

Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций

С.Ф. Клованич Д.И. Безушко

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ББК 38.53

УДК 624.04: 539.3

Рецензенты: зав.кафедрой строительной механики Одесской государственной

академии строительства и архитектуры д.т.н., проф. А.Ф.Яременко

зав.кафедрой металлических, деревянных и пластмассовых конструкций Одесской государственной академии строительства и

архитектуры д.т.н., проф. В.В.Стоянов

Печатается по решению Ученого совета Одесского национального морского университета от 28.01.2009 г.

С.Ф. Клованич

Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций / Клованич С.Ф., Безушко Д.И. – Одесса: Издательство ОНМУ, 2009.-89с.

Предлагается методика нелинейного расчета железобетонных конструкции при сложном напряженном состоянии с учетом реальных свойств материалов, ориентированная на метод конечных элементов. В основу положены определяющие соотношения для железобетона как для сплошного анизотропного материала, состоящего из двух совместно работающих «сред» - бетона и арматуры. Рассматриваются стадии работы железобетона без трещин и с трещинами по площадкам главных растягивающих напряжений в бетоне. Кроме стандартных конечных объемных элементов, рассматривается изопараметрический слоистый конечный элемент для расчета железобетонных плит и оболочек. примеры расчета реальных конструкций, подтверждающие достоверность предлагаемых моделей материала и метода расчета.

Для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей, а также для специалистов, занимающихся расчетами и проектированием зданий и сооружений.

ISBN 996-7716-50-3

©С.Ф.Клованич Д.И.Безушко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Действующие нормативные документы регламентируют проведение расчетов железобетонных конструкции по двум группам предельных состояний с характерных стадий напряженно-деформированного фактически сводят все виды сооружений к линейным (стержневых) элементам в виде балок, колонн и т.д. На самом деле значительная часть конструкций относится к плоским или пространственным, в которых трудно, а иногда и невозможно, выделить характерные стадии работы. Расчет таких конструкций все чаще выполняется методом конечных элементов с использованием шаговоитерационных процедур общих принципов нелинейной механики И деформируемого твердого тела. Однако достоверность результатов, полученных с помощью метода конечных элементов, определяется в основном достоверностью и степенью обоснованности используемых физических моделей материала и соответствующих определяющих соотношений. При этом модель должна реально характерные свойства наиболее материала нелинейность, неоднородность, способность к образованию трещин и т.п. Однако, несмотря на кажущуюся очевидность проблемы, сложность физико-механических явлений при деформировании железобетона является причиной того, что единого формированию такой модели до сих пор не существует. Многочисленные предложения в этой области зачастую грешат сложностью и громоздкостью математических преобразований, опираются иногда на не вполне обоснованные гипотезы, не всегда адекватно воспроизводят опытные данные, и самое главное, в большинстве своем носят умозрительный характер, не имеют и не подтверждены конечноэлементными расчетами программной реализации модельных фрагментов и реальных конструкций. Совершенно очевидно, что модель материала должна отвечать следующим требованиям. Во-первых, по словам Дж.Аргироса, "какой бы подход не использовался в расчете, важно понять, что отделение теоретических основ метода от машинной реализации было бы огромной ошибкой. ЭВМ должна определять теорию метода". То есть необходимо, прежде всего, чтобы модель учитывала особенности реализации МКЭ в нелинейной постановке. Во-вторых, она должны отражать, по возможности, наиболее характерные свойства материала. В-третьих, желательно, количество исходных параметров модели было бы минимальным и они могли бы быть получены из стандартных испытаний контрольных образцов, либо по данным нормативных источников. Кроме того, учитывая известную условность при назначении расчетных нагрузок и условий закреплений, неоднородность материалов, точность самого МКЭ нет необходимости чрезмерно усложнять модель, пытаясь учесть в ней как можно больше факторов, в том числе и второстепенных. Точность ее должна находиться в пределах точности исходных предпосылок. Нельзя допустить, чтобы она была чересчур громоздкой, модель должна иметь очевидный механический смысл, контролируемый и инженернообозримый вид. При таком подходе естественным представляется феноменологический анализ наиболее общих свойств материалов, основанный на целенаправленной обработке имеющихся экспериментальных данных.

Перечисленные обстоятельства определили структуру и содержание данной работы.

Во введении анализируются существующие исследования в области моделирования работы железобетона при сложном наряженном состоянии. Особое внимание уделяется изгибаемым системам в виде плит и оболочек.

В первой главе излагаются общетеоретические вопросы метода конечных элементов, приводятся методики и алгоритмы решения нелинейных задач с помощью МКЭ.

Bo второй описывается библиотека главе конечных элементов, предназначенных для решения трехмерных задач. Особое внимание уделяется многослойным изопараметрическим конечным элементам, предназначенным для расчета толстых железобетонных плит и оболочек. Данные элементы лишь частично удовлетворяет гипотезам Кирхгофа-Лява о нормали к срединной поверхности, сохраняя лишь ее прямолинейность в процессе деформирования, допуская изменение длины и отклонение от нормали. Особенностью этих элементов является также то, что при их формировании используются общие физические соотношения трехмерной задачи с сохранением всех шести компонент напряжений и деформаций.

В третьей главе предлагается модель деформирования бетона, арматуры и железобетона на стадиях до и после образования трещин. В основу положены диаграммы деформирования материалов при одноосных напряженных состояниях, предельные условия, а также гипотезы В.И.Мурашева о распределении нормальных напряжений в арматуре на участке между трещинами.

Четвертая глава посвящена расчету реальных железобетонных конструкций при различных видах напряженных состояний. В ней подтверждается достоверность основных положений работы путем сопоставления результатов расчета по МКЭ с данными экспериментов из независимых источников.

Предназначена для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей, а также для специалистов, занимающихся расчетами и проектированием сооружений.

Железобетон, как известно, композиционный материал, состоящий из двух совместно работающих материалов - бетона и стали. Оба эти материала обладают различными физико-механическими свойствами характеризируются нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями. Бетон также по разному сопротивляется растяжению и сжатию, имеет способность к трещинообразованию, в результате которого нарушается сцепление между бетоном и арматурой и происходит перераспределение усилий между ними. Сложность аналитического описания этих явлений определила, в основном, полуэмпирический характер методов расчета железобетонных конструкций. Систематические исследования экспериментальных железобетонных конструкций по прочности и жесткости были начаты в работах А.Ф.Лолейта [49] и В.И.Мурашева [51]. Принцип «пластического шарнира» А.Ф.Лолейта и теория В.И.Мурашева легли в основу методов железобетонных изгибаемых элементов по расчетным предельным состояниям, которые нашли отражение в целом ряде ныне действующих нормативных документов. Обе теории базируются на гипотезах о характере распределения напряжений по высоте сечения на отдельных характерных стадиях работы элемента, и не дают ответа на вопрос о действительном характере напряжений в процессе деформирования – от начальной стадии до разрушения. Более того, в расчет принимаются только нормальные напряжения, и только продольные деформации в направлении оси балки (стержня).

Для точного ответа на вопрос о процессе деформирования железобетонных конструкций, необходимо привлечение общих методов механики деформирования твердого тела и теории пластичности.

Первые исследования пластичности материала при сложном напряженном состоянии связаны с работами А.А.Ильюшина [20], Прандтля [112], Рейса [59]. Однако, с самого начала было ясно, что для исследования пластичности бетона классические теории неприменимы, так как бетон по разному сопротивляется растяжению-сжатию, обладает способностью к трещинообразованию, что обусловливает появление деформационной анизотропии. У бетона наблюдается также увеличение объема при трехосном сжатии, связанное с нарушением его структуры - так называемый эффект дилатации, что противоречит классической гипотезе об упругом изменении объема.

Одной из первых работ по исследованию пластичности бетона при сложном напряженном состоянии является работа Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [16], в которой сделана попытка учесть все перечисленные особенности материала. В ней бетон рассматривается нелинейно-упругим изотропным материалом, а железобетон транверсально изотропным, как на стадиях до, так и после образования трещин. Теория [16] нашла свое развитие в работах П.М.Бича [10], А.И.Козачевского [32], В.М. Круглова [36], В.И.Корсуна [34], А.П.Кричевского [35].

Несколько иное представление о работе бетона и железобетона как физически нелинейных материалов связано с работами Н.И.Карпенко [21-25], его учеников и соавторов. В ней бетон, как до, так и после появления трещин рассматривается как анизотропный материал. Анизотропия в этом случае связана с процессом деформирования и получила название деформационной анизотропии. Она обусловлена, как процессом трещинообразования, так и дискретным расположением арматуры. Первые исследования в этом направлении отражены в работах А.А.Гвоздева и Н.И. Карпенко [15], где используется гипотеза о деформационной ортотропии материала. При этом направление осей ортотропии совпадает с направлением осей главных напряжений. В дальнейшем ортотропная модель также получила свое развитие в работах Т.А.Балана, С.Ф.Клованича [5], Г.Р.Бидного [7], А.С.Городецкого, В.С.Здоренко [17] и других авторов.

Начало современного представления о природе прочности бетона при трехосном напряженном состоянии и способах ее описания положено в работе М.М.Филоненко-Бородича [64]. В дальнейшем исследования прочности бетона при трехосном напряженном состоянии были осуществлены в работах И.Н.Ахвердова [1], А.В.Яшина [67, 68], Т.А.Балана, С.Ф.Клованича [5], П.М.Бича [10], Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [16], Н.И.Карпенко [22], Е.С.Лейтеса [43], Ј.Н.Argiris [72], K.Willam, P.Warnke [123], D.Darwin, D.A.Pecknold [86] и др.

На этапе становления теории пластичности и прочности бетона и железобетона возможности реализации теоретических предложений применительно к расчету конструкций при сложном напряженном состоянии были весьма ограничены. Это было вызвано необходимостью решения систем дифференциальных уравнений механики, сложность которых усугублялась сложностью определяющих соотношений. В замкнутом виде эти уравнения, как правило, решения не имели, а применение численных методов затруднялось вычислительной техники. Поэтому, несмотря на имеющиеся отсутствием теоретические разработки, основная масса пространственных железобетонных конструкций рассчитывалась методами линейной теории упругости использованием приближенных аналитических решений. Положение кардинально высокоэффективных изменилось появлением численных вычислительных машин большой производительности, когда сложность моделей материала уже не имеет принципиального значения. В этой ситуации одним из главных является вопрос о выборе эффективного численного метода. Выбор метода решения – сложная и противоречивая проблема, не имеющая однозначного решения. Многообразие задач, субъективные оценки возможностей методов и степень владения ими, техническая оснащенность, математическая культура - вот далеко не полный перечень факторов, влияющих на выбор метода решения одной и той же задачи. Сначала в качестве основного при расчете железобетонных конструкций с учетом реальных свойств материала исследователями [25, 66] использовался метод конечных разностей, достоинства и недостатки которого хорошо известны. Но в дальнейшем основной упор в преобладающем большинстве исследований был сделан на метод конечных элементов (МКЭ), который к настоящему времени занял ведущее место, вытеснив постепенно все остальные численные методы. Преимущества МКЭ как численного метода очевидны. Это, прежде всего, возможность сведения задачи к системе линейных или нелинейных алгебраических уравнений непосредственно, без предварительной формулировки их дифференциальных аналогов. Кроме того метод конечных элементов привлек к

себе внимание исследователей главным образом тем обстоятельством, что сплошная среда разбивается на ряд элементов, которые можно рассматривать как конкретные ее части. Части конструкции можно выбрать таким образом, чтобы условия их работы отвечали условиям работы образцов в виде бетонных и железобетонных кубов, призм, цилиндров при стандартных испытаниях. И, наконец, основные процедуры МКЭ стандартны и не зависят от размерности и типа используемых конечных элементов, что позволяет осуществить унификацию этих процедур и создавать программные комплексы по расчету конструкций широкого класса и назначения. Метод конечных элементов в сочетании с мощными ЭВМ допускает использование моделей материалов практически любой степени сложности. Благодаря МКЭ появилась реальная возможность перейти к расчету не только бетонных, но и железобетонных конструкций при сложном напряженном состоянии. МКЭ применительно к расчету железобетонных конструкций выступает не только как численный метод анализа, но и служит инструментом моделирования, когда модель материала отражает специфику самого метода конечных элементов.

Первая методика конечноэлементного расчета железобетонных конструкций с учетом специфических особенностей деформирования материала была предложена в работе D.Ngo и A.C.Scordelis в [107]. В ней бетон и арматура были представлены линейно-упругими треугольными и стержневыми элементами соответственно. Для связи треугольных и стержневых элементов использовался специальный конечный элемент, моделирующий проскальзывание и сцепление между бетоном и арматурой. В рамках этих исследований был выполнен анализ напряженного состояния железобетонных балок, при этом определялись главные напряжения в бетоне и арматуре, силы сцепления. Начиная с этой публикации, появился особый интерес к анализу железобетонных конструкций с помощью МКЭ [90,102,106,118].

M.T.Suidan и W.C.Schnobrich [120] были первыми, кто изучал поведение балок с использованием пространственных изопараметрических конечных элементов. Поведение бетона при трехмерном сжатии принято упругопластическим и описывалось с помощью классической теории пластического течения Мизеса.

А.Nilson [108] сделал попытку учесть нелинейные свойства бетона и арматуры и наличие сил сцепления между ними. При этом впервые использовался шаговый метод расчета. На первом этапе определялся момент образования трещин, на втором этапе расчет производился уже с учетом сформировавшихся трещин. Метод был применен к центрально и внецентрено растянутым железобетонным конструкциям, расчет производился до достижения напряжений в арматуре предельных значений.

H.A.Franklin в [90] предложил нелинейную методику расчета железобетонных конструкций на стадиях до и после образования трещин в едином вычислительном процессе. Нагрузка прикладывалась ступенями, на каждой ступени использовались итерационные уточнения. Это позволило описать поведение конструкции от начального загружения вплоть до разрушения, проследить за развитием и направление трещин в конечных элементах в процессе нагружения. Использовались стержневые и четырехугольные плоские элементы.

В работе А.А. Гвоздева и Н.И. Карпенко [15], использовался способ, при котором сосредоточенная стальная арматура в железобетонных элементах, с

помощью коэффициента армирования размазывалась по сечению. В результате такого подхода железобетон представлялся комплексным материалом, состоящим из двух совместно работающих нелинейных сред - бетона и «размазанной» арматуры.

G.C. Nayak и O.C. Zienkiewicz [106] изучали поведение балок-стенок с учетом процесса трещинообразование и упруго-пластическое поведение бетона при сжатии, используя метод начальных напряжений.

В работе V. Cervenka [84] сформулированы физические зависимости для железобетона на всех стадиях работы: без трещин, с трещинами и при разрушении, которые использовались им в шагово-итерационном конечноэлементном анализе плосконапряженных конструкций.

Для анализа железобетонных балок с учетом геометрической и физической нелинейности К.R.Rajagopal [113] предложил слоистый прямоугольный элемент пластины с осевой и изгибной жесткостью, в котором бетон рассматривался, как ортотропный материал. Рассмотрению вопросов, связанных с анализом работы железобетонных балок и плит в схожей постановке посвящены и работы других авторов - C.S.Lin и A.C.Scordelis [102], F.K.Bashur и D.Darwin [75], J.G.Rots [115], F.Barzegar и W.C.Schnobrich [76].

L.G.Selna [119] рассматривал балки и рамы, моделируемые из одномерных элементов со слоистой структурой в поперечном сечении, что позволило описать развитие трещин и изменение свойств материала в поперечном сечении как функции нагружения и времени.

Несмотря на то, что много исследований посвящено изучению поведения материала на контакте между арматурой и бетоном [93,98,107], существует некоторая неопределенность учета данного явления в расчетах конструкций по МКЭ, поскольку вводится много новых параметров. В результате, в подавляющем большинстве исследований учет совместной работы бетона и арматуры, не рассматривается как самостоятельное явление, а осуществляется при построении физических зависимостей для железобетона.

В одной из своих ранних работ Y.R.Rashid в [114] использует понятие «размазывание» трещин, т.е. железобетон на стадии после образования трещин заменяется сплошным анизотропным материалом с пониженными в направлении нормали к трещине жесткостными характеристиками. Необходимо отметить, что впервые идея размазывания трещин предложена Мурашовым В.И. [51], который ввел коэффициент ψ_s для учета работы бетона между трещинами при расчете деформаций железобетонных изгибаемых конструкций.

R.Gilbert и R.Warner [92] используя метод «размазывания» бетона между трещинами, исследовали влияние угла наклона ниспадающей ветви диаграммы деформирования бетона на поведение железобетонных плит. Они были одними из первых, кто показали, что размеры конечных элементов и учет жесткости бетона между трещинами влияет на результаты расчетов. Несколько последующих работ различных авторов были направленны на подтверждение полученных в работе [92] результатов - Z.P.Bazant и L.Cedolin [78], Z.P.Bazant и B.H.Oh [79], F.Barzegar и W.C.Schnobrich [76], L.D.Leibengood [101]. Учет ниспадающей ветви на диаграмме деформирования размазанного бетона рассматривался в работах C.S.Lin и A.C.Scordelis [102], A.Vebo и A.Ghali [122], F.Barzegar и W.Schnobrich [76].

В рамках гипотезы о «размазывании» трещин существует два подхода к определению направления развития трещин: фиксированное и переменное. При

фиксированном направлении трещины она образуется перпендикулярно к главным растягивающим напряжениям и не меняет своего положения на последующих этапах нагружения. Легкость формулировки и реализации этой модели привела к ее широкому распространению (F.R.Hand и др. [94], C.S.Lin и A.C.Scordelis [102], A.Vebo и A.Ghali [122], F.Barzegar и W.Schnobrich [76], R.Borst и P.Nauta [81]). Однако последующие исследования показали, что при таком подходе возникают проблемы, вызванные вырождением матрицы жесткости. Эти проблемы могут быть преодолены введением условного модуля сдвига бетона в трещине.

В работе R.J.Соре и др. [85] направление трещины не является постоянным, а меняется при последующем нагружении. Серии испытаний F.Vecchio и A.Collins [121] показали, что первоначальная ориентация трещины изменяется в зависимости от последующего пути нагружения. В этой модели направление трещины сохраняет перпендикулярность к главным растягивающим напряжениям и не происходит деформации сдвига в плоскости трещины. При этом отпадает необходимость в определении модуля сдвига бетона в трещине. Данная модель была успешно реализована в работе L.N.Adeghe и M.P.Collins [70].

Одновременно с развитием общих моделей механики железобетона как физически нелинейного анизотропного материала, обладающего способностью к трещинообразованию, развивались и методы расчета изгибаемых плит и оболочек с использованием стандартные гипотез теории изгиба.

При этом методы, основанные на предельном равновесии, заложенные в документах, существующих нормативных постепенно деформационными, основанными на решении нелинейных систем уравнений, равновесия включающих дифференциальные уравнения совместности деформаций и алгебраические нелинейные физических соотношений в виде связи усилий и деформаций в уровне срединной поверхности. Отметим, что первые методологические обоснования деформационных методов были изложены еще в работах А.А.Гвоздева [14], С.М.Крылова [38]. В этих работах железобетонные плиты рассматривались как ортотропные, а арматурные стержни направлены вдоль главных осей симметрии. Изгибные жесткости по осям ортотропии определялись по теории В.И.Мурашева [51]. В работах В.М.Бондаренко, И.А.Тимко, А.Л.Шагина [13] предлагают оценивать напряженно-деформированное железобетонных трещинообразования, нелинейности ПЛИТ c учетом неравномерности деформирования методом интегрального модуля деформаций. При этом задача сводится к расчету линейно деформируемой плиты с переменной жесткостью, эквивалентной жесткости нелинейно-деформируемой железобетонной плиты. Полученное авторами уравнение изгиба по форме совпадает с уравнениями, применяемыми в работах Я.Д.Лифшица [48], однако, его коэффициенты являются величинами переменными. Решение отыскивалось в численном виде методом конечных разностей последовательными приближениями.

В работе А.С.Городецкого и В.С.Здоренко [17] железобетонные плиты рассматриваются как анизотропные из физически нелинейного материала. Физические уравнения изгиба получаются с помощью моделирования процесса деформирования малого элемента, вырезанного из срединной поверхности.

Достаточно общая модель изгиба разработана Н.И.Карпенко [23], где плита рассматривается как анизотропная. Анизотропия при этом обусловлена армированием и трещинами в растянутых зонах. Автор выделяет четыре основные стадии работы железобетонных плит: до момента образования трещин

- упругую и упруго-пластичную; с трещинами - стадию упругой работы арматуры в трещинах и стадию пластических деформаций в растянутой арматуре. Для каждой стадии получены свои физические соотношения. Реализация модели [23] в нелинейных расчетах по МКЭ нашла отражение в работах Т.А.Мухамедиева, М.И.Леви и А.В.Мельника [52], А.М.Проценко и Н.А.Лосина [58]. Подобные модели, но применительно к вариационно-разностному методу, использовалась в работах Л.Г.Дмитриева и В.Н.Шевченко [18].

В работах [88,117] для расчета железобетонных плит использовались специальные многослойные конечные элементы для моделирования развития трещин в поперечных сечениях плиты. Слоистая конечноэлементная модель для плит и оболочек существенно развита Н.И.Карпенко [22], а также используется в работе С.Ф. Клованича и С.Н.Карпенко [28]. Основные зависимости элемента строятся на базе общих подходов трехмерной теории упругости, отличительной особенностью его является то обстоятельство, что в направлении толщины используется линейная интерполяция перемещений, что соответствует гипотезе о прямолинейности нормали. При помощи стандартных преобразований отдельные слои с использованием гипотезы об отсутствии нормальных срединной поверхности напряжений рассматриваются как работающие в условиях плоской деформации.

ГЛАВА 1

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Постановка задачи. Система разрешающих уравнений

Задача механики железобетона рассматривается, как общая задача механики сплошной среды и может быть сформулирована следующим образом: известны (заданы) внешние воздействия на тело, так или иначе закрепленное или движущееся в пространстве, как функции координат и времени. Необходимо найти некоторые системы функций координат и времени, описывающие состояние этого тела. Под внешними воздействиями понимают силовые, температурные, динамические, начальные и другие воздействия.

В систему искомых функций входит, как правило, компоненты вектора перемещений $\{u\}=\{u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)\}$, а также векторов напряжений $\{\sigma\}=\{\sigma_x(x,y,z)\sigma_y(x,y,z)\sigma_z(x,y,z)\tau_{xy}(x,y,z)\tau_{yz}(x,y,z)\tau_{xz}(x,y,z)\}$ и деформаций $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x(x,y,z)\varepsilon_y(x,y,z)\varepsilon_z(x,y,z)\gamma_{xy}(x,y,z)\gamma_{yz}(x,y,z)\gamma_{xz}(x,y,z)\}$. Процедура определения указанных функций применительно к инженерным задачам называется расчетом конструкций. С математической точки зрения расчет конструкций сводится к решению краевых задач для системы уравнений, включающих:

уравнения равновесия

$$[\boldsymbol{\Phi}]^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} = \{ G_v \} \quad (1.1)$$

геометрические уравнения (Коши)

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{u}\}; \tag{1.2}$$

определяющие (физические) уравнения

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},\tag{1.3}$$

где [••] - матрица дифференциальных операторов

$$[\boldsymbol{\Phi}] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix};$$

 $\{G_v\}=\{X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\}$ - вектор-функция объемных сил; [D]- матрица механических характеристик материала размером 6 х 6, для упругого изотропного материала она равна

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \end{bmatrix},$$

E- модуль упругости материала;

 ν - коэффициент Пуассона.

Решая совместно (1.3), (1.2), (1.1), например, относительно неизвестных перемещений можно получить разрешающие уравнения в виде

$$[\boldsymbol{\Phi}]^T[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{u}\} = \{G_{\boldsymbol{v}}\}. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1)-(1.4) должны быть дополнены граничными условиями - кинематическими и статическими.

Отметим, что соотношения (1.3) определяются выбором модели материала и для бетона и железобетона формулируются на базе общих физических уравнений, учитывающих его основные свойства.

Разрешающие уравнения (1.1) - (1.4) возможно существенно упростить для решения некоторых частных задач. Так, в случае осесимметричной задачи в цилиндрических координатах r, θ, z , где z-ось симметрии, когда напряженнодеформированное состояние не зависит от угла θ и характеризуется вектор-функциями $\{u\} = \{u(r,z)w(r,z)\}, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r(r,z)\varepsilon_\theta(r,z)\varepsilon_z(r,z)\gamma_{rz}(r,z)\}$ и определяется внешними воздействиями $\{G_v\} = \{R_v(r,z)Z_v(r,z)\},$ матрица характеристик [D] будет иметь размерность $\{u\}$ и для упругого изотропного материала имеет вид

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & cummempu + o \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}.$$

Матрица дифференциальных операторов будет равна

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial z & \partial / \partial x \end{bmatrix}.$$

Для плоской задачи в случае плоского напряженного или плоского деформированного состояния, когда $\{u\} = \{u(x,y)v(x,y)\},$ $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x(x,y)\varepsilon_y(x,y)\gamma_{xy}(x,y)\};$ $\{\sigma\} = \{\sigma_x(x,y)\sigma_y(x,y)\tau_{xy}(x,y)\},$ матрица [D] имеет размерность 3 х 3 и для упругого изотропного материала равна

$$[D] = \frac{2G}{1 - v'} \begin{bmatrix} 1 & v' & 0 \\ v' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v'}{2} \end{bmatrix},$$

где
$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$
 - модуль сдвига;

v' = v - для плоского напряженного состояния;

 $v = \frac{v}{1-v}$ - для плоского деформированного состояния.

