

**Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska**

**Projektowanie układów sterowania
(projekt grupowy)**

Sprawozdanie z projektu nr 5, zadanie nr 3

Sobolewski Konrad, Róžański Antoni, Giełdowski Daniel

Warszawa, 2017

Spis treści

1. Opis obiektu	2
2. Zadanie 1: Weryfikacja punktu pracy	3
3. Zadanie 2: Odpowiedzi skokowe	4
3.1. Odpowiedzi skokowe	4
4. Zadanie 3: Algorytmy PID i DMC	5
4.1. Cyfrowy algorytm PID	5
4.2. Analityczny algorytm DMC	5
5. Zadanie 4: Strojenie regulatorów	8
5.1. PID	8
5.1.1. Konfiguracja	8
5.1.2. PID - konfiguracja pierwsza	9

1. Opis obiektu

Obiekt używany w projekcie opisany jest daną przez prowadzącego funkcją:

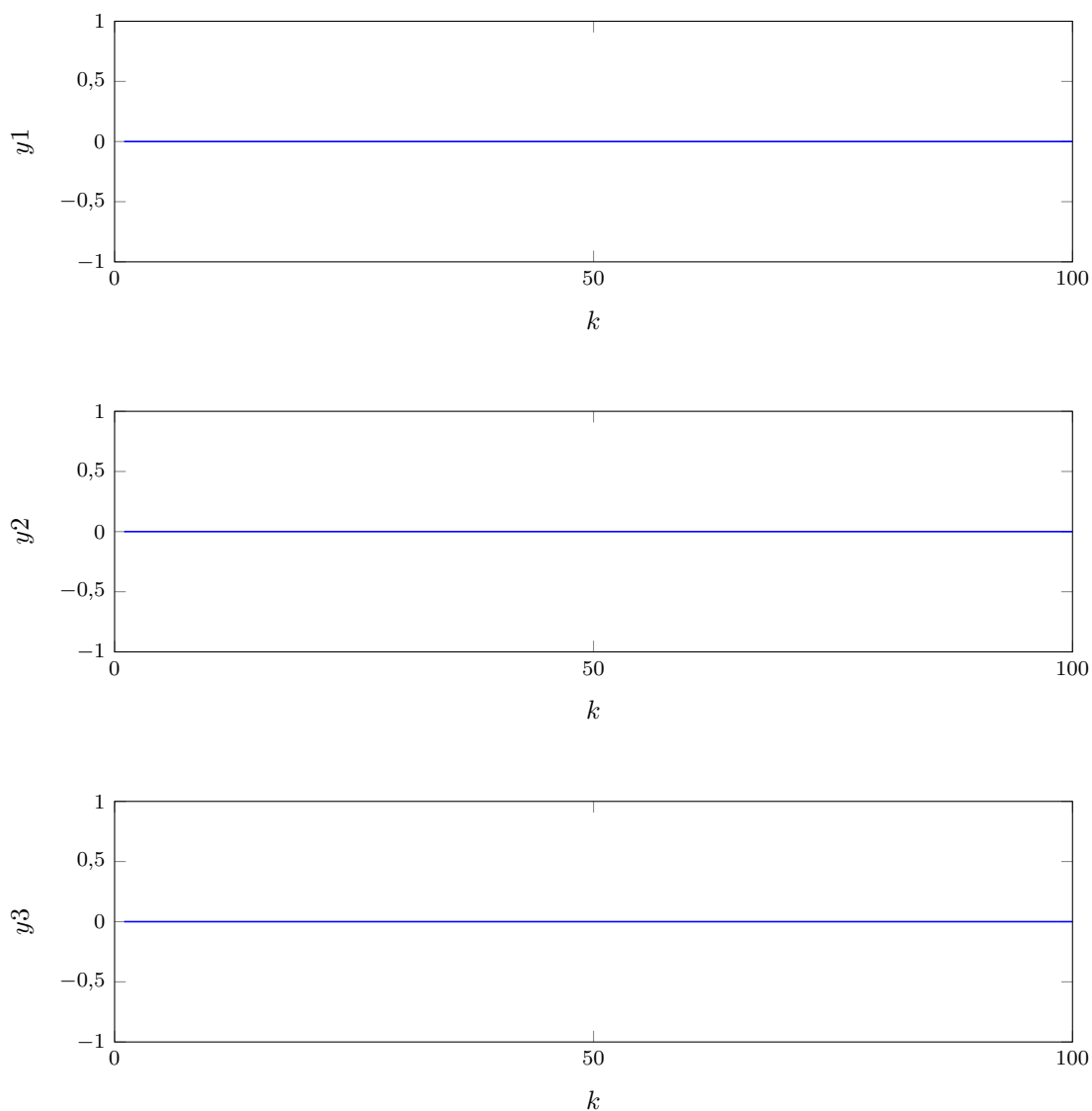
$$\begin{aligned}[y1(k), y2(k), y3(k)] = & \textit{symulacja_obektu3}(u1(k-1), u1(k-2), u1(k-3), u1(k-4), \\ & u2(k-1), u2(k-2), u2(k-3), u2(k-4), \\ & u3(k-1), u3(k-2), u3(k-3), u3(k-4), \\ & u4(k-1), u4(k-2), u4(k-3), u4(k-4), \\ & y1(k-1), y1(k-2), y1(k-3), y1(k-4), \\ & y2(k-1), y2(k-2), y2(k-3), y2(k-4), \\ & y3(k-1), y3(k-2), y3(k-3), y3(k-4))\end{aligned}$$

