Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Μάθημα: Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Ροβιθάκης

Φοιτήτρια: Γκαβανόζη Κωνσταντίνα

ΑΕΜ: 9993

Περιεχόμενα

Δεν βρέθηκαν καταχωρήσεις πίνακα περιεχομένων.

Εισαγωγή

Σε αυτή την αναφορά γίνεται παρουσίαση των μεθόδων και των αποτελεσμάτων μερικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Πιο αναλυτικά οι μέθοδοι που εξετάζονται σε αυτή την αναφορά είναι οι εξής:

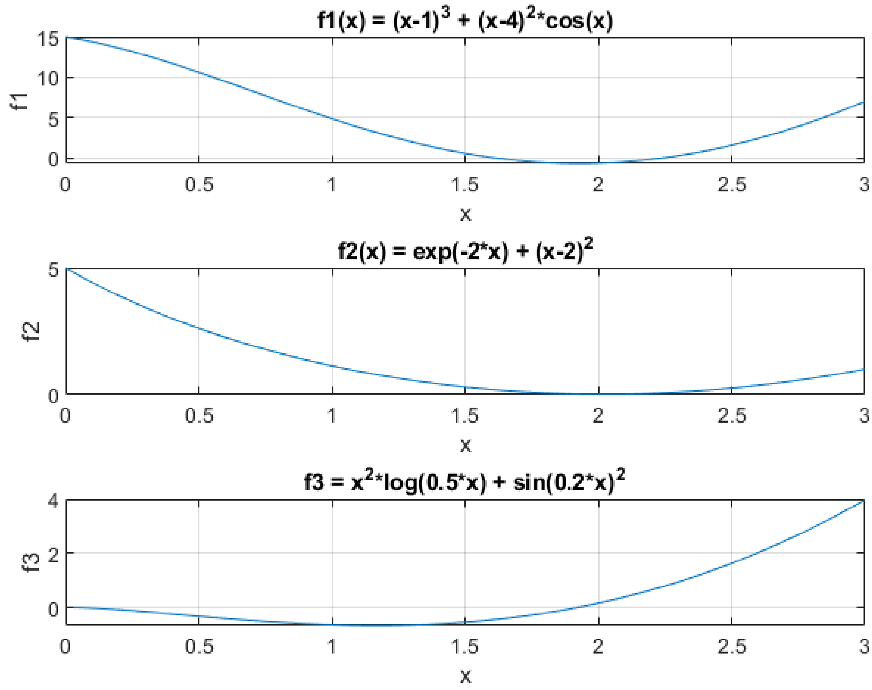
1) Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς τη χρήση παραγώγων
    - Μέθοδος της Διχοτόμου
    - Μέθοδος Χρυσού Τομέα
    - Μέθοδος Fibonacci
2) Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου με χρήση παραγώγων
    - Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγων

Από τις παραπάνω μεθόδους οι τρεις πρώτες έχουν εφαρμογή σε κυρτές συναρτήσεις ενώ η τελευταία εφαρμόζεται σε ψευδοκυρτές συναρτήσεις.

Στα πλαίσια αυτής της αναφοράς εξετάζονται οι παρακάτω συναρτήσεις.

- $f_1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2 \cos(x)$
- $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
- $f_3(x) = x^2 \ln(0.5x) + \sin(0.2x)^2$

Οι συναρτήσεις αυτές θα μελετηθούν στο διάστημα [0,3]. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των 3 συναρτήσεων.



Θέμα 1 – Μέθοδος Διχοτόμου

1.1 Αλγόριθμος της Διχοτόμου

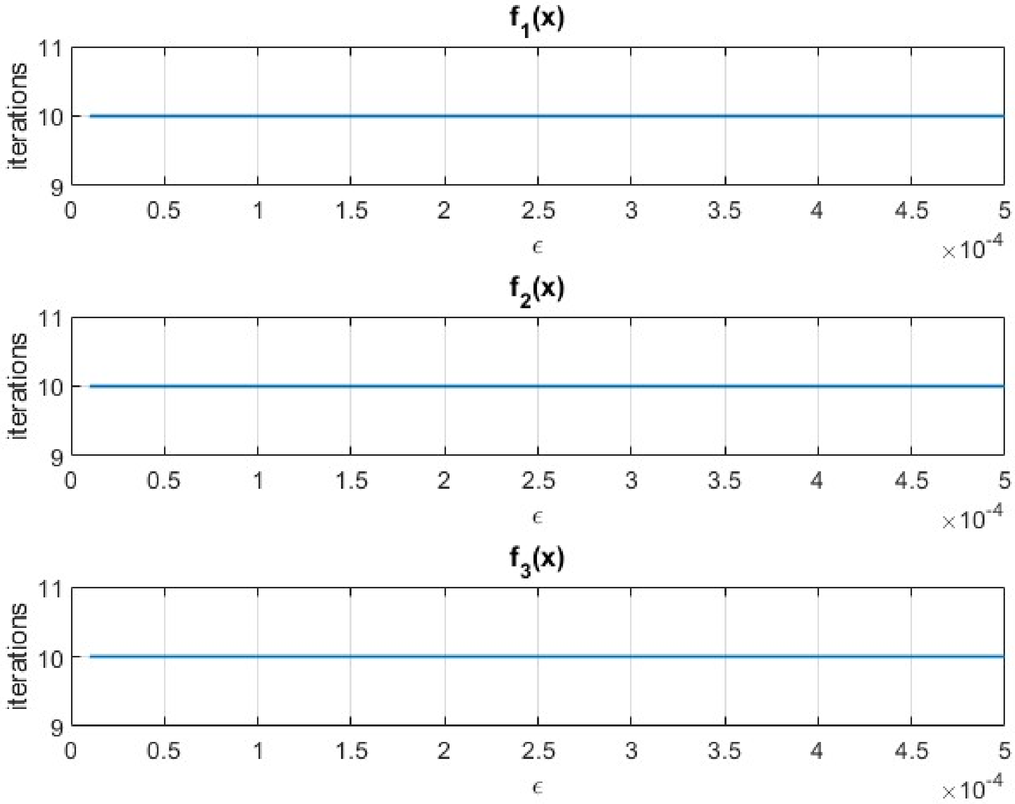
Στη μέθοδο της Διχοτόμου το διάστημα αναζήτησης του ελαχίστου χωρίζεται σε τρία ανισομερή υποδιαστήματα με τη βοήθεια δύο εσωτερικών σημείων x_1, x_2 που ανήκουν στο διάστημα [a, b]. Επειδή δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων σε ποιο υποδιάστημα βρίσκεται το ελάχιστο, βέλτιστη στρατηγική είναι η τοποθέτηση των x_1, x_2 σε σημεία που χωρίζουν σε ισομερή υποδιαστήματα το αρχικό διάστημα. Αυτό επιτυγχάνεται τοποθετώντας τα συμμετρικά σε απόσταση ε>0 από τη διχοτόμο του [a, b]. Δηλαδή $x_{1k} = (a_k + b_k)/2 - ε$ και $x_{2k} = (a_k + b_k)/2 + ε$, όπου k ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου και ε μια θετική σταθερά. Τότε το νέο διάστημα αναζήτησης ορίζεται ως:

- $[x_{1k}, b_k]$ αν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$
- $[a_k, x_{2k}]$ αν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$

Ο αλγόριθμος αυτός τερματίζει όταν ισχύει η συνθήκη $|b_k - a_k| < l$. Όπου l>0 και αποτελεί το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Για να τρέχει ομαλά ο αλγόριθμος και να μην καταλήξει σε ατέρμονα βρόχο θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη l>2ε.

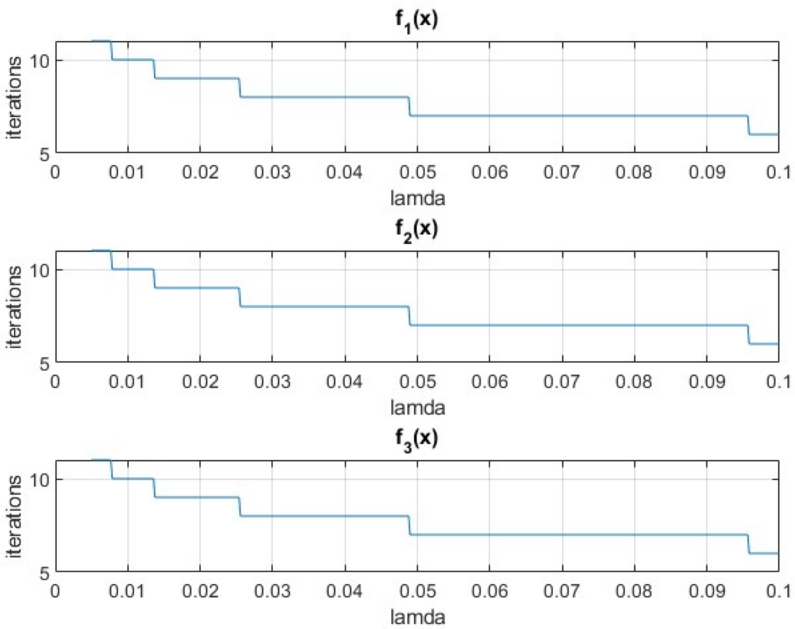
1.2 Σταθερό l μεταβλητό ε

Σε αυτή την ενότητα μελετάται η μέθοδος της Διχοτόμου όπου το l διατηρείτε σταθερό και παίρνει την τιμή l = 0.01 και μεταβάλλεται η τιμή του ε. Η εκτέλεση του αλγορίθμου αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



