

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**И. Ф. Дьяков, С. А. Чернов, А. Н. Черный**

## **МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЁТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Допущено УМО вузов РФ по образованию в области  
транспортных машин и транспортно-технологических комплексов  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по специальностям «Автомобиле- и тракторостроение» и  
«Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и  
оборудование» направления подготовки «Транспортные машины и  
Транспортно-технологические комплексы»

Ульяновск  
2010

УДК 539.9(075)  
ББК 30.121я7  
Д93

Рецензенты:

Кафедра № 8 Ульяновского высшего военно-технического института;

профессор кафедры «Сельскохозяйственные машины» Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии доктор технических наук В. Г. Артемьев.

**Дьяков, И. Ф.**

Д93 Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем : учебное пособие / И. Ф. Дьяков, С. А. Чернов, А. Н. Черный. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 133 с.

ISBN 978-5-9795-0715-6

Излагаются основы метода конечных элементов статике, устойчивости, динамики стержневых систем и программирование на фортране. Пособие соответствует учебным программам по дисциплине «Строительная механика автомобиля» для подготовки дипломированных специалистов по специальности 653200 направления «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы».

Рекомендуется студентам при изучении курса «Строительная механика автомобиля» и при выполнении расчетно-проектировочных работ.

Печатается в авторской редакции.

**УДК 539.9(075)  
ББК 30.121я7**

ISBN 978-5-9795-0715-6

© Дьяков И. Ф., Чернов С. А.,  
Черный А. Н., 2010  
© Оформление. УлГТУ, 2010

## ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных направлений по проектированию конструкций, удовлетворяющих современным требованиям снижения металлоёмкости, связано с их всесторонними исследованиями напряжённого и деформированного состояний, стремлением к лучшему использованию несущей способности конструкций. Вопросы, связанные с расчётом конструкций возникают во многих отраслях современной промышленности, в том числе: авиации, судостроении, автомобилестроении, химическом машиностроении, строительстве и т. д.

В последние годы во всём мире проявляется большой интерес к проблемам вычислительной механики. Этот интерес обусловлен тем, что механика как фундаментальная наука через исследования, выполняемые в различных областях науки и техники с использованием компьютерных технологий, играет одну из ведущих ролей в техническом прогрессе.

Методы прочностных расчётов конструкций формировались с развитием строительной механики стержневых систем, пластин и оболочек. Историю развития строительной механики делят на два периода: до появления вычислительных машин — это классическая строительная механика стержневых систем и после появления вычислительных машин.

ЭВМ значительно расширила рамки строительной механики. Проявилось преимущество метода перемещений и стало возможным применение методов расчёта, которые позволяют более полно учитывать геометрию и условия работы конструкций. Сформировалось новое направление: вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

В силу различных обстоятельств аналитическое решение дифференциальных уравнений для большинства практически важных задач установить невозможно, поэтому приближённые численные методы расчёта конструкций являются единственно возможным подходом в исследовании и получении приемлемых результатов при решении практически важных задач.

Развитие вычислительной техники, широкое её распространение и увеличение мощности ЭВМ способствовали появлению точных и высокопроизводительных численных методов расчёта и обусловили широкое внедрение их в расчётную практику при проектировании конструкций.

Этому отвечают современные методы исследования напряжённого и деформированного состояний различных инженерных конструкций, основанные на образовании дискретной модели с помощью элементов конечных размеров. Конструкцию можно рассматривать как некоторую совокупность конструктивных элементов, соединённых в конечном числе узловых точек. Если известны соотношения между силами и перемещениями для каждого отдельного конечного элемента (КЭ), то, используя известные приёмы строительной механики, можно описать свойства конструкции и исследовать её поведение в целом.

Численные методы исследований предусматривают применение ЭВМ для всего процесса расчёта, т. е. от ввода в машину сведений о геометрии и топологии конструкции, её физических свойствах и нагрузках до получения окончательных результатов напряжённого и деформированного состояний. Применительно к расчёту конструкций наиболее эффективным, очень удобным вычислительным методом решения прикладных задач механики деформируемого твёрдого тела является метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ стал фундаментальным методом механики по определению напряжённо-деформированного состояния сложных инженерных конструкций. Преимущество МКЭ проявляется в его универсальности техники вычислений при использовании различных КЭ в модели конструкции. Конечно-элементные модели различных конструкций могут быть сведены к стержневым, пластинчатым, оболочечным или объёмным системам, находящимся под действием произвольных нагрузок. МКЭ позволяет рассчитывать сложные инженерные конструкции с единых позиций, т. е. в возможности образования плоских и пространственных расчётных моделей на основе стержневых и плоских КЭ, так как матричный аппарат метода носит стандартный характер для КЭ различной формы.

С развитием вычислительной техники активно разрабатываются алгоритмические языки программирования. Среди многих таких языков ФОРТРАН по-прежнему остается распространенным и употребляемым: большинство программ для вычислительных задач в различных областях науки и техники составлено и составляются на ФОРТРАНЕ. Росту популярности языка способствует и то обстоятельство, что в силу своей структуры он очень удобен в дальнейшем совершенствовании. Постоянно появляются новые операторы, диалоговый режим работы и т. д.

Учебное пособие предназначено для студентов изучающих курс механики деформируемого твёрдого тела. В их число могут войти студенты, изучающие авиастроение, судостроение, автомобилестроение, промышленное и гражданское строительство, техническую и прикладную механику. Данное учебное пособие ориентировано и на инженеров, занимающихся прикладными задачами проектирования различных стержневых систем.

МКЭ представляет методику, предназначенную для вычисления на вычислительных машинах. В связи с этим в предлагаемом учебном пособии большое внимание уделяется вычислительным программам.

В учебном пособии рассматриваются одномерные элементы, которые, как правило, используются в качестве примеров, подтверждающих теоретические положения конечно-элементного анализа при изучении двух и трёхмерных задач механики сплошной среды.

Для практического применения МКЭ требуется не только овладение теорией, но и преодоление значительных трудностей программирования на ЭВМ. В связи с этим в учебное пособие помещены ряд подпрограмм, реализующих различные стандартные этапы расчета статики, устойчивости, свободных и вынужденных колебаний стержневых систем, с помощью которых студент может составить собственную программу.

# 1. СТАТИКА

## 1.1. Системы координат. Силы и перемещения

Особенностью КЭ стержневого типа является то обстоятельство, что задаваемый характер поля перемещений внутри элемента совпадает с уравнением упругой линии. Поэтому МКЭ для стержневых элементов, фактически, является методом перемещений, а не вариационным методом.

Однако в МКЭ учитывается продольная деформация стержней и под стержневым элементом понимается не только отдельный стержень, но и любая его часть, т. е. основная система не определяется минимальной степенью кинематической неопределимости стержневой системы, что лежит в основе расчётной схемы метода перемещений.

При этом используется обычное понятие метода перемещений жёсткий узел, т. е., исходя из условий неразрывности перемещений с учетом недеформированности контура сечения, для всех узлов (сечений сопряжения стержней) расчётной схемы имеет место равенство линейных и угловых перемещений.

Прежде всего, необходимо определиться с системами координат и правилом знаков.

В МКЭ различают общую (глобальную, систему координат конструкции) и местную (локальную, систему координат КЭ) системы координат.

На рис. 1.1. приведены декартовы правые системы координат.

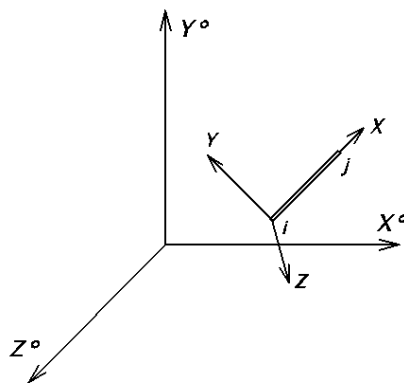


Рис. 1.1. Системы координат

Общие оси координат  $X^0, Y^0, Z^0$  задаются для всей конструкции. Общая система координат остается неподвижной в процессе деформации конструкции и перемещения узлов сопряжения стержней определяются относительно указанных осей. В основном общая система координат используется при выводе уравнений для всей конструкции (разрешающая система уравнений равновесия). Местные оси координат  $X, Y, Z$  связаны с определёнными КЭ. Так как КЭ различным образом ориентированы друг относительно друга, то местные оси координат также различно ориентированы, т. е. у каждого КЭ своя система координат  $XYZ$ . Местная система координат используется в уравнениях для отдельных КЭ. Силам и перемещениям в узлах КЭ соответствуют векторы-столбцы. Для одного  $i$ -го узла КЭ в общем случае (пространственная задача) в местной системе координат векторы узловых сил  $\{P_i\}$  и перемещений  $\{Z_i\}$  будут

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad \{Z_i\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}$$

где  $P_x, P_y, P_z$  – узловые силы по направлению осей  $X, Y$  и  $Z$ ;

$M_x, M_y, M_z$  – узловые моменты относительно соответствующих осей;

$u, v, w$  – соответственно линейные перемещения вдоль осей  $X, Y, Z$ ;

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  – угловые перемещения относительно соответствующих осей.

Очевидно, векторы узловых сил и перемещений КЭ в общей системе координат будут  $\{P^0\}$  и  $\{Z^0\}$ . Силовыми величинами, соответствующими линейным перемещениям являются силы  $P$  в векторе узловых сил, а соответствующими угловыми перемещениям являются моменты  $M$ .

На рис. 1.2 приведены принятые положительные направления узловых сил и линейных перемещений (1, 2, 3), а также узловых моментов и угловых перемещений (4, 5, 6), последовательность которых совпадает с последовательностью элементов в векторах сил  $\{P^0\}$  и перемещений  $\{Z^0\}$ .

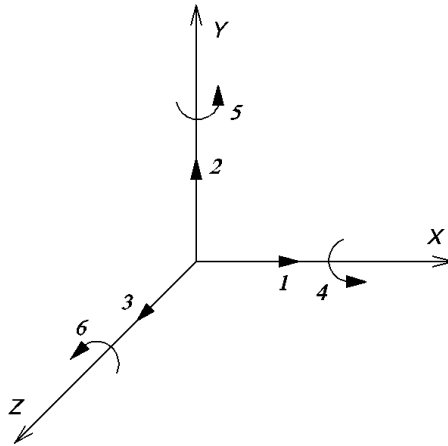


Рис. 1.2. Положительные направления перемещений и сил

Таким образом, положительные значения сил и линейных перемещений совпадают с положительным направлением осей координат, а положительные значения моментов и угловых перемещений направлены против вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны направления осей координат.

При расчёте стержневых систем применяется гипотеза плоских сечений, т. е. предполагают, что отрезок, проведенный перпендикулярно нейтральной линии стержня в недеформированном состоянии, остается нормальным к нейтральной линии (ось стержня, проходящая через центры тяжести сечений) и после деформации. Мерой смещения точек сечения служит угол  $\varphi$  поворота сечения (угол поворота нормали, отмеряемой от недеформированного состояния). Считается, что значение этого угла равно тангенсу угла наклона нейтральной линии.

На рис. 1.3 представлены положения системы координат, позволяющие наглядно определить знак углового перемещения.

Знак углового перемещения определяется следующим образом. Угловое перемещение  $\varphi$  положительное, если это перемещение (вращение) в положительном направлении приводит к соответствующему положительному линейному перемещению.

Таким образом, угловые перемещения сечения стержня, расположенного вдоль оси  $X$ , определяются выражениями:



$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varphi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

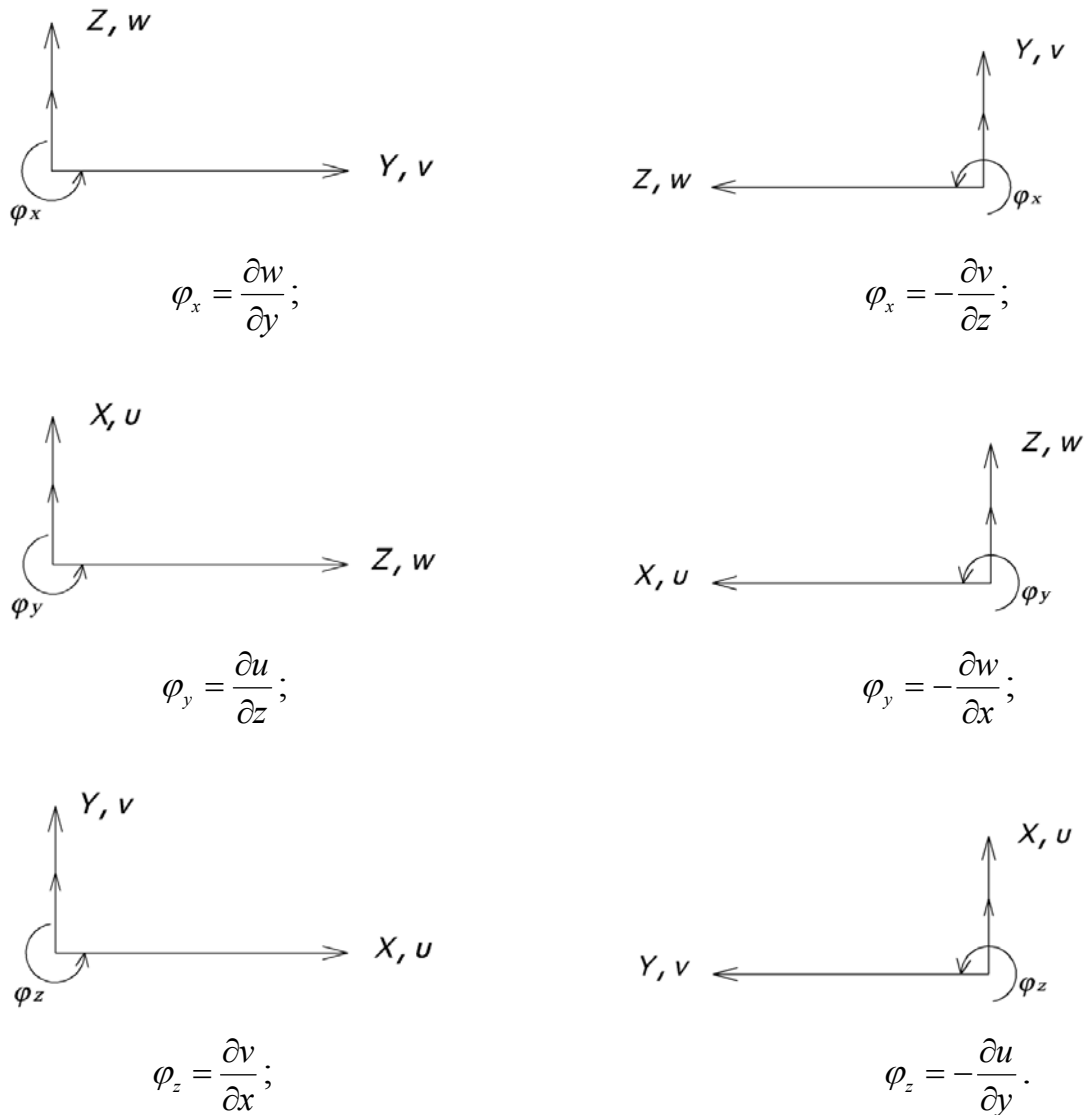


Рис. 1.3. К определению знаков угловых перемещений

Соотношения между силами и перемещениями в МКЭ в форме перемещений представляют собой уравнения жёсткости (статические уравнения метода перемещений в строительной механике).

Уравнения жёсткости для КЭ являются линейными алгебраическими уравнениями равновесия, которые имеют место в любой системе координат и записываются в виде

$$[K_r] \{Z_r\} = \{P_r\},$$

где  $[K_r]$  – матрица жёсткости  $r$ -го КЭ;

$\{Z_r\}$  – вектор узловых перемещений КЭ;

$\{P_r\}$  – вектор узловых сил КЭ.

Элементы матрицы жёсткости КЭ представляют собой реакции в узлах КЭ от единичных перемещений. Так как у стержня два узла, то векторы узловых перемещений и узловой нагрузки КЭ будут содержать по два соответствующих вектора перемещений  $\{Z\}$  и сил  $\{P\}$  начала  $i$  и конца  $j$  стержня, т. е.

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} Z_i \\ Z_j \end{Bmatrix}, \quad \{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix}.$$

Элементы вектора перемещений КЭ преобразуются из местной системы координат  $XYZ$  в общую систему координат  $X^0 Y^0 Z^0$  с помощью матрицы ортогонального преобразования координат  $[T_r]$ , состоящую из подматриц направляющих косинусов. Пусть преобразования перемещений связаны следующим образом:

$$\{Z_r\} = [T_r] \{Z_r^0\}. \quad (1.1)$$

Так как в любой системе координат элементы узловых сил совершают одинаковую работу, то

$$\{P_r^0\}^T \{Z_r^0\} = \{P_r\}^T \{Z_r\},$$

тогда получим

$$\{P_r^0\}^T \{Z_r^0\} = \{P_r\}^T [T_r] \{Z_r^0\},$$

откуда

$$\{P_r^0\}^T = \{P_r\}^T [T_r],$$

или

$$\{P_r^0\} = [T_r]^T \{P_r\}. \quad (1.2)$$

Из принятых преобразований перемещений (1.1) следует преобразование векторов сил (1.2). Эти преобразования называются *контраградиентными* [3].

Так как в местной системе координат уравнения равновесия КЭ

$$\{P_r\} = [K_r] \{Z_r\},$$

то преобразование матрицы  $[K_r]$  жёсткости КЭ, вычисленной в местной системе координат, в общую систему координат выполняется следующим образом.

Согласно выражениям (1.1) и (1.2) получим

$$\{P_r^0\} = [T_r]^T [K_r] [T_r] \{Z_r^0\},$$

или

$$\{P_r^0\} = [K_r^0] \{Z_r^0\},$$

где  $[K_r^0]$  – матрица жёсткости КЭ в общей системе координат:

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

Таким образом, преобразование матрицы жёсткости КЭ из местной системы координат  $XYZ$  в общую систему координат  $X^0 Y^0 Z^0$  выполняется с помощью матрицы ортогонального преобразования координат КЭ  $[T_r]$ , которая определяется из принятой зависимости (1.1). Это преобразование матрицы  $[K_r]$  из местной системы координат в матрицу  $[K_r^0]$  в общей системе координат называется *конгруэнтным*. Оси  $Y$  и  $Z$  местной системы координат являются главными осями инерции сечения стержня.

## 1.2. Конечные элементы стержневых систем.

### Матрицы жёсткости

Различают следующие типы КЭ, которые используются в конечно-элементных моделях стержневых систем: КЭ фермы, работающие только на растяжение-сжатие и балочные КЭ, в основу работы которых положен изгиб. В свою очередь, КЭ фермы разделяют на КЭ плоской фермы и КЭ пространственной фермы, а балочные КЭ на КЭ, работающий только на изгиб, КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб, на КЭ, работающий на изгиб и кручение, и балочный пространственный КЭ.

#### *КЭ фермы*

Если стержневая система образована из геометрически неизменяемых фигур-треугольников, то такая система называется фермой. Согласно оп-

ределению в узлах расчётной схемы фермы расположены шарниры, а её стержни работают на растяжение-сжатие.

КЭ фермы в местной системе координат  $XU$  – это стержень с одной степенью свободы в каждом узле, направленной вдоль оси  $X$  – оси стержня, т. е. вектор узловых перемещений КЭ фермы в местной системе координат содержит два элемента:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{xj} \end{Bmatrix},$$

где  $\delta_{xi}$ ,  $\delta_{xj}$  – соответственно продольные перемещения по направлению оси  $X$  в начале и конце КЭ.

Для получения матрицы жёсткости КЭ необходимо задаться направлениями его возможных узловых перемещений. При этом рекомендуется, чтобы выбранные направления возможных узловых перемещений в начале и конце стержня совпадали, так как это упрощает матрицу  $[T_r]$  ортогонального преобразования координат КЭ и дальнейшее формирование матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$ .

Выбранные направления узловых перемещений, фактически, определяют правило знаков в решении задачи МКЭ, т. е. определяют положительные направления узловых перемещений и узловых сил в КЭ и в задаче в целом.

Жёсткость это приращение нагрузки от единичной деформации. Элементами матрицы жёсткости КЭ являются реакции в узлах от единичных перемещений.

Чтобы получить матрицу жёсткости КЭ необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов от последовательных единичных перемещений узлов по выбранным направлениям и определить реакции в узлах КЭ. При этом реакция от единичного перемещения положительная в том случае, если она совпадает с выбранным (положительным) перемещением в узле.

Определённые таким образом реакции в узлах от единичных перемещений и определяют матрицу жёсткости КЭ в местной системе координат.

Порядок матрицы жёсткости КЭ равен числу степеней свободы в его узлах.

Так как при растяжении-сжатии стержня [14] продольной силой  $N$  абсолютная деформация  $\Delta\ell$  его определяется выражением

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EF},$$

то при деформации  $\Delta\ell=1$  значение продольной силы является жёсткостью стержня при растяжении-сжатии и, следовательно, элементом матрицы жёсткости КЭ:

$$N = \frac{EF}{\ell},$$

где  $E$  – модуль упругости материала;

$F$  – площадь сечения;

$\ell$  – длина стержня.

Эпюры продольных сил  $\bar{N}$  в стержне от единичных перемещений  $z=1$  (безразмерных) приведены на рис. 1.4.

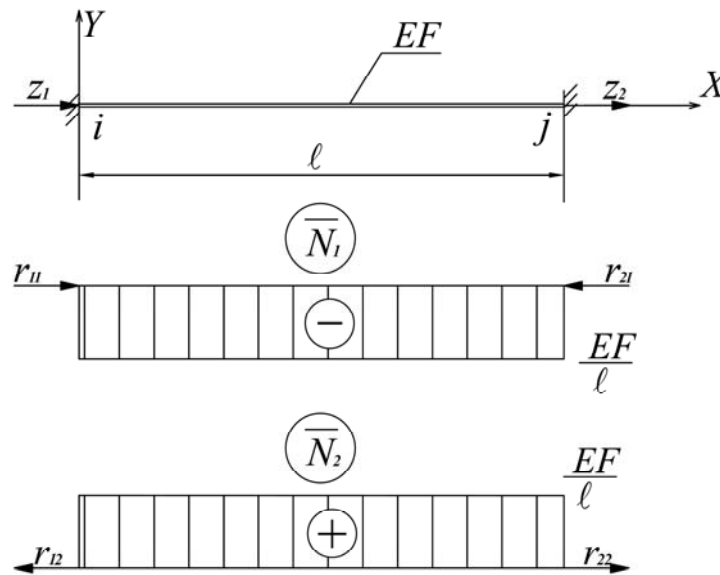


Рис. 1.4. Эпюры продольных сил от единичных перемещений

Матрица жёсткости КЭ фермы в местной системе координат будет

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & -\frac{EF}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & \frac{EF}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Матрицу жёсткости КЭ фермы можно получить и используя энергетические соотношения при определении перемещений, что характерно для МКЭ. Потенциальная энергия  $\mathcal{E}$  деформации стержня при продольной деформации определяется выражением

$$\mathcal{E} = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{2EF}. \quad (1.3)$$

Абсолютное удлинение-сжатие  $\Delta \ell$  (обозначим его  $U$ ) стержня на всей длине  $\ell$  равно

$$U = \int_0^{\ell} \frac{N dx}{EF}.$$

Тогда

$$U' = \frac{N}{EF},$$

$$N = U'EF.$$

Подставив выражение продольной силы  $N$  в (1.3), получим

$$\mathcal{E} = \frac{EF}{2} \int_0^{\ell} (U')^2 dx. \quad (1.4)$$

Задаёмся аппроксимирующей функцией узловых перемещений предполагаемого поля перемещений, определяющей деформации внутри КЭ через перемещения узлов:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (1.5)$$

Следует отметить, что число неизвестных постоянных  $\alpha$  равно числу степеней свободы узлов КЭ.

Эти перемещения можно выразить через неизвестные постоянные  $\alpha_1 - \alpha_2$  в матричной форме

$$\{f\} = \{U\} = [Q] \{\alpha\}, \quad (1.6)$$

где

$$[Q] = [1 \quad x],$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}.$$

Значения компонент вектора постоянных  $\{a\}$  находятся из системы уравнений, которые получаются в результате подстановки в выражение (1.6) вместо  $x$  значений узловых координат начала ( $x_n = 0$ ) и конца ( $x_k = \ell$ ) КЭ и приравнивания перемещений  $\{f\}$  соответствующим перемещениям узлов  $\{Z_r\}$ , т. е.

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{xj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [C] \{a\}, \quad (1.7)$$

где  $\{Z_r\}$  – вектор узловых перемещений  $r$ -го КЭ;

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений (1.7), получим две постоянных искомого вектора  $\{a\}$ :

$$\{a\} = [C]^{-1} \{Z_r\}.$$

Подставив в выражение (1.6) вектор  $\{a\}$ , получим

$$\{f\} = [Q] [C]^{-1} \{Z_r\} = [B] \{Z_r\},$$

где

$$[B] = [N_1 \quad N_2],$$

$N_1, N_2$  – функции формы (положения) поля перемещений:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad N_2 = \frac{x}{\ell}.$$

Тогда потенциальная энергия стержня (1.4) выражается через функции формы следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{EF}{2} \int_0^\ell (N_1' z_1 + N_2' z_2)^2 dx,$$

где

$$N_1' = -\frac{1}{\ell}, \quad N_2' = \frac{1}{\ell}.$$

В результате преобразований получим

$$\mathcal{E} = \frac{EF}{2} \left( \int_0^\ell \left( \frac{z_1}{\ell} \right)^2 dx - \int_0^\ell 2 \left( \frac{1}{\ell^2} z_1 z_2 \right) dx + \int_0^\ell \left( \frac{z_2}{\ell} \right)^2 dx \right),$$

или

$$\mathfrak{A} = \frac{EF}{2} \left( \frac{z_1^2}{\ell^2} x|_0^\ell - \frac{2}{\ell^2} z_1 z_2 x|_0^\ell + \frac{z_2^2}{\ell^2} x|_0^\ell \right).$$

Таким образом, потенциальная энергия стержня при продольной деформации, выраженная через функции формы поля перемещений будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{A} = \frac{EF}{2} \left( \frac{1}{\ell} z_1^2 - \frac{2}{\ell} z_1 z_2 + \frac{1}{\ell} z_2^2 \right). \quad (1.8)$$

В соответствии с принципом минимума потенциальной энергии получим:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_i} = [K_r] \{Z_r\}.$$

Производная по  $z_1$  в выражении (1.8) определяет элементы первой строки матрицы  $[K_r]$  жёсткости КЭ фермы, умноженные на элементы вектора  $\{Z_r\}$  узловых перемещений КЭ:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_1} = \frac{EF}{2} \frac{2}{\ell} z_1 - \frac{EF}{2} \frac{2}{\ell} z_2 = \frac{EF}{\ell} z_1 - \frac{EF}{\ell} z_2,$$

а производная по  $z_2$ , определяет элементы второй строки матрицы жёсткости КЭ фермы, умноженные на элементы вектора  $\{Z_r\}$ , т. е.

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_2} = -\frac{EF}{\ell} z_1 + \frac{EF}{\ell} z_2.$$

Различают плоские и пространственные фермы в соответствии с расположением стержней, а также КЭ плоской фермы и пространственной, которые отличаются матрицами жёсткости в общей системе координат.

Так как у плоской фермы в узлах соединения стержней по две степени свободы, то и КЭ плоской фермы в общей системе координат  $X^0 Y^0$  – это стержень с двумя степенями свободы в каждом узле.

Вектор узловых перемещений КЭ плоской фермы в общей системе координат представляет следующий вид:

$$\{Z_r^0\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \end{Bmatrix},$$



где  $\delta_{xi}^0, \dots, \delta_{yj}^0$  – продольные перемещения по направлению осей  $X^0, Y^0$  в начале и конце КЭ.

КЭ плоской фермы применяется для моделирования балочной и консольно-балочной плоской фермы, шпренгельной и трех шарнирной арочной фермы, фермы с различными видами решетки, различным характером очертания и т. д.

Если стержни фермы расположены в трехмерном пространстве – имеем пространственную ферму: башенные краны, опоры линий электропередач, теле и радиовышки, другие подобные конструкции. В этом случае в узлах соединения стержней по три степени свободы, тогда в векторе узловых перемещений КЭ фермы в общей системе координат шесть степеней свободы:

$$\{Z_r^0\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \delta_{zi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \\ \delta_{zj}^0 \end{Bmatrix},$$

где  $\delta_{xi}^0, \dots, \delta_{zj}^0$  – продольные перемещения в общей системе координат в начале и конце КЭ.

### *КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб*

Плоские стержневые системы представляют собой наиболее распространенную группу стержневых систем. Если у стержневой системы плоскость действия сил совпадает с плоскостью деформаций, то такая система называется плоской. В одной плоскости расположены оси, проходящие через центры тяжести поперечных сечений, всех стержней системы и одна из главных осей инерции сечений стержней расположена в этой плоскости. Если у плоской стержневой системы все или часть узлов жёсткие, то такая система называется плоской рамой. Для моделирования произвольной плоской стержневой системы используется КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб. Вектор узловых перемещений КЭ будет

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix},$$

где  $\varphi_{zi}$ ,  $\varphi_{zj}$  – соответственно угловые перемещения относительно оси  $Z$ .

Для балочного КЭ эпюры внутренних силовых факторов (рис. 1.5) от единичных перемещений построены с использованием табличных значений реакций метода перемещений [2].

Значения поперечных сил вычисляются путём дифференцирования эпюр изгибающих моментов:

$$Q = \frac{dM_z}{dx} = \pm tg\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона эпюры изгибающих моментов.

Знак поперечной силы определяется направлением угла наклона эпюры изгибающих моментов. Например, значения реакций (поперечной силы) от действия единичного перемещения  $z_2$  будут положительными:

$$r_{23} = r_{53} = \left( \frac{6EJ_z}{\ell^2} + \frac{6EJ_z}{\ell^2} \right) / \ell = \frac{12EJ_z}{\ell^3}.$$

Следует отметить, что индексы у реакций соответствуют номерам строк и столбцов матрицы жёсткости КЭ (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Матрица жёсткости КЭ: растяжение-сжатие, изгиб

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{\ell^3} & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{\ell^3} & \frac{6EJ_z}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{4EJ_z}{\ell} & 0 & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{2EJ_z}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{\ell^3} & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{\ell^3} & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{2EJ_z}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{4EJ_z}{\ell} \end{bmatrix},$$

где  $J_z$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $Z$ .