gdzie k jest aktualną chwilą symulacji sygnału próbkowanego.

Wartości sygnałów w punkcie pracy (w stanie ustalonym) mają wartość $u1 = u2 = u3 = u4 = y1 = y2 = y3 = 0$. Okres próbkowania obiektu wynosi $T_p = 0,5s$.

2. Zadanie 1: Weryfikacja punktu pracy

Pierwszym poleceniem było zweryfikowanie poprawności punktu pracy obiektu. Udało się to osiągnąć za pomocą prostego sprawdzenia, przy jakich wartościach wyjść stabilizuje się obiekt przy stałym sterowaniu, równym jego wartości w punkcie pracy ($U1_{pp} = 0, U2_{pp} = 0, U3_{pp} = 0, U4_{pp} = 0$). Eksperyment potwierdził wcześniej podane wartości wyjść ($Y1_{pp} = 0, Y2_{pp} = 0, Y3_{pp} = 0$), a jego przebieg obrazuje wykres 2.1.

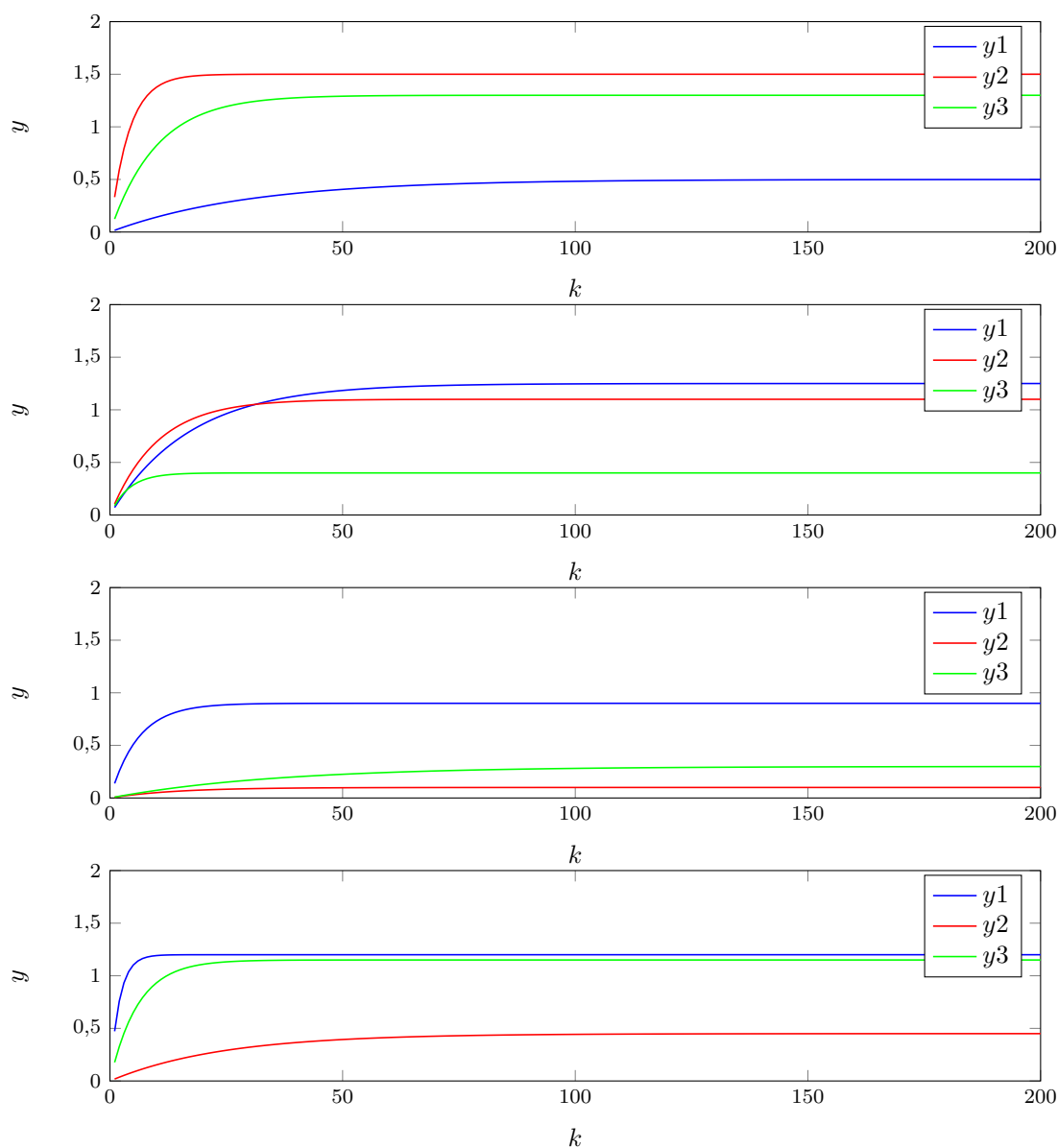


Rys. 2.1. Zachowanie obiektu w punkcie pracy

3. Zadanie 2: Odpowiedzi skokowe

3.1. Odpowiedzi skokowe

W tej części projektu należało wyznaczyć symulacyjnie wszystkie odpowiedzi skokowe (rys. 3.1). Eksperyment zakładał, iż obiekt będzie na początku w