

ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

---

Telecomunicações

# Apontamentos

(Alguns tópicos 🔄)

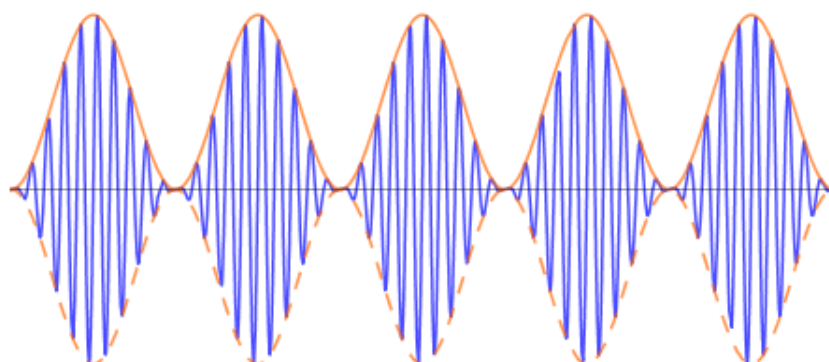


Imagem: *Illustration of the envelope*

---

*Autores:*

**João Gonçalves** : 99995

↪ [jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt](mailto:jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt)

**Teresa Nogueira** : 100029

↪ [maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt](mailto:maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt)

Janeiro 2023

# Índice

<b>1. Conceitos gerais</b>	<b>1</b>
1.1 Classificação de sinais . . . . .	1
1.1.1 Alguns sinais importantes . . . . .	1
1.1.2 Correlação de sinais . . . . .	2
1.2 Análise de Fourier . . . . .	3
1.3 Teoremas de Wiener–Khinchin, Rayleigh e de Parseval . . . . .	4
1.4 Processos estocásticos (ou aleatórios) . . . . .	5
1.4.1 Estatísticas . . . . .	5
1.4.1.1 Valor médio . . . . .	5
1.4.1.2 Função de autocorrelação . . . . .	5
1.4.1.3 Função de autocovariância . . . . .	5
1.4.1.4 Função de correlação cruzada . . . . .	5
1.4.2 Processos estacionários . . . . .	5
1.4.3 Processos ergódicos . . . . .	5
1.4.3 Potência de um sinal aleatório e densidade espectral de potência . . . . .	6
<b>2. Modelação Analógica</b>	<b>7</b>
2.1 Modulação de Amplitude . . . . .	7
2.1.1 Double Sideband AM . . . . .	7
2.1.2 Detetor Envolvente . . . . .	9
2.1.3 Double Sideband Supressed Carrier . . . . .	10
2.1.4 Detetor Coerente . . . . .	11
2.1.5 Potência de transmissão de uma onda modulada em amplitude . . . . .	11
2.1.5.1 Eficiência de modulação de um sinal AM . . . . .	11
2.2 Modelação de Ângulo (PM e FM) . . . . .	12
2.2.1 Relação entre PM e FM . . . . .	12
2.2.2 Largura de banda FM (Carson’s rule) . . . . .	12
2.2.2.1 FM de banda estreita . . . . .	13
2.2.2.2 FM de banda larga . . . . .	13
2.2.3 Potência de transmissão de uma onda modulada em ângulo . . . . .	13
2.2.4 Discriminador de frequência (desmodulação de uma onda FM) . . . . .	13
<b>3. Modelação Digital</b>	<b>14</b>
3.1 Amostragem ( <i>Sampling</i> ) . . . . .	14
3.1.1 Amostragem instantânea . . . . .	14
3.2 Pulse Amplitude Modulation . . . . .	15
3.3 Pulse Code Modulation . . . . .	16
3.3.1 Quantização . . . . .	16
3.3.1.1 Quantização Uniforme . . . . .	16
3.3.1.2 Relação Sinal–Ruído de Quantização . . . . .	17
3.3.1.3 Quantização Não Uniforme . . . . .	17
3.3.2 Gerador de Sinais PCM . . . . .	18
3.3.2.1 Line Codes . . . . .	18
3.4 Interferência intersimbólica . . . . .	26
3.4.1 Critério de Nyquist . . . . .	26
3.4.2 Espetro Raised Cosine . . . . .	28
3.4.3 Eye Pattern . . . . .	29

<b>4. Transmissão em canais com AWGN</b>	<b>30</b>
4.1 Representação geométrica de sinais . . . . .	30
4.1.1 Desigualdade de Schwarz . . . . .	31
4.1.2 Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt . . . . .	31
4.2 Problema de decisão . . . . .	32
4.2.1 Caracterização estatística da saída do correlador . . . . .	32
4.2.2 <i>Optimum detector</i> : $M$ sinais reais . . . . .	33
4.3 Filtro adaptado . . . . .	35
<b>5. Técnicas de Modelação Digital (banda passante)</b>	<b>36</b>
5.1 ASK ( <i>Amplitude-Shift Keying</i> ) . . . . .	36
5.1.1 Probabilidade de erro (código polar) . . . . .	36
5.1.2 Probabilidade de erro (código unipolar) . . . . .	37
5.1.3 Espectro de potência e eficiência espectral . . . . .	37
5.2 PSK ( <i>Phase-Shift Keying</i> ) . . . . .	38
5.2.1 Probabilidade de erro . . . . .	38
5.2.2 Espectro de potência e eficiência espectral . . . . .	38
5.2.3 Exercícios . . . . .	39
5.2.3.1 Oscilador com erro de fase . . . . .	39
5.3 QAM ( <i>Quadrature Amplitude Modulation</i> ) . . . . .	40
5.3.1 Probabilidade de erro . . . . .	40
5.3.2 Espectro de potência e eficiência espectral . . . . .	40
5.3.3 Exercícios . . . . .	41
5.3.3.1 . . . . .	41
5.4 FSK ( <i>Frequency-Shift Keying</i> ) . . . . .	42
5.4.1 Probabilidade de erro . . . . .	42
5.4.2 Espectro de potência e eficiência espectral . . . . .	43
5.4.3 Exercícios . . . . .	43
5.4.3.1 . . . . .	43
<b>Referências</b>	<b>44</b>

# 1. Conceitos gerais

## 1.1 Classificação de sinais

- ★ Um sinal  $x(t)$  diz-se *determinístico* se,  $\forall t$ , o valor de  $x(t)$  é real ou complexo.
- ★ Um sinal  $x(t)$  diz-se *aleatório* ou *estocástico* se,  $\forall t$ , o valor de  $x(t)$  é uma variável aleatória; isto é, é definido por uma função densidade de probabilidade.

- ★ Um sinal  $x(t)$  diz-se periódico se verificar:

$$x(t + kT) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

onde  $T$  é definido como o período do sinal. Um sinal que não verifique esta propriedade, diz-se *aperiódico*.

- ★ Um sinal diz-se um *sinal de energia* se a sua energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

for finita.

- ★ Um sinal diz-se um *sinal de potência* se a sua potência

$$P_x = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} |x(t)|^2 dt$$

for finita. Para um sinal periódico  $x(t)$ , de período  $T$ , a potência é dada por:

$$P_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E_x}{nT} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

### 1.1.1 Alguns sinais importantes

- ★ **Sinal sinusoidal:**

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

É um sinal com potência dada por  $P_x = A^2/2$ .

- ★ **Pulso rectangular:**

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } |t-t_0| \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t-t_0| > T/2 \end{cases}$$

É um sinal com energia dada por  $E_x = T$ .

- ★ **Pulso triangular:**

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - |t-t_0|/T & \text{se } |t-t_0| \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t-t_0| > T/2 \end{cases}$$

É um sinal com energia dada por  $E_x = 2T/3$ .

- ★ **Sinal sinc<sup>1</sup>:**

$$x(t) = \text{sinc}(t) \triangleq \begin{cases} \sin(\pi t)/\pi t & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

É um sinal de energia unitária, i.e.,  $E_x = 1$ .

### ★ Sinal delta ou impulso de Dirac:

Relembrando Sinais e Sistemas,  $\delta(t)$  é uma função generalizada que pode ser definida por (*sifting property*):

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

(Para  $x(t) \equiv 1$ , verifica  $\int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) dt = 1$ ).

Uma dilatação ou contração temporal, resulta em:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \in \mathbb{C}$$

O integral do impulso de Dirac é o degrau unitário:

$$u(t) \triangleq \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Dualmente, a derivada do degrau unitário é:

$$\frac{du(t)}{dt} \triangleq \delta(t)$$

#### 1.1.2 Correlação de sinais

A correlação (*cross-correlation*) de dois sinais,  $x(t)$  e  $y(t)$ , é dada por:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

É uma medida da similaridade entre sinais.

Caso  $x(t) = y(t)$ , define-se a função de autocorrelação:

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

Particularmente, se  $\tau = 0$  verifica-se  $\rightarrow R_x(\tau = 0) = E_x$ .

Dado um sinal de potência  $z(t)$ , define-se a sua média temporal como:

$$\langle z(t) \rangle \triangleq \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} z(t) dt$$

Define-se então, a correlação entre dois sinais de potência,  $x(t)$  e  $y(t)$ , como

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t)y^*(t - \tau) \rangle \triangleq \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

Novamente, no caso particular em que  $x(t) = y(t)$ , obtemos a função de autocorrelação:

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x^*(t - \tau) \rangle \triangleq \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

Quando  $x(t)$  é periódico com período  $T$ , temos

$$R_x(\tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_T x(t)x^*(t - \tau) dt$$

A função de autocorrelação de sinais de energia [potência] (reais) verifica:

- ★  $R_x(\tau = 0) = S$ , onde  $S$  representa a energia [potência média] do sinal  $x(t)$ .
- ★  $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ .
- ★  $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$ , a autocorrelação é uma função par.

<sup>1</sup>Alguns livros definem uma função similar:  $\text{Sa}(t) \triangleq \sin(t)/t$ , desta forma,  $\text{sinc}(t) = \text{Sa}(\pi t)$ .

## 1.2 Análise de Fourier

### Séries de Fourier

Seja  $x(t)$  um sinal periódico, de período  $T$ , que verifica as condições de Dirichlet:

1.  $x(t)$  é absolutamente integrável num intervalo correspondente a um período:

$$\int_T |x(t)| dt < +\infty$$

2. O número de máximos e mínimos de  $x(t)$  num intervalo  $T$ , é finito.
3. O número de descontinuidades de  $x(t)$  em cada intervalo, é finito.

Satisfazendo estas condições, define-se a Série de Fourier correspondente ao sinal  $x(t)$  como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 \triangleq \frac{1}{T}$$

onde

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } x(t) \text{ for contínuo em } t \\ \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2} & \text{se } x(t) \text{ for descontínuo em } t. \end{cases}$$

Os coeficientes da Série de Fourier são dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

→ **Nota:** Se  $x(t)$  é real, então  $c_{-n} = c_n^*$ , e segue que:

- ★ Se  $x(t)$  for real e par, então os coeficientes são todos reais →  $c_{-n} = c_n$ .
- ★ Se  $x(t)$  for real e ímpar, então os coeficientes são imaginários →  $c_{-n} = -c_n$ .

### Transformada de Fourier

Seja  $x(t)$  um sinal que verifica as condições de Dirichlet:

1.  $x(t)$  é absolutamente integrável na linha dos reais:

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < +\infty$$

2. O número de máximos e mínimos de  $x(t)$  em qualquer intervalo finito, é finito.
3. O número de descontinuidades de  $x(t)$  em qualquer intervalo finito, é finito.

Define-se o par de equações relativo à Transformada de Fourier de  $x(t)$  como

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{Equação de análise}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \triangleq \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{Equação de síntese}$$

→ **Nota:**  $X(f)$  é denominado por espectro de  $x(t)$ .

### Relação entre a Série e a Transformada de Fourier

Se  $\tilde{x}(t)$  for a extensão periódica de  $x(t)$  (truncado, ou absolutamente integrável—como um pulso), com período  $T$ , os coeficientes da sua Série de Fourier,  $c_n$ , relacionam-se com a Transformada de Fourier de  $x(t)$ :

$$c_n = \frac{1}{T} X(nf_0)$$

A Transformada de Fourier de um sinal periódico é:

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0)$$

## 1.3 Teoremas de Wiener–Khinchin, Rayleigh e de Parseval

### Teorema da Energia de Rayleigh (Teorema de Parseval)

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} \psi_x(f) df$$

“(…) the total energy of a Fourier-transformable signal equals the total area under the curve of squared amplitude spectrum of this signal.”[1]

★ A quantia  $\psi_x(f) \triangleq |X(f)|^2$  é denominada por *densidade espectral energética* ou *espectro energético* de  $x(t)$ .

### Teorema de Parseval (da potência)

Para sinais periódicos que podem ser representados sobre uma Série de Fourier, existe uma relação para a potência entre o domínio do tempo e da frequência.

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da Série de Fourier complexa.

### Teorema de Wiener-Khinchin

$$S_x(f) = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad \wedge \quad R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Para sinais de energia:

$$\psi_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\psi_x(f)\} = \int_{\mathbb{R}} \psi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Para sinais periódicos que podem ser desenvolvidos numa Série de Fourier:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\}$$

→ **Nota:**  $S_x(f)$  é a *densidade espectral de potência* de  $x(t)$ ; indica a distribuição da potência do sinal ao longo do domínio da frequência.

## 1.4 Processos estocásticos (ou aleatórios)

### 1.4.1 Estatísticas

#### ★ Valor médio

O valor médio de  $X(t)$  é definido por

$$\mu_x(t) \triangleq \mathbb{E}[X(t)] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X(t)}(x) dx$$

e é, com generalidade, uma função do tempo.

#### ★ Função de autocorrelação

A função de autocorrelação é definida por

$$R_x(t_1, t_2) \triangleq \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

A função de autocorrelação é interpretável como uma medida de semelhança entre as VA's  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  e é, com generalidade, uma função de  $t_1$  e  $t_2$ . Para  $t_2 = t_1$ , toma o valor o valor  $R_x(t_1, t_1) = \mathbb{E}[X^2(t_1)]$ , que é o *valor quadrático médio* de  $X(t_1)$ .