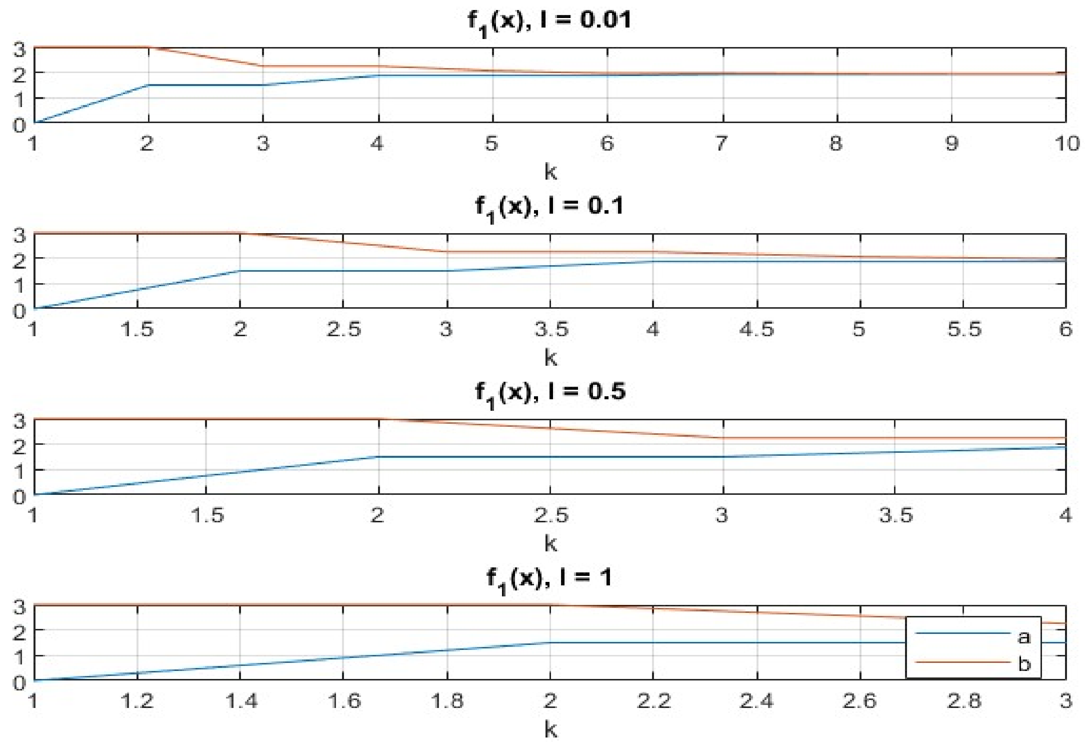
1.3 Σταθερό ε μεταβλητό l

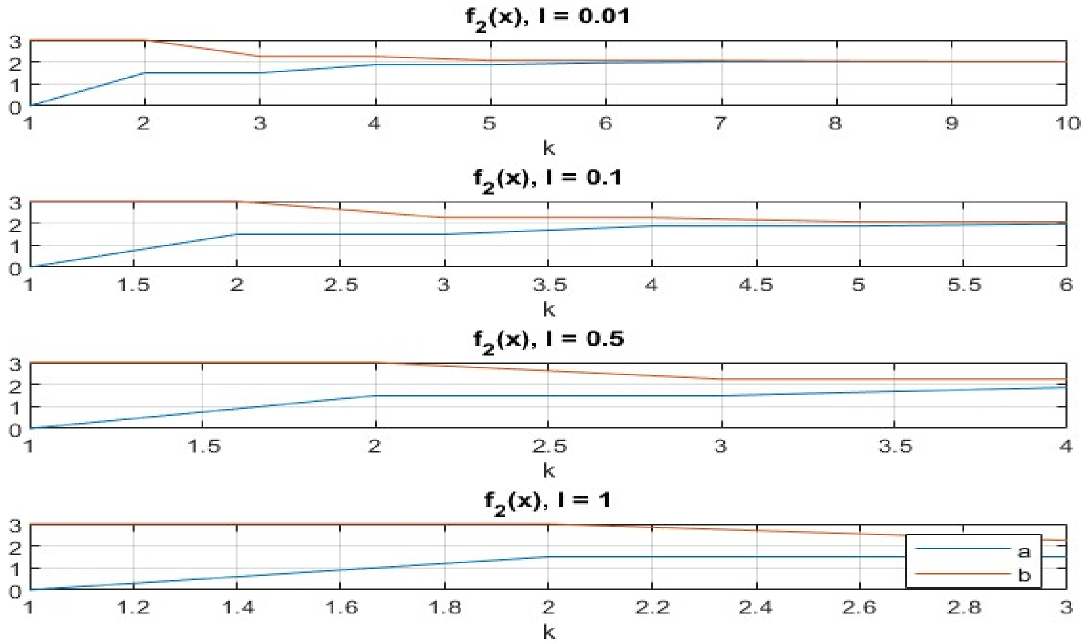
Σε αυτή την ενότητα μελετάται η μέθοδος της Διχοτόμου όπου το ε διατηρείτε σταθερό και παίρνει την τιμή ε = 0.001 και μεταβάλλεται η τιμή του l . Η εκτέλεση του αλγορίθμου αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



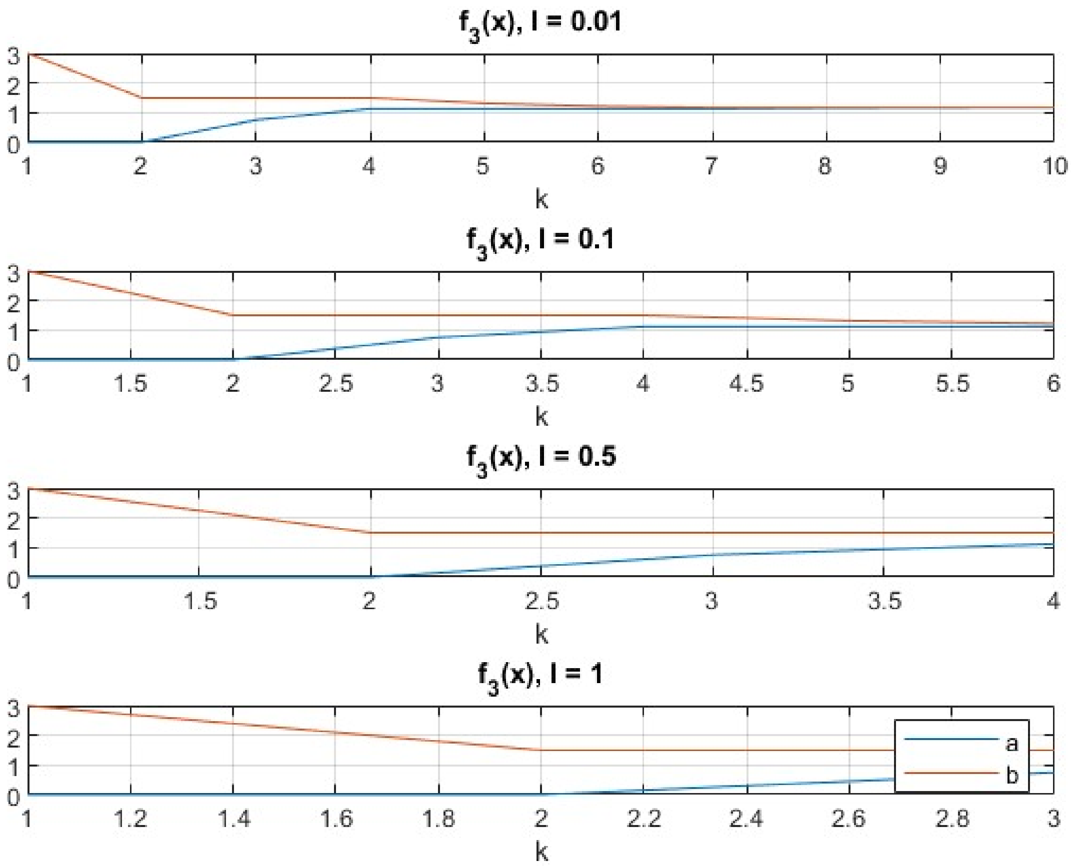
1.4 Διαγράμματα όπου παίρνουμε τα άκρα των διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

