Εργασία στη Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Θέμα:Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Καθηγητής: Καραμπετάκης Νικόλαος

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Αγγελίδης Αλέξανδρος	ΑΕΜ:16197
Ζυγογιάννης Κωνσταντίνος	ΑΕΜ:15966

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρακάτω ενότητα αναπτύσσεται το θέμα των ιδιοτιμών,ιδιοδιανυσμάτων και γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, βασικά εργαλεία του κλάδου της Γραμμικής Άλγεβρας,με διάφορες εφαρμογές και σε κλάδους ευρύτερου ενδιαφέροντος.Δίνονται αρχικά οι σχετικοί ορισμοί και απλά παραδείγματα κατανόησης. Στη συνέχεια δείχνουμε τον τρόπο που αυτά τα εργαλεία χρησιμεύουν σε βαθύτερα προβλήματα που προκύπτουν από τη Θεωρία Πινάκων κ.α.,όπως είναι η διαγωνιοποίηση πίνακα και η κανονική μορφή Jordan.

Τέλος γίνεται αναφορά σε μια σύγχρονη ανακάλυψη μιας φόρμουλας που συσχετίζει τις ιδιοτιμές με τα ιδιοδιανύσματα μιας ειδικής κατηγορίας πινάκων.

Η ενότητα κλείνει με μερικές ασκήσεις προς εξάσκηση του αναγνώστη.

1.1 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ, ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ας ξεκινήσουμε δίνοντας τον βασικό ορισμό που συνδέεται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A.

Ορισμός 1.1.1

Έστω $A \in R^{n \times n}$.Ο αριθμός $\lambda \in C$ λέγεται *ιδιοτιμή του πίνακα A*, αν υπάρχει $u \in C^n$, $u \neq 0$ έτσι ώστε:

$$Au = \lambda u \qquad (A.1)$$

Το διάνυσμα u ονομάζεται *δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.* Ένα διάνυσμα γραμμής $v \in C^n$ που ικανοποιεί την :

$$v^T A = \lambda v^T$$

ονομάζεται *αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*
Προκειμένου να βρούμε μια ιδιοτιμή του A, μετατρέπουμε την (A.1) στην:

$$(\lambda I_n - A)u = 0 \qquad (A.2)$$

Όπου I_n ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης n x n. Σταθεροποιώντας το λ, η σχέση (A.2) αποτελεί σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους να είναι τα στοιχεία $u_i \in C$, $i=1,2,\ldots, n$ του διανύσματος $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in C^n$

Η γραμμική εξίσωση (A.2) μας λέει ότι υπάρχει λύση $u \neq 0$, αν και μόνον αν οι στήλες (ισοδύναμα, οι γραμμές) του πίνακα $\lambda I_n - A$ είναι γραμμικά εξαρτημένες με συντελεστές $u_i \in C$, $i=1,2,\ldots, n$ και $u_i \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $i=1,2,\ldots, n$. Ισοδύναμα, η (A.2) έχει λύση $u \neq 0$ αν και μόνον αν

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένας $\lambda \in C$ θα είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0 \qquad (A.3)$$

Ορισμός 1.1.2

Το ψ(λ) που ορίσαμε στην σχέση (Α.3) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές και ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α*. Η εξίσωση (Α.3) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση του Α*.

Από τη στιγμή που το ψ(λ) είναι πολυώνυμο βαθμού n, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας Α θα έχει n το πλήθος ιδιοτιμές, έστω $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in C$, όχι υποχρεωτικά όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.1.1

Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ψ(λ) του Α θα είναι:

$\psi(\lambda)=\det(\lambda I_2- A)=\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{pmatrix}= \lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)$

Η χαρακτηριστική εξίωση του Α

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

Έχει 2 πραγματικές ρίζες, τις $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-2$, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του Α. Έστω

$u_1=\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$ και $u_2=\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$

τα ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-2$ αντίστοιχα, τότε οι εξισώσεις

$$Au_1=\lambda_1 u_1$$

$$Au_2=\lambda_2 u_2$$

Γράφονται αντίστοιχα ως

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$$

Και

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

Από την πρώτη ισότητα πινάκων παίρνουμε τις εξισώσεις

$u_{21}= - u_{11}$ (Α.4)

$-2u_{11}=3u_{21}= - u_{21}$

οι οποίες παρατηρούμε ότι είναι ουσιαστικά η ίδια εξίσωση, κάνοντας τις πράξεις στη δεύτερη. Αυτό σημαίνει ότι το ιδιοδιάνυσμα u_1 μπορεί να προσδιοριστεί μόνο κατά διεύθυνση.

