

**Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska**

**Projektowanie układów sterowania
(projekt grupowy)**

Sprawozdanie z projektu nr 1, zadanie nr 11

Sobolewski Konrad, Róžański Antoni, Giełdowski Daniel

Warszawa, 2017

Spis treści

1. Opis obiektu	2
2. Zadanie 1: Punkt pracy	3
3. Zadanie 2: Badanie zachowania obiektu	4
3.1. Odpowiedź skokowa	4
3.2. Charakterystyka statyczna	5
3.3. Właściwości dynamiczne	6
4. Zadanie 3: Znormalizowana odpowiedź skokowa	7
5. Zadanie 4: Algorytmy PID i DMC	8
5.1. Cyfrowy algorytm PID	8
5.2. Analityczny algorytm DMC	8
6. Zadanie 5: Strojenie regulatorów	10
6.1. PID	10
6.2. DMC	15
7. Zadanie 6: Optymalizacja	20
7.1. PID	20
7.2. DMC	20

1. Opis obiektu

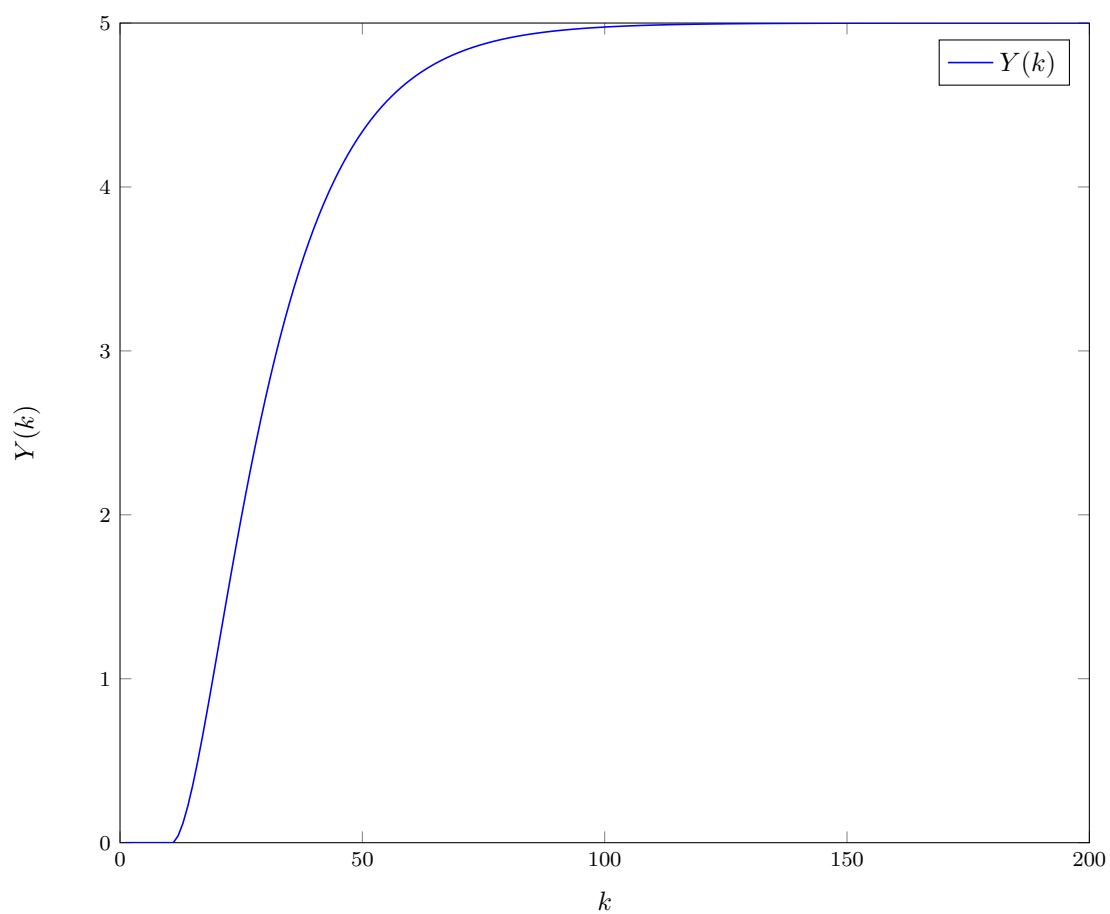
Obiekt używany w projekcie opisany jest daną przez prowadzącego funkcją wywoływaną poleceniem:

$$Y(k) = \text{symulacja_obiektu11}(U(k-10), U(k-11), Y(k-1), Y(k-2)) \quad (1.1)$$

gdzie k jest aktualną chwilą symulacji. Punkt pracy obiektu jest osiągany dla wartości sterowania równej $U_{pp} = 0,8$, natomiast wyjście w owym punkcie ustala się na wartości $Y_{pp} = 5,0$. Okres próbkowania obiektu wynosi $T_p = 0,5s$. Ograniczenia wartości sterowania wynoszą $U^{\min} = 0,6$, $U^{\max} = 1,0$.

2. Zadanie 1: Punkt pracy

Pierwszym poleceniem było zweryfikowanie poprawności punktu pracy obiektu. Udało się to osiągnąć za pomocą prostego sprawdzenia dla jakiej wartości wyjścia stabilizuje się obiekt przy stałym sterowaniu równym sterowaniu w punkcie pracy. Eksperyment potwierdził wcześniej opisane wartości, a jego przebieg obrazuje wykres 2.1.

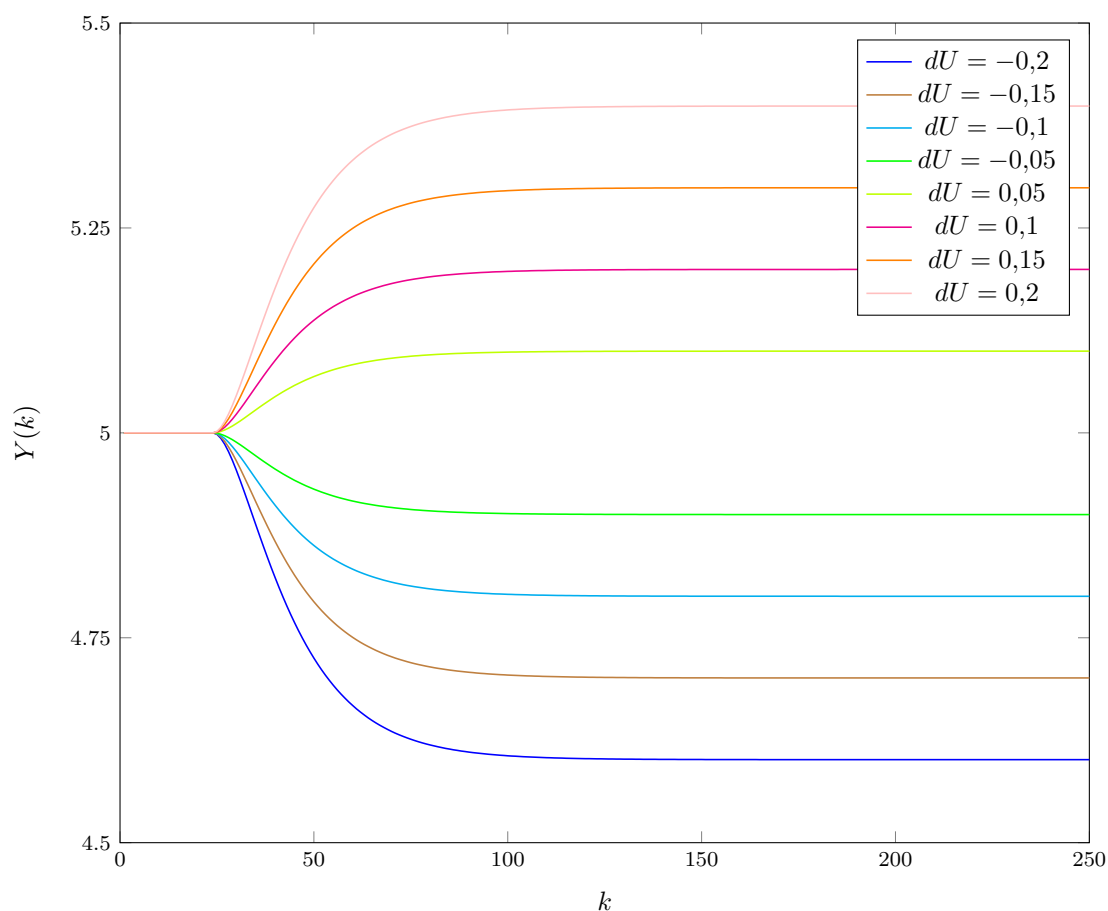


Rys. 2.1. Wykres $Y(k)$ dążący do $Y_{pp}=5$ dla dla stałego sterowanie równego $U_{pp}=0,8$