Σε αυτή την ενότητα το ε διατηρεί σταθερή τιμή ε = 0.001 και εφαρμόζεται ο αλγόριθμος της διχοτόμου για διαφορετικές τιμές του l. Σε κάθε επανάληψη αποθηκεύονται οι τιμές των άκρων του βρόχου. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης για τις δοθείσες συναρτήσεις όταν το l παίρνει τις τιμές l = [0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1].





f2(x), l = 0.01
f2(x), l = 0.1
f2(x), l = 0.5
f2(x), l = 1
k
a
b



f3(x), l = 0.01
f3(x), l = 0.1
f3(x), l = 0.5
f3(x), l = 1
k
a
b

Θέμα 2 – Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τη ανάλυση της μεθόδου του χρυσού τομέα.

2.1 Ο Αλγόριθμος του Χρυσού Τομέα

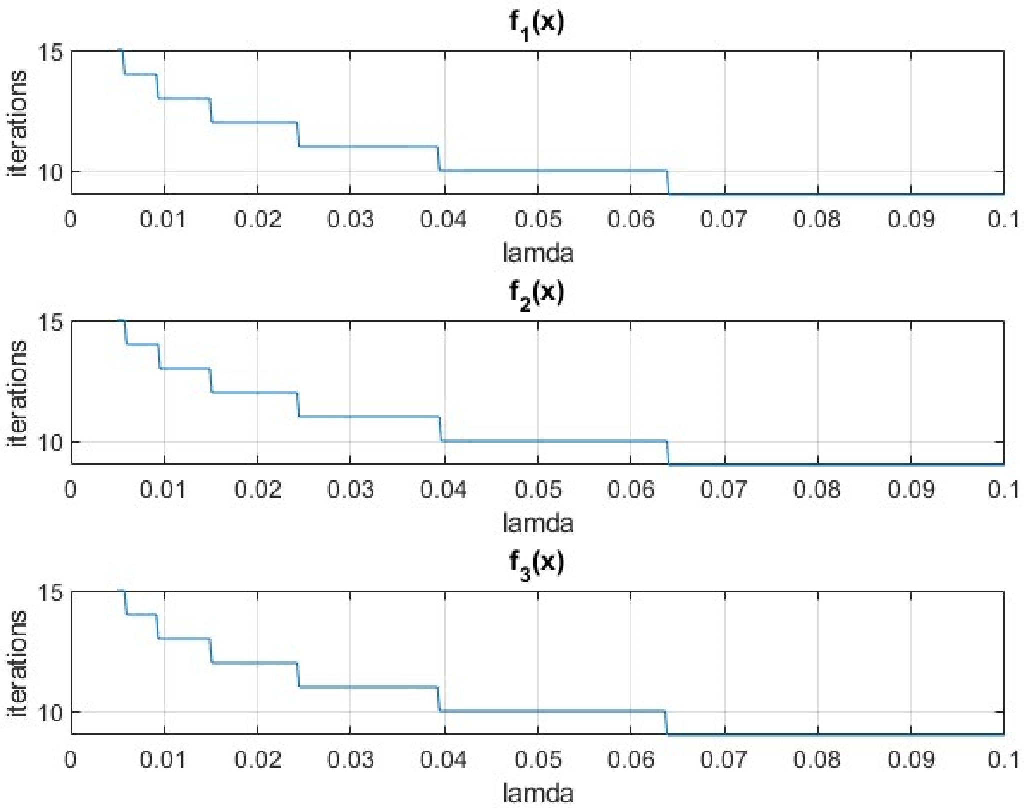
Αρχικά ορίζουμε το k και το l>0. Όπου k είναι ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου και l το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Στο αλγόριθμο αυτό εισάγουμε τη σταθερά γ που παίρνει την τιμή γ=0,618. Προκειμένου να βρούμε το νέο διάστημα αναζήτησης σε κάθε επανάληψη του βρόχου, ξεκινάμε από το αρχικό διάστημα [a, b] και ορίζουμε τα εξής:

- $x_{11} = a_1 + (1-\gamma)(b_1 - a_1)$
- $x_{21}=a_1 + \gamma(b_1-a_1)$

Αν $|b_1 - a_1| < l$ ο αλγόριθμος τερματίζει. Αν δεν ισχύει αυτή η συνθήκη ο αλγόριθμος εκτελείται σύμφωνα με τα βήματα του βιβλίου.

