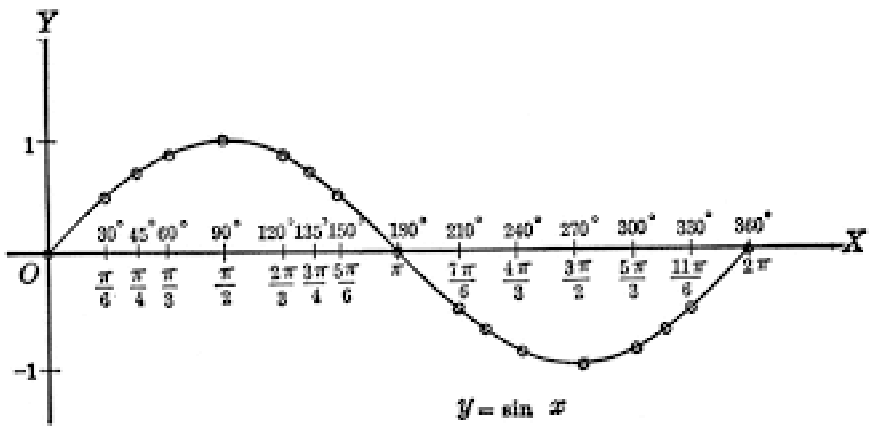
Τα οριακά σημεία της ακολουθίας sin(n)

Ζυγογιάννης Κωνσταντίνος
Παπαγεωργίου Βασίλειος

10 Ιανουαρίου 2016



Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία 1,2,3,... απεικονίζονται πάνω στον άξονα y της γραφικής παράστασης y=sin(x) (Βλέπε σχήμα 1). Τότε, είναι προφανές ότι κανένα υποδιάστημα του [-1,1] δεν θα διαφεύγει από αυτά τα στοιχεία.Ή, ακριβέστερα, κάθε σημείο στο διάστημα [-1,1] είναι οριακό σημείο της ακολουθίας {sin(n)}.

Αυτή η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, είναι ένα μέλος μιας οικογένειας ανάλογων προτάσεων. Και όπως ισχύει συνήθως με τέτοιες οικογένειες, ένα μέλος είναι πιο εύκολο να αποδειχθεί από ότι τα υπόλοιπα. Το σχέδιό μας εδώ είναι πρώτα να αποδείξουμε αυτήν την ¨εύκολη’ πρόταση και μετά να δείξουμε πώς το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί. Εισάγουμε τον εξής συμβολισμό :
(x)=x-[x],όπου [x] είναι το ακέραιο μέρος του x. (Προφανώς:$0\leq (x)<1$) Πρόκειται να δείξουμε ότι κάθε σημείο του [0,1] είναι οριακό σημείο για την ακολουθία (na),με την προϋπόθεση ότι τοα είναι άρρητος. Όμως αρχικά, θα πρέπει να ξέρουμε ορισμένες ιδιότητες της συνάρτησης (x) , οι οποίες προκύπτουν ως συνέπειες του επόμενου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1
(x+y) = (x)+(y), αν (x) + (y)<1
(x+y) = (x)+(y)-1, αν (x)+(y) $\geqslant$1

Απόδειξη:

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του (x) ότι
$0 \leq (x) + (y) < 2$
Υποθέτουμε αρχικά ότι

$$0 \leq (x) + (y) < 1$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$-x - y \leq -[x] - [y] < 1 - x - y$$

$$x + y - 1 < [x] + [y] \leq x + y \qquad (1)$$

Θέτουμε x+y=z. Προφανώς ισχύει z-1 <[z]≤ z ,άρα x+y-1 < [x+y]≤ x+y (2)
Έπεται από (1),(2) ότι [x] + [y] = [x+y].
Επεξήγηση: Στο διάστημα (x+y-1 , x+ y], υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος αριθμός. (Αν x+y-1 $\in Z$ τότε x+y $\in Z$ και αυτός ο ακέραιος είναι ο x+y)

Όμως οι [x]+[y], [x+y] είναι και οι δύο ακέραιοι σε αυτό το διάστημα, άρα θα είναι ίσοι.

Επομένως

$$(x + y) = x + y - [x + y] = x - [x] + y - [y] = (x) + (y)$$

Ανάλογα, υποθέτουμε πως:

$$1 \leq (x) + (y) < 2$$

$$1 \leq x - [x] + y - [y] < 2$$

$$1 - x - y \leq -[x] - [y] < 2 - x - y$$

$$x + y - 2 < [x] + [y] \leq x + y - 1$$

$$x + y - 1 < [x] + [y] + 1 \leq x + y \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) με όμοιο τρόπο μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι:

$$[x + y] = [x] + [y] + 1$$

$$x + y - (x + y) = x - (x) + y - (y) + 1$$

$$(x + y) = (x) + (y) - 1$$

Έτσι λοπόν καταλήγουμε στην αρχική υπόθεση. Οπότε το θεώρημα 1 αποδείχθηκε.