punkcie pracy, a następnie zostanie wykonany skok jednostkowy jednego z sygnałów sterujących. Poniżej przedstawiono odpowiedzi jednostkowe wszystkich wyjść dla skoków wszystkich sygnałów sterujących.



Rys. 3.1. Wartości wyjść po skokach jednostkowych sterowań kolejno: u_1 , u_2 , u_3 i u_4

4. Zadanie 3: Algorytmy PID i DMC

4.1. Cyfrowy algorytm PID

W projekcie został wykorzystany regulator cyfrowy *PID*, którego parametry są opisane poniższymi wzorami, gdzie K - wzmocnienie członu P, T_p - czas próbkowania, T_i - czas zdwojenia członu całkującego I , T_d - czas wyprzedzenia członu różniczkującego D , n_u - ilość sterowań, n_y - ilość wyjść.

$$r_0^j = K^j * (1 + T_p/(2 * T_i^j) + T_d^j/T_p) \quad \forall j \in < 1, n_u > \quad (4.1)$$

$$r_1^j = K^j * (T_p/(2 * T_i^j) - 2 * T_d^j/T_p - 1) \quad \forall j \in < 1, n_u > \quad (4.2)$$

$$r_2^j = K * T_d^j/T_p \quad \forall j \in < 1, n_u > \quad (4.3)$$

W każdej iteracji pętli sterowania są obliczane uchyby wyjść obiektu.

