

WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

# MEMORY-HARD FUNCTIONS

KONRAD ŚWIERCZYŃSKI  
NR INDEKSU: 229818

Promotor  
dr Filip Zagórski



Politechnika  
Wrocławska  
WROCŁAW 2019



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminaries</b>	<b>3</b>
2.1	Etykietowanie Grafu . . . . .	3
2.2	Superkoncentrator . . . . .	4
2.3	Grafy Depth-Robust . . . . .	5
2.4	Dispresed Graphs . . . . .	5
2.5	Grafy Warstwowe . . . . .	6
2.6	Ograniczenia Złożoności RSG . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Riffle Scrambler</b>	<b>9</b>
3.1	Budowa Grafu . . . . .	9
3.1.1	Parametry . . . . .	9
3.1.2	Tworzenie Grafu Na Podstawie Permutacji . . . . .	9
3.1.3	Śledzenie Trajektorii . . . . .	11
3.2	Algorytm . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Implementacja</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Instalacja i wdrożenie</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>17</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Zawartość płyty CD</b>	<b>21</b>



# Wprowadzenie

Moderately hard functions. Funkcje umiarkowanie ciężkie do obliczenia mają wiele zastosowań takich jak dowody pracy (ang. *proofs of work*), funkcje wyprowadzenia klucza oraz password hashing. Przy przechowywaniu haseł ważne jest, aby zminimalizować skutki wycieknienia pliku z hasłami. Zamiast przechowywać krotki (*login, password*) tekstem jawnym, dodaje się losową sól i przechowuje w postaci (*login, f(password, salt), salt*), gdzie  $f$  jest moderately hard function. Oznacza to, że funkcja ta musi być obliczana podczas każdego uwierzytelniania w celu sprawdzenia poprawności hasła. Nie może być ona zatem zbyt ciężka do obliczenia dla aplikacji uwierzytelniającej. Z drugiej strony, gdy krotka (*login, y, salt*) wycieknie, adversarz może przeprowadzać atak słownikowy obliczając funkcję  $f$  przy każdej próbie, co powinno być kosztowne. W tym celu zaczęto stosować funkcje, które obliczają wiele razy kryptograficzną funkcję skrótu. Popularnym przykładem takiej funkcji jest PBKDF2 (ang. *Password-Based Key Derivation Function 2*), dla której zalecanym parametrem bezpieczeństwa w 2000 roku było 1024 iteracji, a już w 2005 zaczęto zalecać 4096 iteracji, z powodu wzrostu wydajności CPU. Niestety takie podejście nie gwarantuje zabezpieczenia przed adversarzem używającym specjalizowany układ scalony (ang. *ASIC - Application-Specific Integrated Circuit*). Układy takie są znacznie bardziej wydajne pod względem szybkości obliczania funkcji skrótu takich jak SHA256 czy MD5 niż tradycyjne architektury.

– Porównanie Antminer - GPU - CPU –

Zauważono jednak, że na różnych architekturach koszt dostępu do pamięci jest dużo bardziej zrównoważony niż koszt obliczeń. [Percival [16]] Zaproponowano więc memory-hard functions (MHF), które wywołują podczas obliczania wiele kosztownych czasowo odwołań do pamięci.

scrypt - pierwsza taka funkcja

O MHF można myśleć jako o pewnej kolejności dostępu do komórek pamięci. Odwołania następują do już wcześniej obliczonych wartości w komórkach. Zatem kolejność tę można opisać jako acykliczny graf skierowany (DAG).

.....



# Preliminaries

W dalszej części używana będzie następująca notacja. Zbiory  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ .  $[c] := \{1, 2, \dots, c\}$  oraz  $[b, c] = \{b, b+1, \dots, c\}$ , gdzie  $b, c \in \mathbb{N}$  oraz  $b \leq c$ .

Skierowany graf acykliczny (ang. *directed acyclic graph*, DAG)  $G = (V, E)$  jest rozmiaru  $n$  jeżeli  $|V| = n$ . Wierzchołek  $v \in V$  ma stopień wchodzący  $\delta$  równy największemu stopniowi wchodzącemu wśród jego wierzchołków  $\delta = \text{indeg}(v)$ , jeżeli istnieje  $\delta$  wchodzących krawędzi  $\delta = |(V \times v) \cap E|$ . Graf  $G$  ma stopień wchodzący  $\delta = \text{indeg}(G) = \max_{v \in V} \text{indeg}(v)$ . Wierzchołki o stopniu wchodzącym 0 nazywane są źródłami, a wierzchołki bez krawędzi wychodzących nazywane są ujściami.

Zbiór rodziców wierzchołka  $v \in V$  oznaczany jest jako  $\text{parents}_G(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$ . Uogólniając, zbiór przodków  $v$  oznaczany jest jako  $\text{ancestors}_G(v) = \bigcup_{i \geq 1} \text{parents}_G^i(v)$ , przyjmując  $\text{parents}_G^{i+1}(v) = \text{parents}_G(\text{parents}_G^i(v))$ . Jeżeli wybór grafu  $G$  wynika z kontekstu, będziemy oznaczać te zbiory jako  $\text{parents}$  oraz  $\text{ancestors}$ .