#### ★ Função de autocovariância

$$\text{Cov}_x(t_1, t_2) \triangleq \mathbb{E}[(X(t_1) - \mu_x(t_1))(X(t_2) - \mu_x(t_2))] = R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2)$$

Para  $t_2 = t_1$ ,  $\text{Cov}_x(t_1, t_1)$  é a variância de  $X(t)$  (i.e.,  $\sigma_x^2 \triangleq \mathbb{E}[(X^2(t) - \mu_x(t))^2]$ ).

#### ★ Função de correlação cruzada

A função de correlação cruzada entre  $X(t)$  e  $Y(t)$  é dada por

$$R_{xy}(t_1, t_2) \triangleq \mathbb{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dx dy$$

onde  $f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y)$  denota a função densidade de probabilidade conjunta entre as VA  $X(t_1)$  e  $Y(t_2)$ . A função de correlação  $R_{xy}(t_1, t_2)$  é interpretável como uma medida de semelhança entre  $X(t_1)$  e  $Y(t_2)$  e é, com generalidade, uma função de  $t_1$  e  $t_2$ .

### 1.4.2 Processos estacionários

“Um processo diz-se *estacionário* se as suas propriedades estatísticas são invariantes a translações no tempo, ou, de forma equivalente, não dependem da origem dos tempos.”[2]

### 1.4.3 Processos ergódicos

“Nos processos processos ergódicos as propriedades de conjunto são iguais a propriedades definidas no tempo e determinadas a partir de qualquer função amostra. A ergodicidade é uma propriedade muito relevante, pois em muitas aplicações temos apenas acesso a um número limitado de funções amostra do processo. Este cenário é frequente, por exemplo, no estudo de sistemas de comunicação.”[2]

Seja  $x(t)$  uma dada função amostra do processo  $X(t)$ . A média e a correlação temporais de  $x(t)$  são definidas, respetivamente, como

$$\langle x(t) \rangle \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad \wedge \quad \langle x(t + \tau)x(t) \rangle \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x(t) dt$$



**Def.: Processo ergódico [2]**

Um processo  $X(t)$  diz-se ergódico, se, e somente se, as medidas de conjunto são iguais às médias temporais para qualquer função amostra. Tem-se, nomeadamente, para qualquer função amostra  $x(t)$

$$\begin{aligned}\mu_x &= \langle x(t) \rangle \\ R_x(\tau) &= \langle x(t + \tau)x(t) \rangle\end{aligned}$$

“Num processo ergódico todas as médias de conjunto são iguais às médias temporais de uma de uma qualquer função amostra. Uma vez que as médias temporais não dependem do tempo tempo, resulta que um processo ergódico é necessariamente um processo estacionário. O inverso não é verdadeiro.”[2]

**1.4.3 Potência de um sinal aleatório e densidade espectral de potência**

A potência do processo  $X(t)$  no intervalo  $[-T/2, T/2]$  é definida como

$$P_T \triangleq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^2(t) dt$$

Note-se que  $P_T$  é uma VA uma vez que é função das VA's de  $X(t)$ . Define-se a potência média de  $X(t)$  como

$$\bar{P} \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[P_T] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbb{E}[X^2(t)] dt = \langle \mathbb{E}[X^2(t)] \rangle$$

No caso de  $X(t)$  ser estacionário temos  $\bar{P} = R_x(0)$ .

**Teorema de Wiener-Khinchin**

Num processo  $X(t)$  estacionário, a densidade espectral de potência,  $S_x(f)$  e a função de densidade de autocorrelação constituem um par de Fourier:

$$\begin{aligned}S_x(f) &= \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ R_x(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{\mathbb{R}} \psi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df\end{aligned}$$

## 2. Modelação Analógica

### 2.1 Modulação de Amplitude

#### Modulação de Amplitude [1]

“Amplitude modulation (AM) is formally defined as a process in which the amplitude of the carrier wave is varied about a mean value linearly with the message signal.”

#### → Double Sideband AM

Supondo uma portadora sinusoidal  $c(t)$  de fase nula:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

E uma mensagem (*information-bearing signal, message signal*)  $m(t)$ , uma onda AM-DSB pode ser representada da seguinte forma:

$$s(t) = [1 + k_a m(t)] A_c \cos(2\pi f_c t)$$

onde  $k_a$  denomina-se *amplitude sensitivity* e é dependente do modulador que gera a mensagem modulada  $s(t)$ .

A informação da mensagem reside no envelope da onda modulada, que é definido como a amplitude de  $s(t)$ , i.e.,  $[1 + k_a m(t)]$ . É expectável que o envelope da onda modulada possua a mesma forma da mensagem, garantindo a satisfação de duas condições essenciais:

1.  $|K_a m(t)| < 1, \forall t$ . A amplitude de  $s(t)$  deve ser sempre positiva, já que, caso não se verifique, a onda encontra-se sobremodulada, o que equaciona numa reversão de fase do envelope e consequentemente na distorção de informação.
2.  $f_c \gg W$ . A frequência da portadora deverá ser muito superior à componente de maior frequência do sinal de mensagem, caso contrário, não é possível visualizar o envelope e a informação é perdida.

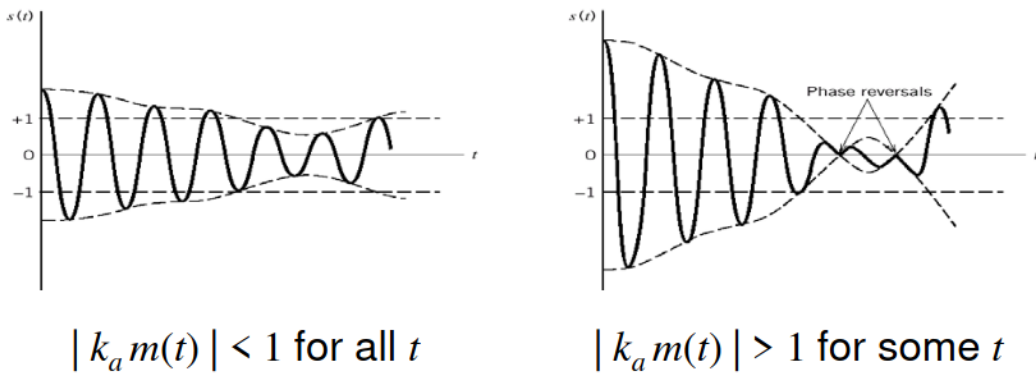


Fig. 1: AM-DSB: onda modulada e sobremodulada, respetivamente.

## → Domínio da frequência

Recorrendo à transformada de Fourier, facilmente se obtém o espectro de  $s(t)$ :

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{k_a A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

onde  $M(f)$  é o espectro da mensagem e  $M(f)\delta(f - f_c) = M(f - f_c)$ , já que  $\delta(f)$  é o elemento neutro da convolução.

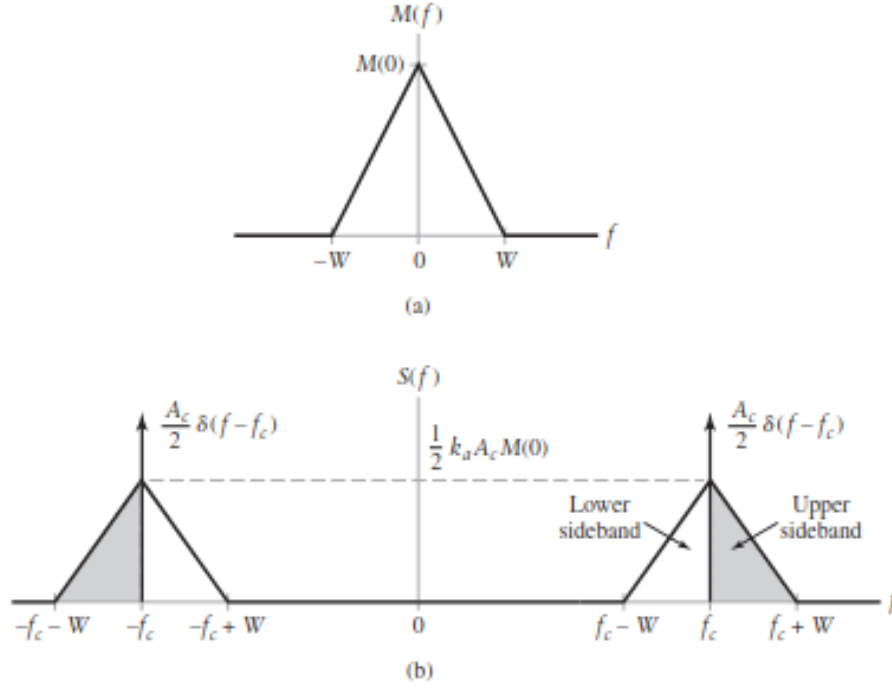


Fig. 2: (a) Espectro da mensagem  $m(t)$ . (b) Espectro da onda modulada  $s(t)$ .

## → Observações

- ▲ “As a result of the modulation process, the spectrum of the message signal  $m(t)$  for negative frequencies extending from  $-W$  to  $0$  becomes completely visible for positive (i.e., measurable) frequencies, provided that the carrier frequency satisfies the condition  $f_c \gg W$ .”[1]
- ▲ “For positive frequencies, the portion of the spectrum of an AM wave lying above the carrier frequency  $f_c$  is referred to as the upper sideband, whereas the symmetric portion below  $f_c$  is referred to as the lower sideband. The condition  $f_c \gg W$  ensures that the sidebands do not overlap.”[1] (Isto é, o envelope é visualizado).
- ▲ “For positive frequencies, the highest frequency component of the AM wave equals  $f_c + W$ , and the lowest frequency component equals  $f_c - W$ . The difference between these two frequencies defines the transmission bandwidth  $B_T = 2W$ .”[1]

### → Detetor Envolvente

Admitindo que as condições supramencionadas são garantidas, Para recuperar de novo o sinal  $m(t)$  partindo da portadora modulada  $x_{AM}(t)$  que chega ao recetor, basta rectificar a portadora e filtrar o resultado da rectificação por forma a preservar apenas as flutuações lentas do sinal retificado e que correspondem ao sinal  $m(t)$ , rejeitando as suas oscilações de alta frequência, usando para o efeito um filtro passa-baixo:

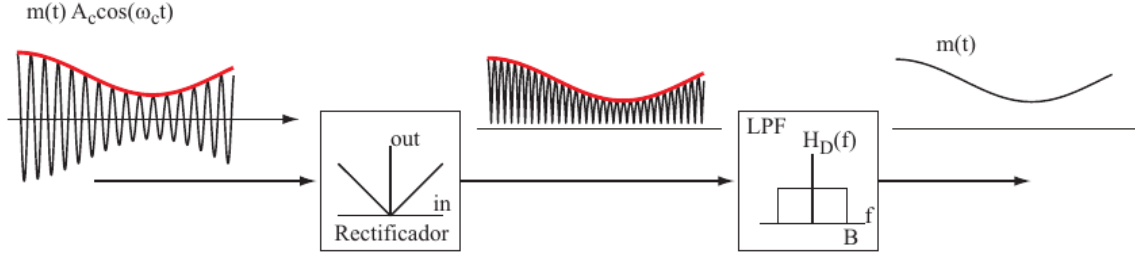


Fig. 3: Diagrama Detetor Envolvente

### → Nota

A saída do retificador de onda completo é dada por:

$$y(t) = s(t)p(t)$$

Onde  $p(t) = \text{sgn}[\cos(2\pi f_c t)]$

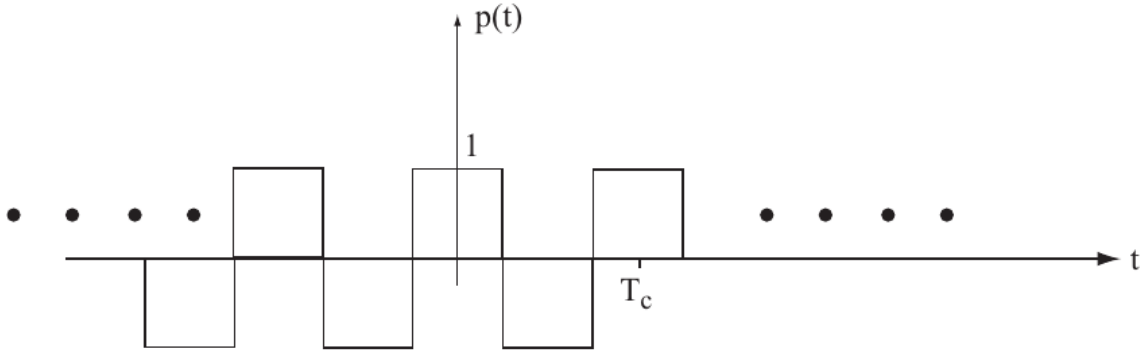


Fig. 4: Sinal  $p(t)$ .

$p(t)$  é a extensão periódica de  $\text{rect}\left(\frac{2t}{T_c}\right)$ :

$$P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2n) \delta(f - n f_0)$$

Consequentemente  $y(t)$  possui uma réplica centrada em  $f = 0$  que pode ser usada para recuperar integralmente o sinal  $m(t)$  após filtragem pelo filtro de saída do detetor de envolvente.

Por fim admite-se que à saída do receptor existe um condensador com a finalidade de remover a componente DC,  $m_{dc}$  advinda do envelope,  $[m_{dc} + k_a m(t)]$ .

### → Double Sideband Supressed Carrier

“Basically, double sideband-suppressed carrier (DSB-SC) modulation consists of the product of the message signal  $m(t)$  and the carrier wave  $c(t)$ , as shown in the equation:”[1]

$$s(t) = c(t)m(t) = m(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Contrariamente à modulação anteriormente discutida, a modulação DSB-SC é anulada com o desaparecimento da mensagem de modulação. Neste sentido “Transmitted power is saved here through the suppression of the carrier wave”[1] embora a largura de banda do canal se mantenha idêntica, nomeadamente  $B_t = 2W$ .