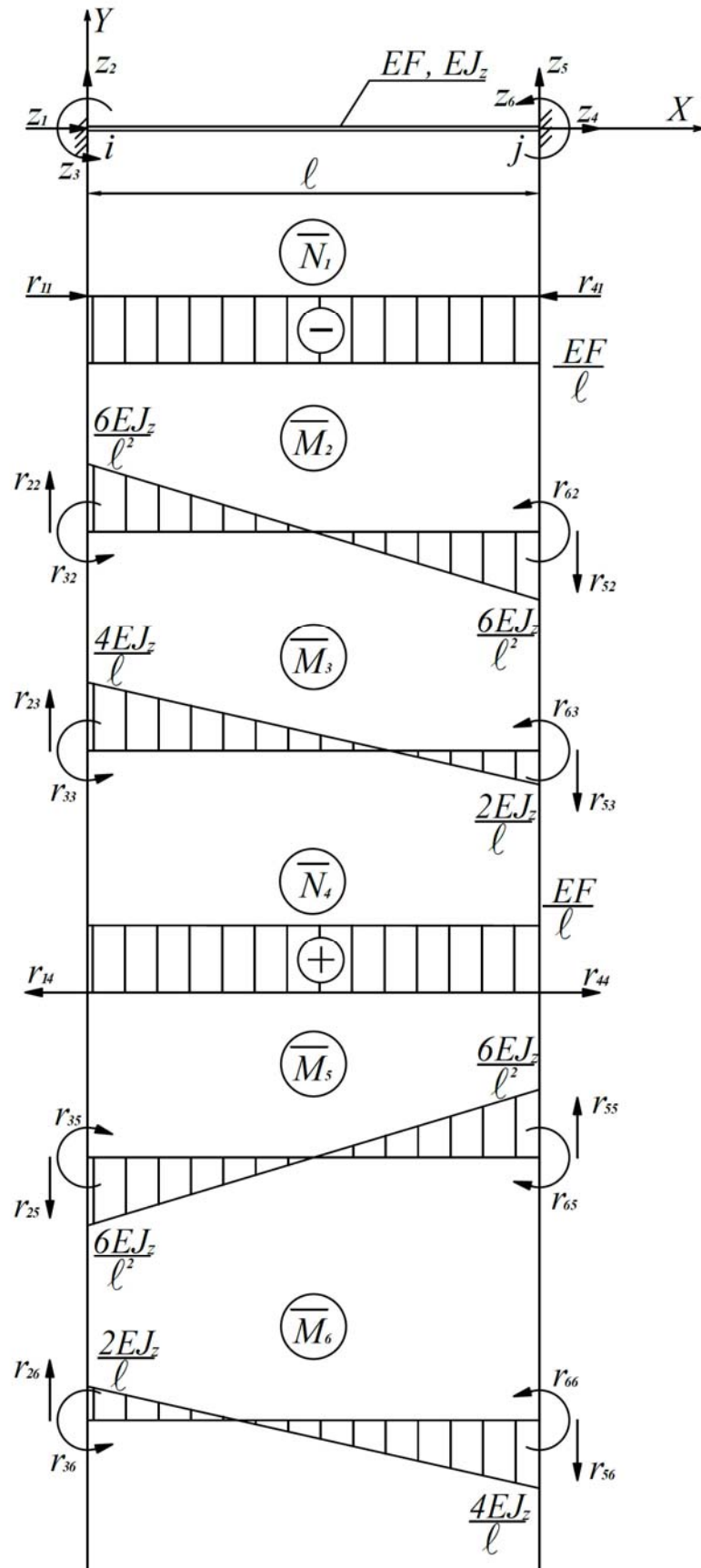


Рис. 1.5. Эпюры от единичных перемещений при растяжении-сжатии и изгибе

Для моделирования произвольной статически определимой и статически неопределимой балки, произвольной рамы, трех шарнирной рамы, двух шарнирной арки, различных комбинированных систем (цепь с балкой жёсткости, балка с гибкой аркой и т. д.) используется балочный КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб, и его модификации – КЭ с произвольными шарнирами в узлах.

Если исключить из матрицы жёсткости КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, первые и четвертые строки и столбцы, то получим матрицу жёсткости балочного КЭ, работающего на изгиб (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Матрица жёсткости КЭ: изгиб

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{\ell^3} & & & \\ \frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{4EJ_z}{\ell} & & \\ -\frac{12EJ_z}{\ell^3} & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{12EJ_z}{\ell^3} & \\ \frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{2EJ_z}{\ell} & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & \frac{4EJ_z}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Этот КЭ может использоваться только для моделирования произвольных балок, в том числе и многопролетных как статически определимых, так и статически неопределимых.

*КЭ, работающий на изгиб и кручение, и пространственный КЭ*

Для моделирования произвольной плоско-пространственной стержневой системы используется балочный КЭ, работающий на изгиб и кручение. У вектора узловых перемещений КЭ два линейных перемещения и четыре угловых:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{zi} \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \delta_{zj} \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix}.$$

Если построить эпюры крутящих моментов от единичных углов закручивания стержня и эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений в плоскости  $XZ$  (рис. 1.6), то можно получить матрицу жёсткости КЭ, работающего на изгиб и кручение.

Аналогично растяжению-сжатию, при кручении угол  $\varphi_x$  закручивания стержня определяется выражением

$$\varphi_x = \frac{M_x \ell}{GJ_x},$$

где  $M_x$  – крутящий момент;

$G$  – модуль сдвига;

$J_x$  – момент инерции сечения стержня при кручении.

При  $\varphi_x=1$  значение крутящего момента  $M_x$  является и жёсткостью стержня при кручении:

$$M_x = \frac{GJ_x}{\ell}.$$

Жёсткость стержня при кручении является соответствующими элементами матрицы жёсткости КЭ, работающего на изгиб и кручение (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Матрица жёсткости балочного КЭ:  
изгиб, кручение

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} \\ 0 & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} \\ -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} \end{bmatrix},$$

где  $J_y$  – момент инерции сечения относительно главной оси инерции  $Y$  сечения.

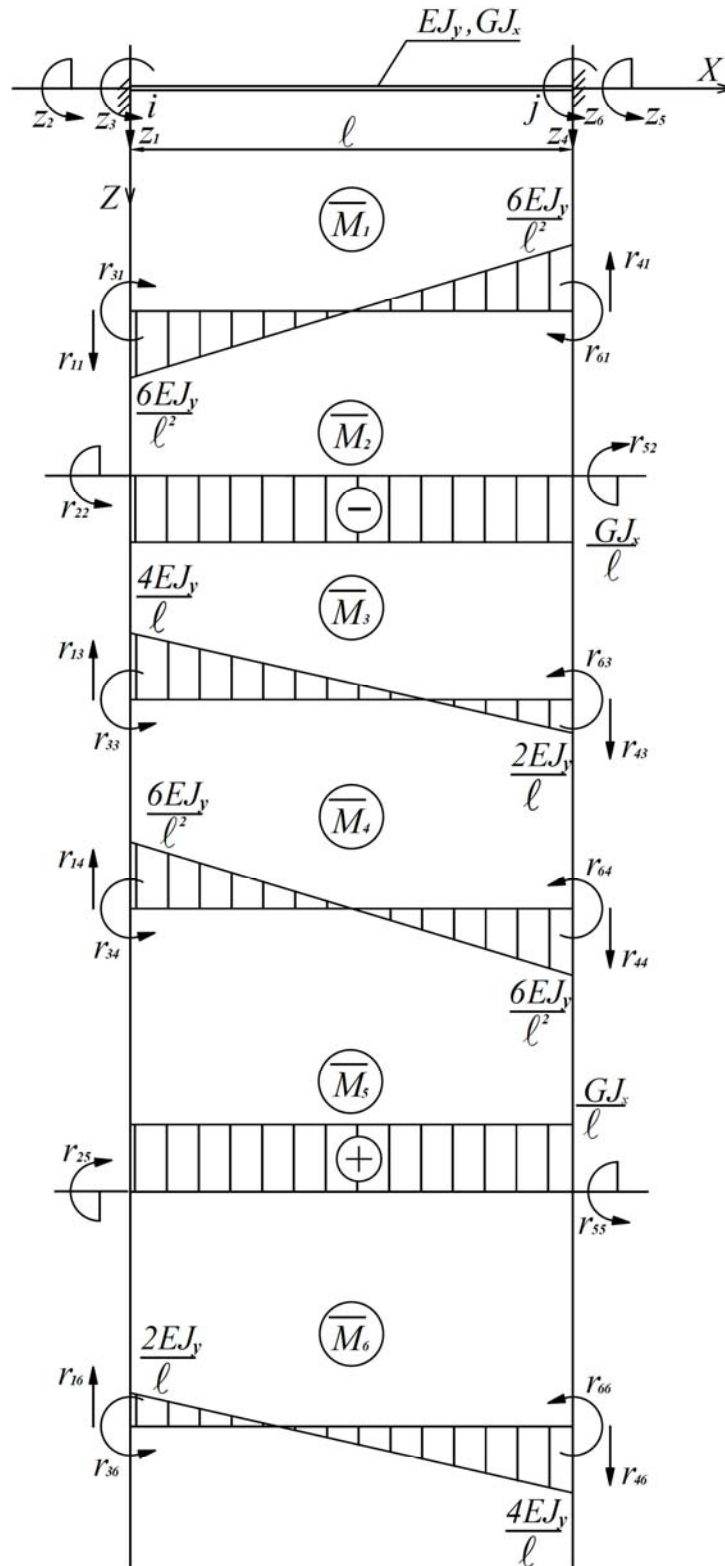


Рис. 1.6. Эпюры от единичных перемещений при изгибе и кручении

Балочный КЭ, работающий на изгиб и кручение, используется для моделирования плоско-пространственных рам. Элементы этих рам (плоская рама с нагрузкой из её плоскости) работают на изгиб и кручение.

Рамы под механизмы и машины, а также вагонные рамы, удовлетворяющие этим требованиям.

Используя матрицы жёсткости КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, а также КЭ, работающего на изгиб и кручение, можно сформировать матрицу жёсткости балочного пространственного КЭ, с шестью степенями свободы в узле. Балочные пространственные КЭ, как правило, используются для моделирования рам сельскохозяйственных машин, рамных каркасов промышленных зданий, ангаров и т. д.

В табл. 1.4 приведена матрица жёсткости балочного пространственного КЭ.

По аналогии можно получить в явном виде и матрицы жёсткости КЭ с произвольными шарнирами в узлах. Однако при реализации алгоритма вычисления этих матриц проще использовать процесс конденсации, сущность которого заключается в следующем.

Как отмечалось, узловые силы  $\{P\}$  и соответствующие им узловые перемещения  $\{Z\}$  КЭ связаны между собой уравнением

$$[K_r] \{Z_r\} = \{P_r\}.$$

Это выражение представим в блочном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Z_A \\ Z_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix}.$$

Выполнив умножение элементов матриц, получим

$$\begin{aligned} [K_{AA}] \{Z_A\} + [K_{AB}] \{Z_B\} &= \{P_A\}, \\ [K_{BA}] \{Z_A\} + [K_{BB}] \{Z_B\} &= \{P_B\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Пусть по направлениям узловых перемещений  $\{Z_A\}$  расположены шарниры, тогда  $\{P_A\} = 0$  и из 1-го уравнения (1.9) будет

$$\begin{aligned} [K_{AA}] \{Z_A\} &= -[K_{AB}] \{Z_B\}, \\ \{Z_A\} &= -[K_{AA}]^{-1} [K_{AB}] \{Z_B\}. \end{aligned}$$

Подставив  $\{Z_A\}$  во 2-е уравнение (1.9), получим следующее выражение:

$$([K_{BB}] - [K_{BA}] [K_{AA}]^{-1} [K_{AB}]) \{Z_B\} = \{P_B\}.$$

Таблица 1.4

Матрица жёсткости балочного пространственного КЭ

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{\ell} \end{bmatrix}.$$



Таким образом, матрица жёсткости КЭ с одним или несколькими шарнирами  $[K_r^u]$  по направлениям узловых перемещений  $\{Z_A\}$  будет представлять следующую матрицу:

$$[K_r^u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{III} \end{bmatrix},$$

где

$$[K_{III}] = [K_{BB}] - [K_{BA}] [K_{AA}]^{-1} [K_{AB}]. \quad (1.10)$$

Согласно выражению (1.10) преобразования матрицы жёсткости КЭ без шарниров в узлах в матрицу жёсткости с произвольными шарнирами в узлах полностью совпадает с процедурой прямого хода Гаусса. В этом случае происходит исключение не всех неизвестных, а только соответствующим узловым перемещениям  $\{Z_A\}$ , в которых и расположены шарниры.

Приведенное преобразование матрицы жёсткости КЭ может быть выполнено и в общей системе координат. Это позволяет реализовать шарниры, характерные не для КЭ, а для конструкции, т. е. в осях  $X^0 Y^0 Z^0$ .

На рис. 1.7 представлены плоские шарнирные соединения стержней: линейные по оси  $X$  (рис. 1.7, а) и по оси  $Y$  (рис. 1.7, б), а также шарнир по углу поворота сечения (рис. 1.7, в).

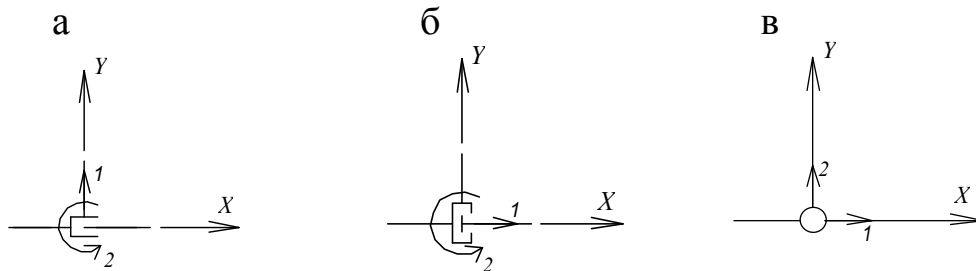
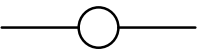
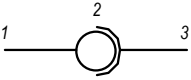
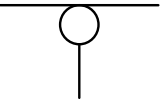
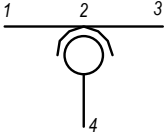
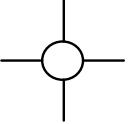
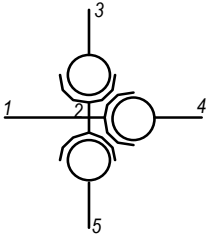
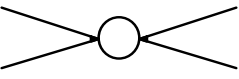
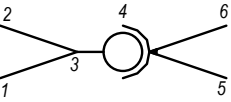


Рис. 1.7. Схемы вариантов шарниров в узле: а – свободное перемещение по оси  $X$ ; б – свободное перемещение по оси  $Y$ ; в – свободное угловое перемещение

В табл. 1.5 приведены варианты наиболее распространенных шарнирных (свободное угловое перемещение) соединений узлов сопряжения стержней.

Таблица 1.5

## Шарнирные соединения стержней

№	Наименование	Схема	Конечно-элементная модель
1	<i>Простой шарнир</i>		
2	<i>Присоединенный шарнир</i>		
3	<i>Кратный шарнир, K = 3</i>		
4	<i>Групповой шарнир</i>		

Реализация этих вариантов шарнирных соединений стержней путём моделирования узлов с использованием балочных КЭ выполняется следующим образом.

*Простой шарнир:* КЭ 1–2 с шарниром в узле 2. КЭ 2–3 без шарнира.

*Присоединенный шарнир:* КЭ 2–4 с шарниром в узле 2. КЭ 1–2, 2–3 без шарниров.

*Кратный шарнир:* КЭ 3–2, 4–2, 5–2 с шарнирами в узле 2. КЭ 1–2 без шарнира.

*Групповой шарнир:* В шарнирное соединение вводится КЭ 3–4 с шарниром в узле 4. Остальные КЭ без шарниров.

Следует отметить, что матрицы жёсткости КЭ в местной и в общей системах координат симметричные, так как, согласно теореме взаимности Максвелла, имеет место равенство следующих элементов матриц:

$$k_{ij} = k_{ji},$$

и положительно определённые: элементы матрицы, расположенные на главной диагонали преобладают по значению над побочными.

Порядок матрицы жёсткости КЭ равен числу степеней свободы в его узлах. В связи с этим порядок матрицы жёсткости КЭ плоской фермы в общей системе координат  $4 \times 4$ , а порядок матрицы жёсткости КЭ пространственной фермы в общей системе координат  $6 \times 6$ .

Порядок матриц жёсткости КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, и КЭ, работающего на изгиб и кручение, в местной и общей системах координат –  $6 \times 6$ , а порядок матрицы жёсткости балочного пространственного КЭ равен  $12 \times 12$ .

### 1.3. Преобразование координат

Приведенные в предыдущем разделе матрицы жёсткости балочных КЭ получены в местной системе координат  $XYZ$ , так как элементы матриц выражены в местной системе координат.

Преобразование к общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$  необходимо для формирования матрицы жёсткости конструкции и разрешающей системы уравнений равновесия задачи. Кроме этого, координаты узлов КЭ необходимо и удобнее определять в общей системе координат, а затем выполнять преобразование в местную систему координат.

Число строк матрицы  $[T_r]$  ортогонального преобразования координат КЭ равно числу степеней свободы его узлов в местной системе координат, а число столбцов – числу степеней свободы узлов в общей системе координат.

В общем случае для КЭ с различным количеством узлов матрица ортогонального преобразования координат КЭ  $[T_r]$  состоит из матриц  $[t]$ , число которых равно числу узлов КЭ, т. е.

$$[T_r] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix},$$

а матрица  $[t]$ , в свою очередь, состоит из матриц  $[\lambda]$  направляющих косинусов осей, элементами которой являются косинусы углов между осями  $XYZ$  местной системы координат и осями  $X^0 Y^0 Z^0$  общей системы координат:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Так как у стержневого КЭ два узла, то матрица ортогонального преобразования координат будет

$$[T_r] = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Если начало местной и общей систем координат совпадают, то координаты узлов стержня в системах координат связаны матрицей направляющих косинусов  $[\lambda]$  зависимостью:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{Bmatrix}.$$

Ниже приведены матрицы ортогонального преобразования координат  $[T_r]$  для КЭ в принятой правой системе координат.

### *КЭ плоской фермы*

КЭ используемый для расчёта плоской фермы с выбранными положительными направлениями и последовательностью узловых перемещений в общей системе координат представлен на рис. 1.8.



Рис. 1.8. КЭ плоской фермы

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ плоской фермы имеет размерность  $2 \times 4$ , так как число степеней свободы узлов КЭ в местной системе координат равно двум, а число степеней свободы узлов в общей системе координат равно четырем, т. е.

$$\{Z_r\} = [T_r] \{Z_r^0\}$$

или в соответствии с положительными направлениями узловых перемещений и их последовательностью элементы вектора  $\{Z_r\}$  узловых линейных перемещений  $\delta$  по направлению оси  $X$  местной системы координат и вектора  $\{Z_r^0\}$  узловых линейных перемещений по направлению осей  $X^0$  и  $Y^0$  общей системы координат связаны между собой следующей зависимостью:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{xj} \end{Bmatrix} = [T_r] \{Z_r^0\} = [T_r] \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \end{Bmatrix},$$

где  $i, j$  – соответственно начало и конец стержня.

На рис. 1.9. приведены местная и общая системы координат КЭ плоской фермы, где  $V_x$  – вектор единичной длины.

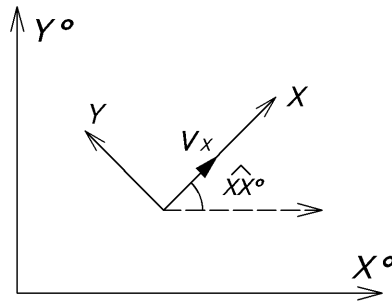


Рис. 1.9. Системы координат КЭ плоской фермы

Для КЭ плоской фермы у вектора  $V_x$  единичной длины два элемента, а также и у матрицы  $[\lambda]$  направляющих косинусов: косинусы углов между осями  $X$ - $X^0$  и  $X$ - $Y^0$ .

При этом

$$[t] = [\lambda]. \quad (1.13)$$

Матрица направляющих косинусов (для КЭ фермы  $[\lambda]$  и  $[t]$  – векторы) имеет вид:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где  $\lambda_{xx^0}$ ,  $\lambda_{xy^0}$  – соответственно косинусы углов между осями  $X-X^0$  и осями  $X-Y^0$ .

Элементы матрицы направляющих косинусов и, следовательно, матрицы  $[T_r]$  вычисляются следующим образом.

Ось стержня определяется вектором  $V_{ij}$  с двумя координатами узлов в общей системе координат:

$$V_{ij} = \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \end{Bmatrix}.$$

Направляющие косинусы оси  $X$  получим делением элементов вектора  $V_{ij}$  на его длину (нормирование), т. е. в виде элементов вектора  $V_x$  единичной длины, которые являются и элементами матрицы  $[\lambda]$  направляющих косинусов:

$$V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{ij}} \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \end{Bmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $\ell_{ij}$  – длина стержня:

$$\ell_{ij} = \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2}. \quad (1.16)$$

Тогда, согласно (1.12) и (1.33), матрица ортогонального преобразования координат КЭ плоской фермы вычисляется по формуле

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

### *КЭ пространственной фермы*

КЭ используемый для расчёта пространственной фермы с выбранными положительными направлениями узловых перемещений и их последовательностью в общей системе координат представлен на рис. 1.10.

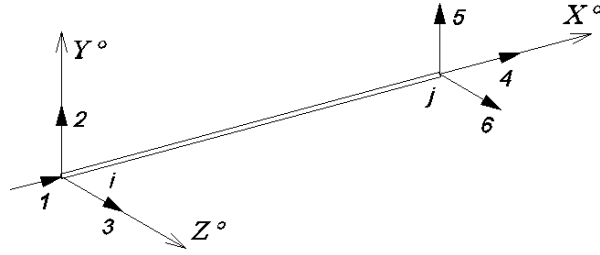


Рис. 1.10. КЭ пространственной фермы

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ пространственной фермы имеет размерность  $2 \times 6$ , так как число степеней свободы узлов КЭ в местной системе координат равно двум, а число степеней свободы узлов в общей системе координат равно шести.

В соответствии с положительными направлениями узловых перемещений КЭ и их последовательностью элементы вектора  $\{Z_r\}$  узловых линейных перемещений  $\delta$  по направлению оси  $X$  и вектора  $\{Z_r^0\}$  узловых линейных перемещений по направлению осей  $X^0$ ,  $Y^0$  и  $Z^0$  связаны зависимостью:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{xj} \end{Bmatrix} = [T_r] \{Z_r^0\} = [T_r] \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \delta_{zi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \\ \delta_{zj}^0 \end{Bmatrix},$$

На рис. 1.11 приведены местная и общая системы координат КЭ пространственной фермы.

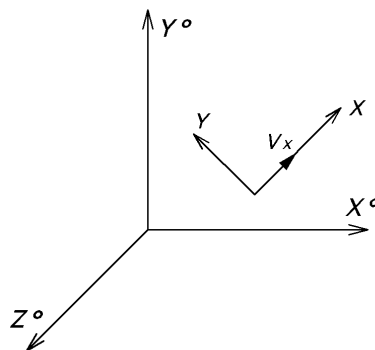


Рис. 1.11. Системы координат КЭ пространственной фермы

Очевидно, в этом случае в отличие от (1.12) матрица направляющих косинусов будет

$$[\lambda] = [\lambda_{xx^0} \quad \lambda_{xy^0} \quad \lambda_{xz^0}].$$

Ось стержня определяется вектором  $V_{ij}$  с тремя координатами узлов в общей системе координат:

$$V_{ij} = \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \\ z_j^0 - z_i^0 \end{Bmatrix}.$$

Тогда элементы вектора  $V_x$  единичной длины или направляющие косинусы оси  $X$  будут

$$V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ \lambda_{xz^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{ij}} \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \\ z_j^0 - z_i^0 \end{Bmatrix}, \quad (1.18)$$

где  $\ell_{ij}$  – длина стержня:

$$\ell_{ij} = \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2 + (z_j^0 - z_i^0)^2}. \quad (1.19)$$

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ пространственной фермы имеет вид

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

*КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб*

Балочный КЭ используемый для расчёта произвольной плоской стержневой системы с выбранными положительными направлениями узловых перемещений и сил представлен на рис. 1.12.

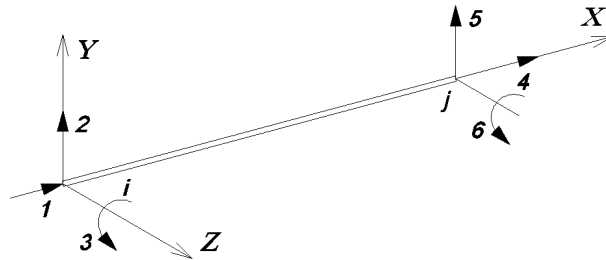


Рис. 1.12. КЭ плоской стержневой системы



В соответствии с принятыми положительными направлениями узловых перемещений КЭ и их последовательностью элементы вектора  $\{Z_r\}$  узловых линейных перемещений  $\delta$  по направлению осей  $X$ ,  $Y$  и углового перемещения  $\varphi$  относительно оси  $Z$  местной системы координат и вектора  $\{Z_r^0\}$  узловых линейных перемещений по направлению осей  $X^0$ ,  $Y^0$  и углового перемещения относительно оси  $Z^0$  общей системы координат связаны зависимостью:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = [T_r] \{Z_r^0\} = [T_r] \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \varphi_{zi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \\ \varphi_{zj}^0 \end{Bmatrix}.$$

В отличие от КЭ фермы, число степеней свободы узлов балочных КЭ в местной и в общей системах координат одинаковое. В связи с этим матрицы ортогонального преобразования координат балочных КЭ квадратные.

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, имеет порядок  $6 \times 6$ :

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & \lambda_{yz^0} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & \lambda_{yz^0} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Системы координат КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, приведены на рис. 1.13.

Как отмечалось, оси  $Y$  и  $Z$  являются главными осями инерции сечения стержня. Задача плоская, то, очевидно, координаты узлов начала и конца КЭ будут

$$z_i = z_j = 0.$$

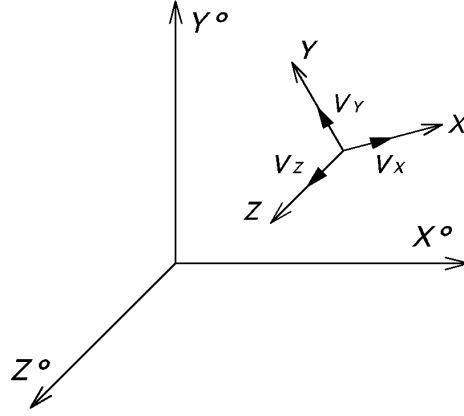


Рис. 1.13. Системы координат КЭ плоской стержневой системы

Так как оси  $Z$  и  $Z^0$  параллельные, то косинусы углов между осями  $X-Z^0$ ,  $Z-X^0$ ,  $Z-Y^0$ ,  $Y-Z^0$ ,  $Z-Z^0$  равны

$$\lambda_{xz^0} = \lambda_{zx^0} = \lambda_{zy^0} = \lambda_{yz^0} = 0, \quad \lambda_{zz^0} = 1.$$

Направляющие косинусы оси  $X$  (1.18) будут

$$V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ \lambda_{xz^0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{i-j}} \begin{Bmatrix} x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

а направляющие косинусы оси  $Z$ :

$$V_z = \begin{Bmatrix} \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \\ \lambda_{zz^0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Направляющие косинусы оси  $Y$  получаются как направляющие косинусы вектора, перпендикулярного одновременно к осям  $Z$  и  $X$ . Это направление оси  $Y$  в соответствии со свойствами векторного произведения можно определить как векторное произведение:

$$V_y = \begin{Bmatrix} \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \\ \lambda_{yz^0} \end{Bmatrix} = V_z \times V_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Выразим это векторное произведение через координаты сомножителей. Сомножители представим следующим образом:

$$V_z = \{0 \quad 0 \quad 1\}, \quad V_x = \{\lambda_{xx^0} \quad \lambda_{xy^0} \quad 0\}.$$

Для получения координат вектора  $V_y$  составим таблицу сомножителей

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & 0 \end{array}.$$

Закрыв в ней первый столбец, получим первую координату

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \lambda_{xy^0} & 0 \end{array} \right|,$$

где выражение, окаймленное вертикальными чертами, – определитель второго порядка.

Закрыв второй столбец и взяв оставшийся определитель с обратным знаком

$$-\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \lambda_{xx^0} & 0 \end{array} \right|,$$

находим вторую координату.

Закрыв третий столбец, получим третью координату (оставшийся определитель берется со своим знаком).

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \end{array} \right|.$$

Таким образом

$$V_y = V_z \times V_x = \left\{ \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \lambda_{xy^0} & 0 \end{array} \right|, -\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \lambda_{xx^0} & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \end{array} \right| \right\}.$$

Раскрыв определители второго порядка, получим

$$V_y = \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot 0 - \lambda_{xy^0} \cdot 1 \\ 1 \cdot \lambda_{xx^0} - 0 \cdot 0 \\ \lambda_{xy^0} \cdot 0 - 0 \cdot \lambda_{xx^0} \end{array} \right\}$$

или

$$V_y = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \\ \lambda_{yz^0} \end{array} \right\} = \frac{1}{\ell_{ij}} \left\{ \begin{array}{l} -(y_j^0 - y_i^0) \\ x_j^0 - x_i^0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

где  $\ell_{ij}$  – длина стержня, вычисляемая по формуле (1.16).

Окончательное выражение для матрицы ортогонального преобразования координат КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, будет

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

У балочного КЭ, работающего на изгиб и используемого для моделирования балки, единая матрица жёсткости, так как местная система координат совпадает с общей.

*Балочный КЭ, работающий на изгиб и кручение*

Балочный КЭ используемый для расчёта произвольной плоско-пространственной стержневой системы с выбранными положительными направлениями узловых перемещений и сил представлен на рис. 1.14.

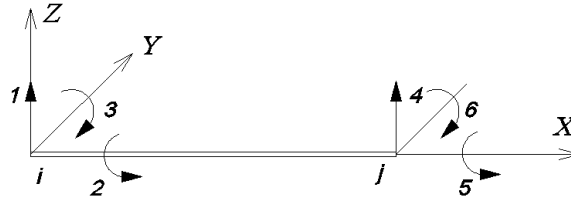


Рис. 1.14. КЭ плоско-пространственной стержневой системы

В соответствии с положительными направлениями узловых перемещений КЭ и их последовательностью элементы векторов  $\{Z_r\}$  и  $\{Z_r^0\}$  узловых связаны зависимостью:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{zi} \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \delta_{zj} \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix} = [T_r] \{Z_r^0\} = [T_r] \begin{Bmatrix} \delta_{zi}^0 \\ \varphi_{xi}^0 \\ \varphi_{yi}^0 \\ \delta_{zj}^0 \\ \varphi_{xj}^0 \\ \varphi_{yj}^0 \end{Bmatrix}.$$

Задача плоская и, следовательно, вычисление матрицы ортогонального преобразования координат совпадает с вычислениями предыдущей задачи.