Матрица [Φ] равна

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix}.$$

Несмотря на относительную простоту сформулированной задачи по расчету конструкций, лишь для ограниченного класса тел и нагрузок, совершенно недостаточных для технических приложений, их удается проинтегрировать точно и получить искомую систему функций перемещений, деформаций и напряжений. Обычно расчет разнообразных и сложных сооружений, распространенных в инженерной практике, связан с почти непреодолимыми математическими трудностями, поэтому, как правило, используют приближенные численные методы. В большинстве современных приложений в качестве численного метода

выбирается метод конечных элементов, сущность которого применительно к нелинейным задачам механики железобетона изложена далее.

1.2. Дискретизация области

Рассмотрим твердое деформируемое тело, находящееся в равновесии под внешними воздействиями (силовыми, температурными и т.д.) (рис. 1.1).

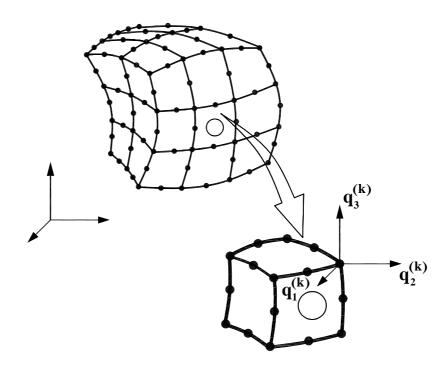


Рис. 1.1. Конечноэлементная модель тела

Мысленно расчленим тело на конечные элементы. Выделим типичный i-ый

конечный элемент и предположим, что этот элемент находится под воздействием только усилий взаимодействия со смежными элементами, возникающими при деформировании тела. Эти силы по отношению к выделенному элементу будем рассматривать как внешние. Очевидно, что если тело находится в равновесии, то и его i-ый элемент под действием указанных сил также находится в равновесии. Приложим далее к i-му элементу вместо реальных распределенных усилий, действующих вдоль границ его стыковки со смежными элементами, статически эквивалентные узловые силы, т.е. силы, действие которых вызывает внутри элемента напряженно-деформированное состояние, аналогичное тому, которое было в нем при фактическом нагружении. Совокупность этих усилий представим вектором столбцом $\{R\}_i = \left\{\!\![R]_i^{(1)}\{R\}_i^{(2)}...\{R\}_i^{(k)}...\{R\}_i^{(m)}\}\!\!$, где $\{R\}_i^{(k)} = \left\{\!\![R]_i^{(k)}R_i^{(k)}...R_i^{(k)}R_i^{(k)}...R_i^{(k)}R_i^{(m$

свободы узла. В результате сплошное тело оказывается представленным набором конечного числа элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. Очевидно, что, интерпретируя сплошную среду таким образом, можно свести расчет тела к расчету системы с конечным числом степеней свободы и, следовательно, определить узловые усилия или узловые перемещения по процедуре, аналогичной по смыслу и алгоритму процедуре расчета стержневых систем методами строительной механики. Для этого остается найти матрицы жесткости для отдельных элементов, а затем рассмотреть условия статической и кинематической совместности совокупности элементов, получив тем самым разрешающее уравнение задачи.

Разумеется, найденные в результате такого подхода узловые перемещения не полной характеристики напряженно-деформированного состояния дают континуальной системы. Поэтому возникает необходимость найти способ перехода от этих величин к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Следует особо подчеркнуть, что этот момент является одним из центральных в МКЭ, во многом предопределяющим его точность. По существу, речь идет о решении задачи механики твердого деформируемого тела для некоторых областей в форме конечных элементов, находящихся под узловыми воздействиями. Если бы такие задачи можно было бы решать точно, то МКЭ в этом смысле был бы точным методом. Так, например, обстоит дело в методе конечных элементов для стержневых систем, когда в рамках гипотез сопротивления материалов поведение стержней-элементов от узловых воздействий описывается точно. Ясно, что при таком подходе поведение каждого элемента, загруженного в узлах, не произвольно, а находится в соответствии с некоторыми внутренними связями, накладываемыми на него интерполяционными функциями. Последние однозначно определяют состояние элемента с помощью вектора узловых перемещений $\{q\}_i$. Особо следует отметить, что из-за наложенных на элемент связей приложение сосредоточенных узловых усилий не вызывает концентрации напряжений в узловых точках. Следовательно, конечные элементы представляют собой элементы особого типа, а именно: их напряженное и деформированное состояние обуславливается связями, при которых, по возможности, сохраняется сплошность рассматриваемого объекта [8].

1.3. Матрицы жесткости конечных элементов. Узловые силы

Между векторами $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$ существует взаимно однозначное соответствие

$${R}_{i} = [K]_{i} {q}_{i},$$
 (1.5)

где $[K]_i$ - матрица жесткости i-го элемента.

Учитывая блочную структуру векторов $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$, матрицу жесткости также можно представить в блочном виде

$$[K]_{i} = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \dots & [K]_{ij}^{(k)} & \dots & [K]_{ij}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{im}^{(1)} & \dots & [K]_{im}^{(k)} & \dots & [K]_{im}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Каждый из блоков матрицы $[K]_{ij}^{(k)}$ определяет реакции в j-ом узле от единичных перемещений в k-ом узле i-го элемента.

Для получения матриц жесткости отдельных элементов необходимо рассмотреть вопрос о переходе от узловых перемещений к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Известно, что этот переход осуществляется приближенно путем задания так называемых интерполяционных функций. Характер этих функций должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность перемещений при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к стремящемуся к точному. Запишем связь между узловыми перемещениями и перемещениями внутри элемента в виде

$$\{u\} = [C]\{q\}_i = [C]^{(1)}[C]^{(2)}...[C]^{(k)}...[C]^{(m)}[q\}_i, \qquad (1.6)$$

где [C] — матрица интерполяционных функций.

Теперь, если соотношение (1.6) определено с помощью (1.2) и (1.3) можно найти компоненты деформаций и напряжений по области i-го конечного элемента

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\Phi}][C]\{q\}_i = [\boldsymbol{B}]\{q\}_i, \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\{q\}_i. \tag{1.7}$$

Здесь [B]- так называемая матрица деформаций, которая, в связи с блочной структурой вектора $\{q\}_i$, также имеет блочную структуру

$$[B] = [B]^{(1)}[B]^{(2)}...[B]^{(k)}...[B]^{(m)}...$$

Для получения матрицы жесткости конечного элемента воспользуемся соотношением (1.4). Имея в виду выражения (1.6) и (1.7), умножая (1.4) слева на $[C]^T$ и интегрируя по объему конечного элемента, получим

$$\left(\int_{V_i} [B]^T [D] [B] dV\right) \left\{q\right\}_i + \int_{V_i} [C]^T \left\{G_V\right\} dV = 0.$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (1.5) будем иметь

$$[K]_i = \int_{V_i} [B]^T [D] [B] dV ; \qquad \{R\}_i = \{P_V\}_i = \int_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV .$$

Принимая во внимание блочность матриц [B] и [C], типовые блоки матриц жесткости $[K]_l^{(k)}$ и вектора узловых внешних сил $\{P_V\}_i^{(k)}$ могут быть записаны так

$$[K]_{ij}^{(k)} = \int_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV, \qquad (1.8)$$

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \int_{V_i} ([C]^{(k)})^T \{G_V\} dV.$$
 (1.9)

Выражение (1.9) представляет собой узловые сосредоточенные силы, эквивалентные распределенной по объему нагрузке. Если, кроме объемных сил, на элемент действует поверхностная распределенная нагрузка интенсивностью $\{p_s\}$, то эквивалентные ей узловые силы могут быть определены по формуле, аналогичной (1.9)

$$\{P_S\}_i^{(k)} = \int_{S_i} ([C]^{(k)})^T \{p_S\} dS.$$
 (1.10)

1.4. Разрешающее уравнение МКЭ

Для описания деформированного и напряженного состояния тела, расчлененного на конечные элементы, необходимо все элементы соединить в единое целое, т.е. удовлетворить условиям кинематической и статической совместности для конструкции в целом. Эти условия устанавливаются для узловых точек системы и имеют вид

$${\overline{q}}^{(k)} = {q}^{(k)}_i; \quad {\overline{P}}^{(k)} = \sum_{i \in k} {R}^{(k)}_i,$$
 (1.11)

где $\{q_j^{-}\}^{(k)}$ — вектор перемещений k-го узла системы;

 $\{\overline{P}\}^{(k)}$ – вектор сил в k-ом узле;

 $i \in k$ — суммирование по всем i-ым элементам, сходящимся в k-ом узле системы.

Между векторами $\{\overline{P}\}=\{\{\overline{P}\}^{(1)}...\{\overline{P}\}^{(k)}...\{\overline{P}\}^{(p)}\}$ и $\{\overline{q}\}=\{\{\overline{q}\}^{(1)}...\{\overline{q}\}^{(k)}...\{\overline{q}\}^{(p)}\}$ существует связь

$$\{\overline{P}\}=[\overline{K}][\overline{q}],$$
 (1.12)

где $[\overline{K}]$ - матрица жесткости системы, имеющая блочную структуру, с числом блоков, соответствующих общему числу узлов системы p

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} [\overline{K}]_{1}^{(1)} & \dots & [\overline{K}]_{1}^{(k)} & \dots & [\overline{K}]_{1}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\overline{K}]_{1}^{(1)} & \dots & [\overline{K}]_{p}^{(k)} & \dots & [\overline{K}]_{p}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\overline{K}]_{p}^{(1)} & \dots & [\overline{K}]_{p}^{(k)} & \dots & [\overline{K}]_{p}^{(p)} \end{bmatrix} .$$

Каждый блок матрицы $[\overline{K}]$ определяется с учетом (1.11) по формуле

$$\left[\overline{K}\right]^{(k)} = \sum_{i \in k} \left[K\right]^{(k)}_{il}, \qquad (1.13)$$

где $[K]_{il}^{(k)}$ - блок матрицы жесткости i-го элемента, определяющий реакции в k-ом узле от единичных перемещений в l-ом узле.

Соотношение (1.12), по существу, является уравнением равновесия узлов системы и представляет собой разрешающее уравнение метода конечных элементов.

1.5. Решение нелинейных задач

Численные исследования бетонных и железобетонных конструкций с учетом реальных свойств материалов приводит к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность разрешающих уравнений задачи обусловлена, главным образом, физической нелинейностью, т.е. непропорциональной связью между напряжениями и деформациями

$$\{\sigma\{\varepsilon\}\} = [D\{\varepsilon\}]\{\varepsilon\}, \tag{1.14}$$

Будем считать, что если найдено решение линейной задачи, то можно получить решение нелинейной задачи с помощью некоторого итерационного процесса, на каждом шаге которого материальные константы, выбираются так, чтобы удовлетворялись определяющие уравнения.

Следует сделать одно существенное замечание. В нелинейных задачах, в отличие от линейных, часто нет единственого решения и найденное решение не обязательно будет искомым. Для получения правильного ответа необходимо применять метод малых приращений и четко представлять физическую сущность задачи [19].

Изложим сущность численного решения нелинейных задач МКЭ.

Независимо от типа нелинейности, разрешающим уравнением МКЭ (1.12) является уравнение равновесия. При этом вся информация о физической и геометрической нелинейности содержится в матрице жесткости конструкции [K], компоненты которой связаны с матрицами жесткости отдельных элементов соотношением (1.13). В то же время характеристики отдельных элементов

определяются двумя матрицами [D] и [B]. В физически нелинейных задачах механические характеристики материалов, которые определяются матрицей [D], являются, как известно, сложными функциями компонентов деформаций, напряжений или перемещений, определяемыми в соответствии с физической моделью материала, т.е. $[D] = [D(\{q\})]$. В геометрически нелинейных задачах нелинейной будет матрица $[B] = [B(\{q\})]$ и вектор координат узлов $\{x\} = \{x(\{q\})\}$. Таким образом, несмотря на различную физическую природу обеих типов нелинейности, математическая формулировка задачи и в том и другом случае одинакова и сводится к решению нелинейных разрешающих уравнений

$$F(\{q\}) = [K(\{q\})|\{q\} - \{R(\{q\})\} = 0.$$
(1.15)

Именно поэтому способы решения физически и геометрически нелинейных задач могут быть рассмотрены с единых методических позиций.

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений вида (1.15) существует широкий выбор различных итерационных методов, основы которых заложены еще в работах Ньютона.

Прежде, чем приступить к рассмотрению методов решения уравнения (1.15), вкратце рассмотрим математическую формулировку задачи на примере системы нелинейных уравнений

$$F(\{x\}) = [f_i(x_1, x_2, ..., x_n)], \qquad (i=1,2,...,n).$$
 (1.16)

Допустим, что известен вектор-столбец $\{x^k\} = \{x_1^k x_2^k ... x_n^k\}$, являющийся k-ым приближением к корню $\{x\} = \{x_1 x_2 ... x_n\}$ этого уравнения. Тогда искомое решение можно представить

$${x} = {x^k} + {dx},$$
 (1.17)

где $\{dx\}$ - вектор-столбец погрешностей k-го приближения. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$F\left(\left\{x^{k}\right\}+\left\{dx\right\}\right)=0. \tag{1.18}$$

Теперь, используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, можно записать

$$F(\lbrace x^k \rbrace + \lbrace dx \rbrace) \approx F(\lbrace x^k \rbrace) + F'(\lbrace x^k \rbrace) \lbrace dx \rbrace \approx 0, \tag{1.19}$$

где

$$F'\left(\!\!\left\{\!x^k\right.\right)\!\!\right) = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{G}_1}{\partial_1} & \frac{\mathcal{G}_1}{\partial_2} & \cdots & \frac{\mathcal{G}_1}{\partial_n} \\ \frac{\mathcal{G}_2}{\partial_1} & \frac{\mathcal{G}_2}{\partial_2} & \cdots & \frac{\mathcal{G}_2}{\partial_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathcal{G}_n}{\partial_1} & \frac{\mathcal{G}_n}{\partial_2} & \cdots & \frac{\mathcal{G}_n}{\partial_n} \end{bmatrix} = \left[J^k\right] - \text{матрица Якоби.}$$

Если матрица J^k существует и неособенная, то вектор погрешностей $\{dx\} = -J^k = -J^k = -J^k$. Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$${x^{k+1}} = {x^k} - {J^k}^{-1} F({x^k}), \quad (k = 1, 2, ...).$$
 (1.20)

Изложенный метод носит название метода Ньютона-Рафсона. Заметим, что за так называемое «нулевое» приближение обычно принимается грубое решение системы, которое находится, например, из физического смысла задачи. Если на каждой итерации использовать некоторое постоянное значение матрицы Якоби, например J^o , то процедура носит название метода Ньютона-Канторовича. Естественно, что метод Ньютона-Канторовича требует большего числа итераций, хотя в целом он может оказаться более экономичным, т.к. матрица Якоби обращается в данном случае всего один раз. Если систему нелинейных уравнений (1.16), определенную и непрерывную в окрестностях искомого решения, можно переписать в равносильной форме $\{x\} = \phi(\{x\})$, то для нахождения корня можно использовать метод простых итераций

$$\left\{x^{k+1}\right\} = \mathbf{\Phi}\left\{x^{k}\right\}. \tag{1.21}$$

Принимая во внимание, что вектор-функция $\Phi(\{x\})$ разыскивается при этом в виде $\Phi(\{x\}) = \{x\} + \Lambda F(\{x\})$, где Λ - неособенная матрица, причем $\Lambda = [J]^{-1}$, придем, в сущности, к методу Ньютона-Рафсона для уравнения (1.16). Изложенные методы приводят к довольно быстро сходящимся процессам, если нулевое приближение лежит достаточно близко от искомого решения.

С учетом изложенного вернемся к рассмотрению уравнения (1.15). Представим искомое решение этого уравнения в виде

$$\{q\} = \{q^k\} + \{\delta q\}, \tag{1.22}$$

где $\{\delta q\}$ - вектор невязки, имеющий смысл вариации перемещений, т.е. допускаемый наложенными на систему связями. Тогда

$$F\left(\left\{q^{k} + \delta q\right\}\right) = F\left(\left\{q^{k}\right\}\right) + dF = \left[K\left(\left\{q^{k} + \delta q\right\}\right)\right]\left(\left\{q^{k}\right\} + \left\{\delta q\right\}\right) - \left\{P\left(\left\{q^{k} + \delta q\right\}\right)\right\} \approx \left[K\left(\left\{q^{k}\right\}\right)\right]\left(\left\{q^{k}\right\} + \left\{\delta q\right\}\right) - \left\{P\left(\left\{q^{k}\right\}\right)\right\} - \left\{\delta P\right\} \approx 0$$
(1.23)

откуда

$$\{\delta q\} = \left[K\left(\left\{q^{k}\right\}\right)\right]^{-1} \left(\left\{\delta F\right\} + \left\{\delta P\right\}\right) = \left[K\left(\left\{q^{k}\right\}\right)\right]^{-1} \left\{\delta \overline{P}\right\}. \tag{1.24}$$

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$${q^{k+1}} = {q^k} + {K^k}^{-1} {\delta P^k} (k = 1, 2, ...),$$
 (1.25)

где $\left[K^k\right] = \left[K\left(\left\{q^k\right.\right\}\right)\right]$ - матрица жесткости системы на k-ой итерации.

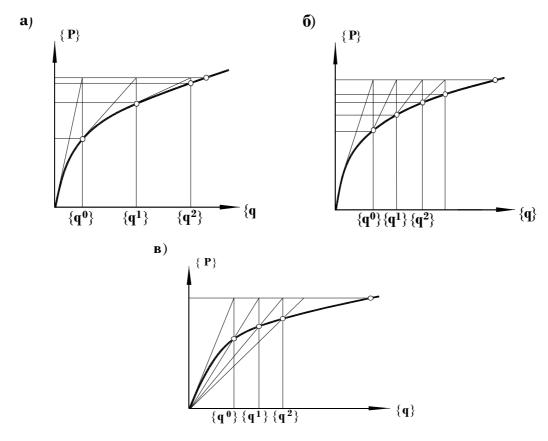


Рис. 1.2 Методы решения нелинейных задач: а) Ньютона-Рафсона; б) Ньютона-Канторовича; в) модифицированный метод Ньютона-Рафсона.

В соотношении (1.25) специально не оговаривается вид матрицы $[K^k]$. Если для ее построения используется касательная линеаризация, то приходим к классическому методу Ньютона-Рафсона (Рис.1.2а), если секущая - к модифицированному методу Ньютона-Рафсона (рис.1.2б). Если в (1.25) положить матрицу $[K^k]$ постоянной, то придем к процедуре Ньютона-Канторовича (рис.1.2в). Вектор $\{\delta P\}$, по существу, является неуравновешенным вектором-столбцом нагрузки (невязкой сил), что хорошо видно на рисунках.

Таким образом, решение нелинейных задач сводится к последовательному приближению к искомому решению по формуле (1.25). Процесс вычислений

заканчивается когда достигнута заданная точность решения, т.е. при выполнении условия $\|\delta q\| \le \varepsilon$. Здесь $\|\delta q\|$ - норма вектора $\{\delta q\}$. При этом под нормой чаще всего понимают эвклидову норму

$$\|\delta q\| = \sqrt{\{\delta q\}^T \{\delta q\}/\{q\}^T \{q\}}. \tag{1.26}$$

Как уже отмечалось, в нелинейных задачах большое значение имеет интерпретация физического процесса, поскольку это создает уверенность, что полученное решение будет искомым. Именно на этом и основаны все известные методы решения нелинейных задач механики сплошной среды. Однако можно показать, что в конечном итоге они сводятся к какой-нибудь разновидности метода Ньютона.

Известно, что нелинейность задачи по расчету бетонных и железобетонных конструкций ведет к нарушению принципа суперпозиции, и ее решение существенным образом зависит от истории (пути) нагружения. Естественно, что в случае сложного, непропорционально нагружения решения может быть получено лишь разбиением пути нагружения на малые интервалы и суммированием найденных на каждом интервале решений, т.е. на основе, так называемого, шагового метода.

ГЛАВА 2

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

2.1. Элемент в виде тетраэдра

Самый простой конечный элемент для решения пространственных задач - тетраэдр с четырьмя узлами в вершинах (рис.2.1). Вектор-столбец узловых перемещений i-го элемента имеет вид

Рис.2.1. Конечный элемент в виде тетраэдра.

$$\{q\}_i = \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)}\}, \qquad (2.1)$$

где каждый из векторов представляется тремя проекциями $\{q\}_i^{(k)} = \left\{\!\!\! \begin{array}{c} q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)} \end{array}\!\!\! \right\} \!\! = \!\! \left\{\!\!\! \begin{array}{c} u_k v_k w_k \end{array}\!\!\! \right\}.$

Аналогичную структуру имеет и вектор узловых сил

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \{R\}_i^{(3)} \{R\}_i^{(4)} \right\}, \qquad (2.2)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \{R_I^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$. Связь между векторами (2.1) и (2.2) $\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i$ осуществляется с помощью матрицы жесткости $[K]_i$, которая имеет блочную структуру

$$[K]_{i} = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix},$$
 (2.3)

а типовой блок определяется по формуле (1.8) так

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^{\mathsf{T}} [D] [B]^{(\kappa)} dv. \qquad (2.4)$$

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента от перемещений его узлов, т.е. установить

зависимость (1.6). Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = [C]^{(1)}[C]^{(2)}[C]^{(3)}[C]^{(4)}, \qquad (2.5)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x,y,z)$, E_3 -единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u,v и w по области элемента примем в виде линейных функций координат, т.е.

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z;$$

$$v(x, y, z) = \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z;$$

$$w(x, y, z) = \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z.$$
(2.6)

Отметим, что функции (2.6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения 12-ти неизвестных коэффициентов имеются 12 условий по общему числу компонент узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например, $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$, и т.д. Теперь, учитывая очевидные соотношения

$$C_{1}(x,y,z)+C_{2}(x,y,z)+C_{3}(x,y,z)+C_{4}(x,y,z)=1;$$

$$C_{1}(x,y,z)x_{1}+C_{2}(x,y,z)x_{2}+C_{3}(x,y,z)x_{3}+C_{4}(x,y,z)x_{4}=x;$$

$$C_{1}(x,y,z)y_{1}+C_{2}(x,y,z)y_{2}+C_{3}(x,y,z)y_{3}+C_{4}(x,y,z)y_{4}=y;$$

$$C_{1}(x,y,z)z_{1}+C_{2}(x,y,z)z_{2}+C_{3}(x,y,z)z_{3}+C_{4}(x,y,z)z_{4}=z,$$

$$(2.7)$$

получим

$$\begin{cases}
C_{1}(x, y, z) \\
C_{2}(x, y, z) \\
C_{3}(x, y, z) \\
C_{4}(x, y, z)
\end{cases} =
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
x_{1} & x_{2} & x_{3} & x_{4} \\
y_{1} & y_{2} & y_{3} & y_{4} \\
z_{1} & z_{2} & z_{3} & z_{4}
\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix}
1 \\
x \\
y \\
z
\end{bmatrix}.$$
(2.8)

Откуда найдем

$$C_{I}(x,y,z) = \frac{1}{6V_{i}} (a_{I} + b_{I}x + c_{I}y + d_{I}z); \quad C_{2}(x,y,z) = \frac{1}{6V_{i}} (a_{2} + b_{2}x + c_{2}y + d_{2}z);$$

$$C_{3}(x,y,z) = \frac{1}{6V_{i}} (a_{3} + b_{3}x + c_{3}y + d_{3}z); \quad C_{4}(x,y,z) = \frac{1}{6V_{i}} (a_{4} + b_{4}x + c_{4}y + d_{4}z),$$
(2.9)

где
$$a_1 = det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; b_1 = -det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_3 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; c_1 = -det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_3 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; d_1 = -det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

а
$$6V_i = det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$
 - шесть объемов тетраэдра.

Физический смысл выражений (2.9) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного тетраэдра с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис. 2.2), т.е.

$$C_{I}(x,y,z) = \frac{V_{m234}}{V_{i}}, C_{2}(x,y,z) = \frac{V_{m134}}{V_{i}}, C_{3}(x,y,z) = \frac{V_{m124}}{V_{i}}, C_{4}(x,y,z) = \frac{V_{m123}}{V_{i}}. (2.10)$$

Функции, определенные соотношением (2.10), называют объемными L – координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра. Таким образом,

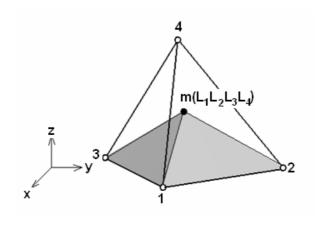


Рис.2.2. Нормализованные координаты для тетраэдра.

$$L_1 = C_1(x, y, z);$$
 $L_2 = C_2(x, y, z);$ $L_3 = C_3(x, y, z);$ $L_4 = C_4(x, y, z).$ (2.11)

Значения L- координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворят требованиям

$$L_{j}(x_{k}, y_{k}) = \begin{cases} 1 & , j = k; \\ 0 & , j \neq k. \end{cases}$$
 (2.12)

При этом из четырех L-координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$
. (2.13)

Далее L-координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

Матрицу жесткости для тетраэдра можно получить с помощью процедур, описанных в главе 1.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций с помощью соотношения (1.2) запишем так

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{2.14}$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии, в отличие от (1.3), запишем в общем виде как для анизотропного материала $[D] = [D_{ij}]$, где i,j=1,...,6. При этом будем исходить из предположения, что эта матрица симметрична и постоянна в пределах элемента.

