

WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

MEMORY-HARD FUNCTIONS

KONRAD ŚWIERCZYŃSKI
NR INDEKSU: 229818

Promotor
dr Filip Zagórski



Politechnika
Wrocławska

WROCŁAW 2019

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Preliminaries	3
2.1	Etykietowanie Grafu	3
2.2	Superkoncentrator	4
2.3	Grafy Depth-Robust	5
2.4	Dispersed Graphs	5
2.5	Grafy Warstwowe	6
2.6	Ograniczenia Złożoności RSG	6
3	Riffle Scrambler	9
3.1	Budowa Grafu	9
3.1.1	Parametry	9
3.1.2	Tworzenie Grafu Na Podstawie Permutacji	9
3.1.3	Śledzenie Trajektorii	11
3.2	Tworzenie Permutacji	11
3.2.1	Talia Kart Jako Permutacja	11
3.2.2	Algorytm	12
3.3	Algorytm	12
4	Implementacja	17
4.1	Wymagania PHC	17
4.2	Opis technologii	17
4.3	Omówienie kodów źródłowych	17
4.4	Parametry	18
4.5	Wydażność	18
4.6	Przykład użycia	18
5	Instalacja i wdrożenie	19
6	Podsumowanie	21
	Bibliografia	23
A	Zawartość płyty CD	25

Wprowadzenie

Moderately hard functions. Funkcje umiarkowanie ciężkie do obliczenia mają wiele zastosowań takich jak dowody pracy (ang. *proofs of work*), funkcje wyprowadzenia klucza oraz password hashing. Przy przechowywaniu haseł ważne jest, aby zminimalizować skutki wycieknienia pliku z hasłami. Zamiast przechowywać krotki (*login, password*) tekstem jawnym, dodaje się losową sól i przechowuje w postaci (*login, f(password, salt), salt*), gdzie f jest moderately hard function. Oznacza to, że funkcja ta musi być obliczana podczas każdego uwierzytelniania w celu sprawdzenia poprawności hasła. Nie może być ona zatem zbyt ciężka do obliczenia dla aplikacji uwierzytelniającej. Z drugiej strony, gdy krotka (*login, y, salt*) wycieknie, adversarz może przeprowadzać atak słownikowy obliczając funkcję f przy każdej próbie, co powinno być kosztowne. W tym celu zaczęto stosować funkcje, które obliczają wiele razy kryptograficzną funkcję skrótu. Popularnym przykładem takiej funkcji jest PBKDF2 (ang. *Password-Based Key Derivation Function 2*), dla której zalecanym parametrem bezpieczeństwa w 2000 roku było 1024 iteracji, a już w 2005 zaczęto zalecać 4096 iteracji, z powodu wzrostu wydajności CPU. Niestety takie podejście nie gwarantuje zabezpieczenia przed adversarzem używającym specjalizowany układ scalony (ang. *ASIC - Application-Specific Integrated Circuit*). Układy takie są znacznie bardziej wydajne pod względem szybkości obliczania funkcji skrótu takich jak SHA256 czy MD5 niż tradycyjne architektury.

– Porównanie Antminer - GPU - CPU –

Zauważono jednak, że na różnych architekturach koszt dostępu do pamięci jest dużo bardziej zrównoważony niż koszt obliczeń. [Percival [16]] Zaproponowano więc memory-hard functions (MHF), które wywołują podczas obliczania wiele kosztownych czasowo odwołań do pamięci.

scrypt - pierwsza taka funkcja

O MHF można myśleć jako o pewnej kolejności dostępu do komórek pamięci. Odwołania następują do już wcześniej obliczonych wartości w komórkach. Zatem kolejność tą można opisać jako acykliczny graf skierowany (DAG).

.....



Preliminaries

W dalszej części używana będzie następująca notacja. Zbiory $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$. $[c] := \{1, 2, \dots, c\}$ oraz $[b, c] = \{b, b+1, \dots, c\}$, gdzie $b, c \in \mathbb{N}$ oraz $b \leq c$.

Skierowany graf acykliczny (ang. *directed acyclic graph*, DAG) $G = (V, E)$ jest rozmiaru n jeżeli $|V| = n$. Wierzchołek $v \in V$ ma stopień wchodzący δ równy największemu stopniowi wchodzącemu wśród jego wierzchołków $\delta = \text{indeg}(v)$, jeżeli istnieje δ wchodzących krawędzi $\delta = |(V \times v) \cap E|$. Graf G ma stopień wchodzący $\delta = \text{indeg}(G) = \max_{v \in V} \text{indeg}(v)$. Wierzchołki o stopniu wchodzącym 0 nazywane są źródłami, a wierzchołki bez krawędzi wychodzących nazywane są ujściami.

Zbiór rodziców wierzchołka $v \in V$ oznaczany jest jako $\text{parents}_G(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$. Uogólniając, zbiór przodków v oznaczany jest jako $\text{ancestors}_G(v) = \bigcup_{i \geq 1} \text{parents}_G^i(v)$, przyjmując $\text{parents}_G^{i+1}(v) = \text{parents}_G(\text{parents}_G^i(v))$. Jeżeli wybór grafu G wynika z kontekstu, będziemy oznaczać te zbiory jako parents oraz ancestors .

Zbiór wszystkich ujść w grafie G oznaczany jest jako $\text{sinks}(G) = \{v \in V : \nexists (v, u) \in E\}$. DAG G , który jest spójny, a tylko takie będą rozważane w dalszej części pracy, zachowuje równość $\text{ancestors}(\text{sinks}(G)) = V$.

Dla skierowanej ścieżki $p = (v_1, v_2, \dots, v_z)$ w G , jej długość jest równa ilości wierzchołków przez które przechodzi $\text{length}(p) := z$. Mając DAG G , oznaczamy długość jego najdłuższej ścieżki jako $\text{depth}(G)$.

Mając podzbiór wierzchołków grafu $S \subset V$, poprzez $G - S$ oznaczamy będziemy DAG otrzymany z G poprzez usunięcie wierzchołków z S oraz krawędzi wychodzących lub wchodzących do wierzchołków z S .

2.1 Etykietowanie Grafu

Definicja 2.1 (*Parallel/Sequential Graph Pebbling*). Niech $G = (V, E)$ będzie grafem skierowanym grafem acyklicznym i niech $T \subset V$ będzie zbiorem wierzchołków do oetykietowania. T będzie nazywane celem. Stanem etykietowania G jest zbiór $P_i \subset V$. Poprawnym etykietowaniem równoległym jest ciąg $P = (P_0, \dots, P_t)$ stanów etykietowania G , gdzie $P_0 = \emptyset$ oraz gdzie spełnione są warunki 1 oraz 2 poniżej. Etykietowanie sekwencyjne musi dodatkowo spełniać warunek 3.

