

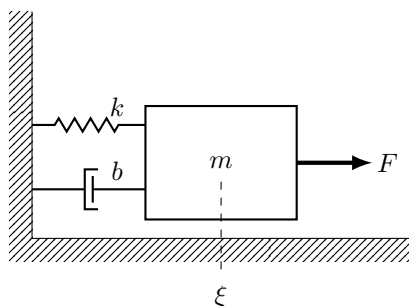
# Teoria Sterowania

## Zajęcia laboratoryjne, spotkanie 4

### 1 Estymacja stanu. Obserwator Luenbergera

#### 1.1 Wprowadzenie

Niech znów dany będzie układ liniowy zbudowany z masy połączonej sprężyną i tłumikiem.



Rysunek 1: Schemat układu

Dynamikę układu z rys. 1 opisuje liniowe równanie stanu i równanie wyjścia

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (1)$$

gdzie  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \xi & \dot{\xi} \end{bmatrix}^T$  jest stanem układu,  $y$  jest wyjściem, natomiast  $u$  jest siłą  $F$ . Masa, współczynnik sprężystości i współczynnik tłumienia wynoszą:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 1 \text{ N/m}$ ,  $b = \frac{1}{2} \text{ N s/m}$ .

W celu zaprojektowania sterownika dla układu dynamicznego często niezbędna jest znajomość pełnego stanu układu. Jednakże, w wielu przypadkach na podstawie pomiaru sygnału wyjściowego nie jest możliwe bezpośrednie wyznaczenie stanu układu. W takich sytuacjach niezbędne jest zastosowanie technik estymacji w celu uzyskania przybliżonych przebiegów zmiennych stanu.

Skuteczna estymacja stanu układu liniowego jest możliwa jedynie gdy spełniony jest warunek  $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$ , gdzie

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Jest to tzw. warunek obserwowalności układu liniowego.

Jedną ze znanych technik estymacji stanu układu liniowego jest wykorzystanie Obserwatora Luenbergera. Obserwator Luenbergera, na podstawie informacji o sygnale sterującym  $u$  podawanym na wejście systemu, znajomości modelu obiektu oraz obserwacji przebiegu wyjściowego  $y$ , wyznacza estymowane wartości wszystkich elementów wektora stanu  $x$ . Równanie obserwatora przyjmuje postać

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad (3)$$

gdzie  $\hat{x}$  jest estymatą stanu układu, natomiast  $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$  jest wektorem wzmocnień obserwatora. W równaniu obserwatora wyróżnić można dwie części - część predyktora ( $A\hat{x} + Bu$ ), wyznaczającą estymatę na podstawie równania stanu, oraz część korektora ( $L(y - C\hat{x})$ ), aktualizującą estymatę na podstawie mierzonego sygnału pomiarowego.

Błąd estymacji wyrazić można jako  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , a jego dynamikę zapisać jako

$$\dot{\tilde{x}} = H\tilde{x}, \quad (4)$$

gdzie  $H$  jest macierzą stanu błędów estymacji zależną od przyjętych wartości wzmocnień w wektorze  $L$ . Odpowiednio lokując bieguny równana charakterystycznego macierzy  $H$  (a tym samym wartości własne samej macierzy  $H$ ) możliwe jest wpływanie na dynamikę estymacji obserwatora poprzez dobór wzmocnień  $L$ .

## 1.2 Zadanie

Zaimplementować model dynamiki układu liniowego z rys. 1. Dla takiego obiektu zaimplementować obserwator Luenbergera i wyznaczyć dynamikę błędu estymacji.

1. Zbadać obserwowalność omawianego układu liniowego.
2. Wyznaczyć wartości wzmocnień obserwatora tak, by wszystkie wartości własne macierzy  $H$  były równe  $\lambda = -\omega_o$ , gdzie  $\omega_o$  jest pewną stałą. Według jakiej reguły należy dobierać  $\omega_o$  by uzyskać skuteczną estymację? Czy obserwator zadziała dla dowolnych wartości  $\omega_o$ ? Odpowiedź skomentować.

3. Dokonać estymacji stanu układu pobudzonego wybranym sygnałem wymuszającym. Z badać wpływ doboru  $\omega_o$  na uzyskiwane estymaty. Zbadać skuteczność estymacji przy  $\hat{x}(0) \neq x(0)$ . Czy dobór wzmocnień wpływa na jakość estymacji dla  $t \rightarrow \infty$ ?
4. Wprowadzić szum pomiarowy do sygnału wyjściowego  $y$ . Ponownie przeprowadzić estymację stanu. Czy jest możliwa skuteczna estymacja w obliczu wystąpienia szumu pomiarowego? Zbadać wpływ doboru  $\omega_o$  na estymację stanu w obliczu zaszumienia pomiaru.
5. Zmodyfikować model ciągły tak, by wprowadzić niezerowy błąd modelowania procesu (np. poprzez wprowadzenie szumu do modelu dynamiki lub zmianę stałych parametrów modelu). Bez modyfikowania obserwatora przeprowadzić estymację stanu. Czy obserwator Luenbergera pozwala na estymację stanu układu gdy przyjęty model odbiega od rzeczywistej dynamiki układu?

W omawianym przypadku występuje zależność między zmiennymi stanu  $x_2 = \dot{x}_1$  (tj. prędkość jest pochodną położenia). Dysponując spróbkowanym sygnałem pomiarowym  $y = x_1$  zmienną stanu  $x_2$  wyznaczyć można jako  $x_2[n] = \frac{x_1[n] - x_1[n-1]}{T_p}$  (tj. prędkość jest zmianą położenia w czasie) gdzie  $T_p$  jest okresem próbkowania. Zbadać skuteczność tej metody estymacji w omawianych przypadkach. Porównać z wynikami uzyskiwanymi poprzez obserwator Luenbergera. Czy taki sposób estymacji można rozszerzyć na większą ilość zmiennych stanu?