3. Zadanie 2: Badanie zachowania obiektu

3.1. Odpowiedź skokowa

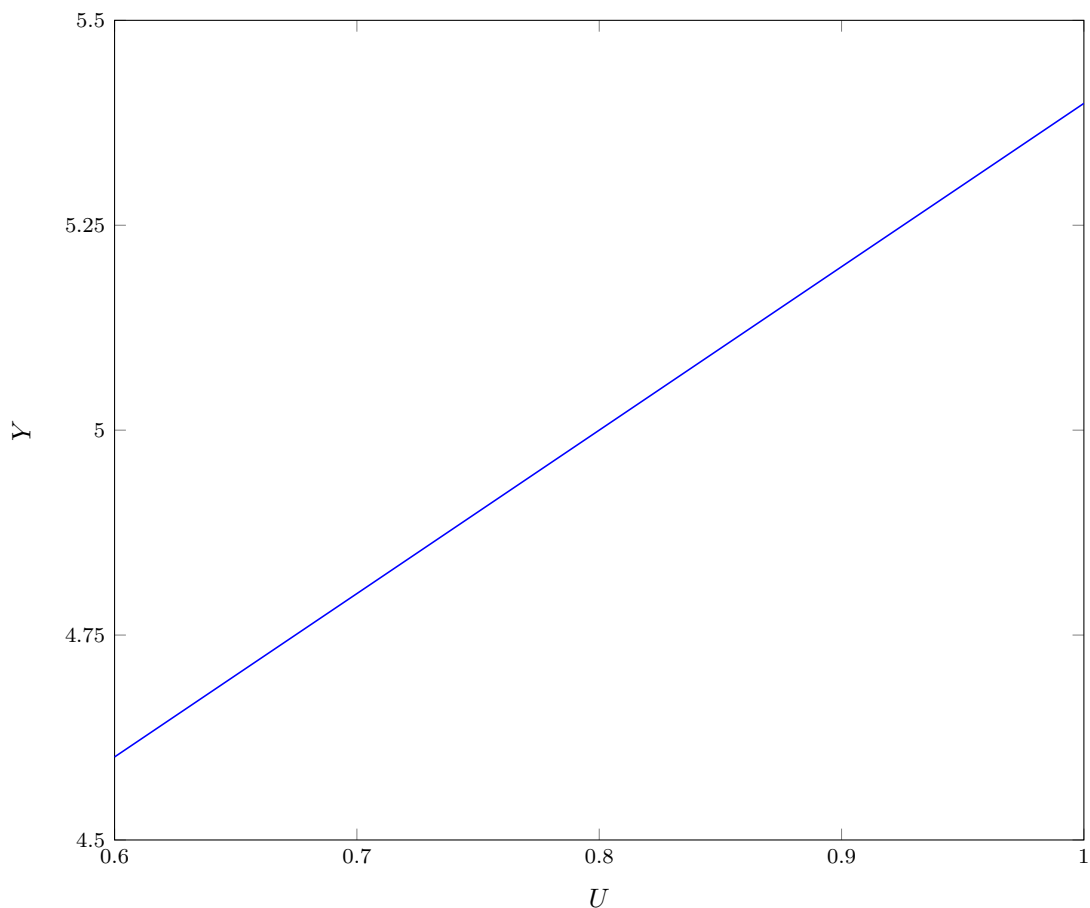
W tej części projektu badane było zachowanie odpowiedzi skokowej dla różnych wartości skoku sygnału sterującego. Eksperyment zakładał, iż na początku obiekt będzie w punkcie pracy ($Y = 5,0, U = 0,8$), a następnie, w chwili $k = 15$ wykonany zostanie skok do zaplanowanej wcześniejszej wartości sterowania. Wartość sterowania po skoku dla zamieszczonych wyników mieściła się w zakresie ograniczeń. Wyniki eksperymentu zostały zobrazowane na wykresie 3.1.



Rys. 3.1. Wykres $Y(k)$ dla różnych skoków sterowania z $U_{pp}=0,8$ o dU

3.2. Charakterystyka statyczna

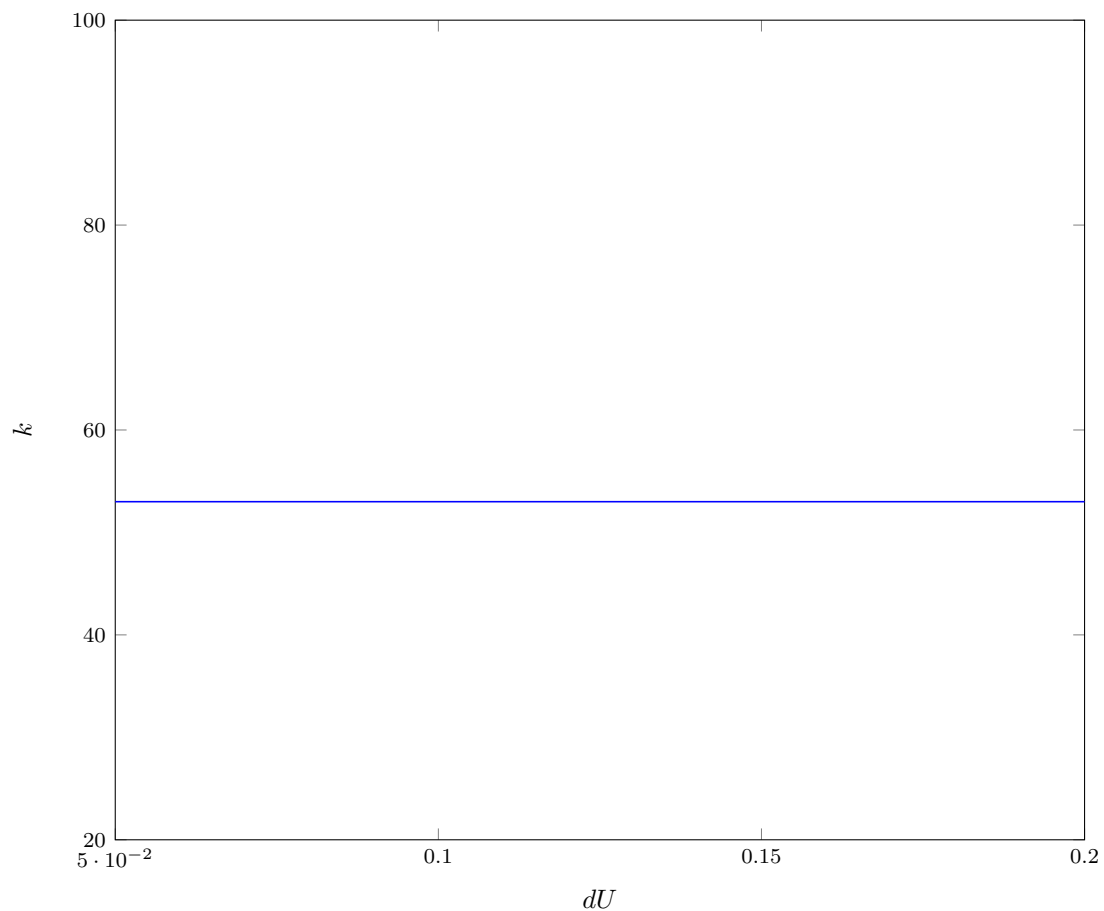
Następnie wyznaczona została charakterystyka statyczna obiektu. Znaleziona została poprzez sprawdzenie przy jakiej wartości wyjścia obiekt stabilizuje się dla danej wartości sterowania. Na podstawie tego sporządzony został wykres. Wyniki zostały zamieszczone na wykresie 3.2. Liniowość charakterystyki statycznej można było także stwierdzić na podstawie wykresu 3.1, gdyż wyraźnie widać na nim że odległości między końcową wartością $Y(k)$ dla kolejnych skoków są (na tyle na ile można to ocenić wizualnie) identyczne. Otrzymana charakterystyka jest liniowa. Wzmocnienie statyczne jest równe wartości końcowej znormalizowanej odpowiedzi skokowej i ma wartość 1,9936.



Rys. 3.2. Wykres charakterystyki statycznej obiektu $Y(U)$

3.3. Właściwości dynamiczne

Charakterystyka dynamiczna została wyznaczona zależnie od wielkości skoku sterowania. Skoki sterowania wykonywane były z punktu pracy w obrębie ograniczeń. Zmierzone zostało po ilu krokach od momentu skoku różnica wartości wyjścia obiektu i Y_{pp} wynosiła powyżej 90% całkowitego skoku wartości $Y(k)$ wyjścia obiektu. Z otrzymanych danych wynika, że charakterystyka dynamiczna jest liniowa, dla każdego skoku sterowania otrzymana ilość kroków była identyczna i równa 53. Wyniki zostały zamieszczone na wykresie 3.3.



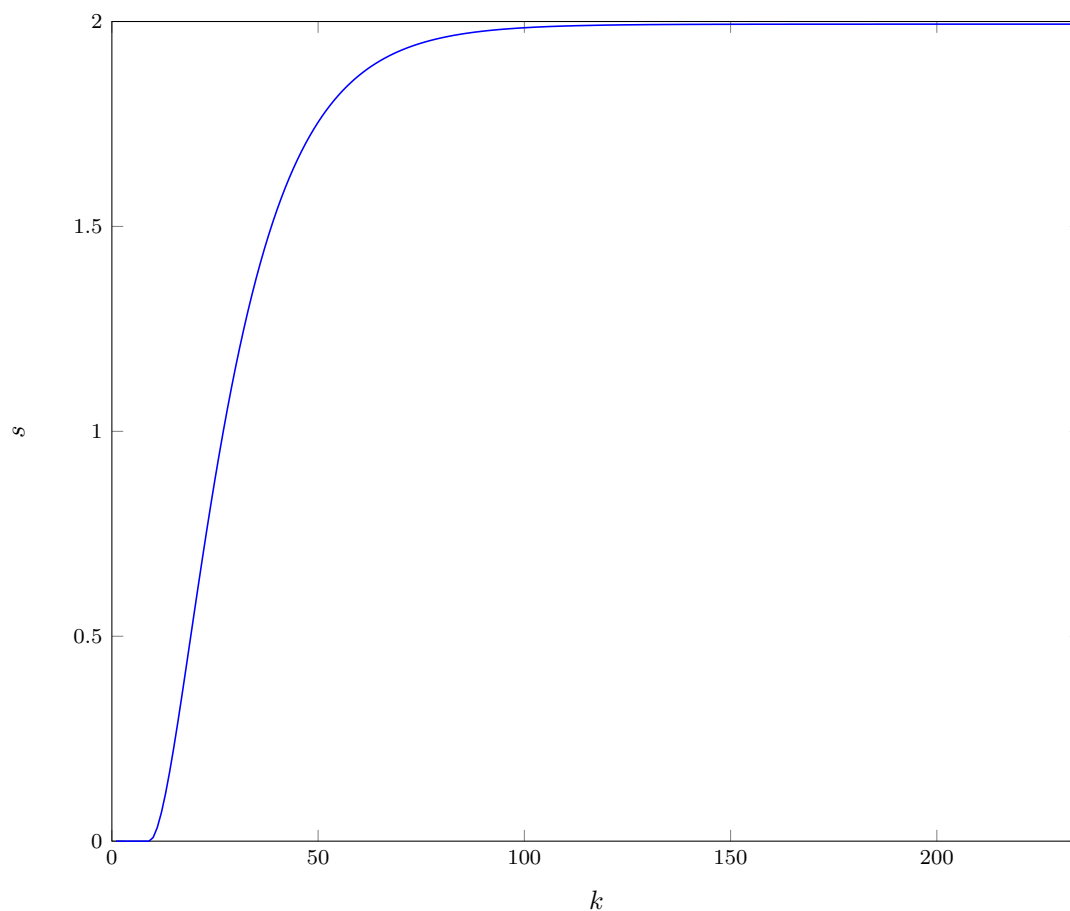
Rys. 3.3. Wykres ilości kroków od momentu skoku sterowania po ilu różnica aktualnej i początkowej wartości $Y(k)$ staje się większa niż 90% różnicy końcowej i początkowej wartości $Y(k)$