Подставив (2.14) и матрицу [D] в выражение (2.4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра. Т.к. все компоненты матрицы $[B]^{(k)}$ (2.14) являются независимыми от координат постоянными величинами, то интеграл в (2.4) заменяется выражением

$$[K]_{ii}^{(\kappa)} = V_i ([B]^{(j)})^{\mathrm{T}} [D][B]^{(\kappa)}, \qquad (2.15)$$

Выполняя матричные перемножения, получим

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix},$$
 (2.16)

где

$$\begin{split} K_{11} &= D_{11}b_kb_j + D_{44}c_kc_j + D_{66}d_kd_j + D_{14}(c_kb_j + b_kc_j) + D_{16}(d_kb_j + b_kd_j) + \\ &\quad + D_{46}(d_kc_j + c_kd_j); \end{split}$$

$$\begin{split} K_{12} &= D_{12}c_kb_j + D_{14}b_kb_j + D_{15}d_kb_j + D_{24}c_kc_j + D_{44}b_kc_j + D_{45}d_kc_j + D_{26}c_kd_j + \\ &\quad + D_{46}b_kd_j + D_{56}d_kd_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{13} &= D_{13} d_k b_j + D_{15} c_k b_j + D_{16} b_k b_j + D_{43} d_k c_j + D_{45} c_k c_j + D_{46} b_k c_j + D_{36} d_k d_j + \\ &+ D_{56} c_k d_j + D_{66} b_k d_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{21} &= D_{12}b_kc_j + D_{24}c_kc_j + D_{26}d_kc_j + D_{14}b_kb_j + D_{44}c_kb_j + D_{46}d_kb_j + D_{15}b_kd_j + \\ &\quad + D_{45}c_kd_j + D_{56}d_kd_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{22} &= D_{22}c_kc_j + D_{44}b_kb_j + D_{55}d_kd_j + D_{24}(b_kc_j + c_kb_j) + D_{25}(d_kc_j + c_kd_j) + \\ &\quad + D_{45}(d_kb_j + b_kd_j); \end{split}$$

$$\begin{split} K_{23} &= D_{23} d_k c_j + D_{25} c_k c_j + D_{26} b_k c_j + D_{34} d_k b_j + D_{45} c_k b_j + D_{46} b_k b_j + D_{35} d_k d_j + \\ &+ D_{55} c_k d_j + D_{56} b_k d_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{31} &= D_{13}b_kd_j + D_{34}c_kd_j + D_{36}d_kd_j + D_{15}b_kc_j + D_{45}c_kc_j + D_{56}d_kc_j + D_{16}b_kb_j + \\ &\quad + D_{46}c_kb_j + D_{66}d_kb_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{32} &= D_{23}c_kd_j + D_{34}b_kd_j + D_{35}d_kd_j + D_{25}c_kc_j + D_{45}b_kc_j + D_{55}d_kc_j + D_{26}c_kb_j + \\ &\quad + D_{46}b_kb_j + D_{56}d_kb_j; \end{split}$$

$$\begin{split} K_{33} &= D_{33} d_k d_j + D_{55} c_k c_j + D_{66} b_k b_j + D_{35} (c_k d_j + d_k c_j) + D_{36} (b_k d_j + d_k b_j) + \\ &\quad + D_{56} (b_k c_j + c_k b_j), \qquad j,k = 1,2,3. \end{split}$$

Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых $\{G_V\}=\{X_V Y_V Z_V\}$, приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную

структуру $\{P_V\}_i = \{\{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \{P_V\}_i^{(4)}\}$, причем каждый блок представляет компоненты вдоль осей x,y,z и равен $\{P_V\}_i^{(\kappa)} = \{P_{IV}^{(k)} P_{2V}^{(k)} P_{3V}^{(k)}\}$. Это приведение осуществляется аналогично тому, как это делалось для плоского треугольного элемента и осуществляется по формуле (1.9)

$$\{P_V\}_i^{(\kappa)} = \iiint\limits_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz, \qquad (2.17)$$

В том случае, когда объемные силы в пределах элемента постоянны

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \frac{V_i}{4} \{G_V\}. \tag{2.18}$$

т.е. узловые силы, статически эквивалентные объемным силам, действуют в направлении осей x, y, z и перераспределяются между узлами элемента пропорционально.

Если i–й элемент подвергается начальной деформации $\{\varepsilon_t\}$, постоянной в пределах элемента, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, имеет типовой блок

$$\{P_t\}_i^{(k)} = V_i \left([B]^{(k)} \right)^T [D] \{\varepsilon_t\}. \tag{2.19}$$

2.2. Элемент в виде параллелепипеда

Разбиение объемного тела на тетраэдры приводит, как правило, к большому числу элементов. В некоторых случаях, если конфигурация тела проста и регулярна, его удается представить набором параллелепипедов. Тогда число элементов уменьшается в шесть раз (рис.2.3) по сравнению с тетераэдальным разбиением.

Рассмотрим *i*-ый конечный элемент в виде параллелепипеда с восемью узловыми точками (рис.2.4). Вектор-столбец узловых перемещений этого элемента имеет 24 компонента, объединенных в 8 блоков по числу узлов

$$\{q\}_{i} = \{\{q\}_{i}^{(1)} \dots \{q\}_{i}^{(k)} \dots \{q\}_{i}^{(8)}\}, \tag{2.20}$$

где каждый из векторов равен $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)}q_2^{(k)}q_3^{(k)}\} = \{u_k v_k w_k\}.$ Аналогичную структуру имеет и вектор узловых сил

$$\{R\}_{i} = \{\{R\}_{i}^{(1)} \dots \{R\}_{i}^{(k)} \dots \{R\}_{i}^{(8)}\}, \tag{2.21}$$

где $\{R_1^{(k)} = \{R_1^{(k)}R_2^{(k)}R_3^{(k)}\}.$

Связь между векторами (2.20) и (2.21) осуществляется с помощью матрицы жесткости, которая имеет блочную структуру

$$[K]_{i} = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \dots & [K]_{ij}^{(k)} & \dots & [K]_{ij}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{i8}^{(1)} & \dots & [K]_{i8}^{(k)} & \dots & [K]_{i8}^{(8)} \end{bmatrix},$$

$$(2.22)$$

а типовой блок, как и прежде, определяется по формуле (2.4)

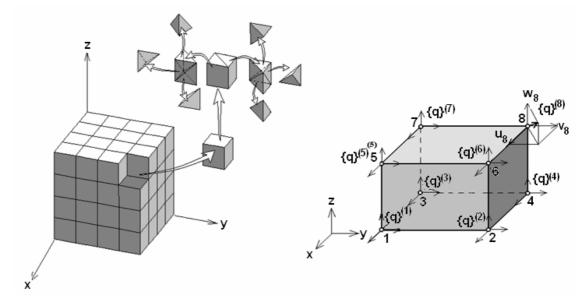


Рис.2.3. Разбиение на тетраэдры регулярной области

Рис.2.4. Конечный элемент-паралеллепипед

Матрица интерполяционных функций в данном случае будет иметь восемь блоков по числу узлов

$$[C] = [C]^{(1)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(8)}, \qquad (2.23)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, E_3 - единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u,v и w по области элемента примем в виде полиномов с суммарным числом постоянных коэффициентов, равным 24, т.е.

$$u(x, y, z) = \alpha_{1} + \alpha_{4}x + \alpha_{7}y + \alpha_{10}z + \alpha_{13}xy + \alpha_{16}yz + \alpha_{19}xz + \alpha_{22}xyz;$$

$$v(x, y, z) = \alpha_{2} + \alpha_{5}x + \alpha_{8}y + \alpha_{11}z + \alpha_{14}xy + \alpha_{17}yz + \alpha_{20}xz + \alpha_{23}xyz;$$

$$w(x, y, z) = \alpha_{3} + \alpha_{6}x + \alpha_{9}y + \alpha_{12}z + \alpha_{15}xy + \alpha_{18}yz + \alpha_{21}xz + \alpha_{24}xyz.$$
(2.24)

Функции (2.24) обеспечивают непрерывность перемещений при переходе от одного элемента к другому.

Конечно, можно проделать длинный ряд преобразований, подобно тому, как это было сделано для тетраэдра и получить интерполяционные функции $C_k(x,y,z)$,

отвечающие зависимостям (2.24). Но обычно поступают следующим образом. Выражениям (2.24) отвечает соотношение

$$\begin{cases}
C_{1}(x, y, z) \\
\vdots \\
C_{k}(x, y, z)
\end{cases} =
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
x_{1} & x_{2} & \dots & x_{k} & \dots & x_{8} \\
y_{1} & y_{2} & \dots & y_{k} & \dots & y_{8} \\
\vdots \\
C_{8}(x, y, z)
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
x_{1} & x_{2} & \dots & x_{k} & \dots & x_{k} \\
y_{1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1}y_{1}z_{1} & x_{2}y_{2}z_{2} & \dots & x_{k}y_{k}z_{k} & \dots & x_{8}y_{8}z_{8}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
1 \\
x \\
y \\
\vdots \\
xyz
\end{bmatrix}, (2.25)$$

которое формулируют не в общей системе координат x,y,z, а в местной, трехмерной нормализованной ξ,η,ς , связанной с общей выражениями

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}; \quad \varsigma = \frac{z - z_c}{c},$$
 (2.26)

где x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести параллелепипеда. Подставляя в (2.25) нормализованные координаты узлов +1 или -1, будем иметь в новой системе координат

$$\begin{cases}
C_{I}(\xi,\eta,\varsigma) \\
\vdots \\
C_{k}(\xi,\eta,\varsigma) \\
\vdots \\
C_{8}(\xi,\eta,\varsigma)
\end{cases} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1 \\
-1 & 1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & -1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1
\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}
1 \\
\xi \\
\eta \\
\vdots \\
\xi\eta\varsigma
\end{bmatrix}.$$
(2.27)

В результате обращения средней матрицы и матричного перемножения получаются выражения для интерполяционных функций. Для произвольного k-го узла интерполяционная функция имеет вид

$$C_k(\xi,\eta,\varsigma) = \frac{1}{8} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma), \qquad (2.28)$$

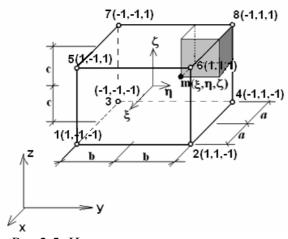


Рис.2.5. Нормализованные координаты

и представляет собой интерполяционный полином первого Физический смысл выражений (2.28) заключается в том, что каждая из зависимостей представсобой ляет отношение объема соответствующего заштрихованного параллелепипеда с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис.2.5). Можно убедиться, что (2.28) представляет собой тройное произведение одномерных полиномов первого порядка

$$C_{k}(\xi, \eta, \varsigma) = N^{(k)}(\xi)N^{(k)}(\eta)N^{(k)}(\varsigma)$$
(2.29)

где, например, $N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)$.

Согласно выражению (1.7) матрица деформаций содержит восемь блоков

$$[B] = [B]^{(1)} ... [B]^{(k)} ... [B]^{(8)},$$
 (2.30)

стандартный блок ее, равен

$$[B]_{i}^{(k)} = [\Phi]C_{k}(\xi,\eta) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_{k}}{a}(1+\eta_{k}\eta)(1+\zeta_{k}\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_{k}}{b}(1+\xi_{k}\xi)(1+\zeta_{k}\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta_{k}}{c}(1+\xi_{k}\xi)(1+\eta_{k}\eta) \\ \frac{\eta_{k}}{b}(1+\xi_{k}\xi)(1+\zeta_{k}\xi) & \frac{\xi_{k}}{a}(1+\eta_{k}\eta)(1+\zeta_{k}\xi) & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_{k}}{c}(1+\xi_{k}\xi)(1+\eta_{k}\eta) & \frac{\eta_{k}}{b}(1+\xi_{k}\xi)(1+\zeta_{k}\xi) \\ \frac{\eta_{k}}{b}(1+\xi_{k}\xi)(1+\zeta_{k}\xi) & 0 & \frac{\xi_{k}}{a}(1+\eta_{k}\eta)(1+\zeta_{k}\xi) \end{bmatrix}.$$
(2.31)

Следовательно, матрица жесткости элемента также блочная и имеет вид (2.21), каждый из блоков может быть вычислен по формуле (2.4). Произведя замену переменных, и, имея в виду, что элементарный объем равен $dv = dxdydz = abc d\xi d\eta d\varsigma$

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = abc \int_{-1-1-1}^{1} \int_{-1-1}^{1} ([B]^{(j)})^{T} [D][B]^{(\kappa)} d\xi d\eta d\varsigma.$$
 (2.32)

Подматрица $[K]_{ij}^{(k)}$ - квадратная, третьего порядка

$$[K]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$
 (2.33)

После взятия определенного интеграла, имея в виду постоянство матрицы [D] по объему элемента, получим

$$\begin{split} K_{11} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{16}(\theta_{13} + \theta_{31}) + D_{46}(\theta_{23} + \theta_{32}); \\ K_{12} &= D_{12}\theta_{12} + D_{24}\theta_{22} + D_{26}\theta_{32} + D_{14}\theta_{11} + D_{44}\theta_{21} + D_{46}\theta_{31} + D_{15}\theta_{13} + D_{45}\theta_{23} + D_{56}\theta_{33}; \\ K_{13} &= D_{13}\theta_{13} + D_{34}\theta_{23} + D_{36}\theta_{33} + D_{15}\theta_{12} + D_{45}\theta_{22} + D_{56}\theta_{32} + D_{16}\theta_{11} + D_{46}\theta_{21} + D_{66}\theta_{31}; \\ K_{21} &= D_{21}\theta_{21} + D_{14}\theta_{11} + D_{15}\theta_{31} + D_{24}\theta_{22} + D_{44}\theta_{12} + D_{45}\theta_{32} + D_{26}\theta_{23} + D_{46}\theta_{13} + D_{56}\theta_{33}; \\ K_{22} &= D_{22}\theta_{22} + D_{44}\theta_{11} + D_{55}\theta_{33} + D_{24}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{25}(\theta_{23} + \theta_{32}) + D_{45}(\theta_{13} + \theta_{31}); \\ K_{23} &= D_{23}\theta_{23} + D_{34}\theta_{13} + D_{35}\theta_{33} + D_{25}\theta_{22} + D_{45}\theta_{12} + D_{55}\theta_{32} + D_{26}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{56}\theta_{31}; \\ K_{31} &= D_{13}\theta_{31} + D_{15}\theta_{21} + D_{16}\theta_{11} + D_{34}\theta_{32} + D_{45}\theta_{22} + D_{46}\theta_{32} + D_{36}\theta_{33} + D_{56}\theta_{23} + D_{66}\theta_{13}; \\ K_{32} &= D_{23}\theta_{32} + D_{25}\theta_{22} + D_{26}\theta_{12} + D_{34}\theta_{31} + D_{45}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{35}\theta_{33} + D_{55}\theta_{23} + D_{65}\theta_{13}; \\ K_{33} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{21} + \theta_{12}) + D_{16}(\theta_{31} + \theta_{13}) + D_{46}(\theta_{32} + \theta_{23}), \end{split}$$

где

$$\theta_{11} = \frac{bc}{96} \xi_{j} \xi_{k} (3 + \eta_{j} \eta_{k}) (3 + \varsigma_{j} \varsigma_{k}); \quad \theta_{12} = \frac{c}{48} \xi_{k} \eta_{j} (3 + \varsigma_{j} \varsigma_{k}); \quad \theta_{21} = \frac{c}{48} \xi_{j} \eta_{k} (3 + \varsigma_{j} \varsigma_{k});$$

$$\theta_{13} = \frac{b}{48} \xi_{k} \varsigma_{j} (3 + \eta_{j} \eta_{k}); \quad \theta_{22} = \frac{ac}{96} \eta_{j} \eta_{k} (3 + \xi_{j} \xi_{k}) (3 + \varsigma_{j} \varsigma_{k}); \quad \theta_{23} = \frac{a}{48} \varsigma_{j} \eta_{k} (3 + \xi_{j} \xi_{k});$$

$$\theta_{33} = \frac{ab}{96} \varsigma_{j} \varsigma_{k} (3 + \xi_{j} \xi_{k}) (3 + \eta_{j} \eta_{k}).$$

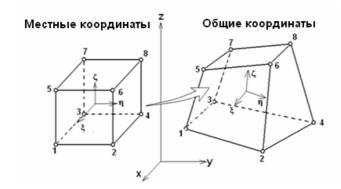


Рис.2.6. Отображение элемента первого порядка.

Дифференцирование выражений, входящих в формулу (2.24), по *x*, *y* и *y* дает линейные функции. Следовательно деформации по области элемента распределяются по линейному закону.

Объемные элементы в виде тетраэдра и параллелепипеда допускают параметрическое отображение [19]. При этом из всех видов отображений, используется, в основном, одно - изопараметрическое, когда геометрия элемента описывается теми же интерполяционными

функциями, что и перемещения внутри него. Запишем координаты внутренних точек элемента в виде интерполяционных выражений

$$x = C_1 x_1 + ... + C_k x_k + ... + C_n x_n;$$

$$y = C_1 y_1 + ... + C_k y_k + ... + C_n y_n;$$

$$z = C_1 z_1 + ... + C_k z_k + ... + C_n z_n,$$
(2.34)

где n — число узлов элемента; C_k - интерполяционные функции, которые используются также и для интерполяции перемещений.

Напомним, что эти интерполяционные функции для элементов первого порядка в описанных ранее местных системах координат имеют вид: для тетраэдра

$$C_k(L_k) = L_k \,; \tag{2.35}$$

для параллелепипеда

$$C_k(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{8} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma). \tag{2.36}$$

Описание геометрии изопараметрических элементов осуществляется отображением местной нормализованной системы координат в общие декартовы. Однако грани элемента при этом, должны оставаться плоскими. Пример отображения координат для параллелепипеда первого порядка представлен на рис.2.6. Параллелепипед трансформируется в восьмиугольник общего вида.

2.3. Криволинейные объемные элементы

Чтобы повысить точность расчета необходимо увеличить число разбиений и уменьшить размеры элементов, что часто приводит к огромному числу разрешающих уравнений и сопровождается значительными вычислительными трудностями. Поэтому, на практике точность решения повышают не за счет увеличения числа элементов, а путем выбора в качестве интерполяционных функций полиномов второго, третьего и т.д. порядков. Порядок полиномов определяет и названия элементов – элементы второго, третьего и т.д. порядков. Такие элементы, в отличие от элементов первого порядка, обеспечивается неразрывность на границах со смежными элементами не только перемещений, но и деформаций. Разумеется, при этом возникает необходимость увеличить число степеней свободы элемента. Наиболее естественным путем для этого служит введение дополнительных узлов на ребрах. В результате количество узлов, для тетраэдра второго порядка увеличивается до например, параллелепипеда второго порядка – до 20. При этом число степеней свободы в первом случае станет равным 30, во втором – 60. Если для описания геометрии использовать те же интерполяционные функции, что и для перемещений, можно изопараметричеки отобразить элементы с прямолинейными ребрами аналогичные криволинейные. На рис.2.7 приведены результаты отображения для объемных элементов второго порядка. Геометрия элемента при этом описывается выражением (2.34).

Приведем без выводов интерполяционные полиномы сирендипова семейства для элементов второго и третьего порядков, которые в изопараметрических элементах используются как для интерполяции перемещений, так и для интерполяции координат [19].

Интерполяционные полиномы для тетраэдра второго порядка (рис.2.7а) выражаются через нормализованные \boldsymbol{L} -координаты и имеют вид: угловые узлы

$$C_k = (2L_k -)L_k, k=1,...,4$$
 (2.37)

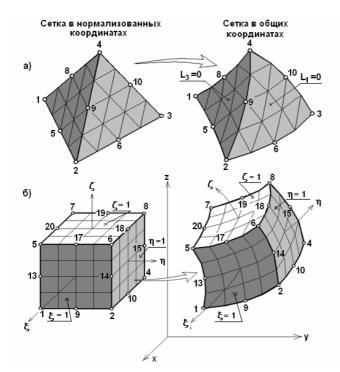


Рис.2.7. Отображение трехмерных координат

узлы на ребрах

$$C_k = 4L_iL_i$$
, $k = 5,...,10$, (2.38)

где i,j — угловые узлы на ребре, на середине которого находится узел k.

Тетраэдр третьего порядка, интерполяционные функции которого описываются полиномами третьей степени, имеют по два равноотстоящих дополнительных узла на каждом ребре, по одному узлу в центре тяжести каждой грани в центре тяжести и, кроме того, элемента. Последний является внутренним для данного участвует элемента не совместной работе с соседями, следовательно, не дает матрицу жесткости системы Использование целом. данного

элемента требует дополнительной процедуры исключения внутреннего узла. По этой причине он практически не используется и здесь не рассматривается.

Интерполяционные полиномы для 20-ти узлового восьмиугольника второго порядка выражаются через нормализованные координаты $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varsigma}$ и имеют вид: угловые узлы

$$C_k = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta - 2), \quad k = 1, ..., 8$$
 (2.39)

узлы на ребрах

$$C_k = \frac{1}{4} \left[(1 + \xi_k \xi - (1 - \xi_k^2) \xi^2) \right] \left[(1 + \eta_k \eta - (1 - \eta_k^2) \eta^2) \right] \left[(1 + \zeta_k \zeta - (1 - \zeta_k^2) \zeta^2) \right].$$
 (2.40)

Восьмиугольник третьего порядка (32 узла) имеет следующие интерполяционные полиномы: угловые узлы

$$C_k = \frac{1}{64} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) \Big[9(\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2) - 12 \Big], \quad k = 1, ..., 8$$
 (2.41)

узлы на ребрах

$$C_k = \frac{9}{64} \overline{C}(\xi) \overline{C}(\eta) \overline{C}(\zeta), \quad k=9,...,32,$$
(2.42)

где
$$\overline{C}(\xi) = \frac{9}{8}(1 - \xi_k^2)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_k\xi) + \frac{1}{8}(9\xi_k^2 - 1)(1 + \xi_k\xi);$$

 $\overline{C}(\eta)$ и $\overline{C}(\varsigma)$ получаются аналогично заменой ξ на η и ς соответственно.

Матрицы и вектора, характеризующие криволинейные объемные элементы, получаются по общим формулам (1.8) и (1.9), содержащие объемные интегралы. Поскольку интерполяционные функции для этих элементов, а следовательно и матрицы деформаций [B] (1.7), содержащие производные интерполяционных функций, формулируются в местных нормализованных координатах ξ, η, ς или L_1, L_2, L_3, L_4 , то необходимо перед интегрированием осуществить преобразование в общую систему x, y, z.

Преобразование координат ξ, η, ζ осуществляется с помощью зависимостей [19]

$$\frac{\partial C_k}{\partial \xi} = \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial \eta} = \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial \zeta} = \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$
(2.43)

или в матричной форме

$$\left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} \right\} = \left[J \right] \left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial x} \right\}, \tag{2.44}$$

$$\Gamma \text{Де} \left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial C_{k}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial C_{k}}{\partial \zeta} \right\}, \left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_{k}}{\partial x} \quad \frac{\partial C_{k}}{\partial y} \quad \frac{\partial C_{k}}{\partial z} \right\},$$

$$\left[J \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

Из (2.44) и получаются искомые соотношения в виде

$$\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\} = \left[J \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\}. \tag{2.45}$$

Замена переменных под знаком определенного интеграла требует также выразить элементарные объемы в новой системе координат. Это делается с помощью следующей зависимости

$$dv = dx \ dy \ dz = det |J| \ d\xi \ d\eta \ d\varsigma , \qquad (2.46)$$

где det|J| - определитель матрицы Якоби.

При преобразование L-координат необходимо учесть, что, согласно (2.13), независимыми являются только три из них. Поэтому предварительно необходимо выразить одну, например L_4 , через остальные

$$L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3. (2.47)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_I} = \frac{\partial C_k}{\partial L_I} \frac{\partial L_I}{\partial L_I} + \frac{\partial C_k}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_I} + \frac{\partial C_k}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_I} + \frac{\partial C_k}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial L_I},$$

и, имея в виду очевидные равенства $\frac{\partial L_I}{\partial L_I} = 1$, $\frac{\partial L_4}{\partial L_I} = -1$, $\frac{\partial L_2}{\partial L_I} = \frac{\partial L_3}{\partial L_I} = 0$,

получим

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_l} \to \frac{\partial C_k}{\partial L_l} - \frac{\partial C_k}{\partial L_d}.$$
 (2.48)

Стрелкой обозначает, что производная $\frac{\partial C_k}{\partial L_l}$ заменяется на $\frac{\partial C_k}{\partial L_l} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}$ во всех

выражениях.

Аналогично

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_2} \to \frac{\partial C_k}{\partial L_2} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4};$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_3} \to \frac{\partial C_k}{\partial L_3} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}.$$
(2.49)

После исключения зависимой переменной можно выполнять преобразования, аналогичные преобразованиям с координатами ξ, η, ς . Для этого необходимо в формулах (2.43)-(2.46) формально заменить символ ξ на L_1 , η на L_2 , ς на L_3 .

Матрицу Якоби несложно получить, вычисляя производные по общим координатам, учитывая, что они связаны с местными координатами зависимостями (2.34), т.е.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} x_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} y_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \xi} z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \eta} x_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \eta} y_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \eta} z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \zeta} x_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \zeta} y_{i} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_{k}}{\partial \zeta} z_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{1}}{\partial \xi} & \frac{\partial C_{2}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial C_{n}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial C_{1}}{\partial \eta} & \frac{\partial C_{2}}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial C_{n}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial C_{1}}{\partial \zeta} & \frac{\partial C_{2}}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial C_{n}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} & y_{1} & z_{1} \\ x_{2} & y_{2} & z_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n} & y_{n} & z_{n} \end{bmatrix}, (2.50)$$

где n — число узлов элемента.