1. Każdy wierzchołek z celu jest w pewnej konfiguracji oetykietowany (nie koniecznie wszystkie jednocześnie).

$$\forall x \in T \exists x \leq t : x \in P_x$$

2. Oetykietować wierzchołek można tylko wtedy, gdy wszyscy jego rodzice są oetykietowani w poprzednim kroku.

$$\forall i \in [t] : x \in (P_i \setminus P_{i-1}) \Rightarrow \text{parents}(x) \subset P_{i-1}$$

3. W każdym kroku można oetykietować co najwyżej jeden wierzchołek.

$$\forall i \in [t] : |P_i \setminus P_{i-1}| \leq 1$$

Zbiory poprawnych etykietowań sekwencyjnych i równoległych grafu G z celem T oznaczamy odpowiednio jako $\mathcal{P}_{G,T}$ oraz $\mathcal{P}_{G,T}^{\parallel}$. Etykietowania najbardziej interesujących przypadków, gdy $T = \text{sinks}(G)$, oznaczamy \mathcal{P}_G oraz $\mathcal{P}_G^{\parallel}$.

Można zauważyć, że $\mathcal{P}_{G,T} \subset \mathcal{P}_{G,T}^{\parallel}$.



Definicja 2.2 *Złożoność czasową (ang. time, t), pamięciową (ang. space, s), pamięciowo-czasową (ang. space-time, st) oraz łączna (ang. cumulative, cc) etykietowania $P = (P_0, \dots, P_t) \in \mathcal{P}_G^\parallel$ są zdefiniowane jako*

$$\Pi_t(P) = t, \Pi_s(P) = \max_{y \in [t]} |P_y|, \Pi_{st}(P) = \Pi_t(P) * \Pi_s(P), \Pi_{cc}(P) = \sum_{i \in [t]} |P_i|$$

Dla $\alpha \in \{s, t, st, cc\}$ oraz celu $T \subset V$, złożoności sekwencyjnego oraz równoległego etykietowania grafu G definiujemy jako

$$\Pi_\alpha(G, T) = \min_{P \in \mathcal{P}_{G,T}} \Pi_\alpha(P)$$

$$\Pi_\alpha^\parallel(G, T) = \min_{P \in \mathcal{P}_{G,T}^\parallel} \Pi_\alpha(P)$$

Kiedy $T = \text{sinks}(G)$, piszemy $\Pi_\alpha^\parallel(G)$ oraz $\Pi_\alpha(G)$.

Ponieważ $\mathcal{P}_{G,T} \subset \mathcal{P}_{G,T}^\parallel$, dla dowolnej złożoności etykietowania $\alpha \in \{s, t, st, cc\}$ oraz dowolnego grafu G złożoność etykietowania równoległe jest nie większa, niż złożoność etykietowania sekwencyjnego $\Pi_\alpha(G) \geq \Pi_\alpha^\parallel(G)$, a złożoność łączna jest nie większa, niż czasowo-pamięciowa $\Pi_{st}(G) \geq \Pi_{cc}(G)$ i $\Pi_{st}^\parallel(G) \geq \Pi_{cc}^\parallel(G)$.

W tej pracy głównie rozważane jest badanie złożoności Π_{st} , oraz Π_{cc}^\parallel , ponieważ ukazują one kolejno koszt przeprowadzania etykietowania na jednordzeniowej maszynie (np. procesor x86) oraz koszt etykietowania na wyspecjalizowanym układzie.

Aby zobaczyć jakie wartości mogą przyjąć przedstawione złożoności, rozważmy graf rozmiaru n . Każdy graf rozmiaru n może zostać oetykietowany w n krokach, ponieważ ma tylko n wierzchołków. Każdy stan etykietowania nie może również zawierać więcej niż n elementów. Zatem górne ograniczenie możemy przedstawić następująco

$$\forall G_n \in \mathbb{G}_n : \Pi_{cc}^\parallel(G_n) \leq \Pi_{st}(G_n) \leq n^2.$$

Zobaczmy jak wyglądają złożoności dla grafu pełnego $K_n = (V = [n], E = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\})$ oraz dla $Q_n = (V = [n], E = \{(i, i+1) : 1 \leq i < n\})$.

$$n(n-1)/2 \leq \Pi_{cc}^\parallel(K_n) \leq \Pi_{st}(K_n) \leq n^2$$

Graf K_n maksymalizuje złożoności etykietowania, a Π_{cc}^\parallel jest różne tylko o stałą od Π_{st} . Co oznacza, że koszt obliczania funkcji opartej na takim grafie byłby zdominowany przez koszt dostępu do pamięci, a wyspecjalizowane układy nie dały by dużej przewagi nad tradycyjnym procesorem. Jest to bardzo pożądane dla MHF, jednak ze względu na bardzo wysoki stopień grafu K_n , nie jest on przydatny przy konstruowaniu takich funkcji. Stopień wchodzący w grafie Q_n jest równy 1, jednak złożoność etykietowania jest bardzo niska

$$\Pi_{cc}^\parallel(Q_n) = \Pi_{st}(Q_n) \leq n.$$

Oznacza to, że koszt obliczania funkcji opartej na takim grafie (taką funkcją jest PBKDF2) nie jest zależny w dużej mierze od kosztu dostępu do pamięci nawet dla dużego n .

2.2 Superkoncentrator

Superkoncentrator jest grafem, w którym moc zbioru przodków dla wierzchołków szybko rośnie wraz z numerem pokolenia. Oznacza to, że zbiór kolejnych wierzchołków, będzie posiadał liczebny zbiór rodziców, co czyni superkoncentrator bardzo przydatnym do konstrukcji MHF.

Definicja 2.3 (*N-Superkoncentrator*). *Skierowany graf acykliczny $G = (V, E)$ o ustalonym stopniu wchodzącym, N wejściach i N wyjściach nazywany jest N-Superkoncentratorem, gdy dla każdego $k \in [N]$ oraz dla każdej pary podzbiorów $V_1 \subset V$ k wejść i $V_2 \subset V$ k wyjść istnieje k wierzchołkowo-rozłącznych ścieżek łączących wierzchołki ze zbioru V_1 z wierzchołkami w V_2 .*

Definicja 2.4 ((N, λ) -Superkoncentrator). Niech $G_i, i = 0, \dots, \lambda - 1$ będą N -Superkoncentratorami. Niech graf G będzie połączeniem wyjść G_i do odpowiadających wejść w G_{i+1} dla $i = 0, \dots, \lambda - 2$. Graf G jest nazywany (N, λ) -Superkoncentratorem.

Twierdzenie 2.1 (Ograniczenie dolne dla (N, λ) -Superkoncentratora). Etykietowanie (N, λ) -Superkoncentratora używając $S \leq N/20$ etykiet, wymaga T kroków, gdzie

$$T \geq N \left(\frac{\lambda N}{64S} \right)^\lambda.$$

2.3 Grafy Depth-Robust

Alwen i Blocki w swojej pracy [1] //TODO pokazali, że istnieje zależność między złożonością etykietowania, a depth-robustness. Na podstawie tej właściwości potrafimy określić dolne i górne ograniczenie Π_{cc}^{\parallel} .