4. Zadanie 3: Znormalizowana odpowiedź skokowa

Normalizacja odpowiedzi skokowej polega na przesunięciu każdej wartości wyjścia obiektu o wartość w punkcie pracy, a następnie podzielenie jej przez długość skoku sterowania.

$$S = (Y - Y_{pp})/dU; \quad (4.1)$$

W ten sposób otrzymujemy wartość odpowiedzi skokowej w formie w jakiej otrzymalibyśmy ją robiąc skok jednostkowy. Taka odpowiedź skokowa jest gotowa do użytku w regulatorze *DMC*. Wyniki zostały przedstawione na wykresie 4.1.



Rys. 4.1. Wykres znormalizowanej odpowiedzi skokowej

5. Zadanie 4: Algorytmy PID i DMC

W projektowanych regulatorach *PID* i *DMC* zostały zastosowane następujące ograniczenia:

$$\Delta U^{\max} = 0,05 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{jeżeli } \Delta U(k) > \Delta U^{\max} \text{ to } \Delta U(k) &= \Delta U^{\max} \\ \text{jeżeli } \Delta U(k) < -\Delta U^{\max} \text{ to } \Delta U(k) &= -\Delta U^{\max} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{jeżeli } U(k) > U^{\max} \text{ to } U(k) &= U^{\max} \\ \text{jeżeli } U(k) < U^{\min} \text{ to } U(k) &= U^{\min} \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.1. Cyfrowy algorytm PID

W projekcie został wykorzystany regulator cyfrowy *PID*, którego parametry są opisane poniższymi wzorami, gdzie K - wzmacnienie członu P, T_p - czas próbkowania, T_i - czas zdwojenia członu całkującego I , T_d - czas wyprzedzenia członu różniczkującego D .

$$r_0 = K * (1 + T_p/(2 * T_i) + T_d/T_p) \quad (5.4)$$

$$r_1 = K * (T_p/(2 * T_i) - 2 * T_d/T_p - 1) \quad (5.5)$$

$$r_2 = K * T_d/T_p \quad (5.6)$$

W każdej iteracji pętli sterowania jest obliczany uchyb wyjścia obiektu od wartości zadanej jego wyjścia.

$$e(k) = Y^{\text{zad}}(k) - Y(k); \quad (5.7)$$

Sterowanie regulatora zostaje wyliczone na bieżącą chwilę przy użyciu wzoru:

$$U(k) = r_2 * e(k - 2) + r_1 * e(k - 1) + r_0 * e(k) + U(k - 1); \quad (5.8)$$

5.2. Analityczny algorytm DMC

Do obliczeń wykorzystujemy następujące wzory:

$$\mathbf{Y}^{\text{zad}}(k) = \begin{bmatrix} Y^{\text{zad}}(k) \\ \vdots \\ Y^{\text{zad}}(k) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (5.10)$$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix}_{N_u \times 1} \quad (5.11)$$

$$\Delta \mathbf{U}^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k - (D-1)) \end{bmatrix}_{(D-1) \times 1} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \dots & s_{N-N_u+1} \end{bmatrix}_{N \times N_u} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \dots & s_D - s_{D-1} \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & \dots & s_{D+1} - s_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+1} - s_1 & s_{N+2} - s_2 & \dots & s_{N+D-1} - s_{D-1} \end{bmatrix}_{N \times D-1} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{Y}^0(k) = \mathbf{Y}(k) + \mathbf{M}^P \Delta \mathbf{U}^P(k) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \lambda * \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}^T \quad (5.16)$$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{K}(\mathbf{Y}^{zad}(k) - \mathbf{Y}^0(k)) \quad (5.17)$$

W naszej regulacji potrzebujemy wyznaczyć tylko pierwszy element macierzy $\Delta \mathbf{U}(k)$ czyli $\Delta u(k|k)$. W tym celu rozwijamy wzór do postaci:

$$\Delta u(k|k) = k_e e(k) - k_u \Delta \mathbf{U}^P \quad (5.18)$$

gdzie:

$$e(k) = Y^{zad}(k) - Y(k) \quad (5.19)$$

$$k_e = \sum_{i=1}^N K(1, i) \quad (5.20)$$

$$k_u = k \mathbf{M}^P \quad (5.21)$$

k to oznaczenie pierwszego wiersza macierzy K. Aktualne sterowanie otrzymujemy poprzez zsumowanie poprzedniego sterowania i aktualnie wyliczonego $\Delta u(k|k)$.

6. Zadanie 5: Strojenie regulatorów

Następnym zadaniem było wyznaczenie optymalnych parametrów algorytmów PID i DMC odpowiednio za pomocą metody inżynierskiej(PID) i eksperymentalnej(DMC). Jakość regulacji oceniana była wizualnie - na podstawie wykresów - oraz obliczeniowo na podstawie wskaźnika jakości regulacji. Wzór na ten wskaźnik znajduje się poniżej.

