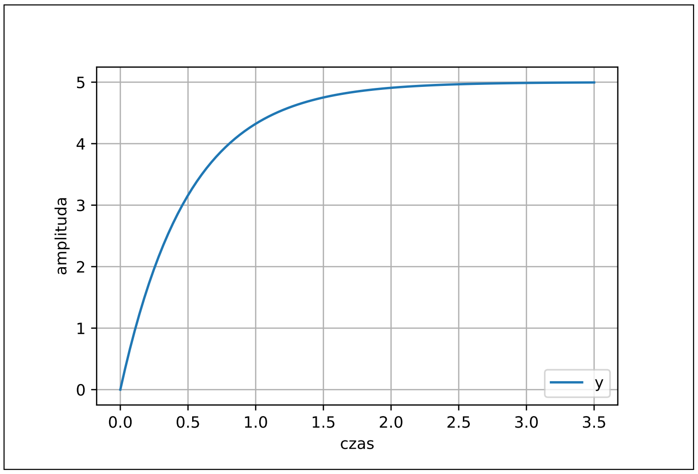
```
 StateSpaceContinuous(
array([[-2]]),
array([[1]]),
array([[10]]),
array([[0]]),
dt: None
)
```

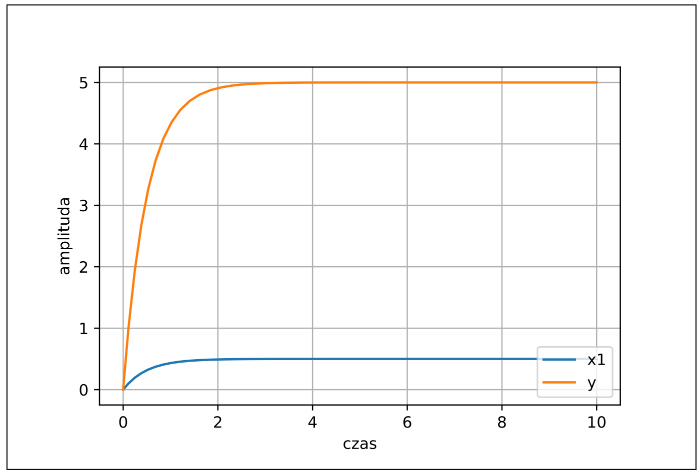
d) Przekształcenie układu zdefiniowanego poprzez transmitancję do przestrzeni stanu

```
(array([[-2.]]), array([[1.]]), array([[10.]]), array([[0.]]))
```

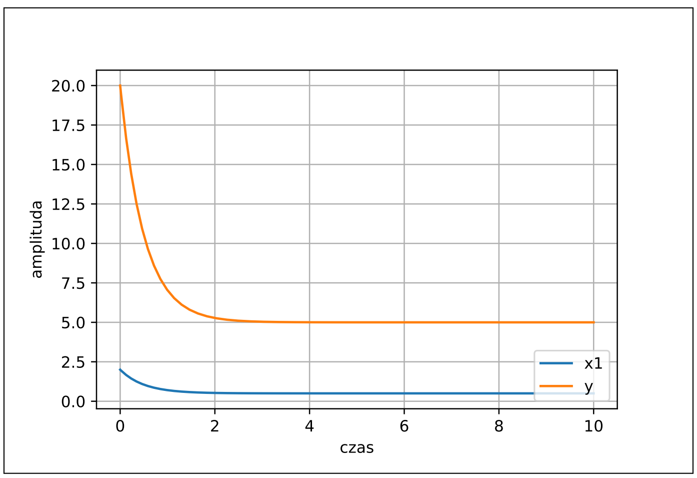
e) Wyniki się pokrywają.

f) Wykresy wyjść się od siebie nie różnią. Przebiegów zmiennych stanu nie mogę porównać, ponieważ w przypadku użycia funkcji .step2() ich nie otrzymałem. (Dotyczy to również następnych punktów.)
Po lewej zaprezentowany jest wykres wyjścia dla transmitancji wyliczonej przez komputer, a po prawej dla równań wyliczonych ręcznie.



