Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет компьютерных технологий и управления

Кафедра информатики и прикладной математики

Теория информации

Лабораторная работа №4

«Помехоустойчивое кодирование двоичных сообщений с использованием циклических кодов»

Вариант 7

Группа: P3218

Студент: Петкевич Константин

Преподаватель: Тропченко А. А.

2017г

1. Постановка задачи

Двоичное дискретное сообщение в виде кодовой комбинации длины $n_и$=5 передается по каналу связи. Для обеспечения более высокой достоверности передачи информации требуется ввести в него соответствующую избыточность, обеспечив реализацию моделей циклических кодов с d = 2, 3 и 4.

2. Расчет числа контрольных символов, обеспечивающего заданные требования по помехозащищенности для d = 2, 3, 4

При d = 1 используется образующий многочлен вида

$$P_{d=2}(x) = x + 1$$

То есть, число контрольных символов $n_{\kappa(d=2)} = 1$

Для случая d = 3 воспользуемся соответствующей формулой

$$n_{u(d=3)} = \left\lceil lb\left(n_u + 1 + \left\lceil lb\left(n_u + 1\right)\right\rceil\right)\right\rceil = \left\lceil lb\left(6+3\right)\right\rceil = 4$$

При d = 4 количество будет на единицу большим, чем при d = 3

$$n_{u(d=4)} = n_{u(d=3)} + 1 = 5$$

3. Образующие полиномы, обеспечивающие построение циклических кодов с минимальными кодовыми расстояниями d = 2, 3, 4

Для d = 2 многочлен приведен в предыдущем пункте

$$P_{d=2}(x) = x + 1$$

С целью подбора подходящего многочлена для оставшихся двух случаев воспользуемся специальной таблицей, содержащей неприводимые многочлены различных степеней.

$$P_{d=3}(x) = x^4 + x + 1$$
$$P_{d=4}(x) = x^5 + x^2 + 1$$

4. Элементы дополнительных матриц, участвующих в построении циклических кодов с минимальными кодовыми расстояниями d = 2, 3, 4

Для получения дополнительной матрицы в случае d = 2 произведем деление каждого элемента единичной транспонированной матрицы (для наглядности представлены дополнительные разряды, добавляющиеся при кодировании) на образующий полином:

$$E^T = \begin{vmatrix} 00001(0) \\ 00010(0) \\ 00100(0) \\ 01000(0) \\ 10000(0) \end{vmatrix} \quad P = 11 \quad R_{d=2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Аналогично для d = 3

$$E^T = \begin{vmatrix} 00001(0000) \\ 00010(0000) \\ 00100(0000) \\ 01000(0000) \\ 10000(0000) \end{vmatrix} \quad P = 10011 \quad R_{d=3} = \begin{vmatrix} 0011 \\ 0110 \\ 1100 \\ 0001 \\ 0101 \end{vmatrix}$$

И для d = 4

$$E^T = \begin{vmatrix} 00001(00000) \\ 00010(00000) \\ 00100(00000) \\ 01000(00000) \\ 10000(00000) \end{vmatrix} \quad P = 100101 \quad R_{d=3} = \begin{vmatrix} 00101 \\ 01010 \\ 10100 \\ 01101 \\ 11010 \end{vmatrix}$$

5. Образующие матрицы циклических кодов с минимальными кодовыми расстояниями d = 2, 3, 4

Образующая матрица получается приписыванием к единичной транспонированной матрице матрицы дополнений:

$$M_{d=2} = \begin{vmatrix} 00001\ 1 \\ 00010\ 1 \\ 00100\ 1 \\ 01000\ 1 \\ 10000\ 1 \end{vmatrix} \quad M_{d=3} = \begin{vmatrix} 00001\ 0011 \\ 00010\ 0110 \\ 00100\ 1100 \\ 01000\ 1011 \\ 10000\ 0101 \end{vmatrix} \quad M_{d=4} = \begin{vmatrix} 00001\ 00101 \\ 00010\ 01010 \\ 00100\ 10100 \\ 01000\ 01101 \\ 10000\ 11010 \end{vmatrix}$$

6. Все возможные комбинации циклических кодов для d = 2, 3, 4, включающие как контрольные, так и информационные символы