Эта же формула справедлива и для L- координат, если предварительно выполнены преобразования (2.48) и (2.49). В ней просто тройку независимых переменных ξ, η, ς заменяют на L_1, L_2, L_3 .

После всех предварительных преобразований, связанных с заменой координат на нормализованные местные, определению матриц для элементов сводится к вычислению определенных интегралов вида: для восьмиугольного элемента

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi \, d\eta \, d\zeta;$$
 (2.51)

для тетраэдра

$$I = \int_{0}^{L_{1}I-L_{1}} \int_{0}^{I-L_{1}I-L_{2}} f(L_{1}, L_{2}, L_{3}) dL_{1} dL_{2} dL_{3}.$$
 (2.52)

Отметим, что якобианы здесь включены в качестве сомножителей в подынтегральную функцию f.

Совершенно очевидно, что процедура взятия определенного интеграл (2.51) или (2.52) в виде замкнутой квадратуры практически нереализуема. Поэтому, приходится прибегать к численному интегрированию. Формулы численного интегрирования:

для восьмиугольного элемента

$$I \approx \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} H_{i} H_{j} H_{m} f(\xi_{i} \eta_{j} \varsigma_{m}); \qquad (2.53)$$

для тетраэдра

$$I \approx \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} W_{ijm} f(L_{1i} L_{2j} L_{3m}).$$
 (2.54)

Здесь n —число точек интегрирования в направлении каждой независимой переменной, H_i, H_j, H_m - весовые коэффициенты одномерной квадратуры Гаусса, приведенные в табл.2.1, W_{ijm} - весовые коэффициенты квадратуры Хаммера [19], которые представлены в следующей табл.2.2.

Координаты и веса квадратурной формулы Гаусса

Таблица 2.1.

| ν | ξ | Н | ν | ξ | H |
|---|--------------|--------------|----|---------------|--------------|
| 2 | ±0.577350269 | 1.000 | 7 | ±0.949107912 | 0.1294849661 |
| | | | | ±0.741531185 | 0.2797053914 |
| | | | | ±0.405845151 | 0.3818300505 |
| | | | | 0.0 | 0.4179591836 |
| 3 | ±0.774596669 | 0.555555555 | 8 | ±0.960289856 | 0.1012285362 |
| | 0.000000000 | 0.8888888888 | | ±0.796666477 | 0.2223810344 |
| | | | | ±0.525532409 | 0.3137066458 |
| | | | | ±0.183434624 | 0.3626837833 |
| 4 | ±0.861136312 | 0.3478548451 | 9 | ±0.968160239 | 0.0812743883 |
| | ±0.339981046 | 0.6521451548 | | ±0.836031107 | 0.1806481606 |
| | | | | ±0.613371432 | 0.2606106964 |
| | | | | ±0.324253223 | 0.3123470770 |
| | | | | 0.000000000 | 0.3302393550 |
| 5 | ±0.906179846 | 0.2369268850 | 10 | ±0.9739065285 | 0.0666713443 |
| | ±0.538469310 | 0.4786286704 | | ±0.8650633666 | 0.1494513491 |
| | 0.0000000000 | 0.5688888888 | | ±0.6794095682 | 0.2190863625 |
| | | | | ±0.4333953941 | 0.2692667193 |
| | | | | ±0.1488743389 | 0.2955242247 |
| 6 | ±0.932246951 | 0.1713244923 | | | |
| | ±0.661209386 | 0.3607615730 | | | |
| | ±0.238619186 | 0.4679139345 | | | |

Координаты и весовые коэффициенты для тетраэдра

Таблица 2.2.

| | | | | 140лица 2.2. |
|----------|--|-------|---|----------------|
| Порядок | Рисунок | Точки | Пространственные | Весовые |
| элемента | | | L -координаты | коэффициенты |
| Первый | • a | а | $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ | 1 |
| Второй | | а | lpha,eta,eta,eta | $\frac{1}{4}$ |
| | | b | $oldsymbol{eta}, lpha, oldsymbol{eta}, oldsymbol{eta}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | | С | $oldsymbol{eta},oldsymbol{eta},oldsymbol{lpha},oldsymbol{lpha}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | | d | $oldsymbol{eta},oldsymbol{eta},oldsymbol{eta},lpha$ | $\frac{1}{4}$ |
| | | | α =0.58541020 β =013819660 | |
| Третий | \wedge | а | $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ | $-\frac{4}{5}$ |
| | • e | b | $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ | $\frac{9}{20}$ |
| | $ \begin{array}{c} b \bullet \\ \hline \bullet \overline{d} - c \end{array} $ | С | $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ | $\frac{9}{20}$ |
| | | d | $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ | $\frac{9}{20}$ |
| | | e | $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ | $\frac{9}{20}$ |

2.4. Осесимметричные элементы

Напряженно-деформированное вращения состояние тела при осесимметричном нагружении полностью определяется двумя компонентами перемещений u и w, зависящими от координат r и z (рис.2.8). Тем не менее, векторы-функции $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ содержат по четыре компонента, поскольку радиальное перемещение u вызывает в окружном направлении деформацию соответствующее напряжение σ_{θ} , которые все же от θ не зависят. Поэтому, при конечноэлементной аппроксимации осесимметричного тела вращения треугольным разбивают на кольцевые элементы с или прямоугольным поперечными сечениями (рис.2.8). При этом узлами элемента являются не точки, а кольца, образующиеся по длинам соответствующих окружностей.

Очевидно, что осесимметричная задача представляет собой частный случай пространственной. Однако удобно рассматривать ее как самостоятельную задачу,

2 B 1 2

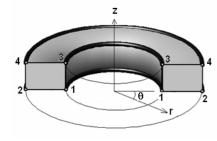


Рис. 2.8. Осесимметричные элементы

используя при выкладках несомненное сходство с математической точки зрения с плоской задачей.

Обратимся вначале к кольцевому элементу с треугольным поперечным сечением (рис.2.9). Для определения его характеристик будем исходить из того, что вектор-функция перемещений внутренних точек определяется двумя компонентами

$$\{u\} = \begin{cases} u(r,z) \\ w(r,z) \end{cases} = [C] \{q\}_i,$$
 (2.55)

где $\{q\}_i = \{\{q\}^{(1)}\{q\}^{(2)}\{q\}^{(3)}\}$ - вектор перемещений узлов элемента, содержащий компоненты перемещений вдоль осей r и z, т.е. $\{q\}^{(k)} = \{u_k \ w_k\}$. Здесь компоненты матрицы интерполяционных функций [C] будут зависеть от двух переменных r и z. Напомним, что интерполяционные функции

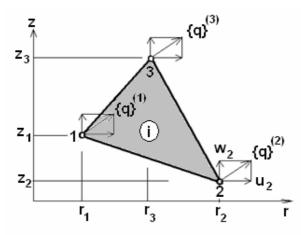


Рис.2.9. Осесимметричный треугольный элемент

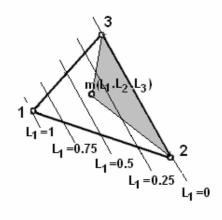


Рис.2.10. Местные координаты для треугольника

должны обеспечить непрерывность перемещений как внутри элемента, так и при переходе от элемента к элементу. Матрица [C] блочная, число ее блоков равно числу узлов

$$[C]_{i} = [C(r,z)]^{(1)}[C(r,z)]^{(2)}[C(r,z)]^{(3)}, \qquad (2.56)$$

где, например, $[C]^{(k)} = E_2 C_k(r,z)$, E_2 - единичная матрица второго порядка. Интерполяционные функции для треугольника первого порядка имеют вид [8]

$$C_{1}(r,z) = \frac{1}{2\Delta_{i}} (a_{1} + b_{1}r + c_{1}z); \quad C_{2}(r,z) = \frac{1}{2\Delta_{i}} (a_{2} + b_{2}r + c_{2}z);$$

$$C_{3}(r,z) = \frac{1}{2\Delta_{i}} (a_{3} + b_{3}r + c_{3}z),$$
(2.57)

где
$$2\Delta_i = det \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
 - удвоенная площадь треугольника;

$$a_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2$$
; $a_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3$; $a_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1$; $b_1 = z_2 - z_3$; $b_2 = z_3 - z_1$; $b_3 = z_1 - z_2$; $c_1 = r_3 - r_2$; $c_2 = r_1 - r_3$; $c_3 = r_2 - r_1$.

Физический смысл выражений (2.57) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение площади соответствующего заштрихованного треугольника к площади всего треугольного конечного элемента (рис. 2.10), т.е.

$$C_1(r,z) = \frac{\Delta_{m23}}{\Delta_i}, C_2(r,z) = \frac{\Delta_{m31}}{\Delta_i}, C_3(r,z) = \frac{\Delta_{m12}}{\Delta_i}$$
 (2.58)

Функции, определенные соотношением (2.58), называют плоскими L – координатами и являются нормализованными координатами для треугольника. Таким образом

$$L_1 = C_1(r,z); \quad L_2 = C_2(r,z); \quad L_3 = C_3(r,z).$$
 (2.59)

Значения L- координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворят требованиям

$$L_{j}(r_{k}, z_{k}) = \begin{cases} 1 & , j = k; \\ 0 & , j \neq k. \end{cases}$$
 (2.60)

Отметим, что из трех L-координат только две являются независимыми, поскольку между ними существует вполне очевидная связь

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. (2.61)$$

Кстати, нормализованные L-координаты для треугольника известны еще со времен Древней Греции, тогда их называли "барицентрическими" координатами.

Обычно L- координаты используются для интерполяции узловых перемещений в область для тех конечных элементов, которые отображаются на треугольник.

Согласно (1.2) и (2.55) связь между деформациями и перемещениями в данном случае имеет вид

$$\{\varepsilon\}_{i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0\\ \frac{1}{r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} [C] \{q\}_{i} = [B] \{q\}_{i}. \tag{2.62}$$

Матрицу деформаций запишем в блочном виде

$$[B] = [B]^{(1)}[B]^{(2)}[B]^{(3)}, \qquad (2.63)$$

где каждый из блоков равен

$$[B]^{(k)} = \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ \varphi_k(r,z) & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}.$$
 (2.64)

Здесь $\varphi_k(r,z) = \frac{a_k}{r} + b_k + \frac{c_k}{r}z$; a_k,b_k,c_k – определены в выражении (2.57).

Из (2.64) следует, что компоненты деформаций не остаются постоянными в пределах треугольного сечения. Следовательно, и компоненты напряжений также зависят от координат r и z.

Типовой блок матрица жесткости рассматриваемого элемента получается с использованием стандартного соотношения (1.8) который, учитывая осевую симметрию, можно переписать в виде

$$[K]_{ij}^{\kappa} = 2\pi \iint_{A_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{\kappa} r \, dr \, dz$$
 (2.65)

и интегрирование осуществлять лишь в плоскости треугольного сечения. Однако в этом подынтегральное выражение есть функция от r и z. Обычно, чтобы обойти эти трудности принимают приближенно значения r и z постоянными, равными значениям в центре тяжести элемента, т.е. $r_c = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$, $z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, а интеграл (2.65) заменяют приближенным выражением

$$[K]_{ii}^{(\kappa)} \approx 2\pi r_c \Delta_i ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(\kappa)}. \tag{2.66}$$

Произведя необходимые выкладки, можно получить в явном виде

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{\pi r_c}{4\Delta_i} \begin{bmatrix} b_j (D_{11}b_k + D_{12}\varphi_k^c + D_{14}c_k) + & b_j (D_{13}c_k + D_{14}b_k) + \\ +\varphi_j^c (D_{12}b_k + D_{22}\varphi_k^c + D_{24}c_k) + & +\varphi_j^c (D_{23}c_k + D_{24}b_k) + \\ +c_j (D_{41}b_k + D_{42}\varphi_k^c + D_{44}c_k) & +c_j (D_{34}c_k + D_{44}b_k) \\ c_j (D_{13}b_k + D_{23}\varphi_k^c + D_{34}c_k) + & b_j (D_{34}c_k + D_{44}b_k) + \\ +b_j (D_{41}b_k + D_{24}\varphi_k^c + D_{44}c_k) & +c_j (D_{33}c_k + D_{34}b_k) \end{bmatrix},$$

$$(2.67)$$

где, например, $\boldsymbol{\varphi}_k^c = \frac{a_k}{r_c} + b_k + \frac{c_k}{r_c} z_c$.

Такое приближенное интегрирование дает достаточную точность решения задачи в целом [8], поскольку разбиение на треугольники с узлами в вершинах должно быть достаточно мелким.

Вместе с тем, удовлетворительные результаты могут быть получены при использовании кольцевых элементов относительно больших размеров, если, конечно, повысить порядок интерполяционных функций, или, другими словами, применить элементы с дополнительными узлами.

Определим теперь матрицы для кольцевого элемента прямоугольного сечения (рис.2.11). Вектор-функция узловых перемещений этого элемента $\{q\}_i=\{q\}^{(1)}\{q\}^{(2)}\{q\}^{(3)}\{q\}^{(4)}\}$ имеет четыре блока по числу узлов, каждый из которых содержит компоненты перемещений вдоль осей r и z $\{q\}^{(k)}=\{u_k\ w_k\}$. Типовой блок четырехблочной матрицы интерполяционных функций равен $[C]^{(k)}=E_2C_k$, где E_2 -единичная матрица второго порядка. В нормализованных координатах, которые в данном случае связаны с глобальными следующими соотношениями (рис.2.12)

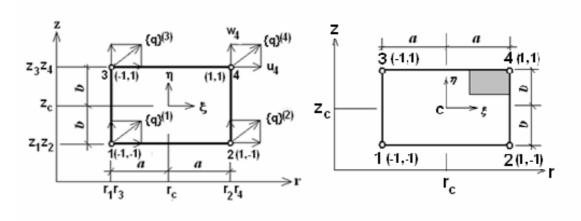


Рис.2.11. Осесимметричный прямоугольный элемен.

Рис.2.12. Местные координаты для прямоугольника

$$\xi = \frac{r - r_c}{a}; \quad \eta = \frac{z - z_c}{b}, \tag{2.68}$$

интерполяционная функция принимается равной [8]

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta), \quad (k=1,2,3,4).$$
 (2.69)

Тогда типовой блок матрицы деформаций, содержащей четыре подматрицы, согласно (1.7) примет вид

$$[B]^{(k)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) & 0 \\ \frac{4C_k(\xi, \eta)}{r_c + a\xi} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) \\ \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) & \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) \end{bmatrix}.$$
 (2.70)

Для построения матрицы жесткости воспользуемся соотношением (2.65), переписав его в нормализованных координатах

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = 2\pi a b \int_{-l-1}^{l} \int_{-l-1}^{l} (B^{(j)})^{T} [D] B^{(\kappa)}(a\xi + r_{c}) d\xi d\eta.$$
 (2.71)

Несмотря на то, что выражение (2.71) можно проинтегрировать точно, тем не менее, во избежание ошибок при преобразованиях, рекомендуем определять его численно.

Перейдем к определению узловых сил, статически эквивалентных реальным распределенным нагрузкам, имея в виду, что в данном случае они действуют равномерно по длинам окружностей, образующих узлы кольцевого элемента (рис.2.13).

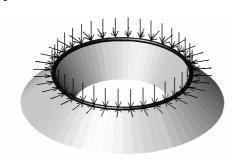


Рис.2.13. Узловые нагрузки

Вектор-столбец узловых сил $\{P_V\}_i$, соответствующих объемным силам интенсивностью $\{G_V(r,z)\}=\{R_V(r,z)Z_V(r,z)\}$, учитывая (1.9), определяется следующим образом

$${P_V}_i = 2\pi \iint_{\Delta_i} [C]^T {G_V} r dr dz$$
. (2.72)

Причем, если используются конечные элементы с треугольным сечением первого порядка, а объемные силы в нем постоянны, то, например, в k-ом узле

$$\{P_V\}_i^{(k)} = 2\pi \{G_V\} \iint_{\Delta_i} C_k(r,z) r \, dr \, dz \,, \tag{2.73}$$

И в первом приближении, заменяя $C_k(r,z)$ ее значением в центре тяжести треугольника, получим

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \begin{cases} P_{IV}^{(k)} \\ P_{2V}^{(k)} \end{cases} = \frac{2}{3} \pi \Delta_i r_c \begin{cases} R_V \\ Z_V \end{cases}.$$
 (2.74)

Когда осесимметричное тело представляется совокупностью конечных элементов прямоугольного профиля с четырьмя узловыми точками и $\{G_V\}$ = const, вектор сил в k-ом узле

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \begin{cases} P_{IV}^{(k)} \\ P_{2V}^{(k)} \end{cases} = 2\pi \ a \ b \begin{cases} R_V \\ Z_V \end{cases} \int_{-1-1}^{1} C_k(\xi, \eta) (r_c + a\xi) d\xi \ d\eta = 2\pi \ a \ b \ (\frac{a}{3} + r_c) \begin{cases} R_V \\ Z_V \end{cases}.$$
 (2.75)

Компоненты вектора объемных узловых сил для рассматриваемых далее элементов второго и выше порядков следует находить численно с использованием процедур численного интегрирования. К численной процедуре определения узловых сил удобно обращаться и при расчете тел вращения на распределенные центробежные силы

$$R_V = \omega^2 \rho r,$$

где ω - угловая скорость; ρ - плотность.

Кольцевые элементы, описанные выше, относятся к элементам первого порядка. Их использование позволяет, в большинстве случаев, получать на практике решение задачи с достаточной точностью. Тем не менее, иногда возникает необходимость повысить точность расчетов без увеличения числа элементов. Для этого используются элементы второго, третьего и т.д. порядков. Вводятся дополнительные узлы-кольца, т.е. увеличивается степень свободы элемента.

Использование кольцевых конечных элементов с дополнительными узлами допускает в ряде случаев увеличение их размеров за счет повышения точности аппроксимации перемещений. При этом, естественно, может возникнуть необходимость в кольцевых элементах с криволинейными профилями (рис.2.14). Получение характеристик таких элементовне не составит принципиальных трудностей. Отметим лишь, что местные нормализованные координаты отображаются на криволинейной сетке с помощью следующих зависимостей

$$r = C_1 r_1 + \dots + C_k r_k + \dots + C_n r_n;$$

$$z = C_1 z_1 + \dots + C_k z_k + \dots + C_n z_n,$$
(2.76)

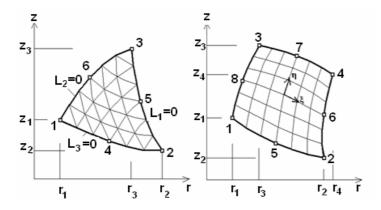


Рис.2.14. Криволинейные кольцевые элементы.

где r_k, z_k - координаты узлов в общей цилиндрической системе; C_k - интерполяционные функции для k-го узла, записанные либо в координатах ξ, η для элементов четырехугольного сечения, либо - L_1, L_2, L_3 для элементов треугольного сечения.

Поскольку матрицы для осесимметричных элементов, за исключением треугольника первого порядка, приходится

устанавливать с помощью численного интегрирования, рекомендуем всегда применять изопараметрическое отображение, т.е. такое, при котором интерполяция перемещений и координат по области элемента осуществляется с помощью одних и тех же интерполяционных функций. На трудоемкость и сложность численного интегрирования это не окажет никакого влияния.

Отметим, что использование изопараметрического отображения имеет смысл не только для элементов высших порядков. Так, например, прямоугольный элемент первого порядка отображается в четырехугольник общего вида, что существенно расширяет область его возможного использования.

2.5. Элементы толстых оболочек

Обычно конечные элементы плит и оболочек [57] строятся на базе прикладных технических теорий [8,19], позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Для построения матриц, характеризующих такие элементы, используются соответствующие соотношения теории плит и оболочек,

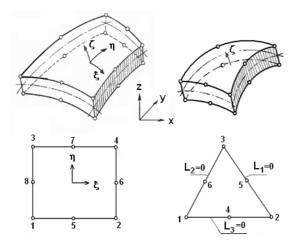
основанных на априорных гипотезах об изменении напряженно-деформированного состояния по толщине конструкции. Однако, эти соотношения распространяются только на тонкие плиты и оболочки. Более того, строго говоря, каждый конечный элемент, являясь частью системы, должен рассматриваться как отдельная конструкция в ее составе, соотношение его геометрических размеров должно отвечать требованиям, при которых допустимо использование кинематических и статических гипотез. Поэтому, когда размеры элементов сопоставимы с его толщиной, правомерность использования кинематических и статических гипотез подвергается вполне обоснованному сомнению. Особенно проблематично использование технических теорий для расчета железобетонных плит и оболочек из-за существенной неоднородности и физической нелинейности материала, наличия арматуры, трещин и т.д. При помощи технических теорий невозможно описать некоторые характерные для железобетона явления – наличие не только нормальных, но и наклонных трещин, напряжений в поперечной арматуре, проскальзывание арматурных стержней в трещине относительно бетона, в результате которого происходит их раскрытие, сдвиг блоков бетона между смежными трещинами и т.д. Поэтому, наиболее обоснованным, на наш взгляд, являются специфические конечноэлементные методы и подходы, учитывающие косвенным путем некоторые из кинематических гипотез теории плит и оболочек, но основанные, тем не менее, на общих принципах и соотношениях трехмерной механики деформируемого твердого тела. Базой таких методов должны быть специальные конечные элементы, являющиеся модификацией стандартных объемных элементов.

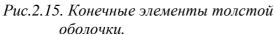
Приведем вывод соотношений для семейства элементов, основанных, с одной стороны на общих соотношениях механики, с другой - частично учитывающие технические гипотезы изгиба [63]. Подобный элемент для изотропных линейно-упругих материалов был предложен в работе [19], его развитие на многослойные оболочки дано в [4].

Итак, рассмотрим объемный конечный элемент в виде криволинейного параллелепипеда или гексаэдра (рис.2.15) в местной нормализованной, криволинейной системе координат ξ,η,ς или L_1,L_2,L_3,ς , при этом $\varsigma=\pm 1$ соответствуют верхней и нижней поверхностям элемента. Эти поверхности криволинейны, а боковые грани образованы движением нормали постоянной длины h вдоль линии главных кривизн. Другими словами, поперечные сечения являются поверхностями переноса с образующей в виде прямой линии. Связь между местными криволинейными координатами и общими декартовыми может быть представлена так

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{k} C_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{cnedH} + \sum_{k} C_k(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} V_{3k}, \qquad (2.77)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты узлов в уровне срединной поверхности (k=1,2,3 ...n), n - общее число узлов элемента; $C_k(\xi, \eta)$ - интерполяционные функции перемещений в уровне срединной поверхности; V_{3k} - вектор нормали к срединной поверхности в точке k





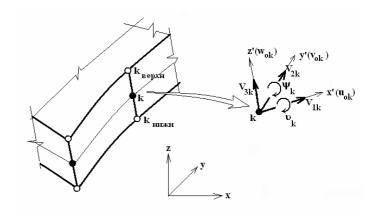


Рис.2.16. Системы координат в узле

$$V_{3k} = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{gepxh.} - \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{hushch.}$$
 (2.78)

В случае гексаэдра интерполяционные функции будут зависеть от нормализованных L-координат $C_k(L_1,L_2,L_3)$. В дальнейшем, для общности изложения, аргументы интерполяционных функций будем опускать, считая все соотношения справедливыми как для криволинейного гексаэдра, так и для параллелепипеда. Несмотря на то, что данный элемент является частным случаем объемного элемента, тем не менее, наличие только двух узлов в направлении толщины приводит к тому, что изменение перемещений в этом направлении должно описываться линейными функциями. Это отвечает гипотезе о прямолинейности нормали, принятой во всех технических теорий изгиба, и дает возможность принять в качестве узлов линии-нормали к срединной поверхности до ее деформации. В результате, вектор узловых перемещений, например в k-ом узле i-го элемента записывается так

$$\{q(\varsigma)\}_{i}^{(k)} = \{u_{k}(\varsigma)v_{k}(\varsigma)w_{k}(\varsigma)\}. \tag{2.79}$$

Компонентами в (2.79) являются перемещения точек нормали, зависящие от нормализованной координаты ς . Для всего элемента

$$\{q(\varsigma)\}_{i} = \{q(\varsigma)\}_{i}^{(1)} \cdots \{q(\varsigma)\}_{i}^{(k)} \cdots \{q(\varsigma)\}_{i}^{(n)}\}. \tag{2.80}$$

Переход от (2.80) к перемещениям по области рассматриваемого элемента, пользуясь методом разделения переменных, можно представить в виде

$$\{u\} = \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \left[\left[C \right]^{(1)} \cdots \left[C \right]^{(k)} \cdots \left[C \right]^{(n)} \right] \begin{cases} \{q(\varsigma)\}_{i}^{(1)} \\ q(\varsigma)\}_{i}^{(k)} \\ \vdots \\ \{q(\varsigma)\}_{i}^{(n)} \end{cases}$$
(2.81)

В работе [19] было показано, что даже в случае достаточно толстых оболочек использование линейного закона для $\{q(\varsigma)\}_i^{(k)}$, что эквивалентно гипотезе о прямолинейности нормали, дает удовлетворительные результаты. Поэтому принимаем такой закон и, пренебрегая, как и в случае тонких оболочек, деформациями в направлении толщины элемента, запишем

$$\left\{q(\varsigma)\right\}_{i}^{(k)} = \begin{cases} u_{ok} \\ v_{ok} \\ w_{ok} \end{cases} - \frac{\mathcal{G}h}{2} \begin{bmatrix} m_{xy'} & m_{xx'} \\ m_{yy'} & m_{yx'} \\ m_{zy'} & m_{zx'} \end{cases} \begin{cases} v_k \\ \psi_k \end{cases},$$

или

$$\{q(\varsigma)\}_{i}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\varsigma h}{2} m_{xy'} & -\frac{\varsigma h}{2} m_{xx'} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\varsigma h}{2} m_{yy'} & -\frac{\varsigma h}{2} m_{yx'} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\varsigma h}{2} m_{zy'} & -\frac{\varsigma h}{2} m_{zx'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ok} \\ v_{ok} \\ w_{ok} \\ v_{k} \\ \psi_{k} \end{bmatrix}.$$
 (2.82)

Здесь m_{ij} - направляющие косинусы нормали к срединной поверхности k-ом узле. Для определения направляющих косинусов n_{ij} введем следующие обозначения

$$V_{1k} = \left\{ m_{yx'} m_{yy'} m_{yz'} \right\}; \quad V_{2k} = \left\{ m_{xx'} m_{xy'} m_{xz'} \right\}. \tag{2.83}$$

Совместно с вектором V_{3k} (2.78) совокупность векторов V_{1k} , V_{2k} (2.83) образует тройку взаимоортогональных векторов базиса новой местной системы координат (рис.2.16). Как известно, связь между ними осуществляется с помощью векторных произведений

$$V_{1k} = i \times V_{3k}; V_{2k} = V_{1k} \times V_{3k},$$
 (2.84)

где $i = \{1 \ 0 \ 0\}.$

Таким образом, согласно соотношению (2.82), деформированное состояние элемента будет однозначно определяться узловыми перемещениями в уровне срединной поверхности, составляющими которых в каждом k-ом узле являются - три линейных перемещения u_{ok} , v_{ok} , w_{ok} и два угла поворота ψ_k и ϑ_k .

