复旦大学研究生课程考试试卷

（2022 - 2023 学年第 1 学期）

授课学期：秋季　　考试日期：2022-12-20

课程名称：神经网络的模型与应用　　课程代码：MATH830030

开课院系：数学科学学院　　试卷类型：☑A 卷　☐B 卷

考试形式：☑开卷　☐闭卷　☐课程论文　☐其他

姓名：雷冠杭　　学号：21110180055　　成绩：

（共 6 题，每题 20 分，选 5 题完成）

一、（20 分）对于如下利用 OU 过程描述的 LIF 模型

$$\frac{dV}{dt} = -gV + \mu + \sigma\frac{dW}{dt}$$

这里 W 是一个标准的 Wiener 过程，膜电位达到阈值 V_th 产生动过电位放电，存在复位周期 τ_ref。对此动作电位发放点稳态过程的 Inter-Spike-Interval 的随机变量记为 T，对其给定任意的期望 m 和方差 σ^2，如何构造参数(g,μ,σ),使得 T 的期望和方差分别等于或者近似 m 和 σ^2，并通过数值模拟来验证你的结果。

二、（20 分）对标准的 Hodgkin-Huxley 神经元模型，以输入电流值（常数）作为参数，计算给出其 Hopf 分叉的例子，并通过数值模

拟来验证说明。

三、 （20 分） 多神经元对刺激方向的响应模型如下。假设每个神经元的条件发放率表示如下

$$f_a(s) = \exp\left(-\frac{(s-s_a)^2}{2\sigma_a^2}\right)$$

其中 a=1, …,N 是神经元编号, s 是受到外部刺激的方向角度（[0,180°]），s_a是神经元 a 的偏好方向，$\sigma_a > 0$是神经元调谐函数的参数。假设

- 神经元动作电位发放之间是统计独立的；
- 神经元动作电位发放是一个泊松过程。

假设贝叶斯损失为平方差：

$$loss = (s-\hat{s})^2$$

$\hat{s}$是估计方向角度。

通过这 N 个神经元的动作电位发放时间点, 建立对外部刺激方向 s 的最小方差的无偏(MVUB)估计，并计算其平方误差。

四、 (20 分) 考虑如下兴奋-抑制神经网络模型

$$\tau_E \frac{dv_E}{dt} = -v_E + [M_{EE}v_E - M_{EI}v_I + h_E]^+$$

$$\tau_I \frac{dv_I}{dt} = -v_I + [M_{IE}v_E - M_{II}v_I + h_I]^+$$

$[z]^+ = \max\{z, 0\}$, $v_{E,I}$分别表示兴奋性/抑制性神经元群的发放率, M_{ab}分别是对应链接权重，a,b=E,I, $h_{E,I}$分别是兴奋性/抑制性神经元群接收到的外部刺激。分别给出该系统对应参数τ_I和h_E的 Hopf 分叉分析，并

给以实际数值例子验证。

五、（20 分）利用 Hopfield 神经网络实现一个 TSP 问题的求解，并进行数值验证。

六、（20 分）利用 Reinforcement Learning 算法求解迷宫最短路径搜索问题。迷宫图请见附件(maze.jpg；黄色是出发位置)。

要求：任意给出中点位置，规划出最短路径或者告知不能到达。最好给出交互式的界面

代码: https://github.com/KoonhongLui/21110180055

一、假设神经元的电位过程从V_r出发, 为简单起见, 我们可以将V做一个线性变换$V' := \frac{V-V_r}{V_{th}-V_r}$, V'满足的OU过程是:

$$\frac{dV'}{dt} = -gV' + \frac{\mu - gV_r}{V_{th}-V_r} + \frac{\sigma}{V_{th}-V_r}\frac{dW}{dt}.$$

可将V'视为满足$V'_r = 0, V'_{th} = 1$的动作电位. 因此, 我们先对满足$V'_r = 0, V'_{th} = 1$的动作电位V'构造对应的参数(g', μ', σ'), 再令

$$(g, \mu, \sigma) = (g', (V_{th} - V_r)\mu' + g'V_r, (V_{th} - V_r)\sigma')$$

即可.

