Университет информационных технологий, механики и оптики
Факультет компьютерных технологий и управления
Кафедра информатики и прикладной математики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Выполнил:
студент гр. Р3218
Петкевич К.В.

г. Санкт-Петербург
2017 год

ТЕОРИЯ

Методы Монте–Карло (ММК) — это численные методы решения математических задач с помощью моделирования случайных величин. ММК позволяют успешно решать математические задачи, обусловленные вероятностными процессами. Основывается на теореме о среднем: если на отрезке [a, b] задана некоторая непрерывная интегрируемая функция f (x), то найдется такая точка, принадлежащая этому отрезку, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

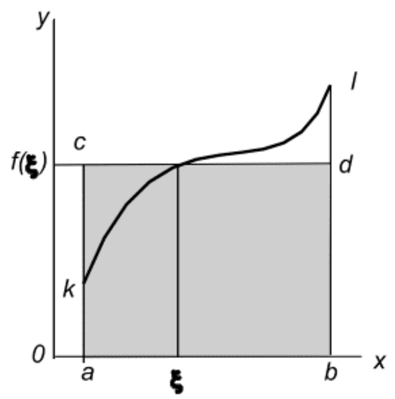
Т.е. площадь криволинейной трапеции aklb можно заменить площадью прямоугольника acdb, одной из сторон которого является отрезок [a. b], а численное значение другой стороны — $f()$

Выберем на отрезке [a, b] n случайных точек $f(0)=0^3=0$. Можно показать, что при достаточно большом n выполняется условие.

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n},$$

Т.е. $f()$ — среднее между ординатами случайно выбранных точек x(i), n — количество испытаний (случайных выборок).

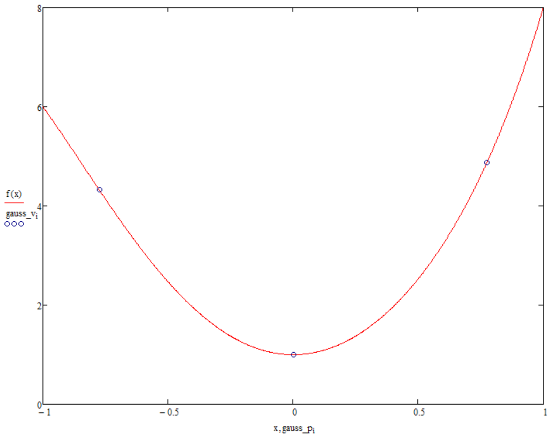
Погрешность вычисления интеграла ММК ~ $x_i, i=1,2,\ldots,n$,.



Метод Гаусса — метод численного интегрирования, позволяющий повысить алгебраический порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования без увеличения числа используемых значений подынтегральной функции. Метод Гаусса позволяет достичь максимальной для данного числа узлов интегрирования алгебраической точности.

$$I \approx \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)$$

В общем случае, используя n точек, можно получить метод с порядком точности $2n-1$. Значения узлов метода Гаусса по n точкам являются корнями полинома Лежандра степени n .



Метод Гаусса – Кронрода – улучшение для метода Гаусса.

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} a_i\, f(x_i) + \sum_{i=1}^{n+1} b_i\, f(y_i)$$

Где x_i— узлы метода Гаусса по n точкам, а $3n+2$параметров подобраны таким образом, чтобы порядок точности метода был равен $3n+1$

Тогда для оценки погрешности можно использовать эмпирическую формулу:

$$\Delta = (200|I - I_G|)^{1.5}$$

I_G — приближённое значение интеграла, полученное методом Гаусса.

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

$\int_0^4 x^3\,dx$ Вычислить приближённое значение определённого интеграла.

Промежуток интегрирования разделим на n=5 равных отрезков.

Метод Монте-Карло

$$f(0{,}3)=0{,}3^3=0.027$$
$$f(0{,}6)=0{,}6^3=0.216$$
$$f(1{,}4)=1{,}4^3=2.744$$
$$f(3{,}5)=3{,}5^3=42.875$$
$$f(4)=4^3=64$$

$$I_{ммк} \approx h*(f(0.3)+f(0{,}6)+f(1{,}4)+f(3{,}5)+f(4))=0{,}8*(0.027+0.216+2.744+42.875+64)=87.9$$

Метод Гаусса

$$I \approx \frac{4-0}{2}\left(f\left(\frac{0+4}{2}-\frac{4-0}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{0+4}{2}+\frac{4-0}{2\sqrt{3}}\right)\right)=2(0.604+31.396)=64$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Интегрирование с помощью метода Гаусса, когда подынтегральная функция имеет сходящийся степенной ряд на отрезке интегрирования, и когда интеграл берется по небольшому числу переменных. Если эти условия не выполняются, достижение требуемой точности интегрирования может потребовать большого объема вычислений для любых квадратур. Метод Монте-Карло не накладывает никаких требований на сходимость и существование степенного ряда в области интегрирования.

На первый взгляд, метод Монте-Карло дает гораздо более скромные результаты, по сравнению с методами квадратур. Однако в применении к многомерным задачам выигрыш может быть существенным, при удачном выборе области, в которую происходят бросания. Действительно, при фиксированном числе бросаний относительную точность одного порядка мы получим и для одномерного и для десятимерного случая, т.е. размерность задачи слабо будет влиять на скорость ее решения. Так же, недостаток метода Гаусса состоит в том, что он не имеет лёгкого (с вычислительной точки зрения) пути оценки погрешности полученного значения интеграла. Метод Гаусса – Кронрода исправляет эту ситуацию, но требует дополнительных вычислений.