Zbiór wszystkich ujść w grafie  $G$  oznaczany jest jako  $\text{sinks}(G) = \{v \in V : \nexists (v, u) \in E\}$ . DAG  $G$ , który jest spójny, a tylko takie będą rozważane w dalszej części pracy, zachowuje równość  $\text{ancestors}(\text{sinks}(G)) = V$ .

Dla skierowanej ścieżki  $p = (v_1, v_2, \dots, v_z)$  w  $G$ , jej długość jest równa ilości wierzchołków przez które przechodzi  $\text{length}(p) := z$ . Mając DAG  $G$ , oznaczamy długość jego najdłuższej ścieżki jako  $\text{depth}(G)$ .

Mając podzbiór wierzchołków grafu  $S \subset V$ , poprzez  $G - S$  oznaczamy będziemy DAG otrzymany z  $G$  poprzez usunięcie wierzchołków z  $S$  oraz krawędzi wychodzących lub wchodzących do wierzchołków z  $S$ .

## 2.1 Etykietowanie Grafu

**Definicja 2.1** (*Parallel/Sequential Graph Pebbling*). Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem skierowanym grafem acyklicznym i niech  $T \subset V$  będzie zbiorem wierzchołków do oetykietowania.  $T$  będzie nazywane celem. Stanem etykietowania  $G$  jest zbiór  $P_i \subset V$ . Poprawnym etykietowaniem równoległym jest ciąg  $P = (P_0, \dots, P_t)$  stanów etykietowania  $G$ , gdzie  $P_0 = \emptyset$  oraz gdzie spełnione są warunki 1 oraz 2 poniżej. Etykietowanie sekwencyjne musi dodatkowo spełniać warunek 3.

1. Każdy wierzchołek z celu jest w pewnej konfiguracji oetykietowany (nie koniecznie wszystkie jednocześnie).

$$\forall x \in T \exists x \leq t : x \in P_x$$

2. Oetykietować wierzchołek można tylko wtedy, gdy wszyscy jego rodzice są oetykietowani w poprzednim kroku.

$$\forall i \in [t] : x \in (P_i \setminus P_{i-1}) \Rightarrow \text{parents}(x) \subset P_{i-1}$$

3. W każdym kroku można oetykietować co najwyżej jeden wierzchołek.

$$\forall i \in [t] : |P_i \setminus P_{i-1}| \leq 1$$

Zbiory poprawnych etykietowań sekwencyjnych i równoległych grafu  $G$  z celem  $T$  oznaczamy odpowiednio jako  $\mathcal{P}_{G,T}$  oraz  $\mathcal{P}_{G,T}^{\parallel}$ . Etykietowania najbardziej interesujących przypadków, gdy  $T = \text{sinks}(G)$ , oznaczamy  $\mathcal{P}_G$  oraz  $\mathcal{P}_G^{\parallel}$ .

Można zauważyć, że  $\mathcal{P}_{G,T} \subset \mathcal{P}_{G,T}^{\parallel}$ .



**Definicja 2.2** *Złożoność czasową (ang. time,  $t$ ), pamięciową (ang. space,  $s$ ), pamięciowo-czasową (ang. space-time,  $st$ ) oraz łączna (ang. cumulative,  $cc$ ) etykietowania  $P = (P_0, \dots, P_t) \in \mathcal{P}_G^\parallel$  są zdefiniowane jako*

$$\Pi_t(P) = t, \Pi_s(P) = \max_{y \in [t]} |P_y|, \Pi_{st}(P) = \Pi_t(P) * \Pi_s(P), \Pi_{cc}(P) = \sum_{i \in [t]} |P_i|$$

Dla  $\alpha \in \{s, t, st, cc\}$  oraz celu  $T \subset V$ , złożoności sekwencyjnego oraz równoległego etykietowania grafu  $G$  definiujemy jako

$$\Pi_\alpha(G, T) = \min_{P \in \mathcal{P}_{G,T}} \Pi_\alpha(P)$$

$$\Pi_\alpha^\parallel(G, T) = \min_{P \in \mathcal{P}_{G,T}^\parallel} \Pi_\alpha(P)$$

Kiedy  $T = \text{sinks}(G)$ , piszemy  $\Pi_\alpha^\parallel(G)$  oraz  $\Pi_\alpha(G)$ .

Ponieważ  $\mathcal{P}_{G,T} \subset \mathcal{P}_{G,T}^\parallel$ , dla dowolnej złożoności etykietowania  $\alpha \in \{s, t, st, cc\}$  oraz dowolnego grafu  $G$  złożoność etykietowania równoległe jest nie większa, niż złożoność etykietowania sekwencyjnego  $\Pi_\alpha(G) \geq \Pi_\alpha^\parallel(G)$ , a złożoność łączna jest nie większa, niż czasowo-pamięciowa  $\Pi_{st}(G) \geq \Pi_{cc}(G)$  i  $\Pi_{st}^\parallel(G) \geq \Pi_{cc}^\parallel(G)$ .

W tej pracy głównie rozważane jest badanie złożoności  $\Pi_{st}$ , oraz  $\Pi_{cc}^\parallel$ , ponieważ ukazują one kolejno koszt przeprowadzania etykietowania na jednordzeniowej maszynie (np. procesor x86) oraz koszt etykietowania na wyspecjalizowanym układzie.