Από την (Α.4) έχουμε για $u_{11}=1 \Rightarrow u_{21}=-1$ και άρα $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Από την δεύτερη ισότητα πινάκων παίρνουμε τις εξισώσεις

$u_{22}= -2u_{12}$ (Α.5)

$-2u_{12}-3u_{22}= -2u_{22}$

Οι οποίες, όπως και πριν, είναι η ίδια εξίσωση οπότε και το ιδιοδιάνυσμα u_2 μπορεί μόνο να προσδιοριστεί κατά διεύθυνση.

Από την (Α.5) για $u_{12}=1 \Rightarrow u_{22}= -2$ και άρα

$u_2= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Παράδειγμα 1.1.2</u>

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ όταν αυτός θεωρηθεί ως στοιχείο του

i) R^{2x2} ii) C^{2x2}

<u>Λύση</u>

i) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $\lambda \in R$ τέτοια ώστε $\det(\lambda I_2-A) = 0$. Έχουμε $\det(\lambda I_2-A) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$. Συνεπώς ως στοιχείο του R^{2x2} ο A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα

ii) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $\lambda \in C$ τέτοια ώστε $\det(\lambda I_2-A) = 0$. Επειδή $\det(\lambda I_2-A) = \lambda^2 + 1$, οι ιδιοτιμές είναι i και -i. Θα προσδιορίσουμε τώρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = i$ επιλύουμε το σύστημα $(A -\lambda I_2)X = 0$ όπου $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, δηλαδή το

$$(1 - i)x - y = 0$$

$$2x - (1 + i)y = 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$(1 - i)x - y = 0$$

της οποίας οι λύσεις είναι οι $(x, (1 - i)x)$, $x \in C$. Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα$\begin{pmatrix} x \\ (1-i)x \end{pmatrix}$, όπου $x \in C - \{0\}$.

Για $\lambda = -i$, το σύστημα $(A - \lambda I_2)X = 0$

$$(i + 1)x - y = 0$$

$$2x + (i - 1)y = 0$$

που είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$(i + 1)x - y = 0.$$

Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα$\begin{pmatrix} x \\ (1+i)x \end{pmatrix}$, όπου $x \in C - \{0\}$.

Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i το ονομάζουμε *ιδιοχώρο* της ιδιοτιμής i και το συμβολίζουμε με V_i (ή $V(i)$)

Αντίστοιχα για την ιδιοτιμή -i έχουμε τον ιδιοχώρο V_{-i} (ή $V(-i)$).

Γενικότερα θα δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.1.3

Αν λ ιδιοτιμή του A, το σύνολο των (άπειρων) λύσεων του ομογενούς συστήματος $(A-\lambda I_n) X = 0$ λέγεται *ιδιοχώρος* του A για την ιδιοτιμή λ και συμβολίζεται με V_λ (ή $V(\lambda)$).

Παρακάτω θα δώσουμε μία πρόταση που θα μας χρησιμεύσει πολύ στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα μάθουμε να διαγωνιοποιούμε έναν τετραγωνικό πίνακα.