下面假设$V_r = 0, V_{th} = 1$, 并且取$g = 1$, 由Siegert公式, T的期望和方差为:

$$m = t_{ref} + 2\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{1-\mu}{\sigma}} \exp(x^2)\int_{-\infty}^{x}\exp(-y^2)dydx,$$
$$var = 8\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{1-\mu}{\sigma}} \exp(x^2)\int_{-\infty}^{x}\exp(y^2)\left[\int_{-\infty}^{y}\exp(-z^2)dz\right]^2 dydx.$$

对于这种含有$\exp(-x^2)$项的积分, 可以通过Gauss-Hermite求积公式近似逼近这个积分式, 从而反解出μ与σ. 事实上通过积分近似我们有

$$m \approx t_{ref} + \ln\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right) - \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{1}{(\mu-1)^2} - \frac{1}{\mu^2}\right),$$
$$var \approx \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{(\mu-1)^2} - \frac{1}{\mu^2}\right).$$

即我们可取

$$\mu = \frac{\exp\left(m + \frac{var}{2} - t_{ref}\right)}{\exp\left(m + \frac{var}{2} - t_{ref}\right) - 1},$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2var}{\left(\frac{1}{(\mu-1)^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)}}.$$

综上, 我们取

$$g = 1$$
$$\mu = (V_{th} - V_r)\frac{\exp\left(m + \frac{var}{2} - t_{ref}\right)}{\exp\left(m + \frac{var}{2} - t_{ref}\right) - 1} + V_r,$$
$$\sigma = (V_{th} - V_r)\sqrt{\frac{2var}{\left(\frac{1}{(\mu-1)^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)}}.$$

在数值模拟中我们对$V_r = 0, V_{th} = 1, t_{ref} = 0$的情况进行了模拟, 对

$$m = (1.0000, 1.2500, 1.5000, 1.7500, 2.0000)$$

及对应的

$$var = (0.0050, 0.0063, 0.0075, 0.0088, 0.0100)$$

五种情况下, 取上面的参数后在$[0, 1000]$的时间区间上模拟神经元的电位过程并计算T的样本期望和方差, 某次模拟中输出为

$$\hat{m} = (0.9976, 1.2450, 1.5015, 1.7431, 1.9948),$$
$$v\hat{a}r = (0.0051, 0.0062, 0.0072, 0.0084, 0.0094),$$

可以看到这个式子的近似效果较好.

二、标准的Hodgkin-Huxley神经元模型是

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{C_M}[I - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_l (V - V_l)] \\
\frac{dm}{dt} &= [\alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V) m]\Phi \\
\frac{dh}{dt} &= [\alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V) h]\Phi \\
\frac{dn}{dt} &= [\alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V) n]\Phi.
\end{aligned}
$$

其中的α和β是以下关于V的函数:

$$
\begin{aligned}
\alpha_m(V) &= 0.1(25.0 - V)/[\exp((25.0 - V)/10.0) - 10] \\
\beta_m(V) &= 4.0 \exp(-V/18.0) \\
\alpha_h(V) &= 0.07 \exp(-V/20.0) \\
\beta_h(V) &= 1.0/[\exp((-V + 30.0)/10.0) + 1.0] \\
\alpha_n(V) &= 0.01(10.0 - V)/[\exp((10.0 - V)/10.0) - 1.0] \\
\beta_n(V) &= 0.125 \exp(-V/80.0)
\end{aligned}
$$