Отличие только в последовательности узловых перемещений КЭ, что приводит к изменениям, приведенным ниже.

Направляющие косинусы оси  $Z$ :

$$V_z = \begin{Bmatrix} \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Направляющие косинусы оси  $X$ :

$$V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{i-j}} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_j^0 - x_i^0 \\ y_j^0 - y_i^0 \end{Bmatrix}.$$

Элементы вектора  $V_y$  единичной длины, состоящего из определителей второго порядка:

$$V_y = V_z \times V_x = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_{xz^0} & \lambda_{zy^0} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{xy^0} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{xx^0} \end{vmatrix} \right\}.$$

Раскрыв определители, получим направляющие косинусы оси  $Y$ :

$$V_y = \begin{Bmatrix} \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{i-j}} \begin{Bmatrix} 0 \\ -(y_j^0 - y_i^0) \\ x_j^0 - x_i^0 \end{Bmatrix}.$$

Окончательное выражение для матрицы ортогонального преобразования координат КЭ, работающего на изгиб и кручение, будет иметь следующий вид:

$$[T_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{xz^0} & \lambda_{xz^0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{yz^0} & \lambda_{yz^0} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

### *Балочный пространственный КЭ*

У КЭ используемого для расчёта произвольной пространственной стержневой системы в узлах по три линейных  $\delta$  и три угловых  $\varphi$  перемещения (рис. 1.15).

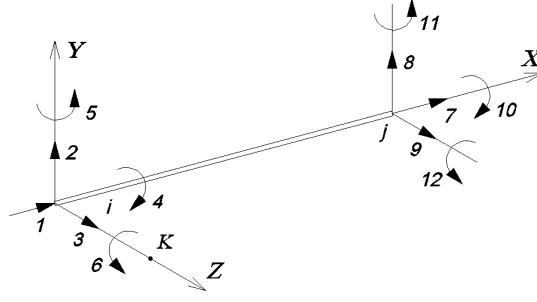


Рис. 1.15. Балочный пространственный КЭ

Элементы векторов узловых перемещений КЭ связаны зависимостью:

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \delta_{zi} \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \delta_{zj} \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = [T_r] \{Z_r^0\} = [T_r] \begin{Bmatrix} \delta_{xi}^0 \\ \delta_{yi}^0 \\ \delta_{zi}^0 \\ \varphi_{xi}^0 \\ \varphi_{yi}^0 \\ \varphi_{zi}^0 \\ \delta_{xj}^0 \\ \delta_{yj}^0 \\ \delta_{zj}^0 \\ \varphi_{xj}^0 \\ \varphi_{yj}^0 \\ \varphi_{zj}^0 \end{Bmatrix}.$$

В связи с этим матрица  $[T_r]$  ортогонального преобразования координат балочного пространственного КЭ имеет порядок  $12 \times 12$ , а матрица  $[t]$ , состоит из двух матриц  $[\lambda]$  направляющих косинусов, т. к. преобразования координат выполняется как для линейных, так и угловых перемещений:

$$[t] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} \end{bmatrix}, \quad [T_r] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

В общем случае в задаче расчёта произвольной пространственной стержневой системы при совмещении осей  $X$  и  $X^0$  оси  $Y$  и  $Z$  местных систем координат балочных пространственных КЭ могут не совпадать с осями  $Y^0$  и  $Z^0$  общей системы координат, как у плоских стержневых систем (рис. 1.13).

В связи с этим необходимо задавать для каждого КЭ стержневой системы положение одной из этих осей  $Y$  или  $Z$  местной системы координат КЭ относительно осей общей системы координат. С этой целью, кроме узлов  $i$  и  $j$  (начало и конец стержня), на оси  $Z$  местной системы координат КЭ вводится дополнительный узел  $k$  (рис. 1.15), который и позволяет определить положение этой оси.

На рис. 1.16 приведены системы координат балочного пространственного КЭ.

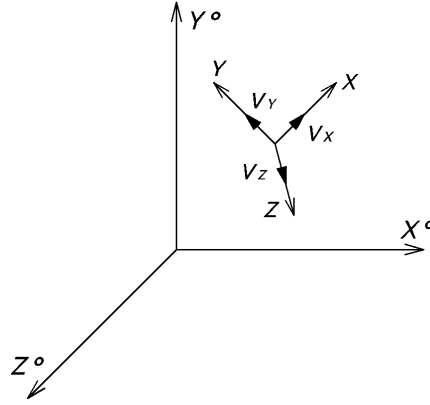


Рис. 1.16. Системы координат балочного пространственного КЭ

Направляющие косинусы оси  $X$  вычисляются по формуле (1.18), т. е.

$$V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ \lambda_{xz^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{ij}} \begin{Bmatrix} x_2^0 - x_1^0 \\ y_2^0 - y_1^0 \\ z_2^0 - z_1^0 \end{Bmatrix},$$

где  $\ell_{ij}$  – длина стержня, вычисляемая по формуле (1.19).

Элементы вектора  $V_z$  единичной длины или направляющие косинусы оси  $Z$  будут

$$V_z = \begin{Bmatrix} \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \\ \lambda_{zz^0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{r_{ik}} \begin{Bmatrix} x_k^0 - x_i^0 \\ y_k^0 - y_i^0 \\ z_k^0 - z_i^0 \end{Bmatrix}, \quad (1.25)$$

где  $r_{ik}$  – расстояние между узлами  $i$  и  $k$ , вычисляемое по формуле

$$r_{ik} = \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2 + (z_k^0 - z_i^0)^2}.$$

Тогда направление оси  $Y$  в соответствии со свойствами векторного произведения можно определить как векторное произведение:

$$V_y = V_z \times V_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \\ \lambda_{zz^0} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \\ \lambda_{xz^0} \end{Bmatrix}.$$

Выполнив векторное произведение, получим элементы вектора  $V_y$  единичной длины, состоящего из определителей второго порядка:

$$V_y = \left\{ \begin{vmatrix} \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \lambda_{zx^0} & \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{xx^0} & \lambda_{xz^0} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} \\ \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \end{vmatrix} \right\}.$$

Раскрыв определители, получим направляющие косинусы оси  $Y$ :

$$V_y = \begin{Bmatrix} \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \\ \lambda_{yz^0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{zy^0} \cdot \lambda_{xz^0} - \lambda_{xy^0} \cdot \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{zx^0} \cdot \lambda_{zz^0} - \lambda_{xx^0} \cdot \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{zx^0} \cdot \lambda_{xy^0} - \lambda_{xx^0} \cdot \lambda_{zy^0} \end{Bmatrix}.$$

В результате получены направляющие косинусы осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , что определяет матрицу  $[T_r]$  (1.24).

Возможен и другой подход к вычислению матрицы  $[T_r]$ . При этом используется вспомогательная система координат  $\phi\psi\eta$   $Z$ .

На рис. 1.17 приведены общая, местная и вспомогательная системы координат КЭ.

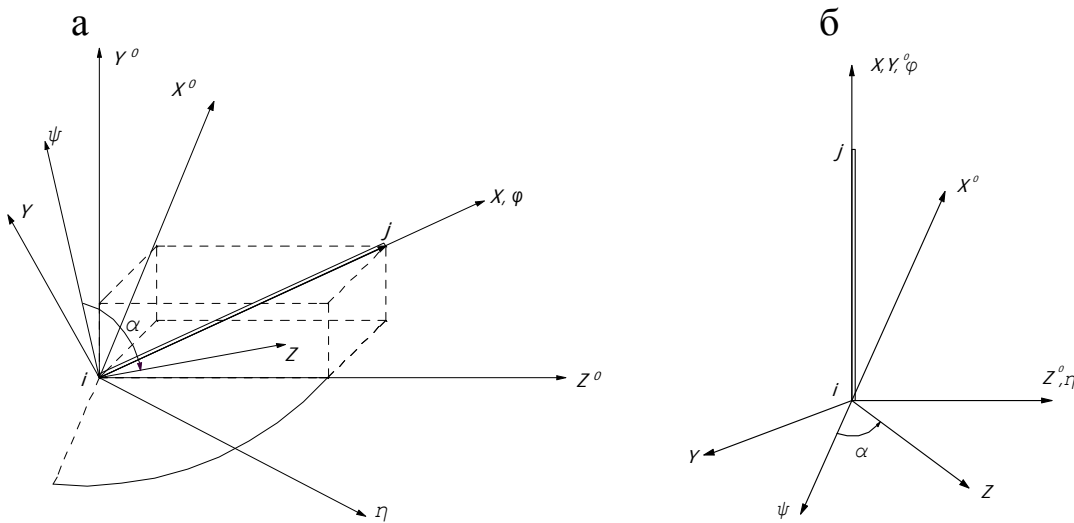


Рис. 1.17. Системы координат КЭ:

а – ось  $X$  стержня не совпадает с осью  $Y^0$ ;

б – ось  $X$  стержня совпадает с осью  $Y^0$



Угол  $\alpha$  определяет положение главной оси инерции  $Z$  местной системы координат  $XYZ$  КЭ по отношению к оси  $\psi$  – вспомогательной системы координат  $\phi\psi\eta$ . Причём ось  $\eta$  расположена в плоскости осей  $X^0$ - $Z^0$  общей системы координат.

На рис. 1.18 приведено прямоугольное сечение стержня и оси систем координат при повороте осей местной системы до совмещения оси  $X$  с осью  $X^0$  (рис. 1.17, а). Такое взаимное расположение систем координат КЭ более наглядно отображает угол  $\alpha$  положения главной оси инерции  $Z$ .

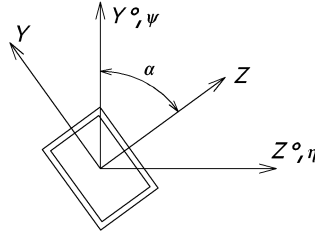


Рис. 1.18. К определению угла  $\alpha$  положения главной оси инерции  $Z$

В этом случае направляющие косинусы оси  $X$  вычисляются по формуле (1.18), а направляющие косинусы осей  $Y$  и  $Z$  – по следующим формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{yy^0} &= \left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \sin \alpha \right|, & \lambda_{zy^0} &= \left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right| \cos \alpha, \\ \lambda_{yx^0} &= \frac{\lambda_{xz^0} \lambda_{zy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|} - \frac{\lambda_{xx^0} \lambda_{xy^0} \lambda_{yy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|}, & \lambda_{yz^0} &= \frac{\lambda_{xy^0} \lambda_{yz^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|} - \frac{\lambda_{xy^0} \lambda_{xz^0} \lambda_{yy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|}, \\ \lambda_{zx^0} &= -\frac{\lambda_{xz^0} \lambda_{yy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|} - \frac{\lambda_{xx^0} \lambda_{xy^0} \lambda_{zy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|}, & \lambda_{zz^0} &= \frac{\lambda_{xx^0} \lambda_{yy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|} - \frac{\lambda_{xy^0} \lambda_{xz^0} \lambda_{zy^0}}{\left| \sqrt{1 - \lambda_{xy^0}^2} \right|}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Если  $\lambda_{xy^0} = \pm 1$  (рис. 1.17, б), то матрица  $[\lambda]$  направляющих косинусов имеет вид

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{xy^0} & 0 \\ -\lambda_{xy^0} |\sin \alpha| & 0 & -\lambda_{xy^0} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & 0 & |\sin \alpha| \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Таким образом, вычисления косинусов осей по формулам (1.18), (1.26) и матрицы  $[\lambda]$  направляющих косинусов (1.27), определяют матрицу

$[T_r]$  ортогонального преобразования координат балочного пространственного КЭ, путём использования вспомогательной системы координат.

#### 1.4. Прямой метод в форме перемещений

Процедура расчёта МКЭ в форме перемещений заключается в следующем. Конструкция, с учетом её геометрии, разбивается на некоторое количество КЭ, которые связаны между собой узловыми точками (узлами), расположенными на их границах. Расчётная схема задачи, смоделированная таким образом совокупностью КЭ, рассматривается как дискретная, нагруженная узловыми силами, которые статически эквивалентны действующим на элемент распределенным нагрузкам и граничным напряжениям.

Согласно принципам расчёта дискретных систем перемещения внутри каждого КЭ определяются через перемещения принадлежащих ему узлов. Для этого необходимо задать характер поля перемещений внутри элемента с помощью функций перемещений.

Функции перемещений позволяют аппроксимировать перемещения внутри элемента по известным узловым перемещениям. Аппроксимирующие функции перемещений должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворять требованиям непрерывности перемещений между смежными элементами. Выбор функций перемещений играет важную роль в МКЭ, так как напряжённое и деформированное состояния элемента определяются его узловыми перемещениями.

Полная энергия  $\Pi$  системы (конструкции) представляется как функция  $m$  неизвестных узловых перемещений  $z_i^0$ , где  $m$  – число степеней свободы всех узлов конструкции.

Согласно вариационному принципу Лагранжа возможно образование системы  $m$  линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_i^0} = 0.$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений равновесия задачи определяются искомые узловые перемещения.

При расчёте МКЭ кинематически неопределимых систем наибольшее распространение получила следующая матричная зависимость определения вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ :

$$\begin{aligned}\{S_{\kappa}^0\} &= [K_{\kappa}^0] [A] ([A]^T [K_{\kappa}^0] [A])^{-1} \{P^0\} = \\ &= [K_{\kappa}^0] [A] \{Z^0\},\end{aligned}\quad (1.28)$$

где  $\{S_{\kappa}^0\}$  – вектор внутренних узловых сил конструкции, состоящий из блоков (клеток) векторов внутренних узловых сил КЭ  $\{S_r^0\}$ ;

$[K_{\kappa}^0]$  – квазидиагональная матрица жёсткости конструкции, состоящая из блоков матриц жёсткости КЭ  $[K_r^0]$  в общей системе координат;

$[A]$  – матрица соответствий (связи узлов) конструкции, состоящая из блоков матриц соответствий КЭ  $[A_r]$ ;

$\{P^0\}$  – вектор узловой нагрузки конструкции;

$\{Z^0\}$  – вектор узловых перемещений конструкции.

Вектор узловой нагрузки в общей системе координат  $\{P^0\}$  формируется из сосредоточенных сил и моментов, приложенных к узлам сопряжения КЭ расчётной схемы конструкции, а также из узловых сил и моментов, которые статически эквивалентны действующим на КЭ распределённым нагрузкам.

Квазидиагональная матрица жёсткости конструкции  $[K_{\kappa}^0]$  представляет собой следующую матрицу:

$$[K_{\kappa}^0] = \begin{bmatrix} K_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_n^0 \end{bmatrix},$$

где  $n$  – число КЭ в расчётной схеме конструкции;

$[K_r^0]$  – матрица жёсткости  $r$ -го ( $1 \leq r \leq n$ ) КЭ в общей системе координат.

Как отмечалось, матрица  $[K_r^0]$  вычисляется с помощью конгруэнтного преобразования:

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r],$$

где  $[K_r]$  – матрица жёсткости  $r$ -го КЭ в местной системе координат  $XYZ$ ;  
 $[T_r]$  – матрица ортогонального преобразования координат  $r$ -го КЭ.

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ  $[T_r]$  состоит из матриц направляющих косинусов, т. е. из значений косинусов углов между осями местной и общей систем координат.

Матрица  $[T_r]$  связывает вектор узловых перемещений КЭ в местной системе координат  $\{Z_r\}$  с вектором узловых перемещений КЭ в общей системе координат  $\{Z_r^0\}$  следующим образом:

$$\{Z_r\} = [T_r] \{Z_r^0\}.$$

Матрица соответствий конструкции  $[A]$  содержит топологическую информацию, указывающую адрес, по которому должны быть распределены элементы матриц жёсткости  $[K_r^0]$  всех КЭ на поле матрицы  $[K^0]$  жёсткости конструкции:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

где  $[A_r]$  – матрица соответствий КЭ, число строк которой равно числу степеней свободы узлов КЭ, а число столбцов равно числу степеней свободы узлов расчётной схемы конструкции.

Матрица соответствий  $r$ -го элемента  $[A_r]$  – булева матрица (целочисленная, т. е. элементы матрицы принимают только два значения: 0 и 1), которой задается топологическая информация степеней свободы узлов  $r$ -го КЭ на поле матрицы жёсткости конструкции. Как отмечалось, строки матрицы – это номера степеней свободы узлов КЭ, а столбцы – это номера степеней свободы узлов конструкции. На пересечении соответствующих номеров строк и столбцов матрицы соответствий КЭ (конструкции) ставится единица, а остальные элементы матрицы нулевые.

Например, число степеней свободы  $n$  в расчётной схеме балки, тогда для балочного КЭ с двумя степенями свободы в каждом узле и с номерами

узлов в расчётной схеме конструкции 1, 3 матрица соответствий  $[A_r]$   $r$ -го КЭ формируется следующим образом:

$$[A_r] = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Номера степеней свободы конструкции} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Номера степеней свободы КЭ} \end{matrix}$$

Матрица жёсткости конструкции вычисляется по формуле

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A]. \quad (1.30)$$

Матрица жёсткости конструкции  $[K^0]$  содержит зависимые уравнения, определяющие зависимость нагрузки и реакций опор, что не позволяет выполнить решение системы уравнений равновесия задачи, т. е. обращение матрицы жёсткости конструкции. Чтобы обеспечить возможность решения системы уравнений, необходимо в матрице жёсткости  $[K^0]$  исключить зависимые уравнения или реализовать условия кинематического закрепления задачи: в виде связей, накладываемых на узловое перемещение и ограничивающих свободу перемещений задачи в пространстве (опоры), и получить, тем самым, матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия  $[K_*^0]$ . Различные способы реализации условий кинематического закрепления задачи подробно рассмотрены в § 4.2.3.

Таким образом, система разрешающих уравнений равновесия (линейных алгебраических уравнений) задачи может быть представлена в следующем виде:

$$[K_*^0] \{Z^0\} = \{P^0\}. \quad (1.31)$$

Решение системы уравнений позволяет определить вектор узловых перемещений конструкции

$$\{Z^0\} = [K_*^0]^{-1} \{P^0\}, \quad (1.32)$$

что позволяет определить и вектор  $\{S_\kappa^0\}$  внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат (1.28).

Основные блоки алгоритма МКЭ в форме метода перемещений и последовательность их выполнения приведены на рис. 1.19.

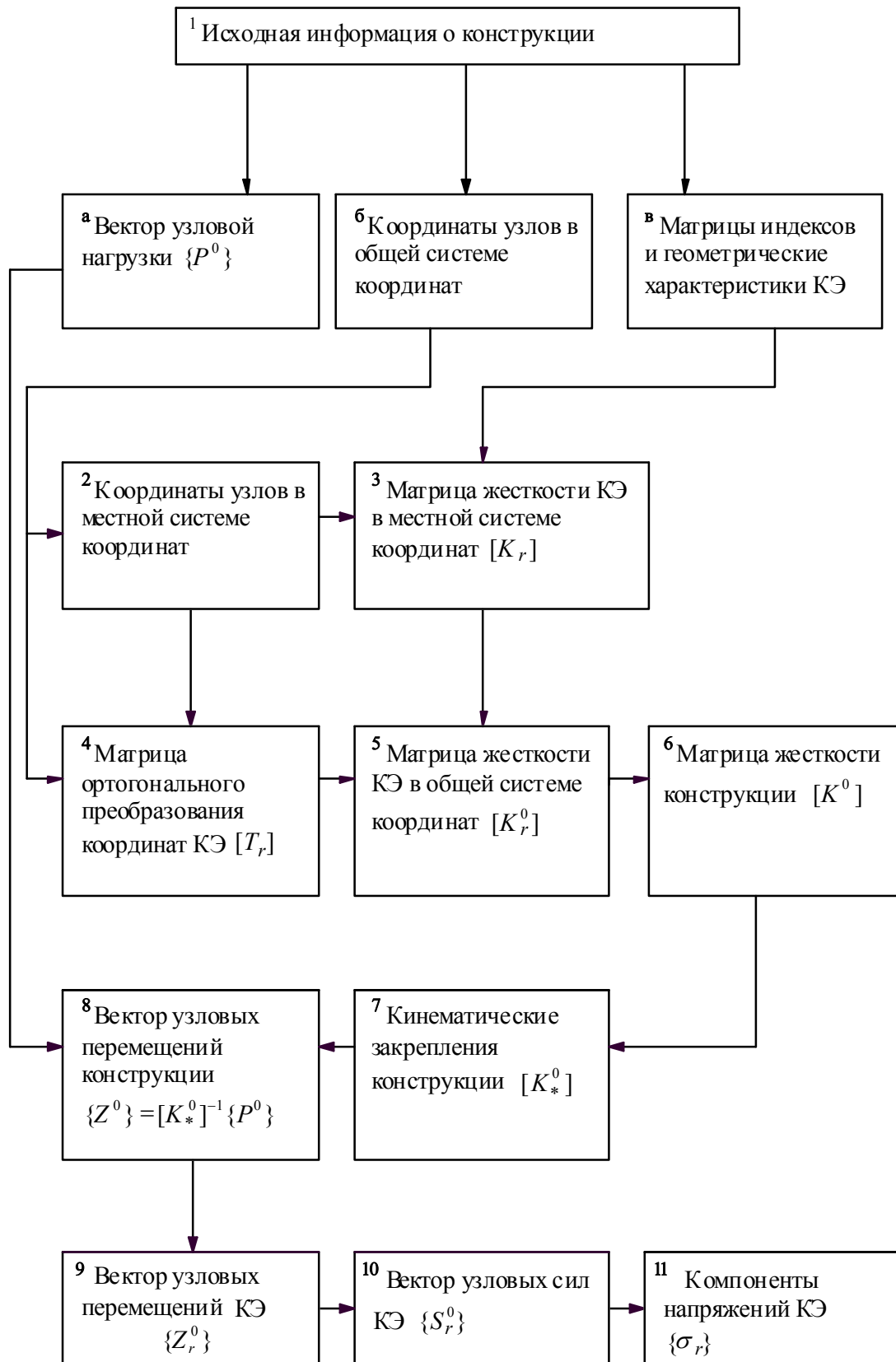


Рис. 1.19. Схема алгоритма прямого метода в форме перемещений

Содержание их состоит в следующем.

1. Образование расчётной схемы.
2. Вычисление матриц  $[K_r]$  жёсткости КЭ в местной системе координат  $XYZ$ .
3. Вычисление матриц  $[T_r]$  ортогонального преобразования КЭ.
4. Вычисление матриц  $[K_r^0]$  жёсткости КЭ в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ :

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

5. Формирование матрицы жёсткости конструкции:

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A].$$

6. Формирование разрешающей системы уравнений равновесия:

$$[K_*^0] \{Z^0\} = \{P^0\},$$

7. Решение системы уравнений, позволяющее определить вектор узловых перемещений конструкции в общей системе координат:

$$\{Z^0\} = [K_*^0]^{-1} \{P^0\}.$$

8. Вычисление вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат:

$$\{S_\kappa^0\} = [K_\kappa^0] [A] \{Z^0\},$$

где

$$\{S_\kappa^0\} = \begin{Bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \\ \vdots \\ S_n^0 \end{Bmatrix}.$$

9. Вычисление векторов внутренних узловых сил КЭ в местной системе координат:

$$\{S_r\} = [T_r] \{S_r^0\}. \quad (1.33)$$

10. Вычисление компонентов напряжений в узлах КЭ в местной системе координат.

Вычисление нормальных напряжений в сечениях КЭ, выполняется в начале и конце КЭ (начало – первый номер узла в матрице индексов, конец – второй номер узла в матрице индексов).

Согласно положительным направлениям продольных сил  $N$  и моментов  $M$  нормальные напряжения в балочном пространственном КЭ вычисляются по формуле

$$\sigma = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z},$$

где  $F$  – площадь сечения;

$W_y$  – момент сопротивления сечения относительно оси  $Y$ ;

$W_z$  – момент сопротивления сечения относительно оси  $Z$ .

Следует отметить, что в МКЭ имеют место следующие преобразования векторов узловых перемещений и узловых сил из местной системы координат  $XYZ$  в общую систему  $X^0 Y^0 Z^0$  соответственно (1.33) и наоборот:

$$\begin{aligned} \{Z_r^0\} &= [T_r]^T \{Z_r\}, \\ \{S_r^0\} &= [T_r]^T \{S_r\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Приведенная последовательность расчёта и матричный аппарат МКЭ носят стандартный характер для КЭ различного типа и предусматривают применение ЭВМ на всех этапах расчёта, т. е. от ввода в машину информации о геометрии конструкции, её физических свойствах и нагрузке до получения окончательных результатов напряжённо-деформированного состояния конструкции.

### 1.5. Система линейных алгебраических уравнений

Решение системы линейных алгебраических уравнений, как правило, выполняется методом исключения Гаусса, методом редкозаполненных матриц или итерационным методом Гаусса-Зейделя. Итерационные методы наиболее удобны и часто используются для решения нелинейных задач.



В МКЭ самым большим является массив коэффициентов при неизвестных разрешающей системы линейных алгебраических уравнений равновесия. Возможности алгоритма МКЭ увеличиваются за счёт сокращения требуемых объёмов хранимой промежуточной информации. Поэтому значительное внимание уделялось проблемам сокращённого, компактного представления матрицы коэффициентов, что позволяет эффективно использовать оперативную память ЭВМ.

Если не требуется явного выражения для элементов обратной матрицы  $[K_*^0]^{-1}$  (1.32), рекомендуется их не вычислять, так как почти всё, что можно сделать с помощью матрицы  $[K_*^0]^{-1}$ , может быть выполнено и без неё. При этом, если  $[K_*^0]$  – редко заполненная матрица, то обратная матрица будет требовать чрезмерного объёма памяти.

Одно из преимуществ метода исключения Гаусса в алгоритме МКЭ состоит в том, что нет необходимости в выборе главного элемента. Для матриц, которые не являются положительно определёнными, выбор главного элемента необходим, так как мы делим на эти элементы и должны быть уверены, что элементы образуемой матрицы не слишком большие: большие элементы приводят к большим ошибкам округления вычислений и в результате потери точности.

Матрица жёсткости конструкции  $[K^0]$  и, следовательно, матрица коэффициентов при неизвестных  $[K_*^0]$  системы линейных алгебраических уравнений равновесия МКЭ являются симметричными и положительно определёнными.

Пусть система  $N$  уравнений представлена в блочном виде [3]

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix},$$

где  $\{\delta\}$  – вектор неизвестных величин;

$\{P\}$  – вектор известных величин.

У матриц коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений следующие размерности:

$$\begin{aligned}
K_{11} & 1 \times 1, \\
\{K_{12}\} & 1 \times (N-1), \\
\{K_{21}\} & (N-1) \times 1, \\
[K_{22}] & (N-1) \times (N-1).
\end{aligned}$$

Метод исключения Гаусса позволяет уменьшить размерность матрицы  $[K]$  и получить матричное уравнение размерности  $N-1$  в виде

$$[K^*] \{\delta\} = \{P^*\},$$

где

$$\begin{aligned}
[K^*] &= \{K_{21}\} K_{11}^{-1} \{K_{12}\}, \\
\{P^*\} &= \{P_2\} - \{K_{21}\} K_{11}^{-1} P_1.
\end{aligned}$$

Разбивая точно так же на блоки матрицу  $[K^*]$ , этот приём можно повторить. При этом основной операцией будет вычисление следующего произведения

$$\{K_{21}\} K_{11}^{-1} \{K_{12}\}.$$

Так как  $K_{11}$  имеет размерность  $1 \times 1$ , количество операций пропорционально  $(N-1)^2$ . Когда размерность матрицы  $[K]$  будет сведена к  $1 \times 1$ , последнюю неизвестную  $\delta_n$  можно будет найти непосредственно.

Используя обратный ход, остальные неизвестные можно определить из уравнения

$$\delta_1 = K_{11}^{-1} P_1 - K_{11}^{-1} \{K_{12}\} \{\delta_2\}.$$

Описанная процедура представляет собой простейший прямой метод, при использовании которого все элементы матрицы хранятся в оперативной памяти и участвуют в вычислениях.

Используя свойство симметрии матриц жёсткости, можно сократить число операций почти вдвое, производя все действия только с частью матрицы, расположенной выше диагонали. При этом для решения необходимо выполнить около  $\frac{N^3}{6}$  операций.

Типичная матрица жёсткости конструкции содержит много нулей, в частности, на некотором расстоянии от диагонали находятся только нулевые члены.

Такая матрица называется ленточной, а расстояние от диагонального члена элемента до последнего ненулевого элемента этой же строки называется половиной ширины ленты. Ленточный характер этой матрицы можно продемонстрировать, записывая её в блочном виде, как показано ниже, где нулевая подматрица заменяет часть подматрицы  $K_{12}$  содержащую нули:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23}^T & K_{33} \end{bmatrix}.$$

В силу симметрии матрицы  $[K]$  следующие матрицы будут иметь размерности:

$$\begin{aligned} K_{11} & 1 \times 1, \\ \{K_{12}\} & 1 \times m, \\ [K_{22}] & m \times m, \\ [K_{23}] & m \times (N - 1 - m), \\ [K_{33}] & (N - 1 - m) \times (N - 1 - m). \end{aligned}$$

При исключении подматрицы  $K_{11}$  изменяется только  $K_{22}$ , так как нулевая подматрица не изменяет  $K_{23}$  и  $K_{33}$ .

Количество операций исключения пропорционально  $m^2$ , а общее количество операций – величине

$$\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n^2 \right]$$

или приблизительно

$$\frac{Nm_{max}^2}{2},$$

где  $m_{max}$  – максимальная величина половины ширины ленты.

На практике половина ширины ленты обычно меньше 1/10 размерности матрицы, и описанный способ использования свойства ленточности матрицы позволяет уменьшить число арифметических операций почти до 3% от числа выполняемых операций при использовании метода, не учитывающего ленточного характера матрицы.