Πρόταση 1.1.1

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.1.3

Δίνεται ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}$

Πρώτα θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές του A, συνεπώς μηδενίζουμε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

$$\psi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

και συνεπώς λ = -2 και λ = 3 οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Στη συνέχεια για κάθε μία από τις ιδιοτιμές λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$(A - \lambda I_2)\, X = 0, \text{ δηλαδή } (A + 2I_2)\, X = 0, \text{ συνεπώς } x - 3y = 0 \text{ ή } x = 3y.$$

Άρα $V_{-2} = \langle(3,1)\rangle = \text{span}\,(3,1)$

Αντίστοιχα $V_3 = \langle(5,2)\rangle = \text{span}\,(5, 2)$

Στο παράδειγμα αυτό η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι 1. Ως *αλγεβρική πολλαπλότητα* μιας ιδιοτιμής λ, ορίζουμε το πόσες φορές η ιδιοτιμή λ μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ως *γεωμετρική πολλαπλότητα* μιας ιδιοτιμής λ, ορίζουμε την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου της.

Στο *παράδειγμα 1.1.2* και οι δύο ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, συνεπώς όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.

Θα τελειώσουμε αυτό το κεφάλαιο με κάποιες χρήσιμες προτάσεις και πορίσματα που μας βεβαιώνουν ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι αρκετά σημαντικές καθώς μας βοηθάνε να υπολογίσουμε βασικά χαρακτηριστικά ενός πίνακα.

Πρόταση 1.1.2

Έστω $A \in C^{nxn}$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^T

Άμεση συνέπεια αυτής της πρότασης είναι ότι οι πίνακες A και A^T έχουν και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Πρόταση 1.1.3

Έστω $A \in C^{nxn}$ και $\psi(\lambda) = (-1)^n x_n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$

Τότε $\alpha_0 = \det A$ και $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}Tr(A)$, όπου Tr(A) παριστάνει το ίχνος του πίνακα A, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων που βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο.

Πόρισμα 1.1.4

Έστω $A \in C^{nxn}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A. Τότε $\det A = \lambda_1\lambda_2 \ldots\lambda_n$.

Πόρισμα 1.1.5

Έστω $A \in C^{nxn}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A. Τότε $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

1.2 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

<u>Ορισμός 1.2.1</u>

Ένα διάνυσμα x_m ονομάζεται *γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου* m, που αντιστοιχεί στον πίνακα A και την ιδιοτιμή λ, αν

$(A-\lambda I_m)^m x_m=0$, αλλά $(A-\lambda I_m)^{m-1} x_m \neq 0$

<u>Παράδειγμα 1.2.1</u>

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,τότε το $x_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=2, αφού

$(A-2I)^3 x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ενώ $(A-2I_3)^2 \; x_3= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

<u>Ορισμός 1.2.2</u>

Έστω x_m ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου m που αντιστοιχεί στον πίνακα A και την ιδιοτιμή λ. Η *αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων* που δημιουργεί το x_m είναι ένα σύνολο διανυσμάτων

$\{x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1\}$ τα οποία προκύπτουν ως εξής:

$x_{m-1}=(A-\lambda l)x_m$

$x_{m-2}=(A-\lambda I)^2\, x_m=(A-\lambda I)x_{m-1}$

$\vdots$

$x_1=(A-\lambda I)^{m-j}x_m=(A-\lambda I)\,x_{j+1}$,

και γενικά : $x_j=(A-\lambda I)^{m-j}x_m=(A-\lambda I)x_{j+1}$, με j=1,2,…,m-1

Πρόταση 1.2.1

Το παραπάνω διάνυσμα x_j είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου j που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα 1.2.2

Το $x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3 για τον πίνακα A= $\begin{pmatrix}5&1&-2&4\\0&5&2&2\\0&0&5&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}$ και

το σύνολο

$\{x_3,x_2,x_1\}=\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

Είναι η αλυσίδα που παράγεται από το x_3

Θεώρημα 1.2.1

Μία αλυσίδα αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τα γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

<u>Θεώρημα 1.2.2</u>

Σε κάθε n x n ΄πίνακα Α αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα Α πολλαπλότητας μ, τότε ο Α θα έχει μ γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

<u>Ορισμός 1.2.3</u>

Ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων είναι μία *κανονική βάση* για έναν n x n πίνακα, αν το σύνολο αποτελείται εξ ολοκλήρου από αλυσίδες.