Aby zobaczyć jakie wartości mogą przyjąć przedstawione złożoności, rozważmy graf rozmiaru  $n$ . Każdy graf rozmiaru  $n$  może zostać oetykietowany w  $n$  krokach, ponieważ ma tylko  $n$  wierzchołków. Każdy stan etykietowania nie może również zawierać więcej niż  $n$  elementów. Zatem górne ograniczenie możemy przedstawić następująco

$$\forall G_n \in \mathbb{G}_n : \Pi_{cc}^\parallel(G_n) \leq \Pi_{st}(G_n) \leq n^2.$$

Zobaczmy jak wyglądają złożoności dla grafu pełnego  $K_n = (V = [n], E = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\})$  oraz dla  $Q_n = (V = [n], E = \{(i, i+1) : 1 \leq i \leq n-1\})$ .

$$n(n-1)/2 \leq \Pi_{cc}^\parallel(K_n) \leq \Pi_{st}(K_n) \leq n^2$$

Graf  $K_n$  maksymalizuje złożoności etykietowania, a  $\Pi_{cc}^\parallel$  jest różne tylko o stałą od  $\Pi_{st}$ . Co oznacza, że koszt obliczania funkcji opartej na takim grafie byłby zdominowany przez koszt dostępu do pamięci, a wyspecjalizowane układy nie dały by dużej przewagi nad tradycyjnym procesorem. Jest to bardzo pożądane dla funkcji memory-hard, jednak ze względu na bardzo wysoki stopień grafu  $K_n$ , nie jest on przydatny przy konstruowaniu MHF. Stopień wchodzący w grafie  $Q_n$  jest równy 1, jednak złożoność etykietowania jest bardzo niska

$$\Pi_{cc}^\parallel(Q_n) = \Pi_{st}(Q_n) \leq n.$$

Oznacza to, że koszt obliczania funkcji opartej na takim grafie (taką funkcją jest PBKDF2) nie jest zależny w dużej mierze od kosztu dostępu do pamięci nawet dla dużego  $n$ .

## 2.2 Superkoncentrator

Superkoncentrator jest grafem, w którym moc zbioru przodków dla wierzchołków szybko rośnie wraz z numerem pokolenia. Oznacza to, że zbiór kolejnych wierzchołków, będzie posiadał liczny zbiór rodziców, co czyni superkoncentrator bardzo przydatnym do konstrukcji MHF.

**Definicja 2.3** (*N-Superkoncentrator*). Skierowany graf acykliczny  $G = (V, E)$  o ustalonym stopniu wchodzącym,  $N$  wejściach i  $N$  wyjściach nazywany jest *N-Superkoncentratorem*, gdy dla każdego  $k \in [N]$  oraz dla każdej pary podzbiorów  $V_1 \subset V$  k wejść i  $V_2 \subset V$  k wyjść istnieje  $k$  wierzchołkowo-rozłącznych ścieżek łączących wierzchołki ze zbioru  $V_1$  z wierzchołkami w  $V_2$ .



**Definicja 2.4** ( $(N, \lambda)$ -Superkoncentrator). Niech  $G_i, i = 0, \dots, \lambda - 1$  będą  $N$ -Superkoncentratorami. Niech graf  $G$  będzie połączeniem wyjść  $G_i$  do odpowiadających wejść w  $G_{i+1}$  dla  $i = 0, \dots, \lambda - 2$ . Graf  $G$  jest nazywany  $(N, \lambda)$ -Superkoncentratorem.

**Twierdzenie 2.1** (Ograniczenie dolne dla  $(N, \lambda)$ -Superkoncentratora). Etykietowanie  $(N, \lambda)$ -Superkoncentratora używając  $S \leq N/20$  etykiet, wymaga  $T$  kroków, gdzie

$$T \geq N \left( \frac{\lambda N}{64S} \right)^\lambda.$$

## 2.3 Grafy Depth-Robust

Alwen i Blocki w swojej pracy [1] /TODO pokazali, że istnieje zależność między złożonością etykietowania, a depth-robustness. Na podstawie tej właściwości potrafimy określić dolne i górne ograniczenie  $\Pi_{cc}^{\parallel}$ .

**Definicja 2.5** (Depth-Robustness). Dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $e, d \in [n]$  DAG  $G = (V, E)$  jest  $(e, d)$ -depth-robust, jeżeli

$$\forall S \subset V \quad |S| \leq e \Rightarrow \text{depth}(G - S) \geq d.$$

**Twierdzenie 2.2** Niech DAG  $G$  będzie  $(e, d)$ -depth-robust, wtedy  $\Pi_{cc}^{\parallel} > ed$ .

**Definicja 2.6** Jeżeli graf  $G$  nie jest  $(e, d)$ -depth-robust to nazywany jest  $(e, d)$ -reducible.

**Twierdzenie 2.3** Niech  $G \in \mathbb{G}_{n, \delta}$  taki, że  $G$  jest  $(e, d)$ -reducible. Wtedy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(G) = O \left( \min_{g \in [d, n]} \left\{ n \left( \frac{dn}{g} + \delta g + e \right) \right\} \right)$$

biorąc  $g = \sqrt{\frac{dn}{\delta}}$  upraszcza się to do  $\Pi_{cc}^{\parallel}(G) = O \left( n(\sqrt{dn\delta} + e) \right)$ .