### Контрольные вопросы.

1. Учитывается продольная деформация стержней при расчётах стержневых систем?
2. В чём заключается понятие жёсткий узел?
3. Какие оси координат используют в МКЭ?
4. Какая гипотеза применяется при расчёте стержневых систем?
5. Какие неизвестные в МКЭ?
6. Какие преобразования называются контраградиентными?
7. Какие преобразования называются конгруэнтными?
8. Какая стержневая система называется фермой?
9. Что является жёсткостью стержня при растяжении-сжатии?
10. Сколько степеней свободы в узле КЭ фермы в местной системе координат?
11. Чему равен порядок матрицы КЭ фермы в местной системе координат?
12. Чему равно число неизвестных постоянных  $\alpha$  в аппроксимирующей функции узловых перемещений КЭ?
13. Сколько степеней свободы в узле КЭ плоской фермы в общей системе координат?
14. Чему равен порядок матрицы жёсткости КЭ плоской фермы в общей системе координат?
15. Сколько степеней свободы в узле КЭ пространственной фермы в общей системе координат? Какие?
16. Чему равен порядок матрицы жёсткости КЭ пространственной фермы в общей системе координат?
17. Какие стержневые системы называются плоской, плоско-пространственной и пространственной рамами?
18. Чему равен порядок матриц жёсткости КЭ плоской, плоско-пространственной и пространственной рам?
19. В чём заключается сущность процесса конденсации при вычислении матрицы жёсткости КЭ с шарниром в узле?
20. Что является элементами матрицы ортогонального преобразования координат КЭ?
21. Из каких матриц формируется квазидиагональная матрица жёсткости конструкции?
22. Из чего состоит матрица соответствий конструкции?
23. В чём преимущество метода исключения Гаусса при решении разрешающей системы уравнений равновесия в алгоритме МКЭ.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

### 2.1. Математическая формулировка задачи устойчивости

В расчётах на устойчивость различают следующие два вида задач:

- потеря устойчивости рамы в Эйлеровском смысле (задача линейной теории устойчивости);
- потеря несущей способности сжатоизогнутой рамы (задача нелинейной теории устойчивости).

Благодаря изгибу продольные силы вызывают дополнительные перемещения, которые при больших значениях сил могут достигать значительной величины. Расчёт с учетом этих дополнительных факторов, который ведется по деформированной расчётной схеме рамы, делает задачу нелинейной и называется деформационным расчётом.

Для решения нелинейной задачи устойчивости используется следующее матричное уравнение в общей системе координат:

$$[K^0] \{Z^0\} + [G^0] \{Z^0\} = \{P^0\}, \quad (2.1)$$

где  $[K^0]$  – матрица жёсткости конструкции;

$[G^0]$  – матрица потенциала нагрузки конструкции;

$\{Z^0\}$  – вектор узловых перемещений конструкции.

При решении этого матричного уравнения сначала присваивают нули всем элементам матрицы  $[G^0]$  потенциала нагрузки конструкции, что приводит к задаче статики, т. е. к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K^0] \{Z^0\} = \{P^0\}.$$

В результате решения этой системы уравнений, полученный вектор  $\{Z^0\}_1$  перемещений подставляется в следующее уравнение:

$$[K^0] \{F^0\} = \{Z^0\}_1,$$

что позволяет получить вектор  $\{F^0\}$  на первой итерации, который используют в матрице  $[G^0]$  и тем самым рассматривается деформированная расчётная схема. В результате получают улучшенное решение для вектора

$\{Z^0\}_2$ . Итерации повторяются до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение.

Расчёт линейной задачи устойчивости производится по недеформированной расчётной схеме задачи. При этом заданные только продольные силы, направленные вдоль осей стержней, не вызывают поперечного изгиба стержней, т. е. не оказывают влияния на величины изгибающих моментов и поперечных сил. Условия, связанные с разрушением конструкции, включают нелинейную теорию потери устойчивости, однако линейная теория служит основой для решения задачи устойчивости и представляет интерес при проектировании большого числа конструкций.

Для численной реализации линейной задачи используется следующее матричное уравнение МКЭ в перемещениях [3, 4]:

$$([K^0] - [G^0]) \{Z^0\} = 0. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно узловых перемещений  $\{Z^0\}$ .

При решении системы уравнений заданная нагрузка приводится к одному параметру  $P$ , который выносится из матрицы потенциала нагрузки  $[G^0]$ , т. е.

$$([K^0] - P [G^0]) \{Z^0\} = 0. \quad (2.3)$$

Равенство возможно при некоторых значениях  $P$ , при которых следующий определитель матрицы обращается в ноль

$$\det ([K^0] - P [G^0]) = 0. \quad (2.4)$$

Так как этот определитель имеет порядок  $n$ , в общем случае существует  $n$  вещественных корней  $\{P\}$ , которые определяют узловые силы системы, а задача их нахождения представляет собой задачу о собственных значениях.

При нахождении собственных значений не прибегают к записи определителя в виде полинома, а решается частная задача уравнений собственных значений.

С этой целью выражение делится на  $P$  и умножается на обратную матрицу  $[K^0]^{-1}$ :

$$\left( \frac{1}{P} [K^0]^T [K^0] - [K^0]^T [G^0] \right) \{Z^0\} = 0$$

или

$$[K^0] [G^0] \{Z^0\} = \frac{1}{P} \{Z^0\}. \quad (2.5)$$

Введя обозначения:

$$\lambda = \frac{1}{P},$$

$$[H] = [K^0]^{-1} [G^0], \quad (2.6)$$

получим характеристические уравнения собственных значений:

$$[H] \{Z^0\} = \lambda \{Z^0\}, \quad (2.7)$$

где  $[H]$  – характеристическая матрица (квадратная матрица известных коэффициентов);

$\lambda$  – собственные числа (скалярная величина, соответствующая критической нагрузке).

Формирование матрицы потенциала нагрузки конструкции  $[G^0]$  в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$  выполняется так же, как и матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$ , т. е.

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A],$$

$$[G^0] = [A]^T [G_\kappa^0] [A],$$

где  $[G_\kappa^0]$  – квазидиагональная матрица потенциала нагрузки конструкции, состоящая из блоков матриц  $[G_r^0]$  потенциала нагрузки КЭ в общей системе координат:

$$[G_\kappa^0] = \begin{bmatrix} G_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_n^0 \end{bmatrix},$$

где  $n$  – число КЭ в расчётной схеме конструкции.

Матрица  $[G_r^0]$  потенциала нагрузки  $r$ -го КЭ в общей системе координат вычисляется по формуле, которая аналогична формуле вычисления матрицы  $[K_r^0]$  жёсткости КЭ, т. е.

$$[G_r^0] = [T_r]^T [G_r] [T_r],$$

где  $[G_r]$  – матрица потенциала нагрузки  $r$ -го КЭ в местной системе координат  $XYZ$ ;

Вычисление характеристической матрицы  $[H]$  непосредственно по выражению (2.6), т. е. путем вычисления обратной матрица жёсткости конструкции  $[K^0]^{-1}$  неэффективно. Как отмечалось, если не требуется явного выражения обратной матрицы, то рекомендуется её не вычислять.

Характеристическую матрицу  $[H]$  можно получить, решая методом исключения Гаусса систему линейных уравнений, у которой матрица  $[K^0]$  – матрица коэффициентов при неизвестных, а  $[G^0]$  – матрица свободных членов.

Следует отметить, что решение системы уравнений выполняется для всех  $N$  столбцов матрицы  $[G^0]$  потенциала нагрузки конструкции ( $N$  – порядок системы уравнений), что равносильно решению уравнений равновесия при статическом расчёте конструкции с несколькими вариантами её нагружения. При этом количество вариантов нагружения в процессе исключения не влияет на преобразования матрицы  $[K^0]$  в треугольную матрицу, а модифицирует только столбцы матрицы потенциала нагрузки конструкции  $[G^0]$ .

Чтобы обеспечить возможность решения системы уравнений, необходимо в матрице жёсткости  $[K^0]$  исключить зависимые уравнения, соответствующие условиям кинематического закрепления. В этом случае при определении собственных значений по уравнениям (2.7) характеристическая матрица  $[H]$  не содержит нулевых строк и столбцов. Это достигается путем исключения из матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$  и матрицы потенциала нагрузки конструкции  $[G^0]$  строк и столбцов, соответствующих условиям закрепления задачи. Тогда для определения собственных значений можно использовать практически все стандартные программы [7]. Однако такой подход требует изменения размера матрицы жёсткости конструкции, что нежелательно.

Обеспечить решение системы уравнений можно реализацией условий кинематического закрепления: в виде связей, накладываемых на узловые



перемещения и ограничивающих свободу перемещений задачи в пространстве, и получить, тем самым, матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия  $[K_*^0]$ .

Этот способ заключается в том, что размер матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$  не изменяется, а сама матрица модифицируется путем присваивания строкам и столбцам, соответствующим кинематическим закреплениям задачи, нулевых значений, а компоненту главной диагонали присваивается единица, т. е. модификация матрицы жёсткости аналогична модификации при статистическом расчёте. В результате получим матрицу  $[K_*^0]$  коэффициентов системы уравнений равновесия с порядком равным порядку матрицы жёсткости  $[K^0]$ . Кроме этого необходимо присвоить нулевые значения элементам строк и столбцов, соответствующим кинематическим закреплениям задачи, матрицы потенциала нагрузки конструкции  $[G^0]$ .

При определении собственных значений нулевые строки характеристической матрицы  $[H]$  не участвуют в итерационном процессе, что должно быть предусмотрено в соответствующей подпрограмме.

Если сформировать следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K_*^0] [H] = [G^0], \quad (2.8)$$

то решение этой системы уравнений методом исключения Гаусса и определяет характеристическую матрицу  $[H]$  согласно выражению (2.6).

Уравнения собственных значений (2.7) в общем случае имеют столько решений, т. е. собственных значений  $\lambda$  и соответствующих собственных векторов  $\{Z^0\}$ , сколько степеней свободы  $z_i$ .

В задаче устойчивости интересует только наибольшее собственное число, которое соответствует критической силе.

Наибольшее собственное число можно определить простым итерационным методом (последовательным приближением) [3]:

1) Задать некоторое значение вектора  $Z$ , которое в дальнейшем называется  $Z_{g1}$ . Поскольку собственный вектор характеризует некоторую соб-

ственную функцию системы, нам нужны только относительные значения компонент вектора  $Z$ . Поэтому можно считать, что одна из неизвестных (скажем,  $z_1$ ) всегда равна единице.

2) Вычислить  $AZ_{g1}$ .

3) Произведение  $AZ_{g1}$  представляет собой вектор, который можно записать в виде  $\lambda_{g2}Z_{g2}$ , где  $\lambda_{g2}$  – множитель, такой, что компонента  $z_1$  вектора  $Z_{g2}$  опять равна единице, а остальные переменные  $z_2, z_3, \dots, z_n$  принимают соответствующие значения.

4) Сравнить  $Z_{g2}$  с  $Z_{g1}$  или в общем случае  $Z_{gr}$  с  $Z_{g(r+1)}$ . Если они не отличаются (в пределах заданной точности) друг от друга, то полученное множество значений образует собственный вектор, а множитель представляет собой наибольшее собственное значение. В противном случае снова вернуться к пункту 4.

В результате наибольшим собственным значением становится последующее значение  $\lambda$ . После этого процесс итераций повторяется.

Условием окончания итерационного процесса являются следующие данные: максимальное число итераций и точность определения собственного числа (малая положительная величина). Варьируя в исходных данных значениями максимального числа итераций и точностью определения собственного числа можно получить желаемый результат.

Содержание основных блоков алгоритма МКЭ последовательность их выполнения в задаче устойчивости состоит в следующем.

1. Образование расчётной схемы.
2. Вычисление матриц  $[K_r]$  жёсткости КЭ в местной системе координат  $XYZ$ .
3. Вычисление матриц  $[G_r]$  потенциала нагрузки КЭ в местной системе координат.
4. Вычисление матриц  $[T_r]$  ортогонального преобразования КЭ.
5. Вычисление матриц  $[K_r^0]$  жёсткости КЭ в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ :

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

6. Вычисление матриц  $[G_r^0]$  потенциала нагрузки КЭ в общей системе координат:

$$[G_r^0] = [T_r]^T [G_r] [T_r].$$

7. Формирование матрицы жёсткости конструкции:

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A].$$

8. Формирование матрицы потенциала нагрузки конструкции:

$$[G^0] = [A]^T [G_\kappa^0] [A].$$

9. Формирование разрешающей системы уравнений равновесия:

$$[K_*^0] [H] = [G^0].$$

10. Решение разрешающей системы уравнений, позволяющее определить характеристическую матрицу:

$$[H] = [K_*^0]^{-1} [G^0].$$

11. Решение уравнений собственных значений:

$$[H] \{Z^0\} = \lambda \{Z^0\}.$$

## 2.2. Матрицы жёсткости и потенциала нагрузки конечных элементов

Для моделирования произвольной плоской рамы при расчёте на устойчивость используется балочный КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб, и его модификации. В отличие от §1.2 матрицу жёсткости и матрицу потенциала нагрузки получим характерным для конечно-элементной процедуры способом: используем энергетические соотношения при определении перемещений.

В соответствии с энергетическим методом выражение потенциальной энергии деформации сжато-изогнутого стержня будет [4]

$$\mathfrak{E} = \frac{EF}{2} \int_0^\ell (U')^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^\ell (V'')^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^\ell (V')^2 dx, \quad (2.9)$$

где  $V$  – прогиб стержня.

Первый интеграл этого выражения определяет потенциальную энергию стержня при продольной деформации, второй интеграл определяет

потенциальную энергию изгиба стержня, а третий интеграл учитывает влияние осевой сжимающей силы  $P$ , которая вызывает потерю устойчивости стержня.

Далее необходимо выбрать поле перемещений.

При растяжении-сжатии используется аппроксимирующая функция узловых перемещений  $U$  (1.5), а при изгибе –  $V$  (два независимых вида деформаций). Так как у КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, шесть степеней свободы в узлах (рис. 1.12), то и у поля перемещений, образованного из двух функций перемещений, будет шесть постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ .

Если задаться следующим полем линейных перемещений:

$$\begin{cases} U = \alpha_1 + \alpha_2 x, \\ V = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3, \end{cases} \quad (2.10)$$

то угол  $\varphi_z$  поворота сечения стержня – это производная прогиба  $V$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2. \quad (2.11)$$

Рис. 1.12, на котором изображён балочный КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб, поясняет принятые направления сил и моментов и соответствующие им перемещения. Основные предположения теории изгиба стержней приводят к тому, что наклон срединной поверхности стержня и угловое смещение в каждой точке совпадают. Поэтому в выражении

$$\varphi_z = \frac{\partial V}{\partial x}$$

значение производной положительное и равно положительному значению тангенса угла наклона нейтральной оси. Обусловлено это тем, что в плоскости  $XU$  вращение  $\varphi_z$  в положительном направлении вокруг оси  $Z$  (вращение против часовой стрелки) вызывает положительные прогибы  $V$  (рис. 1.12).

Эти перемещения можно выразить через неизвестные постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  в матричной форме

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} = [Q] \{\alpha\}, \quad (2.12)$$

где

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}, \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}.$$

Значения компонент вектора шести постоянных  $\{a\}$  находятся из системы уравнений, которые получаются в результате подстановки в (2.10) и (2.11) вместо  $x$  значений узловых координат начала ( $x_n = 0$ ) и конца ( $x_k = \ell$ ) КЭ и приравнивания перемещений  $\{f\}$  соответствующим перемещениям узлов  $\{Z_r\}$ , т. е.

$$\{Z_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\}, \quad (2.13)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix},$$

$\{Z_r\}$  – вектор узловых перемещений  $r$ -го КЭ.

Решая систему уравнений (2.13), получим постоянные вектора  $\{a\}$ :

$$\{a\} = [C]^{-1} \{Z_r\}. \quad (2.14)$$

Подставив в выражение (2.12) вектор  $\{a\}$ , получим

$$\{f\} = [Q] [C]^{-1} \{Z_r\} = [B] \{Z_r\}, \quad (2.15)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N'_2 & N'_3 & 0 & N'_5 & N'_6 \end{bmatrix},$$

$N_1 - N_6$  – функции формы поля перемещений:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{\ell}; & N_4 &= \frac{x}{\ell}; & N_2 &= 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}; \\ N_3 &= x - \frac{2x}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}; & N_5 &= \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}; & N_6 &= -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия сжато изогнутого стержня (2.9) выражается через функции формы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{EF}{2} \int_0^\ell (N'_1 z_1 + N'_4 z_4)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^\ell (N''_2 z_2 + N''_3 z_3 + N''_5 z_5 + N''_6 z_6)^2 dx - \\ &- \frac{P}{2} \int_0^\ell (N'_2 z_2 + N'_3 z_3 + N'_5 z_5 + N'_6 z_6)^2 dx. \end{aligned}$$

В соответствии с принципом минимума потенциальной энергии:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_i} = ([K_r] - P [G_r]) \{Z_r\}, \quad (2.16)$$

где  $[K_r]$ ,  $[G_r]$  – соответственно матрица жёсткости и матрица потенциала нагрузки КЭ.

Производная по  $z_1$  в выражении (2.16) определяет первую строку матрицы жёсткости  $[K_r]$  (табл. 1.1) и матрицы  $[G_r]$  потенциала нагрузки КЭ. Производная по  $z_2$  определяет вторую строку и т. д.

Матрица  $[G_r]$  потенциала нагрузки КЭ:

$$[G_r] = P \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & \\ 0 & 0,1 & \frac{2\ell}{15} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\frac{6}{5\ell} & -0,1 & 0 & \frac{6}{5\ell} & \\ 0 & 0,1 & -\frac{\ell}{30} & 0 & -0,1 & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix},$$

где  $P$  – коэффициент осевой силы.

Аналогично можно получить в явном виде матрицы жёсткости и потенциала нагрузки для КЭ с шарниром в начале и конце стержня. Очевидно, в этом случае соответствующая строка в векторе узловых перемещений  $\{Z_r\}$  и в матрице  $[C]$  принимают нулевые значения.

Функции формы для КЭ с шарниром по углу поворота сечения в начале стержня:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{\ell}; & N_4 &= \frac{x}{\ell}; & N_2 &= 1 - \frac{3x^2}{2\ell} + \frac{x^3}{2\ell^3}; \\ N_3 &= 0; & N_5 &= \frac{3x}{2\ell} - \frac{x^3}{2\ell^3}; & N_6 &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\ell^2}, \end{aligned}$$

а для КЭ с шарниром в конце стержня:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{\ell}; & N_4 &= \frac{x}{\ell}; & N_2 &= 1 - \frac{3x^2}{2\ell^2} + \frac{x^3}{2\ell^3}; \\ N_3 &= x - \frac{3x^2}{2\ell} + \frac{x^3}{2\ell^2}; & N_5 &= 0; & N_6 &= \frac{3x^2}{2\ell^2} + \frac{x^3}{2\ell^3}. \end{aligned}$$

Полученные таким образом матрицы потенциала нагрузки КЭ с шарнирами по углу поворота сечения приведены ниже.

Матрица потенциала нагрузки КЭ с шарниром в начале стержня:

$$[G_r] = P \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\frac{6}{5\ell} & 0 & 0 & \frac{6}{5\ell} & \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{\ell}{5} \end{bmatrix}.$$

Матрица потенциала нагрузки КЭ с шарниром в конце стержня:

$$[G_r] = P \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{\ell}{5} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5\ell} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В матрицы потенциала нагрузки КЭ с шарнирами введены фиктивные степени свободы, соответственно 3-я и 6-я (нулевые строки и столбцы). Такой подход упрощает формирование матрицы  $[G^0]$  потенциала нагрузки конструкции при реализации на ЭВМ, т. к. во всех узлах КЭ одинаковое число степеней свободы, равное трем.

Если рассмотреть изгиб стержня в плоскости  $XZ$  (рис. 1.15), то в этом случае отличие только в том, что вращение в положительном направлении вокруг оси  $Y$  вызывает отрицательные прогибы  $V$ .

В связи с этим в выражении угла поворота  $\varphi_y$  сечения относительно оси  $Y$

$$\varphi_y = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

значение производной прогиба стержня отрицательное.

В результате могут быть получены матрицы жёсткости (табл. 1.4) и потенциала нагрузки балочного пространственного КЭ.

Матрица потенциала нагрузки  $[G_r]$  балочного пространственного КЭ:

$$[G_r] = P \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -0,1 & 0 & \frac{2\ell}{15} & & & & & & & & \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\ell}{15} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -\frac{6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5\ell} & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5\ell} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -0,1 & 0 & -\frac{\ell}{30} & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & \frac{2\ell}{15} & & \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{30} & 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\ell}{15} & \end{bmatrix}.$$



В отличие от (2.10) в работе [4] для КЭ принимается следующая функция перемещений:

$$\begin{cases} U = \alpha_1 + \alpha_2 x, \\ V = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 \cos \frac{\pi x}{\ell} + \alpha_6 \sin \frac{\pi x}{\ell}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Эта функция перемещений в ряде случаев дает более точные значения критической силы.

Матрица жёсткости  $[K_r]$  и потенциала нагрузки  $[G_r]$  КЭ, полученные с использованием функции перемещений (2.17), будут

$$[K_r] = \frac{\pi^2 EI}{8\ell} \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{2\ell} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{2\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\ell} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} & 0 & \frac{1}{2\ell} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \\ -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{1}{2\ell} & 0 & \frac{1}{\ell^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\ell} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} & 0 & -\frac{1}{2\ell} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \end{bmatrix},$$

$$[G_r] = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{8\ell} & (\frac{\pi^2}{4} - 1)\frac{\ell}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & (\frac{\pi^2}{4} - 1)\frac{\ell}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{8\ell} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & 0 & \frac{\pi^2}{8\ell} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & (\frac{\pi^2}{4} - 3)\frac{\ell}{8} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & (\frac{\pi^2}{4} - 1)\frac{\ell}{8} \end{bmatrix}.$$

Матрицы потенциала нагрузки КЭ с шарниром в начале и конце стержня с использованием функции перемещений (2.17) могут быть получены в соответствии с преобразованиями, рассмотренными выше.

Очевидно, у стержня, не загруженного осевой силой, коэффициент осевой силы равен нулю ( $P=0$ ) и нулевая матрица потенциала нагрузки.

### Контрольные вопросы.

1. Какие виды задач различают в расчётах на устойчивость?
2. По какой расчётной схеме выполняется расчёт линейной задачи устойчивости?
3. Как определяется знак углового перемещения?
4. Сколько функций формы у поля перемещений сжато-изогнутого стержня?
5. С помощью какого преобразования вычисляется матрица потенциала нагрузки КЭ в общей системе координат?
6. Из каких матриц формируется квазидиагональная матрица потенциала нагрузки конструкции?
7. Есть ли различие в формировании матрицы потенциала нагрузки конструкции от формирования матрицы жёсткости конструкции?
8. Какая сила называется критической силой?
9. В чем отличие матрицы  $[K^0]$  жёсткости конструкции от матрицы  $[K_*^0]$  коэффициентов разрешающей системы уравнений?
10. Каким методом выполняется решение разрешающей системы уравнений, позволяющее определить характеристическую матрицу?
11. Каким методом рекомендуется решать уравнения собственных значений для вычисления наибольшего собственного числа в задаче устойчивости?
12. При определении собственных значений нулевые строки характеристической матрицы не участвуют в итерационном процессе,
13. Почему в рассматриваемом алгоритме нельзя использовать стандартные программы определения собственных значений?
14. Какое собственное число соответствует критической силе в задаче устойчивости?
15. Что является условием окончания итерационного процесса при вычислении критической силы?
16. Какая величина определяет точность вычисления собственного числа?
17. Чему равен порядок матрицы потенциала нагрузки КЭ плоской рамы?
18. Сколько постоянных  $\alpha$  у поля перемещений КЭ плоской рамы?
19. Из скольких функций перемещений образовано поле перемещений КЭ плоской рамы?
20. Можно использовать процесс конденсации при вычислении матрицы потенциала нагрузки КЭ с шарниром в узле?

### 3. ДИНАМИКА

#### 3.1. Математическая формулировка задач динамики

##### *Свободные колебания*

Матричное уравнение метода конечных элементов в перемещениях задачи свободных колебаний имеет вид [3, 4]:

$$([K^0] - \varphi^2 [M^0]) \{Z^0\} = 0, \quad (3.1)$$

где  $[K^0]$  – матрица жёсткости конструкции в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ ;

$[M^0]$  – матрица масс конструкции;

$\{Z^0\}$  – вектор амплитудных значений узловых перемещений конструкции.

Выражение (3.1) задачи свободных колебаний представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно узловых перемещений  $\{Z^0\}$ . Эта система уравнений имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю:

$$\det ([K^0] - \varphi^2 [M^0]) = 0. \quad (3.2)$$

Значения  $\varphi$ , удовлетворяющие уравнению (3.2), представляют собой собственные (свободные) частоты колебаний системы. При нахождении собственных значений не прибегают к записи определителя в виде полинома, а решается частная задача уравнений собственных значений. Собственные числа и собственные векторы определяются итерационным методом.

С этой целью выражение (3.2) делится на  $\varphi^2$  и умножается на обратную матрицу  $[K^0]^{-1}$ :

$$(1/\varphi^2 [K^0]^{-1} [K^0] - [K^0]^{-1} [M^0]) \{Z^0\} = 0$$

или

$$[K^0]^{-1} [M^0] \{Z^0\} = 1/\varphi^2 \{Z^0\}.$$

Введя обозначения

$$\lambda = 1/\varphi^2,$$

$$[H] = [K^0]^{-1} [M^0],$$

получим уравнения собственных значений:

$$[H] \{Z^0\} = \lambda \{Z^0\}, \quad (3.3)$$

где  $[H]$  – характеристическая матрица;

$\lambda$  – собственные числа (соответствующие собственным частотам колебаний).

Формирование матрицы  $[M^0]$  масс конструкции в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$  выполняется так же, как и матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$ , т. е.

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa] [A],$$

$$[M^0] = [A]^T [M_\kappa] [A],$$

где  $[M_\kappa^0]$  – квазидиагональная матрица масс конструкции, состоящая из блоков матриц масс КЭ  $[M_r^0]$  в общей системе координат:

$$[M_\kappa^0] = \begin{bmatrix} M_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_n^0 \end{bmatrix},$$

где  $n$  – число КЭ в расчётной схеме конструкции;

$[M_r^0]$  – матрица масс  $r$ -го КЭ в общей системе координат, которая вычисляется по формуле

$$[M_r^0] = [T_r]^T [M_r] [T_r],$$

где  $[M_r]$  – матрица масс  $r$ -го КЭ в местной системе координат  $XYZ$ ;

$[T_r]$  – матрица ортогонального преобразования координат  $r$ -го КЭ (§ 1.3).

Как видно, с математической стороны задачи устойчивости и свободных колебаний полностью совпадают, т. е. матричный аппарат МКЭ носит стандартный характер для этих задач.

Если в задаче устойчивости стержневой системы оперируют с матрицами потенциала нагрузки, то в задаче свободных колебаний – с матрицами масс.

Характеристическую матрицу  $[H]$  получают, решая методом исключения Гаусса систему линейных уравнений, у которой матрица  $[K^0]$  – матрица коэффициентов при неизвестных, а  $[M^0]$  – матрица свободных членов.

Реализация граничных условий кинематического закрепления конструкции в матрице  $[K_*^0]$  в обеих задачах полностью совпадает.

Решение уравнений (3.3) позволяет определить собственные числа  $\lambda$  и, следовательно, собственные частоты  $\varphi$  колебаний системы, а также вектор  $\{Z^0\}$  амплитудных значений узловых перемещений конструкции (собственный вектор).

Содержание основных блоков алгоритма МКЭ последовательность их выполнения в задаче свободных колебаний состоит в следующем.

1. Образование расчётной схемы.
2. Вычисление матриц  $[K_r]$  жёсткости КЭ в местной системе координат  $XYZ$ .
3. Вычисление матриц  $[M_r]$  масс КЭ в местной системе координат.
4. Вычисление матриц  $[T_r]$  ортогонального преобразования КЭ.
5. Вычисление матриц  $[K_r^0]$  жёсткости КЭ в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ :

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

6. Вычисление матриц  $[M_r^0]$  масс КЭ в общей системе координат:

$$[M_r^0] = [T_r]^T [M_r] [T_r].$$

7. Формирование матрицы жёсткости конструкции:

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A].$$

8. Формирование матрицы масс конструкции:

$$[M^0] = [A]^T [M_\kappa^0] [A].$$

9. Формирование разрешающей системы линейных уравнений равновесия:

$$[K_*^0] [H] = [M^0].$$

10. Решение разрешающей системы уравнений, позволяющее определить характеристическую матрицу:

$$[H] = [K_*^0]^{-1} [M^0].$$

11. Решение уравнений собственных значений:

$$[H] \{Z^0\} = \lambda \{Z^0\}.$$

Каждой частоте соответствует своя форма колебаний. Совокупность частот собственных колебаний составляют спектр частот. Наименьшая частота собственных колебаний называется частотой основного тона. Следующая частота – первый обертоном.

### *Вынужденные колебания*

Матричное уравнение движения упругой системы в конечно-элементной постановке имеет вид:

$$[M^0] \{\ddot{Z}^0\} + ([K^0] \{Z^0\} = \{P^0\}, \quad (3.4)$$

где  $\{\ddot{Z}^0\}$  – вектор ускорений узлов конструкции;

$\{P^0\}$  – вектор узловых динамических сил.

Для гармонических колебаний имеем

$$\begin{aligned} \{P^0\} &= P_0 \sin \omega t, \\ \{Z^0\} &= Z_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставив выражение (3.5) в (3.4), получим систему линейных алгебраических уравнений равновесия задачи вынужденных колебаний:

$$([K^0] - \omega^2 [M^0]) \{Z^0\} = \{P^0\}, \quad (3.6)$$

где  $\omega$  – частота возмущающей силы.

Вектор  $\{Z^0\}$  амплитудных значений узловых перемещений конструкции определяется решением системы линейных алгебраических уравнений задачи вынужденных колебаний (3.6):

$$\{Z^0\} = ([K^0] - \omega^2 [M^0])^{-1} \{P^0\}.$$

Сосредоточенные массы учитываются путем их суммирования с соответствующими элементами матрицы масс конструкции, расположенными на главной диагонали.

Узловые силы  $\{S_r^0\}$   $r$ -го КЭ определяются по формуле

$$\{S_r^0\} = ([K_r^0] - \omega^2 [M_r^0]) \{Z_r^0\},$$

где  $[K_r^0]$  – матрица жёсткости КЭ в общей системе координат (§1.4);

$\{Z_r^0\}$  – вектор амплитудных значений узловых перемещений КЭ.