1.3 ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

<u>Ορισμός 1.3.1</u>

Ένας πίνακας $A \in C^{nxn}$ ονομάζεται *διαγωνιοποιήσιμος* αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in C^{nxn}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in R^{2x2}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αφού

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα δούμε πως διαγωνιοποιούμε έναν πίνακα $A \in C^{nxn}$ δηλαδή πως βρίσκουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $P \in C^{nxn}$ έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Πριν όμως θα διατυπώσουμε δυο πολύ χρήσιμες προτάσεις που θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε πως γίνεται αυτό.

<u>Πρόταση 1.3.1</u>

Ο πίνακας $A \in C^{nxn}$ διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν

(i) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του στον C και

(ii) για κάθε ιδιοτιμή λ, η αλγεβρική της πολλαπλότητα = γεωμετρική της πολλαπλότητα.

Προφανώς όταν βρισκόμαστε υπεράνω του C η (i) ισχύει πάντα, αλλά όταν βρισκόμαστε σε κάποιον υποχώρο του C, π.χ. τον R, πρέπει να το εξετάζουμε.
Για παράδειγμα ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ δεν διαγωνιοποιείται στον R γιατί $\psi(x) = x^2+1 \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Πρόταση 1.3.2

Ένας πίνακας $A \in C^{n x n}$ είναι *διαγωνιοποιήσιμος* αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του $C^{n \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

Χρησιμοποιώντας αυτή την βάση, ας υποθέσουμε $\langle v1, v2, \ldots, vn \rangle$ φτιάχνουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P = [v_1 \,|\, v_2 \,|\, \ldots \,|v_n]$. Θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν πώς γίνεται αυτό.

Παράδειγμα 1.3.1

Να εξετασθεί αν ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\in R^{2x2}$.

Αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in R^{2x2}$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι -2, 5 λύνοντας την εξίσωση $\psi(\lambda) = 0$ όπου $\psi(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Άρα οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι οι $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ και $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$.
Είναι φανερό ότι τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του R^{2x1} και άρα σύμφωνα με την *Πρόταση 1.3.2*, ο A διαγωνιοποιείται και μάλιστα έχουμε ότι:

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, όπου $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 1.3.2

Θεωρούμε τον πίνακα A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ του $M_3(R)$

Θα εξετάσουμε πρώτα αν διαγωνιοποιείται.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α είναι ψ(λ) = $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

Άρα οι ιδιοτιμές του Α είναι οι ακέραιοι 1 και 2 των οποίων η αλγεβρική πολλαπλότητα ως ρίζες του ψ(λ) είναι 2 και 1, αντίστοιχα.

Ο ιδιοχώρος V(1) αποτελείται από τα διανύσματα X = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

που είναι τέτοια ώστε AX = X. Αυτό είναι ισοδύναμο με a = -c και επομένως ο ιδιοχώρος V(1) αποτελείται από τα διανύσματα

$k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ με $k, l \in R$

Τα διανύσματα

$C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του V(1), άρα dimV(1) = 2.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι ο ιδιοχώρος V(2) παράγεται από το διάνυσμα $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα ο Α είναι διαγωνιοποιήσιμος, με

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, όπου $P = [C_1|C_2|C_3] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Παράδειγμα 1.3.3</u>

Στο παράδειγμα 1.1.3 είχαμε υπολογίσει τους ιδιοχώρους του πίνακα A = $\begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}$

Αφού η αλγεβρική πολλαπλότητα ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής, ο πίνακας Α διαγωνιοποιείται και μάλιστα:

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Αν ένας πίνακας διαγωνιοποιείται τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τις δυνάμεις αυτού του πίνακα αφού,

$$A^n = (PDP^{-1})^n, \text{ δηλαδή } A^n = PD^nP^{-1}$$

όπου D ένας διαγώνιος πίνακας.

