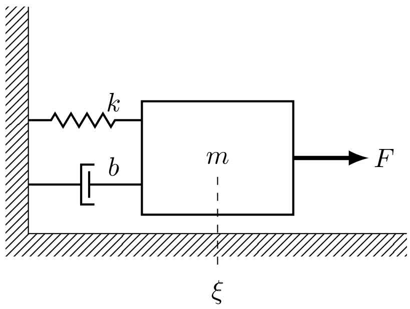
Teoria Sterowania

Zajęcia laboratoryjne, spotkanie 3

1 Filtr Kalmana

1.1 Wprowadzenie

Niech ponownie dany będzie układ liniowy zbudowany z masy połączonej sprężyną i tłumikiem.



Rysunek 1: Schemat układu

Dynamikę układu z rys. 1 opisuje liniowe równanie stanu i równanie wyjścia

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \tag{1}$$

gdzie $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \xi & \dot{\xi} \end{bmatrix}^T$ jest stanem układu, y jest wyjściem, natomiast u jest siłą F. Masa, współczynnik sprężystości i współczynnik tłumienia wynoszą: $m = 1\,\mathrm{kg}, k = 1\,\mathrm{N/m}, b = \frac{1}{2}\mathrm{N\,s/m}$.

Układ liniowy można przedstawić w postaci dyskretnej (tj. takiej, której stan obserwowany jest jedynie w dyskretnych chwilach czasu) np. poprzez przekształcenie Eulera w przód $\dot{x} = \frac{x[n+1]-x[n]}{T_p}$ co prowadzi do postaci

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \bar{A}x[n] + \bar{B}u[n], \\ y[n] &= \bar{C}x[n] + \bar{D}u[n]. \end{aligned} \tag{2}$$

Jeśli znajomość układu nie jest idealna, a sygnał wyjściowy nie jest mierzony w sposób bezbłędny, to zarówno w sygnale mierzonym, jak i samym procesie, oczekiwać można wystąpienia pewnych zaburzeń $w[n]$ oraz $v[n]$.

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \bar{A}x[n] + \bar{B}u[n] + v[n], \\ y[n] &= \bar{C}x[n] + \bar{D}u[n] + w[n]. \end{aligned} \tag{3}$$

Zaburzenia te odzwierciedlają odpowiednio niedokładność modelu teoretycznego (tj. rzeczywisty obiekt zachowuje się inaczej niż model teoretyczny, a nieznaną część dynamiki modeluje się jako sygnał $v[n]$) oraz zaszumienie sygnały pomiarowego (np. kwantyzację wprowadzaną przez każdy przetwornik cyfrowy). Jeśli zaburzenia te mają postać szumu o rozkładzie normalnym, to Filtr Kalmana pozwala skutecznie estymować stan rzeczywistego układu (1) na podstawie mierzonego sygnału wyjściowego y.

Filtr Kalmana wyznacza estymatę stanu układu w dwóch etapach - *a priori* na podstawie modelu, oraz *a posteriori* na podstawie pomiarów. Estymata *a priori* $x[n|n-1]$ opisana jest poprzez

$$\begin{aligned} \hat{x}[n|n-1] &= \bar{A}\hat{x}[n-1|n-1] + \bar{B}u[n], \\ P[n|n-1] &= \bar{A}P[n-1|n-1]\bar{A}^T + Q, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie Q jest znaną macierzą kowariancji szumu procesu $v[n]$. Estymata *a posteriori* ma postać

$$\begin{aligned} \hat{x}[n|n] &= \hat{x}[n|n-1] + K[n]e[n], \\ e[n] &= y[n] - \bar{C}\hat{x}[n|n-1], \\ K[n] &= P[n|n-1]\bar{C}^T S^{-1}[n], \\ S[n] &= \bar{C}P[n|n-1]\bar{C}^T + R[n], \\ P[n|n] &= P[n|n-1] - K[n]S[n]K^T[n], \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie R jest znaną macierzą kowariancji szumu pomiarowego $w[n]$. W przypadku rzeczywistym pomiar sygnałów $v[n]$ oraz $w[n]$ nie jest często możliwy, a odpowiedni dobór macierzy R oraz Q staje się zadaniem projektanta. Macierz $K[n]$ jest macierzą wzmocnień Kalmana określającą poziom zaufania do zdefiniowanego modelu (2) oraz wartości pomiarowych. Im wyższa wartość K tym większe znaczenie przypisywane jest informacji uzyskiwanej z zaburzonego pomiaru y kosztem informacji pozyskiwanej na podstawie założonego modelu teoretycznego.

1.2 Zadanie

Załączony przykład zawiera przykładową implementację symulacji modelu (1). W przykładzie sygnał pomiarowy zaburzony jest szumem w o rozkładzie normalnym, nie występuje natomiast szum procesu v (zakłada się idealną znajomość modelu dyskretnego).

1. Wyznaczyć dyskretne równanie dynamiki obiektu. Przeprowadzić symulację uzyskanego modelu (np. poprzez `scipy.signal.dlsim`). Porównać uzyskane przebiegi z sygnałami otrzymanymi na podstawie modelu ciągłego. Skomentować wyniki.

2. Traktując zaszumiony sygnał $y(t)$ jako wynik pomiaru wyjścia obiektu rzeczywistego zaimplementować Filtr Kalmana (zwrócić uwagę na odmienną kolejność wyznaczania równań (5)) do estymacji stanu układu.

3. Dla różnych przypadków przeprowadzić estymację stanu układu. Przyjąć różne warunki początkowe (tj. zgodne lub niezgodne z rzeczywistymi), różne wartości szumu pomiarowego i sygnały sterujące. Porównać wyniki z wartościami uzyskanymi z symulacji modelu ciągłego (bez zaszumienia) oraz z sygnałem mierzonym (zaszumionym). Przeprowadzić proces strojenia Filtru Kalmana (poprzez dobór początkowych wartości Q, R, P oraz K) tak, by uzyskać satysfakcjonującą jakość estymacji. Skomentować uzyskane wyniki oraz wpływ poszczególnych nastaw na jakość estymacji.

4. Zmodyfikować model ciągły tak, by wprowadzić niezerowy szum procesu $v[n]$ (np. poprzez zastosowanie `scipy.integrate.solve_ivp` zamiast `scipy.signal.lsim` lub poprzez potraktowanie sygnału zaburzenia jako dodatkowy sygnał sterujący).

5. Ponownie przeanalizować różne przypadki dla niezerowego szumu procesu. Przyjąć różne warunki początkowe oraz różne wartości szumów. Porównać wyniki z wartościami uzyskanymi z symulacji modelu ciągłego oraz z sygnałem mierzonym. Przeprowadzić proces strojenia Filtru Kalmana (poprzez dobór początkowych wartości Q, R, P oraz K) tak, by uzyskać satysfakcjonującą jakość estymacji. Skomentować uzyskane wyniki oraz wpływ poszczególnych nastaw na jakość estymacji.