Передаваемое десятичное число	d = 2	d = 3	d = 4
0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1	0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 1 0 0 1 1	0 0 0 0 1 0 0 1 0 1
2	0 0 0 1 0 1	0 0 0 1 0 0 1 1 0	0 0 0 1 0 0 1 0 1 0
3	0 0 0 1 1 0	0 0 0 1 1 0 1 0 1	0 0 0 1 1 0 1 1 1 1
4	0 0 1 0 0 1	0 0 1 0 0 1 1 0 0	0 0 1 0 0 1 0 1 0 0
5	0 0 1 0 1 0	0 0 1 0 1 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1 0 0 0 1
6	0 0 1 1 0 0	0 0 1 1 0 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 1 1 1 0
7	0 0 1 1 1 1	0 0 1 1 1 1 0 0 1	0 0 1 1 1 1 1 0 1 1
8	0 1 0 0 0 1	0 1 0 0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 0 0 1 1 0 1
9	0 1 0 0 1 0	0 1 0 0 1 1 0 0 0	0 1 0 0 1 0 1 0 0 0
10	0 1 0 1 0 0	0 1 0 1 0 1 1 0 1	0 1 0 1 0 0 0 1 1 1
11	0 1 0 1 1 1	0 1 0 1 1 1 1 1 0	0 1 0 1 1 0 0 0 1 0
12	0 1 1 0 0 0	0 1 1 0 0 0 1 1 1	0 1 1 0 0 1 1 0 0 1
13	0 1 1 0 1 1	0 1 1 0 1 0 1 0 0	0 1 1 0 1 1 1 1 0 0
14	0 1 1 1 0 1	0 1 1 1 0 0 0 0 1	0 1 1 1 0 1 0 0 1 1
15	0 1 1 1 1 0	0 1 1 1 1 0 0 1 0	0 1 1 1 1 1 0 1 1 0
16	1 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 1 0 1	1 0 0 0 0 1 1 0 1 0
17	1 0 0 0 1 0	1 0 0 0 1 0 1 1 0	1 0 0 0 1 1 1 1 1 1
18	1 0 0 1 0 0	1 0 0 1 0 0 0 1 1	1 0 0 1 0 1 0 0 0 0
19	1 0 0 1 1 1	1 0 0 1 1 0 0 0 0	1 0 0 1 1 1 0 1 0 1

20	1 0 1 0 0 0	1 0 1 0 0 1 0 0 1	1 0 1 0 0 0 1 1 1 0	
21	1 0 1 0 1 1	1 0 1 0 1 1 0 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 1 1	
22	1 0 1 1 0 1	1 0 1 1 0 1 1 1 1	1 0 1 1 0 0 0 1 0 0	
23	1 0 1 1 1 0	1 0 1 1 1 1 1 0 0	1 0 1 1 1 0 0 0 0 1	
24	1 1 0 0 0 0	1 1 0 0 0 1 1 1 0	1 1 0 0 0 1 0 1 1 1	
25	1 1 0 0 1 1	1 1 0 0 1 1 1 0 1	1 1 0 0 1 1 0 0 1 0	
26	1 1 0 1 0 1	1 1 0 1 0 1 0 0 0	1 1 0 1 0 1 1 1 0 1	
27	1 1 0 1 1 0	1 1 0 1 1 1 0 1 1	1 1 0 1 1 1 1 0 0 0	
28	1 1 1 0 0 1	1 1 1 0 0 0 0 1 0	1 1 1 0 0 0 0 0 1 1	
29	1 1 1 0 1 0	1 1 1 0 1 0 0 0 1	1 1 1 0 1 0 0 1 1 0	
30	1 1 1 1 0 0	1 1 1 1 0 0 1 0 0	1 1 1 1 0 0 1 0 0 1	
31	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 0 1 1 1	1 1 1 1 1 0 1 1 0 0	

7. Результаты проверки кодовой комбинации, закодированной циклическими кодами с d = 2, 3, 4 на отсутствие ошибок

Сначала выберем произвольную комбинацию при d = 2, скажем, возьмем число 6. Убедимся, что остаток от деления на образующий полином равен 0:

001100

001100

остаток 000000 результат 000100

Далее выберем комбинацию для числа 13 из кодовых комбинаций при d = 3:

011010100

010011000

остаток 001001100 результат 000001000

001001100

остаток 000000000 результат 000000100

Как и ожидалось, остаток равен нулю

Проделаем то же самое с комбинацией для числа 23 при d = 4:

1011100001

1001010000

остаток 0010110001 результат 0000010000

0010010100

остаток 0000100101 результат 0000000100

0000100101

остаток 0000000000 результат 0000000001

Остаток также равен нулю

8. Результаты проверки принятой кодовой комбинации, закодированной циклическим кодом с d = 2 на наличие одиночной ошибки

Возьмем комбинацию для числа 19 и внесем ошибку в произвольный бит, скажем, в третий:
100111 -> 101111
Разделим на образующий полином и убедимся, что остаток не равен нулю:

	101111
	110000
остаток	011111
	011000
остаток	000111
	000110
остаток	000001

9. Результаты проверки принятой кодовой комбинации, закодированной циклическим кодом с d = 3 на наличие одиночной ошибки

Возьмем комбинацию для числа 7 и внесем ошибку в произвольный бит, скажем, в четвертый:
001111001 -> 001111101
Вычислим остаток:

	001111101
	001001100
остаток	000110001
	000100110
остаток	000010111
	000010011
остаток	000000100

Наличие остатка указывает на ошибку в сообщении, кроме того, «вес» остатка не больше числа ошибок, исправляемых кодом, поэтому произведя сложение по модулю 2 можем вычислить правильное сообщение:

	000000100
	001111101
результат	001111001

Информационная кодовая комбинация: 00111

10. Результаты проверки принятой кодовой комбинации, закодированной циклическим кодом с d = 4, на наличие тройной ошибки

Выберем кодовую комбинацию для числа 21 и внесем 3 ошибки в произвольные позиции:
1010101011 -> 1011111111
Разделим полученную комбинацию на образующий полином

	1011111111
	1001010000
остаток	0010101111

0010010100

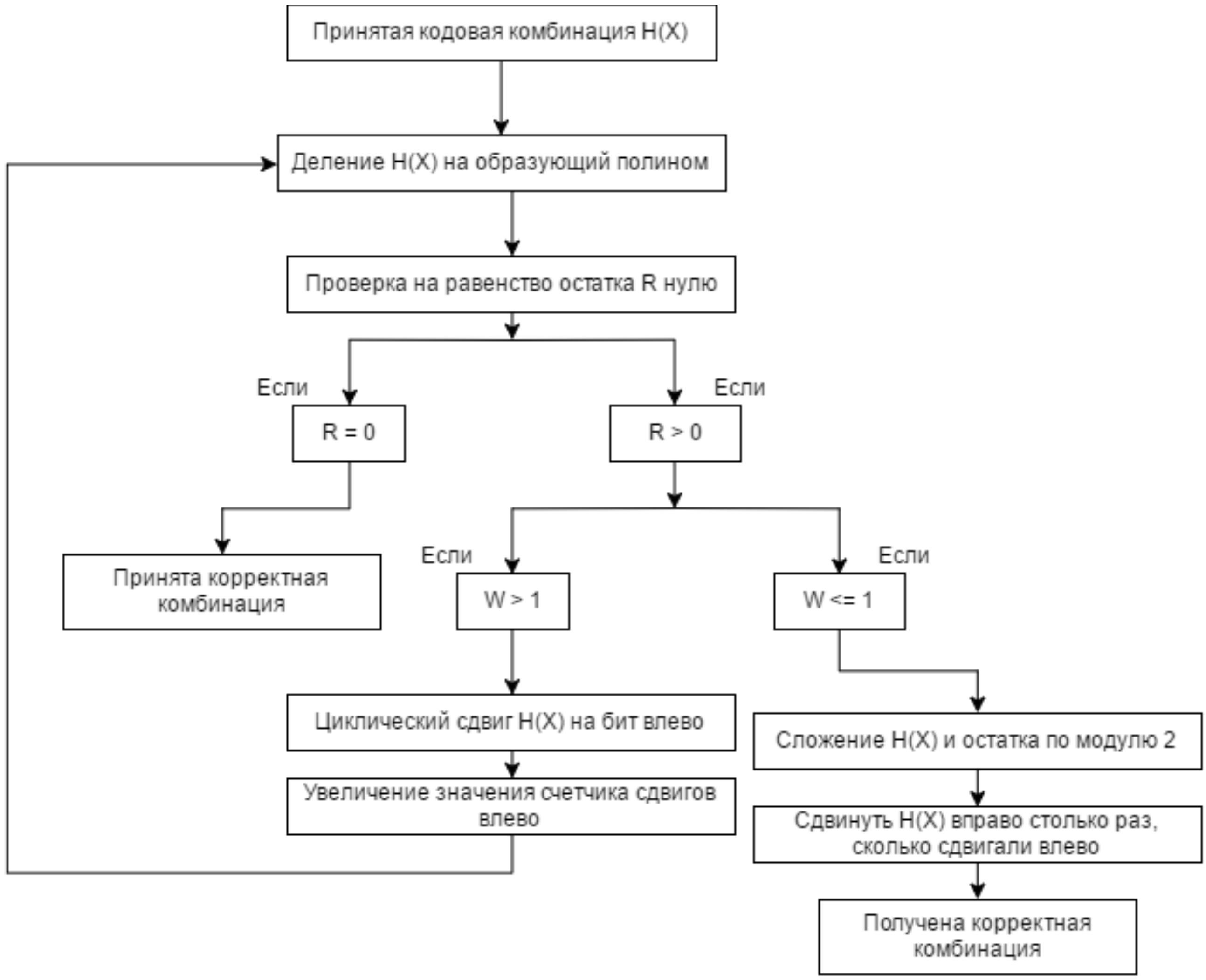
остаток 0000111011

0000100101

остаток 0000011110

Остаток не равен нулю, что говорит о наличии ошибки

11. Функциональная схема декодирования циклических кодов с исправлением одиночных ошибок



12. Выводы по работе

В ходе лабораторной работы был исследован способ помехоустойчивого кодирования с использованием циклических кодов. По сравнению с кодом Хемминга данный способ выглядит, с одной стороны, более сложным – действия, которые требуется предпринять для кодирования и декодирования сообщения требуют более сложного аппаратного обеспечения, но с другой стороны, циклические коды обеспечивают большую гибкость с точки зрения возможности реализации кодов с необходимой способностью обнаружения и исправления ошибок, возникающих при передаче кодовых комбинаций по каналу связи.