Παράδειγμα 1.3.4

Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{2021} \in C^{4x4}$

όπου, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Αν υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, έχουμε ψ(λ) = (λ - 1)(λ + 1)(λ - i)(λ + i)

άρα έχει 4 διαφορετικές ιδιοτιμές, λ = 1, λ = -1, λ = i, λ = -i. , άρα ο A διαγωνιοποιείται από *Πρόταση 1.3.3* , δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος P, τέτοιος ώστε

$$A = PDP^{-1}, \text{ άρα } A^4 = (PDP^{-1})^4,$$

$$\text{δηλαδή } A^4 = PD^4P^{-1} = PI_4P^{-1} = I_4$$

αφού $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ άρα, $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}^4 = I_4$

Άρα, $A^{2021} = A^{4x505+1} = (I_4)^{505}A^1 = A$.

1.4 JORDAN KANONIKH ΜΟΡΦΗ

Γνωρίζουμε ότι δοθέντος ενός πίνακα $A \in R^{n\,x\,n}$, δεν είναι πάντα εφικτός ο μετασχηματισμός του σε έναν όμοιο και διαγώνιο πίνακα B. Ειδικότερα, αυτό συμβαίνει όταν κάποιες από τις ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. Σ'αυτές ακριβώς τις περιπτώσεις θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομαλός πίνακας $Q \in R^{n\,x\,n}$ τέτοιος ώστε

$$Q^{-1}AQ = J$$

Όπου ο πίνακας $J \in R^{n\,x\,n}$ θα ονομάζεται κανονική μορφή Jordan του πίνακα A.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι η Jordan κανονική μορφή αποτελεί γενίκευση της διαγώνιας κανονικής μορφής, και θα εφαρμόζεται κάθε φορά που ο πίνακας A έχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή της οποίας η πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη του 1.

Αρχικά δίνουμε εποπτικά πώς μοιάζει η Jordan μορφή ενός πίνακα και στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να την κατασκευάσουμε.

Η Jordan μορφή δοθέντος πίνακα A θα έχει τη μορφή:

$J:=\text{block diag}\,[J_1, J_2, \ldots, J_r] \in R^{n \times n}$ όπου,

$J_i:=\text{block diag}\,[J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{in}] \in R^{m_i \times m_i}$, i=1,2,…,r και

$$J_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda i \end{pmatrix} \in R^{m_{ij} \times m_{ij}}$$, όπου i=1,2,.., r και j=1,2,…, n

και λi , i=1,2,…,r είναι οι διακριτές ιδιοτιμές του A.

Θα χρειαστούμε σε αυτό το σημείο κάποιες συμπληρωματικές έννοιες που θα διευκολύνουν την κατασκευή του πίνακα Jordan.

Έστω $A \in R^{n \times n}$ και έστω $\mu_i(s)$ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των υποοριζουσών τάξης i=1,2,…,n του χαρακτηριστικού πίνακα sI_n-A του A. Τα *αναλλοίωτα πολυώνυμα* $\psi_1(s),\psi_2(s),\ldots,\psi_n(s)$ ορίζονται από τη σχέση

$\psi_i(s) :=\frac{\mu_i(s)}{\mu_{i-1(s)}}$, i=1,2,…,n και $\mu_0(s):=1$

Κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο παραγοντοποιείται σε γινόμενο *στοιχειωδών διαιρετών* της μορφής $(s - \lambda i)^{m_{ij}}$, i=1,2,…, r και j=1,2,…, n

Για παράδειγμα, $\psi_1(s) = (s-\lambda_1)^{m_{11}}\ (s-\lambda_2)^{m_{21}} \ldots\ (s-\lambda_r)^{m_{r1}}$ και ανάλογα για τα $\psi_2(s),\ldots,\psi_n(s)$
όπου τα $\lambda_i \in C$ είναι οι r διακριτές ιδιοτιμές του A και $0\le m_{i1} \le m_{i2} \le \ldots \le m_{in}$ είναι οι μερικές πολλαπλότητες της ιδιοτιμής λ_i σε κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο $\psi_j(s)$.