Очевидно, в этом случае узловые силы вектора  $\{S_r\}$  КЭ в местной системе координат определяются по формуле аналогичной при статическом расчёте:

$$\{S_r\} = [T_r] \{S_r^0\}.$$

В конечно-элементной постановке матричная зависимость определения вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат в задаче вынужденных колебаний будет

$$\{S_\kappa^0\} = [K_\kappa^0] [A] ([A]^T ([K_\kappa^0] - \omega^2 [M_\kappa^0]) [A])^{-1} \{P^0\},$$

где  $[M_\kappa^0]$  – квазидиагональная матрица масс конструкции, состоящая из блоков матриц масс КЭ  $[M_r^0]$  в общей системе координат.

Выражение вектора внутренних узловых сил конструкции можно представить в виде:

$$\{S_\kappa^0\} = [K_\kappa^0] [A] [K_m^0]^{-1} \{P^0\} = [K_\kappa^0] [A] \{Z^0\}, \quad (3.7)$$

где  $[K_m^0]$  – следующая матрица:

$$[K_m^0] = [A]^T ([K_\kappa^0] - \omega^2 [M_\kappa^0]) [A]. \quad (3.8)$$

Согласно (3.7) формирование матрицы  $[M^0]$  масс конструкции в общей системе координат выполняется так же, как и матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$ , т. е.

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A],$$

$$[M^0] = [A]^T [M_\kappa^0] [A],$$

Чтобы обеспечить возможность решения системы линейных алгебраических уравнений задачи вынужденных колебаний, т. е. возможность получения матрицы  $[K_m^0]^{-1}$ , необходимо реализовать условия кинематических закреплений задачи в этой матрице.

Реализация условий закрепления задачи, т. е. преобразование матрицы  $[K_m^0]$  в матрицу коэффициентов системы уравнений  $[K_{m*}^0]$ , выполняется аналогично преобразованию матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$  при

статистическом расчёте в матрицу  $[K_*^0]$  (§1.4). При этом система линейных алгебраических уравнений равновесия вынужденных колебаний системы будет

$$[K_{*}^0] \{Z^0\} = \{P^0\}. \quad (3.9)$$

Содержание основных блоков алгоритма расчета на вынужденные колебания состоит в следующем.

1. Образование расчётной схемы.
2. Вычисление матриц жёсткости  $[K_r]$  и матриц масс  $[M_r]$  КЭ в местной системе координат  $XYZ$ .
3. Вычисление матриц  $[T_r]$  ортогонального преобразования КЭ.
4. Вычисление матриц жёсткости  $[K_r^0]$  и матриц масс  $[M_r^0]$  КЭ в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$ :

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r],$$

$$[M_r^0] = [T_r]^T [M_r] [T_r].$$

5. Формирование матрицы жёсткости  $[K^0]$  и матрицы масс  $[M^0]$  конструкции:

$$[K^0] = [A]^T [K_{\kappa}^0] [A],$$

$$[M^0] = [A]^T [M_{\kappa}^0] [A].$$

6. Формирование разрешающей системы уравнений равновесия задачи вынужденных колебаний:

$$[K_{*}^0] \{Z^0\} = \{P^0\}.$$

7. Решение системы уравнений, позволяющее определить вектор амплитудных значений узловых перемещений конструкции в общей системе координат:

$$\{Z^0\} = [K_{*}^0]^{-1} \{P^0\}.$$

8. Вычисление вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат:

$$\{S_{\kappa}^0\} = [K_{\kappa}^0] [A] \{Z^0\},$$

где



$$\{S_{\kappa}^0\} = \begin{Bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \\ \vdots \\ S_n^0 \end{Bmatrix}.$$

9. Вычисление векторов внутренних узловых сил КЭ в местной системе координат:

$$\{S_r\} = [T_r] \{S_r^0\}.$$

10. Вычисление компонентов нормальных напряжений в узлах КЭ.

Из уравнения вынужденных колебаний системы (3.6) следует ряд частных случаев. Например, приравняв частоту  $\omega$  возмущающей силы нулю, выполняется статический расчёт, приравняв нулю погонную массу  $\mu$  КЭ, получим расчёт на вынужденные колебания системы только с учетом сосредоточенных масс.

### 3.2. Матрицы масс конечных элементов

Для моделирования произвольной плоской рамы при решении задач динамики используется КЭ, работающий на растяжение-сжатие и изгиб, и его модификации. Матрица масс КЭ может быть получена из выражения кинетической энергии, которая для изогнутого стержня с учетом продольных деформаций имеет вид [4]:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \mu U^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \mu V^2 dx, \quad (3.10)$$

где  $\mu$  – погонная масса стержня:

$$\mu = \rho F,$$

$\rho$  – плотность массы материала стержня.

Первый интеграл выражения определяет кинетическую энергию стержня при продольной деформации, второй – кинетическую энергию изгиба стержня. Если использовать поле линейных перемещений (2.12) и преобразования, рассмотренные в § 2.2, то кинетическая энергия будет

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \mu (N_1 z_1 + N_4 z_4)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \mu (N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_5 z_5 + N_6 z_6)^2 dx. \quad (3.11)$$

В соответствии с принципом минимума кинетической энергии получим выражение, которое определяет матрицу масс КЭ:

$$\frac{dK}{dz_i} = [M_r] \{Z_r\},$$

Производная по  $z_1$  в выражении (3.11) определяет первую строку матрицы масс  $[M_r]$ , а производная по  $z_2$  – вторую строку и т. д.

Таким образом, матрица масс КЭ, работающего на растяжение-сжатие:

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & \frac{\ell}{6} \\ \frac{\ell}{6} & \frac{\ell}{3} \end{bmatrix}.$$

Матрица масс КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб (рис. 1.12):

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & \frac{\ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\ell}{35} & \frac{\ell^2}{210} & 0 & \frac{9\ell}{70} & -\frac{13\ell^2}{420} \\ 0 & \frac{11\ell^2}{210} & \frac{\ell^2}{105} & 0 & \frac{13\ell^2}{420} & -\frac{\ell^3}{140} \\ \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\ell}{70} & \frac{13\ell^2}{420} & 0 & \frac{35}{210} & -\frac{\ell^3}{105} \\ 0 & -\frac{13\ell^2}{420} & -\frac{\ell^3}{140} & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно получить матрицы масс для КЭ с шарниром (соответствующая строка в векторе  $\{Z_r\}$  и в матрице  $[C]$  принимают нулевые значения) (2.15), а также КЭ, работающего на изгиб и кручение, и балочного пространственного КЭ.

Так же, как и в матрицах потенциала нагрузки КЭ с шарниром по углу поворота сечения в начале стержня или в конце в матрицах масс КЭ с шарниром по углу поворота сечения соответствующим строкам и столбцам присваиваются нулевые значения.

Матрица масс КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, с шарниром по углу поворота сечения в начале стержня:

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & \frac{\ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{33\ell}{140} & 0 & 0 & \frac{17\ell}{35} & -\frac{6\ell^2}{70} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{39\ell}{280} & 0 & 0 & \frac{17\ell}{35} & -\frac{6\ell^2}{70} \\ 0 & -\frac{11\ell^2}{280} & 0 & 0 & -\frac{6\ell^2}{70} & \frac{2\ell^3}{105} \end{bmatrix}.$$

Матрица масс КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, с шарниром по углу поворота сечения в конце стержня:

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & \frac{\ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17\ell}{35} & \frac{2\ell^3}{105} & 0 & \frac{33\ell}{140} & 0 \\ 0 & \frac{3\ell^2}{35} & \frac{2\ell^3}{105} & 0 & \frac{11\ell^2}{280} & 0 \\ \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{39\ell}{280} & \frac{11\ell^2}{280} & 0 & \frac{33\ell}{140} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс КЭ, работающего на изгиб и кручение (рис. 1.14):

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{13\ell}{35} & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & \frac{9\ell}{70} & 0 & \frac{13\ell^2}{420} \\ 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & \frac{\ell}{6} & 0 \\ -\frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} & -\frac{13\ell^2}{420} & 0 & -\frac{\ell^2}{140} \\ \frac{9\ell}{70} & 0 & -\frac{13\ell^2}{420} & \frac{13\ell}{35} & 0 & \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 \\ \frac{13\ell^2}{420} & 0 & -\frac{\ell^2}{140} & \frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}.$$

Матрица масс балочного пространственного КЭ (рис. 1.15):

$$[M_r] = \mu \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^3}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\ell}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\ell^2}{420} & 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9\ell}{70} & 0 & -\frac{13\ell^2}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13\ell^2}{420} & 0 & -\frac{\ell^3}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13\ell^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell^3}{140} & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}.$$

Матрицы жёсткости и матрицы масс построены с применением функций узловых перемещений предполагаемого поля перемещений, причем для каждой используются одни и те же функции. Поэтому матрица масс согласована с основной матрицей жёсткости, и матрицы, построенные на этом принципе, называются *согласованными матрицами масс*.

*Несогласованные матрицы* появляются при расчётах динамических задач, когда матрицы жёсткости и матрицы масс в общей системе координат рассматриваются независимо. Предполагается, что можно пропорционально распределить сосредоточенные массы по степеням свободы задачи. Построенные таким образом матрицы масс называются *матрицами сосредоточенных масс*, и они являются несогласованными матрицами. Как отмечалось, сосредоточенные массы учитываются путем их суммирования с соответствующими элементами согласованной матрицы масс конструкции, расположенными на главной диагонали.

### Контрольные вопросы.

1. Систему каких уравнений представляет собой задача свободных колебаний?
2. С помощью какого преобразования вычисляется матрица масс КЭ в общей системе координат?
3. Из каких матриц формируется квазидиагональная матрица масс конструкции?
4. Есть ли различие в формировании матрицы масс конструкции от формирования матрицы жёсткости конструкции?
5. Каким методом выполняется решение разрешающей системы уравнений, позволяющее определить характеристическую матрицу?
6. Как называется наименьшая частота собственных колебаний?
7. Как называется совокупность частот собственных колебаний?
8. Каким методом рекомендуется решать уравнения собственных значений для вычисления собственных чисел (собственных частот) колебаний системы?
9. Систему каких уравнений представляет собой задача вынужденных колебаний?
10. Как учитываются сосредоточенные массы стержневой системы в динамических задачах?
11. Каким методом решается система уравнений, позволяющая определить вектор амплитудных значений узловых перемещений конструкции в общей системе координат?
12. Чему равен порядок матрицы масс КЭ плоской рамы?
13. Из выражения какой энергии может быть получена матрица масс КЭ?
14. Сколько постоянных  $\alpha$  у поля перемещений КЭ плоской рамы?
15. Из скольких функций перемещений образовано поле перемещений КЭ плоской рамы?
16. Можно использовать процесс конденсации при вычислении матрицы масс КЭ с шарниром в узле?
17. Какие матрицы масс называются согласованными матрицами?
18. Какие матрицы масс называются несогласованными матрицами?
19. Каким образом выполняется статический расчёт в задаче вынужденных колебаний?
20. Как выполнить расчёт на вынужденные колебания системы только с учетом сосредоточенных масс?

## 4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ

### 4.1. Программы общего назначения

Матричный аппарат МКЭ носит настолько общий характер, что теоретически возможно составить единую вычислительную программу, способную решить практически неограниченное число разнообразных задач механики конструкций. Вычислительные программы, отвечающие этой цели даже в ограниченном масштабе, называются программами общего назначения.

Представленные на блок-схеме, изображённой на рис. 4.1, четыре части алгоритма являются общими практически для всех программ МКЭ общего назначения.

На стадии *ввод* требуется информация о материале конструкции, о геометрии конечно-элементной модели, условий нагружения и закрепления задачи. При использовании суперэлементного подхода исходная информация задается и для каждой подконструкции в отдельности.



Рис. 4.1. Блок-схема программы общего назначения

На этапе реализации программы, озаглавленной *библиотека конечных элементов*, осуществляется формирование матриц жёсткости и матриц ортогонального преобразования координат для каждого КЭ с помощью соответствующих подпрограмм, а также вычисление матриц жёсткости КЭ в общей системе координат (системе координат конструкции). На этой же стадии для задач статики формируется разрешающая система уравнений равновесия для конечно-элементной модели конструкции в целом.

При реализации МСЭ первоначально вычисляются матрицы жёсткости суперэлементов и далее, из матриц жёсткости суперэлементов формируется система уравнений равновесия для всей конструкции.

На этапе *решение* осуществляются операции с построенными на предыдущем этапе алгебраическими уравнениями, т. е. решение системы уравнений равновесия с известной правой частью. При реализации МСЭ требуется оперировать величинами, которые относятся к подконструкциям целой конструкции, и осуществлять операции на сформированных начальных уравнениях.

На этапе *вывод* выдается информация о напряжённом и деформированном состоянии конечно-элементной модели задачи, знание которого позволяет определить пропорции конструкции и разрешить различные вопросы её проектирования. Обычно это решение представляет собой выведенный на печать массив перемещений узлов расчётной модели конструкции и массивы внутренних силовых факторов и напряжений, вычисленные в заданных узлах или отнесенных к используемым соответствующим КЭ. Используется и графический вывод результатов расчёта, например, в виде графического изображения линий главных напряжений на некоторых элементах конструкции или мод потери устойчивости и колебаний при решении соответствующих задач.

Приведенные части программ общего назначения имеют одну характерную черту – модульность основных операций. Хорошо составленная программа должна позволить пользователю вставлять новые блоки операций по мере надобности или в том случае, когда определены более эффективные способы реализации указанных операций. К этим операциям отно-

сятся, например, использование новых типов КЭ, улучшенные методы и способы решения системы линейных уравнений равновесия, вывод результатов расчёта и др.

В настоящее время в разных странах создано значительное количество универсальных программных комплексов, реализующих МКЭ и МСЭ, используемых при исследовании напряжённо-деформированного состояния конструкций. Одними из самых сложных и трудоёмких в разработке и в то же время эффективных для применения таких комплексов являются системы кинематического анализа конструкций, основанные на МСЭ.

Программный комплекс автоматизированного проектирования ЛИРА предназначен для широкого круга работ, связанных с процессом расчёта на прочность строительных конструкций и машин различного назначения. Расчёт может выполняться по прочности с учетом долговечности или в режиме проверки заданных сечений. В состав исходных данных входит минимальная информация о геометрии, граничных условиях, структуре и физико-механических свойствах конструкции.

Результаты расчёта – перемещения, силы, расчётные сочетания, формы и периоды собственных колебаний – выдаются в табличной форме и снабжаются привычной для инженера индексацией.

При расчёте частных задач (пространственные рамы, корпуса редукторов др.) специализированный монитор комплекса на основе исходных данных генерирует специализированные ветви, счёт по которым в смысле быстродействия, удобства подготовки исходных данных и чтения результатов расчёта незначительно отличается от специализированных программ, ориентированных на решение частных задач.

Управляющие модули комплекса, модули составления и решения системы уравнений равновесия и другие модули, определяющие гибкость, универсальность и быстродействие, написаны на языке Ассемблер. Разделы комплекса программ по организации сервиса, а также модули библиотеки КЭ, расчётных сочетаний сил, подбора материала, определения динамических сил написаны на языке ПЛ/1.



Формирование уравнений равновесия задачи производится последовательно отдельными группами. Количество уравнений  $m$  в каждой группе зависит от объема  $v$ , выделенного в оперативной памяти ЭВМ для раздела и ширины ленты  $h$  системы уравнений:

$$m=v/h.$$

На этом этапе используется ряд приемов, ускоряющих процесс формирования уравнений. Так, составляется вспомогательный массив, позволяющий быстро определить, какие КЭ необходимо вызвать для составления той или иной группы уравнений: если матрица жёсткости рассматриваемого КЭ (совпадение проверяется по размерам КЭ и типу жёсткости) совпадает с ранее составленной для предыдущего КЭ, то используется уже имеющаяся матрица жёсткости.

Обращение матрицы коэффициентов система уравнений выполняется методом Гаусса. Но вычисляется не обратная матрица, а треугольная, полученная при помощи прямого хода Гаусса. Обработка прямого хода Гаусса выполняется методом групповых исключений, который был апробирован в универсальных вычислительных комплексах ЭКСПРЕСС, МИРАЖ, СУПЕР.

Определение форм, периода собственных колебаний и динамических нагрузок производится методом редуцирования. Определение перемещений узлов задачи производится обработкой столбцов свободных членов системы уравнений прямым и обратным ходом Гаусса. Вычислению узловых сил КЭ предшествует сортировка полученных узловых перемещений конструкции.

Унификация сечений производится на уровне расчётных сочетаний. При этом для каждой группы унифицируемых элементов просматриваются относящиеся к ним расчётные сочетания и выбираются те, которые соответствуют экстремальным критериям.

Подбор материала производится по характеристикам петли гистерезиса. При этом последовательно считываются внутренние форматы и соответствующие расчётные сочетания узловых сил для экспериментов или групп унифицированных элементов.

Разработку зарубежных универсальных программных комплексов большого масштаба выполняют крупнейшие фирмы и объединения. Так разработка широко распространенной системы NASTRAN велась в США с 1964 по 1969 гг. по заказу Национального управления по авиации и исследованию космоса NASA при участии пяти крупнейших фирм, связанных с аэрокосмической промышленностью. С тех пор система NASTRAN постоянно развивается и совершенствуется, а её стоимость оценивается в несколько миллионов долларов.

Одной из наиболее распространенных за рубежом крупномасштабных универсальных программ является «Автоматическая система кинематического анализа» (ASKA) [5], которая используется в ядерной, аэрокосмической и машиностроительной промышленности. Программа написана на языке FORTRAN и представляет собой программный комплекс, содержащий более 120 отдельных программ, отличающихся по функциональным назначениям. Модульная структура системы ASKA позволяет её развивать, приспособив для решения новых задач. Вычисления по этому комплексу программ могут быть выполнены с обычной точностью, частично двойной или с двойной. В зависимости от типа ЭВМ это соответствует представлению чисел с количеством значащих десятичных цифр мантиссы от 6 до 25.

Исходные данные при расчётах с помощью ASKA делятся на две большие группы: топологическое описание конструкции и числовые исходные данные. Функциональные возможности комплекса программ следующие: расчёт при малых и больших перемещениях, учет пластичности, ползучести материала и влияния температуры на механические свойства материала, решение задач устойчивости, термоупругости и термопластичности.

Как и другие крупномасштабные зарубежные системы, ASKA содержит большую библиотеку КЭ (подпрограмм вычисления матриц жёсткости КЭ). Стандартная библиотека системы содержит 42 типа КЭ и постоянно пополняется.

В работе [5] приведено описание разработанного авторами программного комплекса КАСКАД-2, реализующего МСЭ. Библиотека КЭ программного комплекса содержит 8 типов КЭ: стержень, работающий на растяжение–сжатие, балка, воспринимающая изгиб и растяжение–сжатие, и шесть типов пластин, работающих в своей плоскости при плоско-напряжённом и плоско-деформированном состояниях, на изгиб из своей плоскости и комбинированных (КЭ оболочки как совокупности плоских элементов).

Такой набор элементов позволяет рассчитывать пространственные ортогональные конструкции при стержневой, пластинчатой и пластинчато-стержневой идеализации. Реализовано несколько вариантов возможной распределенной нагрузки, действующей на элементы. Расчёт конструкции может быть выполнен в упругой и упругопластической области. Комплекс состоит из 77 программ, из которых у 34 статус головной блок, а у 43 статус подпрограмма. Алгоритмический язык программирования FORTRAN. Модульная структура программного комплекса позволяет его развивать, дополняя библиотеку КЭ программы новыми элементами. По своим параметрам комплекс КАСКАД-2 не уступает большинству зарубежным комплексам. Характеристики других зарубежных и отечественных крупномасштабных универсальных программных комплексов отличаются незначительно.

Таким образом, в настоящее время имеется большое количество универсальных комплексов и автоматических систем кинематического анализа по расчёту стержневых и континуальных систем МКЭ. Но, несмотря на большое число программных комплексов, создание новых и совершенствование существующих систем продолжается. Это объясняется возможностью достаточно точной оценки напряжённого и деформированного состояний сложных инженерных сооружений, способствует лучшему использованию несущей способности конструкций и уменьшению их массы на стадии проектирования и доводки.

Однако применение МКЭ к расчёту сложных инженерных конструкций, рассматриваемых как пространственные расчётные системы, образо-

ванные совокупностью большого числа различных КЭ, приводит к большой трудности. Серьезным недостатком является и значительная затрата труда и времени при подготовке исходной информации для реализации МКЭ.

Исходная информация универсальных комплексов очень сложная, как правило, при описании конструкции (топологические и геометрические характеристики конструкции). Сложность подготовки топологической характеристики конструкции рациональна для универсальных программных комплексов с большой библиотекой типов КЭ, что позволяет выполнить расчёт практически произвольной конструкции, что и требуется от таких программных комплексов.

Изучение исходных данных и их подготовка для расчёта конструкции вызывает серьезные затруднения и требует достаточно больших затрат сил и времени. Издается специальная литература, помогающая изучать и пользоваться универсальными комплексами.

#### **4.2. Особенности объектно-ориентированных программ**

Кроме универсальных программных систем создаются программы целевого назначения, т. е. программы с численной реализацией на ЭВМ алгоритмов расчёта конструкций определённого класса: объектно-ориентированные комплексы программ, позволяющие значительно уменьшить и упростить исходную информацию, и которые более удобны в эксплуатации.

Объектно-ориентированные программы по определению напряжённо-деформированного состояния конструкций, как и программы общего назначения, строятся по модульному принципу, модули, в свою очередь, могут состоять из одной или нескольких подпрограмм. К основным модулям относятся следующие: ввод исходной информации, формирование матрицы жёсткости конструкции, ввод кинематических условий закрепления задачи, решение системы разрешающих уравнений равновесия, вычисления внутренних сил и напряжений. Модуль решения системы разрешаю-

щих уравнений желательно обеспечить возможностью выполнения вычислений с двойной точностью.

Для наиболее характерной программы целевого назначения: расчёта произвольной плоской стержневой системы [8], приведена блок-схема программы (рис. 4.2), которая полностью соответствует рассмотренному алгоритму расчёта прямым методом в форме перемещений.

Объем программы 13,5 Кбайт исходного текста. Программа состоит из головной управляющей программы MAIN PGM и вспомогательных подпрограмм.

Управляющая программа MAIN PGM состоит из вызовов подпрограмм, выполняющих следующие функции:

DAN – вводит в машину исходную информацию о конечно-элементной модели конструкции. Для последующего контроля вся исходная информация выводится на печать в развернутой форме с необходимыми текстовыми пояснениями.

GRYS – формируют вектор узловой нагрузки конструкции в общей системе координат по номерам узлов, в которых приложена нагрузка.

SUMMA – формирует матрицу жёсткости конструкции с использованием матрицы индексов. Выполняет проверку исходных данных по количеству КЭ в расчетной схеме задачи и ширине полуленты матрицы жёсткости конструкции.

FMKO – выполняет преобразование матрицы жёсткости конструкции в соответствии с кинематическими условиями закрепления задачи, т. е. формирует систему разрешающих линейных алгебраических уравнений равновесия.

ZPER – выполняет преобразование системы разрешающих уравнений равновесия при заданных узловых перемещениях.

PODAT – выполняет преобразование системы разрешающих уравнений равновесия при заданной жёсткости опор.

SOLKO – формирует и решает систему разрешающих уравнений равновесия, в результате чего вычисляется вектор узловых перемещений конструкции в общей системе координат, который выводится на печать.

VSFST – формирует векторы внутренних силовых факторов и нормальные напряжения в сечениях начала и конца КЭ в местной системе координат и выводит их на печать.

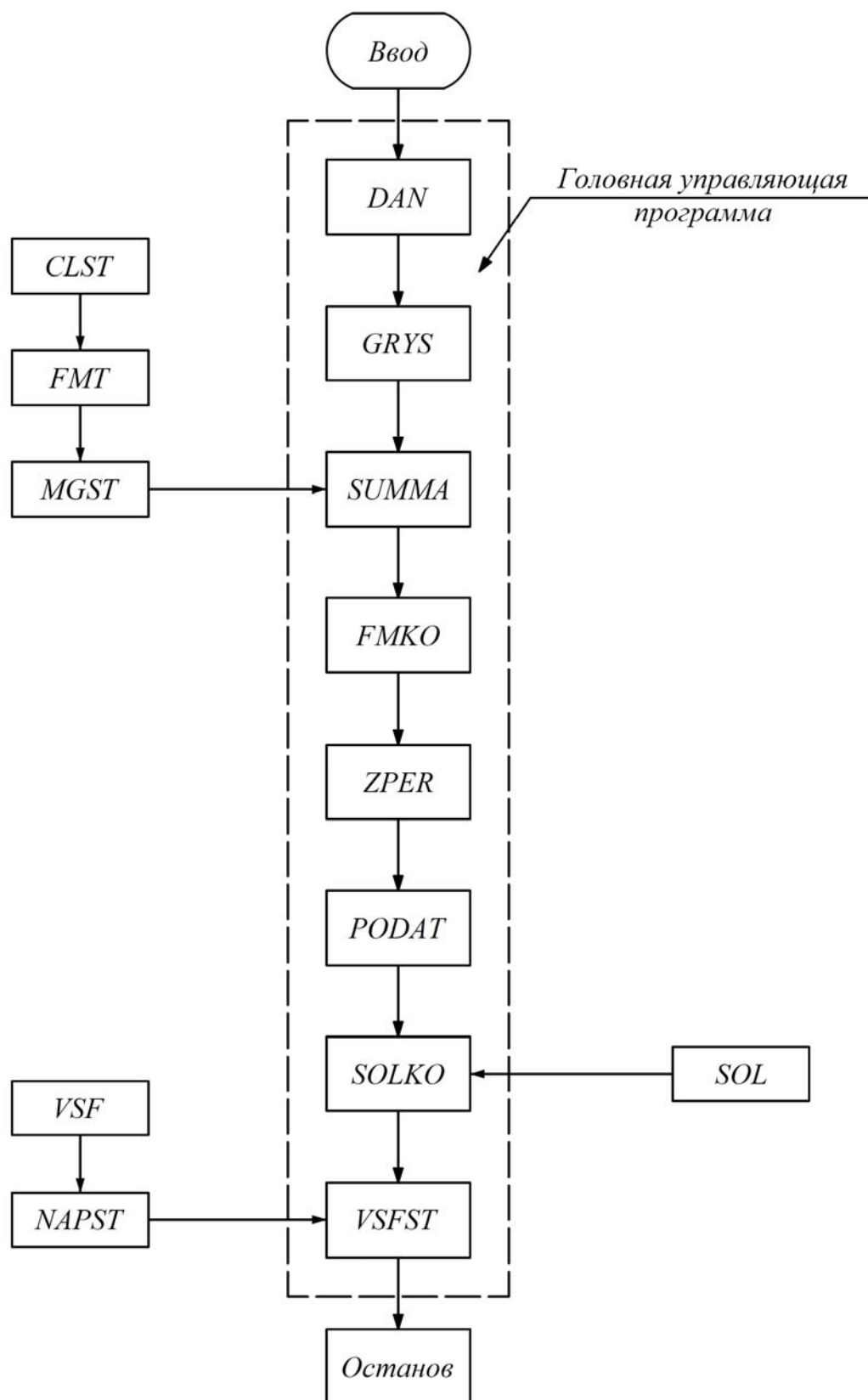


Рис. 4.2. Блок-схема программы

### Пример подпрограммы

- Переменные, помещенные в общую область COMMON:

FMGP (1000000)      Массив матрицы жёсткости конструкции

P (10000)            Массив вектора узловой нагрузки конструкции

- Файлы последовательного доступа:

5            Файл ввода: для чтения исходных данных из файла в память

8            Файл вывода: для записи данных из памяти в файл

2, 3, 4    Рабочие файлы

С            Управляющая программа MAIN

```
COMMON FMGP(1000000),P(10000)
open(5,file='ramaplos.inp',status='old',form='formatted')
open(8,file='ramaplos.out',status='unknown',form='formatted')
open(2,status='scratch',form='unformatted')
open(3,status='scratch',form='unformatted')
open(4,status='scratch',form='unformatted')
REWIND 2
REWIND 3
REWIND 4

100 WRITE (8,1)
1  FORMAT (///5X,'Статика плоской стержневой системы')
   CALL DAN
   CALL GRYS(P)
   CALL SUMMA(FMGP)
   CALL FMKO(FMGP)
   CALL ZPER(FMGP,P)
   CALL PODAT (FMGP)
   CALL SOLKO(FMGP,P)
   CALL VSFST(P)
   REWIND 2
   REWIND 3
   REWIND 4
   GO TO 100
END
```

Оператор управления GO TO позволяет выполнять последовательно решение нескольких задач одновременно.

Основные вспомогательные подпрограммы выполняют следующие функции:

CLST – вычисляет матрицу направляющих косинусов осей местной и общей систем координат КЭ.

FMT – формирует матрицу ортогонального преобразования координат КЭ.

MGST – вычисляет матрицу жёсткости КЭ в местной и общей системах координат.

SOL – решает систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

VSF – вычисляет векторы внутренних силовых факторов КЭ.

NAPST – вычисляет нормальные напряжения в сечениях начала и конца КЭ.

#### **4.2.1. Образование расчётной схемы. Структура исходных данных**

Критерием выбора формы и метода описания конструкции являются минимум исходной информации и простота её подготовки. Алгоритмы реализации МКЭ, как правило, отличаются структурой и формой геометрических и топологических характеристик конструкции: описанием конструкции (способ формирования матрицы жёсткости конструкции), т. е. исходной информацией в реализующей программе.

При расчёте стержневой системы её модель представляет собой систему, образованную осями стержней, проходящими через центры тяжести поперечных сечений КЭ.

В общем случае за узлы сопряжения КЭ принимаются сечения, в которых:

- изменяется направление оси стержня;
- приложена сосредоточенная нагрузка и (или) заданы линейные или угловые перемещения;
- имеются кинематические закрепления конструкции, в том числе с заданной линейной и (или) угловой жёсткостью;
- изменяются геометрические характеристики сечения стержня;
- находится произвольный шарнир (ы);
- изменяются характеристики материала стержня.

Криволинейные части моделируются несколькими прямолинейными. Возможно и дополнительное введение узлов в расчётную схему для полу-



чения более подробной информации о напряжённо-деформированном состоянии конструкции.

Если по длине стержня приложена распределенная (погонная) нагрузка  $q$ , (рис. 4.3), то она заменяется эквивалентной узловой.