В общем случае направление оси ς не совсем точно совпадает с направлением нормали к срединной поверхности, тем не менее, как показано в [19], это не вызывает существенных погрешностей при расчете конструкций. Отметим также, что если геометрия элемента определяется в соответствии с уравнением (2.77) координатами узлов на нижней и верней поверхностях общим числом для каждого узла-линии равным шести, то его деформированной состояние определяется компонентами узловых перемещений по пять в каждом узле. Следовательно, данный элемент следует отнести к элементам суперпараметрического типа [19].

Определив геометрию и перемещения элемента, можно найти его деформации. В общем виде связь между узловыми перемещениями элемента $\{q\}_i = \{q\}_i^{(1)} \cdots \{q\}_i^{(k)} \cdots \{q\}_i^{(n)}\}$, где $\{q\}_i^{(k)} = \{u_{ok}v_{ok}w_{ok}v_k\psi_k\}$ и деформациями $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}\}$ в системе координат x,y,z имеет вид

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{q}\}. \tag{2.85}$$

Поскольку здесь используются основные гипотезы технической теории, то в местной ортогональной системе координат x',y',z' (рис.2.16), где ось z' – направлена по нормали к срединной поверхности, а оси x' и y' ей перпендикулярны, деформациями в направлении оси z' можно пренебречь. Поэтому, связь между деформациями и перемещениями целесообразно записать сначала именно в этой системе координат с последующим переходом в общую глобальную систему

$$\begin{cases}
\varepsilon_{x'} \\
\varepsilon_{y'} \\
\gamma_{x'y'} \\
\gamma_{y'z'} \\
\gamma_{x'z'}
\end{cases} =
\begin{bmatrix}
\partial/\partial x' & 0 & 0 \\
0 & \partial/\partial y' & 0 \\
\partial/\partial y' & \partial/\partial x' & 0 \\
0 & \partial/\partial z' & \partial/\partial y' \\
\partial/\partial z' & 0 & \partial/\partial x'
\end{bmatrix}
\begin{cases}
u' \\
v' \\
w'
\end{cases}.$$
(2.86)

Для преревода соотношения (2.86) в общую систему координат x,y,z необходимо осуществить два преобразования. Первое преобразование обусловлено получением частных производных в общей системе координат x,y,z. Т.к. глобальные перемещения u,v,w с криволинейными координатами связаны соотношением (2.81), то производные от этих перемещений по общим координатам определяются так

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}. (2.87)$$

В этом выражении средняя матрица есть матрица Якоби [J], ее определитель $\det[J]$ – якобиан.

Второе преобразование связано с переходом к локальным координатам x',y',z'. Для этого установим направления локальной оси z'

$$V_{3} = \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{cases} \times \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{cases}. \tag{2.88}$$

Остальные два направляющих вектора V_1 и V_2 определим по формулам (2.83). Нормируя вектора V_1 , V_2 , V_3 , получим составляющие ортов по осям x',y',z', которые и образуют матрицу направляющих косинусов. Напомним, что процедура нормирования означает деление на длину векторов l_1 , l_2 , l_3 , где, например, $l_1 = \sqrt{(\partial x/\partial \xi)^2 + (\partial y/\partial \xi)^2 + (\partial z/\partial \xi)^2}$.

Матрица жесткости конечного элемента, например, в форме криволинейного параллелепипеда, может быть получена по стандартной формуле

$$[K] = \int_{-I-I-I}^{I} \int_{-I-I-I}^{I} [B]^{T} [D(\varsigma)] [B] \det[J] d\xi d\eta d\varsigma.$$
 (2.89)

Для элемента, имеющего в основании криволинейный треугольник, так

$$[K] = \int_{-10}^{1} \int_{0}^{1-L_1} \int_{0}^{1-L_1} [B]^T [D(\varsigma)] [B] \det[J] dL_1 dL_2 d\varsigma.$$
 (2.90)

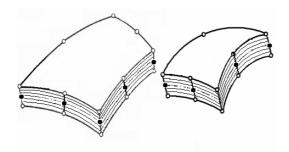


Рис.2.17. «Слоистость» элементов.

Интегралы (2.89) и (2.90) определяется численно с использованием процедуры Гаусса или Хаммера. В этом случае интеграл заменяется суммой значений, вычисленных в точках интегрирования. Согласно процедурам Гаусса и Хаммера эти точки вычисляются по определенному алгоритму и расположены неравномерно во всех трех направлениях интегрирования. Это значительно увеличивает точность интегрирования и уменьшает время

вычислений. Однако, если для интегрирование по координатам ξ , η (L_1, L_2, L_3) действительно лучше использовать квадратуру Гаусса (Хаммера), то, что касается координаты $\boldsymbol{\zeta}$, в случае железобетонного элемента число точек интегрирования быть переменным должно параметром, НО определяемым, во многом. конструктивными соображениями - толщиной оболочки, защитным слоем, процентом армирования и расположением арматуры, ее диаметром и т.д., и их положение в большинстве случаев не удается привести в соответствии с положением гауссовых точек. Поэтому, предлагается численное интегрирование по Гауссу в направлении третьей координаты заменить численным интегрирование по

правилу прямоугольников. Фактически это означает представление толстой оболочки в виде набора слоев "сэндвича" (рис.2.17), а интегралы в (2.89) и (2.90) нужно представить так

$$[K] = \int_{-I-I}^{I} \int_{j=I}^{I} \left[\sum_{j=I}^{r} [B]^{T} [D(\varsigma_{j})] B h_{j} \right] det[J] d\xi d\eta;$$
(2.91)

ИЛИ

$$[K] = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-L_{I}} \left(\sum_{j=1}^{r} [B]^{T} [D(\varsigma_{j})] [B] h_{j} \right) det[J] dL_{I} dL_{2}, \qquad (2.92)$$

где r – число слоев, h_j – толщина j-го слоя. Здесь ζ_j - координата центра тяжести j-го слоя. Таким образом, матрица механических характеристик вычисляется послойно, что позволяет использовать элемент для физической нелинейных материалов, когда при линейном законе изменения деформаций по толщине напряжения меняются нелинейно.

Отметим, что если элемент имеет переменную толщину, то и толщина каждого слоя будет переменной.

Анализ напряженного состояния оболочки, ее конструирование, осуществляется, как правило, с помощью интегральных силовых характеристик - моментов, продольных и поперечных сил. Эти характеристики могут быть получены стандартным путем послойным суммированием по высоте сечения

$$N_{x'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{x'} h_{j}; \quad N_{y'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{y'} h_{j}; \quad N_{x'y'} = \sum_{j=1}^{m} \tau_{x'y'} h_{j}; \quad Q_{x'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{x'z'} h_{j};$$

$$Q_{y'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{y'z'} h_{j}; \quad M_{x'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{x'} z_{j} h_{j}; \quad M_{y'} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{y'} z_{j} h_{j}; \quad M_{xy'} = \sum_{j=1}^{m} \tau_{x'y'} z_{j} h_{j},$$

$$(2.93)$$

 z_{i} - расстояние от центра тяжести j -го слоя до срединной поверхности.

Точность описанного элемента во многом определяется выбором функций $C_k(\xi, \eta)$, входящих в выражения (2.77) и (2.81) и интерполирующих узловые перемещения по области срединной поверхности. Выражения для этих функций определяются числом узлов на поверхности. Интерполяционные функции для элементов различной размерности и формы приведены в [19].

Так для элемента, имеющего в основании криволинейный треугольник эти функции равны.

Элемент второго порядка:

угловые узлы

$$C_k(L_k) = (2L_k - 1)L_k, (k=1,2,3);$$
 (2.94)

узлы на сторонах

$$C_k(L_j, L_n) = 4L_j L_n, (k=4,5,6),$$
 (2.95)

где j,n — номера угловых узлов на той же стороне.

Элемент третьего порядка:

угловые узлы

$$C_k(L_k) = \frac{1}{2} (3L_k - 1)(3L_k - 2)L_k, (k=1,2,3);$$
 (2.96)

узлы на сторонах

$$C_k(L_j, L_n) = \frac{9}{2} L_j L_n(3L_j - 1), (k=4,...,9);$$
 (2.97)

гдеj - номер ближайшего углового узла на рассматриваемой стороне, n - дальнего; центральный узел

$$C_{10}(L_1, L_2, L_3) = 27L_1L_2L_3.$$
 (2.98)

Основной особенностью всех перечисленных интерполяционных функций является то обстоятельство, что они равны единице в данном узле и нулю во всех остальных.

Так для элемента, имеющего в основании криволинейный четырехугольник эти функции равны.

Элемент второго порядка:

угловые узлы

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_k) (1 + \eta \eta_k) (\xi \xi_k + \eta \eta_k - 1); \tag{2.99}$$

узлы на сторонах

$$\xi_k = 0, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_k \eta), \qquad k = 5,7;$$
 (2.100)

$$\eta_k = 0, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi_k \xi) (1 - \eta^2), \qquad k = 6, 8.$$
(2.101)

Элемент третьего порядка:

угловые узлы

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_k) (1 + \eta \eta_k) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$
 (2.102)

узлы на сторонах

$$\xi_k = \pm I, \eta_k = \pm \frac{1}{3}, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (I + \xi_k \xi) (I - \eta^2) (I + 9\eta_k \eta), \quad k = 7, 8, 11, 12; \quad (2.103)$$

$$\xi_k = \pm \frac{1}{3}, \eta_k = \pm 1, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1 + \eta_k \eta) (1 - \xi^2) (1 + 9\xi_k \xi), \quad k = 5, 6, 9, 10.$$
 (2.104)

Описанный выше элемент, являясь достаточно точным для описания напряженно-деформированного состояния оболочек средней толщины и толстых, тем не менее, в отдельных случаях дает погрешности в тех областях конструкции, где велико влияние нормальных напряжений по площадкам, перпендикулярным срединной поверхности, например, в приопорных зонах, зонах приложения сосредоточенных сил и т.д. В этом случае расчет необходимо осуществлять в трехмерной постановке с использованием всех шести составляющих компонент напряжений и деформаций с отказом от гипотезы о недеформируемости нормали и учитывая напряжения σ_z .

Рассмотрим обобщение описанного выше конечного элемента, позволяющее учесть напряжения и деформации по нормали к срединной поверхности. Для этого элемента из всех гипотез технической теории изгиба будем считать справедливой только гипотезу о прямолинейности нормали. Внешне этот элемент будет выглядеть точно так же, как показано на рис.2.15, однако узлами остаются угловые

точки элемента. В качестве узловых параметров, как обычно, принимаются компоненты линейных перемещений по направлениям глобальных осей x,y,z. Таким образом, общее число узловых перемещений линейного элемента составит 24, квадратичного - 48, кубичного - 72. При этом отпадает надобность во всех промежуточных выкладках, описанных ранее для приведения к перемещениям и углам поворота в уровне срединной поверхности. Это также позволяет отказаться от громоздких преобразований координат и изучать поведение элемента непосредственно в осях x,y,z. Интерполяционные функции для элемента могут быть записаны с использованием разделения переменных так

$$C_k(\xi, \eta, \xi) = C_{1k}(\xi, \eta)C_{2k}(\zeta), \quad C_k(L_1, L_2, L_3, \xi) = C_{1k}(L_1, L_2, L_3)C_{2k}(\zeta)$$
 (2.105)

где «плоскостные» функции $C_{1k}(\xi, \eta)$ и $C_{1k}(L_1, L_2, L_3)$ имеют вид (2.94)-(2.104).

Чтобы сохранить условие прямолинейности нормали, для функции $C_{2k}(\boldsymbol{\varsigma})$ должно быть принято линейное выражение, а именно

$$C_{2k}(\varsigma) = \frac{1}{2}(1 - \varsigma_k \varsigma), \tag{2.106}$$

где $\varsigma_k = 1$ для верхней поверхности и $\varsigma_k = -1$ для нижней поверхности оболочки.

Для такого элемента отпадает необходимость и в преобразовании матрицы механических характеристик $[D(\varsigma_j)]$, которое ранее применялось для исключения составляющих, связанных с нулевыми нормальными к срединной поверхности деформациями и напряжениями. Матрица механических характеристик должна быть принята как в общем трехмерном случае без изменения.

В остальном данный элемент сохраняет все черты предыдущего, включая и его многослойность.

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

3.1. Прочность бетона

Исследования прочности бетона при сложном напряженном состоянии проводятся уже более 50 лет. Накопилось огромное количество теоретических и экспериментальных данных, трудно поддающихся учету и систематизации. Наиболее полные обзоры исследований в этой области приведены в работах [16,22,55].

В работе [16] отмечается, что сложность явлений, происходящих при разрушении структурно неоднородных материалов, к которым относится и бетон, в обозримом будущем не даст возможности сформулировать физически учитывающий характерные обоснованный критерий прочности, все ИΧ особенности. Поэтому при построении условий прочности распространение получили феноменологические подходы, аппроксимации экспериментальных данных, полученных в результате простейших испытаний стандартных образцов на растяжение-сжатие, сдвиг и т.д.

Известно, что условие прочности должно описывать выпуклую и гладкую поверхность, симметричную относительно диагонали пространства главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (рис.3.1). Строится эта поверхность обычно в местной цилиндрической системе координат σ_o, τ_o, θ , связанной с исходной $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соотношениями

$$\sigma_{o} = \frac{1}{3} (\sigma_{I} + \sigma_{2} + \sigma_{3}) ; \tau_{o} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{I} - \sigma_{2})^{2} + (\sigma_{2} - \sigma_{3})^{2} + (\sigma_{3} - \sigma_{I})^{2}} ;$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\sqrt{2} \frac{D_{3}}{\tau_{o}^{3}}\right), \tag{3.1}$$

где $D_3 = (\sigma_1 - \sigma_o)(\sigma_2 - \sigma_o)(\sigma_3 - \sigma_o)$ - третий инвариант девиатора напряжений.

Эта система координат называется октаэдрической, а σ_o и τ_o соответственно октаэдрическими нормальными и касательными напряжениями. Угол θ носит название угла вида напряженного состояния.

Поверхность прочности описывается уравнением

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) \equiv 0$$
,

которое обычно строится на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний способом, предложенным М.М.Филоненко-Бородичем [64]. Сначала для значений $\theta = 0^{\circ}$ и $\theta = 60^{\circ}$ формируются две кривые $\tau_I(\sigma_0)$ и $\tau_2(\sigma_0)$, аппроксимирующие данные, которые получены из опытов при $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ и $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Затем осуществляется интерполяция для углов θ , находящихся в

интервале (0°, 60°). Этот способ использовали в своих работах Н.И.Карпенко [22], Е.С.Лейтес [43], Т.А.Балан,С.Ф.Клованич [5,33], В.М.Круглов [36], А.В.Яшин [67],

 σ_{3} $\mu=1$ $\mu=-1$ $\mu=-1$ σ_{2} σ_{3} σ_{4} σ_{5} σ_{6} σ_{7} σ_{7} σ_{8} σ_{1}

Рис.3.1. Поверхность прочности

I.H.Argiris [72], M.D.Kotsovos [99].

Характерные, называемые, так меридиональное и девиаторное сечения поверхности представлены рис.3.2. Графики функций τ_1 (σ_0) τ_2 (σ_0) , описывающих меридиональные сечения, имеют ряд характерных точек. Так, кривая пересекает ось σ_3 $\tau_1(\sigma_0)$ соответствующей пределу прочности при одноосном сжатии R_c и плоскость σ_1 -0в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном растяжении - R_{2p} . Кривая $\tau_2(\sigma_0)$ пересекает σ_2 -0- σ_3 плоскость точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном сжатии R_{2c} и ось σ_1 в точке одноосного растяжения - R_p . Отметим, что здесь, как это принято в теориях прочности, напряжения сжатия

принимаются со знаком плюс, растяжения — минус. Координаты перечисленных точек показаны на рис.3.2а. Кроме того, обе кривые пересекаются в точке с координатами $(-fR_{\odot}0)$, соответствующей трехосному равномерному растяжению. Представим функции $\tau_1(\sigma_0)$ и $\tau_2(\sigma_0)$ в следующих формах [99]

$$\tau_1 = AR_c \left(\frac{\sigma_0}{R_c} + f\right)^{\alpha}; \ \tau_2 = BR_c \left(\frac{\sigma_0}{R_c} + f\right)^{\beta}. \tag{3.2}$$

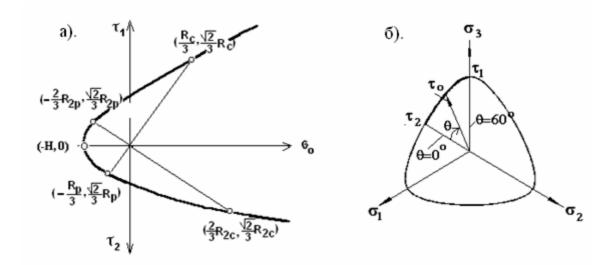


Рис. 3.2. Характерные сечения поверхности прочности: а) меридиональные сечение; б) девиаторное сечение.

В общем же виде коэффициенты, входящие в уравнения (3.2) могут быть получены подстановкой координат характерных точек (рис.3.2a), соответствующих случаям одноосного и двухосного сжатия и растяжения, трехосного растяжения. Так, подставляя в первое из уравнений (3.2) значения $\sigma_o = \frac{R_c}{3}$ и $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} R_c$, соответствующие случаю одноосного сжатия, и $\sigma_o = -\frac{2}{3} R_{2p}$ и $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} R_{2p}$, соответствующие случаю двухосного растяжения, получим значения параметров α и A

$$\alpha = \frac{\ln(R_{2p}/R_c)}{\ln\left(\frac{3H - 2R_{2p}}{3H + R_c}\right)} \le 1 \; ; \quad A = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{3R_c}{3H + R_c}\right)^{\alpha}. \tag{3.3}$$

Подставляя же во второе из уравнений (3.2) значения $\sigma_o = \frac{2}{3}R_{2c}$ и $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3}R_{2c}$, соответствующие случаю двухосного сжатия и $\sigma_o = -\frac{R_p}{3}$ и $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3}R_p$, соответствующие случаю одноосного растяжения, получим значения параметров β и β

$$\beta = \frac{\ln(R_p / R_{2c})}{\ln\left(\frac{3H - R_p}{3H + 2R_{2c}}\right)} \le 1 \; ; \; B = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{R_p}{R_c} \left(\frac{3R_c}{3H - R_p}\right)^{\beta}.$$
 (3.4)

Для описания меридиональных кривых можно использовать более простые квадратичные функции [16]. Сечения поверхности при $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}^{\circ}$ и $\boldsymbol{\theta} = 60^{\circ}$ представляются в виде

$$\sigma_o = A_1 \tau_1^2 + B_1 \tau_1 + C_1; \quad \sigma_o = A_2 \tau_2^2 + B_2 \tau_2 + C_2.$$
 (3.5)

Коэффициенты в (3.5) также находятся подстановкой координат характерных точек и равны

$$\begin{split} A_1 &= \frac{9}{2} \frac{R_c R_{2p} - H(R_c - R_{2p})}{R_c R_{2p}(R_c - R_{2p})} \,, \ B_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(R_c^2 - R_{2p}^2)H - R_c R_{2p}(2R_c - R_{2p})/3}{R_c R_{2p}(R_c - R_{2p})} \,, \\ C_1 &= -H \,\,, \\ A_2 &= \frac{9}{2} \frac{R_p R_{2c} - H(R_{2c} - R_p)}{R_p R_{2c}(R_{2c} - R_p)} \,, B_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(R_{2c}^2 - R_p^2)H - R_{2c} R_p (R_{2c} - 2R_p)/3}{R_{2c} R_p (R_{2c} - R_p)} \,, \\ C_2 &= -H \,\,. \end{split}$$

Рассмотрим теперь, так называемое, девиаторное сечение поверхности прочности (рис.3.2б). Это сечение имеет форму криволинейного треугольника, для которого установлены только два радиуса τ_1 и τ_2 , что соответствует значениям угла вида напряженного состояния θ = 60° и θ = 0°.

Величина τ_o , соответствующая промежуточным значениям $0 \le \theta \le 60^\circ$, может быть найдена приближенно путем криволинейной интерполяции между двумя граничными случаями, т.е.

$$\tau_o = \tau_I \rho(\theta), \tag{3.6}$$

или

$$f(\sigma_o, \tau_o, \theta) = \tau_o - \tau_1 \rho(\theta) = 0. \tag{3.7}$$

Отметим, что если используется аппроксимация меридиональных кривых вида (3.5), то, подставляя значение τ_o из (3.6) в первое из уравнений (3.5), получим предельную поверхность в виде

$$\sigma_o = \frac{A_I}{\rho^2} \tau_o^2 + \frac{B_I}{\rho} \tau_o + C_I.$$

Интерполяционная функция $\rho(\theta)$ в (3.6) должна удовлетворять следующим условиям

$$\rho(\theta = 60^{\circ}) = 1; \quad \rho(\theta = 0^{\circ}) = \frac{\tau_2}{\tau_1} = g; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \Big|_{\theta = 0^{\circ}} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta = 60^{\circ}} = 0 . \quad (3.8)$$

Соблюдение этих условий обеспечивает неразрывность и гладкость девиаторного Кроме того, на кривую, описывающую девиаторное сечение, в соответствии с постулатом Д.Дракера и Р.Хила, накладывается дополнительное условие выпуклости. Исследованиям девиаторного сечения поверхности прочности посвящен ряд работ [16,22,36,43,67,72,87,109,123]. Наиболее популярной зависимостью, описывающей девиаторное сечение, является уравнение эллипса, предложенное Willam K.J., Warnke E.P. [123]

$$\rho(\theta) = \frac{2a\cos\theta + b\sqrt{a(4\cos^2\theta - 1) + b^2}}{4a\cos^2\theta + b^2},$$
(3.9)

где $a = 1 - g^2$; b = 1 - 2g.

Анализируя приведенные выражения, нетрудно установить, что в общем случае для однозначного описания функций прочности требуется пять независимых параметров материала, соответствующих частным случаям напряженного состояния, а именно: прочность бетона при одноосном сжатии и растяжении \mathbf{R}_c и \mathbf{R}_p , прочность при двухосном равномерном сжатии и растяжении \mathbf{R}_{2c} и \mathbf{R}_{2p} , и прочность при трехосном равномерном растяжении \mathbf{H} . По мере накопления экспериментальных данных количество независимых параметров может быть уменьшено при помощи эмпирических формул, связывающие эти параметры между собой. Например в работе [5] получены следующие выражения

$$R_{2c} \approx \sqrt{2}R_c; R_{2p} \approx R_p; H = 0.72 \frac{R_c R_p}{R_c - R_p}.$$
 (3.10)

Отметим, что в качестве характерной точки на меридиональном сечении может быть выбрана точка, соответствующая пределу прочности при чистом сдвиге [16].

На рис.3.3 приведены наиболее характерные сечения поверхности прочности для бетона, полученные при следующих значениях R_c =31.7 МПа, R_p =6.1 МПа. Здесь же даны известные экспериментальные данные [99]. Выводы очевидны.

Поверхность прочности, описываемая уравнением (3.6), является разомкнутой. Это означает, что в случае равномерного трехосного сжатия прочность бетона неограниченно велика. Если для тяжелых, плотных бетонов этому обстоятельству имеются объяснения, т.к. во многих экспериментах прочность бетона в этом случае значительно больше призменной, то для легких, пористых бетонов прочность при трехосном сжатии сопоставима с призменной. Для учета этого обстоятельства обычно ограничивают предельную поверхность со стороны области трехосного сжатия введением "крышки". Некоторые формы замкнутых составных поверхностей предлагаются в работах [22,74].