$$e(k)^j = y^{\text{zad}}(k)^j - y(k)^j \quad \forall j \in < 1, n_y > \quad (4.4)$$

Sterowania regulatora zostają wyliczone na bieżącą chwilę przy użyciu wzoru:

$$U(k)^j = r_2^j * e(k-2)^i + r_1^j * e(k-1)^i + r_0^j * e(k)^i + u(k-1)^j \quad \text{gdzie} \quad j \in < 1, n_u >, \quad i \in < 1, n_y > \quad (4.5)$$

Każdemu wyjściu przypada jedno sterowanie, przy tym każde sterowanie może być wykorzystane tylko do jednego wyjścia, a każde wyjście ma przyporządkowane inne sterowanie. Ponieważ w naszym przykładzie mamy 3 wyjścia i 4 wejścia, to jedno z wejść będziemy musieli odrzucić.

4.2. Analityczny algorytm DMC

Do obliczeń wykorzystujemy następujące wzory:

$$\mathbf{y}^{\text{zad}}(k) = \begin{bmatrix} y_1^{\text{zad}}(k) \\ \vdots \\ y_{n_y}^{\text{zad}}(k) \end{bmatrix}_{n_y \times 1} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{n_y}(k) \end{bmatrix}_{n_y \times 1} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_{n_u}(k) \end{bmatrix}_{n_u \times 1} \quad (4.8)$$

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \vdots \\ \Delta u_{n_u}(k) \end{bmatrix}_{n_u \times 1} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} y(k|k) \\ \vdots \\ y(k|k) \end{bmatrix}_{N \times n_y \times 1} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Y}^{\text{zad}}(k) = \begin{bmatrix} y^{\text{zad}}(k|k) \\ \vdots \\ y^{\text{zad}}(k|k) \end{bmatrix}_{N \times n_y \times 1} \quad (4.11)$$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix}_{N_u \times n_u \times 1} \quad (4.12)$$

$$\Delta \mathbf{U}^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k - (D-1)) \end{bmatrix}_{(D-1) \times n_u \times 1} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{S}_l = \begin{bmatrix} s_l^{11} & s_l^{12} & \dots & s_l^{1n_u} \\ s_l^{21} & s_l^{22} & \dots & s_l^{2n_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_l^{n_y 1} & s_l^{n_y 2} & \dots & s_l^{n_y n_u} \end{bmatrix}_{n_y \times n_u}, l = 1, \dots, D. \quad (4.14)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ S_2 & S_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N & S_{N-1} & \dots & S_{N-N_u+1} \end{bmatrix}_{(N \times n_y) \times (N_u \times n_u)} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} S_2 - S_1 & S_3 - S_2 & \dots & S_D - S_{D-1} \\ S_3 - S_1 & S_4 - S_2 & \dots & S_{D+1} - S_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N+1} - S_1 & S_{N+2} - S_2 & \dots & S_{N+D-1} - S_{D-1} \end{bmatrix}_{(N \times n_y) \times ((D-1) \times n_u)} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{Y}^0(k) = \mathbf{Y}(k) + \mathbf{M}^P \Delta \mathbf{U}^P(k) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{\Psi} \quad (4.18)$$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{K}(\mathbf{Y}^{\text{zad}}(k) - \mathbf{Y}^0(k)) \quad (4.19)$$

W naszej regulacji potrzebujemy wyznaczyć tylko pierwszy element macierzy $\Delta \mathbf{U}(k)$ czyli $\Delta u(k|k)$. W tym celu rozwijamy macierz \mathbf{K} do postaci:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_{N_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,N} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N_u,1} & k_{N_u,2} & \dots & k_{N_u,N} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

gdzie $k_{i,j}$ jest macierzą o wymiarach $n_u \times n_y$, a co za tym idzie K_i jest macierzą o wymiarach $n_u \times (N \times n_y)$. Teraz prawo regulacji można zapisać:

$$\Delta u(k) = K_1(Y^{zad}(k) - Y^0(k)) = K_1(Y^{zad}(k) - Y(k) - M^P \Delta U^P(k)) \quad (4.21)$$

Aktualne sterowanie otrzymujemy poprzez zsumowanie poprzedniego sterowania i aktualnie wyliczonego $\Delta u(k|k)$.