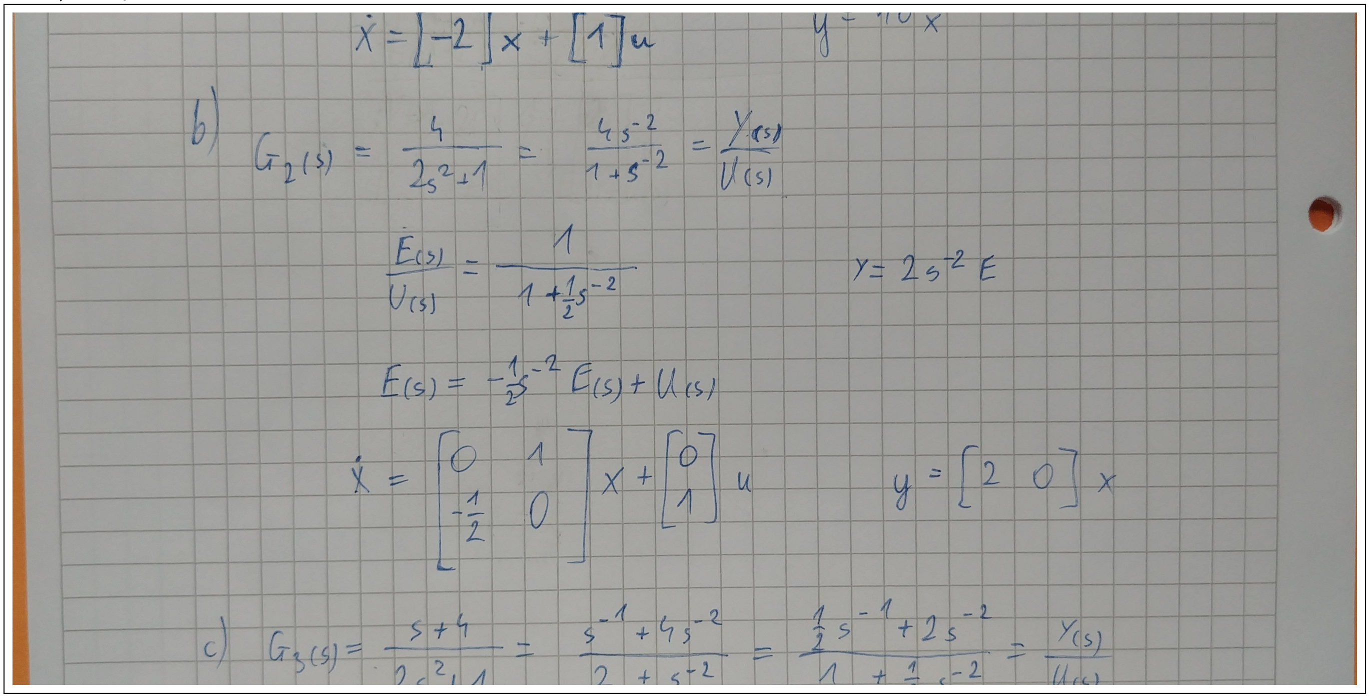


g) Przebiegi zmiennych stanu oraz wyjścia dla warunku początkowego = [2]



1.2

a) Ręczne wyznaczenie równania stanu i wyjścia



b) Zdefiniowanie transmitancji w Python

```
Transmitancja 2 :  TransferFunctionContinuous(
array([2.]),
array([1. , 0. , 0.5]),
dt: None
)
```

c) Ręcznie wyznaczony model w przestrzeni stanu

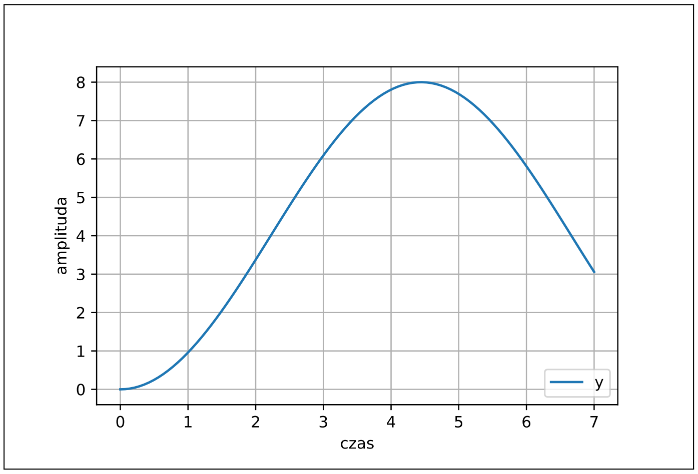
```
 StateSpaceContinuous(
array([[ 0. ,  1. ],
       [-0.5,  0. ]]),
array([[0],
       [1]]),
array([[2, 0]]),
array([[0]]),
dt: None
)
)
```

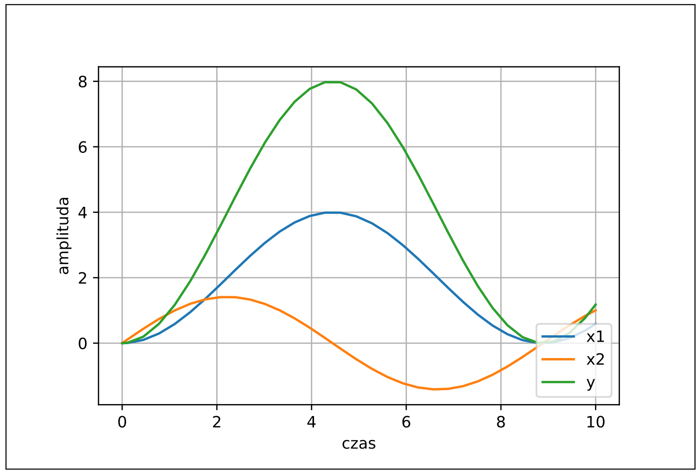
d) Przekształcenie układu zdefiniowanego poprzez transmitancję do przestrzeni stanu

```
(array([[-0. , -0.5],
       [ 1. ,  0. ]]), array([[1.],
       [0.]]), array([[0., 2.]]), array([[0.]]))
```