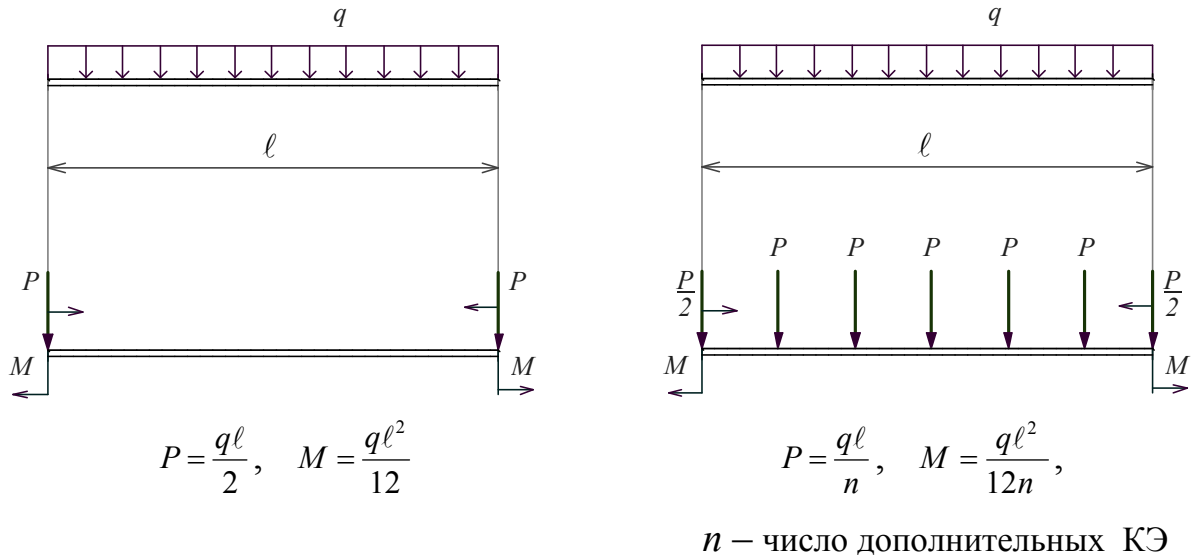


Рис. 4.3. К определению эквивалентной узловой нагрузки

В этом случае по длине стержня вводятся дополнительные узлы (желательно равномерно) и, следовательно, дополнительные КЭ по которым и распределяется заданная распределенная нагрузка. При использовании дополнительных узлов в модель конструкции вводится нумерация этих узлов. Такой прием замены распределенной нагрузки  $q$  на эквивалентные узловые сосредоточенные силы  $P$  и моменты  $M$  приближенный, но достаточно точный, широко распространен и не требует никаких изменений в алгоритме расчёта при его реализации.

Далее выполняется нумерация узлов и КЭ. Нумерация узлов должна быть выполнена таким образом, чтобы разность номеров узлов КЭ была минимальной. Чем меньше эта разность, тем меньше ширина ленты матрицы жёсткости конструкции и, следовательно, меньше время счёта на ЭВМ.

Как правило, минимум ширины ленты обеспечивает последовательность нумерации узлов конечно-элементной модели по сечениям, распо-

ложенным по длине конструкции. Ширина половины ленты матрицы жёсткости конструкции вычисляется по формуле

$$LENTA = (R+1) \cdot NS,$$

где  $R$  – наибольшая разность номеров узлов КЭ;

$NS$  – число степеней свободы в узле.

На рис. 4.4 представлена конечно-элементная модель (расчётная схема) стропильной фермы, образованной осями стержней, проходящими через центры тяжести поперечных сечений и принятые положительные направления узловых перемещений (степеней свободы узла) и сил ( $NS=2$ ).

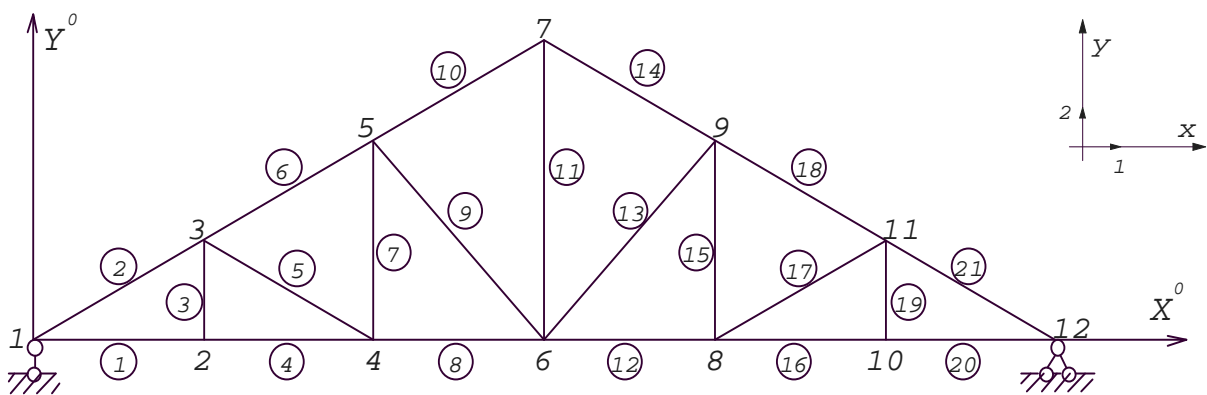


Рис. 4.4. Конечно-элементная модель плоской фермы

За узлы КЭ принимаются сечения соединения стержней фермы. Нумерация узлов и КЭ выполнена слева – направо и снизу – вверх, т. е. по длине конструкции.

Порядок  $n$  матрицы  $[K^0]$  жёсткости конструкции равен

$$n = n_y \cdot NS = 12 \cdot 2 = 24,$$

где  $n_y$  – число узлов расчётной схемы.

Ширина половины ленты матрицы жёсткости конструкции будет

$$LENTA = (3+1)2 = 8.$$

Таким образом, расчётная схема образована 21 КЭ фермы и содержит 12 узлов.

На рис. 4.5 приведена расчётная схема трёхпролетной статически определимой балки и принятые положительные направления узловых перемещений и сил ( $NS = 3$ ).

За узлы КЭ принимаются сечения, в которых расположены шарниры, опоры и нагрузка. Первый и четвертый КЭ с простыми шарнирами по углу поворота сечения. Причем шарнир у первого КЭ во втором узле, а у четвертого – в четвертом узле. В шестом узле расчётной схемы балки расположена упруго-оседающая опора. Расчётная схема трёхпролетной статически определимой балки образована 6-ю балочными КЭ и содержит 7 узлов.

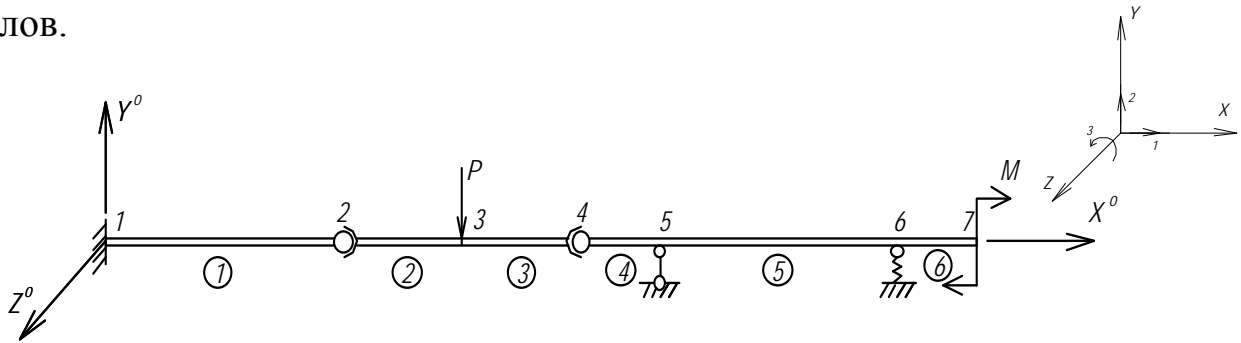


Рис. 4.5. Расчётная схема 3-х пролетной балки

Порядок  $n$  матрицы  $[K^0]$  жёсткости конструкции равен

$$n = n_y \cdot NS = 7 \cdot 3 = 21.$$

Ширина половины ленты:

$$LENTA = (1+1)3 = 6.$$

Следует отметить, что у данной балки по две степени свободы в узлах ( $NS=2$ ): прогиб и угол поворота сечения, соответственно 2-я и 3-я степени свободы. Использование матрицы жёсткости КЭ с 3-мя степенями свободы в узле позволяет выполнять расчёты произвольной плоской стержневой системы.

### Пример подпрограммы

```

С      ВВОД И ПЕЧАТЬ ИНФОРМАЦИИ О КОНСТРУКЦИИ
      SUBROUTINE DAN
      COMMON/MG/FMG(6,6),FMGO(6,6),MAT(20)
      COMMON/RAZM/KYZO,NS,KELEM,N,LENTA
      DIMENSION JTEXT(20)
      REAL MAT

      READ(5,1) JTEXT
1     FORMAT(20A4)
      WRITE(8,2) JTEXT
2     FORMAT(//5X,20A4)
      READ(5,3) KYZO,NS,KELEM,KMAT,LENTA
3     FORMAT(5I5)
      N=KYZO*NS
  
```

```

WRITE (8,4) KYZO,NS,KELEM,KMAT,LENTA
4 FORMAT (/18X,'И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е'/18X,
129(1H*))//
83X,'Узлов:           ',I5/
23X,'Ст. св. в узле: ',I5/
33X,'Элементов:      ',I5/
43X,'Материалов:     ',I5/
53X,'Лента:          ',I5//
63X,'Номер материала  Модуль упругости')
DO 6 I=1,KMAT
  READ (5,5) J,MAT(J)
5 FORMAT(I5,F10.1)
6 WRITE (8,7) J,MAT(J)
7 FORMAT(I10,F23.2)
  RETURN
  END

SUBROUTINE GRYS(P)
COMMON /UZL/COOR(2000,2)
COMMON /RAZM/KYZO,NS,KELEM,N,LENTA
COMMON/XAR/IE,IT,T(3),F,ZI,NMAT,WZ,NY
DIMENSION P1(3),GXS(30,3)
DIMENSION MSVOB(6)
DIMENSION P(N)
INTEGER T

DO 1 I=1,N
1 P(I)=0.
  READ (5,2) KYZGR
2 FORMAT(I5)
  DO 5 I=1,KYZGR
  READ (5,3) NYZGR,(P1(J),J=1,NS)
3 FORMAT(I5,3F10.2)
  J=(NYZGR-1)*NS
  DO 4 I1=1,NS
  P(J+I1)=P1(I1)
4 CONTINUE
  WRITE (8,6) KYZGR
6 FORMAT(/3X,'Узлов с нагрузкой и перемещениями:',I5//
114X,'Координаты      ',15X,'Вектор нагрузки'/
21X,'Узел',8X,'X',9X,'Y',17X,'Px',9X,'Py',9X,'Mz')
  DO 9 I=1,KYZO
  READ (5,7) J,(COOR(J,I1),I1=1,2)
7 FORMAT(I5,2F10.2)
  I1=(J-1)*NS+1
  J1=J*NS
  WRITE (8,8) J,(COOR(J,I2),I2=1,2),(P(I2),I2=I1,J1)
8 FORMAT(I4,F12.2,F10.2,F19.2,2F11.2)
9 CONTINUE
  READ (5,2) KELSH
  WRITE (8,12) KELSH
12 FORMAT (/3X,'Элементов с шарнирами:',I5)
  IF(KELSH)21,21,14
14 WRITE (8,15)
15 FORMAT (3X,'Граничные условия: 0 - связь'/
122X,'1 - свобода в МСК'/
221X,'-1 - свобода в ОСК'/
33X,'Элемент',2X,'Dx',2X,'Dy',2X,'Rz')
  DO 20 I=1,KELSH
  READ (5,17) NELEM,(MSVOB(J),J=1,6)
17 FORMAT(I5,6I2)
  WRITE (8,18) NELEM,(MSVOB(J),J=1,3)

```

```

WRITE (8,19) (MSVOB(J), J=4, 6)
18 FORMAT (I7,I7,2I4)
19 FORMAT(I14,2I4)
WRITE(2) (MSVOB(J), J=1, 6)
20 CONTINUE
REWIND 2
21 READ(5,31) IVID
31 FORMAT(I5)
WRITE(8,32) IVID
32 FORMAT(/5X, 'Число различных сечений стержней:', I3/)
WRITE(8,33)
33 FORMAT(5X, 'Геометрические характеристики сечений КЭ' /
13X, 'Сечение', 4X, 'F', 8X, 'Iz', 8X, 'Wz')
DO 35 I=1, IVID
READ(5,34) I1, (GXS(I, J), J=1, 3)
34 FORMAT(I5, 3F10.2)
35 WRITE(8,36) I1, (GXS(I, J), J=1, 3)
36 FORMAT(I7, 3F10.2)
DO 38 I=1, KELEM
READ(5,37) IE, IT, (T(J), J=1, 3), NMAT
37 FORMAT(6I5)
IV=T(3)
F=GXS(IV, 1)
ZI=GXS(IV, 2)
WZ=GXS(IV, 3)
WRITE(4) IE, IT, (T(J), J=1, 2), NMAT, F, ZI, WZ
38 CONTINUE
REWIND 4
RETURN
END

```

#### 4.2.2. Формирование матрицы жёсткости конструкции

При реализации алгоритма МКЭ формирование матрицы жёсткости конструкции непосредственно по выражению (1.4) крайне неэффективно, так как матрица соответствий состоит из единиц и большого количества нулей, что приводит к нерациональному использованию памяти ЭВМ.

В программном комплексе [5] не формируется матрица жёсткости конструкции  $[K^0]$ , а формируется сразу матрица коэффициентов при неизвестных системы уравнений  $[K_*^0]$ . Формирование матрицы  $[K_*^0]$  выполняется с помощью *топологических матриц*: матрицы типов узлов  $[T_y]$  и с помощью матрицы связи узлов  $[C]$ .

Матрица типов узлов  $[T_y]$  – булева матрица, число строк у которой равно числу узлов расчётной схемы конструкции, а число столбцов равно максимальному числу степеней свободы узлов. Если расчётная схема конструкции предусматривает наличие в  $i$ -м узле перемещения, соответст-

вующего  $j$ -й координате, элемент матрицы  $[T_y]$   $t_{ij} = 1$ , иначе  $t_{ij} = 0$ . Элементы матрицы связи узлов  $[C]$  устанавливают соответствие номеров узлов в общей и местной системах нумерации.

Такой подход дает возможность исключить из системы уравнений зависимые уравнения, определяющие зависимость нагрузки и реакций опор, и получить систему уравнений равновесия, где каждое уравнение представляет собой одно из уравнений равновесия какого-либо узла, соответствующее данному его возможному перемещению.

Рассмотренный подход к формированию матрицы коэффициентов системы уравнений позволяют выполнить расчёт практически произвольной конструкции. Алгоритм этого способа эффективно используют оперативную память ЭВМ: в каждом узле расчётной схемы конструкции действительное число степеней свободы и в системе разрешающих уравнений равновесия исключены зависимые уравнения, соответствующие условиям кинематического закрепления задачи. Исключение уравнений обеспечивается отсутствием перемещений в узлах с опорами при формировании матрицы типов узлов  $[T_y]$ . Недостатком этого способа является существенная сложность подготовки исходных данных для образования матрицы типа узлов и матрицы связи узлов. Кроме нумерации узлов расчётной схемы конструкции необходимо определять число степеней свободы каждого узла расчётной схемы конструкции (матрица типа узлов).

Критерием выбора формы и метода описания конструкции являются минимум исходной информации и простота её подготовки. При формировании матрицы жёсткости конструкции можно использовать топологическую матрицу индексов  $[T]$ , у которой число столбцов равно числу КЭ задачи, а число строк равно числу узлов КЭ [3]. Элементы матрицы индексов представляют собой номера узлов КЭ расчётной схемы. Подготовка исходных данных и формирование такой матрицы индексов наиболее просто.

#### Пример подпрограммы

```
С      ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛУЛЕНТЫ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИИ
      SUBROUTINE SUMMA (FMGP)
      COMMON/RAZM/KYZO, NS, KELEM, N, LENTA
```

```

COMMON/MG/FMG(6,6),FMGO(6,6),MAT(20)
COMMON/XAR/IE,IT,T(3),F,ZI,NMAT,WZ,NY
DIMENSION FMGP(N,LENTA)
INTEGER T
REAL MAT

KFERM=0
KSTR=0
LLENTA=1
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,LENTA
1 FMGP(I,J)=0.
WRITE (8,2)
2 FORMAT(/1X,'Элемент Тип Матрица индексов',6X,
1 'F',9X,'Jz',5X,'NMAT')
DO 10 K=1,KELEM
READ(4) IE,IT,(T(J),J=1,2),NMAT,F,ZI,WZ
GO TO(101,102,102),IT
101 CALL MGSTF
KFERM=KFERM+1
GOTO 4
102 CALL MGSTR
KSTR=KSTR+1
4 DO 9 L=1,NY
II=T(L)
K1=(II-1)*NS
DO 8 M=1,NS
K1=K1+1
K2=(L-1)*NS+M
DO 7 LL=1,NY
K3=(T(LL)-1)*NS
DO 6 MM=1,NS
K4=(LL-1)*NS+MM
K5=K3+MM+1-K1
IF(K5)6,6,5
5 FMGP(K1,K5)=FMGP(K1,K5)+FMGO(K2,K4)
IF(LLENTA-K5)200,6,6
200 LLENTA=K5
6 CONTINUE
7 CONTINUE
8 CONTINUE
9 CONTINUE
10 CONTINUE
WRITE (8,12) LLENTA,KFERM,KSTR
12 FORMAT(/3X,'ПРОВЕРКА',/
13X,'Лента МЖК: ',I5,/
23X,'КЭ фермы: ',I5,/
33X,'Балочных КЭ: ',I5)
RETURN
END

```

### 4.2.3. Граничные условия

Граничные условия в МКЭ автоматически учитываются вектором узловой нагрузки  $\{P^0\}$ . В том случае, когда граница свободна, элементы вектором нагрузки, соответствующие расположенным на границе узлам, равны нулю.

Как отмечалось, для возможности решения системы уравнений (1.5) необходимо в матрице жёсткости конструкции  $[K^0]$  исключить зависимые уравнения соответствующие условиям кинематического закрепления задачи, т. е. опорам, и получить, тем самым, матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия  $[K_*^0]$ .

Однако желательно, чтобы порядок матрицы жёсткости конструкции  $[K^0]$  был равен порядку матрицы коэффициентов системы уравнений  $[K_*^0]$ , т. е. никакие строки и столбцы матрицы жёсткости  $[K^0]$  не должны исключаться при преобразовании её в матрицу коэффициентов системы уравнений  $[K_*^0]$ . Для преобразования матрицы жёсткости конструкции в матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия применяются способы, аналогичные преобразованиям при решении задачи, для которой заданы перемещения [3]. Например, при известном перемещении, положим  $Z_1^0 = \alpha$ , элементы первой строки и первого столбца матрицы  $[K^0]$  жёсткости конструкции становятся нулевыми, а элемент главной диагонали – единичным. При этом элементы модифицированного вектора-столбца  $\{\bar{P}^0\}$  нагрузки становятся равными

$$\bar{P}_1^0 = \alpha,$$

$$\bar{P}_i^0 = P_i^0 - K_{1,i}^0 \cdot \alpha, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

При кинематическом закреплении (пусть  $Z_1^0 = 0$ ) необходимо изменить матрицу жёсткости описанным выше способом. Элементы вектора нагрузки остаются неизменными, кроме  $\bar{P}_1^0 = 0$ .

При втором приближенном, но достаточно точном, способе выполняется умножение соответствующего элемента главной диагонали матрицы  $[K^0]$  на большое число, например  $10^8$  перед модификацией соответствующего элемента вектора нагрузки. При  $Z_1^0 = \alpha$  будет

$$\bar{K}_{11}^0 = K_{11} \cdot 10^8, \quad \bar{P}_1^0 = K_{11} \cdot 10^8 \cdot \alpha,$$

$$\bar{K}_{ij}^0 = K_{ij}, \quad (\text{кроме } i = j = 1),$$

$$\bar{P}_i^0 = P_i \quad (\text{для } i \neq 1).$$



Такие подходы позволяют, не изменяя порядок матрицы жёсткости конструкции, реализовать условия закрепления задачи и выполнять расчёты не только при заданной нагрузке, но и (или) при заданных перемещениях.

Заданная жёсткость (податливые опоры, жёсткость узловых соединений) учитываются путем их суммирования с соответствующими элементами матрицы жёсткости конструкции, расположенными на главной диагонали.

### Примеры подпрограмм

C    **ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ**  
 SUBROUTINE FMKO (FMGP)  
 COMMON /RAZM/ KYZO, NS, KELEM, N, LENTA  
 DIMENSION ISS (3)  
 DIMENSION FMGP (N, LENTA)

```

    READ (5,1) NG
1  FORMAT (I5)
    WRITE (8,2) NG
2  FORMAT (/3X, 'Узлов с закреплениями: ', I5)
    WRITE (8,3)
3  FORMAT (3X, 'Условия закреплений: 0 - связь' /
124X, '1 - свобода' /
23X, 'Узел ', 5X, 'Dx ', 3X, 'Dy ', 3X, 'Rz ')
    DO 10 I1=1, NG
        READ (5,4) K1, (ISS (I), I=1, NS)
4  FORMAT (I5, 3I2)
        WRITE (8,5) K1, (ISS (I), I=1, NS)
5  FORMAT (I6, I8, 2I5)
        DO 9 J=1, NS
            IF (ISS (J)) 9, 6, 9
6  K2= (K1-1) *NS+J
            FMGP (K2, 1)=1.
            DO 8 J1=2, LENTA
                FMGP (K2, J1)=0.
                K3=K2+1-J1
                IF (K3) 8, 8, 7
7  FMGP (K3, J1)=0.
8  CONTINUE
9  CONTINUE
10 CONTINUE
    RETURN
    END

```

C    **РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАНЫХ УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**  
 SUBROUTINE ZPER (FMGP, P)  
 COMMON /RAZM/ KYZO, NS, KELEM, N, LENTA  
 DIMENSION FMGP (N, LENTA), P (N)

```

    READ (5,1) KPER
1  FORMAT (14I5)
    WRITE (8,2) KPER
2  FORMAT (/3X, 'Заданных перемещений: ', I5)
    IF (KPER) 7, 7, 3
3  WRITE (8,4)

```

```

4 FORMAT(3X,'Узел   ст. св. заданного перемещения')
DO 6 J=1,KPER
  READ(5,1) NYZ,IPER
  WRITE(8,5) NYZ,IPER
5 FORMAT(I6,I20)
  I=IPER+(NYZ-1)*NS
  FMGP(I,1)=FMGP(I,1)*1.E8
  P(I)=FMGP(I,1)*P(I)
6 CONTINUE
7 RETURN
END

```

```

C    РЕАЛИЗАЦИЯ СВЯЗЕЙ С ЗАДАННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ
SUBROUTINE PODAT (FMGP)
COMMON /RAZM/KYZO,NS,KELEM,N,LENTA
DIMENSION FMGP(N,LENTA)

  READ(5,1) KPOD
1 FORMAT(10I5)
  WRITE(8,2) KPOD
2 FORMAT(/3X,'Связей с заданной жёсткостью:',I5)
  IF(KPOD) 8,8,3
3 WRITE(8,4)
4 FORMAT(3X,'Узел   Связь   Жёсткость')
DO 7 J=1,KPOD
  READ(5,5) NYZ,NSV,GST
5 FORMAT(2I5,F10.2)
  WRITE(8,6) NYZ,NSV,GST
6 FORMAT(I6,I8,F15.2)
  I=(NYZ-1)*NS+NSV
  FMGP(I,1)=FMGP(I,1)+GST
7 CONTINUE
8 CONTINUE
  RETURN
END

```

#### 4.2.4. Решение разрешающей системы уравнений

Вследствие симметрии матрицы и её ленточной структуры при решении линейной системы уравнений можно сэкономить память. Память экономится благодаря тому, что только ненулевую часть матрицы требуется хранить в ЭВМ. Эта часть ленточной матрицы располагается в памяти в виде прямоугольного массива. Структура матрицы (рис. 4.6, а) является следствием регулярной нумерации узлов расчётной схемы конструкции.

Половина ширины ленты матрицы, с учетом элементов главной диагонали, как отмечалось, может быть вычислена по формуле:

$$LENTA = (R+1) \cdot NS,$$

где  $R$  – наибольшая разность номеров узлов КЭ;

$NS$  – число степеней свободы узла.

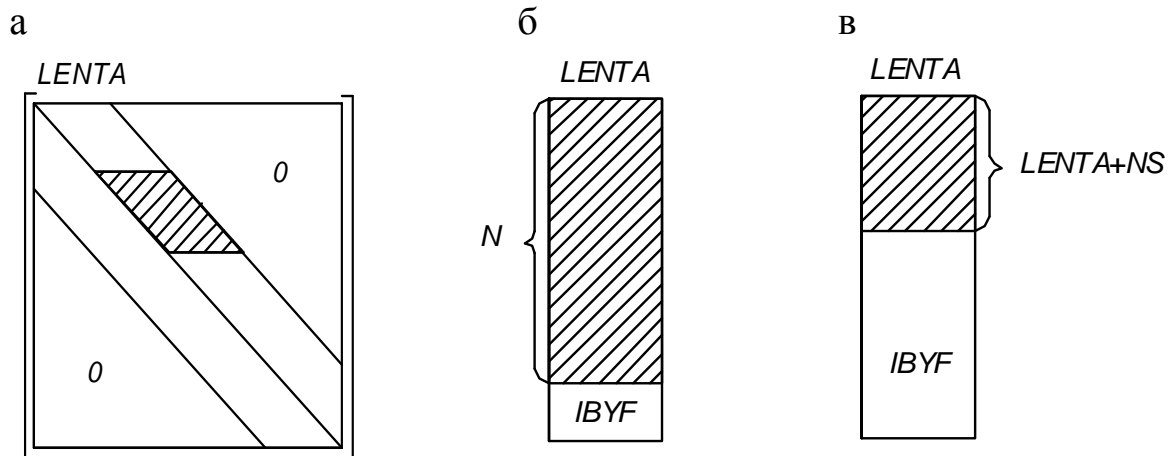


Рис. 4.6. К использованию памяти ЭВМ при решении уравнений:  
 а – структура матрицы коэффициентов; б – размещение всей  
 матрицы в объеме памяти *IBYF*; в – блочное размещение матрицы

Объем оперативной памяти *IBYF* (рис. 4.6, б), необходимый для размещения всей матрицы коэффициентов системы уравнений ( $N$  – число уравнений), можно определить по формуле:

$$IBYF = N \cdot LENTA.$$

Для решения методом исключения Гаусса больших систем уравнений, которые не могут быть размещены в оперативной памяти ЭВМ (рис. 4.6, в), алгоритм вычислений может быть реализован следующим образом.

Предварительно матрица коэффициентов системы уравнений записывается прямым доступом во внешнюю память по уравнениям узлов расчётной схемы, т. е. длина каждой записи будет равна произведению

$$NS \cdot LENTA,$$

что, как отмечалось, эффективно при  $NS = \text{const}$ , т. е. при использовании процедуры модификации матриц жёсткости КЭ. Затем из внешней памяти считываются в оперативную память коэффициенты первых  $NS + LENTA$  уравнений, и коэффициенты уравнений первого узла (первые  $NS$  уравнений) используются для преобразования коэффициентов остальных  $NS \cdot LENTA$  уравнений обычным способом, т. е. использованием подпрограммы SOLVE [3].

Далее коэффициенты уравнений первого узла пересылаются обратно во внешнюю память, а на их место пересылаются (сдвигаются вверх) коэффициенты уравнений, которые остались в оперативной памяти. На место, освободившееся снизу, считываются из внешней памяти коэффициенты следующих  $NS$  уравнений. Так как коэффициенты уравнений (вторые  $NS$  уравнений) второго узла и всех остальных уравнений, над которыми необходимо выполнить следующий шаг преобразований, находятся в оперативной памяти, процесс вычислений повторяется.

Таким образом, при прямом ходе исключения коэффициенты уравнений узлов пересылаются из внешней памяти в оперативную и обратно по одному разу. При обратном ходе пересылка коэффициентов в оперативную память осуществляется в обратном порядке.

В приведенном алгоритме решения уравнений более важной количественной характеристикой является  $LENTA$  – ширина полуленты матрицы коэффициентов уравнений. Требуемый объем оперативной памяти вычисляется по формуле:

$$IBYF = (LENTA + NS) \cdot LENTA.$$

При  $NS=1$  процесс пересылки уравнений из внешней памяти в оперативную и обратно будет выполняться с каждым уравнением, и требуемый объем рабочей памяти будет меньше:

$$IBYF = LENTA^2.$$

С помощью этого метода можно решить практически неограниченное число линейных алгебраических уравнений при условии конечности максимальной ширины ленты.

В отличие от рассмотренного алгоритма модуль решения уравнений использует всю оперативную память ЭВМ, выделенную для матрицы коэффициентов при неизвестных, т. е. исключение уравнений может выполняться как по узлам при минимальном объеме оперативной памяти, так и блоками  $IBYF$ , если

$$IBYF > (LENTA + NS) \cdot LENTA.$$

Очевидно, чем больше оперативная память используемой ЭВМ, тем меньше время решения задачи.

Разработанный модуль решения системы линейных алгебраических уравнений [9], реализующий рассмотренный алгоритм, состоит из управляющей программы SOLW и следующих подпрограмм:

SOL1 – реализует прямой ход Гаусса;

SOL2 – реализует обратный ход;

WRDA – выполняет запись уравнений по узлам во внешнюю память в файл прямого доступа;

RDDA – считывает уравнения из внешней памяти в оперативную;

MOVS – изменяет индексы в уравнениях при их перестановке.