## 2.4 Dispersed Graphs

**Definicja 2.7** (Dependencies). Niech  $G = (V, E)$  będzie acyklicznym grafem skierowanym. Niech  $L \subseteq V$ . Mówimy, że  $L$  ma  $(z, g)$ -dependency jeżeli istnieją wierzchołkowo rozłączne ścieżki  $p_1, \dots, p_z$  kończące się w  $L$ , gdzie każda jest długości co najmniej  $g$ .

**Definicja 2.8** (Dispersed Graph). Niech  $g, k \in \mathbb{N}$  i  $g \geq k$ . DAG  $G$  jest nazywany  $(g, k)$ -dispersed jeżeli istnieje uporządkowanie jego wierzchołków takie, że następujące warunki są spełnione. Niech  $[k]$  oznacza ostatnie  $k$  wierzchołków o uporządkowaniu  $G$  i niech  $L_j = [jg, (j+1)g - 1]$  będzie  $j$ -tym podprzedziałem. Wtedy  $\forall j \in [k/g]$  przedział  $L_j$  ma  $(g, g)$ -dependency. W ogólności, jeżeli dla  $\epsilon \in (0, 1]$  każdy przedział  $L_j$  ma tylko  $(\epsilon g, g)$ -dependency, graf  $G$  nazywany jest  $(\epsilon, g, g)$ -dispersed.

**Definicja 2.9** Acykliczny graf skierowany  $G = (V, E)$  nazywany jest  $(\lambda, \epsilon, g, k)$ -dispersed jeżeli istnieje  $\lambda \in \mathbb{N}^+$  rozłącznych podzbiorów wierzchołków  $\{L_i \subseteq V\}$ , każdy o rozmiarze  $k$  oraz spełnione są następujące warunki.

1. Dla każdego  $L_i$  istnieje ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki  $L_i$ .
2. Dla ustalonego porządku topologicznego  $G$ . Dla każdego  $i \in [\lambda]$  niech  $G_i$  będzie podgrafem  $G$ , zawierającym wszystkie wierzchołki z  $G$ , aż do ostatniego wierzchołka z  $L_i$ .  $G_i$  jest  $(\epsilon, g, k)$ -dispersed.

Zbiór grafów, które są  $(\lambda, \epsilon, g, k)$ -dispersed oznaczamy jako  $\mathbb{D}_{\epsilon, g}^{\lambda, k}$ .

**Twierdzenie 2.4** Niech  $G \in \mathbb{D}_{\epsilon, g}^{\lambda, k}$ .

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(G) \geq \epsilon \lambda g \left( \frac{k}{2} - g \right)$$



## 2.5 Grafy Warstwowe

**Definicja 2.10** ( $\lambda$ -Stacked Sandwich Graphs). Niech  $n, \lambda \in \mathbb{N}^+$  takie, że  $\lambda + 1$  dzieli  $n$  oraz niech  $k = n/(\lambda + 1)$ . Mówimy, że graf  $G$  jest  $\lambda$ -stacked sandwich DAG, jeżeli  $G$  zawiera ścieżkę przechodzącą przez  $n$  wierzchołków  $(v_1, \dots, v_n)$  oraz dzieląc go na warstwy  $L_j = \{v_{jk+1}, \dots, v_{j(k+\lambda)}\}$ , dla  $j \in \{0, \dots, \lambda\}$ , pozostałe krawędzie łączą wierzchołki z niższej warstwy  $L_j$  jedynie z wierzchołkami z wyższych warstw  $L_i$ ,  $i \in \{j + 1, \dots, \lambda\}$ .

**Lemat 2.1** Niech  $G$  będzie  $\lambda$ -stacked sandwich DAG, wtedy dla dowolnego  $t \in \mathbb{N}^+$ ,  $G$  jest  $(n/t, \lambda t)$ -reducible.

## 2.6 Ograniczenia Złożoności RSG

**Twierdzenie 2.5** Niech  $\lambda, n \in \mathbb{N}^+$  takie, że  $n = \bar{n}(2\lambda c + 1)$ , gdzie  $c \in \mathbb{N}$  i  $\bar{n} = 2^c$ . Wtedy dla  $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$   $RSG_{\lambda}^{\bar{n}} \in \mathbb{D}_{1,g}^{\lambda, \bar{n}}$  oraz  $\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = \Omega\left(\frac{n^{1.5}}{c\sqrt{c\lambda}}\right)$ .

**Dowód.** Niech  $G = RSG_{\lambda}^{\bar{n}}$ , niech  $G_1, G_2, \dots, G_{\lambda}$  będą podgrafami  $G$  opisanymi w DEF[...]. Pokażemy, że każdy  $G_i$  jest  $(g, \bar{n})$ -dispersed dla  $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$ .