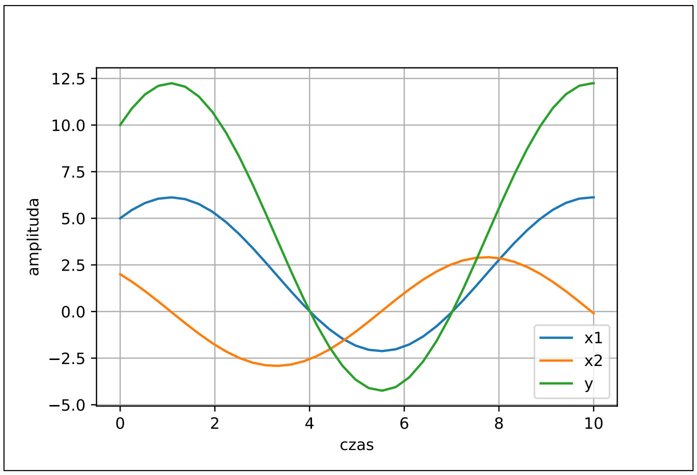
e) Wyniki się pokrywają. Jedyna różnica to fakt, że Python przyjął zmienne stanu w odwrotnej kolejności. Taka sytuacja wystąpi również w dwóch następnych podpunktach.

f) Wykresy



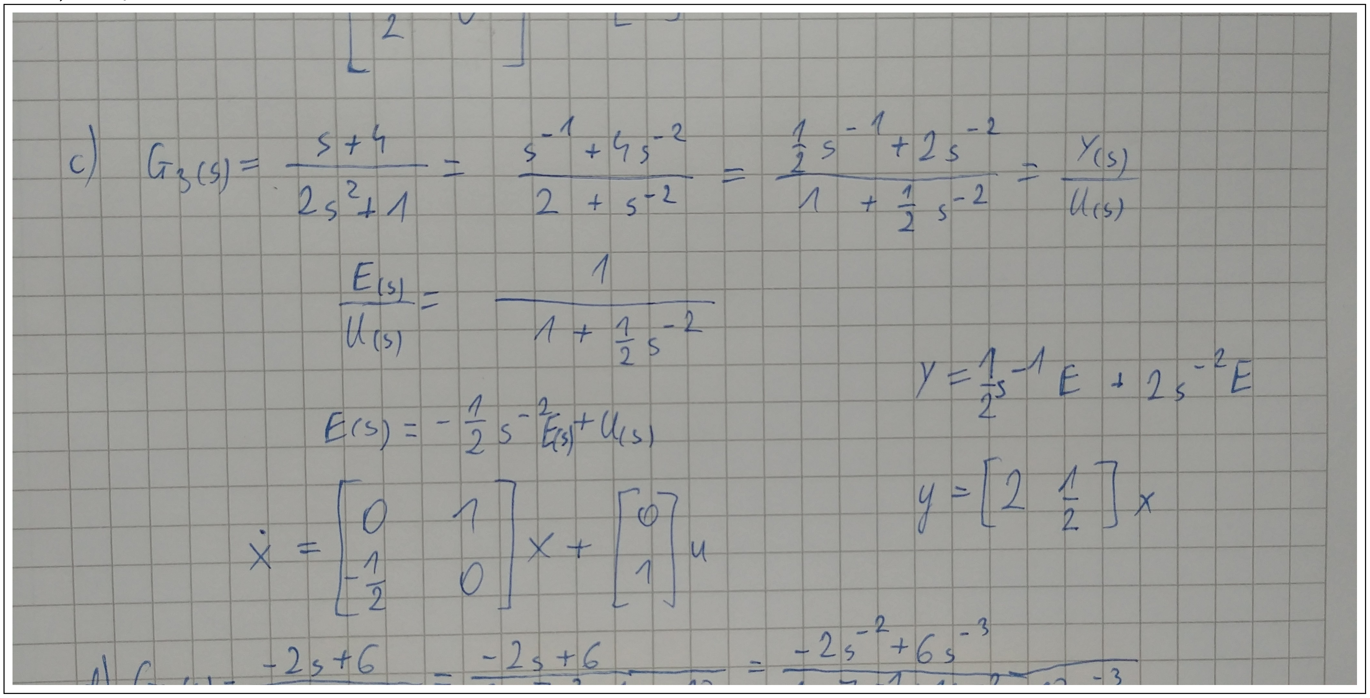


g) Przebiegi zmiennych stanu oraz wyjścia dla warunków początkowych = [5,2]