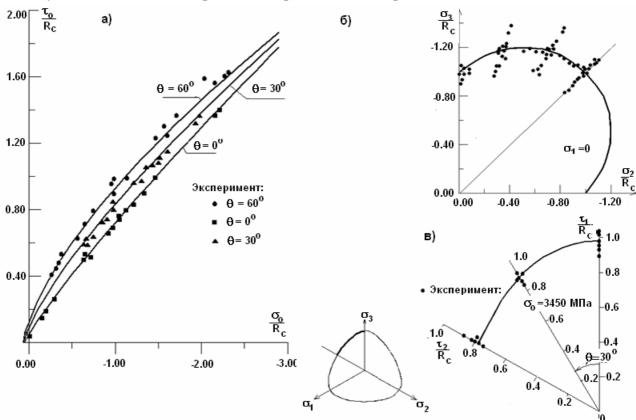


Рис.3.3. Экспериментальная проверка условий прочности:

- а. меридиональные сечения при $\theta = 0^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$, $\theta = 60^{\circ}$;
- б. плоское напряженное состояние;
- в. девиаторное сечение при $\sigma_0 = 3450 \, M\Pi a$.

3.2. Деформационные зависимости для бетона

Деформационные зависимости для бетона без трещин будем формулировать в виде связи октаэдрических напряжений σ_o , τ_o и деформаций

$$\varepsilon_{o} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}); \quad \gamma_{o} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y})^{2} + (\varepsilon_{z} - \varepsilon_{y})^{2} + (\varepsilon_{x} - \varepsilon_{z})^{2} + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{2} + \gamma_{yz}^{2} + \gamma_{xz}^{2})}.$$

При этом используем следующие гипотезы [16]:

- материал считаем однородным и изотропным;
- связь между октаэдрическими напряжениями au_0 и сдвигами au_0 нелинейна

$$\tau_o = G(\gamma_o)\gamma_o, \tag{3.11}$$

где $G(\gamma_0)$ - секущий модуль сдвига;

ullet связь между октаэдрическими нормальными напряжениями $oldsymbol{\sigma_o}$ и деформациями $oldsymbol{arepsilon_o}$ также нелинейна и имеет вид

$$\sigma_o = K(\gamma_o)(\varepsilon_o - \rho \gamma_o^2), \tag{3.12}$$

где второе слагаемое обусловлено

 $\alpha = \arctan(\lambda)$ $\eta_r - \eta$

Рис.3.4. Исходная диаграмма.

дилатацией, а ρ — модуль дилатации [16], $K(\gamma_0)$ — секущий модуль объемных деформаций.

Для определения секущих модулей, также как и в [16], используется гипотеза, подобная гипотезе о «единой кривой деформирования» [20], согласно которой форма связи между напряжениями и деформации не зависит напряженного состояния, т.е. связь между au_o и au_o может быть принята такой же, как и при одноосном сжатии. На рис.3.4 схематично приведена диаграмма деформирования бетона при одноосном сжатии в относительных координатах

$$oldsymbol{\eta} = rac{oldsymbol{arepsilon}}{oldsymbol{arepsilon}_c}$$
 и $oldsymbol{\xi} = rac{oldsymbol{\sigma}}{R_c}$, где $oldsymbol{arepsilon}_c$ - предельные

деформации сжатия. Применив для диаграммы зависимость

$$\xi = \frac{\lambda \eta}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3},\tag{3.13}$$

можно получить выражения для секущего модуля сдвига в виде

$$G(\gamma_{\alpha}) = G_{\alpha} \cdot f(\gamma_{\alpha}), \tag{3.14}$$

где функция нелинейности

$$f(\gamma_0) = \frac{1}{1 + An + Bn^2 + Cn^3}.$$
 (3.15)

В соотношениях (3.13) и (3.15)

$$\eta = \frac{\gamma_o}{\tilde{\gamma}_o}; C = \lambda \frac{1 - \xi_r}{\xi_r (\eta_r - 1)^2} - \frac{1}{\eta_r}; B = 1 - 2C, A = C + \lambda - 2;$$

 $\lambda = 1.5 \div 2.2$ – параметр нелинейности;

 $\xi_r \approx 0.85$ и $\eta_r \approx 1.41$ - координаты условной точки на ниспадающей ветви;

 γ_o - предельные деформации октаэдрического сдвига;

 $G_o = \frac{E}{2(1+v)}$ - начальный модуль сдвига; E- модуль упругости; v - коэффициент Пуассона.

Аналогично определяется и модуль объемных деформаций

$$K(\gamma_{\alpha}) = K_{\alpha} \cdot f(\gamma_{\alpha}), \tag{3.16}$$

где $K_o = \frac{E}{1-2\nu}$ – начальный объемный модуль.

Прежде, чем перейти к формированию матрицы механических характеристик [D], осуществляющей связь между напряжениями $\{\sigma\}$ и деформациями $\{\varepsilon\}$ и необходимой для получения матрицы жесткости конечных элементов (1.8), соотношение (3.12) преобразуем к стандартному виду

$$\sigma_o = K(\gamma_o)(1 - \rho \frac{\gamma_o^2}{\varepsilon_o})\varepsilon_o = \overline{K}(\varepsilon_o, \gamma_o)\varepsilon_o, \qquad (3.17)$$

где $\overline{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_{o}, \boldsymbol{\gamma}_{o}) = K(\boldsymbol{\gamma}_{o})(1-\rho\frac{\boldsymbol{\gamma}_{o}^{2}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{o}})$ - объемный модуль, учитывающий и дилатацию.

Теперь несложно получить матрицу [D] для бетона, которая будет иметь вид (1.3), где стандартные механические характеристики - модуль упругости E и коэффициент поперечных деформаций v определяются по известным соотношениям, связывающим их с объемными модулями [55]

$$E = \frac{3K(\varepsilon_o, \gamma_o)G(\gamma_o)}{G(\gamma_o) + K(\varepsilon_o, \gamma_o)}; \qquad v = \frac{K(\varepsilon_o, \gamma_o) - 2G(\gamma_o)}{2(G(\gamma_o) + K(\varepsilon_o, \gamma_o))}. \tag{3.18}$$

В соотношения (3.13) и (3.15) входит величина предельных деформаций октаэдрического сдвига γ_o при трехосном сжатии. В большинстве исследований используется предположение [16], согласно которому γ_o пропорционально предельной величине октаэдрического касательного напряжения τ_o , определяемого по условию прочности бетона (3.6)

$$\mathcal{E}_o = \lambda \frac{\tau_o}{G_o},\tag{3.19}$$

где параметр λ принимается постоянным. Тем самым постулируется условие существование поверхности предельных деформаций, получаемой аффинным преобразованием поверхности прочности (3.6). На самом деле, как показал анализ экспериментальных исследования [68,99] между γ_0 и τ_0 отсутствует линейная зависимость. Статистическая обработка результатов этих экспериментов при трехосном сжатии позволяет рекомендовать следующую зависимость

$$\gamma_o = 7.97 \left(\frac{\tau_o}{R_c}\right)^2 + 15.22 \frac{\tau_o}{R_c} - 3.713.$$
(3.20)

При разгрузке бетон принимается линейно упругим изотропным материалом с начальными значениями модуля деформаций и коэффициента Пуассона. Для установления факта разгрузки используется вектор $\Delta_k = \sqrt{\varepsilon_o^2 + \gamma_o^2}$. Увеличение длины этого вектора с ростом внешней нагрузки свидетельствует о том, что идет процесс активного нагружения, иначе – имеет место разгрузка.

3.3. Тестирование модели бетона

Таким образом, связь между напряжениями и деформациями для бетона нелинейна и имеет вил

$$\{\sigma\} = [D(\{\varepsilon\})]\{\varepsilon\}. \tag{3.21}$$

Здесь $[D(\{\varepsilon\})]$ - нелинейная матрица механических характеристик материала, которая имеет вид (1.3) где механические характеристики определяются по (3.18). Для численного тестирования соотношения (3.21), перепишем его так

$$\{F\} = \{\sigma\} - [D(\{\varepsilon\})]\{\varepsilon\} = 0. \tag{3.22}$$

Теперь построим шагово-итерационную процедуру для нелинейного процесса (3.22) в виде

$$\{\varepsilon\}^{i+1} = \{\varepsilon\}^i + \{\Delta\varepsilon\}^{i+1}, \tag{3.23}$$

где $\{\Delta \varepsilon\}^{i+1} = [D^i]^{-1} \{\Delta \sigma\}^i$;

 $\{\Delta\sigma\}^i$ - приращение напряжений на i-ом шаге нагружения;

 D^i - матрица механических характеристик на i-ом шаге.

Для итерационного уточнения на каждом шаге нагружения напряжениями используется метод переменных параметров упругости (модифицированный алгоритм Ньютона-Рафсона, в котором касательные модули заменяются на секущие). В качестве критерия сходимости применяется эвклидова норма вектора деформаций.

Приведем результаты расчета деформаций по формуле (3.22) и сопоставим их с результатами экспериментальных исследований образцов при трехосном сжатии и различных соотношениях главных напряжений [68] (рис.3.5). Эти

результаты получены на тяжелом крупнозернистом бетоне со следующими механическими характеристиками R_b =36 МПа; E_b =26700 МПа.

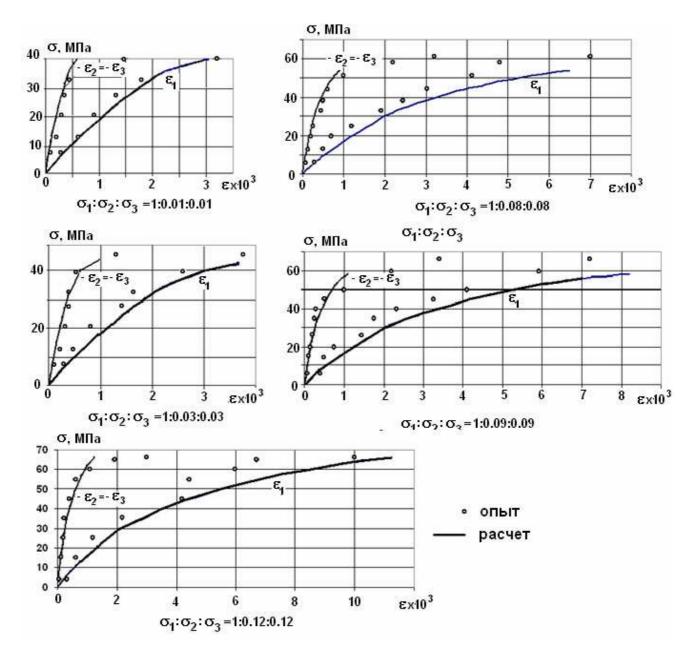


Рис.3.5. Тестирование модели деформирования бетона.

В результате численного эксперимента было также проверено выражение для функции, описывающей коэффициент дилатации ρ , предложенной в работе [44]

$$\rho = \rho_o \frac{1 - exp(-\eta^3)}{exp(-\eta^3) - \eta}.$$

Удовлетворительные результаты удалось получить, когда ρ_o =2.5 при $\sigma_o > 0$ и ρ = 0 при $\sigma_o \leq 0$.

Видим, что предлагаемые физические соотношения для бетона вполне адекватно описывают его поведение при различных видах напряженных состояний

и могут быть использованы в нелинейных расчетах конструкций по методу конечных элементов.

3.4. Механические характеристики арматуры

Прочность и деформативность арматурных сталей характеризуется диаграммой $\sigma_s - \varepsilon_s$. Выбор способов описания диаграммы арматуры достаточно

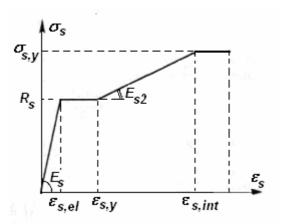


Рис.3.6. Идеализированная диаграмма арматуры

велик [22]. Остановимся на одном из них, предлагаемом в работе [11], использующий кусочно- линейные функции (рис.3.6). При этом

$$\varepsilon_{s,el} = \frac{R_s}{E_s}; \quad E_{s2} = \frac{\sigma_{s,y} - R_s}{\varepsilon_{s,int} - \varepsilon_{s,y}}.$$
 (3.24)

Здесь $\sigma_{s,y}$ - временное сопротивление арматуры, R_s - ее расчетное сопротивление, E_s - модуль упругости, $\varepsilon_{s,y}$ =0.02. Диаграмма считается справедливой как при растяжении, так и при сжатии. Отметим, что

данная диаграмма моделирует свойства мягких сталей. Для твердых сталей следует ограничиться только первым, упругим участком диаграммы.

При разгрузке арматура ведет себя упруго с модулем, равным начальному значению $\boldsymbol{E_s}$.

3.5. Определяющие соотношения для железобетона

Железобетон рассматривается как физически нелинейный, анизотропный, комплексный материал, состоящий из двух совместно работающих сред – бетона и "размазанной" по объему арматуры. Вывод физических зависимостей для него будем рассматривать на примере элемента в форме параллелепипеда, выделенного из конструкции, работающей в условиях сложного (объемного) напряженного состояния. Грани этого элемента ориентированы по направлению общих

| | η_1 | η_2 | η_3 |
|-------|-----------------|----------|-----------------|
| x_1 | m ₁₁ | m_{12} | m ₁₃ |
| x_2 | m_{21} | m_{22} | m_{23} |
| x_3 | m ₃₁ | m_{32} | m_{33} |

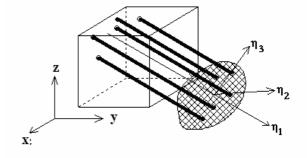


Рис.3.7. Ориентация арматуры s-го направления в общей системе координат.

декартовых осей координат x,y,z. Каждое s-е направление армирования при помощи коэффициента армирования μ_s [15] приводится к эквивалентному сплошному материалу и соотносится с местной ортогональной системой координат η_s (s=1,2,3), причем ось η_1 направлена вдоль стержней, а оси η_2,η_3 - произвольно. Ориентация местных осей координат задана таблицей направляющих косинусов m_{ii} (i,j=1,2,3) (рис.3.7).

Совместность работы двух сред – бетона и арматуры обеспечивается выполнением следующих условий

$$\{\sigma\} = \{\sigma_b\} + \sum_s \{\sigma_s\}; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_b\} = \{\varepsilon_s\}, \tag{3.25}$$
 где $\{\sigma\}, \quad \{\sigma_b\}$ и $\{\sigma_s\}$ - вектора функций напряжений по граням элемента в

где $\{\sigma\}$, $\{\sigma_b\}$ и $\{\sigma_s\}$ - вектора функций напряжений по граням элемента в железобетоне, бетоне и армирующей среде s-го направления; $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_b\}$ и $\{\varepsilon_s\}$ - вектора функций деформаций в железобетоне, бетоне и арматуре s-го направления.

Естественно, все вектора напряжений и деформаций в соотношении (3.25) должны быть записаны в единой системе координат, например, в общей x,y,z.

Предполагая, что нелинейные связи между напряжениями и деформациями в бетоне и арматуре известны, т.е. сформулированы зависимости для каждого из материалов в виде

$$\{\sigma_b\} = [D_b | \{\varepsilon_b\}, \{\sigma_s\} = [D_s | \{\varepsilon_s\},$$
(3.26)

используя (3.25), в целом для железобетона можно записать

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \tag{3.27}$$

В этом выражении [D] - матрица механических характеристик железобетона определяется по формуле

$$[D] = [D_b] + \sum_{s} [D_s],$$
 (3.28)

где $[D_b]$ - матрица механических характеристик бетона; $[D_s]$ - матрица механических характеристик армирующей среды.

Перейдем к формулировке матриц и векторов, входящих в выражение (3.28), характеризующих свойства бетона и арматуры s-го направления.

На стадии до образования трещин бетон в железобетонном элементе, как и ранее, будем считать физически нелинейным изотропным материалом, Определяющие соотношения для него имеют вид (1.3), в которых матрица [D] заменяется на $[D_b]$. Секущие нелинейные модули и коэффициенты поперечных деформаций в этой матрице вычисляются по формулам (3.18).

Матрицу для арматуры s-го направления будем сначала строить в системе координат η_s (s=1,2,3) как для "однонаправленного" материала, способного воспринимать усилия только по площадкам, перпендикулярным направлениям стержней. В этом случае она будет иметь вид

где E_s - секущий модуль продольных деформаций арматуры s-го направления, определяемый по диаграмме деформирования, изображенной на рис.3.6; G_s - секущий модуль сдвига армирующей среды s- го направления.

Преобразование матрицы (3.29) из местной системы координат $[D'_s]$ в общую $[D_s]$ осуществляется помощью стандартного преобразования координат для тензоров четвертого ранга

$$[D_s] = [m] [D'_s] [m]^T, \qquad (3.30)$$

где

$$\left[m \right] = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & 2m_{11}m_{12} & 2m_{12}m_{13} & 2m_{11}m_{13} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & 2m_{12}m_{22} & 2m_{22}m_{23} & 2m_{21}m_{23} \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & 2m_{31}m_{32} & 2m_{32}m_{33} & 2m_{31}m_{33} \\ m_{11}m_{21} & m_{12}m_{32} & m_{13}m_{23} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{23} + m_{11}m_{23} + \\ & & + m_{12}m_{21} & + m_{13}m_{22} & + m_{13}m_{21} \\ m_{21}m_{31} & m_{22}m_{32} & m_{23}m_{33} & m_{21}m_{32} + m_{22}m_{33} + m_{21}m_{33} + \\ & & + m_{22}m_{31} & + m_{23}m_{32} & + m_{23}m_{31} \\ m_{31}m_{11} & m_{32}m_{12} & m_{33}m_{13} & m_{11}m_{32} + m_{12}m_{33} + m_{11}m_{33} + \\ & & + m_{12}m_{31} & + m_{13}m_{32} & + m_{11}m_{33} + \\ & & + m_{12}m_{31} & + m_{13}m_{32} & + m_{13}m_{31} \end{bmatrix}$$

 m_{ij} - направляющие косинусы, приведенные в таблице на рис.3.7.

Особенность железобетона как комплексного материала состоит в его способности работать в условиях образования и развития микротрещин. Трещинообразование выступает как процесс, места образования микротрещин и направления их развития определяются расчетом, хотя и приближенно с точностью до размеров элемента.

Будем полагать, что трещины в бетоне железобетонного элемента образуются по главным площадкам, когда нарушаются условия прочности (3.7)

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) \ge 0. \tag{3.31}$$

При этом одно или несколько главных напряжений являются растягивающими. Схемы образования трещин представлены на (рис. 3.8) [22]

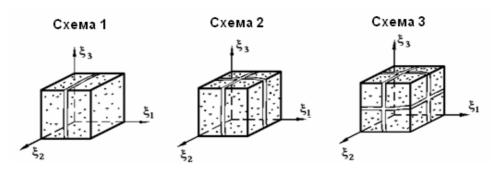


Рис.3.8. Схемы образования трещин.

Значения главных напряжений могут быть вычислены с помощью следующих выражений

$$\sigma_{I} = \sigma_{0} - \frac{3 + \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^{2}}} \tau_{0}; \quad \sigma_{2} = \sigma_{0} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{3 + \mu^{2}}} \tau_{0}; \quad \sigma_{3} = \sigma_{0} - \frac{3 - \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^{2}}} \tau_{0}. \quad (3.32)$$

Здесь μ параметр Лодэ-Надаи, определяемый в зависимости от угла вида напряженного состояния θ по формуле

$$\mu = -\sqrt{3}ctg\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right). \tag{3.33}$$

Направляющие косинусы m_{ck} главных площадок, по одной или нескольким из которых образовались трещины, определяются из совместного решения системы

$$(\sigma_{x} - \sigma_{c})m_{c_{1}} + \tau_{xy}m_{c_{2}} + \tau_{xz}m_{c_{3}} = 0;$$

$$\tau_{xy}m_{c_{1}} + (\sigma_{y} - \sigma_{c})m_{c_{2}} + \tau_{yz}m_{c_{3}} = 0;$$

$$\tau_{xz}m_{c_{1}} + \tau_{yz}m_{c_{2}} + (\sigma_{z} - \sigma_{c})m_{c_{3}} = 0$$

$$(3.34)$$

и уравнения

$$m_{c_1}^2 + m_{c_2}^2 + m_{c_3}^2 = 1, (3.35)$$

где c = 1, 2, 3 – направления главных осей.

После несложных преобразований получим

$$m_{c1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2}}; \quad m_{c2} = P_1 \cdot m_{c1}; \quad m_{c3} = P_2 m_{c1},$$
 (3.36)

где

$$P_{1} = \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_{z} - \sigma_{c})\tau_{xy}}{A_{c1}}; \quad P_{2} = \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_{z} - \sigma_{c})\tau_{xy}}{A_{c1}};$$

$$A_{c1} = (\sigma_{y} - \sigma_{c})(\sigma_{z} - \sigma_{c}) - \tau_{yz}^{2} \neq 0.$$
(3.37)

В уравнениях (3.36) принимается знак «плюс», если знаки напряжений σ_c и σ_{cc} совпадают и «минус» - в противном случае.

Если $A_{c1} = 0$, следует вычислить ближайшую, не равную нулю, величину A_{c2} или A_{c3} при помощи циклической перестановки индексов 1-2-3 в выражении (3.37). В этом случае аналогичная перестановка должна быть осуществлена и в соотношениях (3.16). Подобный способ используется при решении систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса при выборе главного элемента.

Описанная процедура определения направляющих косинусов справедлива для любых видов напряженных состояний, поскольку параметры A_{ck} , (c,k=1,2,3) не могут быть равными нулю все одновременно. Кроме того здесь устанавливается знак величин m_{ck} (c,k=1,2,3).

Конечноэлементному моделированию работы железобетона с трещинами сложном напряженном состоянии уделялось МНОГО внимания, при подтверждается многочисленными и оживленными дискуссиями по данному вопросу. В результате этих дискуссий к настоящему времени определились два теоретических направления. Основы первого из них заложены в работе Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка и Г.А.Тюпина [16]. С образованием трещин в направлении, перпендикулярном трещинам, бетон постепенно выключается из работы, что моделируется введением среднего фиктивного модуля деформаций растянутого между трещинами бетона. Значение этого модуля получалось либо из условия равенства усилий в трещине и средних на участке между трещинами с использованием известного коэффициента В.И.Мурашева, либо при помощи ниспадающей ветви на диаграмме работы материала при растяжении, приближенно отражающей экспериментальные данные. Бетон в железобетонном элементе с трещинами представляется трасверсально-изотропным материалом с плоскостью параллельной плоскости трещины. Отметим, что физические зависимости для арматурной среды не зависят от стадии работы элемента, а условие совместности двух сред формально распространяется и на элемент с трещинами.

Второе направление связано с работами Н.И.Карпенко [22,23], в которых предлагается обобщение традиционной теории В.И.Мурашева [51] на случай сложного напряженного состояния. В отличие от [16], железобетон с трещинами моделируется физически нелинейным анизотропным материалом, представляющим собой распределенную по объему арматуру, ожесточенную за счет остаточных связей ее с бетоном на участке между трещинами. Достоинством подхода является возможность учета сложного, неортогонального армирования, а также таких явлений, как нагельный эффект в арматуре, сил зацепления в трещине, ослабление бетонных сечений каналами арматуры, сдвиг берегов трещин и т.д.

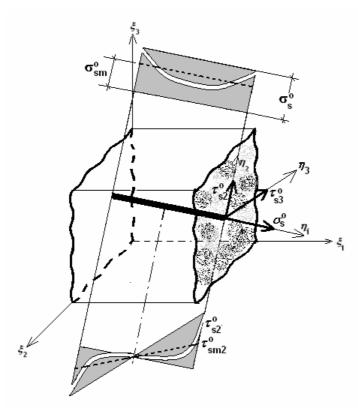


Рис.3.9. Напряжения в арматуре в трещине

Рассмотрим упрощенный вариант определяющих соотношений для железобетона с трещинами ПО Н.И.Карпенко [22,23]. На рис 3.9. представлен железобетонный элемента в виде единичного куба в прямоугольных декартовых координатах ξ_i , совпадающих с осями главных напряжений бетоне, с трещиной по одной из граней. Определим компоненты тензора напряжений по граням этого элемента. По площадкамтрещинам усилия воспринимаются, В основном, арматурой и лишь частично, в начальный момент, остаточными связями зацепления в бетоне. В арматурных стержнях в сечении с трещиной возникают нормальные τ_{s2}^o, τ_{s3}^o касательные

напряжения, которые достигают в этих сечениях максимальных значений. Эти напряжения связаны со средними на участке между трещинами деформациями в осях η_i (i=1,2.3) следующим образом

$$\sigma_s^o = \frac{E_s}{\psi_s} \varepsilon_s; \quad \tau_{s2}^o = \frac{E_s}{\psi_s n_{\pi}} \gamma_{s2}; \quad \tau_{s3}^o = \frac{E_s}{\psi_s n_{\pi}} \gamma_{s3}, \quad (3.38)$$

где ψ_s - коэффициент В.И.Мурашева, учитывающий влияние растянутого на участке между трещинами бетона на работу арматуры s-го направления; n_{ϖ} - коэффициент, учитывающий податливость стержней в бетоне тангенциальным смещениям у берегов трещин [23].

