

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(Научно-исследовательский университет)

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.5

Изучение колебаний струны

Выполнил студент группы Б03-501
Середин Николай

г. Долгопрудный
2025

1. Введение

Цель работы: изучить поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне; измерить собственные частоты колебаний струны и проверить условие образования стоячих волн; измерить скорость распространения поперечных волн на струне и исследовать её зависимость от натяжения струны.

В работе используются: закрепленная на станине стальная струна, набор грузов, электромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотометр.

2. Теоретические сведения

2.1. Волновое уравнение

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение $T \gg mg$, и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y(x)$, определяющей её вертикальное смещение в точке x в момент времени t . Угол наклона касательной к струне в точке x относительно горизонтального направления обозначим как $\alpha = \arctg \frac{\partial y}{\partial x}$.

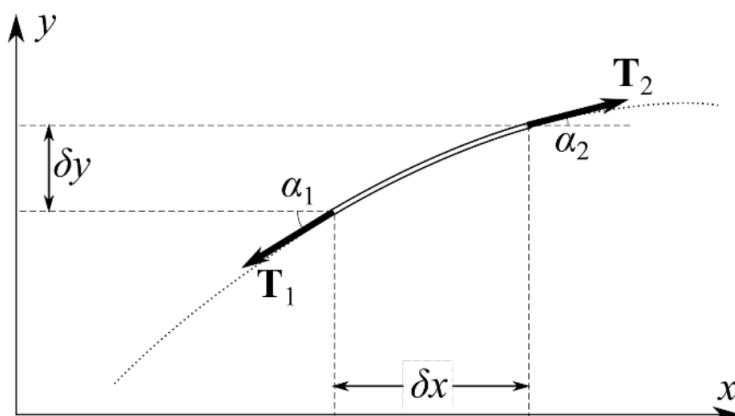


Рис. 1: К выводу волнового уравнения

Второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2$$

Основываясь на предположении, что отклонения струны от положения равновесия малы, можем сделать ряд упрощений:

- Длина участка струны в смещенном состоянии практически равна длине участка в положении равновесия¹, поэтому добавочным напряжением вследствие

¹Нетрудно убедиться, что поправка к длине элемента имеет второй (квадратичный) порядок малости по углу α $\delta l = \sqrt{\delta y^2 + \delta x^2} = \delta x \sqrt{1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}} = \delta x \sqrt{1 + \tan^2 x} \approx \delta x (1 + \frac{1}{2} \alpha^2)$

удлинения струны при деформации можно пренебречь. Следовательно, силы T_1 и T_2 по модулю равны силе натяжения струны: $T_1 \approx T_2 \approx T$.

2. Углы наклона α малы, поэтому $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$, и, следовательно, $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

$$\rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2}{\delta x} \approx T \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\delta x} \rightarrow T \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T \frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Получим волновое уравнение, введя величину u соразмерную скорости.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

2.2. Бегущие волны

Покажем, что введённая выше величина u есть скорость распространения волны на струне. Рассмотрим произвольную функцию вида $f = f(x - ut)$. Подставляя её в волновое уравнение, убеждаемся, что она является его решением при любом f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = -u \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \quad \xi = x - ut \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot 1 \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, наша функция $f = f(x - ut)$ описывает возмущение струны произвольной формы, которое смещается поступательно со скоростью u вдоль оси x не меняя своей формы, т.к. $\xi = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = u$.

Как показывается в математических курсах, общее решение дифференциального уравнения в частных производных представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$.

$$y(x, t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut)$$

В случае гармонических волн ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число):

$$y(x, t) = a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx), \quad u = \frac{\omega}{k} = \nu \lambda$$

Заметим, для малых амплитуд колебаний скорость u распространения поперечных волн на струне зависит только от силы натяжения струны T и её погонной плотности ρ_l , не зависит от модуля Юнга струны (струна считается нерастяжимой) и внешних параметров, таких как амплитуда или частота возбуждающей силы.

2.3. Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с закрепленными концами. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = L$. Концы струны не колеблются, поэтому $y(0, t) = 0$ и $y(L, t) = 0$.

$$y(0, t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow y(x, t) = 2a\sin(kx)\sin(\omega t)$$

$\sin(kx) = 0, \sin(kx) = 1$ - узлы и пучности соответственно. $y(L, t)$ - узел, значит, $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

ν_n - собственные частоты, гармоники струны.