$$E = \sum_{k=1}^{k_{konc}} (Y^{zad}(k) - Y(k))^2 \quad (6.1)$$

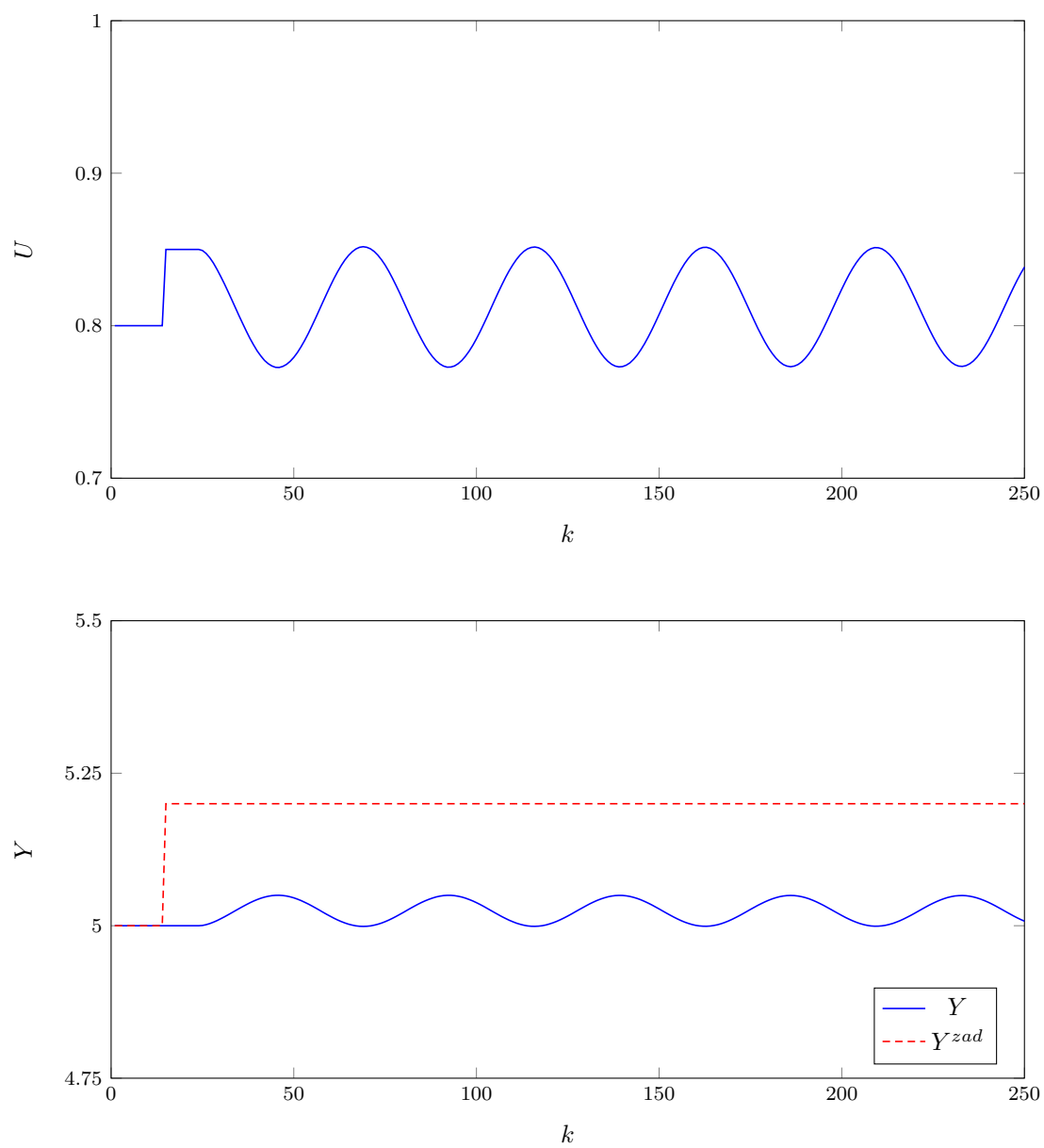
6.1. PID

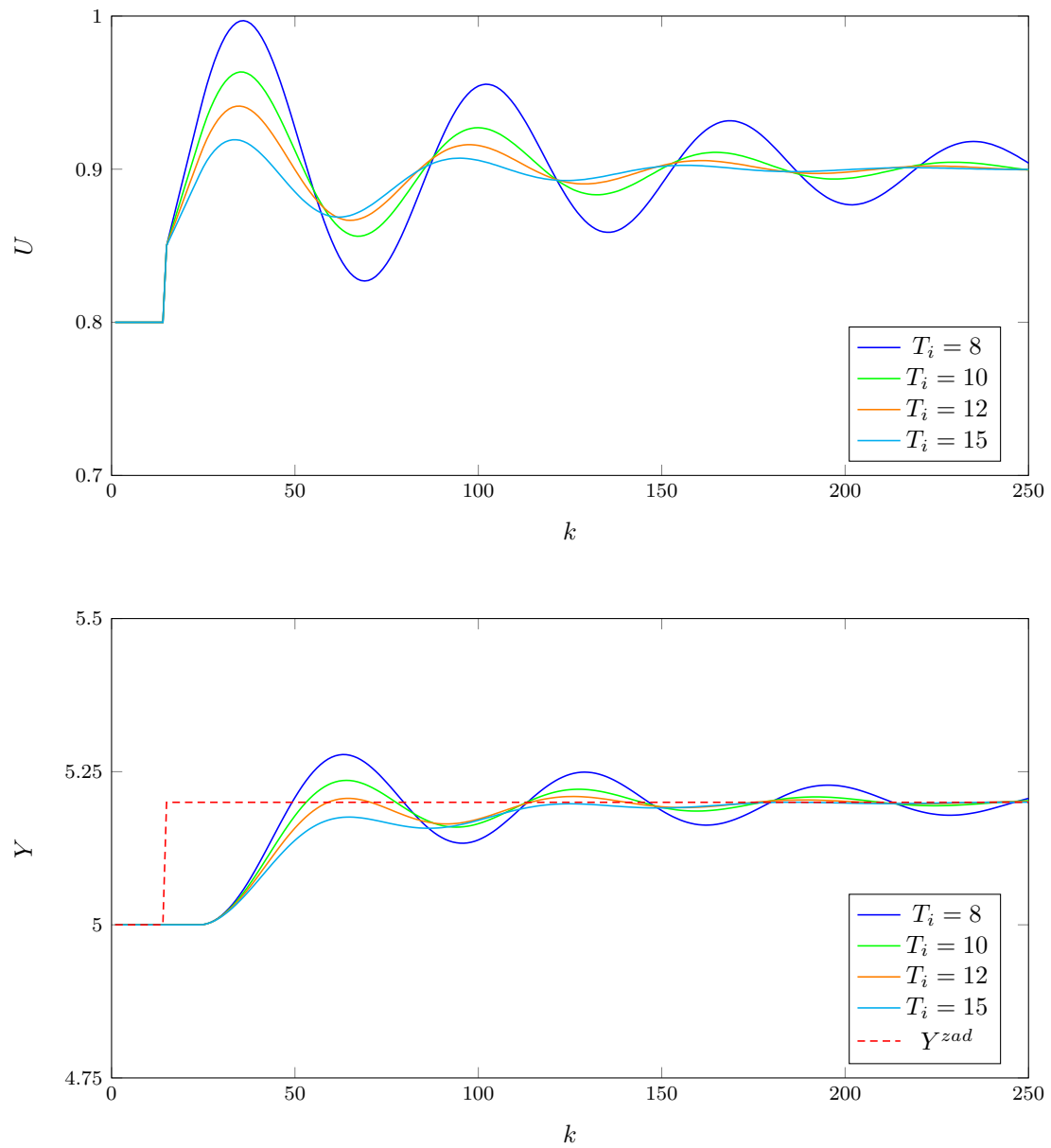
Do wyznaczenia nastaw regulatora *PID* korzystamy z metody inżynierskiej. Na początku włączamy wyłącznie człon *P* i szukamy wzmocnienia *K* dla którego obiekt w wyniku skoku sterowania wpada w niegasnące oscylacje. Wynikiem eksperymentu jest wartość $K_{osc} = 1,55$ rys.6.1. Zgodnie z założeniem metody inżynierskiej w dalszych poszukiwaniach wykorzystywać będziemy $K = 0,5K_{osc} = 0,775$ jako wzmocnienie.

Kolejnym krokiem było eksperymentalne dobranie parametru T_i członu całkującego I. Dla przetestowanych T_i wartości wskaźnika jakości regulacji wynoszą odpowiednio:

- $T_i = 8 - E = 1,1173$
- $T_i = 10 - E = 0,9558$
- $T_i = 12 - E = 0,9579$
- $T_i = 15 - E = 1,0308$

Dla $T_i = 8$ występują znaczne oscylacje obiektu oraz najgorsza wartość wskaźnika jakości. Dla $T_i = 15$ wskaźnik jest już mniejszy, jednakże wykres zaczyna przyjmować niepożądany kształt (oscylacje poniżej poziomu wartości zadanej). Dla dwóch pozostałych testów wskaźnik jakości jest bardzo podobny. Dla $T_i = 12$ wykres wyjścia obiektu jest jednak lepszy niż dla $T_i = 10$ ze względu na mniejsze oscylacje oraz przeregulowanie i szybszy czas regulacji. Dlatego właśnie wartość $T_i = 12$ przyjmujemy jako końcową. Wyniki poszczególnych prób przedstawiono na wykresie rys.6.2.

Rys. 6.1. Obiekt wprowadzony w oscylacje przy $K=1,55$

Rys. 6.2. Działanie PID dla różnych wartości T_i

Na koniec eksperymentalnie dobraliśmy parametr T_d rys.6.3. Dla przetestowanych T_d wartości wskaźnika jakości regulacji wynoszą odpowiednio:

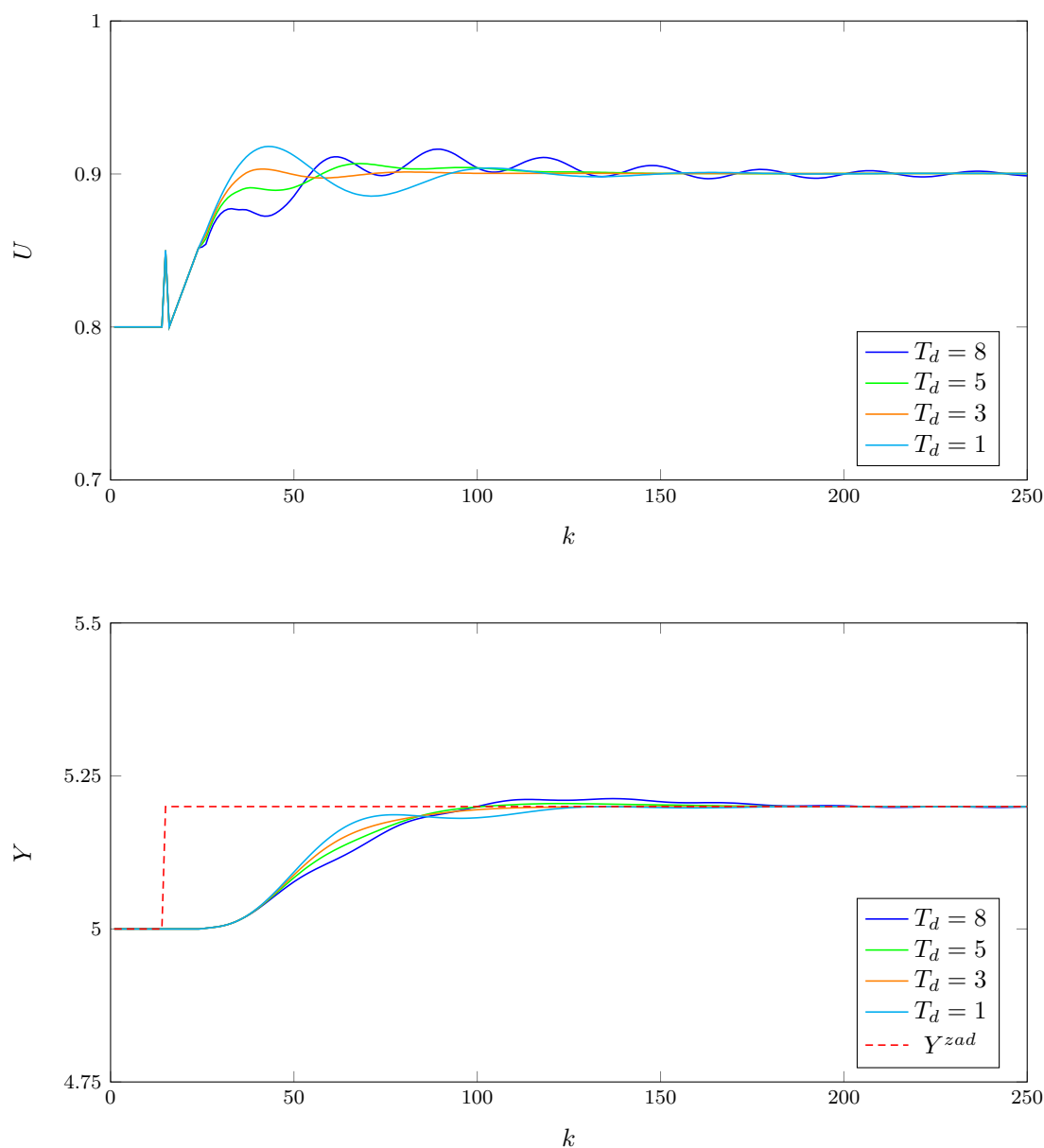
— $T_d = 8 - E = 1,3685$

— $T_d = 5 - E = 1,3025$

— $T_d = 3 - E = 1,2627$

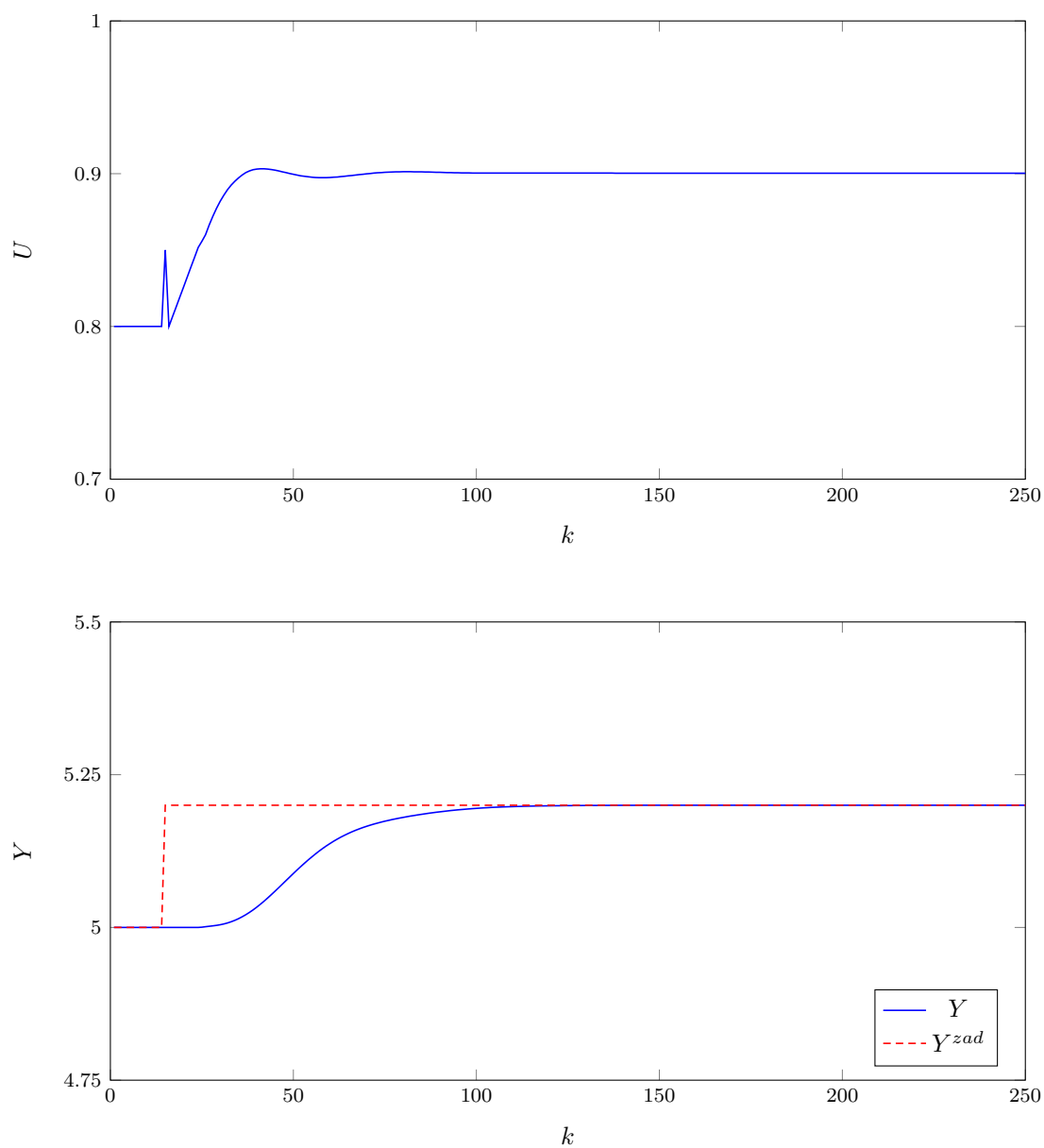
— $T_d = 1 - E = 1,2324$

Dla $T_d = 8$ występują oscylacje oraz największe przeregulowanie, a także najgorsza wartość wskaźnika jakości. Dla $T_d = 1$ wskaźnik jest najmniejszy, jednakże wykres zaczyna przyjmować niepożądany kształt, mimo braku przeregulowania występują oscylacje. Dla dwóch pozostałych testów wykresy są bardzo podobne. Dla $T_d = 3$ wskaźnik jakości jest lepszy niż dla $T_d = 5$, czas uregulowania jest krótszy i nie ma przeregulowania, a sterowanie ma najładniejszy przebieg z wszystkich testów dlatego tą wartość przyjmujemy jako końcową.



Rys. 6.3. Działanie PID dla różnych wartości T_d

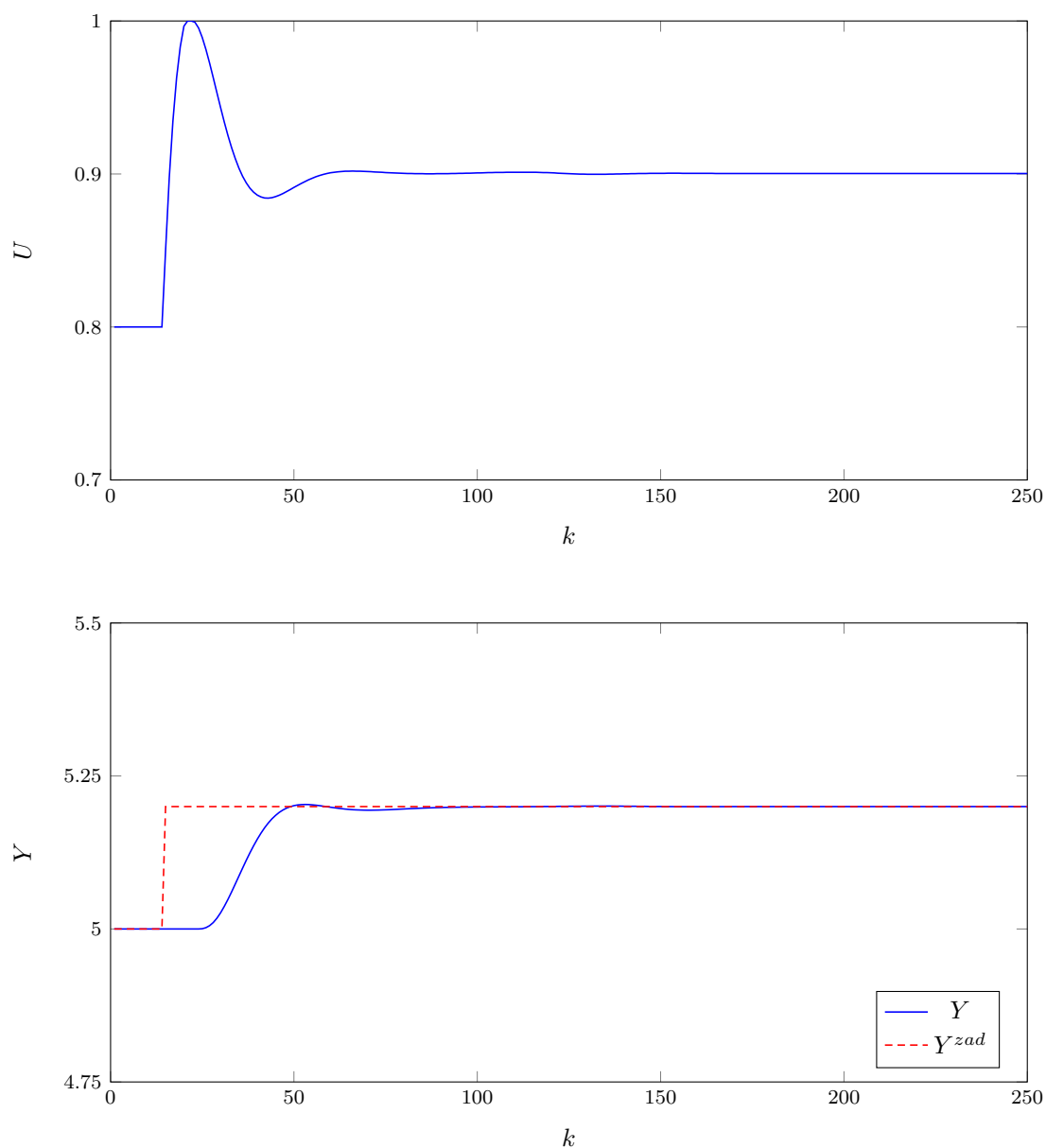
Zgodnie z wykresami z wykorzystaniem dobranych nastaw uzyskujemy regulator o zadowalającym działaniu i parametrach $K = 0,775, T_i = 12, T_d = 3$ rys.6.4.



Rys. 6.4. Wykres działania algorytmu PID przy końcowych nastawach $K=0,775, T_i=12, T_d=3$

6.2. DMC

Parametry algorytmu *DMC* dobraliśmy całkowicie eksperymentalnie poczynając od wartości $N = 100, N_u = 100, \lambda = 10$ (przebieg dla początkowych nastaw znajduje się na wykresie rys.6.5). Następnie naszym celem było zmniejszenie parametrów regulatora przy jednoczesnym zachowaniu lub polepszeniu jakości sterowania.

