Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский государственный университет

информационных технологий, механики и оптики

Факультет прикладной информатики и компьютерных технологий

Вычислительная Математика

Лабораторная работа №5

“Приближение функции”

Вариант 2

Группа: P3218

Студент: Петкевич Константин Вячеславович

Преподаватель: Кучер Алексей Владимирович

г. Санкт-Петербург

2016 г.

Описание метода

Вариант: 2
Приближение сложной функции с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.
В этой постановке узлы интерполяции определяются как корни полинома Чебышева на заданном интервале приближения.

Многочлены $\{l_k(x)\}$ называют множителями Лагранжа

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)},$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, а формулу

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i).$$

- формулой Лагранжа для
интерполирующего многочлена Ln(x). Часто интерполяционный полином Ln(·) называют просто полиномом Лагранжа.

Ясно, что от выбора узлов интерполируемой функции напрямую зависит, насколько точно многочлен будет являться её приближением.
Введём следующее определение: полиномом Чебышева называется многочлен вида

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x),\ |x| \le 1.$$

Известно (см. ссылки литературы), что если узлы интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$ являются корнями полинома Чебышева степени $n+1$, то величина $\max\limits_{x\in[a,b]} \left|\omega_{n+1}(x)\right|$ принимает наименьшее возможное значение по сравнению с любым другим выбором набора узлов интерполяции.
Очевидно, что в случае $k = 1$ функции $T_1(x)$, действительно, является полиномом первой степени, поскольку

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

В случае $k = 2$ $T_2(x)$ тоже полином второй степени. Это нетрудно проверить. Воспользуемся известным тригонометрическим тождеством: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, положив $\theta = \arccos x$.
Тогда получим следующее соотношение: $T_2(x) = 2x^2 - 1$.
С помощью тригонометрического тождества $\cos(k + 1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$ — $\cos(k - 1)$ легко показать, что для полиномов Чебышева справедливо рекуррентное соотношение:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

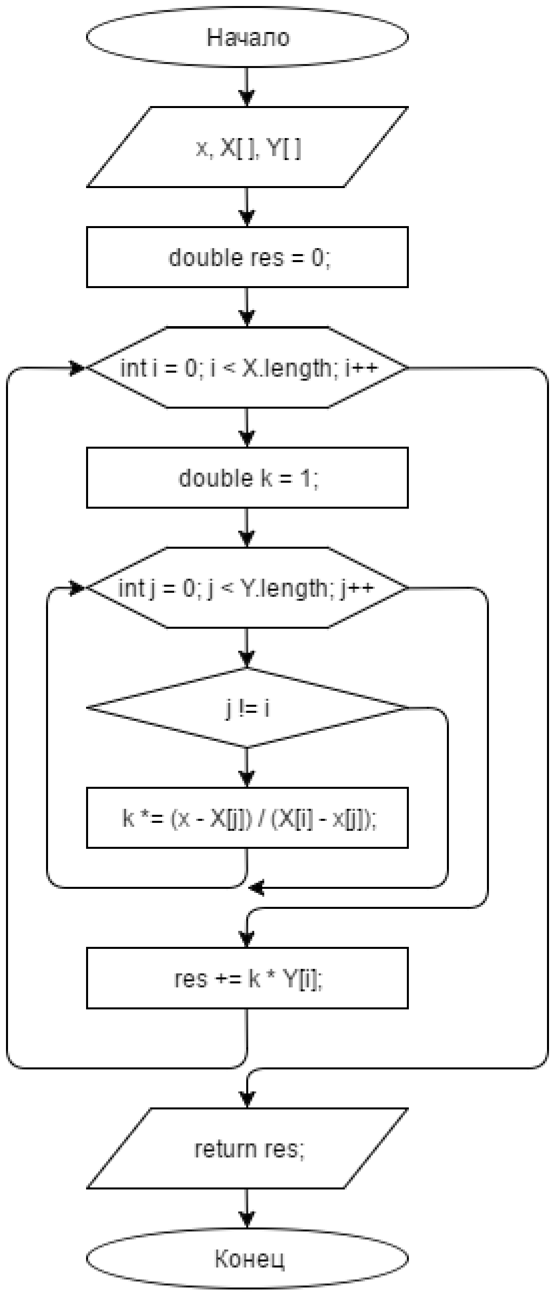
При помощи данного соотношения можно получить формулы для полиномов Чебышева любой степени.
Корни полинома Чебышева легко находятся из уравнения: $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = 0$. Получаем, что уравнение имеет k различных корней, расположенных на отрезке [-1,1]:
$x_m = \cos\frac{2m+1}{2k}\pi,\ m = 0,1,\cdot\cdot\cdot,k-1,$ которые и следует выбирать в качестве узлов интерполирования.
Нетрудно видеть, что корни на [-1,1] расположены симметрично и неравномерно - чем ближе к краям отрезка, тем корни расположены плотнее. Максимальное значение модуля полинома Чебышева равно 1 и достигается в точках $\cos\frac{m}{k}\pi$.