1.3

a) Ręczne wyznaczenie równania stanu i wyjścia



c) $G_3(s) = \frac{s+4}{2s^2+1} = \frac{s^{-1}+4s^{-2}}{2+s^{-2}} = \frac{\frac{1}{2}s^{-1}+2s^{-2}}{1+\frac{1}{2}s^{-2}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}s^{-2}}$$

$$y = \frac{1}{2}s^{-1}E + 2s^{-2}E$$

$$E(s) = -\frac{1}{2}s^{-2}E(s) + U(s)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

b) Zdefiniowanie transmitancji w Python

```
Transmitancja 3 :  TransferFunctionContinuous(
array([0.5, 2. ]),
array([1. , 0. , 0.5]),
dt: None
)
```

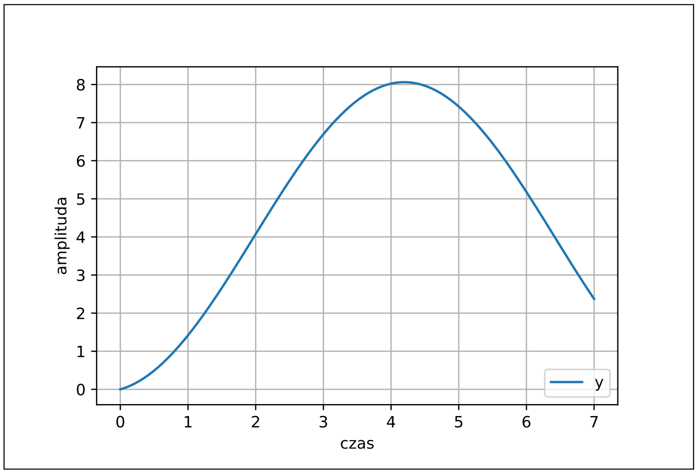
c) Ręcznie wyznaczony model w przestrzeni stanu

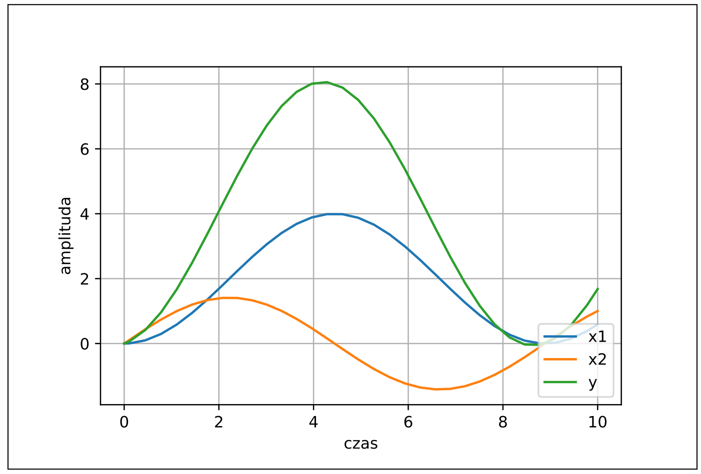
```
 StateSpaceContinuous(
array([[ 0. ,  1. ],
       [-0.5,  0. ]]),
array([[0],
       [1]]),
array([[2. , 0.5]]),
array([[0]]),
dt: None
)
```

d) Przekształcenie układu zdefiniowanego poprzez transmitancję do przestrzeni stanu

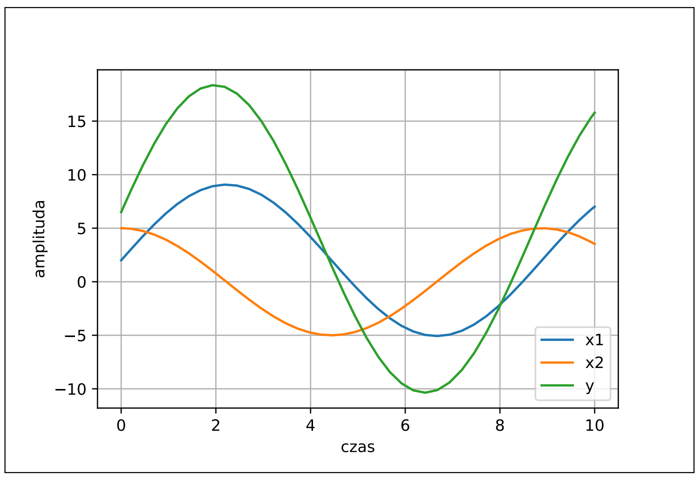
```
(array([[-0. , -0.5],
       [ 1. ,  0. ]]), array([[1.],
       [0.]]), array([[0.5, 2. ]]), array([[0.]]))
```