### Примеры подпрограмм

```

SUBROUTINE SOLW (LENTA, NS, FMGP, ISTR, ISTL, P, N)
  DIMENSION FMGP (ISTR, ISTL), P (N)

  KB=ISTR/NS
  KS=KB*NS
  KY=KS
  KB2=LENTA/NS+1
  KB1=KB-KB2
  KY1=KB1*NS
  KY2=KB2*NS
  NR=1
  KR=KB
  NF=1
  NW=1
  KW=KB1
  I1=1
  I2=KY1
  IT=0
1 CALL RDDA (NR, KR, NF, NS, FMGP, ISTR, ISTL)
  NR=NR+KR
  CALL SOL1 (I1, I2, LENTA, FMGP, ISTR, ISTL, P, N)
  IF (IT) 2, 2, 5
2 CALL WRDA (NW, KW, 1, NS, FMGP, ISTR, ISTL)
  NW=NW+KW
  CALL MOVS (KY1, KY2, LENTA, FMGP, ISTR, ISTL)
  NF=KY2+1
  KY=KY+KY1
  I1=I2+1
  IF (KY-N) 3, 4, 4
3 KR=KB1
  I2=I1+KY1-1
  GO TO 1
4 IT=1
  I2=N
  KR= (N+1-I1-KY2) /NS
  GO TO 1
5 IT=0
6 CALL SOL2 (I1, I2, LENTA, FMGP, ISTR, ISTL, P, N)
  IF (IT) 7, 7, 11
7 I2=I1-1
  IF (KS-I2) 8, 10, 10
8 I1=I2-KS+1
9 NR= (I1-1) /NS+1

```

```

      KR=(I2-I1+1)/NS
      CALL RDDA(NR,KR,1,NS,FMGP,ISTR,ISTL)
      GO TO 6
10  IT=1
     I1=1
     GO TO 9
11  RETURN
     END

      SUBROUTINE RDDA(NN,KZ,NF,NS,FMGP,ISTR,ISTL)
      DIMENSION FMGP(ISTR,ISTL)
      NW=NN
      N1=NF
      DO 1 K=1,KZ
      N2=N1+NS-1
      READ(11,rec=NW)((FMGP(I,J),I=N1,N2),J=1,ISTL)
      N1=N2+1
1  NW=NW+1
   RETURN
   END

      SUBROUTINE WRDA(NN,KZ,NF,NS,FMGP,ISTR,ISTL)
      DIMENSION FMGP(ISTR,ISTL)
      NW=NN
      N1=NF
      DO 1 K=1,KZ
      N2=N1+NS-1
      WRITE(11,rec=NW)((FMGP(I,J),I=N1,N2),J=1,ISTL)
      N1=N2+1
1  NW=NW+1
   RETURN
   END

      SUBROUTINE MOVS(N1,N2,LENTA,FMGP,ISTR,ISTL)
      DIMENSION FMGP(ISTR,ISTL)
      K1=N1+1
      K2=N1+N2
      M=1
      DO 2 I=K1,K2
      DO 1 J=1,LENTA
      FMGP(M,J)=FMGP(I,J)
1  CONTINUE
2  M=M+1
   RETURN
   END

      SUBROUTINE SOL1(N1,N2,LENTA,FMGP,ISTR,ISTL,P,N)
      DIMENSION FMGP(ISTR,ISTL),P(N)
      II=N2-N1+1
      DO 30 I=1,II
      IF(FMGP(I,1))30,20,30
20  FMGP(I,1)=1.*1E7
30  CONTINUE
      DO 5 N3=N1,N2
      II=N3-N1+1
      I=II
      DO 4 L=2,LENTA
      I=I+1
      IF(FMGP(II,L))1,4,1
1  C=FMGP(II,L)/FMGP(II,1)
      J=0
      DO 3 K=L,LENTA
      J=J+1
      IF(FMGP(II,K))2,3,2

```

```

2 FMGP (I, J) = FMGP (I, J) - C * FMGP (II, K)
3 CONTINUE
  FMGP (II, L) = C
  JJ = I + N1 - 1
  P (JJ) = P (JJ) - C * P (N3)
4 CONTINUE
5 P (N3) = P (N3) / FMGP (II, 1)
  RETURN
  END

SUBROUTINE SOL2 (N1, N2, LENTA, FMGP, ISTR, ISTL, P, N)
  DIMENSION FMGP (ISTR, ISTL), P (N)
  N3 = N2 - N1 + 1
  IF (N2 - N) 1, 2, 2
1 N3 = N3 + 1
2 CONTINUE
3 N3 = N3 - 1
  IF (N3) 7, 7, 4
4 L = N3 + N1 - 1
  DO 6 K = 2, LENTA
    L = L + 1
    IF (FMGP (N3, K)) 5, 6, 5
5 JJ = N3 + N1 - 1
  P (JJ) = P (JJ) - FMGP (N3, K) * P (L)
6 CONTINUE
  GO TO 3
7 RETURN
  END

```

#### 4.2.5. Результаты расчёта

Решение уравнений равновесия определяет вектор  $\{Z^0\}$  узловых перемещений конструкции в общей системе координат, который выводится на печать. Вектор  $\{Z^0\}$  распределяется по КЭ. Согласно выражению (1.7) вычисляются вектора  $\{S_r\}$  внутренних узловых сил КЭ в местной системе координат и выводятся на печать.

Вычисление нормальных напряжений [13] в узлах КЭ выполняется в соответствии с принятыми положительными направлениями узловых сил в программах, реализующих МКЭ.

Нормальные напряжения в начале и конце КЭ фермы (начало – первый номер узла в матрице индексов, конец – второй номер узла) вычисляются по формуле

$$\sigma_{n,k} = \mp \frac{N}{F}.$$

Верхний знак в формуле относится к началу КЭ фермы, а нижний знак – к концу.

На рис. 4.7 приведены номера точек в узловых сечениях начала и конца КЭ, в которых вычисляются нормальные напряжения.

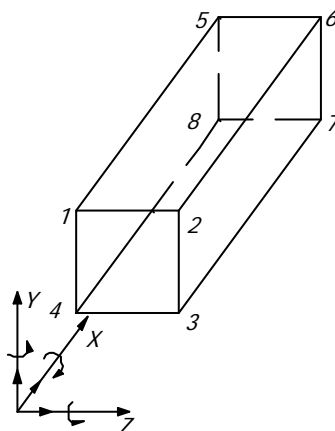


Рис. 4.7. К вычислению напряжений в сечениях КЭ

Нормальные напряжения в точках сечений начала и конца КЭ, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, вычисляются по формулам

$$\sigma_{1,5} = \sigma_{2,6} = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{4,8} = \sigma_{3,7} = \mp \frac{N}{F} \mp \frac{M_z}{W_z}.$$

Верхний знак в формулах относится к точкам сечения начала стержня (1–4), а нижний знак – к точкам (5–8).

Нормальные напряжения в точках сечений начала и конца КЭ, работающего на изгиб и кручение, вычисляются по формулам

$$\sigma_{1,5} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{3,7} = \mp \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{2,6} = \mp \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{4,8} = \pm \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z},$$

а пространственного КЭ по следующим формулам

$$\sigma_{1,5} = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{3,7} = \mp \frac{N}{F} \mp \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{2,6} = \mp \frac{N}{F} \mp \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{4,8} = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z}.$$



### Примеры подпрограмм

```

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И НАПРЯЖЕНИЙ
      SUBROUTINE VSFST(P)
      COMMON /ORT/ CL(3,3), FT(6,6), X,Y,DL
      COMMON/MG/FMG(6,6), FMGO(6,6), MAT(20)
      COMMON/XAR/IE,IT,T(3),F,ZI,NMAT,WZ,NY
      COMMON /RAZM/ KYZO,NS,KELEM,N,LENTA
      DIMENSION P(N)
      DIMENSION PO(6),FO(6)
      REAL MAT
      INTEGER T

      REWIND 3
      WRITE (8,1)
1  FORMAT(/7X,'Внутренние силовые факторы '/
13X,'Элемент',3X,'Матрица индексов',4X,
2'Nx',10X,'Qy',10X,'Mz',10X,'G')
      DO 5 I=1,KELEM
      READ(3) IE,T,NY,NSM,FMGO,FT,F,WZ
      NK=NSM+1
      NSEM=NY*NSM
      NSEO=NY*NS
      DO 2 J=1,NY
      K1=(T(J)-1)*NS
      DO 2 K=1,NS
      I1=(J-1)*NS+K
      K1=K1+1
2  PO(I1)=P(K1)/1.E5
      CALL MPRD(FMGO,PO,FO,NSEO,NSEO,1,6,6,6,1,6,1)
      CALL MPRD(FT,FO,PO,NSEM,NSEO,1,6,6,6,1,6,1)
      GN=-PO(1)/F
      GK=PO(4)/F
      IF(WZ) 11,11,10
10  GN=GN+PO(3)/WZ
      GK=GK-PO(6)/WZ
11  WRITE (8,3) IE,T(1),(PO(J),J=1,NSM),GN
3  FORMAT(I7,I14,F15.2,3F12.2)
      WRITE (8,4) T(2),(PO(J),J=NK,NSEM),GK
4  FORMAT(I21,F15.2,3F12.2)
5  CONTINUE
      RETURN
      END

```

#### 4.2.6. Ошибки округления вычислений

Как отмечалось, матрица коэффициентов системы уравнений ленточная, положительно определённая, симметричная. Диагональные коэффициенты матрицы преобладают по значению над побочными, и поэтому при решении системы уравнений нет необходимости в выборе главного элемента, т. е. в процессе исключения при делении на элементы, расположенные на главной диагонали, элементы образуемой матрицы будут не слишком велики, что уменьшает ошибки округления вычислений.

При решении задачи возникают ошибки в результатах расчёта. Во-первых, ошибки возникают при дискретизации конструкции (округления исходных данных), а также вследствие округлений в ходе самого процесса вычислений [5].

Ошибка округления вычислений возрастает с увеличением числа КЭ в модели конструкции. Во-первых, это приводит к возрастанию числа арифметических операций, так как увеличивается число уравнений системы и, во-вторых, доля деформации в векторе узловых перемещений КЭ уменьшается, в сравнении с долей перемещения элемента как твёрдого тела.

При точном решении полной системы уравнений число операций умножения равно  $n^3/3$ , где  $n$  – число уравнений системы. Для ленточных матриц число неизвестных в каждом уравнении мало и решение системы уравнений требует  $n^2 \cdot (LENTA - 1)$  умножений.

Для получения решения системы уравнений с точностью до  $t$  десятичных знаков при использовании метода исключения Гаусса необходимо элементы матрицы коэффициентов при неизвестных  $[K_*^0]$  и элементы вектора узловой нагрузки  $\{P^0\}$  задавать с точностью до  $t + r$  десятичных знаков, где

$$r = \lg n.$$

Точность вычислений можно повысить, если подставить полученные значения корней системы уравнений в первоначальную систему уравнений и вычислить невязку, а, затем, используя эту невязку в качестве новых правых частей, опять решить систему уравнений. Сумма этих двух решений даст уточненное решение. Однако чаще невязки используются для оценки ошибок округления вычислений.

Точность вычислений на ЭВМ можно повысить и в том случае, если решать систему разрешающих линейных алгебраических уравнения равновесия МКЭ с двойной точностью. В зависимости от типа ЭВМ это соответствует представлению чисел с числом значащих десятичных цифр. Для ЭВМ типа IBM PC-совместимый ПК количество значащих десятичных

цифр мантииссы обычной точности, как правило, семь, а двойной – одиннадцать.

Двойную точность желательно использовать только при решении системы уравнений равновесия. Но в этом случае увеличиваются используемый объем оперативной памяти и время решения.

В пакете прикладных программ на Фортране [7], выполняющих операции над матрицами, имеется подпрограмма CONVТ, предназначенная для преобразования элементов матрицы из обычной точности в двойную или из двойной точности в обычную. В этой подпрограмме одна матрица содержит элементы в форме чисел обычной точности, а другая – в форме чисел двойной точности, что крайне нерационально для оперативной памяти ЭВМ: рабочий массив оперативной памяти для решения системы уравнений увеличивается в три раза.

Предлагается более эффективный алгоритм преобразования коэффициентов системы уравнений из обычной точности в двойную, при котором обе матрицы коэффициентов с обычной и двойной точностью совпадают. Преобразование выполняется с использованием внешней памяти ЭВМ и заключается в следующем.

Пусть матрица коэффициентов системы линейных уравнений сформирована с обычной точностью (каждому элементу матрицы отведено 4 байта) и записана во внешнюю память в файл прямого доступа NF по уравнениям узлов, т. е. число записей равно  $KNY$  – числу узлов расчётной схемы конструкции, а длина одной записи равна  $NS \cdot LENTA$ . Преобразование матрицы коэффициентов системы уравнений из обычной точности в двойную выполняет подпрограмма DFORM, в которой каждая запись во внешней памяти длиной  $NS \cdot LENTA$  преобразуется в две записи, каждая из которых тоже длиной  $NS \cdot LENTA$ , но каждому элементу матрицы отводится по 8 байт.

Процесс преобразования в подпрограмме DFORM выполняется следующим образом.

В цикле 1 четные элементы массива FMG (обычной точности) зануляются. В цикле 2 (по числу узлов в конструкции  $KNY$ , т. е. по числу запи-

сей) из внешней памяти с файла прямого доступа NF считывается последняя запись (преобразования выполняются снизу), элементы которой присваиваются нечетным элементам массива FMG. Преобразованный массив FMG записывается во внешнюю память (рис. 4.8).

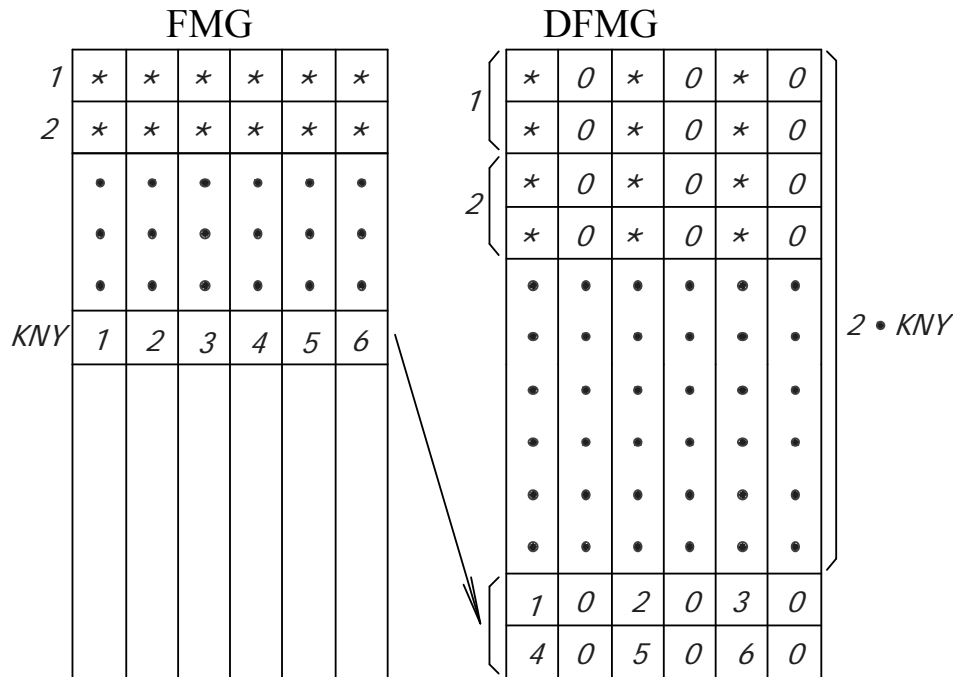


Рис. 4.8. Схема преобразования в двойную точность

Таким образом, у элементов массива DFMG (двойной точности) в первых 4 байтах – значение элемента массива FMG, а в следующих – 0.

В приведенной подпрограмме DFORM массив FMG записывается во внешнюю память в последние две записи. Так как файл прямого доступа остается прежним, то число записей в файле увеличивается вдвое.

Можно использовать одну запись, но в этом случае при описании файла прямого доступа NF – спецификация длины записи в байтах RECL определится выражением:

$$RECL = LENTA \cdot NS \cdot 8.$$

Решение системы уравнений выполняется с матрицей коэффициентов двойной точности – DFMG, которой назначается общая память с матрицей обычной точности FMG с помощью оператора общей памяти:

$$EQUIVALENCE (FMG (1), DFMG (1)).$$

### Пример подпрограммы

- Переменные во фрагменте управляющей программы и в DFORM:

DFMG	Размер рабочего массива оперативной памяти двойной точности (матрица системы уравнений двойной точности)
FMG	Размер рабочего массива оперативной памяти обычной точности (матрица системы уравнений обычной точности)
P	Вектор узловой нагрузки конструкции в общей системе координат
NF	Номер файла прямого доступа
ISTR	Число строк в матрице FMG
NS	Число степеней свободы в узле КЭ
KNY	Число узлов в конструкции.

```
COMMON DFMG (100000), FMG (200000), P (10000)
DOUBLE PRECISION DFMG, P
EQUIVALENCE (FMG (1), DFMG (1))
. . . . .
CALL DFORM (NF, FMG, ISTR, NS, KNY)
CALL SOL (DFMG, P)
. . . . .
STOP
END
```

```
C      Преобразование матрицы из обычной в двойную точность
SUBROUTINE DFORM (NF, FMG, ISTR, NS, KNY)
DIMENSION FMG (1)

K = ISTR*NS
K1 = K+1
K2 = K+K
DO 1 I = 2, K2, 2
1  FMG (I) = 0.
DO 2 I = 1, KNY
NW = KNY+1-I
READ (NF, REC=NW) (FMG(J), J = 1, K2, 2)
NW = NW+NW-1
WRITE (NF, REC=NW) (FMG(J), J = 1, K)
NW = NW+1
WRITE (NF, REC=NW) (FMG(J), J = K1, K2)
2  CONTINUE
RETURN
END
```

### 4.3. Примеры расчётов стержневых систем

Приведен пример расчёта фермы с использованием программы Exell, а также табуляграммы расчётов примеров стержневых систем, которые содержат печать всех исходных данных: общую информацию о расчётной

схеме задачи, характеристики материала, координаты узлов, информацию о КЭ, узлах с кинематическими закреплениями и т. д.

При вводе исходных данных единицы измерений силы и длины могут быть выбраны расчётчиком и определяются соответствующими единицами измерений модуля упругости материала. Единицы измерений результатов расчёта будут те же, что и выбранные единицы измерений в исходных данных задачи.

### ***Статика произвольной плоской стержневой системы***

На рис. 4.9 представлена конечно-элементная модель фермы, которая содержит пять узлов и образована семью КЭ плоской фермы.

Исходные данные:

$$P_1=70 \text{ кН}, P_2=2 \text{ кН}, F_{гор}=64 \text{ см}^2, F_{верт}=40 \text{ см}^2, F_{накл}=60 \text{ см}^2, E=2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}.$$

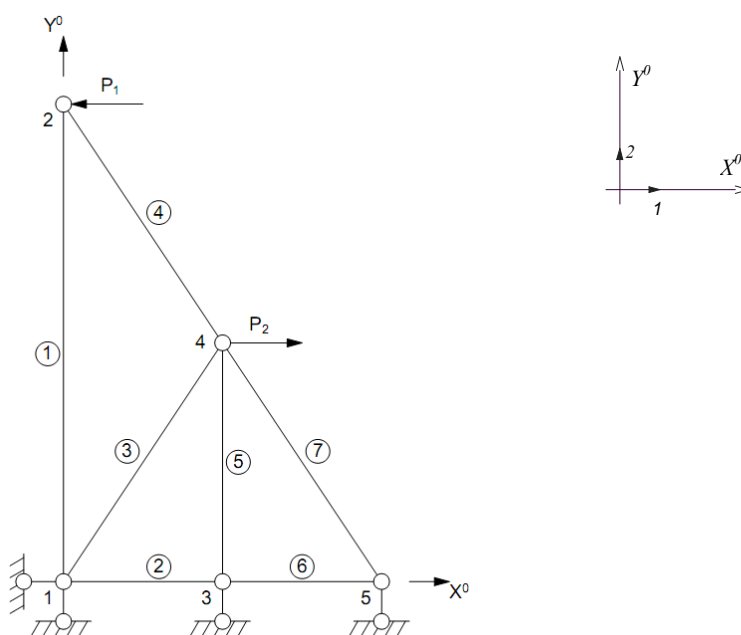


Рис. 4.9. Плоская ферма

Характеристика модели:

- узлов 5,
- КЭ фермы 7.

Ниже приведен расчёт фермы с использованием программы Exell.

- *Вычисление матриц жёсткости КЭ в местной системе координат*

Предварительно для каждого КЭ вычисляется его длина, а затем жёсткостные характеристики  $\frac{EF}{\ell}$ . Единицы измерений величин: сила – *нью-тон*, длина – *см*.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 40}{1200} & -\frac{2 \cdot 10^7 \cdot 40}{1200} \\ -\frac{2 \cdot 10^7 \cdot 40}{1200} & \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 40}{1200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 666666,6667 & -666666,6667 \\ -666666,6667 & 666666,6667 \end{bmatrix},$$

$$[K_2] = [K_6] = \begin{bmatrix} 3200000 & -3200000 \\ -3200000 & 3200000 \end{bmatrix},$$

$$[K_3] = [K_4] = [K_7] = \begin{bmatrix} 1664100,5891 & -1664100,5891 \\ -1664100,5891 & 1664100,5891 \end{bmatrix},$$

$$[K_5] = \begin{bmatrix} 1333333,3333 & -1333333,3333 \\ -1333333,3333 & 1333333,3333 \end{bmatrix}.$$

- *Вычисление матриц ортогонального преобразования КЭ*

Для каждого КЭ по координатам их узлов согласно (1.10) вычисляются векторы  $\lambda$  направляющих косинусов:

$$[T_1] = [T_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = [T_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0,5547 & 0,8321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5547 & 0,8321 \end{bmatrix},$$

$$[T_4] = [T_7] = \begin{bmatrix} 0,5547 & -0,8321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5547 & -0,8321 \end{bmatrix}.$$

- *Вычисление матриц жёсткости КЭ в общей системе координат*

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

- *Формирование матрицы жёсткости конструкции*

$$[K^0] = [A]^T [K_\kappa^0] [A],$$

где квазидиагональная матрица жёсткости конструкции  $[K_\kappa^0]$  формируется согласно выражению (1.3), а матрица соответствий конструкции  $[A]$  будет

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Формирование системы уравнений равновесия и ее решение

$$[K_*^0] \{Z^0\} = \{P^0\}, \quad \{Z^0\} = [K_*^0]^{-1} \{P^0\}.$$

Выполнив преобразования матрицы  $[K^0]$ , согласно условиям закрепления, получим следующую систему разрешающих линейных уравнений равновесия:



$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 512030,950 & -768046,426 & 0 & 0 & -512030,950 & 768046,426 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -768046,426 & 1818736,305 & 0 & 0 & 768046,426 & -1152069,638 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6400000,000 & 0 & 0 & 0 & -3200000,000 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -512030,950 & 768046,426 & 0 & 0 & 1536092,851 & -768046,426 & -512030,950 & 0 \\
0 & 0 & 768046,426 & -1152069,638 & 0 & 0 & -768046,426 & 4789542,248 & 768046,426 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3200000,000 & 0 & -512030,950 & 768046,426 & 3712030,950 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\times \begin{Bmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \\ z_3^0 \\ z_4^0 \\ z_5^0 \\ z_6^0 \\ z_7^0 \\ z_8^0 \\ z_9^0 \\ z_{10}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -70000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В результате решения системы уравнений определяется вектор узловых перемещений конструкции в общей системе координат:

$$\{Z^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4610423 \\ -0,1575000 \\ -0,0106771 \\ 0 \\ -0,0380192 \\ 0,0333751 \\ -0,0213541 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- *Вычисление векторов узловых перемещений КЭ в общей системе координат*

$$\{Z_{\kappa}^0\} = [A] \{Z^0\}.$$

Вектор узловых перемещений  $\{Z_{\kappa}^0\}$  состоит из следующих векторов перемещений КЭ:

$$\{Z_1^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4610423 \\ -0,1575000 \end{Bmatrix}, \quad \{Z_2^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0106771 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{Z_3^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0380192 \\ 0,0333751 \end{Bmatrix},$$

$$\{Z_4^0\} = \begin{Bmatrix} -0,4610423 \\ -0,1575000 \\ -0,0380192 \\ 0,0333751 \end{Bmatrix}, \quad \{Z_5^0\} = \begin{Bmatrix} -0,0106771 \\ 0 \\ -0,0380192 \\ 0,0333751 \end{Bmatrix}, \quad \{Z_6^0\} = \begin{Bmatrix} -0,0106771 \\ 0 \\ -0,0213541 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\{Z_7^0\} = \begin{Bmatrix} -0,0380192 \\ 0,0333751 \\ -0,0213541 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- Вычисление векторов узловых перемещений КЭ в местной системе координат

$$\{Z_r\} = [T_r] \{Z_r^0\}.$$

- Вычисление векторов внутренних силовых факторов КЭ в местной системе координат

$$\{S_r\} = [K_r] \{Z_r\}.$$

Результаты вычисления векторов внутренних силовых факторов (продольных сил) КЭ:

$$\begin{aligned} \{S_1\} &= \begin{Bmatrix} 105000,000 \\ -105000,000 \end{Bmatrix}, \quad \{S_2\} = \begin{Bmatrix} 34166,633 \\ -34166,633 \end{Bmatrix}, \quad \{S_3\} = \begin{Bmatrix} -11117,051 \\ 11117,051 \end{Bmatrix}, \\ \{S_4\} &= \begin{Bmatrix} -126194,293 \\ 126194,293 \end{Bmatrix}, \quad \{S_5\} = \begin{Bmatrix} -44500,122 \\ 44500,122 \end{Bmatrix}, \quad \{S_6\} = \begin{Bmatrix} 34166,633 \\ -34166,633 \end{Bmatrix}, \\ \{S_7\} &= \begin{Bmatrix} -61594,72633 \\ 61594,72633 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

По значениям элементов этих векторов (продольных сил в начале и конце КЭ) строится эпюра продольных сил (рис. 4.10):

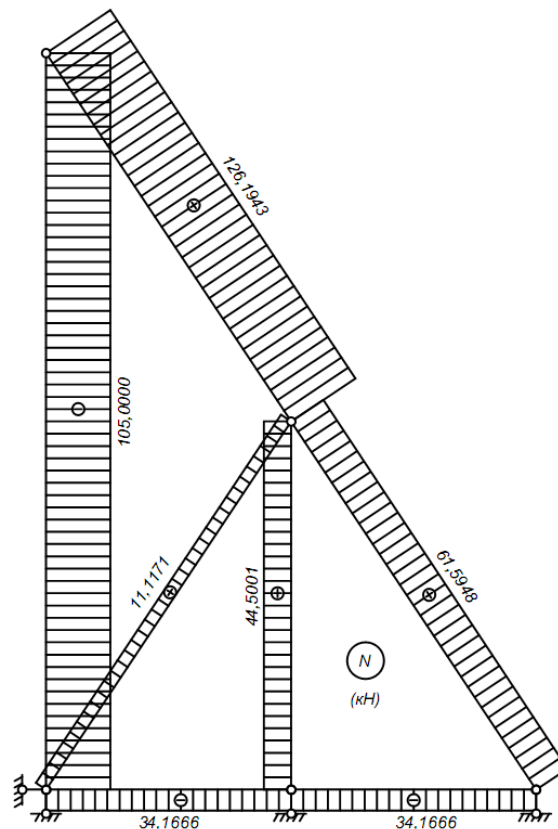
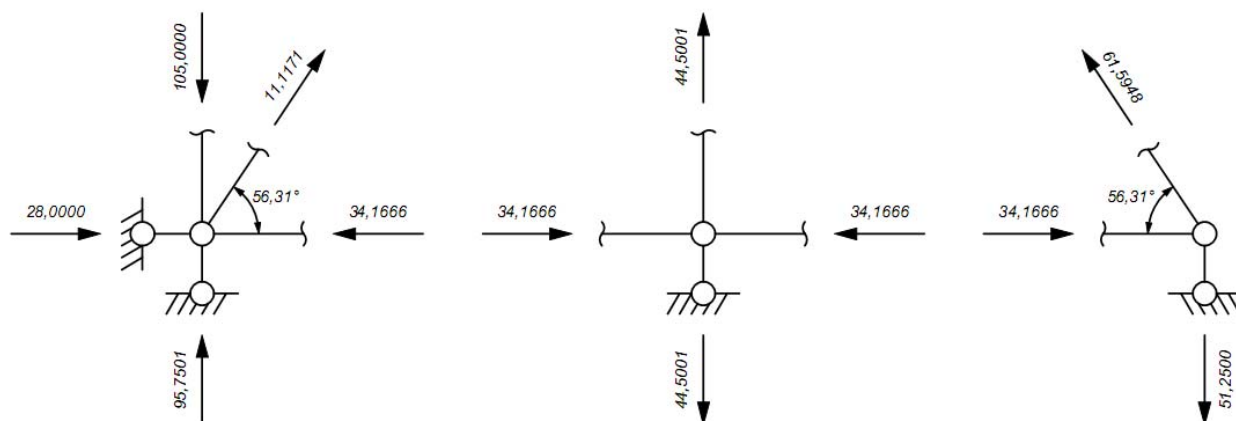


Рис. 4.10. Эпюра продольных сил

Из условий равновесия ( $\Sigma X^0 = 0$ ,  $\Sigma Y^0 = 0$ ) узлов, в которых расположены опоры, определяются горизонтальная и три вертикальных реакции опор и выполняется статическая проверка:



Статическая проверка:

$$\Sigma X^0 = 28 + 42 - 70 = 0,$$

$$\Sigma Y^0 = 95,75 - 44,50 - 51,25 = 0.$$

Ниже приведены табуляграммы расчёта примеров стержневых систем, выполненных по соответствующим программам [8, 9, 10, 11, 12].

### Табуляграмма расчёта плоской фермы

#### Плоская ферма

#### И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е \*\*\*\*\*

Узлов: 5  
Ст. св. в узле: 2  
Элементов: 7  
Материалов: 1  
Лента: 8

Номер материала    Модуль упругости  
1                      2000000.00

Узлов с нагрузкой и перемещениями: 2

Узел	Координаты		Вектор нагрузки		Mz
	X	Y	Rx	Ry	
1	.00	.00	.00	.00	
2	.00	1200.00	-7000.00	.00	
3	400.00	.00	.00	.00	
4	400.00	600.00	4200.00	.00	
5	800.00	.00	.00	.00	

Элементов с шарнирами: 0

Число различных сечений стержней: 1

Геометрические характеристики сечений КЭ

Сечение	F	Iz	Wz
1	40.		
2	64.		
3	60.		