### → Domínio da frequência

A transformada de Fourier de  $s(t)$  é dada por

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

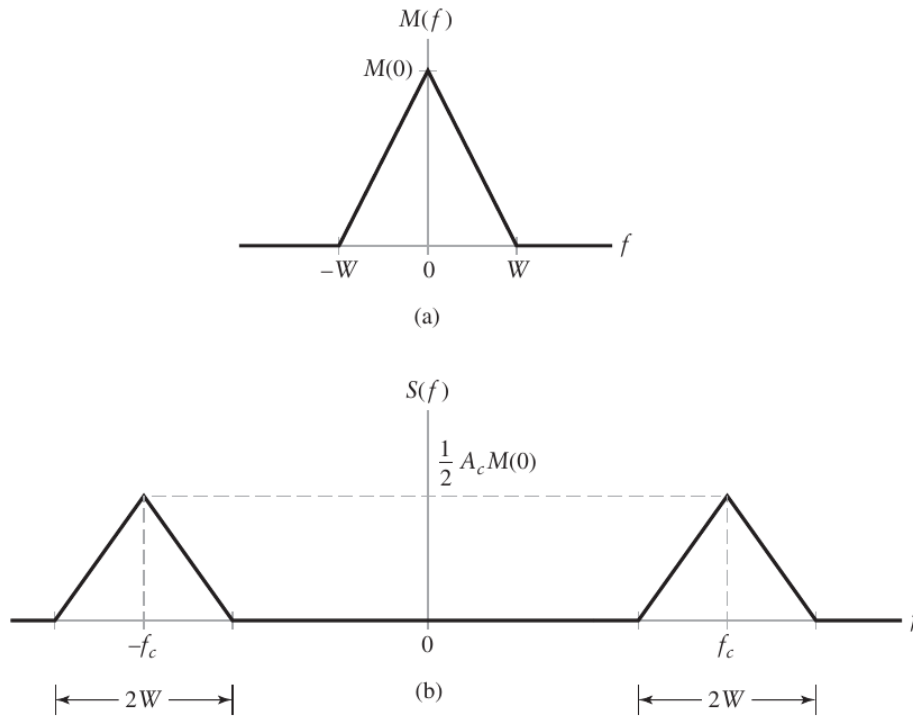


Fig. 5: (a) Espectro da mensagem  $m(t)$ . (b) Espectro da onda modulada  $s(t)$ .

### → Observações

- ▲ “Except for a change in scale factor, the modulation process simply translates the spectrum of the message signal by  $f_c$  to the right and by  $-f_c$  to the left. Of course, the transmission bandwidth required by DSB-SC modulation is the same as that for amplitude modulation namely,  $2W$ .”[1]

### → Detetor Coerente

Se a amplitude do sinal modulante mudar de um valor positivo para um valor negativo, irá provocar inversões de fase na portadora modulada. Tal fenómeno é visível em casos de sobremodulação, inerentes à modulação DSB-SC, à qual o detetor envolvente é insensível. É então usado um desmodulador imune às inversões de fase, denominado detetor coerente ou síncrono:

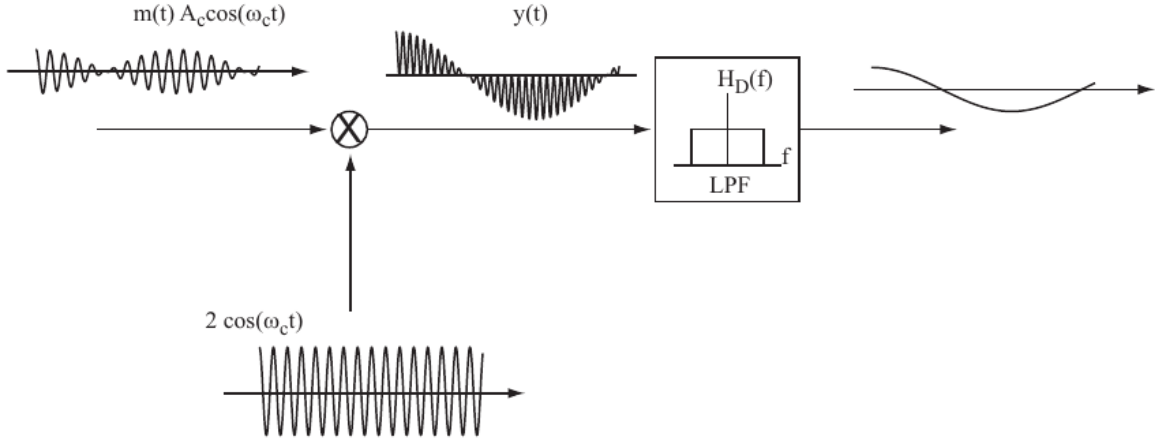


Fig. 6: Diagrama do detetor coerente.

Avaliando o sinal à saída do modulador de produto (“assuming that the local oscillator is out of phase by  $f$  with respect to the sinusoidal carrier oscillator in the transmitter.”[1])

$$y(t) = A'_c \cos(2\pi f_c t + \Phi)$$

### → Potência de transmissão de uma onda modulada em amplitude

Tomando uma onda AM arbitrária da forma:

$$x_{AM}(t) = A_c[m_{dc} + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Verifica-se que a potência média do sinal, i.e.,  $\langle x_{AM}(t) \rangle$  é dada por

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} (m_{dc}^2 + P_m)$$

em que  $P_m$  é a potência média do sinal mensagem.

### ★ Eficiência de modulação de um sinal AM

“We define modulation efficiency as the ratio between the power of the part of the modulated signal that carries information about  $m(t)$  and the total power of the modulated signal.”[3]

$$\eta \triangleq \frac{(A_c^2/2)P_m}{P_T} = \frac{P_m}{P_m + m_{dc}^2}$$

## 2.2 Modelação de Ângulo (PM e FM)

Seja  $\theta_i(t)$  o ângulo da portadora sinusoidal modulada que transporta o sinal mensagem. Exprime-se a resultante onde modulada como:

$$\boxed{s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]} \implies f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

1. *Phase modulation* (PM): “form of angle modulation in which the instantaneous angle  $\theta_i(t)$  is varied linearly with the message signal  $m(t)$ ”

$$\begin{aligned} \rightarrow \theta_i(t) &= 2\pi f_c t + k_p m(t) \\ \therefore x_{\text{PM}}(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)] \end{aligned}$$

2. *Frequency modulation* (FM): “form of angle modulation in which the instantaneous frequency  $f_i(t)$  is varied linearly with the message signal  $m(t)$ ”

$$\begin{aligned} \rightarrow f_i(t) &= f_c + f_\Delta m(t) \\ \therefore x_{\text{FM}}(t) &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

em que  $k_f$  representa o fator de *phase-sensitivity*, e  $f_\Delta$  a *frequency deviation*.

### → Relação entre PM e FM

Tendo em conta as definições acima, é natural verificar que um modulador de fase é realizável através de um modulador de frequência, e vice-versa.

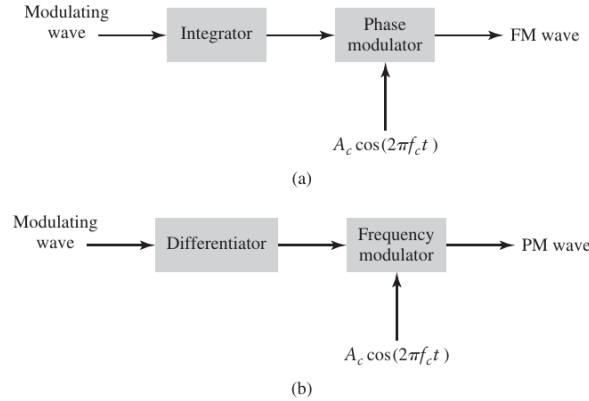


Fig. 7: “Illustration of the relationship between [FM] and [PM]. (a) Scheme for generating an FM wave by using a phase modulator. (b) Scheme for generating a PM wave by using a frequency modulator.”[1]

### → Largura de banda FM (Carson’s rule)

#### Carson’s rule [1]

$$B_T = 2(\beta + 1)W, \quad \beta = \frac{f_\Delta [\max\{m(t)\} - \min\{m(t)\}]/2}{W}$$

em que  $\beta$  é o índice de modulação.

“The Carson’s rule shows that, for  $\beta > 1$  (wideband FM), the bandwidth of the FM signals is much larger than that of the AM signals, for a given value of  $W$ .”[3]

★ **FM de banda estreita (*narrow-band*)**

Supondo que  $f_\Delta$  é tal que

$$\left| 2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau \right| \ll 1$$

então

$$\begin{aligned} x_{\text{FM}}(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t) \cos\left(2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau\right) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin\left(2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau\right) \\ &\approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \cdot \left(2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

Isto indica que o sinal de banda estreita se aproxima de um sinal AM. Deste modo, a largura de banda será

$$B_T \approx 2B$$

em que  $B$  é a largura de banda do sinal fonte  $m(t)$ .

★ **FM de banda larga (*wide-band*)**

Neste caso, temos que  $f_\Delta \gg B$ . A análise do sinal FM de banda larga é de natureza não trivial, pelo que se apresenta o ponto fulcral.

**Aproximação quasi-estacionária:** Caso  $f_c \gg f_\Delta \gg B$ , o espectro de potência do sinal FM é (aproximadamente) dado por:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4f_\Delta} \left[ f_x\left(-\frac{f+f_c}{f_\Delta}\right) + f_x\left(\frac{f-f_c}{f_\Delta}\right) \right]$$

em que  $f_x$  é a função de densidade de probabilidade.

Nestes moldes,

$$B_T \approx f_\Delta \cdot [\max\{m(t)\} - \min\{m(t)\}]$$

→ **Potência de transmissão de uma onda modulada em ângulo**

Verifica-se que a amplitude de ondas PM e FM,  $A_c$ , se mantém constante ao longo do tempo, independentemente do valor de  $k_p$  ou de  $f_\Delta$ . Consequentemente, a potência média transmitida é uma contante dada por:

$$P_T = \frac{1}{2} A_c^2$$

(é assumido que a resistência da carga é 1 ohm).

→ **Discriminador de frequência (desmodulação de uma onda FM)**

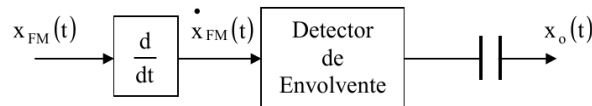


Fig. 8: Discriminador de frequência[4].

$$\dot{x}_{\text{FM}}(t) = -2\pi A_c (f_c + f_\Delta m(t)) \sin\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau\right)$$

A saída do diferenciador não é mais do que uma portadora sinusoidal cuja envolvente vale  $2\pi A_c (f_c + f_\Delta m(t))$ , deste modo:

$$\because f_c \gg f_\Delta \implies x_0(t) \propto m(t)$$



### 3. Modelação Digital

#### → Amostragem (*Sampling*)

Seja  $x(t)$  um sinal arbitrário de energia finita. Supondo que o sinal é amostrado a uma cadência uniforme—a cada  $T_S$  segundos—obtem-se, conseqüentemente, uma sequência de amostras espaçadas por este mesmo intervalo,  $\{x(nT_S)\}$ . Define-se  $T_S$  [s] como o período de amostragem, e  $f_S \triangleq 1/T_S$  como a frequência de amostragem [S/s].

Na sua forma geral, o processo resulta em:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S) p(t - nT_S)$$

em que  $p(t)$  é a forma do pulso utilizado. Na amostragem ideal,  $p(t) \equiv \delta(t)$ .

#### → Amostragem instantânea (*instantaneous/ideal sampling*)

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S) \delta(t - nT_S) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_\delta(f) = f_S \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f - mf_S)$$

#### Teorema da Amostragem (Teorema de Nyquist-Shannon)

Seja  $x(t)$  um sinal de energia finita (banda limitada), com frequências não superiores a  $W$ . Então, este sinal é totalmente descrito através de uma coleção de amostras espaçadas por  $1/(2W)$  segundos; sendo perfeitamente reconstruído através destas amostras.

A menor frequência de amostragem possível que não resulta em *aliasing* é

$$f_S = f_N \triangleq 2W$$

denominada por frequência de Nyquist. → **Critério de Nyquist:**  $f_S \geq f_N$

**Nota:** Por vezes é definida uma banda de guarda, e deste modo:  $f_S \triangleq f_{S0} + B_G$

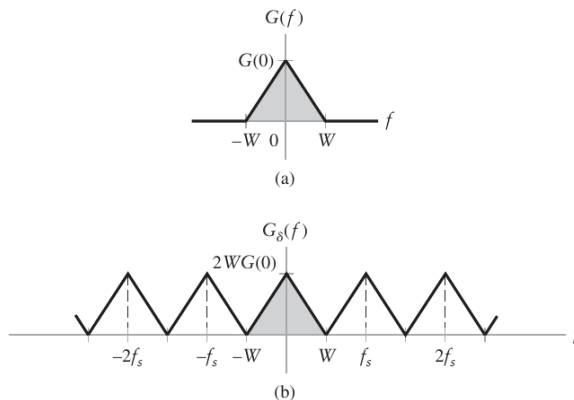


Fig. 9: (a) Espectro do sinal de banda limitada  $g(t)$ . (b) Espectro da versão amostrada idealmente,  $g_\delta(t)$ , a um ritmo de  $T_S = 1/(2W)$  (não ocorre *aliasing*).

#### Aliasing

Se o critério de Nyquist não se verificar satisfeito, as cópias adjacentes sobrepõem-se e não é possível discernir um  $X(f)$  não ambíguo.

<sup>§</sup>Tomando uma  $f_S = 2W$ , e assumindo um filtro passa-baixo ideal para a reconstrução do sinal com uma frequência de corte  $f_c = f_S/2 = W$ , obtém-se a expressão:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{1}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n), \quad -\infty < t < +\infty$$

denominada por *interpolation formula*—para reconstruir o sinal  $x(t)$  através de uma sequência de valores amostrados  $\{x(nT_S)\}$ , em que a função  $\text{sinc}(2Wt - n)$  é a *interpolation function*.

### 3.2 Pulse Amplitude Modulation

TO BE ADDED

## → Pulse Code Modulation

### Pulse Code Modulation (PCM) [1]

“In pulse-code modulation (PCM), a message signal is represented by a sequence of coded pulses, which is accomplished by representing the signal in discrete form in both time and amplitude.”

### Quantização [1]

“Amplitude quantization is defined as the process of transforming the sample amplitude  $m(nT_s)$  of a baseband signal  $m(t)$  at time  $t = nT_s$  into a discrete amplitude  $v(nT_s)$  taken from a finite set of possible levels.”

★ **Quantização Uniforme:** Todos os intervalos possuem comprimentos idênticos  $\Delta$ .