С учетом (3.38) напряжения в арматурной «среде» s-го направления в матричной форме будут выгладеть так

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{s}\} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{s} \\ \boldsymbol{\tau}_{s2} \\ \boldsymbol{\tau}_{s3} \end{cases} = \frac{\boldsymbol{E}_{s} \boldsymbol{\mu}_{s}}{\boldsymbol{\psi}_{s}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{\varpi}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_{\varpi}} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{s} \\ \boldsymbol{\gamma}_{s2} \\ \boldsymbol{\gamma}_{s3} \end{cases} = [\overline{\boldsymbol{D}}_{s}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_{s}\}, \tag{3.39}$$

где
$$[D'_s] = \frac{E_s \mu_s}{\psi_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{\infty}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_{\infty}} \end{bmatrix}$$
 - матрица механических характеристик арматуры s -

го направления в собственных осях.

Рассуждая совершенно аналогично, можно получить напряжения в арматуре, при наличии двух и трех трещин (схемы 2 и 3 рис.3.8).

В общем виде для любой схемы трещин матрица механических характеристик арматуры s-го направления в местной системе координат будет выглядеть так

$$[D'_{s}] = \frac{E_{s}\mu_{s}}{\psi_{s}} \begin{bmatrix} \delta_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\delta_{3})\frac{1}{n_{\varpi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\delta_{1})\frac{1}{n_{\varpi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\delta_{2})\frac{1}{n_{\varpi}} \end{bmatrix}.$$
(3.40)

Значения операторов δ_r (r=1,2,3) зависят от схемы трещин (рис.3.8). Для схемы 1: δ_1 =1, δ_2 = δ_3 =0; для схемы 2: δ_1 = δ_2 =1, δ_3 =0; для схемы 3: δ_1 = δ_2 = δ_3 =1.

Искомая матрица для арматуры s-го направления $[D_s]$ общей системе координат x,y,z может быть получена по формуле (3.30).

Коэффициент В.И.Мурашева определяется из выражения [23]

$$\psi_s = 1 - \omega \frac{R_{bt}}{\sigma_s \, \mu_s} \,, \tag{3.41}$$

где $\boldsymbol{\omega} \approx 0.7$ — коэффициент полноты эпюры растягивающих напряжений в бетоне между трещинами; $\boldsymbol{\sigma}_{s} = \boldsymbol{\sigma}_{s1}$.

При образовании трещин по схеме 1 бетон по площадкам, параллельным трещинам, т.е. в направлениях ξ_2 и ξ_3 (рис.3.9), остается сплошным изотропным материалом, однако работающим в условиях плоского напряженного состояния, поскольку по площадкам с трещинам в направлении ξ_1 он считается выключенным из работы, его жесткость в этом направлении учитывается за счет увеличения жесткости арматуры коэффициентом ψ_s . Чтобы построить матрицу механических характеристик для бетона достаточно положить в уравнениях состояния главное нормальное напряжение в бетоне σ_{b1} равным нулю, вычислить октаэдрические напряжения с учетом этого обстоятельства и далее воспользоваться

алгоритмом, изложенным в п.3.1. Если трещины образуются по схеме 2, то бетон в направлении $\boldsymbol{\xi}_3$ будем считать работающим при одноосном напряженной состоянии и σ_{b1} и σ_{b2} принимаем равными нулю. И в одном, и в другом случае, можно рекомендовать полученную матрицу $[D_b]$ умножить дополнительно на коэффициент $\boldsymbol{\psi}_b \approx 0.8$, учитывающий частичное нарушение структуры бетона вдоль направления трещин. При работе по схеме 3 принимается $[D_b]$ =0.

Отметим еще раз, что здесь рассмотрен упрощенный вариант модели [22]. Не учитываются связи зацепления берегов трещин, поперечное деформирование блоков бетонов между трещинами, ослабление бетона каналами арматуры.

ГЛАВА 4

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В этой главе рассматриваются результаты расчетов железобетонных конструкций при различных напряженных состояниях, полученные с помощью программного комплекса «Concord», реализующего метод конечных элементов в нелинейной постановке [29]. В состав комплекса включены все описанные конечные элементы и используется представленная в главе 3 модель бетона и железобетона.

4.1. Железобетонные балки

Рассчитывалась балка без поперечной арматуры и с ней в объемной постановке. Результаты расчетов по МКЭ сопоставлялись с результатами расчетов по СНиП [61]. Геометрические размеры балки приведены на рис.4.1. Здесь же приведена расчетная схема в виде совокупности восьмиузловых объемных конечных элементов. В силу симметрии системы осуществлялся расчет только половины балки. Приняты следующие характеристики материалов. Бетон: призменная прочность R_b =20 МПа, прочность на растяжение R_{bt} =1.75 МПа, модуль упругости E_b =30000 МПа, предельная сжимаемость ε_u =0.002, предельная растяжимость ε_{ut} =0.0001, коэффициент Пуассона ν =0.2. Арматура: модуль

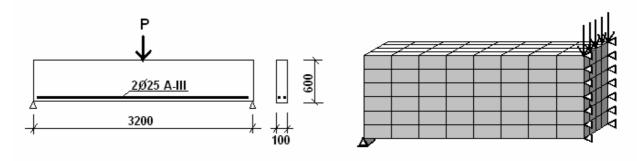


Рис.4.1. Балка с одиночным армированием

упругости E_s =200000 МПа, R_s =400 МПа. Нагружение осуществлялось ступенями по ΔP =10 кН. Рассчитывались две балки - без поперечного армирования и с поперечным армированием 0.5%.

Предварительные расчеты по СНиП: высота сжатой зоны x=20 см, разрушающая нагрузка P=200 кH, нагрузка трещинообразования $P_{crc}=36$ кH.

Напряжение в арматуре в момент трещинообразования - 23.3.МПа. Прогиб к моменту разрушения - 9.3 мм. Разрушение балок: без поперечной арматуры - по наклонному сечению, с поперечной арматурой - по нормальному сечению. Результаты расчетов по МКЭ представлены на рис. 4.2, 4.3. Видно, что в целом расчет по МКЭ дает близкие к расчетам по нормам результаты.

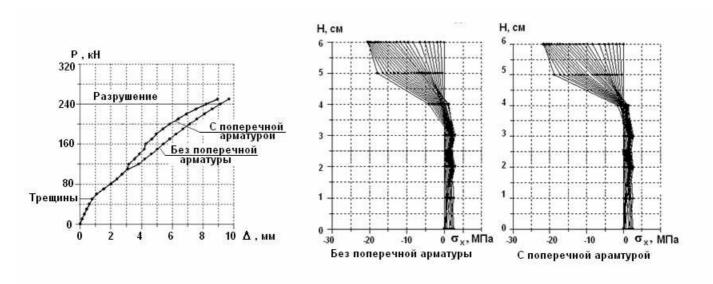


Рис.4.2. Прогибы балки и нормальные напряжения в бетоне в момент разрушения

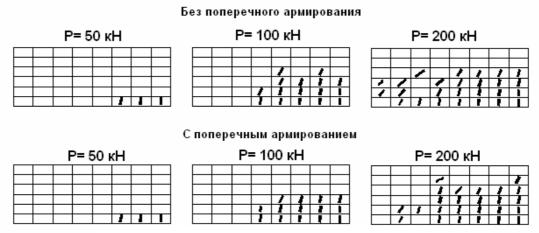


Рис.4.3. Трещинообразование в балках

Во втором примере осуществлялся расчет серии балок прямоугольного сечения двух типов Б2-10 и Б2-8 на кручение с изгибом из опытов НИИЖБа [46] с

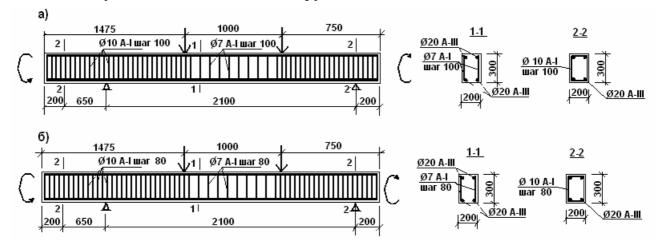


Рис.4.4.Опытные образцы балок: а) Б2-10 и б) Б2-8.

использованием модели деформирования бетона и железобетона, рассмотренной в гл. 3. Геометрические размеры балок и схемы их армирования представлены на рис.4.4.

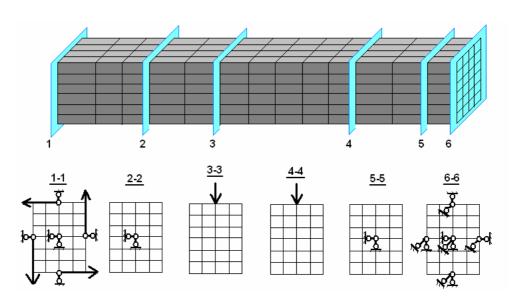


Рис.4.5. Расчетная схема и характерные сечения

На рис.4.5 дана расчетная схема в виде совокупности 8-ми узловых объемных элементов, а также показаны характерные сечения балок с закрепленными узлами и узлами приложения внешних нагрузок. Расчетные характеристики бетона балок, соответствующие опытным данным приведены в следующей таблице 4.1.

Для арматуры приняты следующие характеристики: $E_s = 2 \times 10^5$ МПа; $R_s = 400$ МПа. Нагружение балок осуществлялось ступенями. При этом балка Б2-10к испытывалась и рассчитывалась только на воздействие кручения. Величина ступени $M_{\kappa p} = 0.8$ кН*м. Балка Б2-10 и Б2-8-04 дополнительно загружалась двумя

вертикальными сосредоточенными силами из расчета $M_{\kappa p}/M_{u3}$ =0.4. Величина ступени ΔP =3.64 кН. Для балки Б2-8-02 Мкр/Миз =0.2, соответственно и ΔP =7.27 кН. Результаты расчетов балок и сопоставление с опытными данными представлены на рис.4.6 и 4.7.

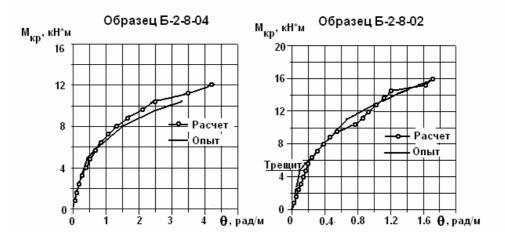


Рис.4.6. Углы закручивания балок Б2-8.

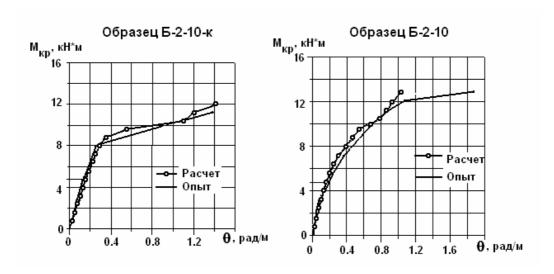


Рис.4.7. Углы закручивания балок В2-10

Таблица 4.1

| Характеристика | Б2-10, Б2- | Б2-8-04 | Б2-8-02 |
|------------------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| | 10κ | | |
| Призменная прочность в МПа | 20.40 | 28.50 | 7.50 |
| Прочность на растяжение, МПа | 1.70 | 1.57 | 0.66 |
| Модуль упругости, МПа | 3.125×10^4 | 3.8×10^4 | $2.1x10^4$ |
| Коэффициент Пуассона | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| Пред.деформации сжатия | $2x10^{-3}$ | $2x10^{-3}$ | $1x10^{-3}$ |
| Пред.деформации растяжения | $1x10^{-4}$ | 0.83×10^{-4} | 0.63×10^{-4} |

В качестве следующего примера рассмотрим анализ напряженнодеформированного состояния железобетонной балки при действии кручения из экспериментальных исследований Pancharam и Belardi [110].

Опытный образец представляет собой железобетонную балку квадратного сечения 279х279мм. Армирование в продольном направлении: по углам граней 4 Ø12.7 мм и 4 Ø9.53 мм, при этом A_s =800мм². Поперечное армирование выполненно замкнутыми хомутами из арматуры Ø9.53 мм, с шагом 152.4 мм в середине пролета. Приопорные зоны длиной по 0.916 м армированные хомутами 9.53 мм, с шагом 38.1 мм. Схема армирования представлена на рис.4.8. Физикомеханические характеристики: бетона R_b =26 МПа, E_b =16200 МПа, арматуры E_s =201000 МПа, R_s =320 МПа.

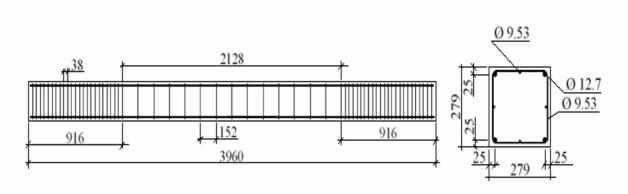
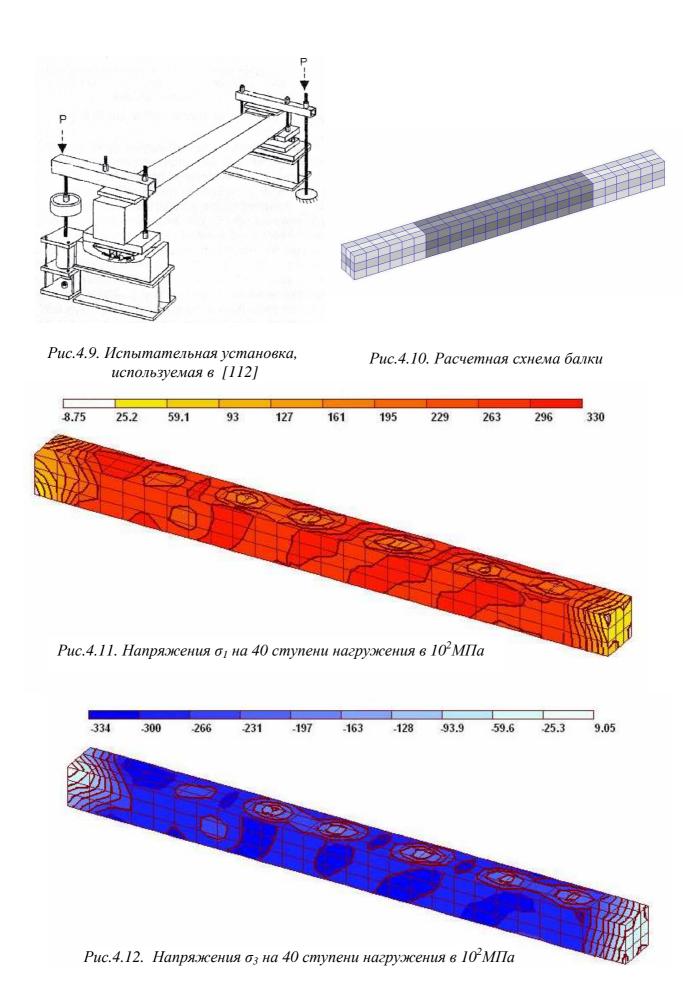


Рис.4.8. Геометрические размеры и схема армирования балки

В экспериментальных исследованиях [110] для создания кручения использовалась установка мощностью 65 кНм (Рис.4.9). Расчетная схема балки в виде совокупности 8-ми узловых объемных конечных элементов представлена на рис.4.10. Здесь же указаны типы жесткости элементов в зависимости от содержания в них продольной и поперечной арматуры. Нагрузка в виде крутящих моментов моделировалась парой сил по 1 кН. Величина ступени нагружения составляла $M_{\kappa p} = 0.4$ кН*м. Результаты расчетов балки в виде изолиний главных напряжений σ_I и σ_3 на 40-ой ступени нагружения, соответствующей моменту образования трещин при крутящем моменте $M_{\kappa} = 16$ кН*м, показаны на рис. 4.11, 4.12. При этом опытная нагрузка трещнообразования $M_{\kappa} = 17$ кН*м. Разрушение произошла на 43 ступени нагружения при $M_{\kappa} = 18$ кН*м (в опыте 17.2 кН*м).



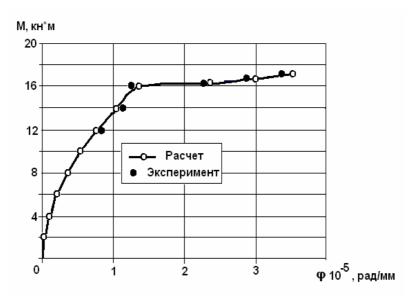


Рис.4.13. Углы поворота

Расчетный график изменения углов закручивания на единицу длины балки показан на рис.4.13. На нем же приведены опытные данные [110].

В целом, по рассматриваемому примеру также наблюдается достаточно удовлетворительное совпадение расчетных и опытных данных.

4.2 Балка-стенка

Рассмотрим расчет балки-стенки W2 из экспериментов [84]. Геометрические размеры балки-стенки и схема ее армирования представлены на рис.4.14. Характеристики бетона \mathbf{R}_b =16 МПа, \mathbf{R}_{bt} =2 МПа, \mathbf{E}_b =20000 МПа, \mathbf{v} =0.2. Характеристики арматуры Ø5 \mathbf{R}_s =353 МПа, \mathbf{E}_s =188230 МПа.

Балка-стенка моделируется объемными изопараметрическими 8-ми узловыми элементами. Расчетная схема балки-стенки изображена на рис.4.15.

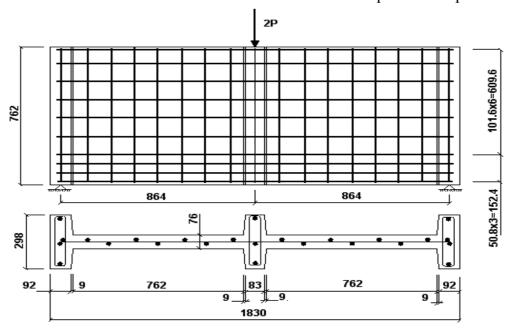


Рис.4.14. Геометрические размеры и армирование

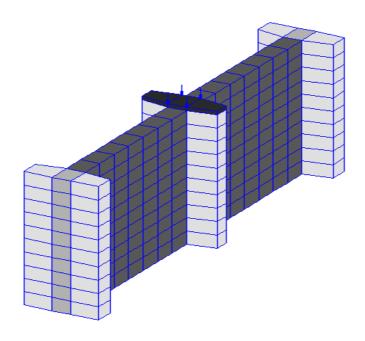


Рис.4.15. Расчетная схема

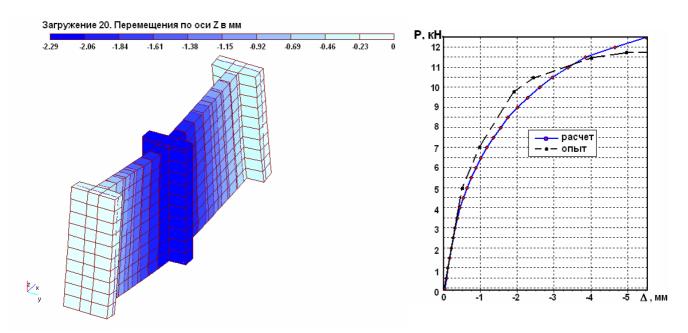
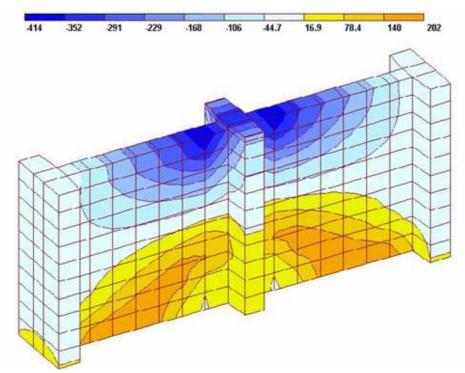


Рис.4.16. Результаты расчета вертикальных перемещений.

Для передачи нагрузки используется абсолютно жесткая пластина, к которой приложена нагрузка Р ступенями по $0.5\,$ кH. На рис. $4.16\,$ показаны изолинии вертикальных перемещений на $20\,$ ступени нагружения, а также график прогибов по ступеням нагружения. На рис. $2.17\,$ представлены изолинии нормальных напряжений в бетоне σ_x на $20\,$ ступени, на рис. $4.19\,$ на $23\,$ ступени, а также даны графики изменения этих же напряжений по ступеням нагружений в элементах сжатой и растянутой зон. На рис. $4.18\,$ изображены касательные напряжения в

бетоне на 24 ступени. Трещины как в расчете, так и в опыте, образуются на 5 ступени при P=2.5 кH. Разрушение наступило при P=14 кH на 28 ступени.



Puc.4.17. Напряжения σ_x на 20 ступени нагружения в МПа $*10^2$

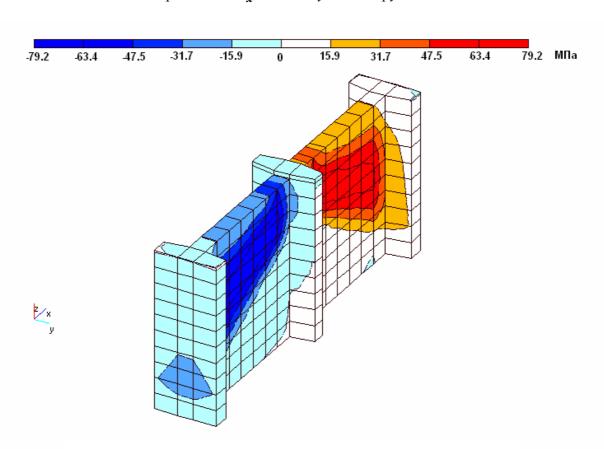


Рис.4.18. Напряжения au_{xy} в бетоне на 24 ступени нагружения

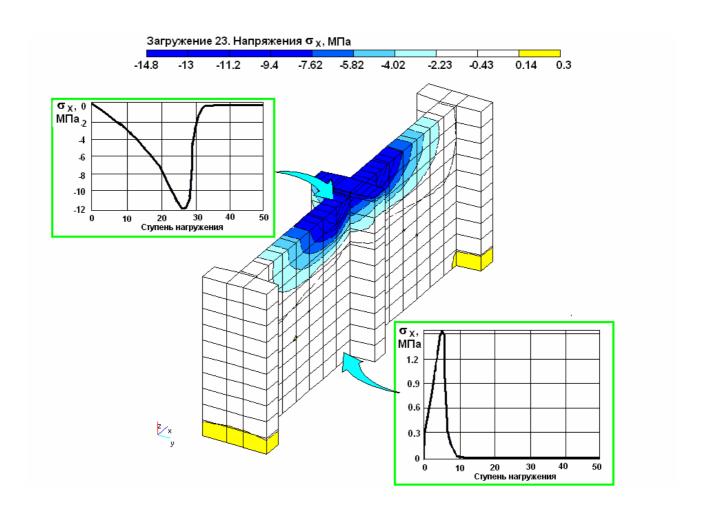


Рис.4.19. Результаты расчета нормальных напряжений на 23 ступени нагружения.

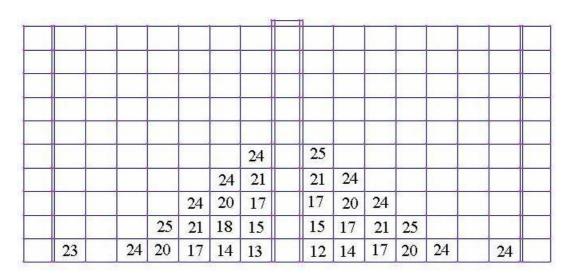


Рис.4.20 Распределение трещин в элементах по ступеням нагружения

На рис.4.20 представлена схема образования трещин, где цифры обозначают ступень нагружения на которой в данном элементе образовывается трещина.

4.3. Железобетонная плита.

Рассмотрим пример использования многослойного конечного элемента толстой оболочки, описанного в п.2.5, при расчете квадратной железобетонной плиты из опытов [89], опертой по углам и загруженной сосредоточенной силой в центре. Геометрические размеры, схемы армирования, нагружения и расчетная представлены на рис.4.21. Исходные характеристики материалов: R_b =43 МПа, R_{bt} =3 МПа, E_b =16400 МПа, предельные деформации сжатия ε_b =0.0035, растяжения - ε_{bt} =0.0002, E_s = 201000 МПа, R_s = 6700 МПа. По высоте плита разбивалась на 10 слоев.

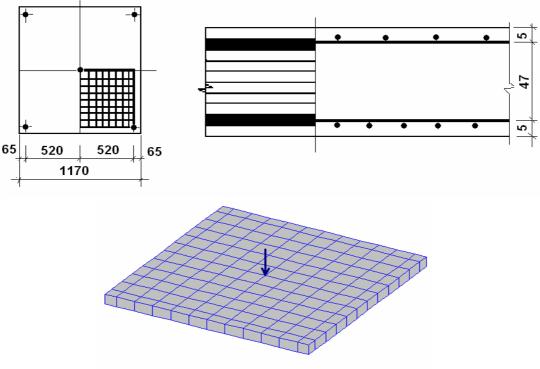


Рис.4.21. Конструкция и расчетная схема плиты

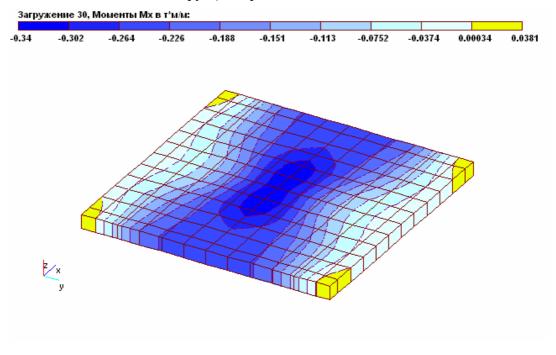


Рис. 4.22. Моменты Мх в плите на 30 ступени.