Wybermy  $i \in [\lambda]$  niech  $L_1$  będzie ostatnimi  $\bar{n}$  wierzchołkami w porządku topologicznym grafu  $G_i$ . Oznaczamy wierzchołki zbioru  $L_1$  poprzez  $1 \times [\bar{n}]$ , gdzie druga pozycja odpowiada kolejności wierzchołka w porządku topologicznym. Niech  $\bar{g} = \lfloor \bar{n}/g \rfloor$ , dla każdego  $j \in [\bar{g}]$   $L_{1,j} = \{< 1, jg + x > : x \in [0, g - 1]\}$ . Pokażemy, że wszystkie  $L_{1,j}$  mają  $(g, g)$ -dependency.

Niech  $L_0$  będzie  $\bar{n}$  pierwszymi wierzchołkami  $G_i$ , które oznaczamy  $0 \times [\bar{n}]$  (ponownie druga pozycja odpowiada porządkowi topograficznemu). Zauważmy, że dla  $n > 1$  i  $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$  prawdą jest, że  $g(g - 2c + 1) \leq n$ . Zatem zbiór  $S = \{< 0, i(g - 2c + 1) > : i \in [g]\}$  jest całkowicie zawarty w  $L_0$ .

Z własności RSG [Superconcentrator- ....] wynika, że skoro zbiory  $S$  oraz  $L_{1,j}$  mają po  $g$  wierzchołków, to istnieje  $g$  wierzchołkowo-rozłącznych ścieżek o długości  $2c$  między wierzchołkami tych zbiorów. Zatem  $L_{1,j}$  ma  $(g, 2c)$ -dependency.

Rozszerzmy to do  $(g, g)$ -dependency. Niech ścieżka  $p$  zaczynająca się w wierzchołku  $< 0, v > \in S$  będzie ścieżką w  $(g, 2c)$ -dependency  $L_{1,j}$ . Zauważmy, że istnieje ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki  $L_0$  oraz, że wierzchołki zbioru  $S$  są oddzielone między sobą o  $g - 2c$  wierzchołków. Możemy dodać na początek ścieżki  $p$  ścieżkę  $< 0, v - (g - 2c - 1) >, < 0, v - (g - 2c - 2) >, \dots, < 0, v >$ . Otrzymujemy w ten sposób ścieżkę  $p_+$  o długości  $2c + g - 2c = g$ . Ponieważ każda para ścieżek  $p \neq q$  w  $(g, 2c)$ -dependency  $L_{1,j}$  jest wierzchołkowo-rozłączna, to w szczególności zaczynać się muszą w różnych wierzchołkach  $< 0, v_p > \neq < 0, v_q >$ . Ponieważ wierzchołki w  $S$  są od siebie oddalone o  $g - 2c$  wierzchołków, zatem ścieżki  $p^+$  i  $q^+$  nadal pozostają rozłączne. Rozszerzając w ten sposób wszystkie ścieżki z  $(g, 2c)$ -dependency otrzymujemy ścieżki wierzchołkowo-rozłączne długości  $g$ . Z tego wynika, że  $L_{1,j}$  ma  $(g, g)$ -dependency, co dowodzi, że  $RSG_{\lambda}^{\bar{n}} \in \mathbb{D}_{1,g}^{\lambda, \bar{n}}$ . Pozostaje obliczyć górne ograniczenie używając [Theorem 6 ABP2017].

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = \lambda g \left( \frac{\bar{n}}{2} - g \right) \geq \lambda \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor \left( \frac{\bar{n}}{2} - \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor \right) = \lambda \sqrt{\bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{2} - \sqrt{\bar{n}} \right) - O(\bar{n}) = \Omega(\lambda \bar{n}) = \Omega\left(\frac{n^{1.5}}{c\sqrt{c\lambda}}\right) \quad \square$$

**Twierdzenie 2.6** Niech  $\lambda, g \in \mathbb{N}^+$ ,  $N = 2^g$ ,  $n = N(2\lambda g + 1)$ , wtedy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n^{1.6}\right)$$

**Dowód.** Kozystając, z [...],  $RSG_{\lambda}^N$  jest  $\lambda$ -Stacked Sandwich Graph. Z [Lemma 4.2 AB16] wynika więc, że  $RSG_{\lambda}^N$  jest  $(n/t, \lambda + t - \lambda - 1)$ -reducible dla dowolnego  $t \geq 1$ . Z twierdzenia 10 [ABP17] wynika, że  $\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n \left( \sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right)\right)$ . Aby dostać najdokładniejsze (najmniejsze) ograniczenie górne trzeba zminimalizować  $n \left( \sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right)$ . Zanim jednak przejdziemy do minimalizowania, uproścmy nieco to wyrażenie

$$n \left( \sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right) \leq n \left( \sqrt{2\lambda t n\delta + \frac{n}{t}} \right).$$

Teraz możemy znaleźć minimum względem naszego parametru  $t$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} n \left( \sqrt{(2\lambda t)n\delta} + \frac{n}{t} \right) = \frac{\sqrt{2\delta\lambda n^3}}{2t} - \frac{n^2}{t^2}$$

Minimum znajduje się w punkcie, gdzie pochodna ma wartość zero.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\delta\lambda n^3}}{2t} - \frac{n^2}{t^2} &= 0 \\ t &= \frac{2n^2}{\sqrt{2\delta\lambda n^3}} = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