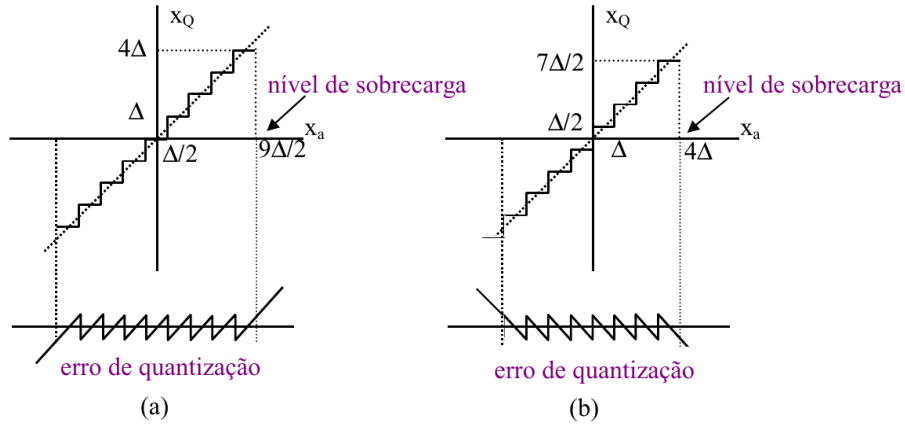


Fig. 10: Características e erro de quantização uniforme: (a) ímpar; (b) par

Os dois tipos de característica de quantização ilustradas na Fig. 7 diferem apenas na forma como cruzam a origem, Formando um número ímpar (*midtread*) ou par (*midrise*) de níveis de quantização (de entrada,  $x_a$ ). Inversamente o passo  $\Delta$  dos intervalos de saída,  $x_Q$  é par (a) e ímpar (b).

O número de níveis de quantização em utilização é definido por:

$$M = \frac{|\text{Range}|}{\Delta}$$

Onde o Range denota o intervalo de amplitudes que o sinal analógico pode tomar.

Subsequentemente, cada um dos  $M$  níveis de quantização é codificado por uma palavra de comprimento  $L$  onde:

$$M = n^L$$

Onde  $n$  está dependente do sistema PCM em uso (binário:  $n = 2$ , ternário  $n = 3$ , quaternário:  $n = 4$ , ...).

A geração destas palavras de comprimento  $L$  [símbolos/sample] não poderá exceder a duração do período de amostragem. É então definido a taxa de geração de dados:

$$r_s \geq f_s L \quad [\text{Baud}]$$

onde  $f_s$  é a frequência de amostragem e Baud denota a taxa de transmissão de símbolos por segundo.

### ★ Relação Sinal–Ruído de Quantização

O erro de quantização definido pela variável aleatória:

$$e(kT_a) = x_Q(kT_a) - x_a(kT_a)$$

Denomina a diferença entre as amplitudes de entrada e os passos da saída. Tal erro tomará valores que em módulo podem ser muito elevados. De uma forma geral, a discretização das amplitudes de entrada deve ser grande o suficiente de forma a que o o módulo do erro seja sempre inferior a metade do passo:

$$|e(kT_a)| \leq \frac{\Delta}{2}$$

Para quantificar o desempenho do processo de digitalização–reconstrução usa-se com o medida a relação sinal – ruído de quantização aqui designada por SQNR:

$$\text{SQNR} = \frac{P_x}{P_e}$$

em que  $P_x$  é a potência do sinal amostrado  $x_a(t)$ . Para variáveis aleatórias a potência do sinal, é dada por:

$$P_x = R_x(0) = E\{x_a(t)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

onde  $f(x)$  é a função de densidade de probabilidade de amplitude.

$P_e$  é a potência do erro, que pode ser aproximado a:

$$P_e \approx \frac{\Delta^2}{12}$$

É trivialmente concluído que a SQNR diminui quando o comprimento do intervalo de quantização aumenta, o que se traduz numa reconstrução menos precisa do sinal original.

**★ Quantização Não Uniforme:** A quantização não uniforme visa usar intervalos de quantização mais longos para amostras que ocorrem em intervalos de menor probabilidade e intervalos de quantização de menor comprimento no caso contrário. A escolha destes comprimentos deverá portanto ser feita por forma a otimizar, o desempenho do processo de digitalização–reconstrução.

Esta compressão de intervalos é realizada com base na lei de  $\mu$  ou a lei de  $A$  (europeia):

$$|v_\mu| = \frac{\ln(1 + \mu|m/m_p|)}{\ln(1 + \mu)} \text{sgn}(m) \quad (\mu\text{-law})$$

$$|v_A| = \begin{cases} \frac{A|m|}{1 + \ln A}, & |m| \in [0, 1/A] \\ \frac{1 + \ln(A|m|)}{1 + \ln A}, & |m| \in [1/A, 1] \end{cases} \quad (A\text{-law})$$

em que  $|m|$  é o *input* normalizado e  $|v|$  a saída normalizada.

## → Gerador de Sinais PCM

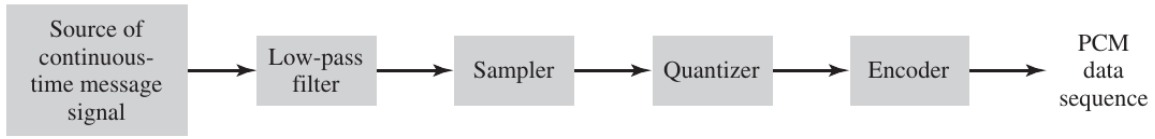


Fig. 11: Arquitectura do Sistema Gerador de Sinais PCM

1. **Sampling (amostragem):** O sinal analógico (*continuous-time message signal*) é amostrado com recurso a um pente de pulsos retangulares (*sample and hold*), garantindo um ritmo de amostragem superior ao dobro da componente de frequência mais elevada da mensagem,  $2W$ . (Na prática é utilizado um filtro *antialiasing* “in order to exclude frequencies greater than  $W$  before sampling”[1]).
2. **Quantization (Quantização):** O sinal amostrado é quantizado, tornando-se discreto no tempo e na amplitude (*vide* secção sobre a quantização).
3. **Encoding:** Posteriormente, o sinal discretizado sofre um “encoding process to translate the discrete set of sample values to a more appropriate form of signal. Any plan for representing this discrete set of values as a particular arrangement of discrete events is called a code.”[1]

## ★ Line Codes (Códigos de sinalização binária)

**Line Codes [1]**

“In reality, PCM (...) represent different strategies for source encoding, whereby an analog signal is converted into digital form. However, all three of them share a common feature: once a binary sequence of 1s and 0s is produced, a line code is needed for electrical representation of that binary sequence.”

De uma forma geral, um código de linha pode ser representado por:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT_b)$$

Onde  $g(t)$  denota a forma do impulso  $n$ ,  $a_n$  a sua magnitude e  $T_b$  a duração do bit.

De uma forma geral, podemos definir o espetro de potência de um código de linha como:

$$S_s(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi f k T_b} \quad R(k) = \sum_{i=1}^I a_n a_{n+k} p_i$$

Onde  $R(0)$  corresponde à potência da sinalização e a largura de banda é definida pelo intervalo de frequências que contem a maior parte da energia do sinal:

$$B_T = f_T - 0$$

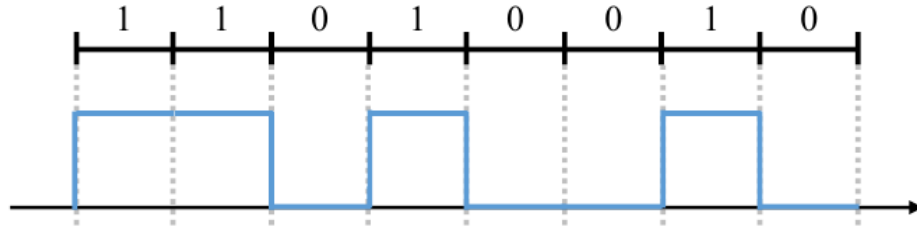
Unipolar NRZ<sup>2</sup>

Fig. 12: Unipolar NRZ (11010010).

Um código unipolar NRZ possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}(f T_b)^2 \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \delta(f) \right]$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

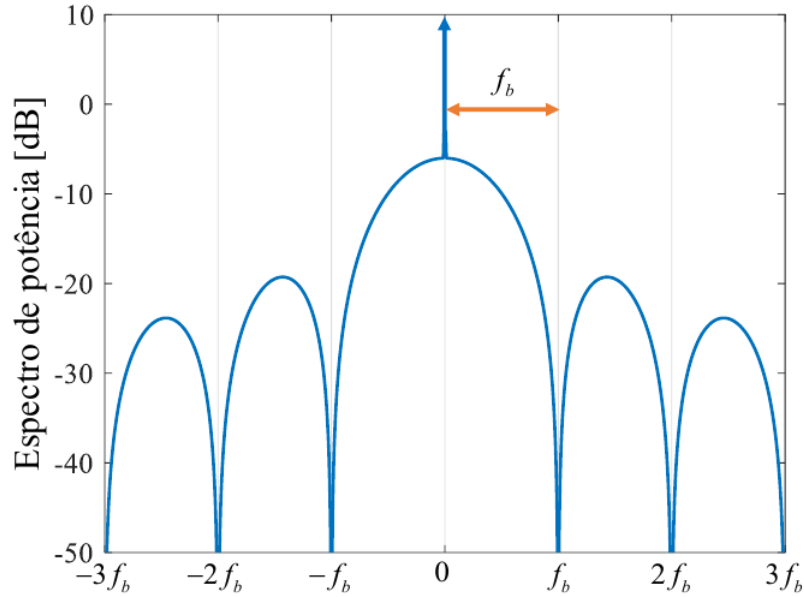


Fig. 13: Espectro de Potência unipolar NRZ.

$$P = R(0) = A^2$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{1}{T_b}$$

<sup>2</sup>A visualização dos códigos de sinalização binária subsequente no domínio do tempo será realizada mediante o código 11010010.

## Unipolar RZ

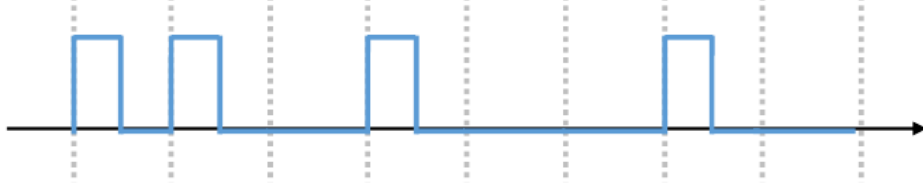


Fig. 14: Unipolar NRZ (11010010).

Um código unipolar RZ (com um *duty-cycle* de 50%) possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = \frac{A^2 T_b}{16} \text{sinc}(f T_b / 2)^2 \left[ 1 + \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(f - k T_b / 2) \right]$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

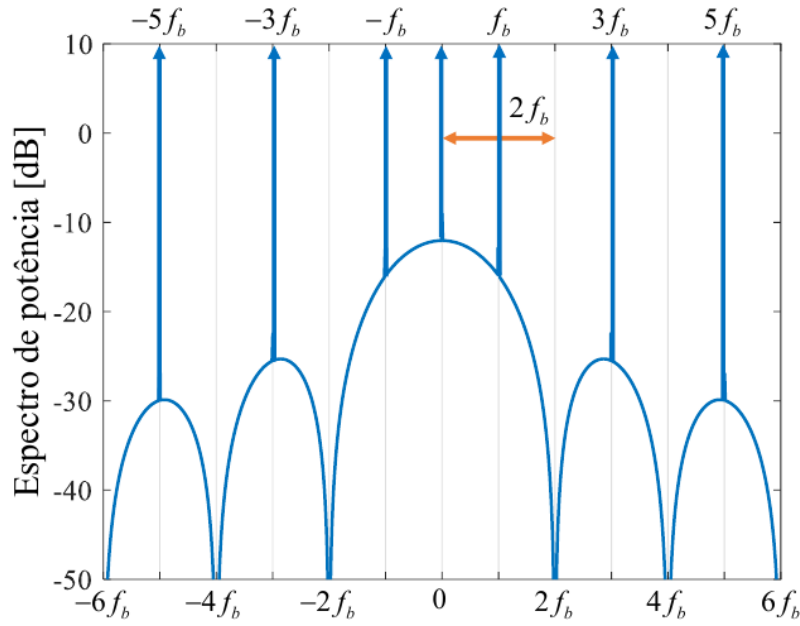


Fig. 15: Espectro de Potência unipolar RZ.

$$P = R(0) = \frac{A^2}{4}$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{2}{T_b}$$

A potência média deste código será de metade do código Unipolar NRZ, uma vez que, é emitida a mesma energia, nos símbolos com amplitude maior que zero, mas em metade do tempo.

## Polar NRZ

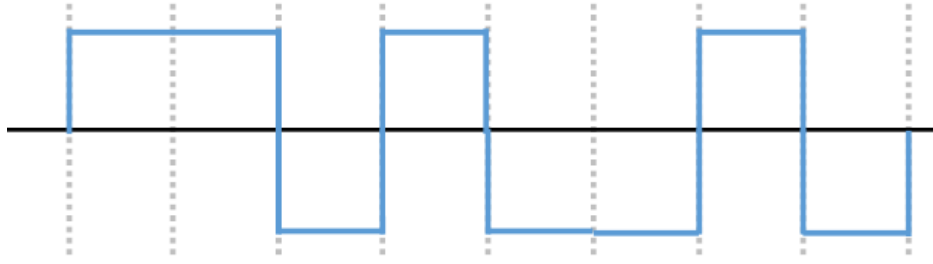


Fig. 16: Polar NRZ (11010010).