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии. Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса — вынуждающая частота должна совпадать с одной из собственных частот струны. Когда потери энергии в точности компенсируются энергией, поступающей от вибратора, колебания струны становятся стационарными и на ней можно наблюдать стоячие волны

3. Экспериментальная установка

Схема установки приведена на рис. 2. Стальная гитарная струна 1 закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками 2 и 3, расположеннымными на массивной станине 4. Один конец струны закреплен в зажиме 2 неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплена платформа с грузами 5, создающими натяжение струны. Зажим 3 можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик 6 подключен к звуковому генератору 7. Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнала с которого передается на вход осциллографа 9. Разъемы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

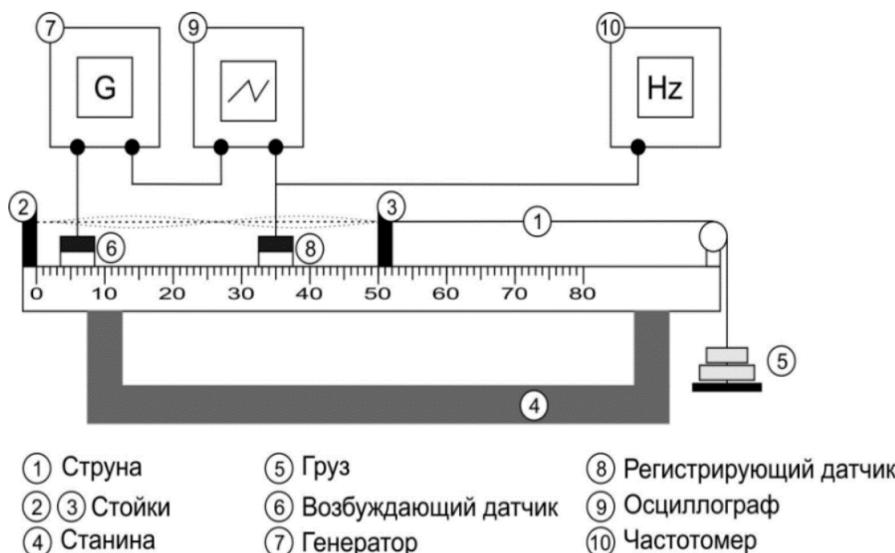


Рис. 2: Экспериментальная установка

Для регистрации колебаний струны в работе используется электронный осциллограф, соединённый с электромагнитным датчиком 8.

4. Ход работы

- Для разных значений силы натяжения T , т.е с разными массами грузиков, измерим 9 собственных частот струны. Для этого на осциллограф в режиме развертки выведем сигналы генератора и колебаний струны. В момент их относительной остановки и сильного увеличения амплитуды колебаний струны наблюдаем явления резонанса и записываем соответствующее значение собственной частоты. Для большей наглядности расположим датчик приблизительно в пучности (посередине для четных ν_n , и в $x_k = \frac{2k-1}{2n}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$). Значение первой гармоники оценим по измеренным заранее погонной плотности ρ_l , и массе грузиков m , используя формулу 1, где $T = mg$. Таким образом получим примерные значения ν_n , далее изменяя частоту генератора ищем положения резонанса возле расчетанных ранее значений.
- Построим график $\nu_n(n)$. По коэффициентам наклона посчитаем $u(T)$ и построим график $u^2(T)$. По коэффициенту наклона найдем ρ_l

$$\frac{\nu_n}{n} = \frac{u}{2L}$$

$$u^2 = \frac{T}{\rho_l}$$

- Переключим осциллограф в режим (X-Y) и установим частоту генератора $\nu = \nu_1/2$. Получим фигуру Лиссажу. Система имеет высокую гармонику, т.е. теряет небольшое количество энергии и имеет резкий резонанс. Это значит, что кратные субгармоники будут постоянно добавлять одинаковую энергию системе за период, в то время как другие частоты в среднем не будут раскачивать струну. Малые потери энергии и кратные частоты субгармоники раскачивают струну до частоты ν_1 . Очевидно, кратные частоты образуют фигуры Лиссажу на экране осциллографа.