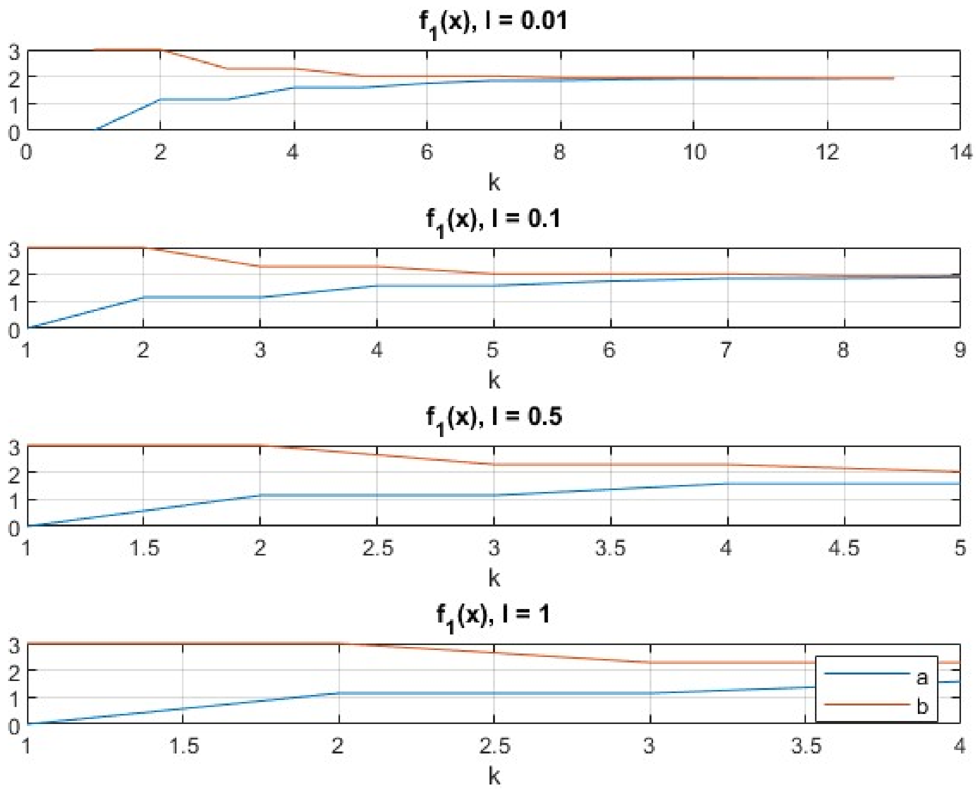
2.2 Μεταβλητό l

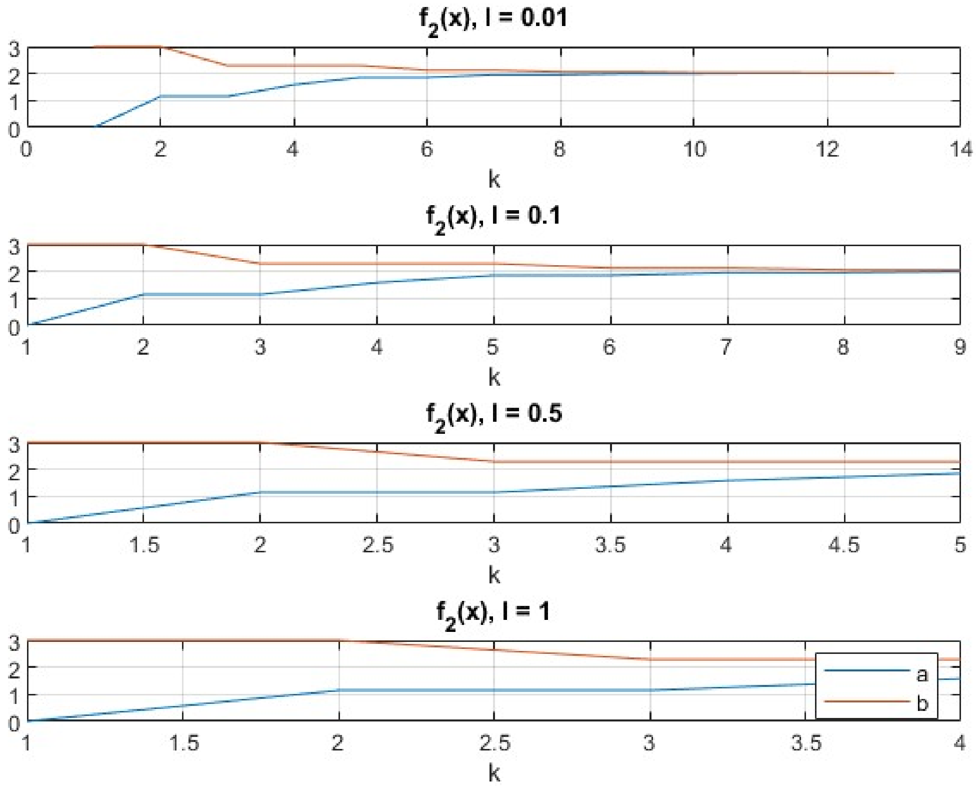
Στην ενότητα αυτή μελετάται ο αλγόριθμος για διάφορες τιμές του l. Τα διαγράμματα αυτής της μελέτης φαίνονται παρακάτω.