Dodatkowo nakład obliczeń można znacznie zmniejszyć jeszcze bardziej upraszczając to równanie (o co poproszono nas w zadaniu 6). W tym celu zmieniamy wzór regulacji na:

$$\Delta u(k|k) = k_e e(k) - k_u \Delta U^P \quad (4.22)$$

gdzie:

$$e(k) = y^{zad}(k) - y(k) \quad (4.23)$$

Ponieważ nasze $n_u = 4$ i $n_y = 3$ to:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_e^{1,1} & k_e^{1,2} & k_e^{1,3} \\ k_e^{2,1} & k_e^{2,2} & k_e^{2,3} \\ k_e^{3,1} & k_e^{3,2} & k_e^{3,3} \\ k_e^{4,1} & k_e^{4,2} & k_e^{4,3} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

gdzie dla każdego i oraz j , $k_e^{i,j}$ to suma elementów znajdujących się w wierszu i -tym licząc od j -tego elementu co 3 elementy.

$$k_u = K_1 M^P \quad (4.25)$$

5. Zadanie 4: Strojenie regulatorów

Następnym zadaniem było wyznaczenie optymalnych parametrów algorytmów PID i DMC odpowiednio za pomocą metody inżynierskiej(PID) i eksperymentalnej(DMC). Jakość regulacji oceniana była wizualnie - na podstawie wykresów - oraz obliczeniowo na podstawie wskaźnika jakości regulacji. Wzór na ten wskaźnik znajduje się poniżej.

$$E = \sum_{k=1}^{k_{kone}} (Y^{zad}(k) - Y(k))^2 \quad (5.1)$$

5.1. PID

Nastawy PID dobieramy włączając w tym samym czasie tylko jeden tor regulacji z istniejących trzech i dobierając jego parametry. Na końcu łączymy 3 tory i korygujemy nastawy. Strojąc jeden tor nie będziemy się przejmować innymi, więc nie umieszczaliśmy ich wykresów, a przedstawione wartości błędów będą sumą tylko z tego jednego toru.

5.1.1. Konfiguracja

Ponieważ posiadamy 4 wejścia i 3 wyjścia w celu napisania regulatora PID jedno z wejść będziemy musieli odrzucić. Pozostaje zdecydować które. W tym celu tworzymy macierz wzmocnień KKK zawierającą wzmocnienia statyczne wszystkich torów procesów (wersy odzwierciedlają kolejne sterowania, a kolumny kolejne wyjścia).

$$KKK = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & 1,3 \\ 1,25 & 1,1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,1 & 0,3 \\ 1,2 & 0,45 & 1,15 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Oczywiście już na jej podstawie moglibyśmy wybrać niezłą konfigurację wyjść, jednakże my szukamy najlepszej. W tym celu dzielimy macierz KKK na cztery macierze KK_i o wymiarach 3x3 usuwając za każdym razem inny wiersz (numer i nową macierz to numer usuniętego wiersza).

$$KK_1 = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,1 & 0,3 \\ 1,2 & 0,45 & 1,15 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$KK_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & 1,3 \\ 0,9 & 0,1 & 0,3 \\ 1,2 & 0,45 & 1,15 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$KK_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & 1,3 \\ 1,25 & 1,1 & 0,4 \\ 1,2 & 0,45 & 1,15 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$KK_4 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & 1,3 \\ 1,25 & 1,1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Następnie obliczamy w Matlabie wskaźniki uwarunkowania tych macierzy, które wynoszą odpowiednio:

- $\text{cond}(\text{KK}_1)=6,7173$
- $\text{cond}(\text{KK}_2)=11,1599$
- $\text{cond}(\text{KK}_3)=4,2242$
- $\text{cond}(\text{KK}_4)=6,9254$

Następnie wybieramy tą, której wskaźnik jest najmniejszy (w naszym przypadku KK_3) i obliczamy dla niej (w matlabie) macierz $\text{KK}_i \cdot (\text{KK}_i(-1))'$. Następnie wybieramy z obliczonej macierzy 3 elementy, po jednym na każdy wiersz i kolumnę, mające wartości jak najbliższe zera (wartości ujemne są wykluczone). Położenie tych elementów określa które sterowanie powinno odpowiadać któremu wyjściu. Poniżej przedstawiam wyniki tego równania dla wszystkich macierzy KK_i .

$$\text{Dla } \text{KK}_1 : \begin{bmatrix} 0,0383 & 1,1362 & -0,1744 \\ 1,4943 & -0,1465 & -0,3477 \\ -0,5325 & 0,0103 & 1,5222 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\text{Dla } \text{KK}_2 : \begin{bmatrix} 0,0153 & 1,5529 & -0,5683 \\ 1,5736 & 0,1511 & -0,7247 \\ -0,5890 & -0,7040 & 2,2929 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\text{Dla } \text{KK}_3 : \begin{bmatrix} -0,2888 & 0,7646 & 0,5242 \\ 0,7586 & 0,5768 & -0,3354 \\ 0,5302 & -0,3414 & 0,8112 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\text{Dla } \text{KK}_4 : \begin{bmatrix} -0,1447 & 0,0225 & 1,1223 \\ 0,3992 & 1,1198 & -0,5190 \\ 0,7455 & -0,1422 & 0,3967 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Normalnie wybralibyśmy jedynie konfigurację uzyskaną z macierzy o najniższym wskaźniku uwarunkowania (KK_3), jednakże zadanie nakazuje przetestować różne konfiguracje regulatora PID. Z tego powodu zdecydowaliśmy się wybrać po jednej (najlepszej) konfiguracji z każdej z macierzy. Będą to:

- Dla KK_1 : y_1-u_3 y_2-u_2 y_3-u_4
- Dla KK_2 : y_1-u_3 y_2-u_1 y_3-u_4
- Dla KK_3 : y_1-u_2 y_2-u_1 y_3-u_4
- Dla KK_4 : y_1-u_3 y_2-u_2 y_3-u_1

5.1.2. PID - konfiguracja pierwsza

Pierwsza konfiguracja naszego PID'a zakłada, że wyjście pierwsze sterujemy wejściem trzecim, wyjście drugie wejściem drugim, a wyjście trzecie wejściem czwartym.

Tor pierwszy

Nastawy PID wyznaczamy metodą inżynierską. Oznacza to, że zaczynamy od wyznaczenia wzmocnienia K . Jego wartość ustawiamy na połowę wartości, dla której obiekt wpada w niekończące się i nierosnące oscylacje. Dla pierwszego toru $K_{osc} = 13,3642$, co oznacza, że jako wartość K przyjmujemy $K = 6,6821$. Oscylacje przedstawia poniższy wykres 5.1.