Definicja 2.5 (Depth-Robustness). Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $e, d \in [n]$ DAG $G = (V, E)$ jest (e, d) -depth-robust, jeżeli

$$\forall S \subset V \quad |S| \leq e \Rightarrow \text{depth}(G - S) \geq d.$$

Twierdzenie 2.2 Niech DAG G będzie (e, d) -depth-robust, wtedy $\Pi_{cc}^{\parallel} > ed$.

Definicja 2.6 Jeżeli graf G nie jest (e, d) -depth-robust to nazywany jest (e, d) -reducible.

Twierdzenie 2.3 Niech $G \in \mathbb{G}_{n, \delta}$ taki, że G jest (e, d) -reducible. Wtedy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(G) = O \left(\min_{g \in [d, n]} \left\{ n \left(\frac{dn}{g} + \delta g + e \right) \right\} \right)$$

biorąc $g = \sqrt{\frac{dn}{\delta}}$ upraszcza się to do $\Pi_{cc}^{\parallel}(G) = O \left(n(\sqrt{dn\delta} + e) \right)$.

2.4 Dispersed Graphs

Definicja 2.7 (Dependencies). Niech $G = (V, E)$ będzie acyklicznym grafem skierowanym. Niech $L \subseteq V$. Mówimy, że L ma (z, g) -dependency jeżeli istnieją wierzchołkowo rozłączne ścieżki p_1, \dots, p_z kończące się w L , gdzie każda jest długości co najmniej g .

Definicja 2.8 (Dispersed Graph). Niech $g, k \in \mathbb{N}$ i $g \geq k$. DAG G jest nazywany (g, k) -dispersed jeżeli istnieje uporządkowanie jego wierzchołków takie, że następujące warunki są spełnione. Niech $[k]$ oznacza ostatnie k wierzchołków o uporządkowaniu G i niech $L_j = [jg, (j+1)g - 1]$ będzie j -tym podprzedziałem. Wtedy $\forall j \in [k/g]$ przedział L_j ma (g, g) -dependency. W ogólności, jeżeli dla $\epsilon \in (0, 1]$ każdy przedział L_j ma tylko $(\epsilon g, g)$ -dependency, graf G nazywany jest (ϵ, g, g) -dispersed.

Definicja 2.9 Acykliczny graf skierowany $G = (V, E)$ nazywany jest $(\lambda, \epsilon, g, k)$ -dispersed jeżeli istnieje $\lambda \in \mathbb{N}^+$ rozłącznych podzbiorów wierzchołków $\{L_i \subseteq V\}$, każdy o rozmiarze k oraz spełnione są następujące warunki.

1. Dla każdego L_i istnieje ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki L_i .
2. Dla ustalonego porządku topologicznego G . Dla każdego $i \in [\lambda]$ niech G_i będzie podgrafem G , zawierającym wszystkie wierzchołki z G , aż do ostatniego wierzchołka z L_i . G_i jest (ϵ, g, k) -dispersed.

Zbiór grafów, które są $(\lambda, \epsilon, g, k)$ -dispersed oznaczamy jako $\mathbb{D}_{\epsilon, g}^{\lambda, k}$.

Twierdzenie 2.4 Niech $G \in \mathbb{D}_{\epsilon, g}^{\lambda, k}$.

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(G) \geq \epsilon \lambda g \left(\frac{k}{2} - g \right)$$



2.5 Grafy Warstwowe

Definicja 2.10 (λ -Stacked Sandwich Graphs). Niech $n, \lambda \in \mathbb{N}^+$ takie, że $\lambda + 1$ dzieli n oraz niech $k = n/(\lambda + 1)$. Mówimy, że graf G jest λ -stacked sandwich DAG, jeżeli G zawiera ścieżkę przechodzącą przez n wierzchołków (v_1, \dots, v_n) oraz dzieląc go na warstwy $L_j = \{v_{jk+1}, \dots, v_{j(k+\lambda)}\}$, dla $j \in \{0, \dots, \lambda\}$, pozostałe krawędzie łączą wierzchołki z niższej warstwy L_j jedynie z wierzchołkami z wyższych warstw L_i , $i \in \{j + 1, \dots, \lambda\}$.

Lemat 2.1 Niech G będzie λ -stacked sandwich DAG, wtedy dla dowolnego $t \in \mathbb{N}^+$, G jest $(n/t, \lambda t)$ -reducible.

2.6 Ograniczenia Złożoności RSG

Twierdzenie 2.5 Niech $\lambda, n \in \mathbb{N}^+$ takie, że $n = \bar{n}(2\lambda c + 1)$, gdzie $c \in \mathbb{N}$ i $\bar{n} = 2^c$. Wtedy dla $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$ $RSG_{\lambda}^{\bar{n}} \in \mathbb{D}_{1,g}^{\lambda, \bar{n}}$ oraz $\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = \Omega\left(\frac{n^{1.5}}{c\sqrt{c\lambda}}\right)$.

Dowód. Niech $G = RSG_{\lambda}^{\bar{n}}$, niech $G_1, G_2, \dots, G_{\lambda}$ będą podgrafami G opisanymi w DEF[...]. Pokażemy, że każdy G_i jest (g, \bar{n}) -dispersed dla $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$.

Wybermy $i \in [\lambda]$ niech L_1 będzie ostatnimi \bar{n} wierzchołkami w porządku topologicznym grafu G_i . Oznaczamy wierzchołki zbioru L_1 poprzez $1 \times [\bar{n}]$, gdzie druga pozycja odpowiada kolejności wierzchołka w porządku topologicznym. Niech $\bar{g} = \lfloor \bar{n}/g \rfloor$, dla każdego $j \in [\bar{g}]$ $L_{1,j} = \{< 1, jg + x > : x \in [0, g - 1]\}$. Pokażemy, że wszystkie $L_{1,j}$ mają (g, g) -dependency.

Niech L_0 będzie \bar{n} pierwszymi wierzchołkami G_i , które oznaczamy $0 \times [\bar{n}]$ (ponownie druga pozycja odpowiada porządkowi topograficznemu). Zauważmy, że dla $n > 1$ i $g = \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor$ prawdą jest, że $g(g - 2c + 1) \leq n$. Zatem zbiór $S = \{< 0, i(g - 2c + 1) > : i \in [g]\}$ jest całkowicie zawarty w L_0 .

Z własności RSG [Superconcentrator-] wynika, że skoro zbiory S oraz $L_{1,j}$ mają po g wierzchołków, to istnieje g wierzchołkowo-rozłącznych ścieżek o długości $2c$ między wierzchołkami tych zbiorów. Zatem $L_{1,j}$ ma $(g, 2c)$ -dependency.