温度$T = 6.3^o C$时我们取以下典型参数:

$$V_{Na} = 115.0\text{mV}, \quad V_k = -12.0\text{mV}, \quad V_l = 10.599\text{mV},$$

$$\bar{g}_{Na} = 120\text{mS/cm}^2, \quad \bar{g}_K = 36.0\text{mS/cm}^2, \quad \bar{g}_l = 0.3\text{mS/cm}^2,$$

$$C_m = 1\mu\text{F/cm}^2, \Phi = 1.$$

假设方程组写为$dX/dt = F(X, I), X = [V, m, h, n]$. 我们先对任意的参数$I$求解系统的奇点$X_0(I) = [V(I), m(I), h(I), n(I)]$. 再求解Jacobi矩阵$D_X F(X_0(I), I)$的特征值并排序为Re $\lambda_1(I) \geq \ldots \geq$Re $\lambda_4(I)$. 我们需要找到I使其满足Hopf分岔判定定理:

(1) Re $\lambda_1(I)$ =Re $\lambda_2(I) = 0$, Re $\lambda_1'(I) \neq 0$,

(2) Im $\lambda_1(I)$, Im $\lambda_2(I) \neq 0$,

(3) Re $\lambda_3(I) < 0$.

可以数值解得两个分叉点$I_1 \approx 9.780\mu\text{A/cm}^2, I_2 \approx 154.527\mu\text{A/cm}^2$.

四、假设连接权重都是非负值, 外部刺激$h_E>0,h_I>0$. 我们只考虑满足$v_E>0,v_I>0$的奇点, 那么在奇点的小邻域上有

$$M_{EE}v_E-M_{EI}v_I+h_E>0,\quad M_{IE}v_E-M_{II}v_I+h_I>0.$$

可以解得奇点为

$$\begin{aligned}v_E&=\frac{(M_{II}+1)h_E-M_{EI}h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}>0\\ v_I&=\frac{M_{IE}h_E-(M_{EE}-1)h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}>0.\end{aligned}$$

现在考虑平移后的系统使原点为奇点, 并只在原点的小邻域上考察系统, 有:

$$\begin{aligned}\frac{dv_E}{dt}=&\frac{1}{\tau_E}\left[(M_{EE}-1)\left(v_E+\frac{(M_{II}+1)h_E-M_{EI}h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}\right)\right.\\ &\left.-M_{EI}\left(v_I+\frac{M_{IE}h_E-(M_{EE}-1)h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}\right)+h_E\right]\\ \frac{dv_I}{dt}=&\frac{1}{\tau_I}\left[M_{IE}\left(v_E+\frac{(M_{II}+1)h_E-M_{EI}h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}\right)\right.\\ &\left.-(M_{II}+1)\left(v_I+\frac{M_{IE}h_E-(M_{EE}-1)h_I}{M_{IE}M_{EI}-M_{II}M_{EE}+M_{II}-M_{EE}+1}\right)+h_I\right]\end{aligned}$$

记为$dV/dt=F(V,\mu)$. 这里μ是要进行Hopf分叉分析的参数. 和第二题的思路一致, 我们求解Jacobi矩阵$D_VF(0,\mu)$的特征值Re $\lambda_1(I)$,Re $\lambda_2(I)$. 我们需要找到μ使其满足Hopf分岔判定定理:

(1) Re $\lambda_1(\mu)$ =Re $\lambda_2(\mu)=0$, Re $\lambda_1'(\mu)\neq 0$,

(2) Im $\lambda_1(\mu)$, Im $\lambda_2(\mu)\neq 0$,

由上式可算得Jacobi矩阵

$$J=\begin{bmatrix}\frac{M_{EE}-1}{\tau_E} & -\frac{M_{EI}}{\tau_E}\\ \frac{M_{IE}}{\tau_I} & -\frac{M_{II}+1}{\tau_I}\end{bmatrix}.$$

取$\mu=\tau_I$, 若μ满足Hopf分岔判定定理, 则有$\tau_I=\frac{M_{II}+1}{M_{EE}-1}\tau_E$. 数值实验中我们取

$$M_{EE}=2,\quad M_{IE}=M_{EI}=M_{II}=3,\quad h_I=h_E=1,\quad \tau_E=1.$$

奇点是$(0.2,0.4)$, 在$\tau_I=4$时发生Hopf分叉. 我们分别画出初值取$([0.1:0.02:0.18],[0.30:0.02:0.38])$共25个, $\tau_I=3.9,4.0,4.1$时的相图. 可见$\tau_I=3.9$时奇点是渐近稳定的, $\tau_I=4.0,4.1$时出现了极限环.