Ιδιότητα 1

Για κάθε x που δεν είναι ακέραιος, (-x) = 1 - (x)

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας το y με -x, από το θεώρημα 1 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
1η περίπτωση:(x +{-x}) = (x) + (-x) τότε (0) = (x) + (-x) δηλαδή
(x) + (-x) = 0, άτοπο αφού (x)>0 και (-x)>0, (επειδή x δεν είναι ακέραιος)
2η περίπτωση: (x + {-x}) = (x) + (-x) -1 τότε (x) + (-x) = 1.
Οπότε υποχρεωτικά θα ισχύει (x) + (-x) =1, άρα (-x) = 1 - (x)

Ιδιότητα 2

Αν (z)>(x), τότε (z-x) = (z) - (x)

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας το y με (z-x), έχουμε :

$$(z) = (x) + (z - x) + \{0, -1\}.$$

Έστω ότι ισχύει (z)=(z-x) +(x) - 1 οπότε (z)-(x)=(z-x)-1, άτοπο, αφού (z-x) - 1 <0 (επειδή (a)<1 για κάθε a $\in R$) άρα και (z)-(x)<0 οπότε (z)<(x), που αντιβαίνει στην υπόθεση.
Οπότε υποχρεωτικά θα ισχύει η σχέση: (z) -(x)=(z-x).

Ιδιότητα 3

Αν n(x) < 1, όπου n είναι φυσικός αριθμός, τότε (nx)=n(x)

Απόδειξη

Με επαγωγή στο n . Για n=1 : (x)=(x), , που ισχύει.

Έστω ότι η σχέση ισχύει για n=k , οπότε (kx)=k(x) (1). Θα αποδείξω ότι ισχύει για n=k+1 , δηλαδή ({ k+1}x) = (k+1)(x)
Αρχικά, έχουμε ότι (kx)+(x) = k(x) +(x)= (k+1)(x)< 1 (2)
αφού k+1 $\in N$ και από υπόθεση n(x)< 1 για κάθε n$\in N$
Οπότε έχουμε: ({k+1}x)=(kx+x).
Απο θεώρημα 1 και σχέση (2): (kx+x)=(kx) + (x) = k(x) + (x) = (k+1)(x), δηλαδή τελικά ({k+1}x)=(k+1)(x) που είναι η ζητούμενη.
Άρα (nx)=n(x) για κάθε n $\in N$, αν n(x) < 1.

Λήμμα. Δοθέντος ε>0 και αρρήτου αριθμός α, υπάρχει φυσικός αριθμός n όπου (na)< ε.

Απόδειξη.
Για το δοσμένο ε > 0 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι 0< ε <1, γιατί διαφορετικά αν ε > 1 , τότε (na)<1 $\leq$ ε για κάθε n$\in N$ και α άρρητο, οπότε προκύπτει το

ζητούμενο.
(Θα υποθέσουμε ότι ε< 1).

Επιλέγουμε N όπου N>$\frac{1}{e}$>1, και θεωρούμε το σύνολο

$$R = \{(a), (2a), (3a), \ldots, (Na)\}.$$

Θέτοντας b=maxR, βλέπουμε οτι το R χωρίζει το [0,b],σε N υποδιαστήματα.Ακόμη, βλέπουμε ότι το μικρότερο από τα υποδιαστήματα δεν μπορεί να έχει μήκος μεγαλύτερο από $\frac{b}{N}$, αφου σε αυτήν την περίπτωση όλα τα υποδιαστήματα θα έχουν μήκος μεγαλύτερο απο $\frac{b}{N}$,και συνεπώς το συνολικό μήκος του διαστήματος θα είναι μεγαλύτερο από N$\frac{b}{N}$=b. άτοπο.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν διαφορετικοί μη αρνητικοί ακέραιοι k και j όπου

$$0<(ka) - (ja) \leq \frac{b}{N}<\frac{1}{N}<e.$$

(προφανώς b< 1, αφού b=maxR < 1)

(Αν το μικρότερο υποδιάστημα είναι το αριστερό άκρο,δηλαδή το [0,(a)], τότε παίρνουμε k=1 και j=0).Προκύπτει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 2,αφού (ka) - (ja) > 0 τότε (ka)> (ja), έπεται ότι, (ka) - (ja) = ({k-j}a) και άρα, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι:

$$0<(\{k-j\}a)<e$$

Αφού k ≠ j, θα ισχύει είτε k>j είτε k< j.
Αν k> j τότε k - j > 0, και επιλέγοντας n = k-j προκύπτει το ζητούμενο.
Αν k< j , σε αυτή την περίπτωση θέτουμε –m=k-j και ισχυριζόμαστε το εξής:

Εφόσον, (-ma)< ε, γράφουμε –ma=[-ma]+(-ma), έτσι:

-ma =αρνητικός ακέραιος + ε*,

όπου 0 < ε* < ε < 1. Έπειτα, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το p , όπου p είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός ώστε p ε* < 1 . Προκύπτει λοιπόν,

-pma = αρνητικός ακέραιος +pε*

Έτσι,(-pma) = pε*. Επίσης, λόγω της επιλογής του p , είμαστε βέβαιοι ότι 0<1 -pε*<ε. Αυτό προκύπτει από τις δυό εξής σχέσεις:
Επειδή (p+1)ε* > 1 έχουμε p ε*+ε* >1 οπότε 1- pε* <ε* (1)
Επίσης, pε* < 1 τότε 1- pε*> 0 (2)

Επομένως,

0 < 1 - (-pma) <ε* < ε.