Rozszerzmy to do (g, g) -dependency. Niech ścieżka p zaczynająca się w wierzchołku $< 0, v > \in S$ będzie ścieżką w $(g, 2c)$ -dependency $L_{1,j}$. Zauważmy, że istnieje ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki L_0 oraz, że wierzchołki zbioru S są oddzielone między sobą o $g - 2c$ wierzchołków. Możemy dodać na początek ścieżki p ścieżkę $< 0, v - (g - 2c - 1) >, < 0, v - (g - 2c - 2) >, \dots, < 0, v >$. Otrzymujemy w ten sposób ścieżkę p_+ o długości $2c + g - 2c = g$. Ponieważ każda para ścieżek $p \neq q$ w $(g, 2c)$ -dependency $L_{1,j}$ jest wierzchołkowo-rozłączna, to w szczególności zaczynać się muszą w różnych wierzchołkach $< 0, v_p > \neq < 0, v_q >$. Ponieważ wierzchołki w S są od siebie oddalone o $g - 2c$ wierzchołków, zatem ścieżki p^+ i q^+ nadal pozostają rozłączne. Rozszerzając w ten sposób wszystkie ścieżki z $(g, 2c)$ -dependency otrzymujemy ścieżki wierzchołkowo-rozłączne długości g . Z tego wynika, że $L_{1,j}$ ma (g, g) -dependency, co dowodzi, że $RSG_{\lambda}^{\bar{n}} \in \mathbb{D}_{1,g}^{\lambda, \bar{n}}$. Pozostaje obliczyć górne ograniczenie używając [Theorem 6 ABP2017].

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = \lambda g \left(\frac{\bar{n}}{2} - g \right) \geq \lambda \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor \left(\frac{\bar{n}}{2} - \lfloor \sqrt{\bar{n}} \rfloor \right) = \lambda \sqrt{\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{2} - \sqrt{\bar{n}} \right) - O(\bar{n}) = \Omega(\lambda \bar{n}) = \Omega\left(\frac{n^{1.5}}{c\sqrt{c\lambda}}\right) \quad \square$$

Twierdzenie 2.6 Niech $\lambda, g \in \mathbb{N}^+$, $N = 2^g$, $n = N(2\lambda g + 1)$, wtedy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n^{1.6}\right)$$

Dowód. Kozytając, z [...], RSG_{λ}^N jest λ -Stacked Sandwich Graph. Z [Lemma 4.2 AB16] wynika więc, że RSG_{λ}^N jest $(n/t, \lambda + t - \lambda - 1)$ -reducible dla dowolnego $t \geq 1$. Z twierdzenia 10 [ABP17] wynika, że $\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n \left(\sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right)\right)$. Aby dostać najdokładniejsze (najmniejsze) ograniczenie górne trzeba zminimalizować $n \left(\sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right)$. Zanim jednak przejdziemy do minimalizowania, uproścmy nieco to wyrażenie

$$n \left(\sqrt{(\lambda t + t - \lambda - 1)n\delta + \frac{n}{t}} \right) \leq n \left(\sqrt{2\lambda t n\delta + \frac{n}{t}} \right).$$

Teraz możemy znaleźć minimum względem naszego parametru t .

$$\frac{\partial}{\partial t} n \left(\sqrt{(2\lambda t)n\delta} + \frac{n}{t} \right) = \frac{\sqrt{2\delta\lambda n^3}}{2t} - \frac{n^2}{t^2}$$

Minimum znajduje się w punkcie, gdzie pochodna ma wartość zero.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\delta\lambda n^3}}{2t} - \frac{n^2}{t^2} &= 0 \\ t &= \frac{2n^2}{\sqrt{2\delta\lambda n^3}} = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

Zatem podstawiając t minimalizujące ograniczenie górne do wzoru z twierdzenie 10 [ABP17] otrzymujemy

$$\Pi_{cc}^{\parallel}(RSG_{\lambda}^{\bar{n}}) = O\left(n \left(\sqrt{(\lambda n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}} - \lambda - 1)n\delta} + \frac{n}{n^{\frac{1}{3}}} \right)\right) = O\left(n^{1.\bar{6}}\right)$$

□



Riffle Scrambler

RiffleScrambler [1] jest nową rodziną acyklicznych grafów skierowanych (nazywaną RSG), której odpowiada funkcja *memory-hard* z dostępem do pamięci niezależnym od hasła (iMHF). W funkcji tej, podobnie jak w Catenie, kolejność obliczeń zdefiniowana jest za pomocą grafu. Przewagą funkcji RiffleScrambler, jest to, że graf generowany jest na podstawie soli, tak jak w funkcji Ballon Hashing. Oznacza, to, że dla każda sól odpowiada (z dużym prawdopodobieństwem) innemu grafowi, co zwiększa odporność na ataki równoległe. Dla Cateny są dwa predefiniowane grafy *bit-reversal* i *double-butterfly*. Jednocześnie RiffleScrambler zapewnia lepszą wydajność przy obliczaniu niż Ballon Hashing, ponieważ ma dużo mniejszy stopień wchodzący grafu, który jest równy 3. Ponieważ jest superkoncentratorem, osiąga kompromis pamięć-czas oraz dolne ograniczenie złożoności etykietowania równoległego takie same jak Catena.

3.1 Budowa Grafu

3.1.1 Parametry

Funkcja RiffleScrambler używa następujących parametrów:

- s - sól, używana do wygenerowania grafu G ,
- g - ilość pamięci potrzebnej do obliczeń, dla $G = (V, E)$ zbiór wierzchołków można przedstawić jako $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{2\lambda g}$, gdzie $|V_i| = 2^g$,
- λ - liczba warstw grafu G , może być postrzegana jako liczba iteracji.

Sól używana jest do generowania liczb pseudolosowych, potrzebnych do zbudowania grafu. Parametr g określa ilość pamięci, jaką trzeba będzie wykorzystać podczas obliczania funkcji. Podczas obliczeń potrzebne jest 2^g komórek, gdzie każda przechowuje wynik kryptograficznej funkcji skrótu. Wartość 2^g będziemy oznaczać jako N . Parametr λ definiuje ile warstw będzie miał końcowy graf, co bezpośrednio wpływa na czas obliczania funkcji. Graf dla zadanych parametrów wpływających na jego rozmiar oznaczany jest RSG_N^λ . Sól nie ma wpływu na rozmiar grafu, ani jego właściwości, używana jest do generowania części krawędzi w grafie.

3.1.2 Tworzenie Grafu Na Podstawie Permutacji

Niech $HW(x)$ (ang. *Hamming weight*) oznacza ilość jedynek w wyrazie binarnym x . Niech \bar{x} oznacza negację wyrazu x , zatem $HW(\bar{x})$ oznacza liczbę zer w wyrazie x .