e) Wykresy



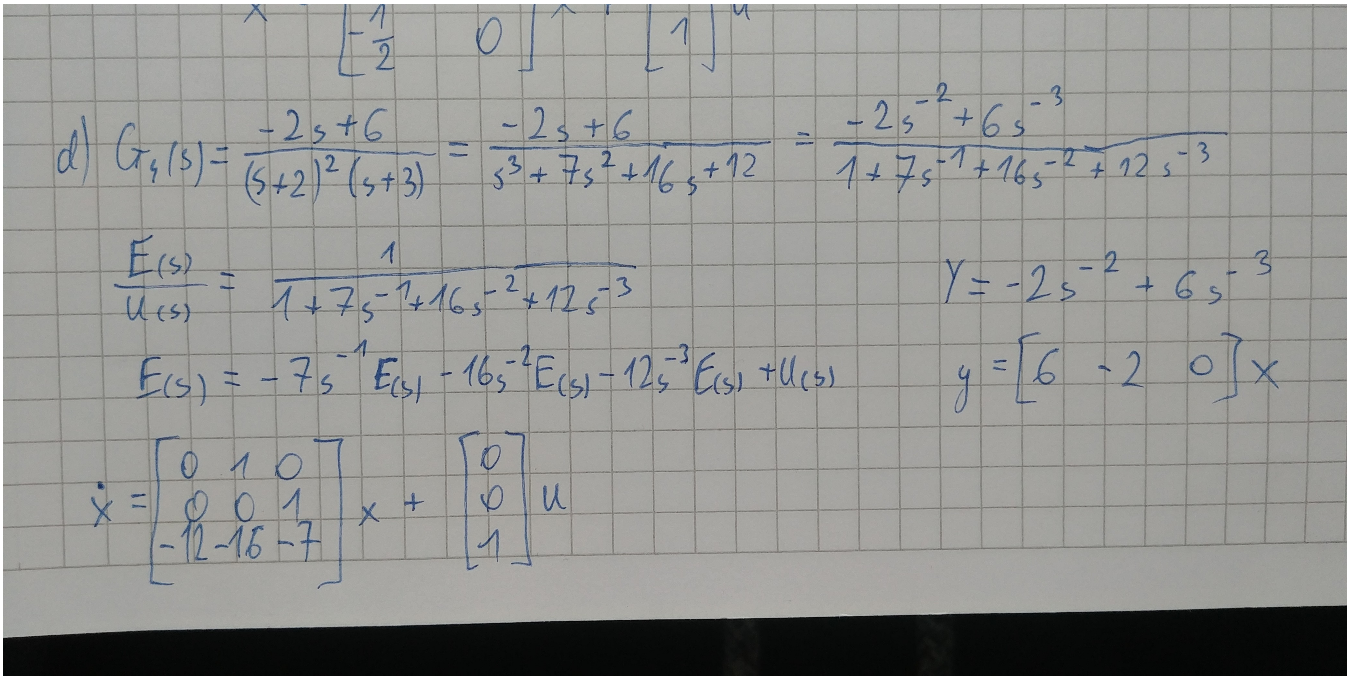


f) Przebiegi zmiennych stanu oraz wyjścia dla warunków początkowych = [2,5]



1.4

a) Ręczne wyznaczenie równania stanu i wyjścia



b) Zdefiniowanie transmitancji w Python

```
Transmitancja 4 :  TransferFunctionContinuous(
array([-2.,  6.]),
array([ 1.,  7., 16., 12.]),
dt: None
)
```

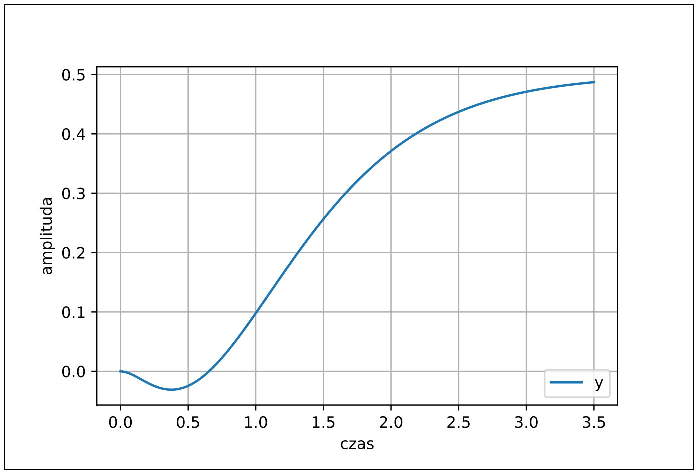
c) Ręcznie wyznaczony model w przestrzeni stanu

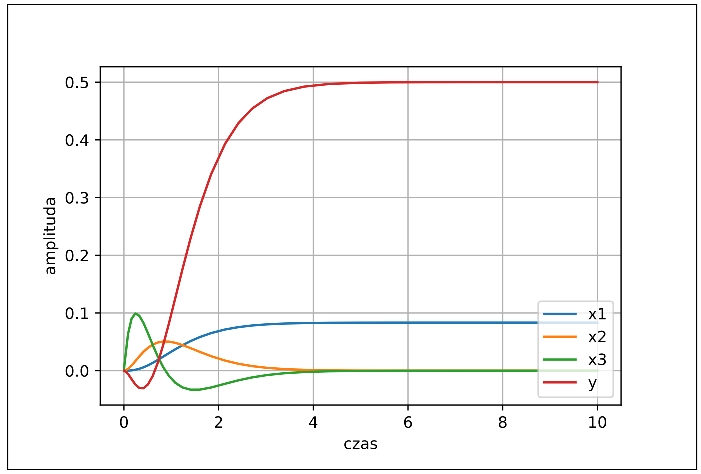
```
 StateSpaceContinuous(
array([[  0,   1,   0],
       [  0,   0,   1],
       [-12, -16,  -7]]),
array([[0],
       [0],
       [1]]),
array([[ 6, -2,  0]]),
array([[0]]),
dt: None
)
```

d) Przekształcenie układu zdefiniowanego poprzez transmitancję do przestrzeni stanu