Элемент	Тип	Матрица индексов		F	Jz	NMAT
1	1	1	2	40.00	.00	1
2	1	1	3	64.00	.00	1
3	1	1	4	60.00	.00	1
4	1	2	4	60.00	.00	1
5	1	3	4	40.00	.00	1
6	1	3	5	64.00	.00	1
7	1	4	5	60.00	.00	1

ПРОВЕРКА

Лента МЖК: 8

КЭ фермы: 7

Балочных КЭ: 0

Узлов с закреплениями: 3

Условия закреплений: 0 - связь

1 - свобода

Узел	Dx	Dy	Rz
1	0	0	
3	1	0	
5	1	0	

Заданных перемещений: 0

Связей с заданной жёсткостью: 0

# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

Узел	Перемещения узлов (10 <sup>-5</sup> )		Rz
	Dx	Dy	
1	.00	.00	
2	-46104.22	-15750.00	
3	-1067.71	.00	
4	-3801.92	3337.51	
5	-2135.41	.00	

Элемент	Матрица индексов	Внутренние силовые факторы и напряжения	
		Nx	G
1	1	10500.00	-262.50
	2	-10500.00	
2	1	3416.66	-53.38
	3	-3416.66	
3	1	-1111.70	18.52
	4	1111.70	
4	2	-12619.43	210.32
	4	12619.43	
5	3	-4450.01	111.25
	4	4450.01	
6	3	3416.66	-53.38
	5	-3416.66	
7	4	-6159.48	102.65
	5	6159.48	

# Табуляграмма расчёта трёхпролетной балки (Рис. 4.5)

Трёхпролетная ст. определяемая балка

## И С Х О Д Н Ы Е    Д А Н Н Ы Е \*\*\*\*\*

Узлов: 7  
Ст. св. в узле: 3  
Элементов: 6  
Материалов: 1  
Лента: 6

Номер материала    Модуль упругости  
1                      2000000.00

Узлов с нагрузкой и перемещениями: 2

Узел	Координаты		Вектор нагрузки		Mz
	X	Y	Px	Pu	
1	.00	.00	.00	.00	.00
2	30.00	.00	.00	.00	.00
3	40.00	.00	.00	-100.00	.00
4	50.00	.00	.00	.00	.00
5	60.00	.00	.00	.00	.00
6	90.00	.00	.00	.00	.00
7	100.00	.00	.00	.00	-1000.00

Элементов с шарнирами: 2

Граничные условия: 0 - связь  
1 - свобода в МСК  
-1 - свобода в ОСК

Элемент	Dx	Dy	Rz
1	0	0	0
	0	0	1
4	0	0	1
	0	0	0

Число различных сечений стержней: 1

Геометрические характеристики сечений КЭ

Сечение	F	Iz	Wz
1	6.16	22.80	9.10

Элемент	Тип	Матрица индексов		F	Iz	NMAT
1	3	1	2	6.16	22.80	1
2	2	2	3	6.16	22.80	1
3	2	3	4	6.16	22.80	1
4	3	4	5	6.16	22.80	1
5	2	5	6	6.16	22.80	1
6	2	6	7	6.16	22.80	1

## ПРОВЕРКА

Лента МЖК: 6  
КЭ фермы: 0  
Балочных КЭ: 0

Узлов с закреплениями: 2

Условия закреплений: 0 - связь  
1 - свобода

Узел	Dx	Dy	Rz
1	0	0	0
5	1	0	1

Заданных перемещений: 0

Связей с заданной жёсткостью: 1

Узел	Связь	Жёсткость
6	2	1000.00

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА**  
\*\*\*\*\*

-5

Узел	Перемещения узлов (10 <sup>-5</sup> )		
	Dx	Dy	Rz
1	.00	.00	.00
2	.00	-986.84	58.85
3	.00	-380.12	64.33
4	.00	299.71	69.81
5	.00	.00	-33.63
6	.00	-1666.67	-82.97
7	.00	-2606.00	-104.90

Элемент	Матрица индексов	Внутренние силовые факторы и напряжения			
		Nx	Qy	Mz	G
1	1	.00	50.00	1500.00	164.84
	2	.00	-50.00	.00	-164.84
2	2	.00	50.00	.00	.00
	3	.00	-50.00	500.00	.00
3	3	.00	-50.00	-500.00	-54.95
	4	.00	50.00	.00	54.95
4	4	.00	-50.00	.00	.00
	5	.00	50.00	-500.00	.00
5	5	.00	-16.67	500.00	54.95
	6	.00	16.67	-1000.00	-54.95
6	6	.00	.00	1000.00	109.89
	7	.00	.00	-1000.00	-109.89

### **Статика произвольной пространственной стержневой системы**

На рис. 4.11. представлена модель простейшей пространственной консоли. Для пространственной стержневой системы необходима ориентация главных осей инерции сечения стержня КЭ относительно общей системы координат, задаваемая углом  $ALPHA$  (рис. 1. 17). Для этой задачи угол  $ALPHA$  оси  $Z$  в местной системе координат по отношению к оси  $\psi$  – вспомогательной системы координат  $\phi\psi\eta$  – для всех стержней равен  $90^\circ$ .

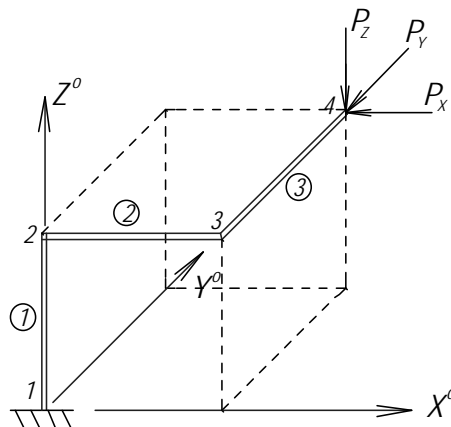


Рис. 4.11. Пространственная консоль  
Табуляграмма расчёта пространственной консоли

**Пространственная консоль**

**И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е**  
 \*\*\*\*\*

Буфер: 2000000  
 Узлов: 4  
 Степеней св. в узле: 6  
 Элементов: 3  
 Лента МЖК(istl): 12  
 Строк(ibyf/istl): 142857  
 Уравнений: 28

Модуль упругости    Модуль сдвига  
 2000000.0            800000.0

Узлов с сосредоточенной нагрузкой: 1  
 Вектор узловой нагрузки в ХоYoZo

Узел	PXo	PYo	PZo	MXo	MYo	MZo
4	-5.00	-5.00	-5.00	.00	.00	.00

Координаты узлов в ХоYoZo

Узел	Xo	Yo	Zo
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	100.00
3	100.00	.00	100.00
4	100.00	100.00	100.00

Число различных сечений стержней: 1  
 Геометрические характеристики сечений КЭ в XYZ

Сечение	F	Ix	Iy	Iz	Угол	Wy	Wz
1	6.16	1.35	5.61	22.80	90.00	2.75	9.10

Элемент	Тип	Матрица индексов		Сечение
1	3	1	2	1
2	3	2	3	1
3	3	3	4	1

П Р О В Е Р К А

ЛЕНТА МЖК: 12  
 КЭ ФЕРМЫ: 0  
 БАЛОЧНЫХ КЭ: 3  
 КЭ С ШАРНИРАМИ: 0  
 Узлов с закреплениями: 1

Узел            Условия закрепления

	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0	0	0	0	0	0

Заданных перемещений: 0

**Р Е З У Л Ь Т А Т Ы   Р А С Ч Е Т А**  
 \*\*\*\*\*

-5

Перемещения узлов в ХоYoZo(10<sup>-5</sup>)

Узел	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	.00	.00	.00	.00	.00	.00
2	7426.69	1827.70	-4.06	-54.83	222.81	-156.96



3	7422.63	-12040.45	-37139.40	-4370.00	445.63	-102.13
4	13980.70	-12044.51	-488993.50	-4592.81	288.41	-47.31

Печать ВСФ в стержнях: 1  
 Печать напряжений: 1  
 Допускаемые напряжения: 400.00

Внутренние силовые факторы (ВСФ) в XYZ							
Элемент	М.инд.	Nx	Qy	Qz	Mx	My	Mz
1	1	5.00	5.00	-5.00	-.03	.02	-.03
	2	-5.00	-5.00	5.00	.03	500.00	500.00
2	2	5.00	5.00	5.00	500.00	-500.00	-.03
	3	-5.00	-5.00	-5.00	-500.00	.00	500.00
3	3	5.00	-5.00	5.00	.00	-500.00	-500.00
	4	-5.00	5.00	-5.00	.00	.00	.00

Напряжения в точках сечения в XYZ							
Элемент	Матрица индексов		G1	G3	G5	G7	
1	1	2	-.79	-.78	-421.75	-54.32	
3	3	4	-53.41	526.20	-.81	-.81	

В остальных элементах напряжения < 400.0

### Устойчивость произвольной плоской стержневой системы

На рис. 4.12. приведена конечно-элементная модель плоской рамы.

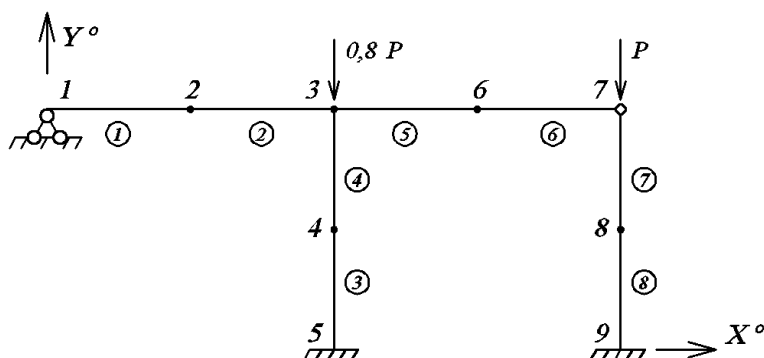


Рис. 4.12. Расчётная схема плоской рамы

### Табуляграмма расчёта

#### Рама

#### И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е

\*\*\*\*\*

УЗЛОВ: 9  
 СТ. СВ. В УЗЛЕ: 3  
 ЭЛЕМЕНТОВ: 8  
 МАТЕРИАЛОВ: 1  
 ПОЛУЭНТА МЖК: 12

-6

НОМЕР МАТЕРИАЛА    МОДУЛЬ УПРУГОСТИ E\*10  
 1                      2.00

УЗЕЛ                    КООРДИНАТЫ  
                           X                    Y

1	.00	400.00
2	200.00	400.00
3	400.00	400.00
4	400.00	200.00
5	400.00	.00
6	600.00	400.00
7	800.00	400.00
8	800.00	200.00
9	800.00	.00

ЭЛЕМЕНТОВ С ШАРНИРАМИ: 1

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ: 0 - СВЯЗЬ  
1 - СВОБОДА В МСК  
-1 - СВОБОДА В ОСК

ЭЛЕМЕНТ	X	Y	Z
7	0	0	-1
	0	0	0

ЭЛЕМЕНТ	ТИП	МАТРИЦА ИНДЕКСОВ	F	Iz	АЛЬФА	НМАТ
1	1	1 2	24.00	32.00	.00	1
2	1	2 3	24.00	32.00	.00	1
3	1	3 4	24.00	32.00	.80	1
4	1	4 5	24.00	32.00	.80	1
5	1	3 6	48.00	64.00	.00	1
6	1	6 7	48.00	64.00	.00	1
7	2	7 8	24.00	32.00	1.00	1
8	1	8 9	24.00	32.00	1.00	1

ПРОВЕРКА: ПОЛУЛЕНТА МЖК 12

УЗЛОВ С ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ: 3

УСЛОВИЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ: 0 - СВЯЗЬ  
1 - СВОБОДА

УЗЕЛ	X	Y	Z
1	0	0	1
5	0	0	0
9	0	0	0

СВЯЗЕЙ С ЗАДАННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ: 0

МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: 30

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА: .00010000

# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА: 8860.4660

-5			
СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР (10 <sup>-5</sup> )			
УЗЕЛ	DX	DY	RZ
1	.00	.00	1.00
2	.56	149.98	.25
3	1.12	-.18	-2.00
4	-165.84	-.09	.63
5	.00	.00	.00

6	1.39	-396.37	-.98
7	1.66	.16	5.93
8	-6738.08	.08	18.10
9	.00	.00	.00

ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: 19

### *Свободные колебания произвольной плоской стержневой системы*

На рис. 4.13 приведена конечно-элементная модель рамы, образованная 6-ю КЭ и представляет собой систему, образованную осями КЭ, проходящими через центры тяжести поперечных сечений стержней. Во втором и шестом узлах расположены сосредоточенные матрицы.

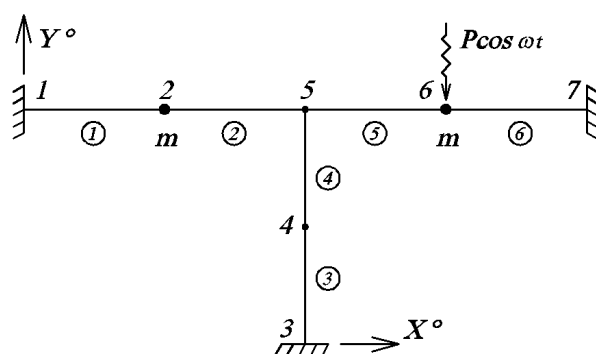


Рис. 4.13. Расчётная схема плоской рамы

### Табуляграмма расчёта

#### Рама

#### И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е \*\*\*\*\*

УЗЛОВ: 7  
СТ. СВ. В УЗЛЕ: 3  
ЭЛЕМЕНТОВ: 6  
МАТЕРИАЛОВ: 1  
ПОЛУЛЕНТА МЖК: 12

-6

НОМЕР МАТЕРИАЛА	МОДУЛЬ УПРУГОСТИ (Е*10 <sup>-6</sup> )	ОБЪЕМ. ВЕС
1	2.00	.00785

УЗЛОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ: 2

УЗЕЛ	КООРДИНАТЫ		ВЕС PX	PY	MZ
	X	Y			
1	.00	400.00	.00	.00	.00
2	200.00	400.00	.00	100.00	.00
3	400.00	.00	.00	.00	.00
4	400.00	200.00	.00	.00	.00
5	400.00	400.00	.00	.00	.00
6	700.00	400.00	.00	100.00	.00
7	1000.00	400.00	.00	.00	.00

ЭЛЕМЕНТОВ С ШАРНИРАМИ: 0

ЭЛЕМЕНТ	ТИП	МАТРИЦА	ИНДЕКСОВ	F	Iz	NMAT
1	1	1	2	24.00	72.00	1
2	1	2	5	24.00	72.00	1
3	1	3	4	24.00	72.00	1
4	1	4	5	24.00	72.00	1
5	1	5	6	24.00	72.00	1
6	1	6	7	24.00	72.00	1

ПРОВЕРКА: ПОЛУЛЕНТА МЖК 12

УЗЛОВ С ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ: 3

УСЛОВИЯ ЗАКРЕПЛЕНИЙ: 0 - СВЯЗЬ

1 - СВОБОДА

УЗЕЛ	Dx	Dy	Rz
1	0	0	0
3	0	0	0
7	0	0	0

СВЯЗЕЙ С ЗАДАННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ: 0

КОЛИЧЕСТВО ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ: 1

МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: 30

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА: .00010000

# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

-1

1-Я СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА (C ): 26.777

-5

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР (10 )

УЗЕЛ	Dx	Dy	Rz
1	.00	.00	.00
2	100000.00	609219800.00	2387949.00
3	.00	.00	.00
4	-501943200.00	-938283.60	2394309.00
5	200000.00	-1876567.00	-9494044.00
6	99999.98	-3885952000.00	2489245.00
7	.00	.00	.00

ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: 6

## *Вынужденные колебания произвольной стержневой системы*

Приняв частоту  $\omega = 0,8 \varphi_1$  возмущающей силы (10 кН), выполнен расчёт рамы на вынужденные колебания. В результате расчёта определяются перемещения узлов и внутренние силовые факторы.

## Табуляграмма расчёта

Рама

# И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е \*\*\*\*\*

УЗЛОВ: 7  
СТ. СВ. В УЗЛЕ: 3

ЭЛЕМЕНТОВ: 6  
 МАТЕРИАЛОВ: 1  
 ПОЛУЛЕНТА МЖК: 12

-1  
 ЧАСТОТА ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ (С ) : 21.42160

-6  
 НОМЕР МАТЕРИАЛА МОДУЛЬ УПРУГОСТИ (Е\*10 ) ОБЪЕМ. ВЕС  
 1 2.00 .00785

УЗЛОВ С ВОЗМУЩАЮЩИМИ СИЛАМИ: 1

УЗЛОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ: 2

УЗЕЛ	КООРДИНАТЫ		ВОЗМУЩАЮЩИЕ СИЛЫ			ВЕС		
	X	Y	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	M <sub>z</sub>	X	Y	Z
1	.00	400.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
2	200.00	400.00	.00	.00	.00	.00	100.00	.00
3	400.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
4	400.00	200.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
5	400.00	400.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
6	700.00	400.00	.00	-1000.00	.00	.00	100.00	.00
7	1000.00	400.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00

ЭЛЕМЕНТОВ С ШАРНИРАМИ: 0

ЭЛЕМЕНТ	ТИП	МАТРИЦА ИНДЕКСОВ	F	I <sub>z</sub>	NMAT
1	1	1 2	24.00	72.00	1
2	1	2 5	24.00	72.00	1
3	1	3 4	24.00	72.00	1
4	1	4 5	24.00	72.00	1
5	1	5 6	24.00	72.00	1
6	1	6 7	24.00	72.00	1

ПРОВЕРКА: ПОЛУЛЕНТА МЖК 12

УЗЛОВ С ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ: 3

УСЛОВИЯ ЗАКРЕПЛЕНИЙ: 0 - СВЯЗЬ  
 1 - СВОБОДА

УЗЕЛ	D <sub>x</sub>	D <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
1	0	0	0
3	0	0	0
7	0	0	0

СВЯЗЕЙ С ЗАДАННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ: 0

# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

-5  
 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗЛОВ (10 )

УЗЕЛ	D <sub>x</sub>	D <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
1	.00	.00	.00
2	68.81	344889.10	1485.03
3	.00	.00	.00
4	-306969.90	-637.77	1489.33
5	137.62	-1275.50	-5924.78
6	68.81	-2572450.00	1528.73
7	.00	.00	.00

ЭЛЕМЕНТ	МАТРИЦА ИНДЕКСОВ	ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ		
		Nx	Qy	Mz
1	1	-165.15	-430.39	-53413.13
	2	165.14	404.36	-31190.04
2	2	-165.14	-243.03	31190.04
	5	165.12	190.98	-73631.20
3	3	1530.67	-346.69	-45119.10
	4	-1530.61	324.01	-22945.99
4	4	1530.61	-324.01	22946.00
	5	-1530.45	275.19	-82044.68
5	5	110.07	1339.47	155675.90
	6	-110.10	-949.98	207262.40
6	6	110.10	-1253.35	-207262.40
	7	-110.11	2453.71	-270401.05

### Контрольные вопросы.

1. Что представляет собой расчётная схема стержневой системы?
2. Что является узлом сопряжения КЭ в расчётной схеме фермы?
3. Какие сечения стержневой системы в её расчётной схеме принимаются за узлы сопряжения КЭ?
4. В чём преимущество регулярной нумерации узлов расчётной схемы стержневой системы?
5. Как вычисляется объем оперативной памяти ЭВМ, необходимый для решения разрешающей системы уравнений равновесия?
6. Как вычисляется половина ширины ленты матрицы коэффициентов разрешающей системы уравнений равновесия?
7. Как моделируются криволинейные участки стержневой системы?
8. В какой системе координат вводятся координаты узлов расчётной схемы стержневой системы?
9. Что значит эквивалентная узловая нагрузка?
10. Как определяется эквивалентная узловая нагрузка?
11. В какой системе координат вводятся заданные сосредоточенные силы и моменты, действующие на стержневую систему?
12. Что представляют собой элементы матрицы индексов КЭ фермы и стержневых КЭ?
13. Способы реализации кинематических условий закрепления задачи?
14. В чем особенность приближенного способа реализации кинематических условий закрепления?
15. Как учитываются заданная жёсткость (податливые опоры, жёсткость узловых соединений)?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом пособии приведены основные зависимости алгоритма МКЭ, последовательность расчёта, матрицы жёсткости КЭ фермы, балочных КЭ, матриц масс и потенциала, как с жёсткими узлами, так и с шарнирами в узлах. При построении матриц жёсткости КЭ использовались эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений, используемые в классической строительной механике стержневых систем при расчёте статически неопределимых систем методом перемещений. В то же время получение матрицы жёсткости, матриц масс и потенциала нагрузки КЭ выполнены и характерным для конечно-элементной процедуры способом. МКЭ представляет методику, предназначенную для расчёта конструкций на вычислительных машинах. В связи с этим уделено внимание вычислительным программам: численной реализации расчёта стержневых систем МКЭ. Структура программ, реализующих МКЭ, строится по модульному принципу, т. е. программы состоят из модулей, которые, в свою очередь, состоят из одной или нескольких подпрограмм. В пособии приведены подпрограммы, реализующие все этапы последовательности расчёта, а также подпрограммы, реализующие формирование, вычисление матриц жёсткости, матриц масс и потенциала КЭ, вектора узловой нагрузки, векторов узловых перемещений и так далее, их описание. При выполнении расчётно-проектировочных работ по расчёту плоской фермы и статики плоской стержневой системы содержательная часть (составление исходных матриц и векторов) выполняется студентами вручную, а механическая (арифметические операции) – ЭВМ. Для выполнения арифметических операций используется программа Exell. Далее расчёт этой же задачи выполняется только с использованием программы для ЭВМ с предоставлением табуляграммы расчёта. Задачи расчёта плоской стержневой системы на устойчивость, на свободные и вынужденные колебания выполняются только с использованием программ для ЭВМ.

В заключение в пособии приведены табуляграммы расчётов примеров стержневых систем.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$XYZ$	Местная система координат
$X^0 Y^0 Z^0$	Общая система координат
$\{ \}$	Вектор-столбец
$[ \ ]$	Прямоугольная матрица
$\{P_r\}$	Вектор узловых сил КЭ в местной системе координат
$P_x, P_y, P_z$	Узловые силы по направлению соответствующих осей местной системы координат
$M_x, M_y, M_z$	Узловые моменты относительно соответствующих осей местной системы координат
$\{Z_r\}$	Вектор узловых перемещений КЭ в местной системе координат
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	Линейные перемещения вдоль осей $X, Y, Z$
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Угловые перемещения относительно осей $X, Y, Z$
$[T_r]$	Матрица ортогонального преобразования координат КЭ
$[\lambda]$	Матрица направляющих косинусов осей $XYZ$ и $X^0 Y^0 Z^0$
$\{P_r^0\}$	Вектор узловых сил КЭ в общей системе координат
$\{Z_r^0\}$	Вектор узловых перемещений КЭ в общей системе координат
$[K_r]$	Матрица жёсткости КЭ в местной системе координат $XYZ$
$[K_r^0]$	Матрица жёсткости КЭ в общей системе координат
$[K_r^u]$	Матрица жёсткости КЭ с шарнирами
$E$	Модуль упругости материала
$G$	Модуль сдвига
$\ell$	Длина стержня
$\Delta \ell$	Абсолютное удлинение-сжатие на всей длине стержня
$F$	Площадь сечения
$J_x$	Момент инерции сечения при кручении
$J_y, J_z$	Моменты инерции сечения относительно главных осей инерции
$W_y, W_z$	Моменты сопротивления сечения относительно главных осей инерции
$\mathcal{E}$	Потенциальная энергия стержня
$\{S_\kappa^0\}$	Вектор внутренних узловых сил конструкции
$[K_\kappa^0]$	Квазидиагональная матрица жёсткости конструкции
$[A]$	Матрица соответствий (связи узлов) конструкции
$[A_r]$	Матрица соответствий КЭ
$\{P^0\}$	Вектор узловой нагрузки конструкции



$\{Z^0\}$	Вектор узловых перемещений конструкции
$[K^0]$	Матрица жёсткости конструкции
$[K_*^0]$	Матрица коэффициентов системы разрешающих уравнений равновесия
$\{S_r^0\}$	Вектор внутренних узловых сил КЭ в общей системе координат
$\{S_r\}$	Вектор внутренних узловых сил КЭ в местной системе координат
$\sigma$	Нормальные напряжения
$[G^0]$	Матрица потенциала нагрузки конструкции
$[H]$	Характеристическая матрица
$\lambda$	Собственные числа
$[G_\kappa^0]$	Квазидиагональная матрица потенциала нагрузки конструкции
$[G_r]$	Матрица потенциала нагрузки КЭ в местной системе координат
$[G_r^0]$	Матрица потенциала нагрузки КЭ в общей системе координат
$P$	Коэффициент осевой силы в матрице потенциала нагрузки КЭ
$[M^0]$	Матрица масс конструкции
$\varphi$	Собственные частоты колебаний системы
$[M_\kappa^0]$	Квазидиагональная матрица масс конструкции
$[M_r]$	Матрица масс КЭ в местной системе координат
$[M_r^0]$	Матрица масс КЭ в общей системе координат
$\{\ddot{Z}^0\}$	Вектор ускорений узлов конструкции
$\omega$	Частота возмущающей силы
$K$	Кинетическая энергия
$\mu$	Погонная масса стержня
$\rho$	Плотность массы материала стержня
$q$	Распределенная (погонная) нагрузка
$IBYF$	Объем оперативной памяти ЭВМ, необходимый для решения разрешающей системы уравнений равновесия
$LENTA$	Ширина половины ленты матрицы жёсткости конструкции
$R$	Наибольшая разность номеров узлов КЭ
$n_y$	Число узлов расчётной схемы конструкции
$NS$	Число степеней свободы в узле КЭ
$n$	Порядок матрицы жёсткости конструкции

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютное удлинение-сжатие 13  
 Аппроксимирующая функция 14, 60

Библиотека конечных элементов 79

Вектор 7  
 – узловых сил 10, 54  
 – узловых перемещений 10, 16  
 – внутренних узловых сил 49  
 – собственный 58  
 – вектор ускорений 70

Деформация 13

Значения собственные 54

Конденсация 23

Коэффициент осевой силы 62

Матрица булева 46  
 – ленточная 51, 98  
 – соответствий элемента 45, 47  
 – – конструкции 45  
 – жёсткости элемента 13, 20, 21, 24  
 – – конструкции 47  
 – – квазидиагональная 45  
 – преобразования координат 27, 34  
 – направляющих косинусов 28  
 – коэффициентов разрешающих уравнений 47  
 – потенциала нагрузки элемента 62  
 – – – конструкции 55  
 – масс элемента 74, 75  
 – сосредоточенных масс 76  
 – – конструкции 71  
 – согласованная 76  
 – несогласованная 76

Модуль сдвига 21  
 – упругости материала 13

Нагрузка распределенная 88  
 – эквивалентная узловая 88  
 Напряжения 103

Оси координат общие 6  
 – – местные 6

Преобразование контраградиентное 10  
 – конгруэнтное 11

Рама 17  
 – плоская 17  
 – плоско-пространственная 20  
 – пространственная 23

Свойство взаимности Максвелла 27

Соотношения между силами и перемещениями 9

Степень свободы 12

Уравнения жёсткости 9  
 – – для элемента 10  
 – равновесия стержневой системы 45  
 Условия граничные 95

Ферма 11  
 – плоская 16, 17  
 – пространственная 17  
 Функции формы 15, 62

Энергия деформации стержня 14  
 – – – потенциальная 14, 59  
 – – – кинетическая 73

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бартеньев, О. В. Современный Фортран / О. В. Бартеньев. – М. : Диалог-МИФИ, 1998. – 197 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2004. – 656 с.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
4. Масленников, А. М. Расчёт строительных конструкций МКЭ / А. М. Масленников. – Л. : ЛИСИ, 1977. – 112 с.
5. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Родионов. – Л. : Судостроение, 1979. – 287 с.
6. Розин, Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов / Л. А. Розин. – Л. : ЛГУ, 1986. – 232 с.
7. Сборник научных программ на Фортране. Выпуск 2 / Пер. с англ. под ред. С. Я. Виленкина. – М. : Статистика, 1974. – 224 с.
8. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005611943. Статика произвольной плоской стержневой системы / Чернов С. А., Дьяков И. Ф. ; заявитель и правообладатель – Ульян. гос. техн. ун-т. № 2005611339 ; заявл. 7.06.2005 ; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 3.08.2005.
9. Свидетельство РФ об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006610529. Статика произвольной пространственной стержневой системы / Чернов С. А., Дьяков И. Ф. ; заявитель и правообладатель – Ульян. гос. техн. ун-т. № 2005613263 ; заявл. 9.12.2005 ; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 7.02.2006.
10. Свидетельство РФ об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005611973. Устойчивость произвольной плоской стержневой системы / Чернов С. А., Черный А. Н. ; заявитель и правообладатель – Ульян. гос. техн. ун-т. № 2005611344 ; заявл. 7.06.2005 ; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 5.08.2005.

11. Свидетельство РФ об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006611072. Свободные колебания произвольной плоской стержневой системы / Чернов С. А., Черный А. Н. ; заявитель и правообладатель – Ульян. гос. техн. ун-т. № 2005613264 ; заявл. 9.12.2005 ; зарегистрир. в Реестре программ для ЭВМ 21.03.2006.
12. Свидетельство РФ об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006610253. Вынужденные колебания произвольной плоской стержневой системы / Чернов С. А., Дьяков И. Ф. ; заявитель и правообладатель – Ульян. гос. техн. ун-т. № 2005612859 ; заявл. 3.11.2005 ; зарегистрир. в Реестре программ для ЭВМ 10.01.2006.
13. Строительная механика автомобиля и трактора / В. П. Агапов, С. С. Гаврюшин, А. Л. Карунин, Н. А. Крамской. – М. : МАДИ, 2002.
14. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 592 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.</b>	3
<b>1. СТАТИКА.</b>	6
1.1. Системы координат. Силы и перемещения.	–
1.2. Конечные элементы стержневых систем. Матрицы жёсткости	1
1.3. Преобразование координат.	27
1.4. Прямой метод в форме перемещений.	42
1.5. Система линейных алгебраических уравнений.	48
Контрольные вопросы.	52
<b>2. УСТОЙЧИВОСТЬ.</b>	53
2.1. Математическая формулировка задачи устойчивости.	–
2.2. Матрицы жёсткости и потенциала нагрузки.	59
Контрольные вопросы.	66
<b>3. ДИНАМИКА.</b>	67
3.1. Математическая формулировка задач динамики.	–
3.2. Матрицы масс конечных элементов.	73
Контрольные вопросы.	77
<b>4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ.</b>	78
4.1. Программы общего назначения.	–
4.2. Особенности объектно-ориентированных программ.	84
4.2.1. Образование расчётной схемы. Структура исходных данных.	88
4.2.2. Формирование матрицы жёсткости конструкции.	93
4.2.3. Граничные условия.	95
4.2.4. Решение разрешающей системы уравнений.	98
4.2.5. Результаты расчёта.	103
4.2.6. Ошибки округления вычислений.	105
4.3. Примеры расчётов стержневых систем.	109
Контрольные вопросы.	126
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.</b>	127
<b>СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ.</b>	129
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.</b>	130
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.</b>	131

Учебное издание

**Дьяков** Иван Федорович, **Чернов** Сергей Анатольевич,  
**Черный** Анатолий Николаевич

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В РАСЧЁТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано к печати 27.12.2010. Формат 70х100/16.

Усл. печ. л. 10,96. Тираж 300 экз. (1-й з-д 1-100 экз).

Ульяновский государственный технический университет,  
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.  
Типография УлГТУ. 432027, Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32