Definicja 3.1 Niech $B = (b_0 \dots b_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ będzie wyrazem binarnym o długości n . Definiujemy rangę $r_B(i)$ i -tego bitu w B jako

$$r_B(i) = |\{j < i : b_j = b_i\}|.$$

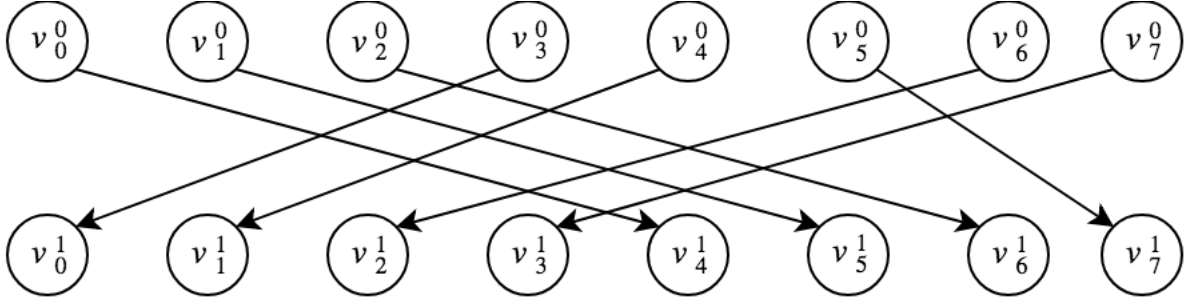
Definicja 3.2 (*Riffle-Permutation*). Niech $B = (b_0 \dots b_{n-1})$ będzie wyrazem binarnym o długości n . Permutacja π indukowana przez B zdefiniowana jest następująco

$$\pi_B(i) = \begin{cases} r_B(i), & \text{if } b_i = 0 \\ r_B(i) + HW(\bar{B}), & \text{if } b_i = 1 \end{cases}$$

dla każdego $0 \leq i \leq n - 1$.



Przykład 3.1 Niech $B = 11100100$, wtedy $r_B(0) = 0$, $r_B(1) = 1$, $r_B(2) = 2$, $r_B(3) = 0$, $r_B(4) = 1$, $r_B(5) = 3$, $r_B(6) = 2$, $r_B(7) = 3$. Mając rangi dla wszystkich pozycji, można utworzyć Riffle-Permutation indukowaną przez B $\pi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ilustracja tego przykładu widoczna poniżej. *TODO link*

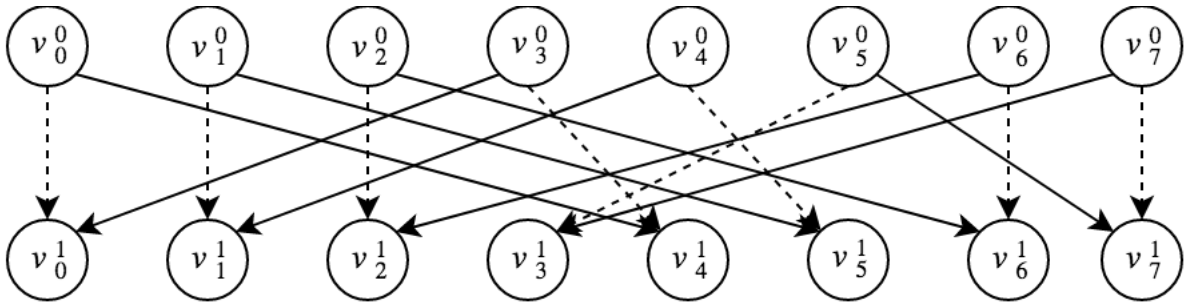


Rysunek 3.1: Graf utworzony z Riffle-Permutation indukowanej przez $B = 11100100$.

Definicja 3.3 (*N-Single-Layer-Riffle-Graph*). Niech $V = V^0 \cup V^1$, gdzie $V^i = \{v_0^i, \dots, v_{N-1}^i\}$, niech B będzie słowem binarnym długości N . Niech π_B będzie Riffle-Permutaion indukowaną przez B . Graf *N-Single-Layer-Riffle-Graph* (dla parzystego N) zdefiniowany jest jako graf na wierzchołkach V z następującymi krawędziami w zbiorze E :

- jedna krawędź: $v_{N-1}^0 \rightarrow v_0^1$,
- $2(N-1)$ krawędzi: $v_{i-1}^j \rightarrow v_i^j$, dla $i \in [N-1]$ oraz $j \in \{0, 1\}$,
- N krawędzi: $v_i^0 \rightarrow v_{\pi_B(i)}^1$, dla $i \in \{0, \dots, N-1\}$,
- N krawędzi: $v_i^0 \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}}(i)}^1$, dla $i \in \{0, \dots, N-1\}$.

Przykład 3.2 Kontynuując z danymi z poprzedniego przykładu *TODO* dodać link, $\pi_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. *8-Single-Layer-Riffle-Graph* ukazany jest na Rysunku *TODO*.



Rysunek 3.2: 8-Single-Layer-Riffle-Graph dla $B = 11100100$ (krawędź (v_7^0, v_0^1) oraz krawędzie poziome zostały pominięte). Krawędzie dla permutacji π_B oznaczone są linią ciągłą, a krawędzie dla permutacji $\pi_{\bar{B}}$ oznaczone są linią przerywaną.

Definicja 3.4 (*N-Double-Riffle-Graph*). Niech V oznacza zbiór wierzchołków, a E zbiór krawędzi grafu $G = (V, E)$. Niech B_0, \dots, B_{g-1} będą wyrazami binarnymi o długości $N = 2^g$ każdy. *N-Double-riffle-Graph* jest otrzymywany poprzez ułożenie w stos $2g$ grafów, które spełniają warunki *N-Single-Layer-Riffle-Graph*. Otrzymany tak graf ma $(2g+1)2^g$ wierzchołków $\{v_0^0, \dots, v_{2^g-1}^0\} \cup \dots \cup \{v_0^{2^g}, \dots, v_{2^g-1}^{2^g}\}$, oraz następujące krawędzie:

- $(2g+1)2^g$ krawędzi: $v_{i-1}^j \rightarrow v_i^j$ dla $i \in [2^g - 1]$ i $j \in \{0, 1, \dots, 2^g\}$,
- $2g$ krawędzi: $v_{2^g-1}^j \rightarrow v_0^{j+1}$ dla $j \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$,
- $g2^g$ krawędzi: $v_i^{j-1} \rightarrow v_{\pi_{B_j}(i)}^j$, dla $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ i $j \in [g]$,
- $g2^g$ krawędzi: $v_i^{j-1} \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}_j}(i)}^j$, dla $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ i $j \in [g]$,

oraz dla dolnych g warstw, które są symetryczne względem warstwy g :

- $g2^g$ krawędzi: $v_i^{2^g-j} \rightarrow v_{\pi_{B_j}^{-1}(i)}^{2^g-j+1}$, dla $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ i $j \in [g]$,
- $g2^g$ krawędzi: $v_i^{2^g-j} \rightarrow v_{\pi_{\bar{B}_j}^{-1}(i)}^{2^g-j+1}$, dla $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$ i $j \in [g]$,

Definicja 3.5 ((N, λ) -Double-Riffle-Graph). Niech G_i , $i \in \{0, 1, \dots, \lambda - 1\}$ będą N -Double-Riffle-Graph. Graf (N, λ) -Double-Riffle-Graph jest skonstruowany poprzez złączenie wyjść grafu G_i do odpowiadających wejść grafu G_{i+1} , $i \in \{0, 1, \dots, \lambda - 2\}$.