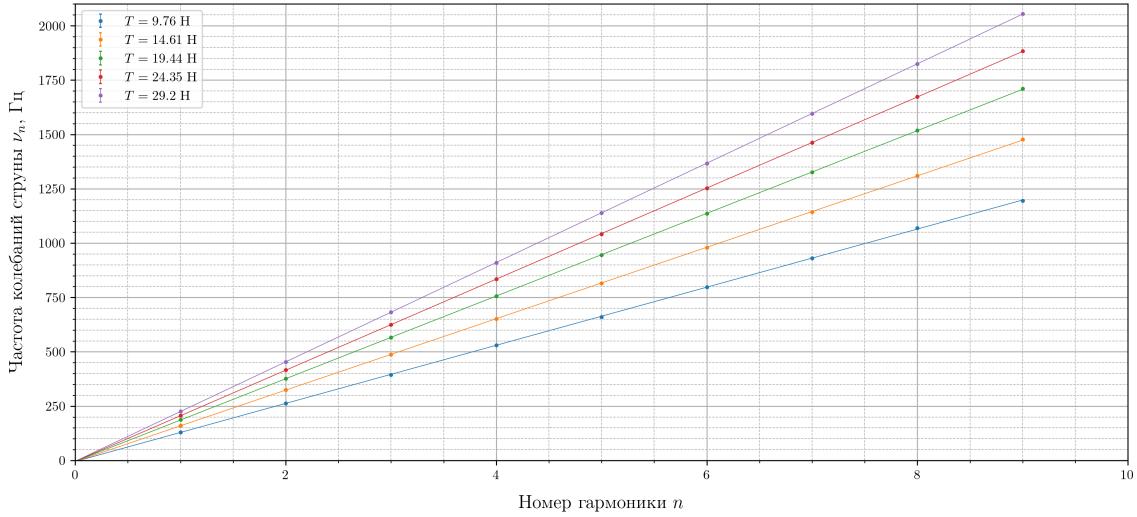
5. Результаты измерений

$n \backslash T, H$	9.76	14.61	19.44	24.35	29.2
1	130.1	161.2	187.7	207.2	226.4
2	263	325	377	416	454
3	395	488	566	625	682
4	530	651	756	834	910
5	661	815	945	1042	1139
6	798	979	1136	1252	1367
7	931	1144	1326	1462	1596
8	1070	1310	1518	1673	1825
9	1195	1477	1710	1884	2055

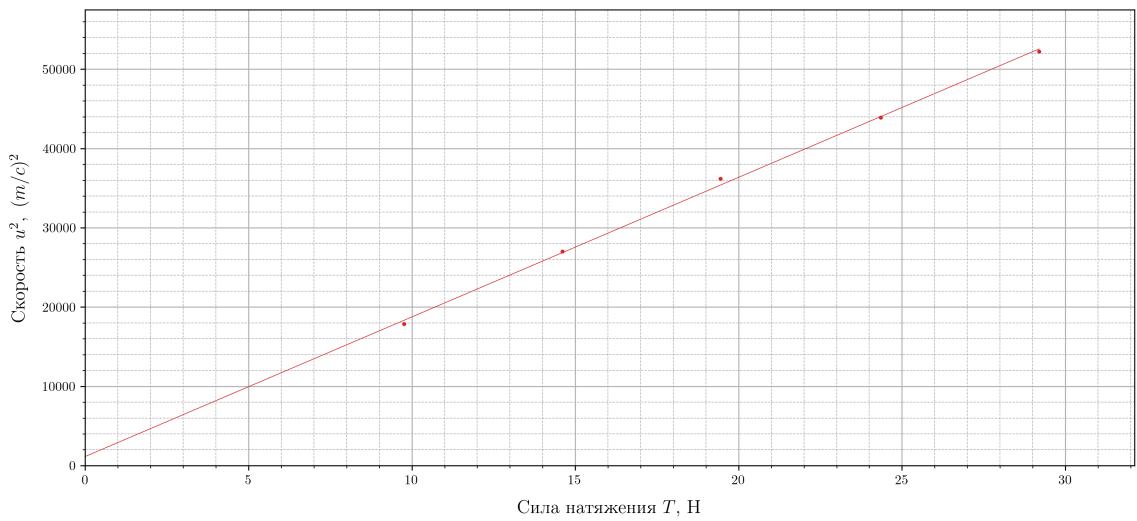
Таблица 1: Зависимость частоты гармоник от T