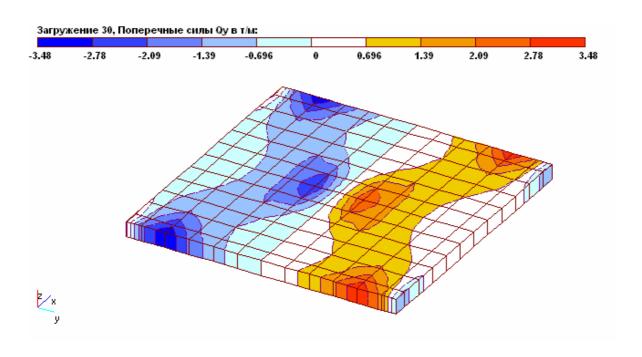


Рис.4.23. Поперечные силы Qy на 30 ступени

| | | | | | 22 | 22 | 2. | | E | Î | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| -8 | | | | | 22 | 22 | - | | | | |
| | 72 | | | | 21 | 21 | | | | | |
| | 77 | | | 21 | 19 | 19 | 21 | | | | |
| | | | 21 | 19 | 17 | 17 | 19 | 21 | | | |
| 22 | 22 | 21 | 19 | 17 | 15 | 15 | 17 | 19 | 21 | 22 | 22 |
| 22 | 22 | 21 | 19 | 17 | 15 | 15 | 17 | 19 | 21 | 22 | 22 |
| | | | 21 | 19 | 17 | 17 | 19 | 21 | | | 36 |
| | | | | 21 | 19 | 19 | 21 | | | | 16 |
| | | | | | 21 | 21 | | | | | 36 |
| | 2 | | | | 22 | 22 | | | | | |
| | | | | | 22 | 22 | | | | | 1 |

Рис.4.24. Распределение трещин на нижней поверхности по ступеням нагружения

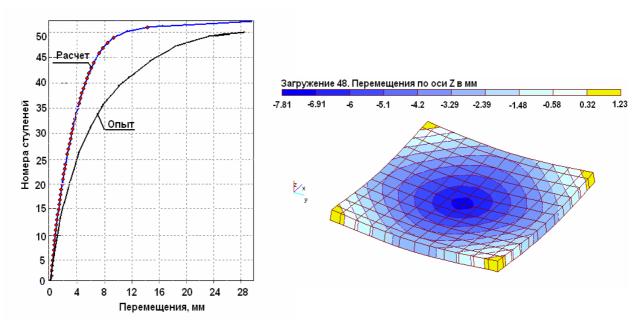


Рис.4.25. График и изолинии прогибов на 48 ступени

Рабочая арматура располагалась в 2 и 9 слоях, указанных на рис.4.21. Коэффициент армирования для нижней арматуры принимался равным $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.06$, для верхней $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.03$. Нагружение осуществлялось ступенями по $\Delta P = 1.3$ кН вплоть до разрушения. Расчет велся шагово-итерационным методом. Результаты расчетов представлены на рис.4.22 - 4.25. Первые трещины появились на нижней поверхности плиты на 13 ступени при нагрузке P = 16.9 кН. На рис.4.24 цифрами обозначены номера ступеней, на которых в данном элементе образовалась трещина. Разрушение плиты произошло на 50 ступени нагружения при P = 65 кН. На рис.4.25 дано сопоставление с опытными данными по прогибам.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона. М.: Стройиздат, 1981. 464 с.
- 2. Бажант 3. Эндохронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности //Механика деформируемых твердых тел: направление развития. М.: Мир, 1983. С. 189-229.
- 3. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1985.-728 с.
- 4. Балан Т.А. Расчет анизотропных слоистых оболочек методом конечных элементов// Проблемы прочности. 1985. -№7. С.103-108.
- 5. Балан Т.А., Клованич С.Ф Определяющие соотношения для бетона при сложном, непропорциональном нагружении и нагреве//Строительная механика и расчет сооружений. 1987. №2. С. 39-44.
- 6. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. –М.:Стройиздат, 1982.- 448 с.
- 7. Бидный Г.Р. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов. Кишинев: Штиинца, 1979. 224 с.
- 8. Бидный Г.Р., Колчин Г.Б., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. Кишинев:Штиинца,1980.- 308 с. http://dwg.ru/dnl/4680
- 9. Бидный Г.Р., Клованич С.Ф., Осадченко К.А. Расчет железобетонных конструкций при сложном нагружении методом конечных элементов// Строительная механика и расчет сооружений. 1986.-№5.-С.22-26.
- 10. Бич П.М. Деформативность бетонов при плоском напряженном состоянии //Вопросы строительства и архитектуры. Минск: 1977. вып.7. С.87-92.
- 11. Бондаренко В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона— М.: Изд. ассоциации строит. вузов, 2004.- 472с.
- 12. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М.:Стройиздат, 1982. 287 с.
- 13. Бондаренко В.М., Тимко И.А., Шагин А.Л.Расчет железобетонных плит и оболочек методом интегрального модуля деформаций —Харьков: 1967.- 132с.
- 14. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. -248 с.
- 15. Гвоздев А.А.,Карпенко Н.И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 2. С. 20 23.
- 16. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона М.:Стройиздат, 1974 316 с.
- 17. Городецкий А.С., Здоренко В.С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1975.- С.59-66.
- 18. Дмитриев Л.Г., Шевченко В.Н. Изгиб нелинейно упругих пластин// ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства.- Киев: Будивельник, 1970.- С. 94-103.
- 19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541с.
- 20. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
- 21. Карпенко Н.И. К построению методики расчета деформаций

- железобетонных плит как условно многослойных с учетом шести компонент напряжений //Новые экпериментальные исследования и методы расчета железобетонных конструкций. М.: НИИЖБ, 1989. С.73-94.
- 22. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона М.: Стройиздат, 1996.-416 с.
- 23. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М.: Стройиздат, 1976. 208 с.
- 24. Карпенко Н.И., Клованич С.Ф. Определяющие соотношения для железобетона с трещинами при термосиловых воздействиях//Строительная механиками расчет сооружений. 1983. № 2. С. 6 11. (http://klovanich.se-ua.net)
- 25. Карпенко Н.И., Ярин Л.И., Кукунаев В.С. Расчет элементов стен методом конечных разностей // Новое о прочности железобетона. М.: Стройиздат, 1977. С. 141 165.
- 26. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов//Строительные конструк-ции : межвед. н.-т. сб. : вып. 61.: т.1- Киев: НИИСК, 2004.- 123-141. (http://klovanich.se-ua.net)
- 27. Клованич С.Ф. Механика железобетона в расчетах конструкций// Строительные конструкции : межвед. н.-т. сб.- Киев : НИИСК, 2000.—вып.58. С.107-115. (http://klovanich.se-ua.net)
- 28. Клованич С.Ф., Карпенко С.Н. О расчете пространственных железобетонных конструкций методом конечных элементов // Сб. тр. международной научно-практической конференции: Бетон и железобетон в третьем тысячелетии: Ростовский государственный строительный университет.- Ростов-на-Дону, 2000. С.179-184. (http://klovanich.se-ua.net)
- 29. Клованич С.Ф. Программа "CONCORD" для решения геотехнических задач методом конечных элементов// Вестник Одесского национального морского унив.- О.: ОНМУ, 2003.- №10.- С.39-46. (http://klovanich.se-ua.net)
- 30. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Метод конечних элементов в механике железобетона. Одесса, 2007. 111 с. (http://dwg.ru/dnl/4681)
- 31. Клованич С.Ф., Безушко Д.И.Анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных плит с использованием изопараметрического конечного элемента//Строительная механика и расчет сооружений.-№2.-2008. -C.67-71. (http://klovanich.se-ua.net)
- 32. Козачевский А.И. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами // Строительная механика и расчет сооружений. 1983. № 4. С. 12 16.
- 33. Колчин Г.Б., Клованич С.Ф., Чебан Г.А. К построению поверхности прочности структурно-неоднородных материалов при сложном напряженном состоянии // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 19. Харьков: Вица школа, 1988. -С. 20 24. (http://klovanich.se-ua.net)
- 34. Корсун В.И. Расчет конструкций на температурные и силовые воздействия с учетом неоднородности свойств материалов: Дис. ... докт. техн. наук / ДГАСА Макеевка, 2004. 365с.
- 35. Кричевский А.П. Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия. М.: Стройиздат, 1984.-148с.
- 36. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. № 1. С. 40 44.

- 37. Круглов В.М., Козачевский А.И. Об одном варианте деформационной теории пластичности бетона в шаговом расчете конструкций методом конечных элементов //Исслед. работы искусст. сооружений. -Новосибирск, 1980.-С.15-19.
- 38. Крылов С.М. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях.-М.:Стройиздат,1964.-167с.
- 39. Крылов СМ.,Проценко А.М. Дарабадзе В.Н. Расчет на ЭВМ несущей способности железобетонных плит//Исследование стержневых и плитных статически неопределимых конструкций. М.:Стройиздат, 1979.-С.5-17.
- 40. Кудашов В.И., Устинов В.М. Расчет пространственных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности и трещинообразования// Строительная механика и расчет сооружений.-1981.-№4.-С.6-10.
- 41. Леви М.И. К расчету железобетонных перекрытий и фундаментов МКЭ// Строительная механика и расчет сооружений. 1979. № 5. С. 62 66.
- 42. Лейтес Е.С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформирования материала// Новые исследования элементов железобетонных конструкций. М.: НИИЖБ, 1982. С. 24 32.
- 43. Лейтес Е.С. К уточнению одного из условий прочности бетона// Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности. М.: НИИЖБ, 1980. С. 37 40.
- 44. Лейтес Е.С. Построение модели деформирования бетона на основе теории пластического течения// Строительная механика и расчет сооружений. 1987. № 2. С. 36 39.
- 45. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладных аспектах// Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1978. Вып. 5. С. 65 96.
- 46. Лессиг Н.Н. Теоретические и экспериментальные исследования прочности железобетонных балок, подверженных совместному изгибу и кручению//Расчет иконструирование железобетонных конструкций. М.: Госстройиздат, 1958.
- 47. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела . М.: Наука, 1977. 416 с.
- 48. Лифшиц Я.Д., Онищенко М.М. Расчет железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести// Ползучесть строительных материалов и конструкций. М.:Стройиздат, 1964.- С.131-138.
- 49. Лолейт А.Ф. Новый проект норм / Лолейт А.Ф.// Доклад на I Всесоюзной конференции по бетону и железобетону 20 25 апреля 1930 г. в Москве : Тр. конф. М.: 1931.
- 50. Максименко В.П. Применение нелинейного шагового процессора «Лира-Степ» для оценки реального состояния сооружений// Будівельні конструкції.— 2001.—вып.54.—С.439-446.
- 51. Мурашев В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона.- М.:Машстройиздат, 1958.- 268 с.
- 52. Мухамедиев Т.А., Леви М.И., Мельник А.В. Совершенствование метода расчета изгибаемых в двух направлениях плит// Новые экспериментальные исследования и методы расчета железобетонных конструкций. М., 1989. С.153-161.

- 53. Нахди П.М. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластичности и термопластичности//Механика.-1962,-№ I.-C.87-133.
- 54. Ноткус А.И., Кудзис А.П. 0 применении теории малых упруго-пластических деформаций и теоретическое обоснование условия прочности// Тр. Вильнюс, инж.-строит. ин-та. Вильнюс, 1977. № 8. С. 21 30.
- 55. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев:Наукова думка, 1976. 416 с.
- 56. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие.— Киев:Наукова думка, 1981 496 с.
- 57. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
- 58. Проценко А.М., Лосин Н.А. Решение задач об изгибе железобетонных плит// Строительная механика и расчет сооружений. -1979.-№6.-С.35-38.
- 59. Рейсс Э. Учет упругой деформации в теории пластичности// Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 206 222.
- 60. Ржаницын А.Р. Расчет железобетонных оболочек методом предельного равновесия. -М.: Госстройиздат. -1958.
- 61. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции. М.:ЦИТП Госстроя СССР,1984. 79с.
- 62. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. М.:ГУП НИИЖБ, ФГУП ЦПП, 2004.-53 с.
- 63. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки . М. : ЮГИЗ, 1948. 460 с.
- 64. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж.сборник.-1954.-Вып.19. -С. 36 48.
- 65. Шматков С.Б. Слоистая модель железобетонной пластинки и ее использование для расчета плитных фундаментов //Конструкции и методы расчета зданий с.х. назначения.- М., 1988.-С.37-48.
- 66. Яременко А.Ф., Мельник А.Я Длительное деформирование железобетонных дисков с трещинами// Строительные конструкции. Киев : Будивельник, 1979, -Вып. 35. С. 40-44.
- 67. Яшин А.В. Критерий прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженных состояний// Расчет и конструирование железобетонных конструкций. -М.: Стройиздат, 1977.- С.48-57.
- 68. Яшин А.В. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях. М. : НИИЖБ, 1985. 72 с.
- 69. Abdel Rahman H.H., Hinton E Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete stiffened and cellular slabs// Computers & Structures. 1986.- Vol. 23: № 3. P. 333-350.
- 70. Adeghe L.N., Collins M.P. A finite element model for studying reinforced concrete detailing problems// Department of civil engineering: University of Toronto. Publication № 86-12, 1986.
- 71. Ahmad S.H., Shah S.P. Complete Triaxial Stress-Strain Corver for Concrete//J.Struct. Div. ASCE. 1982. v. 108. № 4. P. 728 742.

- 72. Argiris J.H., Faust G., Szimmat J., Warnke P., Willam K. Resent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels//Nucl.Eng.Dec.,28. –1974.–P.42-75.
- 73. Balakrishnan S., Murray D.W. Concrete constitutive model for NLFE analysis of structures// Journal of structural engineering. ASCE, 1988. Vol. 114: No. 7.-P.1449-1466.
- 74. Balan T.A., Spacone E.,Kwon M. 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures//Engineering Structures. № 23. Elsevier,2001. P. 333-342.
- 75. Bashur F.K., Darwin D. Nonlinear model for reinforced concrete slabs// Journal of structural division.-ASCE, 1978. Vol. 104.-P. 157-170.
- 76. Barzegar F., Schnobnch W.C Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete under short term monotonic loading.-Civil Engineering Studies SRS № 530. 1986.
- 77. Bathe K.-J. Ramaswamy S. On Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures // Nucl. Eng. and Des. 1979. v. 52. № 3. P. 385 409.
- 78. Bazant Z.P., Cedolin L. Fracture mechanics of reinforced concrete// Journal of the engineering mechanics, ASCE, Vol. 106, 1980.-P.1287-1306.
- 79. Bazant Z.P. Crack band theory for fracture of concrete / Bazant Z.P., Oh B.H. // Materials and structures/ Pans : RILEM, 1983. Vol.16.-P. 155-176.
- 80. Becker J.M., Bresler B FIRES-RC-A Computer Program for the Fire Response of Structures-Reinforced Concrete Frames.//Department of Civil Engineering: University of California. 1974. Report № UCB ERG 74-3.
- 81. Borst R., Nauta P.Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model // Engineering Compulations. 1985.- Vol. 2.-P.35-46.
- 82. Bresler B., Bertero V.Behavior of Reinforced Concrete Under Repeated Load// Journal of the Structural Division. ASCE, 1968. Vol. 94.-P. 1567-1590.
- 83. Cervenka V., Ehgehausen R., Pukl R. SBETA-Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures // Institute of Building Materials: University of Stuttgart. 1990. Report 90/1.
- 84. Cervenka V. Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels. University of Colorado: Boulder. 1970.- 210 p.
- 85. Cope R.J., Rao P.V., Clark L.A., Norris R. Modeling of Reinforced Concrete Behavior for Finite Element Analysis of Bridge Slabs // Numerical Methods for Nonlinear Problems.- 1980.-P.23-38.
- 86. Darwin D., Pecknold D.A. Nonlinear Biaxial Stress-Strain Low for Concrete// J. Eng. Mech. Div. ASCE, 1977.-v. 103. EM2. P. 229 241.
- 87. Elwi A.A. Murray D.W. Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1979. v. 105. № 4. P. 633 641.
- 88. Dotroppe J.C., Schnobrich W.C., Pecknold, D.A. Layered Finite Element Procedure for Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs// ABSE, 1992.- Vol. 33-11.
- 89. Duddeck H., Griebenon G., Schaper G. Material and time dependent non-linear behavior of cracks concrete slab // Nonlinear behavior of reinforced concrete spatial structures: IASS Symp. Darmstadt, 1978. v.1.- P.123-148.
- 90. Franklin H.A. Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics: University of California. Berkeley, 1970.-140p.

- 91. Gerstle K.H. Simple Formulation of Triaxial Concrete Behavior // ACI Journal. 1985. № 5. P. 382-387.
- 92. Gilbert R.I., Warner R.F. Tension stiffening in reinforced concrete slabs // Journal of structural division : ASCE, 1978. vol. 104.-P. 1885-1900.
- 93. Groot A.K., Kusters G.M., Monnier T. Numerical modeling of bond-slip behavior// Concrete mechanics. Heron, 1981. Vol. 26. № IB.
- 94. Hand F.R., Pecknold DA., Schnobrich W.C. Nonlinear layered analysis of RC plates and shells// Journal of structural division. ASCE, 1973. -Vol. 99.-P.1491-1505.
- 95. Hansen E., Willam K., Carol I. A two-surface anisotropic damage plasticity model for plain concrete // Proc. of Int. Conf. Fracture Mech. Of Concrete Materials. Paric, May 28-31, 2001.—P.549-556.
- 96. Hartl H., Handel C. 3D finite element modeling of reinforced concrete structures//Graz Univ. of Technol. : Inst. Of Structural Concrete. Austria, 2000.-P.1-10.
- 97. Jofriet J.C., McNeice G.M. Finite element analysis of RC slabs// Journal of Structural Division. ASCE, 1971.- Vol. 97.-P. 785-806.
- 98. Keuser M., MehlhornG. Finite Element Models for Bond Problems // Journal of Structural Engineering. ASCE, 1987.-vol. 113. № 10.-P. 2160-2173.
- 99. Kotsovos M.D. A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress // Magazine of concrete research.-1979.-Vol.31.-№108.-P.151-157.
- 100. Iohansen K.W. Bruchmomente der Kreisweisewehrten Platten Tokyo, 1932. 145 p.
- 101. Leibengood L., Darwin D., Dodds R.// Parameters affecting FE analysis of concrete structures // Journal of structural engineering. ASCE, 1986. -Vol. 112.-P.326-341.
- 102. Lin C.S. Nonlinear analysis of RC shells of general form / Lin C.S., Scordelis A.C. // Journal of structural division. ASCE, 1975. Vol. 101. № ST3. -P.523-538.
- 103. Lutz L.A. Analysis of stress in concrete hear a reinforcing bar due to bond and transverse //ACI Journal.-1979.-№10.-P.778 –787.
- 104. Marti P. Limit analysis and design of cocncrete and masonry structures//5-th Int. Conf. AMCM-2005.
- 105. Meyer C., Okamura H. Finite element analysis of reinforced concrete structures// Proceedings of the US-Japan joint seminar on finite element analysis of reinforced concrete. Tokyo, 1985.- P.456-467.
- 106. Nayak G.C., Zienkiewicz O.C. Elasto-Plastic stress analysis// International journal of numerical methods in engineering. Vol. № 5, 1972.-P. 113-135.
- 107. Ngo D., Scordelis A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams // Journal of ACI. 1967. Vol. 64. № 3.-P.152-163.
- 108. Nilson A. Internal Measurement of Bond Slip // Journal of ACI. Vol. 69, Title № 7. 1972.-P. 439-441.
- 109. Ottozen N.S. A Failure Criterion for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1977. v. 103. NEM4. P. 527 535.
- 110. Panchacharam S., Belardi A. Torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with FRP composites // Proceedings of the 1st fib Congress, Session 5. 2003.-P.207-216.
- 111. Phillips D.V., Zienkieiwicz O.C. Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures// Inst. Civ. Eng. Proc. Pt2. 1976. v. 61. III. P. 59 88.

- 112. Prandt L. Spannungsverteilung in Plastichen Korpern // Proc. of 1 st Int. Congr. of Appl. Mech. 1924. P. 43-54.
- 113. Rajagopal K.R. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams: Beam-Columns and Slabs by Finite Elements. State University, 1976.-156p.
- 114. Rashid Y.R. Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels// Nuclear Engineering and Design.- 1968 -Vol. 7. № 4.-P.334-344.
- 115. Rots J.G., Nauta P., Kusters, G.M. Smeared crack approach and fracture localization in concrete // HERON.- Vol 30.1.- 1985.-P. 3-48.
- 116. Saennz I.P. Discussion of Equation to the Stress-Strain Corver of Concrete By P. Desai and S. Krishnan // ACI Journal, Proc. 1964. v. 61. № 9, Sept. P. 1229 1235
- 117. Scanlon A., Murray D.W. Time Dependent Reinforced Concrete Slab Deflections // Journal of the structural division. ASCE, 1974. Vol.100. P.1911-1924
- 118. Scordelis A.C., Ngo D., Franklin H.A. Finite element study of reinforced concrete beams with diagonal tension cracks// Proceedings of symposium on shear in reinforced concrete. ACI Publication SP-42, 1974.
- 119. Selna L.G. Creep, cracking and shrinkage in concrete frame structures// Journal of the structural division. ASCE, 1969. -vol. 95, № 12.-P. 2743-2761.
- 120. Suidan M.T., Schnobrich W.C. Finite element analysis of reinforced concrete// Journal of the structural division. ASCE, 1973. vol 99.-P.2109-2122.
- 121. Vecchio F., Collins M.P. The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stress// Department of civil engineering: University of Toronto. 1982. Publication No. 82-03, 1982.
- 122. Vebo A., Ghali A. Moment-curvature relation of reinforced concrete slabs// Journal of structural division. ASCE, 1977. vol. 103.-P.515-531.
- 123. Willam K.J., Warnke E.P.Constitutive model for the triaxial behavior of concrete// Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses: Bergamo: Italy. 1974. v. 19. May. 17 19. P. 3-11.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | _ |
|---|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 3 |
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| ГЛАВА 1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ | |
| НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ | |
| 1.1. Постановка задачи. Система разрешающих уравнений | 11 |
| 1.2. Дискретизация области | 14 |
| 1.3. Матрицы жесткости конечных элементов. Узловые силы | 15 |
| 1.4. Разрешающие уравнения МКЭ | 17 |
| 1.5. Решение нелинейных задач | 18 |
| ГЛАВА 2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ | |
| 2.1. Элемент в виде тетраэдра | 23 |
| 2.2. Элемент в виде параллелепипеда | 27 |
| 2.3. Криволинейные объемные элементы | 32 |
| 2.4. Осесимметричные элементы | 37 |
| 2.5. Элементы толстых оболочек | 43 |
| ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ БЕТОНА И | |
| ЖЕЛЕЗОБЕТОНА | |
| 3.1. Прочность бетона | 52 |
| 3.2. Деформационные зависимости для бетона | 57 |
| 3.3. Тестирование модели бетона | 59 |
| 3.4. Механические характеристики арматуры | 61 |
| 3.5. Определяющие соотношения для железобетона | 61 |
| ГЛАВА 4. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ | |
| ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОСТРУКЦИЙ | |
| 4.1. Железобетонные балки | 69 |
| 4.2. Балка-стенка | 75 |
| 4.3. Железобетонная плита | 79 |
| ПИТЕРАТУРА | 82 |

Научное издание

КЛОВАНИЧ СЕРГЕЙ ФЕДОРОВИЧ БЕЗУШКО ДЕНИС ИВАНОВИЧ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Монография

Сдано в производство 29.01.09 . Подписано в печать 29.01.09 . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Ул.-печ. л.6,9 . Тираж 100 экз. Зак. №.

Издательство ОНМУ 65029, г.Одесса, ул. Мечникова, 34. Тел. 728 31 14



Клованич Сергей Федорович,

д.т.н., проф.., заведующий кафедрой инженерных конструкций и водных исследований Одесского национального морского университета. Направление научных интересов - моделирование работы бетона и железобетона при сложном напряженном состоянии, численные исследования железобетонных конструкций, теоретические и прикладные аспекты метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ. Автор около 150 работ.

http://klovanich.se-ua.net



Безушко Денис Иванович,

к.т.н., асистент кафедры инженерных конструкций и исследований Одесского национального морского университета. Направление научных интересов численные исследования напряженнодеформированного состояния железобетонных конструкций при сложном напряженном состоянии.

ВНИМАНИЕ!!!



ГОТОВИТСЯ К ИЗЛАНИЮ МОНОГРАФИЯ:

Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. -Запорожье, 2009. - 400 с.

В книге излагаются основы метода конечных элементов применительно к нелинейным задачам. Приводятся соотношения для стандартных конечных элементов, включая плоские, осесимметричные, объемные, стержневые, плитные и оболочечные. Формулируется целый класс нестандартных элементов, характерных для нелинейных задач. Приводится анализ нелинейных моделей таких материалов, как бетон и железобетон, грунты, как в виде ассоциированных и неассоциированных теорий течения, так и в форме деформационных теорий.

Дается подробное описание программного комплекса, ориентированного на решение нелинейных задач методом конечных элементов с использованием шаговоитерационных процедур. Большая часть численных алгоритмов сопровождается исходными текстами программ на Фортране и Си. Приводятся наглядные примеры решения нелинейных задач из самых разнообразных технических и геотехнических приложений. Книга предназначена для специалистов, занимающихся расчетами и проектированием сооружений, а также для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей.

Подробности на сайте http://klovanich.se-ua.net