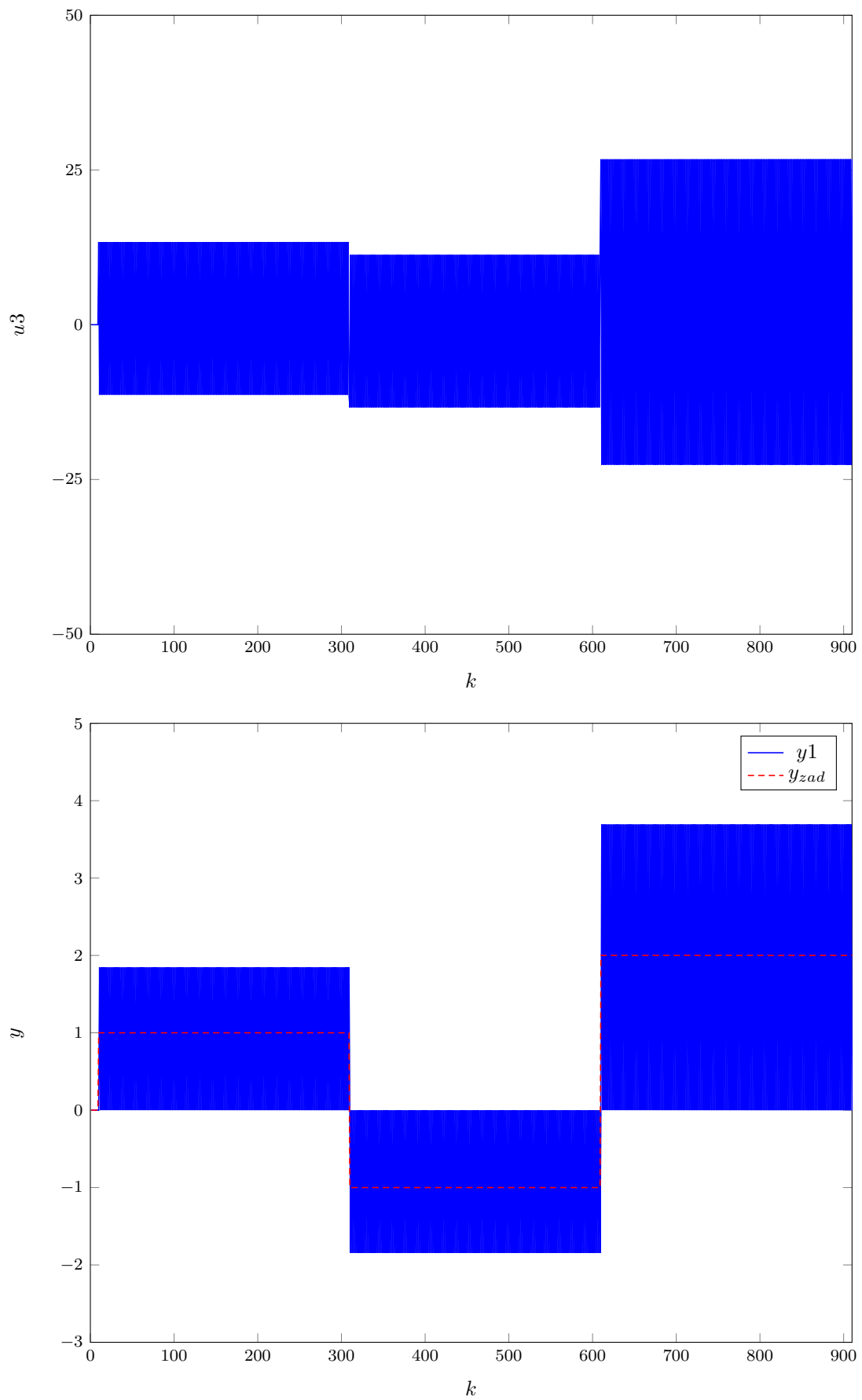
y	u
y_1	u_3
y_2	u_2
y_3	u_4

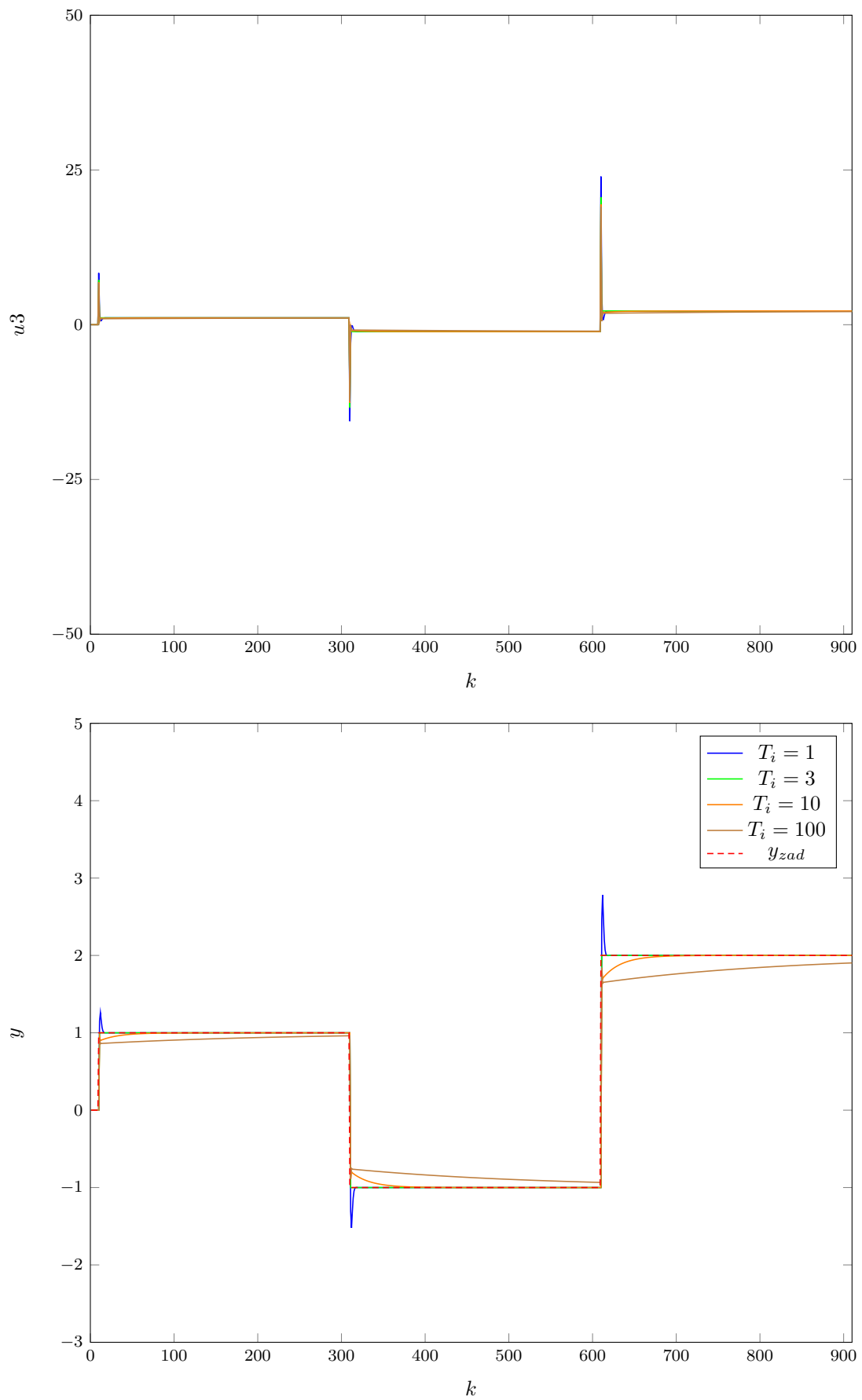
Tab. 5.1. Pierwsza konfiguracja

Następnie przystąpiliśmy do wyznaczenia czasu zdwojenia T_i . Po wielu testach zdecydowaliśmy się, że najlepszy przebieg oraz najniższa wartość błędu występuje dla $T_i = 3$. Poniżej w tabeli 5.2 przedstawiono wartości błędów dla różnych wartości T_i . Przebiegi dla tych wartości pokazano na wykresie 5.2.

T_i	$E1$
1	15,7016
3	14,0000
10	15,6587
100	34,8237

Tab. 5.2. Wartości błędu dla różnych wartości T_i

Rys. 5.1. Przebieg wyjścia pierwszego i wejścia trzeciego dla wzmocnienia oscylacyjnego $K_{osc} = 13,3642$

Rys. 5.2. Przebieg wyjścia pierwszego i wejścia trzeciego dla różnych wartości T_i