Um código Polar NRZ possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = A^2 T_b \text{sinc}(f T_b)^2$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

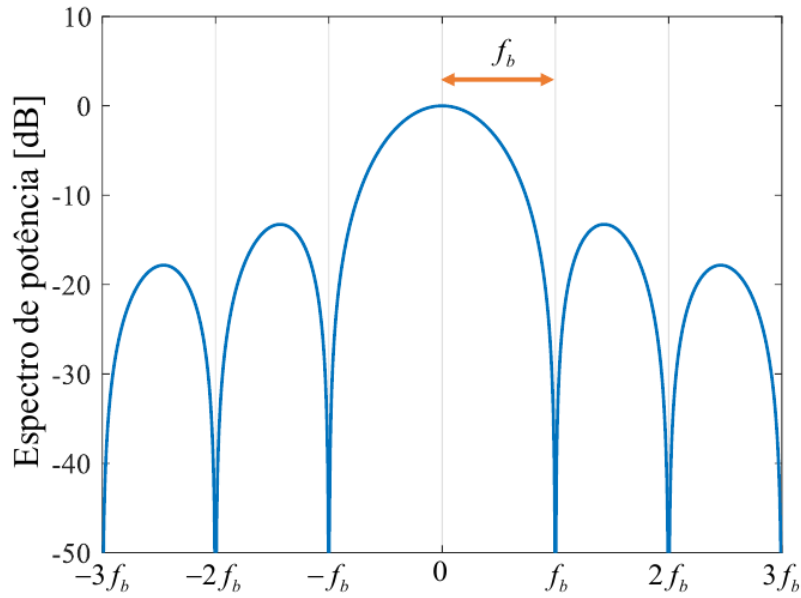


Fig. 17: Espectro de Potência polar NRZ.

$$P = R(0) = A^2$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{1}{T_b}$$



## Polar RZ

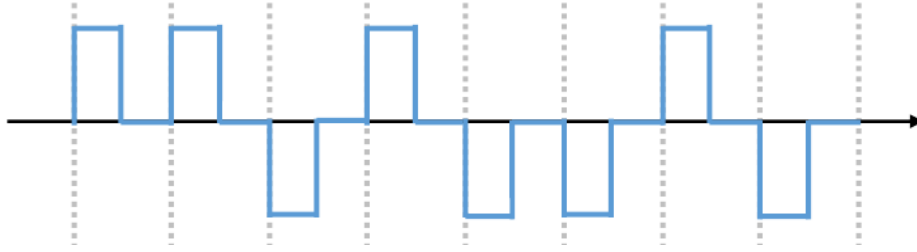


Fig. 18: Polar RZ (11010010).

Um código Polar RZ (com um *duty-cycle* de 50%) possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}(f T_b)^2$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

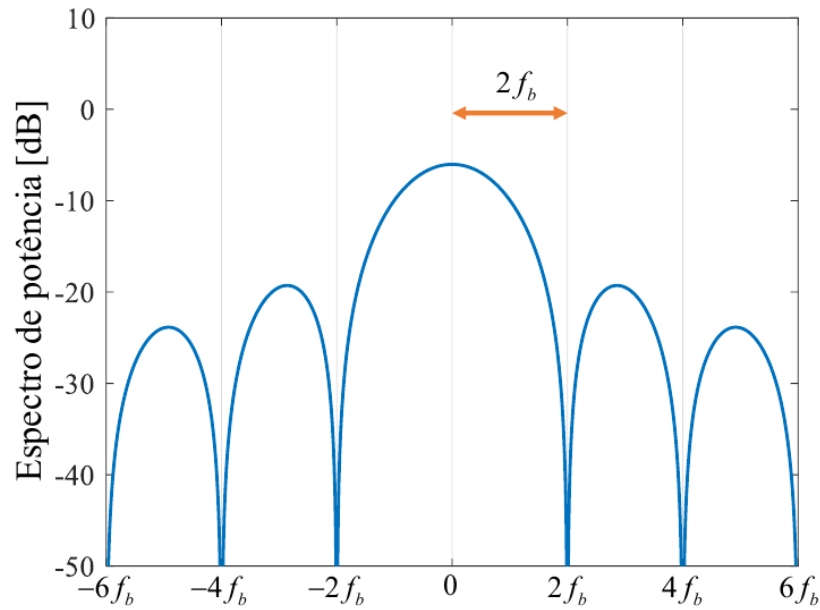


Fig. 19: Espectro de Potência: Polar RZ.

$$P = R(0) = \frac{A^2}{2}$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{2}{T_b}$$

## Bipolar NRZ

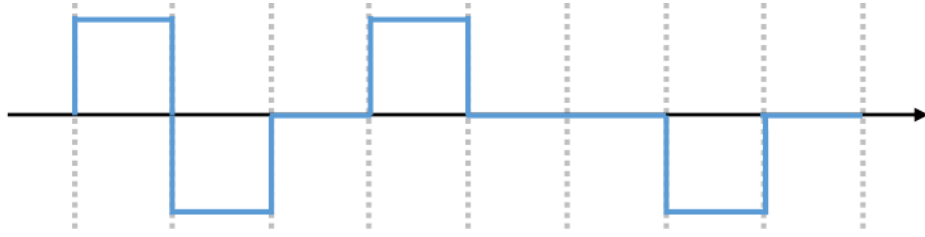


Fig. 20: Bipolar NRZ (11010010).

Um código Bipolar NRZ possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = \frac{A^2 T_b}{2} [\text{sinc}(f T_b)]^2 \cdot [\sin(\pi f T_b)]^2$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

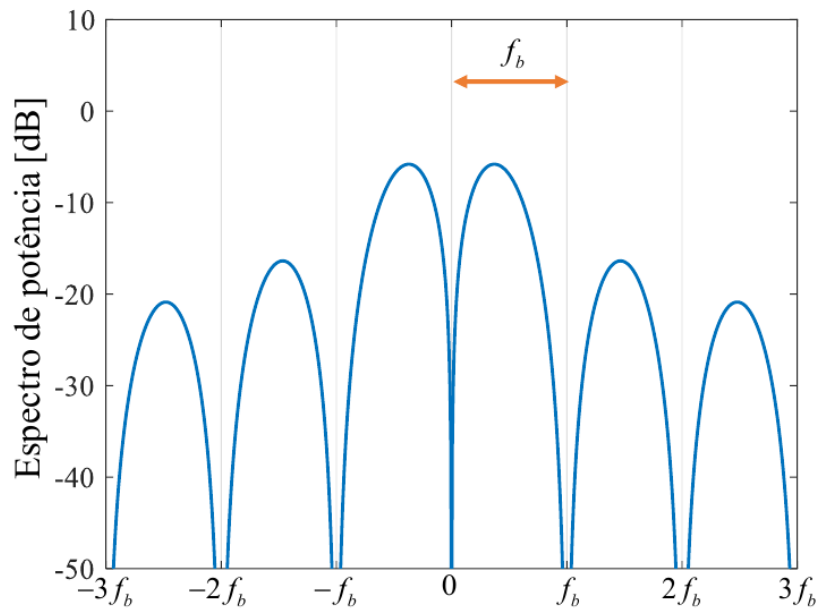


Fig. 21: Espectro de Potência: Bipolar NRZ.

$$P = R(0) = \frac{A^2}{2}$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{1}{T_b}$$

## Bipolar RZ

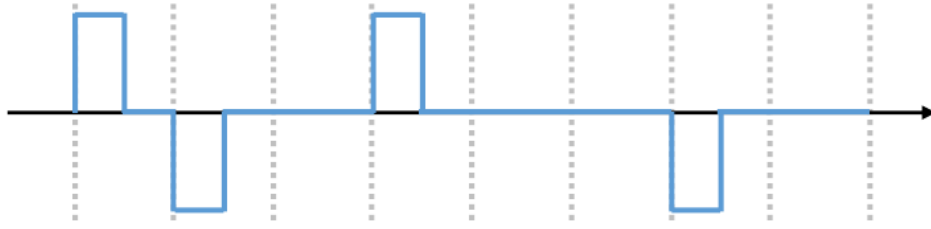


Fig. 22: Bipolar RZ (11010010).

Um código Bipolar RZ (com um *duty-cycle* de 50%) possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = \frac{A^2 T_b}{8} \left[ \text{sinc}\left(f \frac{T_b}{2}\right) \right]^2 \cdot \left[ \sin\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right) \right]^2$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

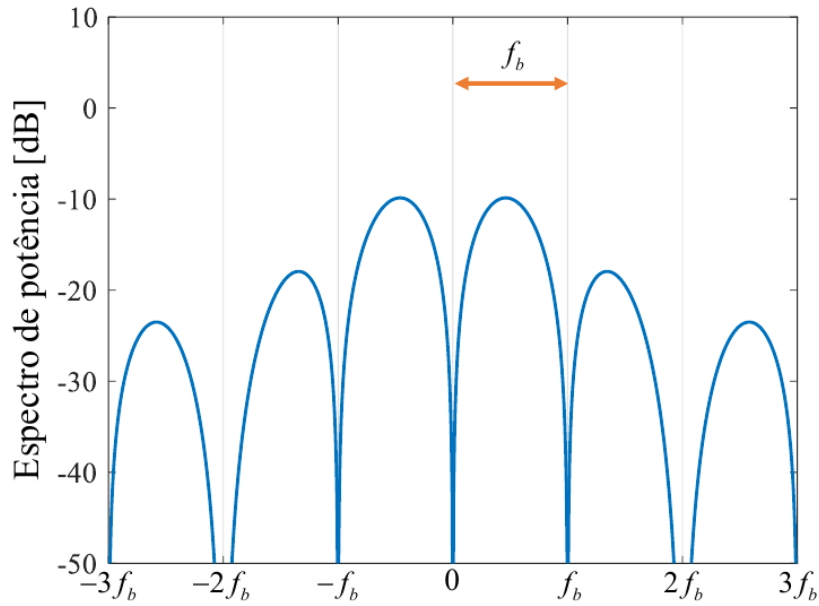


Fig. 23: Espectro de Potência polar NRZ.

$$P = R(0) = \frac{A^2}{4}$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{1}{T_b}$$

## Manchester

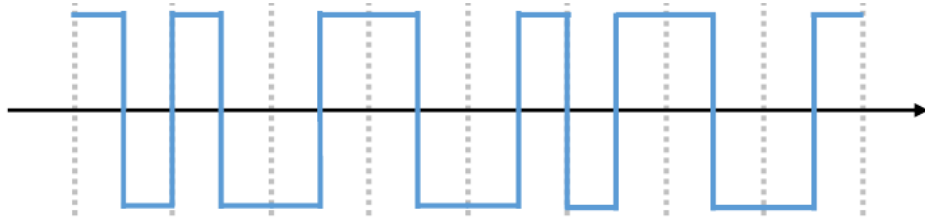


Fig. 24: Manchester (11010010).

Um código Manchester possui pulsos do tipo:

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t + T_b/4}{2T_b}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - T_b/4}{2T_b}\right)$$

Com o respetivo espectro de potência:

$$S_s(f) = A^2 T_b \left[ \text{sinc}\left(f \frac{T_b}{2}\right) \right]^2 \cdot \left[ \sin\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right) \right]^2$$

E potência e largura de banda (supondo que o sinal atinge a grande maioria da sua energia após o primeiro zero do espectro de potência):

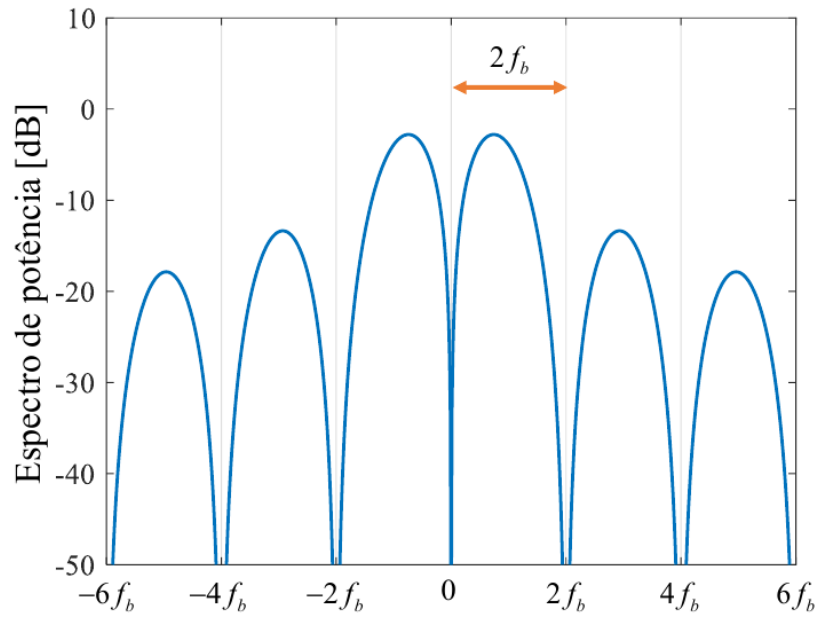


Fig. 25: Espectro de Potência: Manchester.

$$P = R(0) = A^2$$

$$B_T = f_{1^\circ \text{ zero}} - 0 = \frac{2}{T_b}$$

## → Interferência intersimbólica

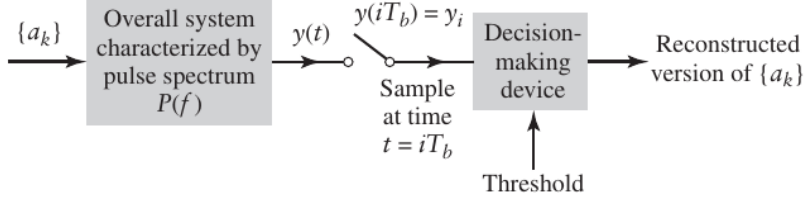


Fig. 26: Sistema de recepção simplificado.

À entrada do *sampler* do esquema do sistema de recepção simplificado encontra-se um sinal PAM com pulso  $p(t)$  e coeficientes  $a_k$  (onde  $a_0 = -1$  codifica o bit 0 e  $a_1 = +1$  codifica o bit 1):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_b)$$

O sinal é amostrado sincronamente com o transmissor:

$$x(iT_b) = \sum_{n=-\infty}^p ((i - n)T_b)$$

Para  $n = i$ ,  $p(0) = \sqrt{E}$  (*transmitted signal energy per bit (symbol)*). Onde  $n = i$  traduz a sincronia entre  $i$ , o instante em que o sinal é amostrado no recetor e  $n$ , simbolo do *data stream* produzido pelo transmissor. Isolando o termo para o qual  $n = i$  obtemos:

$$x(iT_b) = a_i \sqrt{E} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq i}}^p ((i - n)T_b)$$

A decodificação do símbolo  $i$  onde  $x_i = \sqrt{E}a_i$  (*perfect decoding*,  $a_i$  representa o símbolo binário, com a exceção de um fator multiplicativo) é acompanhada de ruído residual denotado por interferência intersimbólica. A arquitetura do recetor deve ser robusta o suficiente de forma a mitigar/eliminar o ruído adicional.