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.4.5

Зависимость частоты от номера гармоники



Зависимость квадрата скорости от силы натяжения



Экспериментальные данные $\rho_l = (5.68 \pm 0.10) \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

Параметры установки $\rho_l^* = (5.660 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

$$\varepsilon = \frac{\rho_l - \rho_l^*}{\rho_l^*} \approx 0.4\%$$

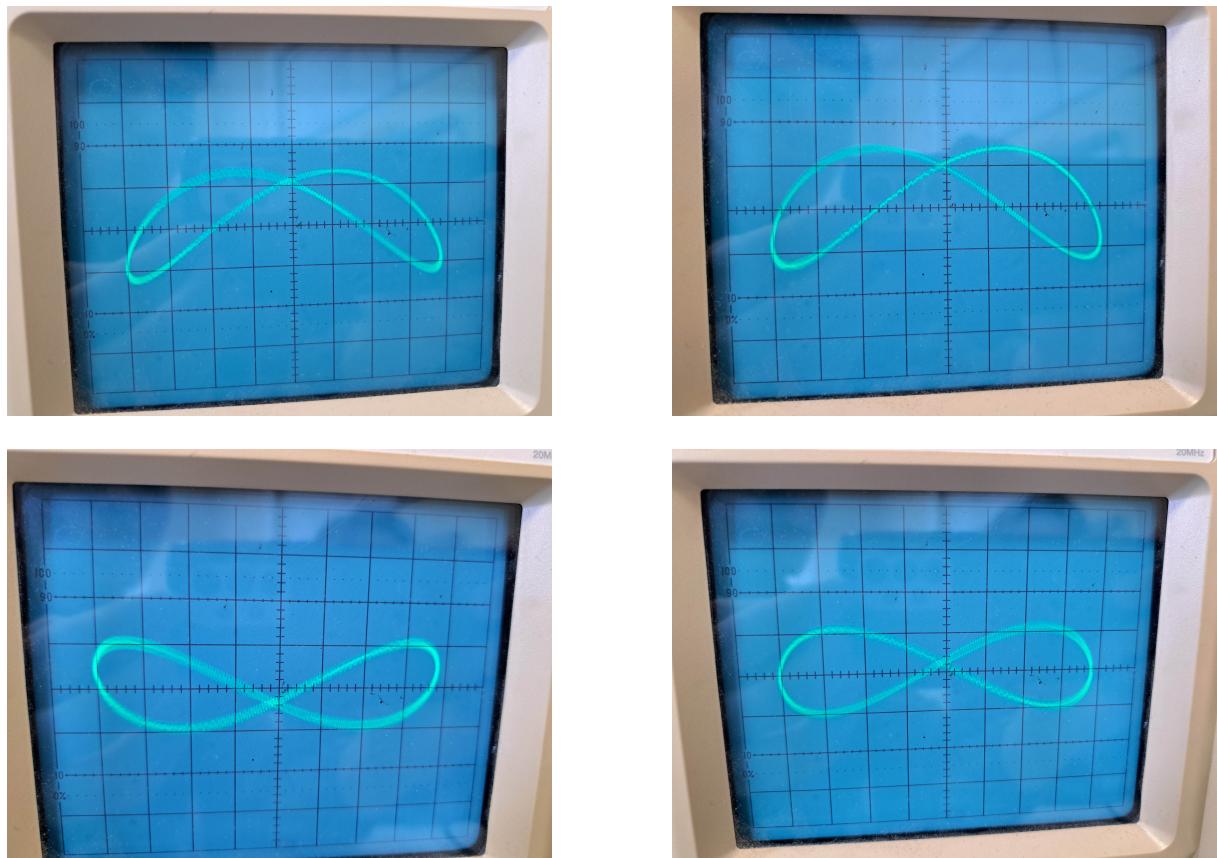


Рис. 3: Фигуры Лиссажу

6. Выводы

Удалось экспериментально проверить теоретические зависимости и посчитать значение ρ_l , которое с точностью 0.4% совпадает с посчитанным другим методом.