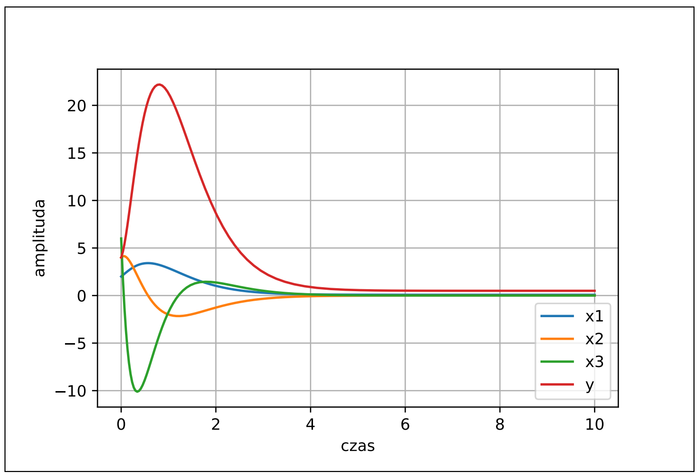
```
(array([[ -7., -16., -12.],
       [  1.,   0.,   0.],
       [  0.,   1.,   0.]]), array([[1.],
       [0.],
       [0.]]), array([[ 0., -2.,  6.]]), array([[0.]]))
```

e) Wykresy





f) Przebiegi zmiennych stanu oraz wyjścia dla warunków początkowych = [2,4,6]



1.5 Odpowiedzi na pytania

a) Dopóki warunki początkowe są równe zero, te opisy układu dynamicznego są między sobą równoważne. (Przy czym ównania stanu mogą być różne)

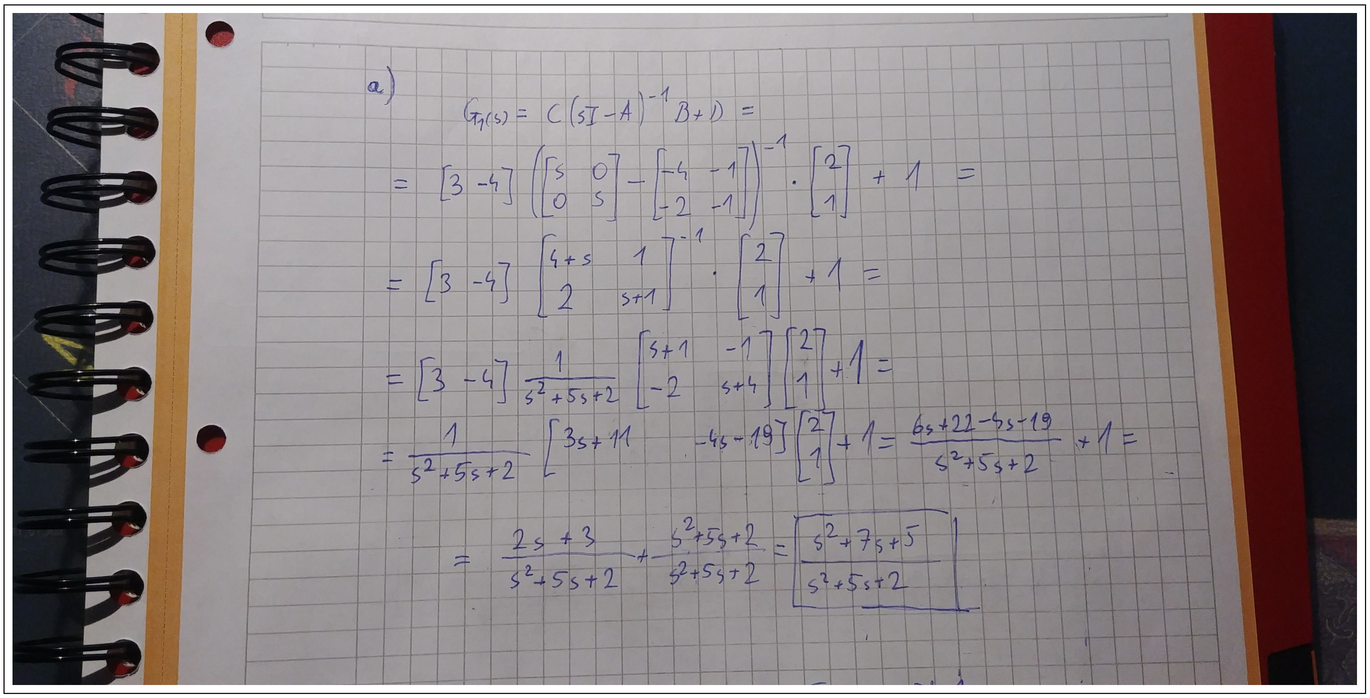
b) Przebiegi wyjścia oraz wejścia pozostaną takie same, jednak trajektorie zmiennych stanu mogą być różne.

c) Nie będą równoznaczne, ponieważ dla różnych równań stanu, dane warunki początkowe będą inaczej działać na zmienne stanu. W opisie transmitancyjnym trudno uwzględnić taki przypadek, ponieważ nie da się dla niego bezpośrednio określić przebiegu jego zmiennych stanu.