取$\mu=h_E$, 显然它对这个奇点的性质没有影响.

五、给定n个城市和它们的坐标，计算它们的距离矩阵$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 我们用$X_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$表示解矩阵，即$X_i(x,t)=1$表示在迭代到第$i$步时，网络给出的解在旅行的第$t$步处在第$x$个城市. 我们构造的能量函数是

$$J=\frac{\lambda}{2}\sum_{x=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{n}X(x,t)-1\right)^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{x=1}^{n}X(x,t)-1\right)^2+\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}D(x,y)X(x,t)X(y,t+1).$$

这里的λ是用于权衡目标函数和罚函数大小的参数. 令$U_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$表示Hopfield神经网络在第$i$步的状态. 那么Hopfield神经网络的动态方程是

$$\begin{aligned}&dU_i(x,t):=-\lambda\left(\sum_{s=1}^{n}X_i(x,s)-1\right)-\lambda\left(\sum_{y=1}^{n}X_i(y,t)-1\right)-\sum_{y=1}^{n}D(x,y)X_i(y,t+1),\\&U_{i+1}(x,t)=U_i(x,t)+dU_i(x,t).\end{aligned}$$

然后用Sigmoid函数更新X_{i+1}使得解总是落在$[0,1]$上，选择适当的参数μ，我们令

$$X_{i+1}(x,t)=\frac{1}{1+\exp(-\mu U_{i+1}(x,t))}.$$

经过若干次迭代更新后，取解矩阵每一列的最大值的行标，按顺序输出，表示旅行的顺序.

数值验证中我们取$n=7$个城市，$\lambda=100$，$\mu=1$，迭代次数$T=100000$，程序输出了正确的旅行顺序.

六、首先对图像进行手动裁切去掉多余部分, 在Maze2Array程序中对每个方块(8×8的像素块)计算平均灰度值, 构造出迷宫矩阵, 1表示墙, 0表示路, 并输出到Maze文件.

LearnMaze程序对迷宫进行学习, 为了可以对每个终点输出解, 我们对迷宫中所有的点进行训练, 以这些点作为起点, 迷宫入口作为终点进行强化学习. 迷宫中可走的格点共有1535个(不包括入口), 我们以每个点为状态, 上下左右四个方向作为决策, 构造一个1535×4的Q-table. 为了加快学习速度, 我们先遍历每个点并去掉那些会撞墙的决策, 将对应的Q值设为$-\infty$. 在每一个episode的学习中, 我们打乱1535个点的顺序并逐一作为起点开始进行一次迷宫探索. 每一步有ϵ的概率从不撞墙的决策中随机选择一个进行探索, 否则选择Q-table中的最大值对应的决策, 移动到下一个点后赋予此步的奖励R: 到达入口+100, 重复的道路-1000, 非重复道路-1. 按照奖励和下面的式子更新Q-table:

$$Q[State, Action] = Q[State, Action] + \eta(R + \gamma \max_{Action} Q[NextState, :])$$

这里State表示当前的位置, Action表示采取的决策, NextState是决策后移动到的位置, R是此步的奖励, η是学习率, γ是奖励衰减系数. 如果到达入口或走了重复的道路后, 此次探索结束, 否则移动到NextState继续探索. 在若干轮episode后输出Q-table.

最后在WalkMaze程序, 用户输入合法的终点坐标, 程序从终点开始每一步按照Q-table中该位置的最大值选择决策, 直到走到入口或者走到重复路径终止. 如果走到入口则逆序输出路径并进行可视化, 画出从入口到终点的路径. 如果重复路径, 则程序不能从入口走到这个终点.