## → Nyquist Channel

O pulso ideal que garante a mitigação da IIS na entrada do *sampler* satisfaz as seguintes duas condições:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Amostrando o pulso nos instantes de  $T$ :

$$p\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(kT)\delta(t - kT)$$

subsequentemente, recorrendo à sua transformada:

$$P\delta(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - k/T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(kT)e^{-2\pi fT} = p(0) = 1$$

Logo podemos admitir que:

$$P_{\delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - rk) = T$$

Para que a soma ponto a ponto em  $f$  de todas as versões de  $P(f)$  transladadas seja constante, garantindo a diminuição de ruído residual é necessário que:

$$r = 2B_0$$

Onde  $B_0$  é a largura de banda fundamental do sinal (*vide* secção sobre *line codes*, é a largura que alberga a grande maioria da energia do sinal). Supondo um pulso retangular a condição é garantida:

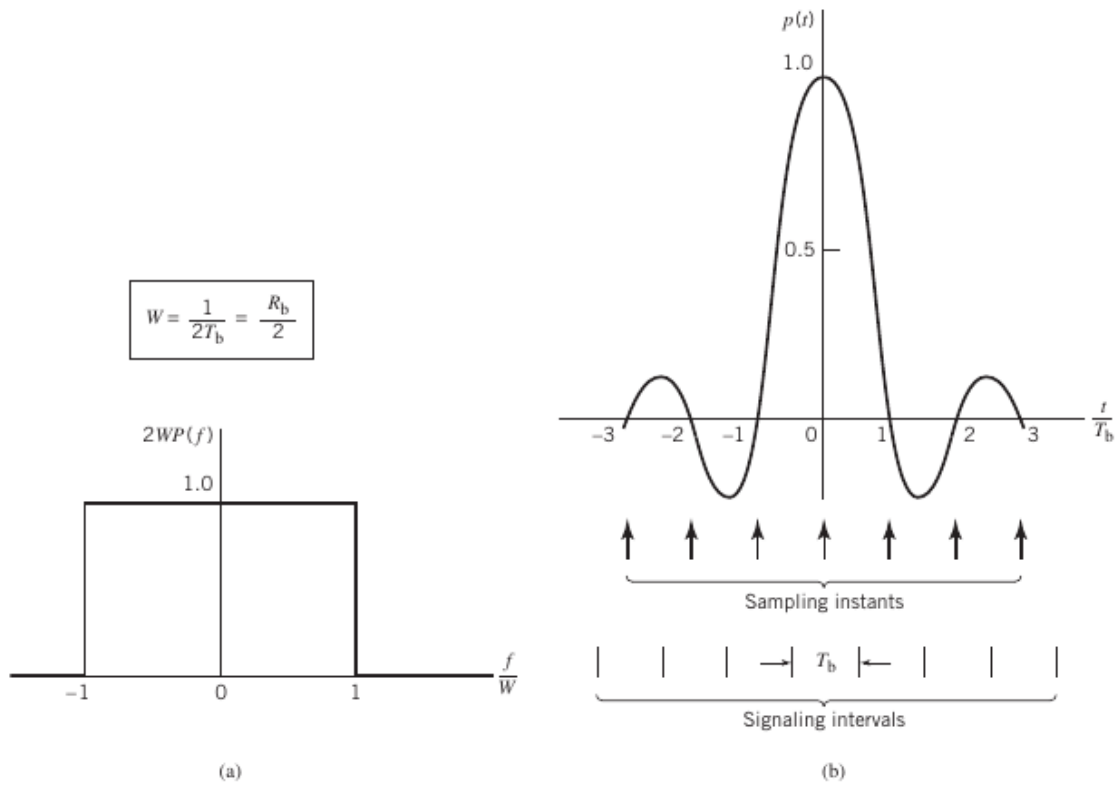


Fig. 27: (a) Resposta ideal em magnitude. (b) Pulso ideal.

**★ Nota:**

Esta relação garante-se apenas para códigos do tipo NRZ, para códigos RZ o pulso dura metade do tempo de bit (símbolo),  $r = 2/T$  logo a relação altera-se:

$$r = B_0$$

Ainda, para um sistema de  $N$  níveis (sistemas quaternários, trenários ...) o *rate* de símbolo relaciona-se com o *rate* de bit da seguinte forma:

$$r_b = \log_2(M)r_s$$

### → Espectro Raised Cosine

“To ensure physical realizability of the overall pulse spectrum  $P(f)$ , we need a solution that differs from the Nyquist channel in one important respect: the modified  $P(f)$  decreases toward zero gradually rather than abruptly. In more specific terms, P1f2 is proposed to consist of two portions:

1. Flat portion, which occupies the frequency band  $0 \leq |f| \leq f_1$  for some parameter  $f_1$  to be defined.
2. Roll-off portion, which occupies the frequency band  $f_1 < |f| < 2B_0 - f_1$

For obvious reasons, the  $P(f)$  constructed in this manner is called the raised cosine pulse spectrum.”[1]

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B_0} & 0 \leq |f| < f_1 \\ \frac{1}{4B_0} \left\{ 1 + \cos \left( \left[ \frac{\pi(|f| - f_1)}{2(B_0 - f_1)} \right] \right) \right\} & f_1 \leq |f| < 2B_0 - f_1 \\ 0 & 2B_0 - f_1 \leq |f| \end{cases}$$

É denominada uma nova variável, *roll-off factor*, relacionada com  $f_1$  e  $B_0$  da seguinte forma:

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{B_0}$$

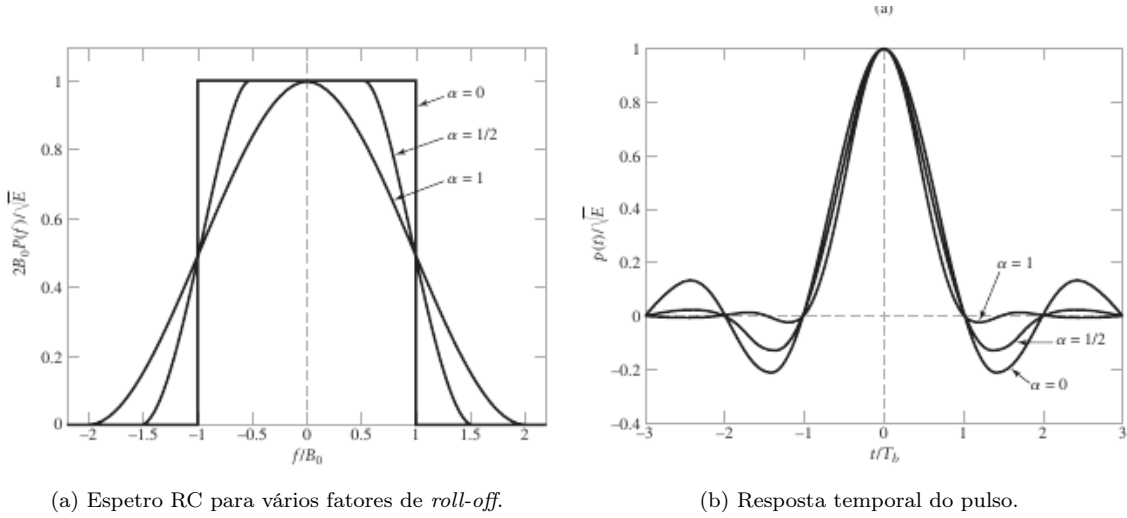


Fig. 28: Pulso Raised Cosine.

**★ Nota: Transmission Bandwidth Requirement** “(...) The nonzero portion of the raised cosine pulse spectrum  $P(f)$  is limited to the interval  $(0, 2B_0 - f_1)$  for positive frequencies. Accordingly, the transmission bandwidth required by using the raised cosine pulse spectrum is given by:”[1]

$$B_t = 2B_0 - f_1 = B_0(1 + \alpha) = \frac{r_b}{2 \log_2(M)} (1 + \alpha) \quad (\text{Para códigos NRZ})$$

Onde  $f_v = \alpha B_0$  é a banda adicional (*excess bandwidth*).

## → Eye Pattern

**Eye Pattern [1]**

The eye pattern is produced by the synchronized superposition of (as many as possible) successive symbol intervals of the distorted waveform appearing at the output of the receive-filter prior to thresholding.

O *Eye Pattern* é uma ferramenta de avaliação da qualidade da recepção do sinal:

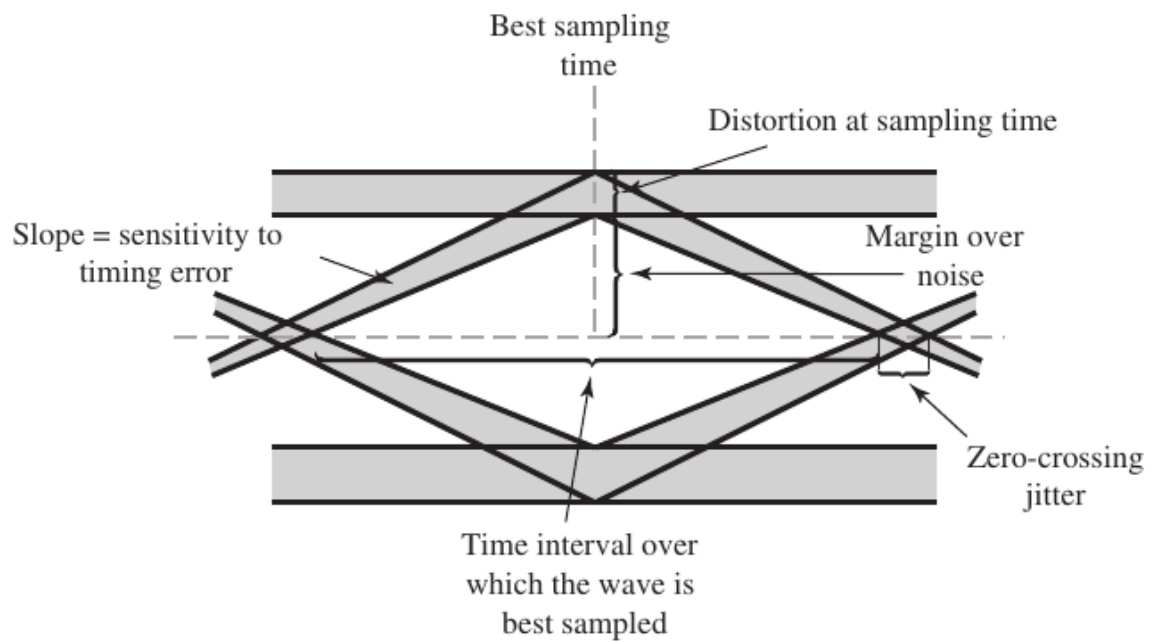


Fig. 29: Diagrama de Olho.



## 4. Transmissão em canais com AWGN

### → Representação geométrica de sinais

A essência da representação geométrica de sinais, é decompor os  $M$  sinais de energia,  $\{s_i(t)\}$  numa combinação linear de  $N$  funções base ortonormais, onde  $N \leq M$ . Isto é, dado um conjunto de sinais de energia reais,  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$  (cada com duração  $T$ ), podemos escrever:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \phi_j(t), \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

em que os coeficientes da expansão são dados por:

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

As funções base  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ , formam um conjunto ortonormal, i.e.,

$$\int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o *Kronecker delta*.

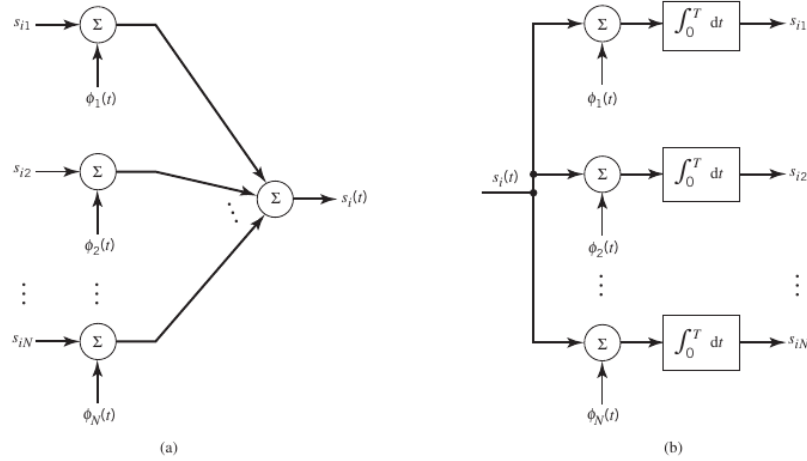


Fig. 30: (a) Síntese do sinal  $s_i(t)$ . (b) Análise para construir o vetor sinal  $\{s_i\}$ .

Desta forma, é possível representar qualquer sinal do conjunto  $\{s_i(t)\}$  sobre um vetor sinal da forma

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

O espaço euclidiano *N-dimensional* onde podemos visualizar estes vetores, é denominado por *signal space*/espaço de sinais.

## → Desigualdade de Schwarz

Considerando um par de sinais,  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ . A *Desigualdade de Schwarz* afirma que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt \right| \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} [s_1(t)]^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} [s_2(t)]^2 dt \right)^{1/2}$$

onde o asterisco (\*) sobrescrito denota o complexo conjugado. A igualdade apenas se verifica se, e somente se,  $s_2(t) = c s_1(t)$ , onde  $c$  é uma constante arbitrária.

## → Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

**Gram-Schmidt procedure**

Supondo um banco de  $M$  sinais de energia,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $s_M(t)$ . Começamos por escolher um dos sinais ( $s_1(t)$  sem perda de generalidade) definimos a primeira base como

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

Definem-se em seguida as funções auxiliares

$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} \phi_j(t), \quad s_{ij} = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt$$

tal que as seguintes bases podem ser definidas como

$$\phi_i(t) = \frac{g_i(t)}{\sqrt{\int_0^T [g_i(t)]^2 dt}}$$

Repare-se que para  $i = 1$ ,  $g_i(t)$  reduz-se para  $s_i(t)$ . Verifica-se sempre que  $N \leq M$  (os sinais de energia não são linearmente independentes entre si, ou, no caso limite, todos os sinais de energia são linearmente independentes).