Zatem podstawiając  $t$  minimalizujące ograniczenie górne do wzoru z twierdzenie 10 [ABP17] otrzymujemy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n \left( \sqrt{(\lambda n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}} - \lambda - 1)n\delta} + \frac{n}{n^{\frac{1}{3}}} \right)\right) = O\left(n^{1.\bar{6}}\right)$$

□



# Riffle Scrambler

RiffleScrambler [2] jest nową rodziną acyklicznych grafów skierowanych, której odpowiada funkcja *memory-hard* z dostępem do pamięci niezależnym od hasła, jest więc to iMHF. W funkcji tej, podobnie jak w Catenie, kolejność obliczeń zdefiniowana jest za pomocą grafu. Przewagą funkcji RiffleScrambler, jest to, że dla Cateny są dwa predefiniowane grafy *bit-reversal* i *double-butterfly*, natomiast dla funkcji RiffleScrambler, graf jest generowany na podstawie soli, tak jak w funkcji Ballon Hashing. Oznacza, to, że dla każdej soli odpowiada (z dużym prawdopodobieństwem) innemu grafowi, co zwiększa odporność na ataki równoległe. Jednocześnie RiffleScrambler zapewnia lepszą wydajność przy obliczaniu niż Ballon Hashing, ponieważ ma dużo mniejszy stopień wchodzący grafu, który jest równy 3, a ponieważ jest superkoncentratorem, osiąga kompromis między pamięcią, a czasem oraz ograniczenie dolne złożoności etykietowania równoległego takie same jak Catena.

## 3.1 Budowa Grafu

### 3.1.1 Parametry

Funkcja RiffleScrambler używa następujących parametrów:

- $s$  - sól, używana do wygenerowania grafu  $G$ ,
- $g$  - ilość pamięci potrzebnej do obliczeń, dla  $G = (V, E)$  zbiór wierzchołków można przedstawić jako  $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{2^\lambda g}$ , gdzie  $|V_i| = 2^g$ ,
- $\lambda$  - liczba warstw grafu  $G$ , może być postrzegana jako liczba iteracji.

Sól używana jest do generowania liczb pseudolosowych, potrzebnych do zbudowania grafu. Parametr  $g$  określa ilość pamięci, jaką trzeba będzie wykorzystać podczas obliczania funkcji. Podczas obliczeń potrzebne jest  $2^{g+1}$  komórek, gdzie każda przechowuje wynik kryptograficznej funkcji skrótu. Parametr  $\lambda$  definiuje ile warstw będzie miał końcowy graf, co bezpośrednio wpływa na czas obliczania funkcji.

### 3.1.2 Tworzenie Grafu Na Podstawie Permutacji

Niech  $HW(x)$  (ang. *Hamming weight*) oznacza ilość jedynek w wyrazie binarnym  $x$ . Niech  $\bar{x}$  oznacza negację wyrazu  $x$ , zatem  $HW(\bar{x})$  oznacza liczbę zer w wyrazie  $x$ .

**Definicja 3.1** Niech  $B = (b_0 \dots b_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$  będzie wyrazem binarnym o długości  $n$ . Definiujemy rangę  $r_B(i)$   $i$ -tego bitu w  $B$  jako

$$r_B(i) = |\{j < i : b_j = b_i\}|.$$

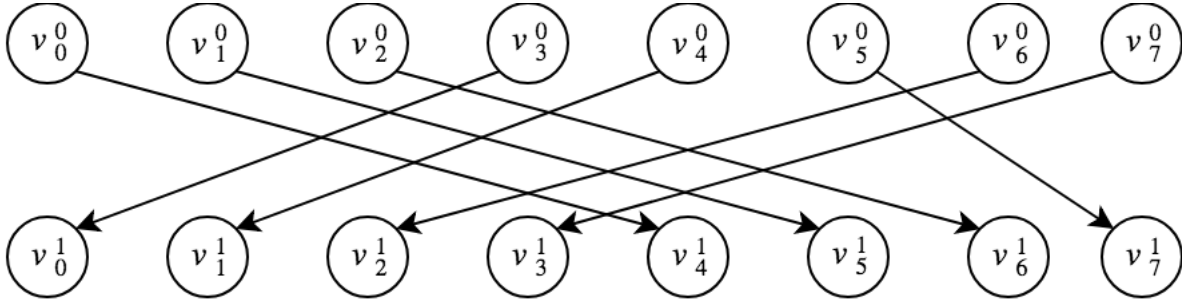
**Definicja 3.2** (*Riffle-Permutation*). Niech  $B = (b_0 \dots b_{n-1})$  będzie wyrazem binarnym o długości  $n$ . Permutacja  $\pi$  indukowana przez  $B$  zdefiniowana jest następująco

$$\pi_B(i) = \begin{cases} r_B(i), & \text{if } b_i = 0 \\ r_B(i) + HW(\bar{B}), & \text{if } b_i = 1 \end{cases}$$

dla każdego  $0 \leq i \leq n - 1$ .