2 Zadanie 2

2.1

a)



a)

$$G_1(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$= \begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4&-1\\-2&-1\end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+1 =$$

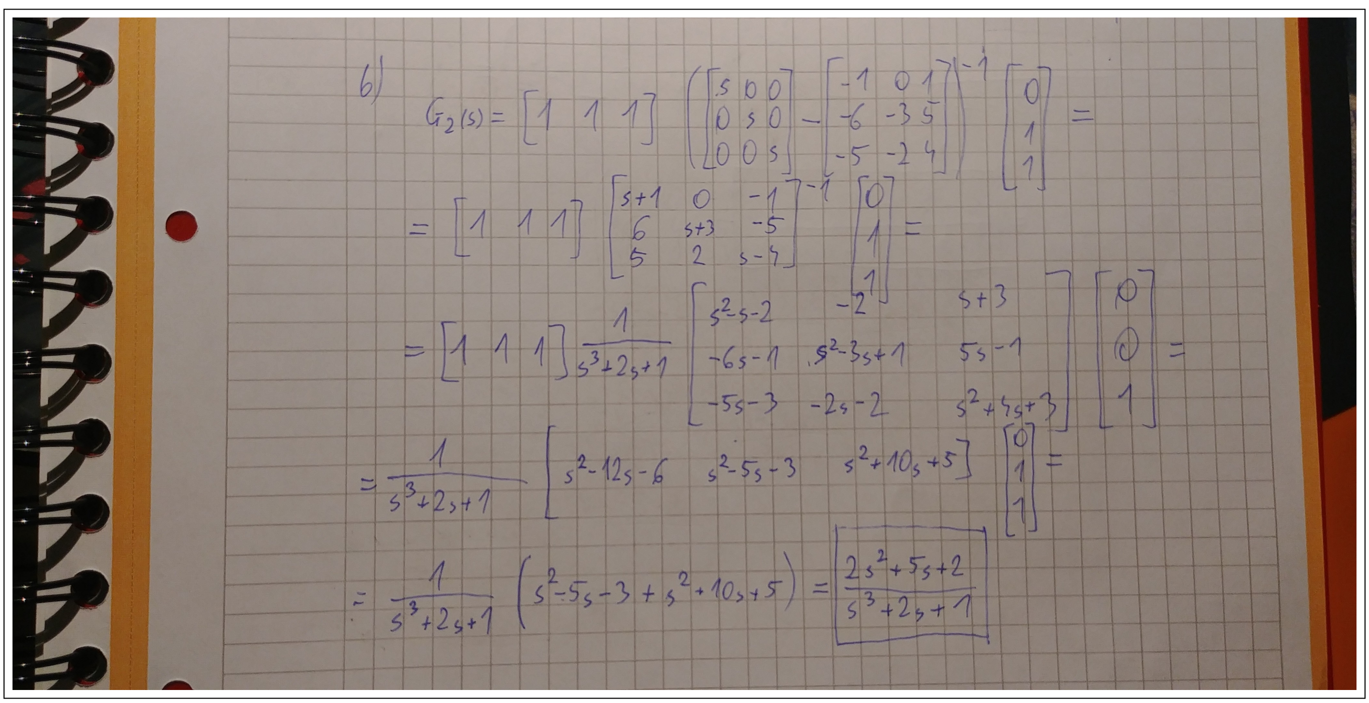
$$= \begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4+s&1\\2&s+1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+1=$$

$$= \begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix}s+1&-1\\-2&s+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+1=$$

$$= \frac{1}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix}3s+11 & -4s-19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+1 = \frac{6s+22-4s-19}{s^2+5s+2}+1=$$

$$= \frac{2s+3}{s^2+5s+2}+\frac{s^2+5s+2}{s^2+5s+2} = \boxed{\frac{s^2+7s+5}{s^2+5s+2}}$$

b)



b)

$$G_2(s) = \begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&1\\-6&-3&5\\-5&-2&4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=$$