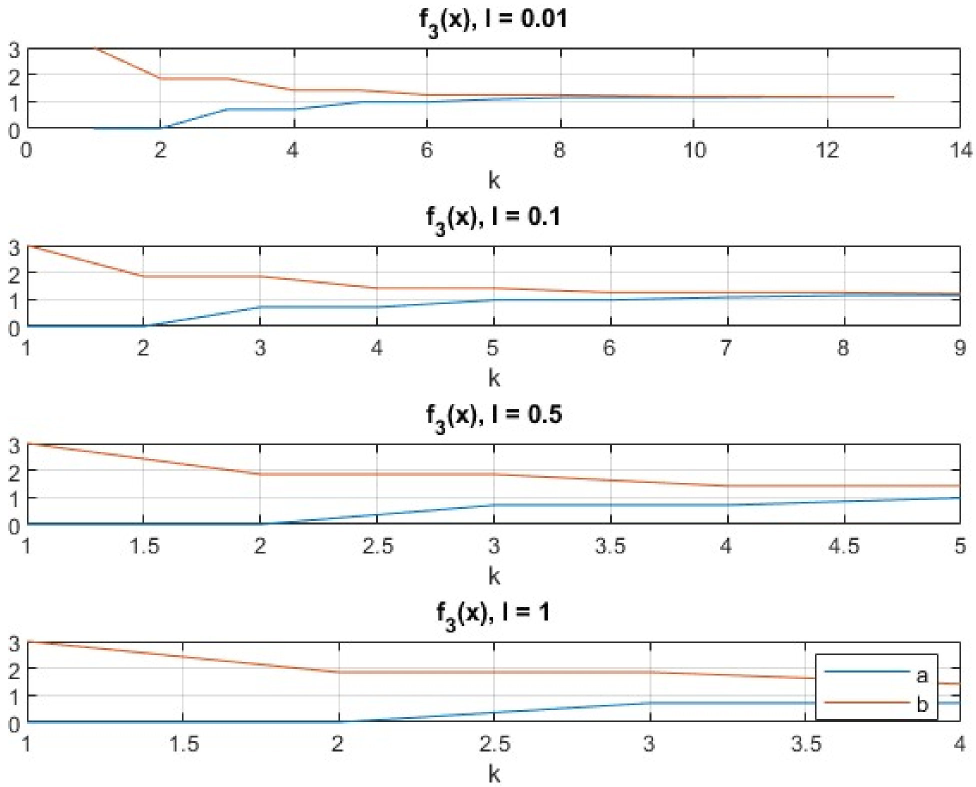


2.3 Διαγράμματα όπου παίρνουμε τα άκρα των διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζεται ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα για διαφορετικές τιμές του l. Σε κάθε επανάληψη αποθηκεύονται οι τιμές των άκρων του βρόχου. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης για τις δοθείσες συναρτήσεις όταν το l παίρνει τις τιμές l = [0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1].




$f_2(x)$, l = 0.01
k
$f_2(x)$, l = 0.1
k
$f_2(x)$, l = 0.5
k
$f_2(x)$, l = 1
a
b
k


$f_3(x)$, l = 0.01
k
$f_3(x)$, l = 0.1
k
$f_3(x)$, l = 0.5
k
$f_3(x)$, l = 1
a
b
k

Θέμα 3 – Μέθοδος Fibonacci

3.1 Ο αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος αναλύεται στο βιβλίο

3.2 Μεταβλητό l

Ακολουθώ την ίδια μεθοδολογία και το αποτέλεσμα είναι το εξής

3.3 Διαγράμματα όπου παίρνουμε τα άκρα των διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k

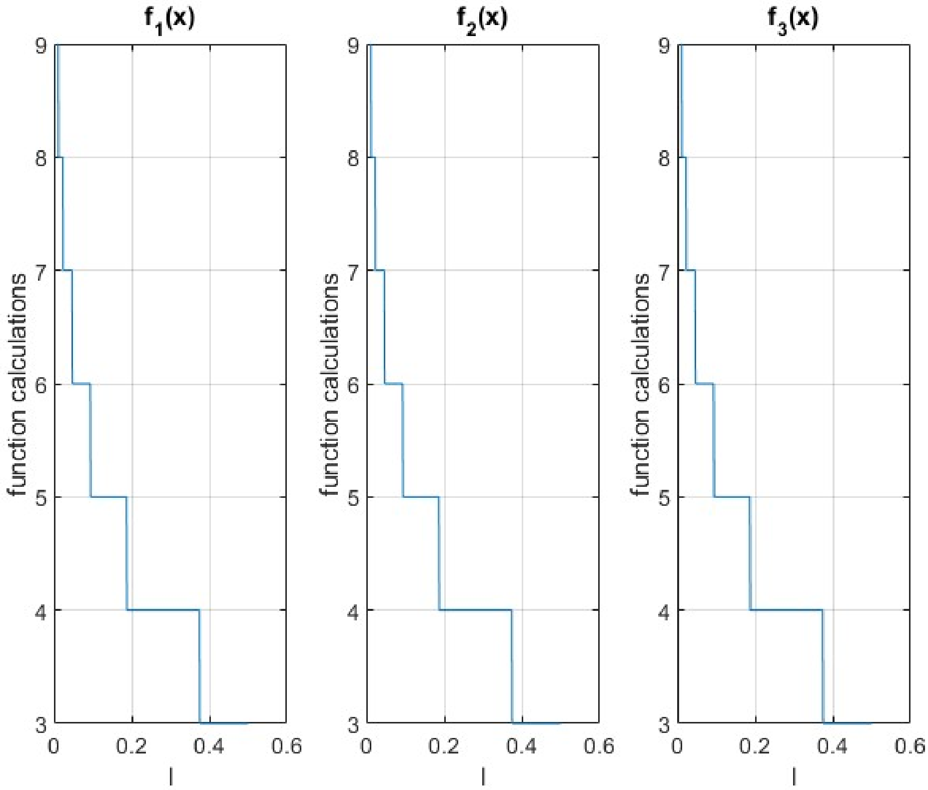
Δυστυχώς ο κώδικας μπαίνει σε ατέρμονα βρόχο και δεν μπορώ να βγάλω αποτελέσματα. Τα αρχεία της MatLab επισυνάπτονται κανονικά στο αρχείο.