**Przykład 3.1** Niech  $B = 11100100$ , wtedy  $r_B(0) = 0$ ,  $r_B(1) = 1$ ,  $r_B(2) = 2$ ,  $r_B(3) = 0$ ,  $r_B(4) = 1$ ,  $r_B(5) = 3$ ,  $r_B(6) = 2$ ,  $r_B(7) = 3$ . Mając rangi dla wszystkich pozycji, można utworzyć Riffle-Permutation indukowaną przez  $B$   $\pi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Ilustracja tego przykładu widoczna poniżej. *TODO link*

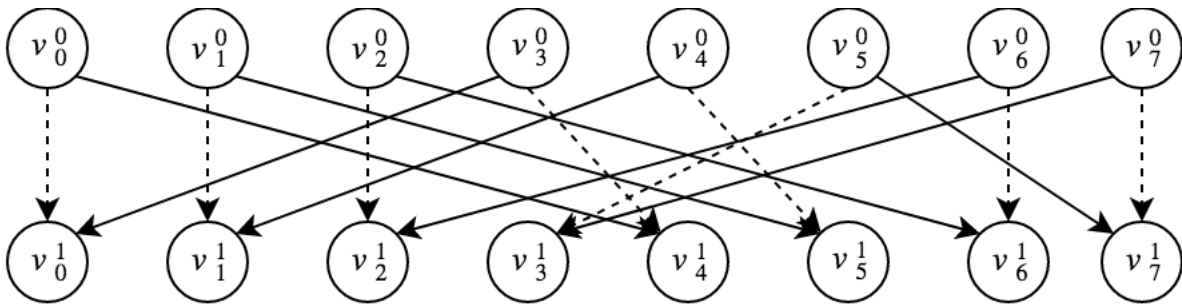


Rysunek 3.1: Graf utworzony z Riffle-Permutation indukowanej przez  $B = 11100100$ .

**Definicja 3.3** (*N-Single-Layer-Riffle-Graph*). Niech  $V = V^0 \cup V^1$ , gdzie  $V^i = \{v_0^i, \dots, v_{N-1}^i\}$  i niech  $B$  będzie słowem binarnym długości  $N$ . Niech  $\pi_B$  będzie Riffle-Permutaion indukowaną przez  $B$ . Graf *N-Single-Layer-Riffle-Graph* (dla parzystego  $N$ ) zdefiniowany jest jako graf na wierzchołkach  $V$  z następującymi krawędziami w zbiorze  $E$ :

- jedna krawędź:  $v_{N-1}^0 \rightarrow v_0^1$ ,
- $2(N-1)$  krawędzi:  $v_{i-1}^j \rightarrow v_i^j$ , dla  $i \in [N-1]$  oraz  $j \in \{0, 1\}$ ,
- $N$  krawędzi:  $v_i^0 \rightarrow v_{\pi_B(i)}^1$ , dla  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ ,
- $N$  krawędzi:  $v_i^0 \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}}(i)}^1$ , dla  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ .

**Przykład 3.2** Kontynuując z danymi z poprzedniego przykładu *TODO* dodać link,  $\pi_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ . *8-Single-Layer-Riffle-Graph* ukazany jest na Rysunku *TODO*.



Rysunek 3.2: 8-Single-Layer-Riffle-Graph dla  $B = 11100100$  (krawędź  $(v_7^0, v_0^1)$  oraz krawędzie poziome zostały pominięte). Krawędzie dla permutacji  $\pi_B$  oznaczone są linią ciągłą, a krawędzie dla permutacji  $\pi_{\bar{B}}$  oznaczone są linią przerywaną.

Od teraz zakładamy, że  $N = 2^g$ .

**Definicja 3.4** (*N-Double-Riffle-Graph*). Niech  $V$  oznacza zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi grafu  $G = (V, E)$ . Niech  $B_0, \dots, B_{g-1}$  będą wyrazami binarnymi o długości  $2^g$  każdy. *N-Double-riffle-Graph* jest otrzymywany poprzez ułożenie w stos  $2g$  grafów, które spełniają warunki *N-Single-Layer-Riffle-Graph*. Otrzymany tak graf ma  $(2g+1)2^g$  wierzchołków  $\{v_0^0, \dots, v_{2^g-1}^0\} \cup \dots \cup \{v_0^{2^g}, \dots, v_{2^g-1}^{2^g}\}$ , oraz następujące krawędzie:

- $(2g+1)2^g$  krawędzi:  $v_{i-1}^j \rightarrow v_i^j$  dla  $i \in [2^g - 1]$  i  $j \in \{0, 1, \dots, 2^g\}$ ,
- $2g$  krawędzi:  $v_{2^g-1}^j \rightarrow v_0^{j+1}$  dla  $j \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ ,
- $g2^g$  krawędzi:  $v_i^{j-1} \rightarrow v_{\pi_{B_j}(i)}^j$ , dla  $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$  i  $j \in [g]$ ,
- $g2^g$  krawędzi:  $v_i^{j-1} \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}_j}(i)}^j$ , dla  $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$  i  $j \in [g]$ ,

oraz dla dolnych  $g$  warstw, które są symetryczne względem warstwy  $g$ :

- $g2^g$  krawędzi:  $v_i^{2g-j} \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}_j}^{-1}(i)}^{2g-j+1}$ , dla  $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$  i  $j \in [g]$ ,
- $g2^g$  krawędzi:  $v_i^{2g-j} \rightarrow v_{\pi_{B_j}^{-1}(i)}^{2g-j+1}$ , dla  $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$  i  $j \in [g]$ ,

**Definicja 3.5** ( $(N, \lambda)$ -Double-Riffle-Graph). Niech  $G_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, \lambda - 1\}$  będą  $N$ -Double-Riffle-Graph. Graf  $(N, \lambda)$ -Double-Riffle-Graph jest skonstruowany poprzez złączenie wyjść grafu  $G_i$  do dopowiadających wejść grafu  $G_{i+1}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, \lambda - 2\}$ .