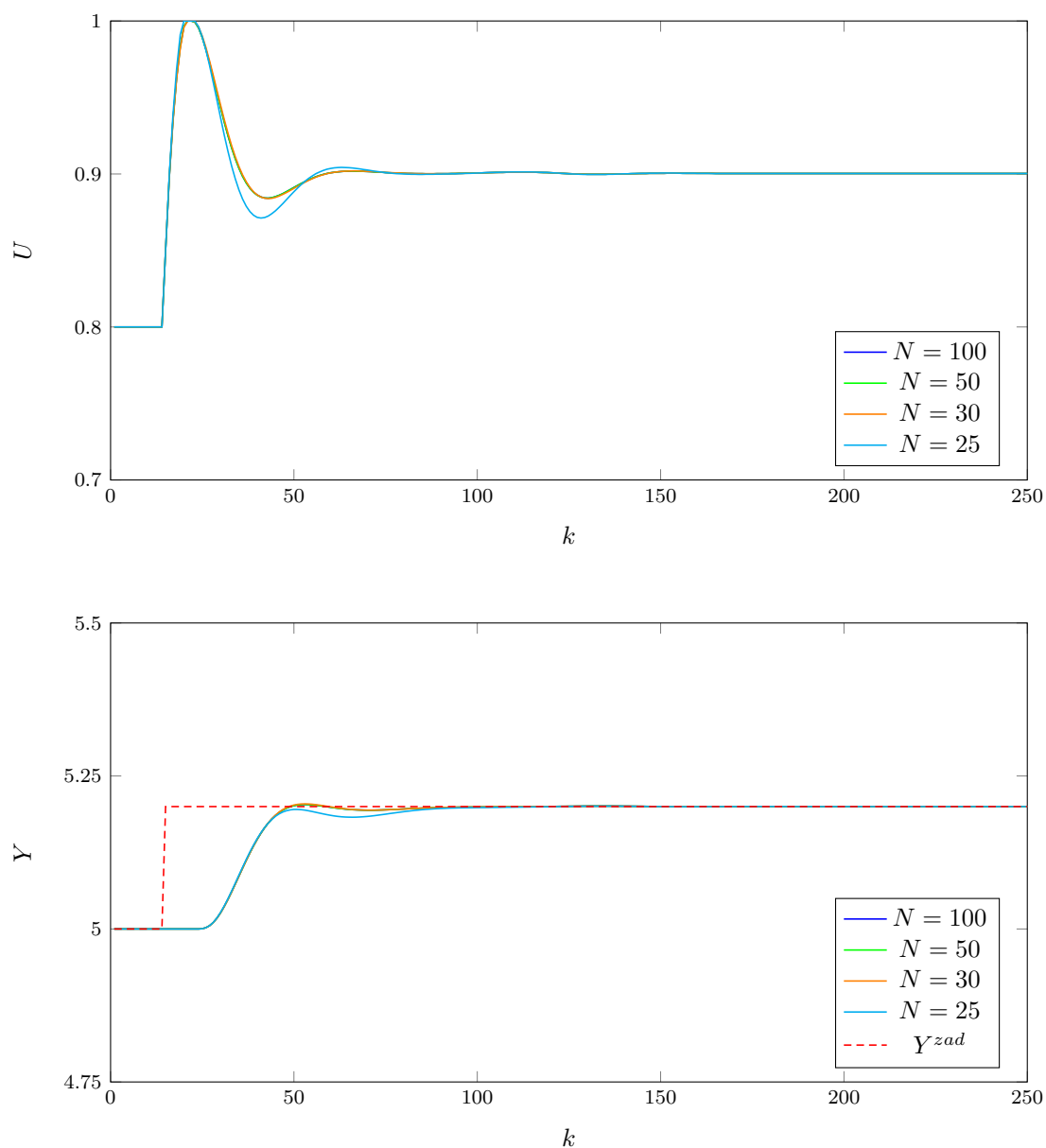


Rys. 6.5. Działanie algorytmu DMC przy początkowych nastawach

Zaczęliśmy od parametru N . Dla przetestowanych wartości otrzymaliśmy podane wartości wskaźnika jakości:

- $N = 100 - E = 0,7499$
- $N = 50 - E = 0,7499$
- $N = 30 - E = 0,7505$
- $N = 25 - E = 0,7518$

Nie ulega on znacznym zmianom, więc nie będzie miał na tym etapie kluczowej roli. Jak widać dla wartości 100, 50 i 30 kształt wykresu jest niemalże identyczny. Przy dalszym zmniejszaniu wartości N przebieg zaczynał się już pogarszać np dla $N = 25$. Ostatecznie zdecydowaliśmy się na pozostanie przy $N = 30$. Zmniejszyło to znacznie ilość obliczeń algorytmu, a praktycznie nie miało wpływu na jakość regulacji. Przebiegi dla różnych wartości N znajdują się na wykresie rys.6.6.

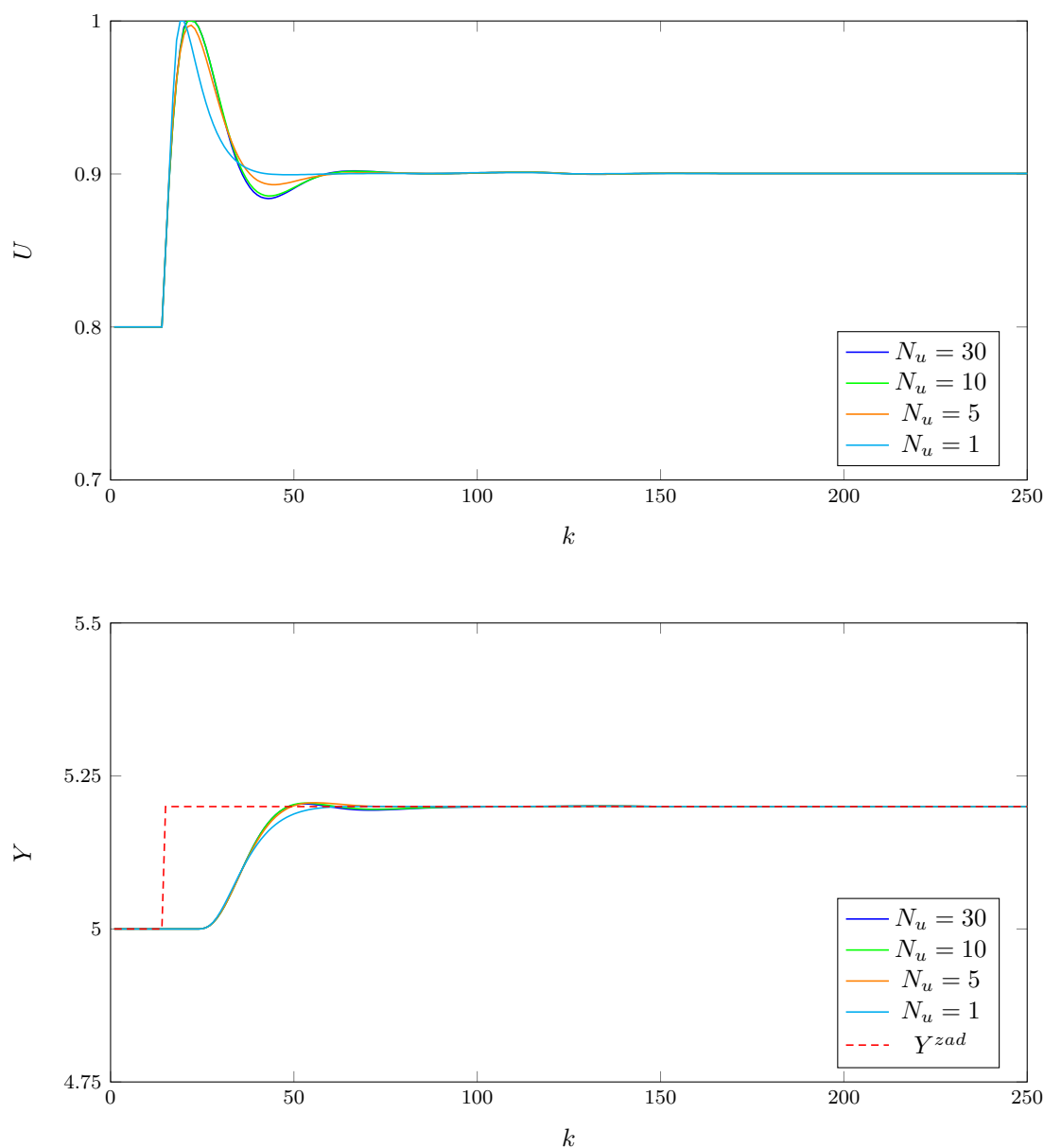


Rys. 6.6. Działanie algorytmu DMC dla różnych wartości N

Kolejnym krokiem było dobranie horyzontu N_u . Z właściwości algorytmu *DMC* na pierwszy rzut oka wynika, że wartość $N_u > N$ jest bez sensu. Z tego powodu zaczęliśmy dobierać od wartości $N_u = N = 30$. Dla wybranych punktów otrzymaliśmy wartości wskaźnika jakości równe odpowiednio:

- $N_u = 30 - E = 0,7505$
- $N_u = 10 - E = 0,7509$
- $N_u = 5 - E = 0,7528$
- $N_u = 1 - E = 0,7535$

Zmniejszając wartość N_u wskaźnik jakości doświadczył nieznacznego pogorszenia, jednakże poprawie uległ czas regulacji a przeregulowania widocznie się zmniejszyły. Poprawie uległo także wygenerowane sterowanie. Z tych powodów uznaliśmy, że najlepiej będzie ustawić wartość N_u na najniższą z przetestowanych wartości i w kolejnych symulacjach używaliśmy już $N_u = 1$. Wyniki testów dla różnych wartości parametru odnaleźć można na wykresie rys.6.7.