## → Problema de decisão

Nesta secção é analisado o problema de reconhecer um sinal escolhido aleatoriamente (com probabilidades conhecidas) de um conjunto finito conhecido  $\{s_i(t)\}_{i=1}^M$  após ser perturbado por um processo de ruído  $n(t)$  independente do sinal e adicionado a este.

Refinadamente, o problema é decidir, qual dos sinais,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $s_M(t)$ , levou à obtenção do sinal  $r(t)$ , quando se sabe que  $r(t)$  tem a forma

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Será assumido que  $n(t)$  é um processo gaussiano, com densidade espectral de potência  $N_0/2$ . Os sinais têm energia finita e duração finita. Assume-se que  $s_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq M$ , são definidos num intervalo  $0 \leq t \leq T$  e que  $r(t)$  é observado no mesmo intervalo. Definimos então o problema de decisão.

## → Caracterização estatística da saída do correlador

Seja  $r_j$  definido como

$$\begin{aligned} r_j &\triangleq \int_0^T r(t) \phi_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ &= s_{ij} + n_j \end{aligned}$$

em que

$$n_j \triangleq \int_0^T n(t) \phi_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

O valor médio do valor observado do processo estocástico é dado por

$$\begin{aligned} \mu_{r_j} &= \mathbb{E}[r_j] \\ &= \mathbb{E}[s_{ij} + n_j] \\ &= s_{ij} + \mathbb{E}[n_j] = s_{ij} \end{aligned}$$

A variância pode ser calculada através da definição

$$\begin{aligned} \sigma_{r_j}^2 &= \text{Var}[r_j] \\ &= \mathbb{E}[(r_j - s_{ij})^2] \\ &= \mathbb{E}[n_j^2] \end{aligned}$$

Desta forma, de acordo com o supramencionado, é possível expandir a expressão como:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_j}^2 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T n(t) \phi_j(t) dt \int_0^T n(u) \phi_j(u) du \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_j(t) \phi_j(u) \mathbb{E}[n(t)n(u)] dt du \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n(t)n(u)] &= R_n(t, u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u) \\ \therefore \sigma_{r_j}^2 &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j^2(t) dt \end{aligned}$$

### **Teorema da Irrelevância**

Apenas a projecção do ruído nas funções base do conjunto de sinais  $\{s_i(t)\}_{i=1}^M$  afeta as *estatísticas suficientes* do problema de decisão; o restante ruído é irrelevante.

→ **Optimum detector:  $M$  sinais reais no seio do ruído**

Focamo-nos então no problema enunciado no início desta secção, i.e., decidir entre as seguintes  $M$  hipóteses

$$H_i : y(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

após uma observação de  $y(t)$  no intervalo de tempo  $[0, T]$ . Os  $M$  sinais  $s_i(t)$  são conhecidos e têm energia finita, bem como duração. Através do procedimento de Gram-Schmidt, é possível determinar um conjunto de sinais ortonormais  $(\phi_j(t))_{j=1}^N$ ,  $N \leq M$ , tal que cada  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , possa ser representado como uma combinação linear destas bases. Consideremos também uma sequência completa de sinais ortonormais cujos primeiros  $N$  elementos são  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ . Denotemos esta sequência por  $(\phi_j(t))_{j=1}^{+\infty}$ , e definimos

$$s_{ij} \triangleq \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots$$

e  $n_j, Y_j$  do mesmo modo. O problema de decisão pode ser formulado da seguinte forma discreta. Escolher entre as  $M$  hipóteses

$$H_i : (Y_j)_{j=1}^{+\infty} = (s_{i1} + n_1, s_{i2} + n_2, \dots, s_{iN} + n_N, n_{N+1}, n_{N+2}, \dots)$$

$i = 1, 2, \dots, M$ , com base nas observações das VA's  $Y_1, Y_2, \dots$ . Dado que as componentes de ruído  $n_{N+1}, n_{N+2}, \dots$ , são independentes de  $v_1, \dots, v_N$ , e das hipóteses, as observações  $Y_{N+1}, Y_{N+2}, \dots$ , não acrescentam informação nenhuma ao processo de decisão. Portanto podemos basear-nos somente na observação de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ . Definindo os vetores linha  $[N \times 1]$   $\mathbf{Y} \triangleq [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]$ ,  $\mathbf{n} \triangleq [n_1, n_2, \dots, n_N]$ , e  $\mathbf{s}_i \triangleq [s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iN}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , é possível reduzir a decisão para a forma vetorial

$$H_i : \mathbf{Y} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Desta forma, o *optimum detector* procura funcionar de tal forma que

$$\text{escolher } H_i \text{ se } \mathbf{y} \in S_i$$

onde  $\mathbf{y}$  denota o valor observado do vetor aleatório  $\mathbf{Y}$ , e  $S_1, S_2, \dots, S_M$  são as partições do espaço  $N$ -dimensional, tal que esta regra dê azo à menor probabilidade de erro média

$$P(e) = 1 - \sum_{i=1}^M p_i \int_{S_i} f_{\mathbf{Y}|H_i}(\mathbf{z}|H_i) d\mathbf{z}$$

em que  $p_i \triangleq P\{H_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . É verificado que  $P(e)$  é minimizado se cada  $S_i$  for escolhido de forma a que

$$\mathbf{z} \in S_i \text{ se, e somente se, } p_i f_{\mathbf{Y}|H_i}(\mathbf{z}|H_i) = \max_j p_j f_{\mathbf{Y}|H_j}(\mathbf{z}|H_j)$$

Obtemos então o critério de decisão de maximum a posteriori (MAP). Neste caso, as  $M$  regiões  $S_i$  são denominadas por *regiões de decisão* MAP. No caso especial em que as hipóteses  $H_i$  são equiprováveis, i.e.,  $p_i = 1/M$ , obtém-se

$$\mathbf{z} \in S_i \text{ se, e somente se, } f_{\mathbf{Y}|H_i}(\mathbf{z}|H_i) = \max_j f_{\mathbf{Y}|H_j}(\mathbf{z}|H_j)$$

que corresponde à regra de decisão de máxima verosimilhança (ML). Apesar de apenas minimizar  $P(e)$  para hipóteses  $H_i$  equiprováveis, é o método de deteção mais utilizado, e será onde confinaremos a nossa deteção.

Definindo a hipótese auxiliar

$$H_0 : \mathbf{Y} = \mathbf{n},$$

a condição de ML pode ser reescrita como

$$\mathbf{z} \in S_i \text{ se, e somente se, } \Lambda_i(\mathbf{z}) = \max_i \Lambda_j(\mathbf{z})$$

onde definimos os *likelihood ratios*

$$\Lambda_i(\mathbf{z}) \triangleq \frac{f_{\mathbf{Y}|H_i}(\mathbf{z}|H_i)}{f_{\mathbf{Y}|H_0}(\mathbf{z}|H_0)}$$

Deste modo, a regra de decisão ML é

$$\text{escolher } H_i \text{ se } \Lambda_i(\mathbf{y}) = \max_i \Lambda_j(\mathbf{y})$$

onde  $\mathbf{y}$  representa, como anteriormente, o valor observado de  $\mathbf{Y}$ . Isto é, o detetor ML calcula os  $M$  *likelihood ratios*  $\Lambda_1(\mathbf{y}), \Lambda_2(\mathbf{y}), \dots, \Lambda_M(\mathbf{y})$ , e escolhe a hipótese que corresponde ao maior de entre a seleção. Observando que  $pmbY$  é um vetor aleatório gaussiano com valor médio  $\mathbf{s}_i$  (ou zero, para  $i = 0$ ), componentes independentes, e variância  $N_0/2$  para cada componente, temos, para  $i = 1, 2, \dots, M$ ,

$$\Lambda_i(\mathbf{z}) = \frac{\exp[-(1/N_0) |\mathbf{y} - \mathbf{s}_i|^2]}{\exp[-(1/N_0) |\mathbf{y}|^2]}$$

onde  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \sum_{j=1}^N x_j^2$  (módulo ao quadrado do vetor  $\mathbf{x}$ ). Definindo os *log-likelihood ratios*

$$\lambda_i(\mathbf{y}) \triangleq \ln \Lambda_i(\mathbf{y})$$

permite reduzir a condição para a simples forma

$$\text{escolher } H_i \text{ se } \mathbf{y}\mathbf{s}_i^T - \frac{1}{2}|\mathbf{s}_i|^2 = \max_i \left\{ \mathbf{y}\mathbf{s}_j^T - \frac{1}{2}|\mathbf{s}_j|^2 \right\}$$

Uma expressão mais familiar para o *log-likelihood ratio* pode ser dada por

$$\therefore \lambda_i(y) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s_i(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s_i^2(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

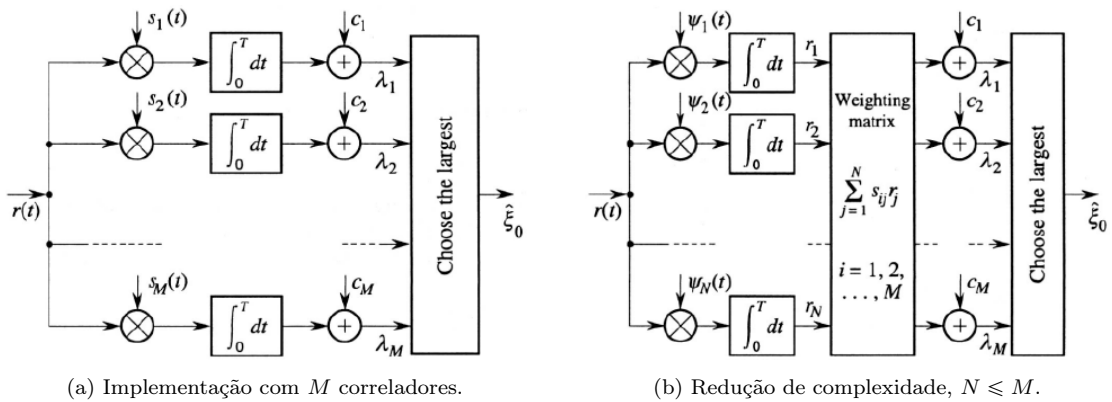


Fig. 31: Implementação do recetor ótimo coerente com correladores.[5]

Em que as constantes  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , são dadas por

$$c_i \triangleq -\frac{1}{2} \int_0^T s_i^2(t) dt = -\frac{1}{2} E_i$$

onde  $E_i$  denota a energia do  $i$ -ésimo sinal.

## → Filtro adaptado

**Matched filter**

$$h(t) \triangleq \alpha s(T-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \triangleq \alpha S^*(f) e^{-j2\pi fT}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

→ Nota:

$$r(t) * h(t) \Big|_{t=T} = \int_0^T r(\tau) h(T-\tau) d\tau = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau$$

Então, um filtro adaptado<sup>3</sup> cujo *output* é amostrado no instante  $T$  extrai do sinal observado  $r(t)$  as estatísticas suficientes para o problema da decisão.

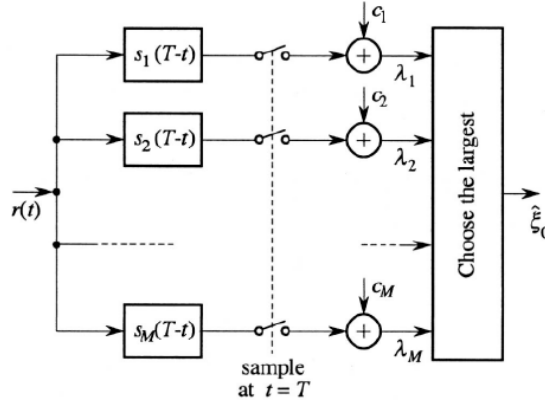


Fig. 32: Implementação do recetor ótimo coerente com filtros adaptados.[5]

Uma propriedade do filtro adaptado é que maximiza o SNR à saída. Quando a entrada do filtro é a soma do sinal  $s(t)$  com ruído  $n(t)$ , no instante  $t = T$ , a sua saída será composta por dois termos: a primeira parte é respetiva ao sinal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi fT} df,$$

onde  $H(f)$  representa a função de transferência do filtro; a segunda é respetiva à parte do ruído, uma VA gaussiana com média  $\mu$  nula e variância dada por

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Se definirmos o SNR à saída do filtro como

$$\zeta^2 \triangleq \frac{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi fT} df \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$

É possível demonstrar que tem o valor máximo para filtro adaptado. Invocando a Desigualdade de Schwarz ( $A = \alpha B^*$ ):

$$\rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} A B^* \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |A|^2 \int_{\mathbb{R}} |B|^2 \implies \zeta^2 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df \int_{\mathbb{R}} |S(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df} = \frac{2E_s}{N_0}$$

$\therefore \text{PSNR} \triangleq \frac{2E_s}{N_0}$

<sup>3</sup>Para sinais pares, o filtro adaptado é uma réplica deslocada do pulso de entrada.

## 5. Técnicas de Modelação Digital (banda passante)

### → ASK (*Amplitude-Shift Keying*)

Uma sequência  $\xi$  de  $K$  símbolos é transportada pelo sinal

$$v_\xi(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \xi_k s(t - kT) \right\}, \quad 0 \leq t \leq KT$$

em que as variáveis aleatórias  $\xi_k$  tomam valores no conjunto de amplitudes equiespaçadas  $\{a_i\}_{i=1}^M$ , dadas por (código polar e unipolar respetivamente)

$$a_i = (2i - 1 - M) \frac{d}{2} \quad \vee \quad a_i = (2i - M) d, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Consequentemente, as formas de onda utilizadas pelo modulador são somente múltiplos escalares de uma única onda. Se  $s(t)$  for um pulso de energia unitária, representa um sinal base da expansão ortonormada, o que leva à conclusão de que o sinal conjunto, é uni-dimensional.