Τώρα, για κάθε ιδιοτιμή λ_i και για κάθε στοιχειώδη διαιρέτη $(s-\lambda_i)^{m_{ij}}$ του $\psi_j(s)$ ορίζουμε τα μερικά Jordan blocks J_{ij} διαστάσεων $m_{ij} \times m_{ij}$ ως εξής :

$$J_{ij}=\begin{pmatrix} \lambda i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda i \end{pmatrix} \in R^{m_{ij} \times m_{ij}}, \text{ όπου } i=1,2,.., r \text{ και } j=1,2,\dots, n$$

Αν $m_i := m_{i1}+m_{i2}+\dots+m_{in}$, $i=1,2,\dots,r$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, τότε ορίζουμε το Jordan block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i από την σχέση :

$J_i :=\text{block diag}\,[\, J_{i1},J_{i2},\dots,J_{in}] \in R^{m_i \times m_i}$, $i=1,2,\dots,r$, όπου $m_1+m_2+\dots+m_r = n$

Τελικά, η κανονική Jordan μορφή J του πίνακα A θα είναι ο πίνακας

$$J :=\text{block diag}[\, J_1, J_2,\dots, J_r] \in R^{n \times n}$$

__Παρατηρήσεις__

1) Θα μπορούσαμε να αντιστοιχήσουμε σε έναν στοιχειώδη διαιρέτη $(s-\lambda_i)^{m_{ij}}$ και τον πίνακα

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda i & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda i \end{pmatrix}$$

Προς διάκριση των δύο περιπτώσεων καλούμε την πρώτη περίπτωση «άνω Jordan block», ενώ την δεύτερη περίπτωση, δηλαδή τον παραπάνω πίνακα, «κάτω Jordan block».

2) Η μορφή του κάθε Jordan block στην Jordan κανονική μορφή ενός πίνακα A καθορίζεται πλήρως από τη μορφή του αντίστοιχου στοιχειώδη διαιρέτη του A. Έτσι, η Jordan κανονική μορφή του A είναι μοναδική εφ'όσον βέβαια δεν ληφθεί υπ'όψιν η σειρά διάταξης των Jordan blocks.

__Πόρισμα 1.4.1__

Ένας πίνακας A διαστάσεων n x n είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνον αν οι στοιχειώδεις διαιρέτες του είναι όλοι πρωτοβάθμιοι.

Η Jordan κανονική μορφή ενός πίνακα συνδέεται άμεσα με μια καινούρια έννοια, το ελάχιστο πολυώνυμο, για το οποίο έχουμε ότι :

Ορισμός 1.4.1

Η μέγιστη πολλαπλότητα m_{in} της ιδιοτιμής λ_i, i=1,2,…, r στο αναλλοίωτο πολυώνυμο

$\psi_n(s)= (s-\lambda_1)^{m_{1n}}\ (s-\lambda_2)^{m_{2n}}\dots\ (s-\lambda_r)^{m_{rn}}$ ή η μέγιστη διάσταση m_{in} των Jordan blocks κάθε ιδιοτιμής λ_i, ονομάζεται *δείκτης της ιδιοτιμής λ_i στον A.* Το αναλλοίωτο πολυώνυμο $\psi_n(s)= (s-\lambda_1)^{m_{1n}}\ (s-\lambda_2)^{m_{2n}}\dots\ (s-\lambda_r)^{m_{rn}}$ ονομάζεται *ελάχιστο πολυώνυμο του A.*

Παρατήρηση

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η γνώση της Jordan κανονικής μορφής οδηγεί άμεσα στην εύρεση του ελάχιστου πολυωνύμου. Όμως, η διαπίστωση αυτή δεν είναι πρακτικά αξιοποιήσιμη, διότι η εύρεση της Jordan μορφής είναι δυσκολότερη απ'ότι ο απευθείας υπολογισμός του ελαχίστου πολυωνύμου.

Αντίστροφα, αν είναι γνωστό το ελάχιστο πολυώνυμο, τότε δεν είναι εν γένει δυνατό να καθορισθεί η Jordan κανονική μορφή, μπορεί ωστόσο να καθορισθεί ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών Jordan κανονικών μορφών.