Листинг основной части программы

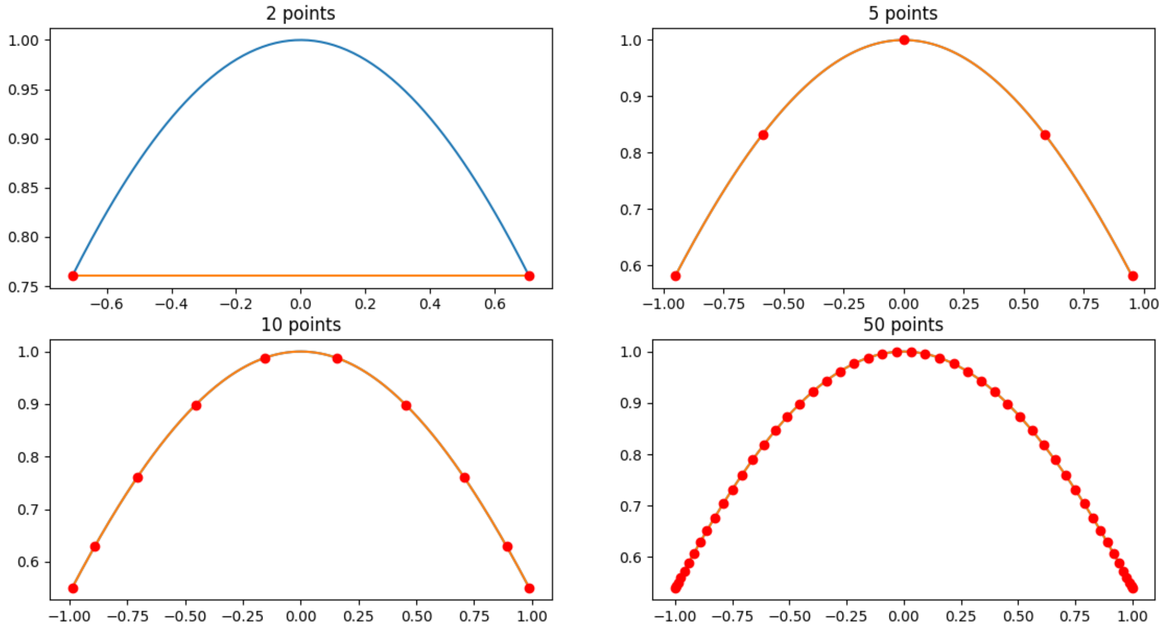
```
def lagrange (points, r): #point, arg x
    res=0
    n = len(points)
    for j in range(n):
        numerator=1; denominator=1
        for i in range(n):
            if i==j:
                numerator *= 1 ; denominator *= 1;
            else:
                numerator *= (r-points[i][0])
                denominator *= (points[j][0]-points[i][0])
        res += points[j][1]*numerator/denominator
    return res

def chebyshev_nodes (func,k):
    res = []
    m = 0
    for m in range(k):
        res.append(0)
        res[m] = np.cos((2*m + 1) * np.pi / (2 * k))
    res.sort()
    return list(map(lambda x: (x, func(x)), res))
```

Блок-схема численного метода



Примеры работы программы



Вывод

Интерполирование сильно зависит от количества и места расположения точек на интерполируемом отрезке функции. От выбора узлов интерполируемой функции напрямую зависит, насколько точно многочлен будет являться её приближением. В формуле Лагранжа добавление узла повлечет за собой не только появление нового слагаемого, но и потребует исправления ранее найденных членов суммы.