3.1.3 Śledzenie Trajektorii

Graf jest generowany za pomocą permutacji pseudolosowej σ . Ponieważ do generowania grafu potrzebne jest g słów binarnych o długości 2^g , a permutacje zawierają 2^g elementów, gdzie każdy ma maksymalnie g bitów znaczących, trzeba przekształcić permutację tak, aby otrzymać pożądane dane. Ta procedura nazwana jest śledzeniem trajektorii (ang. *trace trajectories*). Niech B będzie macierzą binarną o rozmiarze $2^g \times g$, gdzie j -ta kolumna jest binarną postacią $\sigma(j) \in [2^g - 1]$. Macierz $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{g-1})$ oznaczać będzie transpozycję macierzy B , a więc macierz o potrzebnym do generacji grafu rozmiarze $g \times 2^g$.

3.2 Tworzenie Permutacji

3.2.1 Talia Kart Jako Permutacja

Początkową częścią funkcji **RiffleScrambler** jest generowanie permutacji na podstawie soli. Do utworzenia takiej permutacji używany jest algorytm **InverseRiffleShuffle**, który imituje tasowanie kart do gry w odwrotnej kolejności.

Podczas tasowania talia kart dzielona jest na dwie części. Podział odbywa się poprzez wybranie karty w środku talii, karty które są przed wybraną kartą tworzą pierwszą część, a pozostałe tworzą drugą część. Następnie te dwie części są ze sobą łączone w jeden stos poprzez losowe umieszczanie karty z góry pierwszej lub drugiej części na stosie. Można zauważyć, że kolejność kart wśród stosu z którego pochodzą nie zmienia się, lecz między kolejne karty z jednego stosu mogą wejść karty z drugiego.

W celu wygenerowania permutacji N elementów, myślimy o tych elementach jako o kartach, a o permutacji, jako o pewnej ich kolejności. Krok odwróconego sortowania wygląda następująco.

Dla każdej karty w talii losowany jest jeden bit, 0 lub 1. Wszystkie karty, dla których wylosowano 1 wyciągamy, zachowując ich kolejność i układamy na stos. Następnie umieszczamy ten stos na stosie kart, dla których wylosowano zera.

Dla każdego takiego kroku, dla każdej karty zapisywana jest informacja jaki bit został dla niej wylosowany. Zatem po n krokach, każda karta ma przypisany ciąg binarny długości n . Kończymy, kiedy talia kart jest dobrze posortowana, czyli kiedy każdej karcie przypisano unikalny ciąg binarny. Nowa kolejność elementów oznacza wygenerowaną permutację.

Można zauważyć, że liczba kroków tasowania N kart na pewno nie będzie mniejsza od $\log N$, bo potrzebujemy $\log N$ bitów, aby każdej karcie przyporządkować inny ciąg binarny.

Algorytm *InverseRiffleShuffle* będzie mógł się zakończyć, kiedy każdy element będzie posiadał różny ciąg binarny. Średnio oznacza to $2 \log N$ kroków [1].



3.2.2 Algorytm

Razem z prezentacją funkcji **RiffleScrambler** zaproponowany został algorytm generowania permutacji [1, algorytm 1], który sprawdzał warunek końca w czasie $O(n^2)$ oraz potrzebował $O(n^2)$ komórek pamięci, gdzie n oznacza wielkość permutacji.

Pseudokod [IRS...] przedstawia algorytm sprawdzający warunek końca w czasie $O(n)$ korzystając z $O(n \log n)$ komórek pamięci.

Algorytm opiera się na sortowaniu pozycyjnym *radix sort*, gdzie jako pozycje sortowanych elementów podawane są losowane bity. Permutowane elementy, trzymane są w tablicy, która jest sortowana po każdej iteracji dokładania kolejnego bitu. Dzięki temu sprawdzenie warunku końca odbywa się na posortowanej tablicy, którą wystarczy przejść sprawdzając czy każde dwa sąsiednie elementy są różne, co wykonywane jest w czasie liniowym.

3.3 Algorytm

Procedurę **RiffleScrambler**(pwd, s, g, λ) można z grubsza przedstawić następująco.

- Dla podanej soli s obliczana jest pseudolosowa permutacja σ (używając algorytmu inverse Riffle Shuffle).
- Dla permutacji σ tworzona jest macierz $\mathfrak{B} = \mathbf{TraceTrajectories}(B)$.
- Dla wyrazów binarnych $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{g-1}$ generowany jest graf G , który jest N-Double-Riffle-Graph. Przypomnijmy, $N = 2^g$.
- Na grafie G zainicjalizowanym wartością pwd , oblicze są wartości w ostatnim rzędzie ($v_0^{2g+1}, \dots, v_{2^g-1}^{2g+1}$).
- Wartości z ostatniego rzędu przepisywane są do pierwszego, $v_i^0 = v_1^{2g+1}$ dla $i \in \{0, \dots, 2^g - 1\}$, a następnie znów oblicza się wartości ostatnich rzędów. Powtarzane jest λ razy.
- Wartością końcową jest wartość w ostatnim wierzchołku, czyli w $v_{2^g-1}^{2g}$.

Przykład 3.3 (*Generacja (8,1)-Double-Riffle-Graph*). Skoro $N = 8$, to $g = 3$, ponieważ $N = 2^g$. $\lambda = 1$.

Niech otrzymaną permutacją σ będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zatem binarna postać permutacji $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Przeprowadzając śledzenie trajektorii, czyli transponując B otrzymujemy $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