Παράδειγμα 1.4.1 (Για την τελευταία παρατήρηση)

Έστω Α ένας 7 x 7 πίνακας με ελάχιστο πολυώνυμο

$\psi(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^2$

Ο εκθέτης '3' δηλώνει ότι στην Jordan μορφή του Α, το μεγαλύτερο Jordan block για την ιδιοτιμή 2 είναι μορφής 3 x 3, ενώ ο εκθέτης '2' δηλώνει ότι το μεγαλύτερο μπλοκ της ιδιοτιμής 4 είναι της μορφής 2 x 2. Επειδή η διάσταση του Α είναι 7 x 7 , εκτός από τα 2 μπλοκς που αναφέρθηκαν, θα πρέπει ακόμα να υπάρχει είτε ένα 2 x 2 μπλοκ είτε 2 μπλοκς 1 x 1, τα οποία θα αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε από τις 2 ιδιοτιμές. Άρα, συνολικά, οι δυνατές Jordan μορφές για τον πίνακα Α είναι οι παρακάτω :

Diag $\{J_3(2),J_2(2),J_2(4)\}$,

Diag $\{J_3(2),J_1(2),J_1(2),J_2(4)\}$,

Diag $\{J_3(2),J_1(2),J_2(4),J_1(4)\}$,

Diag $\{J_3(2),J_2(4),J_2(4)\}$,

Diag $\{J_3(2),J_2(4),J_1(4),J_1(4)\}$

Παράδειγμα 1.4.2 (Υπολογισμός Jordan μορφής)

Έστω A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, οπότε B= λI – A = $\begin{pmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & \lambda+1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε την μοναδική υποορίζουσα τάης 4 του B, δηλαδή την detB= …= $(\lambda-3)^3(\lambda+2)$

Οπότε $\mu_4(\lambda) = (\lambda-3)^3(\lambda+2)$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε όλες τις υποορίζουσες τάξης 3 του B και έπειτα τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, ώστε να βρούμε το $\mu_3(\lambda)$. Αφού υπολογίσουμε και τις 16, συνολικά, υποορίζουσες τάξης 3 ,προκύπτει τελικά ότι $\mu_3(\lambda)=\lambda-3$

Συνεχίζουμε τώρα με τις 2ης τάξης υποορίζουσες. Παρατηρούμε ωστόσο ότι στον πίνακα B περιέχεται υποπίνακας του οποίου η ορίζουσα είναι ανεξάρτητη του λ, οπότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 2-οριζουσών θα είναι ίσος με 1. Άρα $\mu_2(\lambda)=1$.

Τέλος, ομοίως ο μκδ των υποοριζουσών πρώτης τάξης θα είνια μονάδα. Δηλαδή $\mu_1(\lambda)=1$, και εξ ορισμού $\mu_0(\lambda)=1$.

Οπότε είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα $\psi_i(\lambda) :=\frac{\mu_i(\lambda)}{\mu_{i-1(\lambda)}}$, i=1,2,…,n

Έτσι, έχουμε ότι : $\psi_4(\lambda)= (\lambda-3)^2(\lambda+2)$,

$\psi_3(\lambda)=(\lambda-3)$,

$\psi_2(\lambda)=1$,

$\psi_1(\lambda)=1$

Από το αναλλοίωτο πολυώνυμο $\psi_4(\lambda)$ προκύπτουν οι στοιχειώδεις διαιρέτες $(\lambda-3)^2$ και (λ+2) και από το $\psi_3(\lambda)$ ο διαιρέτης (λ-3). Άρα η ζητούμενη Jordan μορφή έχει τα blocks $J_2(3)$, $J_1(-2)$ και $J_1(3)$, οπότε :

$$J=\text{diag}\{J_2(3),J_1(3),J_1(-2)\} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.5 *ΜΙΑ ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΗ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ*

Παρ’όλο που οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ανήκουν στα βασικά εργαλεία του κλάδου της Γραμμικής Άλγεβρας, η έρευνα τριών θεωρητικών φυσικών το 2019 πάνω στη συμπεριφορά σωματιδίων που ονομάζονται νετρίνα, τους οδήγησε στην ανακάλυψη μιας σχετικά απλής ταυτότητας που συνδέει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός *ερμητιανού* πίνακα Α.