Τελικά, από την ιδιότητα 1, εφόσον -pm ακέραιος και a άρρητος, ο αριθμός -pma δεν είναι ακέραιος, οπότε 1-(-pma) = (pma). Προκύπτει ότι:

0 < (pma) < ε.

Επιλέγοντας n=pm καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Θεώρημα 2.

Έστω ότι ο α είναι άρρητος. Αν το u είναι μέσα στο [0,1], τότε το u είναι ένα οριακό σημείο της ακολουθίας {(na)}.

Απόδειξη.

Αν u = 0 από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι για κάθε ε> 0 υπάρχει n έτσι ώστε (na)< ε, δηλαδή |(na) - 0|< ε, άρα το u=0 οριακό σημείο της ακολουθίας. Παίρνουμε το u μέσα στο (0,1] και αμέσως εφαρμόζουμε το λήμμα: Δηλαδή για ε>0, αλλά μικρότερο του u επιλέγουμε ένα k$\in N$ ώστε (ka)<ε . Έπειτα παίρνουμε j$\in N$ για τον οποίο:

$$j(ka) \leq u < j(ka) + (ka)$$

Στη συνέχεια αφαιρώντας το j(ka) από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$0 \leq \text{u- j(ka)} < \text{(ka)} < \varepsilon$$

Εφόσον u$\leq$ 1, από αυτές τις ανισότητες συνεπάγεται ότι j(ka)$\leq$1 , γιατί αν ήταν j(ka)>1 τότε θα είχαμε u - j(ka) < 0 κάτι που προφανώς δεν ισχύει. Ακόμη έχουμε ότι j(ka)$\neq$ 1 αφού ka είναι άρρητος, ως γινόμενο ακεραίου επί αρρήτου, οπότε και (ka) είναι άρρητος, δηλαδή ο αριθμός j(ka) είναι άρρητος, οπότε διαφορετικός του 1.

Έτσι η ιδιότητα 3 είναι εφαρμόσιμη και μπορούμε να γράψουμε ότι: j(ka) = (jka) και άρα προκύπτει ότι

$$0 \leq \text{u - (jka)} < \varepsilon$$

οπότε |(jka) - u| < ε, όπου τελικά προκύπτει το ζητούμενο n=jk .

Παράδειγμα. Κάθε σημείο στο διάστημα [-1,1] είναι οριακό σημείο για την ακολουθία {sin(n)}

Απόδειξη. Έστω ότι b που ανήκει στο [-1,1]. Επιλέγουμε c από [0,2π] ώστε sin(c)=b.

(Η ύπαρξη ενός τουλάχιστον τέτοιου c προκύπτει από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την συνεχή f(x) = sin(x) στο [0,2π]).

Τότε, για ε>0 επιλέγουμε δ>0 έτσι ώστε

$$|\ \sin(\text{x-b})\ | < \varepsilon \text{ για } |\ \text{x -c}\ | < \delta$$

(Το δ αυτό υπάρχει για κάθε ε > 0 , αφού η f(x) = sin(x) είναι συνεχής στο c $\in [0, 2\pi]$).

Τώρα χρησιμοποιούμε το θεώρημα 2, παίρνοντας α =$\frac{1}{2\pi}$ και u = $\frac{c}{2\pi}$,άρα υπάρχει n$\in N$ έτσι ώστε

$$0\leq \frac{c}{2\pi} - \frac{n}{2\pi} < \frac{\delta}{2\pi} \text{ (θεωρούμε ε} = \frac{\delta}{2\pi}\text{).}$$

Οπότε $0\leq$ c - 2π($\frac{n}{2\pi}$)<δ,όπου -δ <0≤ c -2π $\frac{n}{2\pi}$ < δ
άρα | 2π $\frac{n}{2\pi}$ - c | < δ.Άρα για x = 2π($\frac{n}{2\pi}$) έπεται ότι

$$|\sin\{2\pi(\frac{n}{2\pi})\}\text{-b}|<\varepsilon$$

Όμως από την σχέση (m)=m - [m], για m = $\frac{n}{2\pi}$, προκύπτει

$$(\frac{n}{2\pi}) = \frac{n}{2\pi} - [\frac{n}{2\pi}] = \frac{n}{2\pi} - k$$

για κάποιο k$\in Z$
Άρα, τελικά

$$sin\{2\pi(\frac{n}{2\pi})\} = sin\{2\pi\frac{n}{2\pi}2k\pi\} = sin\{n-2k\pi\} = -sin\{2k\pi-n\} = -sin\{-n\} = sin\{n\}$$

Έτσι, έχουμε | sin n-b|< ε που είναι το ζητούμενο.