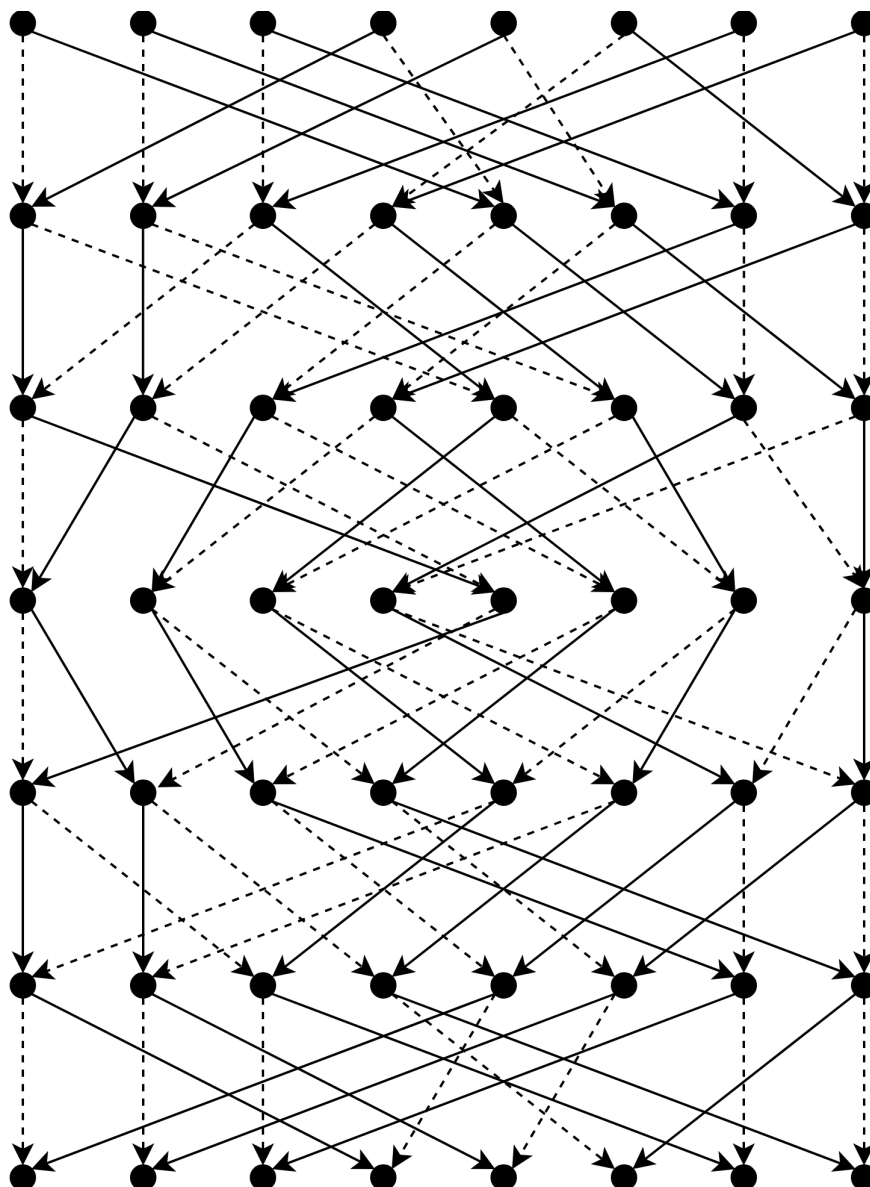
Teraz należy obliczyć permutacje $\pi_{\mathfrak{B}_0}, \pi_{\mathfrak{B}_1}, \pi_{\mathfrak{B}_2}$:

$$\pi_{\mathfrak{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

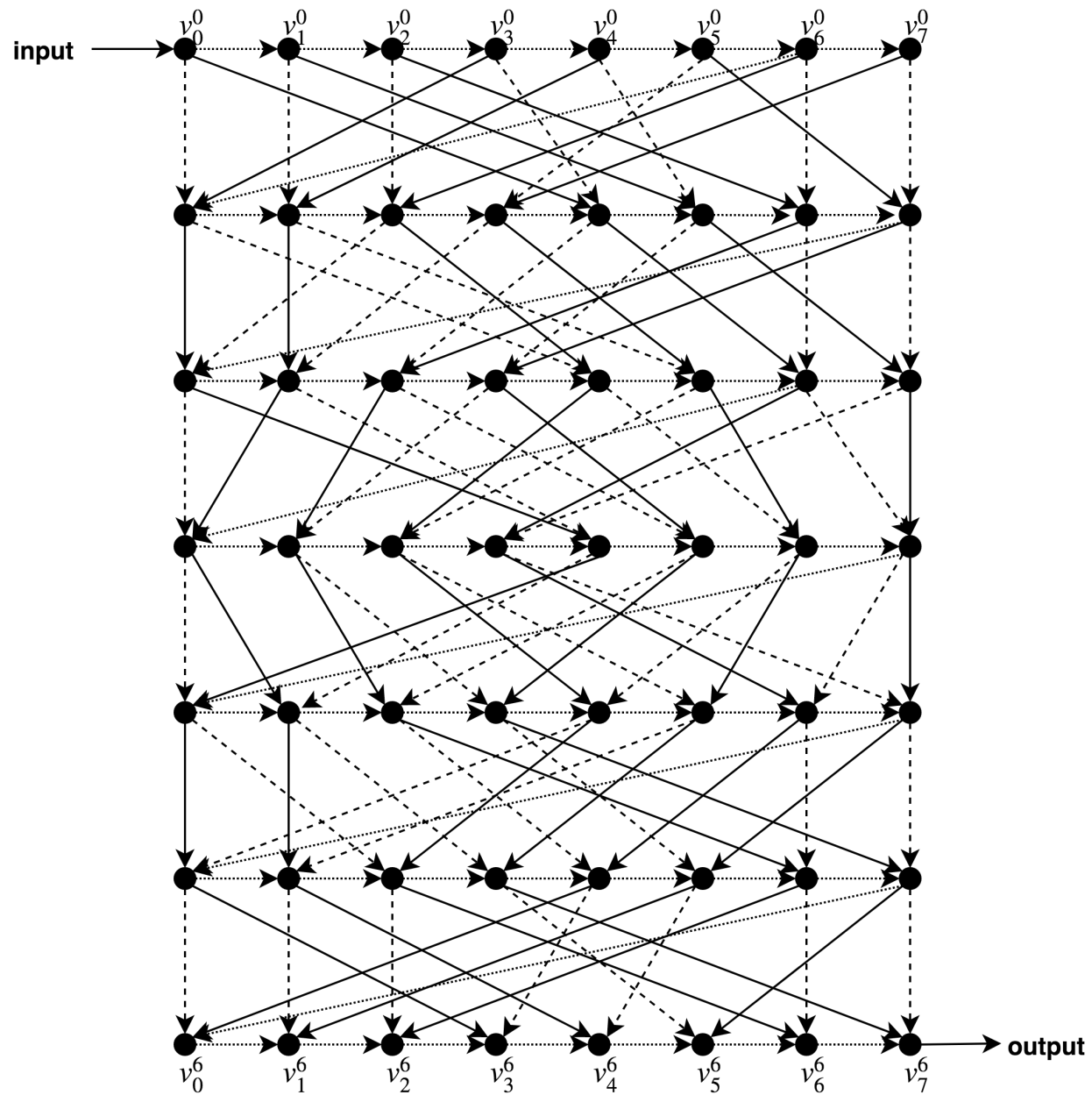
$$\pi_{\mathfrak{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\pi_{\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Wygenerowany graf z krawędziami zależnymi od permutacji ukazany jest na ... Dodając do nie go krawędzie nie zależne od permutacji, otrzymujemy pełny graf (8,1)-Double-Riffle-Graph.



Rysunek 3.3: $(8,1)$ -Double-Riffle-Graph (krawędzie niezależne od permutacji, czyli przekątne oraz krawędzie poziome, zostały pominięte). Krawędzie dla permutacji oznaczone są linią ciągłą, a krawędzie dla permutacji negacji oznaczone są linią przerywaną.



