Subject:
Date

برآورد پارامترها:

- روش گشتاورها: در این روش گشتاورهای نمونه‌ای را مساوی گشتاورهای نظری قرار داده و از حل معادلات حاصل، برآوردهای پارامترهای نامعلوم را به دست می‌آوریم.

- به عنوان مثال $AR(1)$ را در نظر بگیرید. $x_t = \phi x_{t-1} + z_t$

همان طور که قبلاً نشان دادیم:

$$\boxed{\rho_1 = \phi}$$

بنابراین می‌توانیم گشتاورها را به وسیله خودهمبستگی یک نمونه‌ای در تأخیر ۱ یعنی r_1 قرار دهیم.

$$r_1 = \text{خودهمبستگی مرتبه ا برای نمونه} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n} (x_t - \bar{x})^2} \Longrightarrow \boxed{\hat{\rho}_1 = r_1} \quad \boxed{\hat{\phi} = r_1}$$

- حال، $AR(2)$ را در نظر بگیرید، همان طور که قبلاً نشان دادیم، با استفاده از روش Yule-Walker داریم:

$$\rho_1 = \phi_1 + \rho_1 \phi_2 \quad , \quad \rho_2 = \rho_1 \phi_1 + \phi_2$$

از این روابط خواهیم داشت:

$$\phi_1 = \rho_1 (1 - \phi_2) \quad , \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

حال می‌خواهیم با استفاده از برآورد گشتاوری، از یک نمونه، ϕ_1 و ϕ_2 را برآورد کنیم.

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2 = \hat{\sigma}^2 \qquad \text{lag } 0$$

$$\hat{\gamma}(1) = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x}) \qquad \text{lag } 1$$

$$\hat{\gamma}(2) = \frac{1}{n}\sum_{t=3}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-2} - \bar{x}) \qquad \text{lag } (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} \;,\; \hat{\rho}_2 = r_2 = \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\phi}_1 = r_1(1 - \hat{\phi}_2) \;,\; \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - \rho_1^2}}$$

Subject:
Date

• حال فرایند $MA(1)$ را در نظر بگیرید: $x_t = z_t + \theta z_{t-1}$

همان طور که از قبل نشان دادیم: $\gamma(0) = E[x_t^2] = (1+\theta^2)\sigma^2$

$$\gamma(1) = E[x_t x_{t-1}] = \theta\sigma^2$$

$$r_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}(x_t-\bar{x})(x_{t-1}-\bar{x})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2} =$$

• حال فرایند $MA(2)$ را در نظر بگیرید: $x_t = \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + z_t$

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t-\bar{x})(x_{t-k}-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2}$$

از قبل می دانیم: $\gamma_0 = (\theta_1^2+\theta_2^2+1)\sigma^2$ $\quad \gamma_1 = \theta_1(1+\theta_2)\sigma^2$

$$\gamma_2 = \theta_2\sigma^2 \qquad \rho_1 = \frac{\theta_1(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \qquad \rho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

بنابراین قرار می دهیم: $\hat{\rho}_1 = r_1 = \frac{\hat{\theta}_1(1+\hat{\theta}_2)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$, $r_2 = \frac{\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{r_1(1-r_1^2-r_2-r_2^2)}{r_2(1-r_1^2-2r_2-r_2^2)}} , \quad \boxed{\theta_2 = \frac{r_2}{1-r_1^2-2r_2-r_2^2}}$$

PAPCO

Subject:
Date

• حال فرض کنید ARMA(1,1) را در نظر بگیرید. از قبل با استفاده از روابط Yule walker داریم:

$$\gamma_0 = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{(1 - \phi^2)} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2} \right)$$

$$\gamma_1 = \sigma^2 \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 - \phi^2} \quad , \quad \gamma_k = \phi^{k-1} \quad k \geq 1$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}} \quad , \rho_2 = \phi \rho_1 \implies \phi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\implies \boxed{\hat{\phi} = \frac{r_2}{r_1}} \quad , \quad r_1 =$$

$$\implies r_1 = \frac{(\hat{\phi} + \hat{\theta})(1 + \hat{\phi}\hat{\theta})}{1 + 2\hat{\phi}\hat{\theta} + \hat{\theta}^2} \implies r_1 (1 + 2\hat{\phi}\hat{\theta} + \hat{\theta}^2)$$

$$r_1 = \hat{\phi} + (\hat{\phi}^2 + 1)\theta + \hat{\phi}\hat{\theta}^2$$

$$(r_1 - \hat{\phi})\hat{\theta}^2 + \left(2r_1\hat{\phi} - (\hat{\phi}^2 + 1)\right)\hat{\theta} + (r_1 - \hat{\phi}) = 0$$

let $A = r_1 - \hat{\phi}$, $B = 2r_1\hat{\phi} - (\hat{\phi}^2 + 1)$, $C = r_1 - \hat{\phi}$

$$\implies A\hat{\theta}^2 + B\hat{\theta} + C = 0 \implies \text{solve for } \hat{\theta}$$

$$\implies \hat{\theta} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

you get two roots, pick the one with $|\hat{\theta}| < 1$