Ερμητιανός ονομάζεται ο πίνακας με μιγαδικά στοιχεία, ο οποίος ισούται με τον ανάστροφο του συζυγούς του.

Παραθέτουμε στη συνέχεια το σχετικό θεώρημα,για το οποίο ήδη έχουν βρεθεί διάφορες αποδείξεις.

Theorem 1 (Eigenvector-eigenvalue identity) Let A be an $n \times n$ Hermitian matrix, with eigenvalues $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$. Let v_i be a unit eigenvector corresponding to the eigenvalue $\lambda_i(A)$, and let $v_{i,j}$ be the j^{th} component of v_i. Then

$$|v_{i,j}|^2 \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

where M_j is the $n-1 \times n-1$ Hermitian matrix formed by deleting the j^{th} row and column from A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των εξής πινάκων:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,
   $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,
   $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

2. Έστω A ένας n x n πίνακας και λ μία ιδιοτιμή του πίνακα 3A.

   Να αποδείξετε ότι το $\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $3A^2 - A + 2\,I_n$

3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{pmatrix}$

   Αν detA = 8 και μία ιδιοτιμή του A είναι το $\lambda_1=2$, να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του.

4. Να βρείτε τις αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών του πίνακα
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Να εξετάσετε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

6. Να γράψετε τον A^4ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, A, A^2 όπου

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(*Υπόδειξη:* ***Θεώρημα Cayley-Hamilton*** *Έστω ο πίνακας* $A \in C^{n\,x\,n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $\psi(x) = (-1^n)\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$
Τότε $\psi(A) = \boldsymbol{0}$*, δηλαδή ο γραμμικός συνδυασμός* $(-1^n)\, A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I_n$ *είναι ο μηδενικός πίνακας.)*

7. Να βρείτε τις πιθανές μορφές του πίνακα Jordan που μπορεί να έχει ο πίνακας $A \in C^{5\,x\,5}$ όταν $\psi(x) = (x-3)^2(x+1)^3$

8. Να προσδιοριστεί η κανονική μορφή Jordan των παρακάτω πινάκων :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Να υπολογιστεί ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3 για τον παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Κατασκευάστε μια αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων για την ιδιοτιμή λ_1=2 αν γνωρίζετε ότι το ιδιοδιάνυσμα (1 1 1 0) είναι τύπου 3 και

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Βαρδουλάκης Α.Ι., 2013, Εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία σημάτων,συστημάτων και ελέγχου, ΤΟΜΟΣ Β' : Μοντέρνα θεωρία ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλας.*
- *Πουλάκης Δ, 2015, Άλγεβρα, Εκδόσεις Ζήτη.*
- *Βάρσος Δ., Δεριζιώτης Δ., Εμμανουήλ Ι., Μαλιάκας Μ., Μελάς Α., Ταλέλλη Ο., 2012, Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις σοφία*
- *Χαραλάμπους Χ., Φωτιάδης Α., 2015, ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ για τις θετικές επιστήμες*
- *Τσακλίδης Γ., Βασιλείου Π.-Χ., 2001, ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ, Εκδόσεις Ζήτη*
- *Χαραλάμπους Χ., Βαβατσούλας Χ., Θεοχάρη-Αποστολίδη Θ., 2017, ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ, Εκδόσεις Τζιόλα*
- *Διαφάνειες του μαθήματος στο e-learning για τη Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου,2020, Καραμπετάκης Νικόλαος*
- *Panos J. Antsaklis, Anthony N. Michel, 1997, Linear Systems*
- *Quantamagazine, 2019, Wolchover Natalie, Neutrinos Leads to Unexpected Discovery in Basic Maths*
- *arXiv, 2019, Peter B. Denton, Stephen J. Parke, Terence Tao, Xining Zhang, Eigenvectors from eigenvalues*