Rys. 6.7. Działanie algorytmu DMC dla różnych wartości N_u

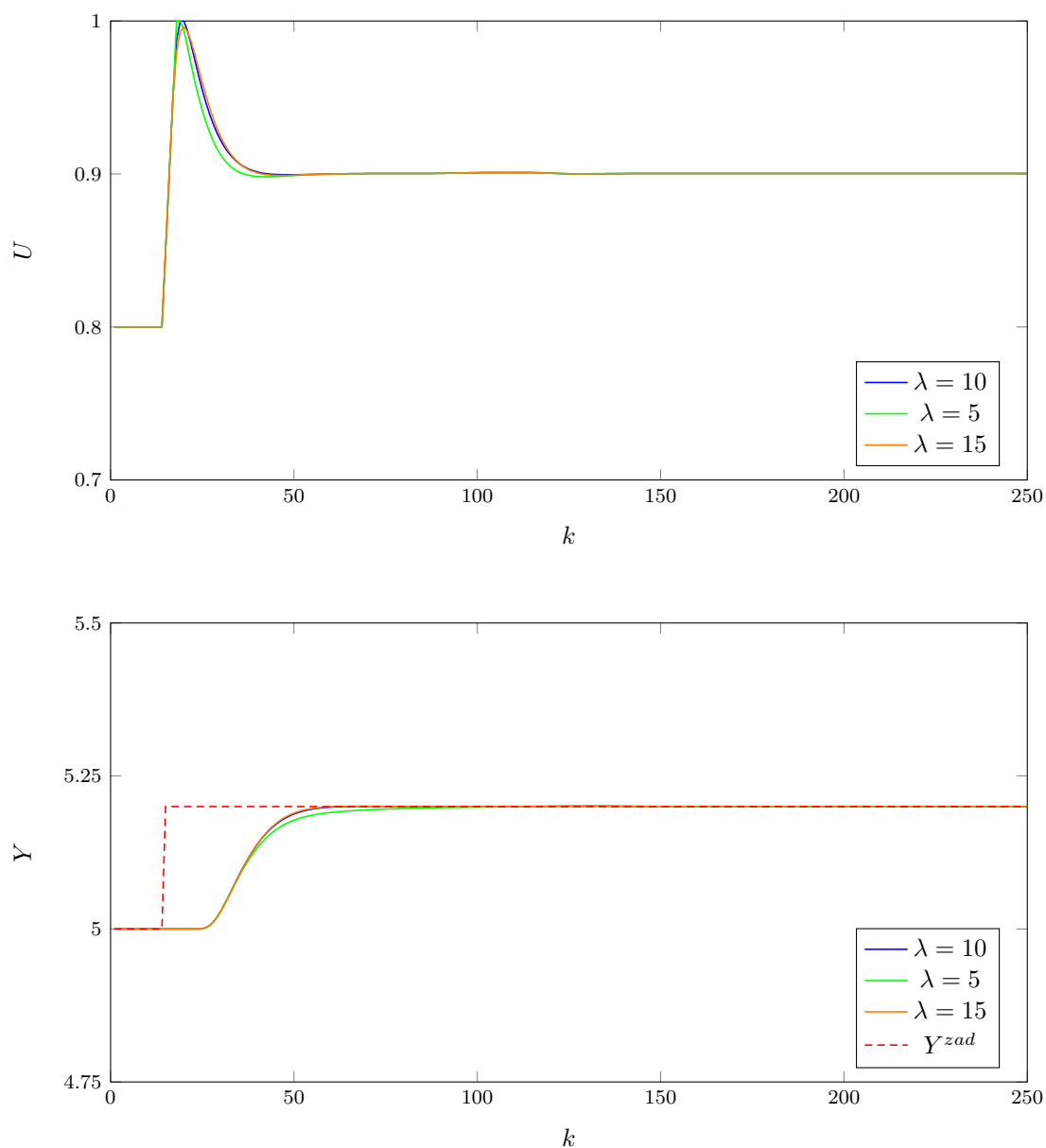
Ostatnim parametrem wymagającym regulacji w algorytmie DMC była λ . Ku naszemu zdziwieniu zarówno zwiększanie jak i zmniejszanie λ nie przyniosło poprawy wyników regulacji. Wskaźnik jakości dla przetestowanych wartości wynosił odpowiednio:

— $\lambda = 10 - E = 0,7535$

— $\lambda = 5 - E = 0,7652$

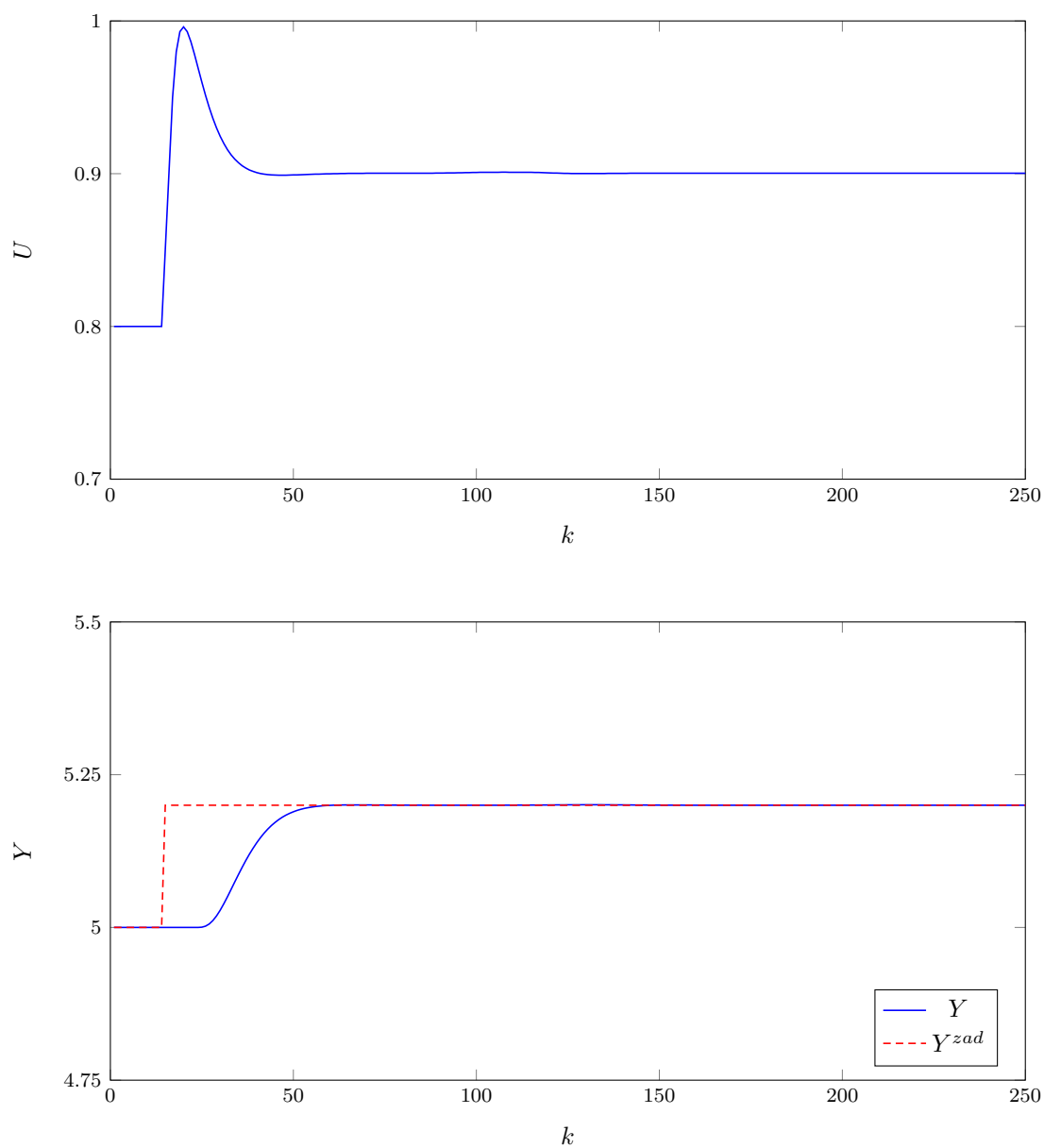
— $\lambda = 15 - E = 0,7544$

Dla mniejszych wartości pogorszeniu ulegała jakość regulacji. Zwiększanie z drugiej strony nie wpływało znacząco na przebieg wyjścia obiektu ale, niewielkim kosztem wskaźnika jakości, polepszało nieco wygląd sterowania, którego wykres stawał się bardziej zaokrąglony. Skłoniło nas to do zmiany wartości parametru λ na 15. Przebiegi dla tego kroku znajdują się na wykresie 6.8.



Rys. 6.8. Działanie algorytmu DMC dla różnych wartości λ

W świetle otrzymanych wyników stwierdzamy, że najlepsze znalezione przez nas nastawy wynoszą $N = 30, N_u = 1, \lambda = 15$. Przebieg dla tych nastaw przedstawiliśmy na wykresie rys.6.9.



Rys. 6.9. Działanie algorytmu DMC przy najlepszych nastawach $N = 30, N_u = 1, \lambda = 15$

7. Zadanie 6: Optymalizacja

W celu dobrania optymalnych nastaw regulatorów *PID* i *DMC* została użyta funkcja *fmincon*. Zadaniem była minimalizacja wskaźnika jakości *E* zdefiniowanego w poprzednim podpunkcie. Funkcja *fmincon* ten jako argumenty wejściowe pobiera funkcję, której wynik ma być minimalizowany, początkowe argumenty tej funkcji (punkt początkowy) i oraz ich ograniczenia, natomiast zwraca optymalny wynik minimalizowanej funkcji wraz z argumentami jej wywołania, dla których ten wynik został osiągnięty. Istotną kwestią jest odpowiedni dobór punktu początkowego, ponieważ w niektórych przypadkach algorytm nie będzie zbieżny (nie da poprawnego wyniku).