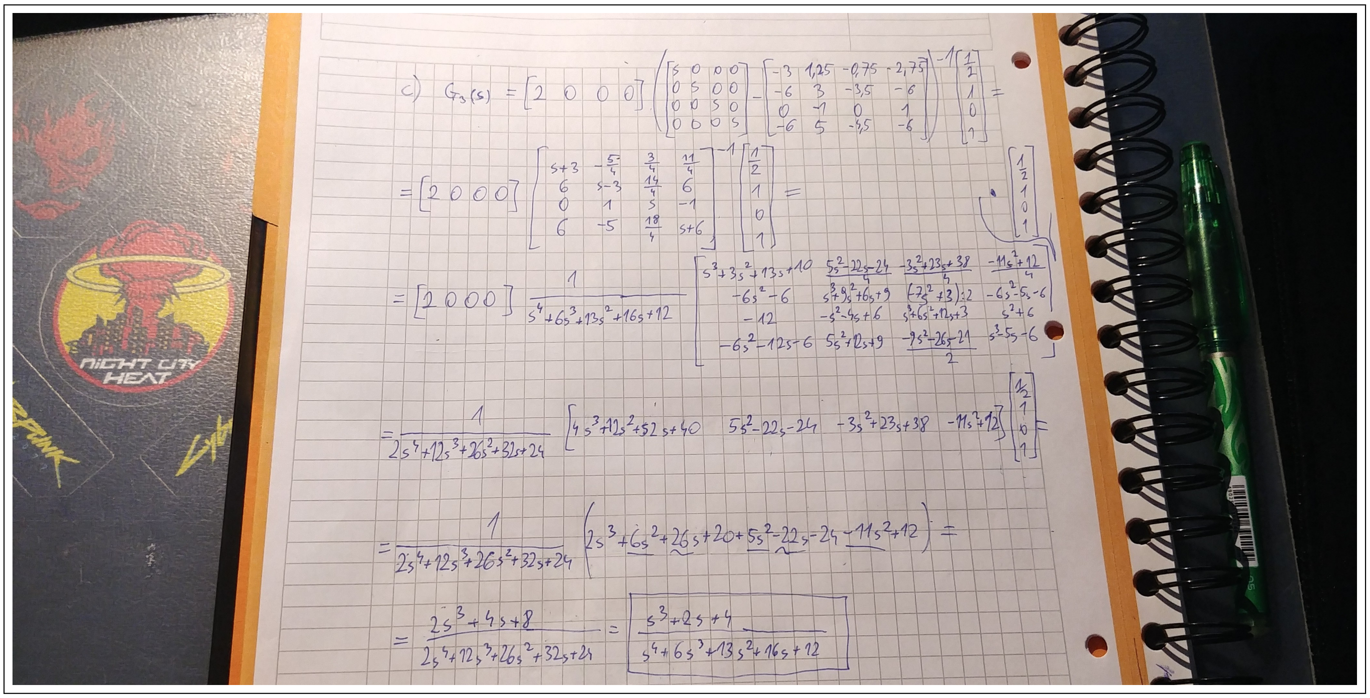
$$=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1&0&-1\\6&s+3&-5\\5&2&s-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{s^3+2s+1}\begin{bmatrix}s^2-s-2&-2&s+3\\-6s-1&s^2-3s+1&5s-1\\-5s-3&-2s-2&s^2+4s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^3+2s+1}\begin{bmatrix}s^2-12s-6 & s^2-5s-3 & s^2+10s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^3+2s+1}\left(s^2-5s-3+s^2+10s+5\right) = \boxed{\frac{2s^2+5s+2}{s^3+2s+1}}$$

c)



$$c)\quad G_3(s) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s&0&0&0\\0&s&0&0\\0&0&s&0\\0&0&0&s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & 1{,}25 & -0{,}75 & -2{,}75\\ -6 & 3 & -3{,}5 & -6\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -6 & 5 & -3{,}5 & -6\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+3 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{11}{4}\\ 6 & s-3 & \frac{14}{4} & 6\\ 0 & 1 & s & -1\\ 6 & -5 & \frac{18}{4} & s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2s^4+12s^3+26s^2+32s+24}\begin{bmatrix}4s^3+12s^2+52s+40 & 5s^2-22s-24 & -3s^2+23s+38 & -11s^2+12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2s^4+12s^3+26s^2+32s+24}\left(2s^3+6s^2+26s+20+5s^2-22s-24-11s^2+12\right) =$$

$$= \frac{2s^3+4s+8}{2s^4+12s^3+26s^2+32s+24} = \boxed{\frac{s^3+2s+4}{s^4+6s^3+13s^2+16s+12}}$$

2.2

Wynik w podpunkcie a) nie pokrywa się z wynikiem z funkcji ss2tf. Wyraz wolny w mianowniku jest o 1 większy niż ten, który otrzymałem licząc ręcznie.
W przypadku podpunktów b) oraz c), funkcja ss2tf wylicza bardzo małe współczynniki, w miejscach, w których podczas ręcznego liczenia wychodzą zera. Wynika to z faktu, że funckja ss2tf wykorzystuje obliczenia numerycznie i wtedy powstają tego typu artefakty. Oprócz tego wyniki są takie same.
Dla podanych przypadków nie jesteśmy w stanie otrzymać różnych transmitancji.