Rysunek 3.4: (8,1)-Double-Riffle-Graph ze wszystkimi krawędziami oraz oznaczeniem wejścia i wyjścia. Krawędzie dla permutacji oznaczone są linią ciągłą, krawędzie dla permutacji negacji oznaczone są linią przerywaną, a krawędzie nie zależne od permutacji oznaczone są liniami kropkowanymi

Algorithm 3.1: RiffleShuffle

Input: N , bitGenerator**Output:** σ

```
/* perm zawiera krotki będące początkowym indeksem oraz wyrazem binarnym. perm[i] = (id, bin) dla
   i ∈ {0, ..., N - 1} */
1 perm = ((0, ""), (1, ""), ..., (N - 1, "")) ;
2 while ∃i ∈ {0, ..., N - 2} perm[i][1] == perm[i + 1][1] do
3   numberOfOnes = 0 ;
4   for i = 0 to N - 1 do
5     newBit = bitGenerator() ;
6     perm[i][1] = perm[i][1] + newBit ;
7     if newBit == "1" then
8       numberOfOnes = numberOfOnes + 1 ;
9     end if
10  end for
11  lastIndexOfOnes = 0 ;
12  lastIndexOfZeros = numOfOnes ;
13  for i = 0 to N - 1 do
14    if lastBit(permutation[i][1]) == "1" then
15      tmp[lastIndexOfOnes] = permutation[i] ;
16      lastIndexOfOnes = lastIndexOfOnes + 1 ;
17    else
18      tmp[lastIndexOfZeros] = permutation[i] ;
19      lastIndexOfZeros = lastIndexOfZeros + 1 ;
20    end if
21  end for
22  perm = tmp ;
23 end while
24 σ = (perm[0].id, perm[1].id, ..., perm[N - 1].id) ;
25 return σ ;
```

Algorithm 3.2: GenGraph

Input: g, σ **Output:** G

```
1 N = 2g ;
2 V = {vij : i ∈ {0, ..., N - 1}; j ∈ {0, ..., 2g}} ;
3 E = {vij → vi+1j : i ∈ {0, ..., N - 2}; j ∈ {0, ..., 2g}} ;
4 E = E ∪ {vN-1j → v0j+1 : j ∈ {0, ..., 2g - 1}} ;
5 B = (B0, ..., Bg-1) = TraceTrajectories(σ) ;
6 for m = 0 to g - 2 do
7   B2g+1-m = Bm ;
8 end for
/* Bity w słowach binarnych oznaczamy dodając indeks dolny. Bj = Bj,0Bj,1...Bj,2g-1 */
9 for j = 0 to 2g - 1 do
10  for i = 0 to 2g - 1 do
11    E = E ∪ {vij → vπBj,ii+1} ∪ {vij → vπBj,ii+1} ;
12  end for
13 end for
14 return G = (V, E) ;
```



Algorithm 3.3: RiffleScrambler

Input: $s, g, \text{pwd}, \lambda, H$ - funkcja skrótu
Output: pwd hash

```

1  $\sigma = \text{RiffleShuffle}(2^g, \text{pseudoRandomBitGenerator}(s, H))$  ;
2  $G = (V, E) = \text{GenGraph}(g, \sigma)$  ;
3  $v_0^0 = H(X)$  ;
4 for  $i = 1$  to  $2^g - 1$  do
5    $v_i^0 = H(v_{i-1}^0)$  ;
6 end for
7 for  $r = 1$  to  $\lambda$  do
8   for  $j = 0$  to  $2g$  do
9     for  $i = 0$  to  $2^g - 1$  do
10       $v_i^{j+1} = 0$  ;
11      forall  $v \rightarrow v_i^{j+1} \in E$  do
12         $v_i^{j+1} = H(v_i^{j+1}, v)$  ;
13      end forall
14    end for
15  end for
16  for  $i = 0$  to  $2^g - 1$  do
17     $v_i^0 = v_i^{2g+1}$  ;
18  end for
19 end for
20  $\text{hash} = v_{2^g-1}^{2g}$  ;
21 return  $\text{hash}$  ;

```

Implementacja

Implementacja **RiffleScrambler** została napisana tak, aby spełniała następujące założenia:

- spełnianie wymagań konkursu na funkcję do przechowywania hasel [?, PHC, ang *Password Hashing Competition*], który rozgrywał się w latach 2013 - 2015,
- zapewnienie najwyższej wydajności obliczania, aby można było stosować parametry zapewniające wysokie bezpieczeństwo w akceptowalnym czasie obliczeń.

4.1 Wymagania PHC

Wymagania konkursy PHC odnoszące się do implementacji:

- implementacja powinna być napisana w języku C(++) w taki sposób, aby była przenośna,
- do implementacji powinny być dołączone instrukcje kompilacji (np. Makefile),
- interfejs powinien być dostępny do użycia w języku C, oraz powinien zapewniać funkcję z podaną sygnaturą,
- implementacja może używać biblioteki OpenSSL,
- do implementacji powinny zostać dołączone testy.

4.2 Opis technologii

Początkowa implementacja napisana została w języku Python 3.7, jednak ze względu na niską wydajność oraz nie spełnianie wymagań PHC napisana została ostatecznie w języku C++17, standard ISO/IEC 14882:2017. Dzięki temu wydajność wzrosła ponad dziesięciokrotnie.

W implementacji używana jest biblioteka OpenSSL w wersji ..., Z podanej biblioteki użyto interfejsu EVP który dostarcza podstawowe kryptograficzne funkcje skrótu takie jak SHA2, SHA3, blake2s czy ripemd160.

4.3 Omówienie kodów źródłowych

Omówiony zostanie interfejs funkcji **RiffleScrambler**, który spełnia wymogi PHC oraz posiada dodatkowy wysokopoziomowy interfejs pozwalający na wygodne tworzenie aplikacji uwierzytelniającej.

Kompletne kody źródłowe znajdują się do płyce CD dołączonej do niniejszej pracy. (patrz Dodatek A).



4.4 Parametry

4.5 Wydajność

4.6 Przykład użycia

Instalacja i wdrożenie

W tym rozdziale należy omówić zawartość pakietu instalacyjnego oraz założenia co do środowiska, w którym realizowany system będzie instalowany. Należy przedstawić procedurę instalacji i wdrożenia systemu. Czynności instalacyjne powinny być szczegółowo rozpisane na kroki. Procedura wdrożenia powinna obejmować konfigurację platformy sprzętowej, OS (np. konfiguracje niezbędnych sterowników) oraz konfigurację wdrażanego systemu, m.in. tworzenia niezbędnych kont użytkowników. Procedura instalacji powinna prowadzić od stanu, w którym nie są zainstalowane żadne składniki systemu, do stanu w którym system jest gotowy do pracy i oczekuje na akcje typowego użytkownika.



Podsumowanie

W podsumowanie należy określić stan zakończonych prac projektowych i implementacyjnych. Zaznaczyć, które z zakładanych funkcjonalności systemu udało się zrealizować. Omówić aspekty pielęgnacji systemu w środowisku wdrożeniowym. Wskazać dalsze możliwe kierunki rozwoju systemu, np. dodawanie nowych komponentów realizujących nowe funkcje.

W podsumowaniu należy podkreślić nowatorskie rozwiązania zastosowane w projekcie i implementacji (niebanalne algorytmy, nowe technologie, itp.).



Bibliografia

- [1] K. Gotfryd, P. Lorek, F. Zagórski. Rifflescrambler—a memory-hard password storing function. *European Symposium on Research in Computer Security*, strony 309–328. Springer, 2018.



Zawartość płyty CD

W tym rozdziale należy krótko omówić zawartość dołączonej płyty CD.