7.1. PID

Kierując się przeczuciem oraz zdrowym rozsądkiem stwierdziliśmy, że optymalne nastawy powinny być w pobliżu tych uzyskanych metodą inżynierską. Dlatego to właśnie one zostały użyte jako punkt początkowy:

$$x_0 = [0, 775, 12, 3] \quad (7.1)$$

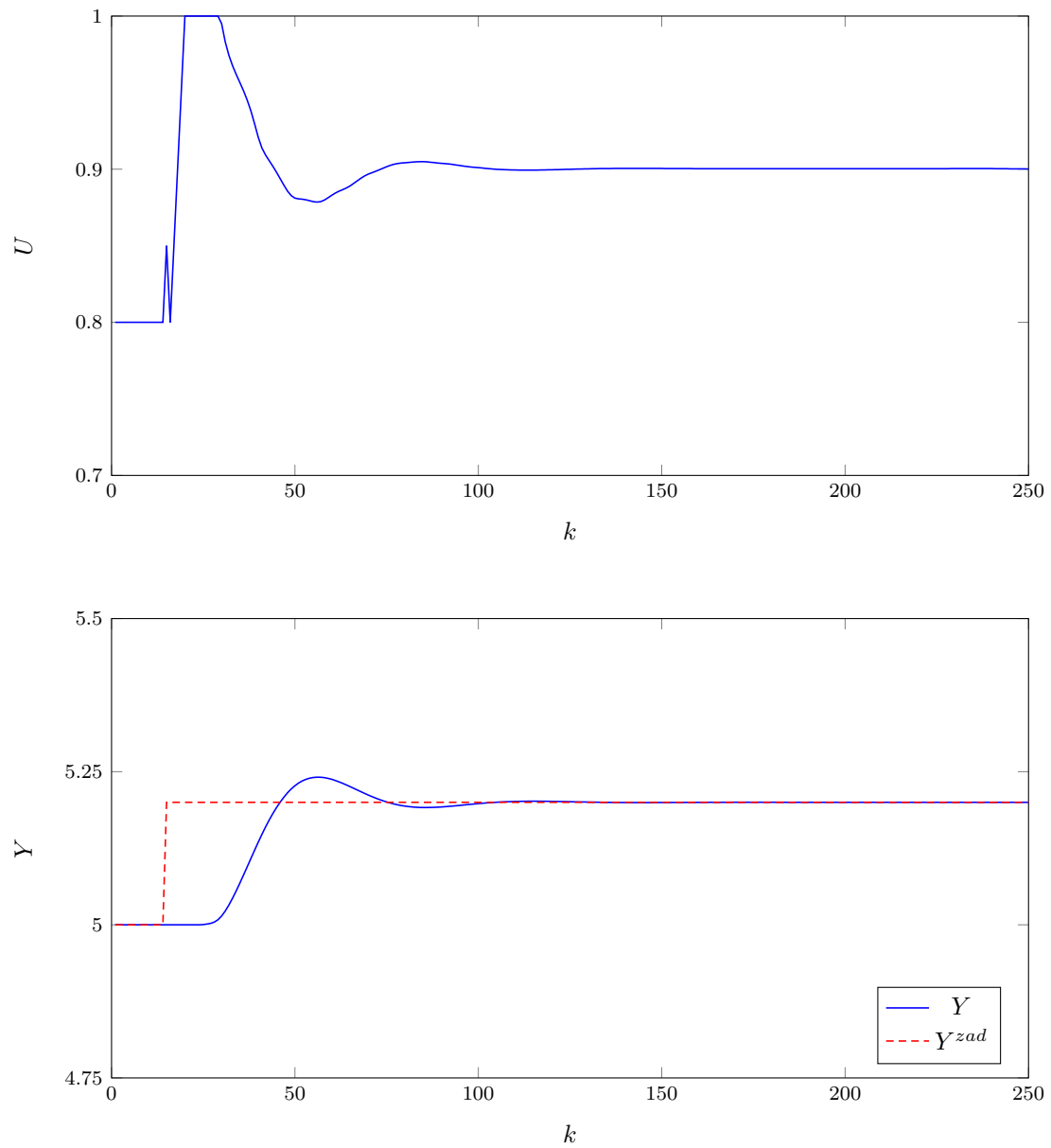
Uzyskaliśmy w ten sposób przebieg zilustrowany na wykresie 7.1 o nastawach $K = 2.7686T_i = 4.2803$ i $T_d = 4.0264$ oraz wartości wskaźnika jakości regulacji $E=0,8235$. Mimo minimalnego wskaźnika jakości otrzymany regulator nie jest idealny, cechuje go przeregulowanie oraz oscylacje sterowania, które opiera się o górne ograniczenie.

7.2. DMC

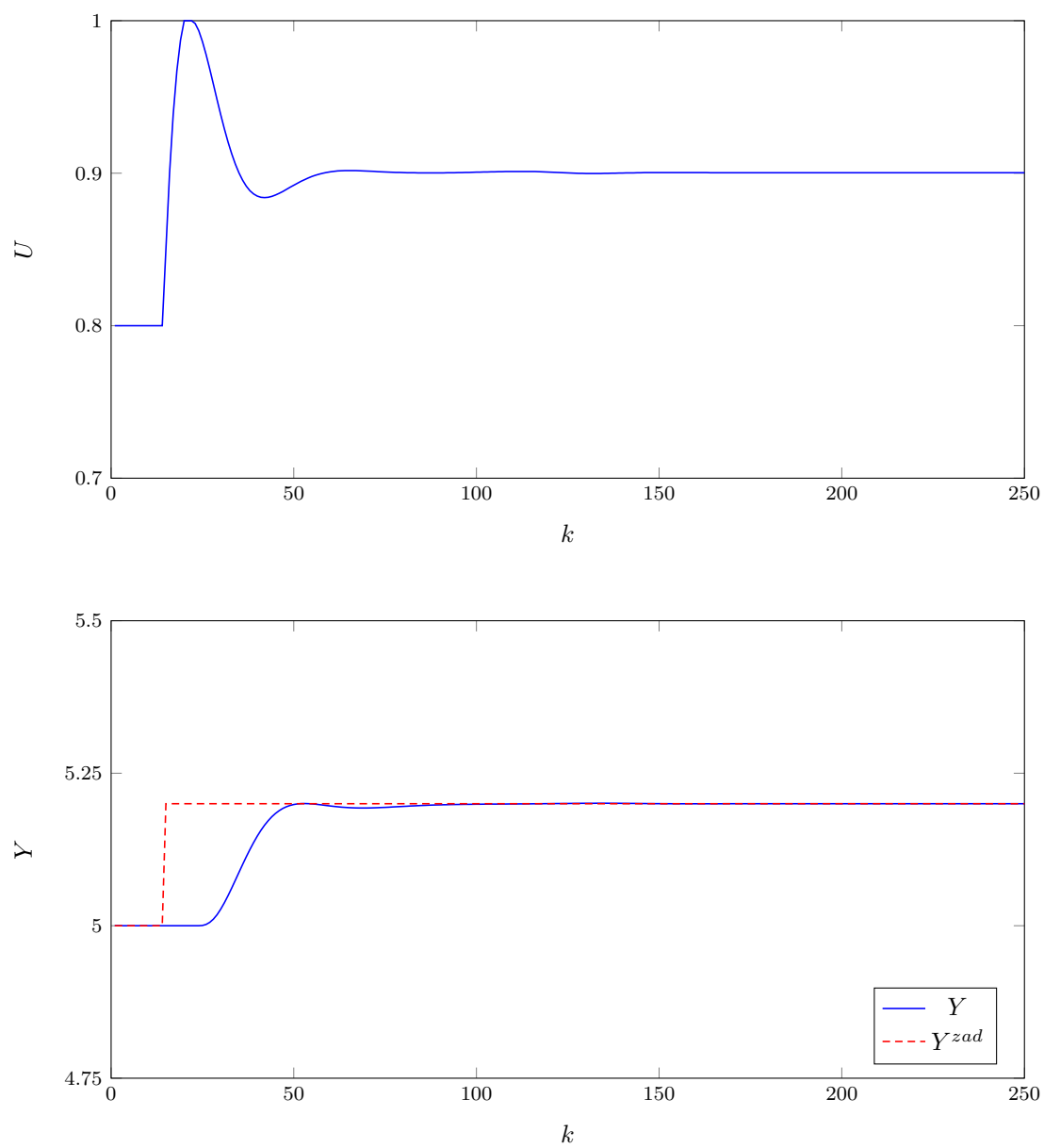
Aby użyć funkcji *fmincon* wprowadziliśmy do naszej funkcji wykonującej regulację *DMC* małą, ale niezbędną modyfikację – na początku zaokrąglamy otrzymane od *fmincon* parametry N , N_u (które funkcja oblicza jako rzeczywiste) do najbliższych liczb całkowitych. W tym wypadku także zaczynamy od punktu początkowego równego wyznaczonym przez nas wcześniej eksperymentalnie wartościom algorytmu *DMC* :

$$x_0 = [30, 1, 15] \quad (7.2)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób rezultat przedstawiony na rysunku 7.2. Otrzymany regulator ma parametry $N = 30$, $N_u = 8$ i $\lambda = 8,5191$ oraz $E=0,7481$. Jest on dobry jakościowo i podobny wyglądem przebiegu do tego wyznaczonego eksperymentalnie.



Rys. 7.1. Działanie algorytmu PID dla nastaw wygenerowanych programowo



Rys. 7.2. Działanie algorytmu DMC dla nastaw wygenerowanych programowo