### 3.1.3 Śledzenie Trajektorii

Graf jest generowany za pomocą permutacji pseudolosowej  $\sigma$ . Ponieważ do generowania grafu potrzebne jest  $g$  słów binarnych o długości  $2^g$ , a permutacje zawierają  $2^g$  elementów, gdzie każdy ma maksymalnie  $g$  bitów znaczących, trzeba przekształcić permutację tak, aby otrzymać pożądane dane. Ta procedura nazwana jest śledzeniem trajektorii (ang. *trace trajectories*). Niech  $B$  będzie macierzą binarną o rozmiarze  $2^g \times g$ , gdzie  $j$ -ta kolumna jest binarną postacią  $\sigma(j) \in [2^g - 1]$ . Macierz  $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{g-1})$  oznaczać będzie transpozycję macierzy  $B$ , a więc macierz o potrzebnym do generacji grafu rozmiarze  $g \times 2^g$ .

## 3.2 Algorytm

Procedurę **RiffleScrambler**( $pwd, s, g, \lambda$ ) można z grubsza przedstawić następująco.

- Dla podanej soli  $s$  obliczana jest pseudolosowa permutacja  $\sigma$  (używając algorytmu inverse Riffle Shuffle).
- Dla permutacji  $\sigma$  tworzona jest macierz  $\mathfrak{B} = \text{TraceTrajectories}(B)$ .
- Dla wyrazów binarnych  $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{g-1}$  generowany jest graf  $G$ , który jest  $N$ -Double-Riffle-Graph. Przypomnijmy,  $N = 2^g$ .
- Na grafie  $G$  zainicjalizowanym wartością  $pwd$ , oblicze są wartości w ostatnim rzędzie  $(v_0^{2g+1}, \dots, v_{2^g-1}^{2g+1})$ .
- Wartości z ostatniego rzędu przepisywane są do pierwszego,  $v_i^0 = v_1^{2g+1}$  dla  $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ , a następnie znów oblicza się wartości ostatnich rzędów. Powtarzane jest  $\lambda$  razy.
- Wartością końcową jest wartość w ostatnim wierzchołku, czyli w  $v_{2^g-1}^{2g}$ .

**Przykład 3.3** ( $(8, 1)$ -Double-Riffle-Graph). Skoro  $N = 8$ , to  $g = 3$ , ponieważ  $N = 2^g$ .  $\lambda = 1$ .

Niech otrzymaną permutację  $\sigma$  będzie  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Zatem binarna postać permutacji  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Przeprowadzając śledzenie trajektorii, czyli transponując  $B$  otrzymujemy  $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ,  $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ .





# Implementacja



# Instalacja i wdrożenie

W tym rozdziale należy omówić zawartość pakietu instalacyjnego oraz założenia co do środowiska, w którym realizowany system będzie instalowany. Należy przedstawić procedurę instalacji i wdrożenia systemu. Czynności instalacyjne powinny być szczegółowo rozpisane na kroki. Procedura wdrożenia powinna obejmować konfigurację platformy sprzętowej, OS (np. konfiguracje niezbędnych sterowników) oraz konfigurację wdrażanego systemu, m.in. tworzenia niezbędnych kont użytkowników. Procedura instalacji powinna prowadzić od stanu, w którym nie są zainstalowane żadne składniki systemu, do stanu w którym system jest gotowy do pracy i oczekuje na akcje typowego użytkownika.



# Podsumowanie

W podsumowanie należy określić stan zakończonych prac projektowych i implementacyjnych. Zaznaczyć, które z zakładanych funkcjonalności systemu udało się zrealizować. Omówić aspekty pielęgnacji systemu w środowisku wdrożeniowym. Wskazać dalsze możliwe kierunki rozwoju systemu, np. dodawanie nowych komponentów realizujących nowe funkcje.

W podsumowaniu należy podkreślić nowatorskie rozwiązania zastosowane w projekcie i implementacji (niebanalne algorytmy, nowe technologie, itp.).



# Bibliografia

- [1] J. Alwen, J. Blocki, K. Pietrzak. Depth-robust graphs and their cumulative memory complexity. *Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*, strony 3–32. Springer, 2017.
- [2] K. Gotfryd, P. Lorek, F. Zagórski. Rifflescrambler—a memory-hard password storing function. *European Symposium on Research in Computer Security*, strony 309–328. Springer, 2018.





# Zawartość płyty CD

W tym rozdziale należy krótko omówić zawartość dołączonej płyty CD.