Θέμα 4 – Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων

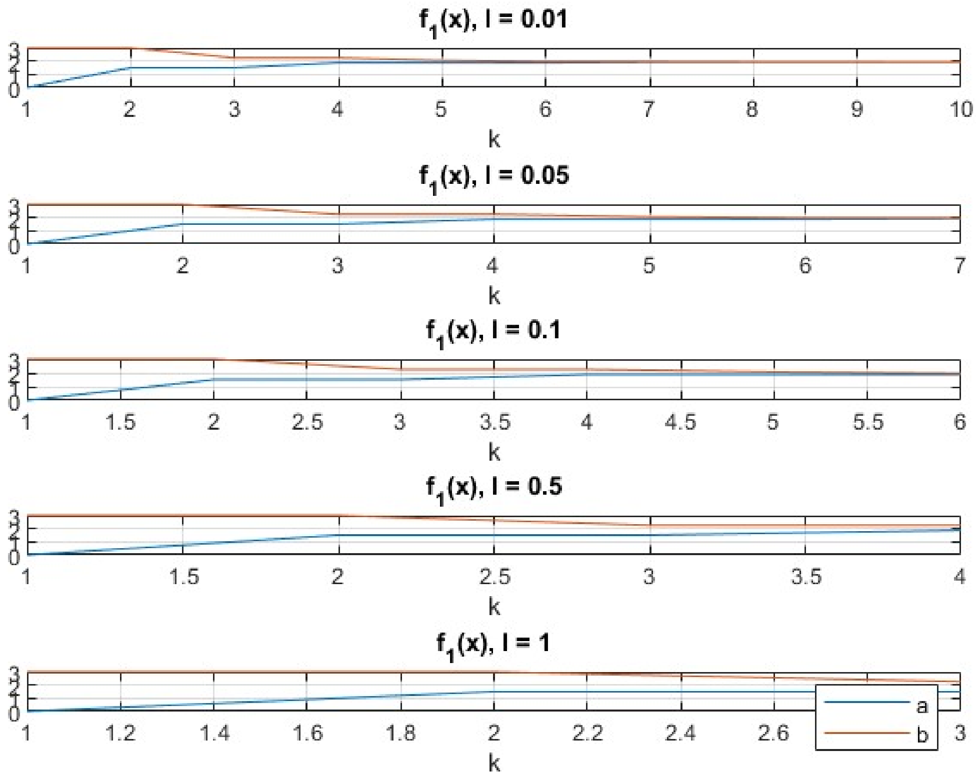
4.1 Ο αλγόριθμος

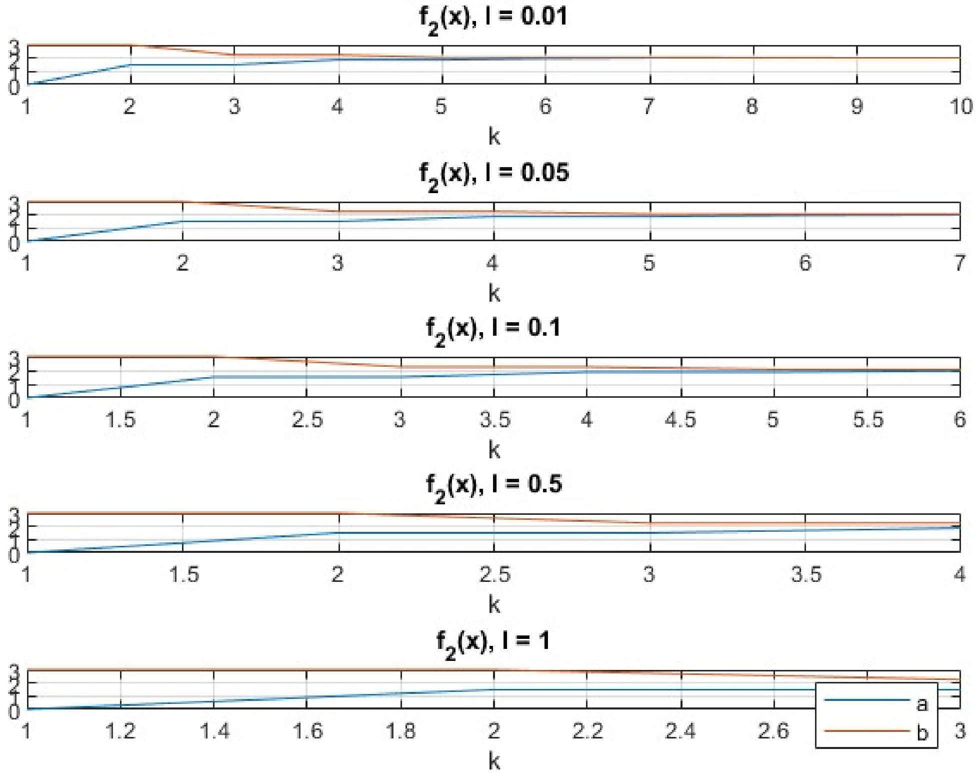
Ο αλγόριθμος αναλύεται στο βιβλίο

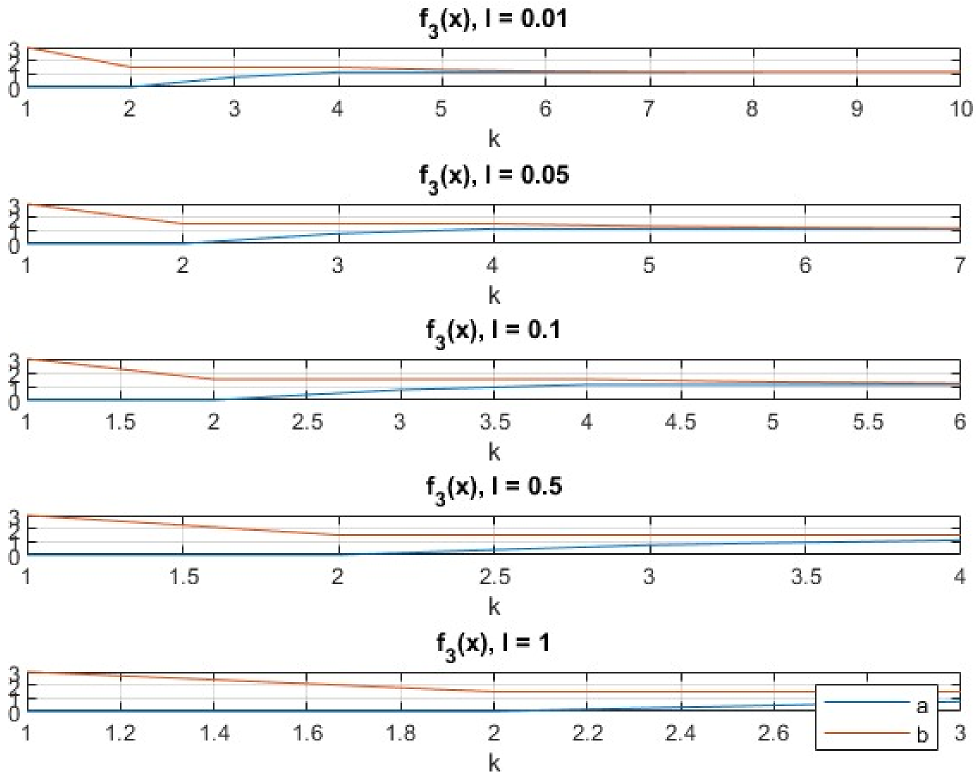
4.2 Μεταβλητό l



4.3 Διαγράμματα όπου παίρνουμε τα άκρα των διαστημάτων συναρτήσει της επανάληψης k




$f_2(x)$, l = 0.01
k
$f_2(x)$, l = 0.05
k
$f_2(x)$, l = 0.1
k
$f_2(x)$, l = 0.5
k
$f_2(x)$, l = 1
k
a
b


$f_3(x)$, l = 0.01
k
$f_3(x)$, l = 0.05
k
$f_3(x)$, l = 0.1
k
$f_3(x)$, l = 0.5
k
$f_3(x)$, l = 1
k
a
b

Θέμα 5 – Γενικά Συμπεράσματα

Οι αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν ως τώρα στην αναφορά συγκλίνουν με ακρίβεια τελικού υποδιαστήματος l μετά από n επαναλήψεις. Ως n για κάθε αλγόριθμο επιλέγεται η μικρότερη τιμή του n που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- Μέθοδος Διχοτόμου (1/2)^n ≤ l (b1-a1)
- Μέθοδος χρυσού τομέα γn−1 ≤ l (b1-a1)
- Μέθοδος Fibonacci Fn ≥ l (b1-a1)
- Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων (1/2)^n ≤ l (b1-a1)

Από τα παραπάνω, φαίνεται πως για σταθερό πηλίκο l (b1-a1) όσο πιο μικρός είναι ο αριθμός n τόσο πιο αποτελεσματικός εμφανίζεται και ο αλγόριθμος. Προκύπτει, λοιπόν, ότι η μέθοδος Fibonacci έχει την καλύτερη απόδοση. Ακολουθεί η μέθοδος του χρυσού τομέα και τέλος οι αλγόριθμοι της Διχοτόμου με ή χωρίς παράγωγο (και οι δύο υλοποιήσεις εμφανίζουν ίδια απόδοση, ωστόσο, η χρήση παραγώγων, προϋποθέτει η αντικειμενική συνάρτηση να είναι διαφορίσιμη). ΄Οσον αφορά τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης οι αλγόριθμοι χωρίς την χρήση παραγώγων έχουν παρόμοιο αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αντίθετα, η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων αφού πρώτα υπολογίζει την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης, έχει μειωμένο αριθμό υπολογισμών της df (x) dx σε σύγκριση με τις άλλες μεθόδους.