### → Probabilidade de erro (código polar)

A probabilidade de erro de símbolo da ASK para uma deteção coerente, pode ser aferida explicitamente se a probabilidade de uma decisão correta for conhecida

$$P(c) = \frac{1}{M} [2q_1 + (M - 2)q_2]$$

em que  $q_1$  é a probabilidade da decisão correta para os dois pontos exteriores da constelação, e  $q_2$  é a probabilidade de decisão correta para os restantes  $(M - 2)$  pontos interiores. Definindo

$$p = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

temos que  $q_1 = 1 - p$  e  $q_2 = 1 - 2p$ . Assim,

$$P(c) = 1 - 2p \frac{M - 1}{M}$$

e finalmente

$$P(e) = \frac{M - 1}{M} \operatorname{erfc} \left( \frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right).$$

Para exprimir  $P(e)$  em função de  $E$ , aproveita-se o facto de que a energia média<sup>4</sup> do símbolo é dada por

$$E = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i^2 = \frac{d^2}{4M} \sum_{i=1}^M (2i - 1 - M)^2 = \frac{M^2 - 1}{12} d^2$$

Então, dado que  $E = \log_2(M) E_b$ ,

$$\therefore P(e) = \frac{M - 1}{M} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2(M) E_b}{M^2 - 1} \frac{1}{N_0}} \right)$$

<sup>§</sup>A *power efficiency* assintótica é o factor multiplicativo de  $E_b/N_0$  no argumento da  $\operatorname{erfc}(\cdot)$ . Assim,

$$\gamma_{\text{ASK}} = \frac{3 \log_2(M)}{M^2 - 1}$$

que se verifica decrescente para valores de  $M$  cada vez maiores.

<sup>4</sup>Em PAM/ASK, a energia média transmitida difere da *peak energy*  $E_p = (M - 1)^2 d^2 / 4$ , que é a energia do sinal de máxima amplitude. Verifica-se que  $E_p/E = 3(M - 1)/(M + 1)$ .

→ **Probabilidade de erro (código unipolar)**

Partindo novamente de

$$P(e) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Neste caso o valor da energia média do símbolo é dada por

$$E = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i^2 = \frac{d^2}{4M} \sum_{i=1}^M (2i - M)^2 = \frac{M^2 + 2}{12} d^2$$

Desta forma

$$P(e) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M^2 + 2}} \frac{E_b}{N_0}\right)$$

→ **Espectro de potência e eficiência espectral**

A densidade espectral de potência do sinal ASK  $v_\xi(t)$  é dada por

$$S_{v_\xi}(f) = \frac{E}{T} |S(f)|^2$$

onde  $S(f)$  denota a Transformada de Fourier de  $s(t)$ .

A largura de banda de Shannon para esta modulação é  $W = 1/2T$ , e então, a eficiência espectral é dada por

$$\left(\frac{R_s}{W}\right)_{\text{ASK}} = 2 \log_2(M)$$

Conclui-se que para ASK, ao aumentar o valor de  $M$  ocorre uma melhoria da eficiência espectral, no entanto, ocorre também uma diminuição da *power efficiency*.



### → PSK (*Phase-Shift Keying*)

Uma sequência  $\xi$  de  $K$  símbolos é transportada pelo sinal

$$v_\xi(t) = \mathbb{R}e \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \xi_k s(t - kT) e^{j2\pi f_c t} \right\}, \quad 0 \leq t \leq KT$$

onde  $\xi_k = e^{j\phi_k}$ , e cada fase discreta  $\phi_k$  toma valores no conjunto

$$\left\{ \frac{2\pi}{M}(i-1) + \Phi \right\}_{i=1}^M$$

em que  $\Phi$  é uma constante de fase arbitrária. Assume-se que a forma de onda do modulador é retangular, i.e.,  $s(t) \equiv u_T(t)$  um pulso retangular de amplitude  $A$  e duração  $T$ , de tal forma que o envelope do sinal PSK seja constante (são possíveis outras formas de onda, mas assumimos esta). Podemos escrever explicitamente

$$\begin{aligned} v_\xi(t) &= A \sum_{k=0}^{K-1} u_T(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) = \\ &= I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

definimos então as componentes em fase e em quadratura do sinal PSK:

$$\begin{aligned} I(t) &\triangleq A \sum_{k=0}^{K-1} \cos(\phi_k) u(t - kT) \\ Q(t) &\triangleq A \sum_{k=0}^{K-1} \sin(\phi_k) u(t - kT) \end{aligned}$$

### → Probabilidade de erro

Na forma geral, para um sinal  $M$ -PSK, podemos definir os limites superiores e inferiores de  $P(e)$ . Aqui  $E_b = E/\log_2(M)$ , e então, temos

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \log_2(M) \sin \frac{\pi}{M}} \right) \leq P(e) \leq \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \log_2(M) \sin \frac{\pi}{M}} \right)$$

### → Espectro de potência e eficiência espectral

A densidade espectral de potência do sinal PSK é dada por

$$S_{v_\xi}(f) = \frac{1}{4} [S(-f - f_0) + S(f - f_0)]$$

onde  $S(f)$  representa a Transformada de Fourier de  $s(t)$  (*vide* secção sobre código de linha).

Dado que  $N = 2$ , a largura de banda de Shannon para esta modulação é  $W = 1/T$ , e então, a eficiência espectral é dada por

$$\left( \frac{R_s}{W} \right)_{\text{ASK}} = \log_2(M)$$

Conclui-se que para PSK, ao aumentar o valor de  $M$  ocorre também melhoria na eficiência da largura de banda, verifica-se uma diminuição da *power efficiency*.

<sup>§</sup>A *power efficiency* assintótica da modulação PSK é

$$\gamma_{\text{PSK}} = \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right) \cdot \log_2(M)$$

que se verifica decrescente para valores de  $M$  cada vez maiores.

## → Exercícios

★ Considere um sistema PSK binário com formas de onda equiprováveis  $s_1(t) = \cos(2\pi f_c t) = -s_2(t)$ . No detetor de filtro adaptado a referência é  $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ , em que  $\phi$  é um erro de fase. Calcule a probabilidade de erro de bit.

Partindo de

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad \wedge \quad s_i(t) = \pm \cos(2\pi f_c t), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt &= \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c t) [\cos(2\pi f_c t) \cos(\phi) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi)] dt = \\ &= \int_0^{T_b} [\cos(2\pi f_c t)]^2 \cos(\phi) dt - 0 = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\phi) T_b \end{aligned}$$

→  $r_1 = s_{11} + n_1$  com  $\mathbb{E}[r_1] = 1/2 \cos(\phi) T_b$ , dado que  $\mathbb{E}[n_1]$  (valor esperado de um processo gaussiano) é nulo.

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1}^2 &= \mathbb{E}[(r_1 - \mu)^2] = \mathbb{E}[n_1^2] = \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \int_0^{T_b} n(u) \cos(2\pi f_c u + \phi) du\right] = \\ &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c u + \phi) \cos(2\pi f_c t + \phi) \mathbb{E}[n(t)n(u)] du dt = \\ &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c u + \phi) \cos(2\pi f_c t + \phi) R_n(t, u) du dt = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c u + \phi) \cos(2\pi f_c t + \phi) \delta(t - u) du dt = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} [\cos(2\pi f_c u + \phi)]^2 du = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c u + 2\phi) \right] du = \frac{N_0 T_b}{4} + \frac{N_0}{4} \int_0^{T_b} \cos(4\pi f_c u + 2\phi) du = \\ &= \frac{N_0 T_b}{4} + \frac{N_0}{4} \int_{2\phi}^{4\pi f_c T_b + 2\phi} \cos(x) \frac{dx}{4\pi f_c} = \frac{N_0 T_b}{4} + \frac{N_0}{16\pi f_c} \left[ \sin(x) \right]_{2\phi}^{4\pi f_c T_b + 2\phi} \overset{0, \because \text{bandpass}}{=} \\ &= \frac{N_0 T_b}{4} \end{aligned}$$

Dado que as formas de onda são equiprováveis e antipodais

$$\therefore \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1/2 \cos(\phi) T_b}{\sqrt{2}\sqrt{N_0 T_b/4}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \cos(\phi)\right)$$

## → Notas:

$$R_n(t, u) = N_0/2 \cdot \delta(t - u)$$

$$E_b = \int_0^{T_b} [s_1(t)]^2 dt = T_b/2$$

## → QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*)

Este é um esquema linear, em que os símbolos determinam a amplitude e a fase do sinal portadora. Ao contrário do esquema PSK, o envelope não é constante. Uma sequência  $\xi$  de  $K$  símbolos é representada pelo sinal

$$v_\xi(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \xi_k s(t - kT) e^{j2\pi f_0 t} \right\}, \quad 0 \leq t \leq KT$$

em que a VA discreta  $\xi_k$  é definida como

$$\xi_k \triangleq \xi'_k + \xi''_k = A_k e^{j\phi_k}$$

e  $s(t)$  é um sinal de banda base complexo de duração  $T$ . No caso de  $s(t) = u_T(t)$ , podemos reescrever a expressão como

$$v_\xi(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \{ \xi'_k \cos(2\pi f_0 t) - \xi''_k \sin(2\pi f_0 t) \} u_T(t)$$

que exprime o sinal transmitido na forma de uma série de portadoras—par ortogonal—moduladas pelo conjunto de amplitudes discretas. Esta família de constelações do sinal é bi-dimensional, e o modulador e desmodulador tomam a mesma estrutura do PSK.

## → Probabilidade de erro

Um limite superior fácil para a  $P(e)$  (útil para valores altos de  $M$ , e  $E_b/N_0$  muito grandes), pode ser obtida por

$$P(e) \leq 2 \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

em que

$$E = \frac{M-1}{6} d^2$$

## → Espectro de potência e eficiência espectral

A densidade espectral de potência do sinal QAM é dada por

$$S_{v_\xi}(f) = \frac{\mathbb{E}[|\xi_k|^2]}{T} |\tilde{S}(f)|^2$$

em que  $\tilde{S}(f)$  denota a Transformada de Fourier do sinal complexo  $\tilde{s}(t)$ .

Dado que  $N = 2$ , a largura de banda de Shannon para esta modulação é  $W = 1/T$ , e então, a eficiência espectral é dada por (igual a PSK)

$$\left( \frac{R_s}{W} \right)_{\text{ASK}} = \log_2(M)$$

Conclui-se que para QAM, ao aumentar o valor de  $M$  ocorre uma melhoria na eficiência da largura de banda, no entanto, ocorre também uma diminuição da *power efficiency*.

<sup>§</sup>A *power efficiency* assintótica da modulação QAM é

$$\gamma_{\text{QAM}} = \frac{3}{2} \frac{\log_2(M)}{M-1}$$

que se verifica decrescente para valores de  $M$  cada vez maiores.

→ Exercícios

★

## → FSK (*Frequency-Shift Keying*)

Este é um esquema de modulação não linear em que os símbolos fonte determinam a frequência de uma portadora de envelope constante. Especificamente, assume-se que o modulador consiste num conjunto de  $M$  osciladores sintonizados às frequências desejadas.

Uma sequência de  $K$  símbolos é representada pelo sinal

$$v_{\xi}(t) = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} s(t - kT) e^{j2\pi f_d \xi_k(t-kT)} e^{j2\pi f_c t} \right\}, \quad 0 \leq t \leq KT$$

onde as VA's discretas  $\xi_k$  tomam valores no conjunto  $\{2i - 1 - M\}_{i=1}^M$ , e portanto,  $2f_d$  é a separação entre frequências adjacentes.

O transmissor utiliza os sinais

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A \cos(2\pi f_i t), & 0 \leq t \leq T \\ f_i &= f_c + (2i - 1 - M)f_d, & i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

que têm energia comum,  $E = A^2 T/2$ , e um envelope constante.

Os sinais podem ser feitos ortogonais, ao escolher uma separação de frequências apropriada. Temos,

$$\begin{aligned} \int_0^T s_n(t) s_m(t) dt &= A^2 \int_0^T \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos(2\pi [f_n + f_m] t) dt + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos(2\pi [f_n - f_m] t) dt \\ &= \frac{A^2 T \sin(2\pi [f_n + f_m] T)}{2 \cdot 2\pi [f_n + f_m] T} + \frac{A^2 T \sin(2\pi [f_n - f_m] T)}{2 \cdot 2\pi [f_n - f_m] T} \\ &= \frac{A^2 T \sin(4\pi [n - m] f_d T)}{2 \cdot 4\pi [n - m] f_d T} \end{aligned}$$

Assumimos que o produto  $f_c T$  da frequência da portadora e do intervalo de símbolo é tão grande que o primeiro termo da expressão anterior pode ser descartado (*bandpass assumption*). Desta forma, o produto escalar das duas formas de onda é nulo quando  $4\pi f_d T$  é um múltiplo não nulo de  $\pi$ . A menor separação que produz um par de sinais ortogonais é

$$2f_d = \frac{1}{2T}$$

## → Probabilidade de erro

Com base na *union bound*, temos o seguinte limite superior para a probabilidade de erro de símbolo

$$P(e) \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\log_2(M)}{2} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

<sup>s</sup>A *power efficiency* assintótica da modulação FSK é

$$\gamma_{\text{FSK}} = \frac{1}{2} \log_2(M)$$

que, ao contrário das modulações previamente observadas, se verifica crescente para valores de  $M$  cada vez maiores.

**→ Espectro de potência e eficiência espectral**

O espectro de potência é dado por

...

Neste caso,  $N = M$ , portanto a largura de banda de Shannon deste esquema de modulação é  $W = M/2T$ , e a sua eficiência espectral é dada por

$$\left(\frac{R_s}{W}\right)_{\text{FSK}} = 2 \frac{\log_2(M)}{M}$$

Note-se que ao contrário dos esquemas anteriores (ASK, PSK e QAM), ao aumentar  $M$ , a eficiência espectral do FSK ortogonal diminui. Por outro lado, a *power efficiency* aumenta.

**→ Exercícios**

★

## Referências

- [1] Simon Haykin and Michael Moher. *Introduction to Analog and Digital Communications*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2007. Chapters 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 & 11.
- [2] J. M. Bioucas Dias. "Notas de Fundamentos de Telecomunicações: Sinais Aleatórios", 2011.
- [3] F. D. Nunes. "Notes on Telecommunications", 2015.
- [4] Victor Barroso. "Fundamentos de Telecomunicações", 2010.
- [5] Sergio Benedetto and Ezio Biglieri. *Principles of Digital Transmission*. Information Technology: Transmission, Processing and Storage. Springer, 1999.
- [6] Simon Haykin. *Digital Communication Systems*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2014. Chapters 6, 7 & 8.
- [7] Marko Beko and João Canto. "Introdução às Comunicações Analógicas e Digitais", 2022. Coletânea de Exercícios Resolvidos.